

K64
О.А. Коновал

Задачі
з класичної та
релятивістської
електродинаміки

О.А. Коновал

Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки

Навчальний посібник для студентів спеціальностей

6.010100 Педагогіка і методика середньої освіти.

Фізика. Освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр

7.01.01.03 Педагогіка і методика середньої освіти.

Фізика та основи інформатики. Освітньо-кваліфікаційний рівень – спеціаліст.

8.01.01.03 Педагогіка і методика середньої освіти.

Фізика, освітньо-кваліфікаційний рівень – магістр,

науково-педагогічний напрям діяльності



м. Кривий Ріг
Видавничий дім
2006

ББК 22.33
К 64
УДК 538.3(075.8)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Є.Я. Глушко
доктор фізико-математичних наук, професор Покутній С.І.

Коновал О.А.

К 64 Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. - 158 с.: іл.

ISBN 966-7997-72-3

В посібнику наведені методичні вказівки до розв'язку задач та індивідуальні завдання для самостійної роботи з курсу "Теоретична фізика", розділ "Класична та релятивістська електродинаміка". По кожній із 11 тем приведені приклади розв'язування типових задач з посиланням на основні рівняння та формули. Зміст і розв'язок більшості задач ілюструють та конкретизують основні положення теорії, причому наголос робиться на якісній та фізичній стороні явища. Зміст задач також перекликається зі шкільним та загальним курсом фізики, що дає можливість більш цілеспрямовано готувати вчителя фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів.

ББК 22.33

Рекомендовано до видання вченою радою Криворізького державного педагогічного університету (Протокол №3 від 12 жовтня 2006 року)

ISBN 966-7997-72-3

© Коновал О.А., 2006

Передмова	4
I. Елементи векторного аналізу	5
II. Закон Кулона. Принцип суперпозиції Теорема Гауса	14
III. Закон Біо-Савара. Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} . Рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$	28
IV. Струми зміщення. Закон збереження заряду	40
V. Закон електромагнітної індукції	52
VI. Вектор Пойнтінга, густина імпульсу та моменту імпульсу електромагнітного поля	58
VII. Електромагнітні потенціали. Рівняння Пуассона. Магнітний момент	64
VIII. Електромагнітні хвилі. Дипольне випромінювання	86
IX. Сили, що діють на провідники, діелектрики і магнетики в електромагнітному полі	95
X. Електромагнітне поле в речовині	106
XI. Релятивістська електродинаміка	129
Додаток А. Основні формули векторного аналізу	140
Додаток Б. Співвідношення між формулами електродинаміки поданими в СІ та системі одиниць Гауса	150
Додаток В. Основні формули електродинаміки в системі Гауса та СІ	153
Додаток Г. Співвідношення між одиницями вимірювання елек- тромагнітних величин в системах Гауса та СІ	155
Додаток Д. Основні фізичні константи	156
Література	158

ПЕРЕДМОВА

Задачі охоплюють основні теми курсу “Електродинаміка та спеціальна теорія відносності” для спеціальності “фізика та основи інформатики”.

Перед кожною темою подається короткий теоретичний вступ та основні формули, які описують відповідне коло електродинамічних явищ.

По кожній темі приведені приклади розв’язування типових задач з посиланням на основні рівняння та формули. З метою оволодіння методами класичної і релятивістської електродинаміки та формування цілісних уявлень про структуру електродинаміки часто пропонується розв’язувати одну і ту ж задачу різними методами.

Зміст і розв’язок більшості задач ілюструють та конкретизують основні положення теорії, причому наголос робиться на якісній та фізичній стороні явища, а адекватний математичний апарат використовується для ознайомлення з методами теоретичної фізики. В основному пропонуються задачі для розв’язання яких необхідні розуміння основних теоретичних положень і принципів, а не складні математичні розрахунки. Так умови багатьох задач характеризуються деякими симетріями, що вимагає фізичного аналізу при розв’язку в більшій мірі ніж математичних розрахунків.

Зміст задач також перекликається з шкільним та загальним курсом фізики. Це дає можливість більш цілеспрямовано готувати учителя фізики.

В збірник входять задачі із 11 тем. Особлива увага приділяється темам та задачам, які пов’язані з безпосереднім використанням та інтерпретацією рівнянь Максвелла в локальній та інтегральній формах. В збірнику використовується система одиниць СІ. Але в Додатках подані основні формули електродинаміки і в системі одиниць Гауса, рекомендації щодо переведення формул із одної до іншої системи одиниць, а також зв’язок між одиницями вимірювання електродинамічних величин в СІ та системі Гауса.

I. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Теорема Гауса $\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_S \vec{a} d\vec{S}$ (I.1)

Теорема Стокса $\int_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S}$ (I.2)

Вираз диференціальних операцій в різних системах координат:

а) декартові координати

градієнт складної функції $\varphi(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (I.3)$$

дивергенція вектора $\vec{a}(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (I.4)$$

ротор довільного векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (I.5)$$

оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (I.6)$$

б) циліндричні координати

складові градієнта скалярної функції $\varphi(r, \psi, z)$:

$$\operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \operatorname{grad}_\psi \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}, \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (I.7)$$

дивергенція вектора $\vec{a}(r, \psi, z)$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (I.8)$$

складові ротора $\vec{a}(r, \psi, z)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial z} \\ \operatorname{rot}_\psi \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \operatorname{rot}_z \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (I.9)$$

оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (I.10)$$

в) сферичні координати

складові градієнта скалярної функції $\varphi(r, \theta, \psi)$:

$$\operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \operatorname{grad}_\theta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \operatorname{grad}_\psi \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \quad (I.11)$$

дивергенція $\vec{a}(r, \theta, \psi)$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} \quad (I.12)$$

складові ротора $\vec{a}(r, \theta, \psi)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\psi - \frac{\partial a_\theta}{\partial \psi}) \right\} \\ \operatorname{rot}_\theta \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\psi) \\ \operatorname{rot}_\psi \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (I.13)$$

оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \quad (I.14)$$

Якщо ввести векторний оператор "набла" ∇ , то диференційні операції градієнта, дивергенції, ротора можна подати таким чином:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$$

(I.15)

$$\operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla \cdot \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

А диференційні операції другого порядку з допомогою оператора “набла” подаються так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla \cdot \nabla \varphi \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} &= [\nabla \cdot [\nabla \cdot \vec{a}]] \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= \nabla \cdot [\nabla \cdot \vec{a}] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Деякі формули векторної алгебри та векторного аналізу:

$$\begin{aligned} [\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \\ \nabla(uv) &= u\nabla v + v\nabla u \\ \nabla(\varphi \cdot \vec{a}) &= \operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \nabla \varphi \\ \operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \vec{a} - [\vec{a} \nabla \varphi] \\ \operatorname{div}[\vec{a}\vec{b}] &= \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Більш детальний перелік формул векторного аналізу та коментарі до них приведені в Додатку А.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. Знайти потік вектора \vec{a} через поверхню нескінченно малого кубика $dV = dx dy dz$, рис. 1.1.

Розв'язання: Очевидно, що сумарний потік вектора \vec{a} через поверхню кубика дорівнює сумі потоків через кожну із шести граней кубика

$$dN = \oint \vec{a} d\vec{S} = dN_1 + dN_2 + dN_3 + dN_4 + dN_5 + dN_6$$

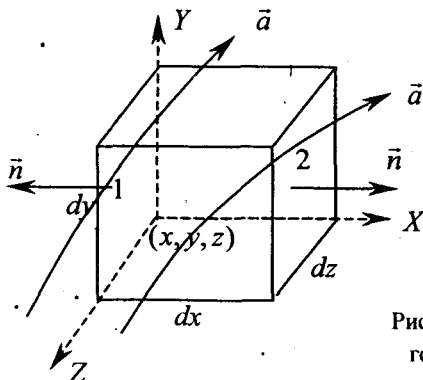


Рис. 1.1. Знаходження потоку векторного поля \vec{a} через грані кубика, об'єм якого дорівнює $dV = dx dy dz$

Так, потоки через грані 1 та 2 дорівнюють відповідно:

$$dN_2 = a_{2x} \cdot dydz = a_{2x}(x + dx, y, z)dydz$$

$$dN_1 = -a_{1x}dydz = -a_{1x}(x, y, z)dydz,$$

де $a_{2x}(x + dx, y, z)$ - іксова компонента вектора \vec{a} в кожній точці грані 2, а $a_{1x}(x, y, z)$ - іксова компонента вектора \vec{a} в кожній точці грані 1.

Тому потік вектора \vec{a} через дві грані, першу та другу, дорівнює:

$$dN_1 + dN_2 = (a_{2x} - a_{1x})dydz,$$

З іншого боку, оскільки різниця $a_{2x} - a_{1x}$ є приріст вектора a_x при зміні координати x на dx , то з точністю до другого порядку цей приріст дорівнює:

$$a_{2x} - a_{1x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot dx, \text{ тому } dN_1 + dN_2 = \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz$$

аналогічно має бути показано, що

$$dN_3 + dN_4 = \frac{\partial a_y}{\partial y} dy dx dz$$

$$dN_5 + dN_6 = \frac{\partial a_z}{\partial z} dz dx dy$$

А отже, для сумарного потоку вектора \vec{a} через всі шість граней кубика одержуємо:

$$dN = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div} \vec{a} \cdot dV \quad (I.18)$$

Узагальнимо цю формулу для поверхні довільної форми і розмірів. Для цього розіб'ємо обмежений замкнутою поверхнею S об'єм V системою взаємно перпендикулярних площин на сукупність малих кубів. Підрахуємо за допомогою одержаної нами формули (I.18) потік довільного вектора \vec{a} через поверхню кожного з кубиків, які знаходяться всередині замкненої поверхні S і додамо. В результаті одержуємо:

$$\sum dN = \sum \text{div} \vec{a} dV \rightarrow \sum dN = \int \text{div} \vec{a} dV$$

Оскільки в сумі $\sum dN$ потік вектора \vec{a} через кожную внутрішню грань кубика входитемо двічі, при чому з протилежним знаком, тому всі доданки в сумі $\sum dN$, які відносяться до внутрішніх граней кубиків скоротяться і залишаться тільки сумарний потік через зовнішню поверхню \hat{S} .

$$\sum dN = \int_S \vec{a} d\vec{S}$$

Тобто, ми обґрунтували теорему Гауса:

$$\sum dN = \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV$$

Приклад 1.2. Знайти циркуляцію вектора \vec{a} по нескінченно малому контуру.

Розв'язання: Нехай контур 1234, рис. 1.2., знаходиться в площині XOY . Тоді, очевидно, що циркуляція вектора \vec{a} по нескінченно малому контуру дорівнює:

$$dC(XOY) = \oint_{XOY} \vec{a} d\vec{l} = a_{1x} dx + a_{2y} dy - a_{3x} dx - a_{4y} dy =$$

$$= \frac{\partial a_y}{\partial x} dx \cdot dy - \frac{\partial a_x}{\partial y} dy \cdot dx = dxdy \cdot \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = dxdy \cdot \text{rot}_z \vec{a},$$

де $a_{2y} - a_{4y} = \frac{\partial a_y}{\partial x} dx$ - приріст ігрекової компоненти вектора \vec{a} при

зміні координати x на dx , $a_{3x} - a_{1x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} dy$ - приріст іксової компонен-

ти вектора \vec{a} при зміні координати y на dy , див. рис. 1.2.

Якщо ж зорієнтувати вектор площадки dS , яка охоплена контуром, вздовж осі OX , $\vec{n} \parallel x$ (тобто контур розмістити в площині YOZ), то для циркуляції вектора \vec{a} одержуємо:

$$dC(YOZ) = \oint_{YOZ} \vec{a} d\vec{l} = dydz \cdot \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) = dydz \cdot \text{rot}_x \vec{a}$$

Якщо ж уявити нескінченно малий контур, який розміщений в площині XOZ , $\vec{n} \uparrow \uparrow y$, то аналогічно одержуємо:

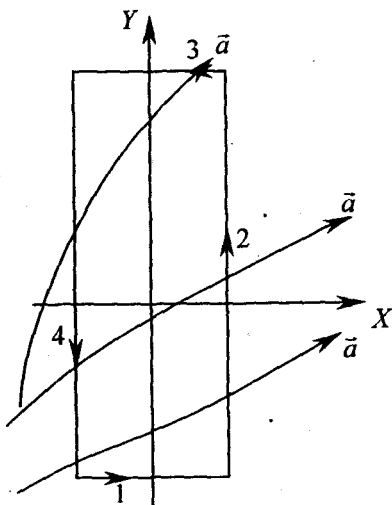


Рис. 1.2. Знаходження циркуляції векторного поля \vec{a} по нескінченно малому контуру, що лежить в площині XOY

$$dC(XOZ) = \oint_{XOZ} \bar{a} d\bar{l} = dx dz \cdot \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} - \frac{\partial a_x}{\partial x} \right) = dx dz \cdot \text{rot}_y \bar{a}$$

Таким чином, при довільній орієнтації нескінченного малого контуру циркуляцію вектора \bar{a} по цьому контуру можна подати тоді так:

$$dC = \oint \bar{a} d\bar{l} = dy dz \cdot \text{rot}_x \bar{a} + dx dz \cdot \text{rot}_y \bar{a} + dx dy \cdot \text{rot}_z \bar{a} = \text{rot} \bar{a} \cdot d\bar{S} = \text{rot}_n \bar{a} \cdot dS,$$

де \bar{n} - додатна нормаль до $d\bar{S}$.

Тобто, циркуляція векторного поля \bar{a} по нескінченному малому контуру, який охоплює площадку $d\bar{S}$, дорівнює скалярному добутку $d\bar{S}$ і $\text{rot} \bar{a}$:

$$dC = \oint \bar{a} d\bar{l} = \text{rot} \bar{a} \cdot d\bar{S} \quad (1.19)$$

н.м.кон.

Приклад 1.3. Обчислити циркуляцію вектора $[\bar{\omega} \cdot \bar{r}]$ по колу радіуса r_0 , розташованому в площині, яка перпендикулярна постійному вектору $\bar{\omega}$. Початок координат знаходиться в центрі кола. Обчислення провести безпосередньо і використовуючи теорему Стокса.

Розв'язання: Вектор $[\bar{\omega} \cdot \bar{r}]_0$, згідно умови задачі, в кожній точці кола направлений по дотичній до цього кола.

Тому

$$\oint_L [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] d\bar{l} = \omega r_0 \int_L dl = 2\pi \omega r_0^2 \quad (1.20)$$

А з допомогою теореми Стокса шукана циркуляція дорівнює:

$$\oint_L [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] d\bar{l} = \int_S \text{rot} [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] \cdot d\bar{S},$$

де S - поверхня, що обмежена контуром L .

Знаходження $\text{rot} [\bar{\omega} \cdot \bar{r}]$ з допомогою (1.5) дає: $\text{rot} [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] = 2\bar{\omega}$. Тому одержуємо:

$$\int_S \text{rot} [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] \cdot d\bar{S} = 2 \int_S \bar{\omega} \cdot d\bar{S} = 2\omega \int_S dS = 2\pi \omega r_0^2, \quad (1.21)$$

що співпадає з (1.20).

Значимо ще раз, що поверхня S в теоремі Стокса може бути будь-якою поверхнею, але тільки щоб вона спиралася на контур L . Припустимо, що в (1.21) ми інтегруємо по деякій поверхні S_1 , яка не співпадає з поверхнею круга радіуса r_0 . Тоді маємо:

$$\int_{S_1} \text{rot} [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] \cdot d\bar{S} = 2 \int_{S_1} \bar{\omega} \cdot d\bar{S} = 2\bar{\omega} \int_{S_1} d\bar{S}$$

Уявимо собі замкнену поверхню, яка складається із S_1 та поверхні круга S : $S' = S_1 + S$. Очевидно, що $\int_{S'} d\bar{S} = 0$ але тоді

$$\int_{S'} d\bar{S} = \int_{S_1} d\bar{S} + \int_S d\bar{S} = 0.$$

Але оскільки $\int_S d\vec{S} = \pi_0^2$, то $\int_{S_1} d\vec{S} = -\vec{n}\pi_0^2$, де \vec{n} - одиничний орт, перпендикулярний площині круга, і ми врахували, що в інтегралі $\int_S d\vec{S} = 0$ елемент поверхні $d\vec{S}$, як завжди, направлений по зовнішній нормалі. Тому інтегрування по довільній поверхні S_1 дає той же результат.

Завдання для самостійної роботи

1. Впевнитися в тому, що мають місце такі тотожності:
 $\text{rot}\nabla\varphi = 0, \text{div}\text{rot}\vec{a} = 0, \text{rot}\text{rot}\vec{a} = \nabla\text{div}\vec{a} - \nabla^2\vec{a}$.
2. Обчислити вирази: $\text{grad}\varphi(r), \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right), \nabla\left(\frac{1}{r}\right), \nabla r$.
3. Показати, що вектор $\nabla\varphi$ перпендикулярний до поверхні $\varphi = \text{const}$.
4. Обчислити $\text{div}\vec{r}, \text{div}\frac{\vec{r}}{r}, \text{rot}[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, де $\vec{\omega}$ - постійний вектор, \vec{r} - радіус-вектор.
5. Точковий заряд розташований в центрі куба. Безпосереднім обчисленням знайти величину потоку $\int \vec{E}d\vec{S}$ по одній грані куба.
6. Заряджена частинка (ЗЧ) знаходиться в одному з кутів куба. Чому дорівнює величина $\int \vec{E}d\vec{S}$ через кожну грань, якщо величина заряду q ?
7. Впевнитися, що повна (субстанціональна) похідна по часу векторної величини \vec{a} визначається формулою:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{a}$$

8. Обґрунтувати формули:

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{a}\vec{b}] &= \vec{b} \cdot \text{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot}\vec{b} \\ \text{div}\vec{a}(u) &= (\nabla\vec{a}(u)) = \left(\frac{d\vec{a}}{du}\nabla u\right) = (\dot{\vec{a}} \cdot \text{grad}u) \\ \text{rot}\vec{a}(u) &= \left[\nabla u \frac{d\vec{a}}{du}\right] = [\text{grad}u, \dot{\vec{a}}] \end{aligned}$$

9. Заряджена частинка (ЗЧ) знаходиться посередині висоти h конуса, рис. I.3. Знайти величину потоку $\int \vec{E}d\vec{S}$ через бічну поверхню та основу конуса.

10. Знайти потік вектора напруженості електричного поля через основи та бічну поверхню циліндрів, зображених на рисунках Рис. I.4а., та Рис. I.4б.

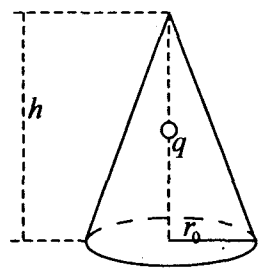


Рис. 1.3. Заряджена частинка знаходиться посередині висоти h конуса

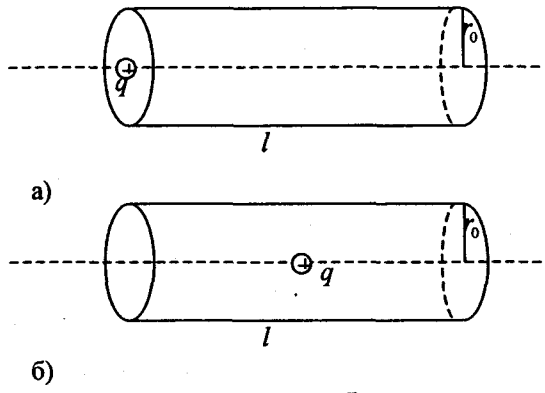


Рис. 1.4. До знаходження потоків вектора \vec{E} через поверхню циліндрів

11. Впевнитися, що потік вектора \vec{E} через поверхню сферичного сегменту S_2 та через плоску поверхню S_1 основи циліндра, які спираються на один і той же контур L , див. рис. 1.5., однакові.

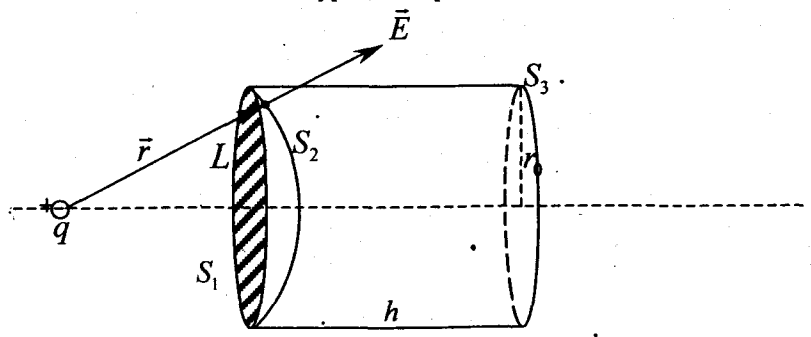


Рис. 1.5.

12. Довести безпосереднім розрахунком, що потік вектора \vec{E} через поверхню циліндра, рис. 1.5., дорівнює нулеві.

13. Обчислити потік радіус-вектора через поверхню круглого циліндра, безпосередньо та використовуючи теорему Гауса.

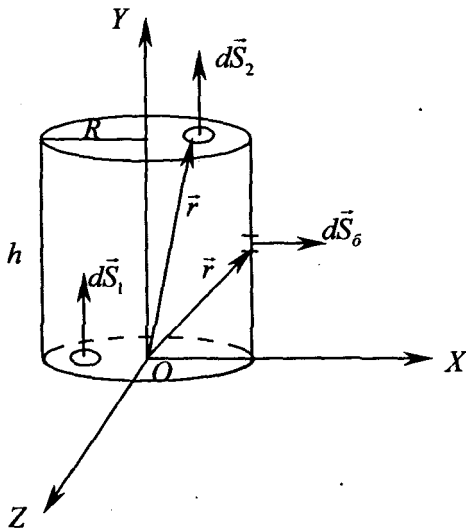


Рис. 1.6. До задачі 1.13.

II. ЗАКОН КУЛОНА. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ ТЕОРЕМА ГАУСА

Напруженість електричного поля, що створюється точковою ЗЧ в вакуумі (закон Кулона) визначається формулою:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (\text{II.1})$$

де q - величина заряду ЗЧ, \vec{r} - радіус-вектор, проведений від ЗЧ в дану точку поля, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ - електрична стала.

Згідно принципу суперпозиції та закону Кулона напруженість електричного поля, яке створюється неперервним розподілом зарядів визначається:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\tau(\vec{r}')\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} dl' + \int \frac{\sigma(\vec{r}')\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} ds' + \int \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} dV', \quad (\text{II.2})$$

де $\tau, \sigma, \rho(r')$ - відповідно лінійна, поверхнева та об'ємна густина зарядів, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, радіус-вектор, проведений від елементарного заряду $\rho(\vec{r}')dV'$ в дану точку поля P , див. рис. II.1.

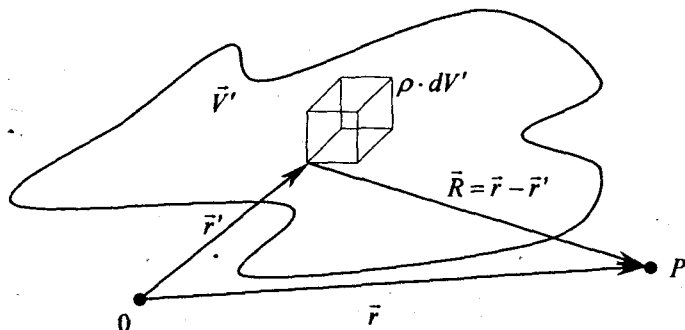


Рис. II.1. Напруженість електричного поля в точці P визначається суперпозицією полів, які створюються елементарними зарядами $\rho(\vec{r}')dV'$

З допомогою електростатичної теореми Гауса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{II.3})$$

можна знаходити напруженість електричного поля симетрично розподілених зарядів.

Методика застосування теореми Гауса для знаходження напруженості електричного поля, що створюється симетрично розподіленими зарядами.

1. Виходячи з симетрії задачі треба вибрати замкнену поверхню.
2. Знайти потік вектора \vec{E} через цю поверхню.
3. Знайти величину заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.
4. Розв'язати відповідне алгебраїчне рівняння і знайти значення напруженості електричного поля.

Приклади розв'язування задач

Приклад II.1. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса r_0 . Користуючись рівнянням Максвелла (II.3) знайти напруженість електричного поля в будь-якій точці простору.

Розв'язання. Із симетрії задачі випливає, що поле буде центрально-симетричним, а тому замкнену поверхню S треба взяти у вигляді концентричної сфери радіуса r .

Розглянемо спочатку випадок, коли $r < r_0$. Тоді, використовуючи теорему Гауса, маємо:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Величина заряду, що знаходиться всередині сфери радіуса r , дорівнює:

$$q = \int \rho dV = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \int dV = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Тому, теорема Гауса дає

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Звідси одержуємо:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r$$

б) При $r > r_0$: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, а величина заряду, який зна-

ходиться всередині сфери радіуса r ($r > r_0$), дорівнює повному заряду кулі q .

Тому, напруженість електричного поля в просторі поза межами кулі обернено пропорційна віддалі від центру кулі:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Залежність $E(r)$ зображена на рис. П.2.

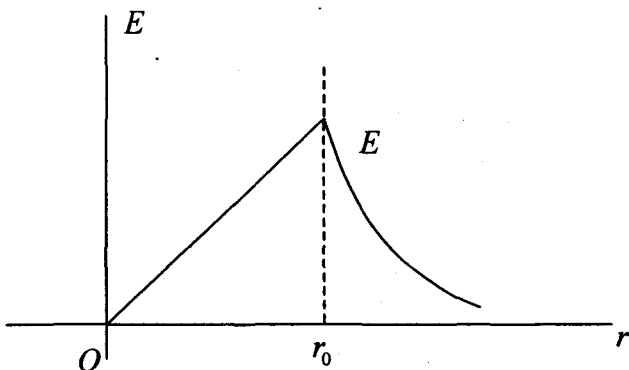


Рис. П.2. Залежність $E(r)$

Приклад П.2. Впевнитися, що теорема Гауса (П.3) справедлива і для напруженості електричного поля рівномірно та прямолінійно рухомої зарядженої частинки.

Розв'язання: Як відомо [5, 10], (див. також розділ XII цього збірника) напруженість електричного поля рівномірно та прямолінійно рухомої ЗЧ визначається:

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = \frac{q \cdot \vec{r} \cdot (1 - \beta^2)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3 \cdot (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

тому потік вектора \vec{E} через сферичну поверхню в ту мить, коли ЗЧ знаходиться в центрі цієї сфери, дорівнює:

$$N = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E r^2 d\Omega = \oint E r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{q(1 - \beta^2)}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

Оскільки $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, а $\sin \theta \cdot d\theta = -d \cos \theta$, то вводячи нову змінну $x = \cos \theta$ інтеграл в попередньому виразі дорівнює:

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1 - \beta^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}} = \frac{2}{\beta^3} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \right]_0^1 = \frac{2}{1 - \beta^2},$$

де $a^2 = (1 - \beta^2) / \beta^2$

Таким чином, ми одержали, що сумарний потік вектора \vec{E} , який породжується рівномірно рухомою ЗЧ дорівнює $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Тобто, якщо величину заряду в деякому об'ємі визначати з допомогою теореми Гауса, то цей результат означає, що величина заряду інваріантна величина.

Приклад II.3. Знайти напруженість електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженою ниткою. Довжина нитки l , лінійна густина заряду τ .

Розв'язання: Використаємо закон Кулона та принцип суперпозиції. Виділимо на нитці нескінченний малий відрізок dy . Тоді компоненти напруженості поля в довільній точці P , рис. II.3. дорівнюють:

$$dE_x = \frac{\tau dy \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)} = \frac{d\tau \cdot dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = \frac{\tau dy \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)} = \frac{\tau y \cdot dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}},$$

звідси

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{y dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}$$

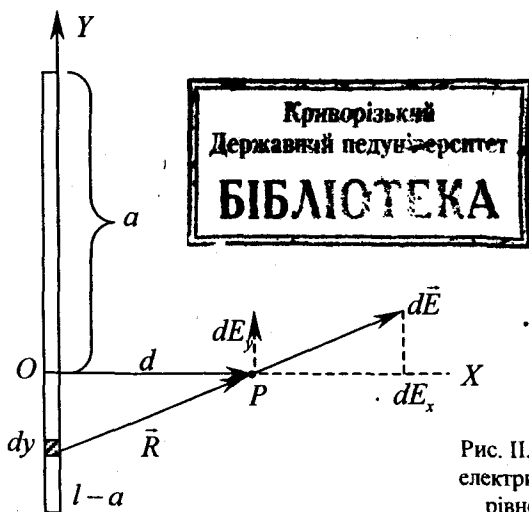


Рис. II.3. Визначення напруженості електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженою ниткою

В результаті інтегрування одержуємо:

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{d^2 \sqrt{d^2 + y^2}} \Big|_{-(l-a)}^a = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{d^2 + (l-a)^2}} \right)$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{l}{\sqrt{d^2 + y^2}} \right) \Big|_{-(l-a)}^a = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} \left(-\frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} + \frac{d}{\sqrt{d^2 + (l-a)^2}} \right)$$

Або, якщо ввести кути α_1 , та α_2 , $\sin \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}}$,

$$\sin \alpha_2 = \frac{l-a}{\sqrt{d^2 + (l-a)^2}}, \text{ то}$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1)$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Якщо нитка нескінченно довга, то $E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 d}$, а $E_y = 0$.

Приклад II.4. Виходячи із закону Кулона і принципу суперпозиції знайти напруженість електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженою по поверхні сферою та циліндром. Поверхнева густина заряду σ , радіус сфери та циліндра a .

Розв'язання: Напруженість поля, яке створюється елементом поверхні dS , вибраної у вигляді сферичного кілця

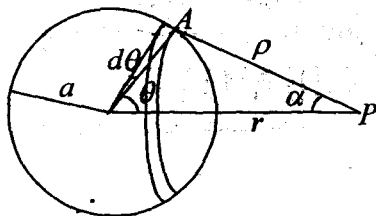


Рис. II.4. Знаходження напруженості електричного поля рівномірно зарядженої сфери

$$dE = \cos \alpha \cdot \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} = \cos \alpha \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \rho^2 \cdot 4\pi a^2} \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a \cdot d\theta,$$

де $\cos \alpha = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho}$, $b = a \sin \theta$, $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$.

Тоді, сумарне поле згідно принципу суперпозиції дорівнює:

$$E = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{\rho^2} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta}}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta \cdot d\theta =$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{1}{|r-a|} - \frac{1}{r+a} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{|r-a|} + \frac{1}{r+a} \right) + \frac{1}{ar^2} (r+a - |r-a|) \right\}$$

Таким чином, при $r > a$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а при $r < a$

$$E = 0$$

Знайдемо тепер поле, що створюється зарядженою циліндричною поверхнею.

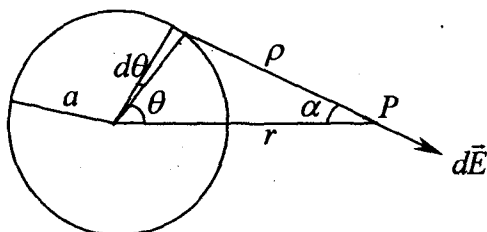


Рис. II.5. Знаходження напруженості електричного поля рівномірно зарядженої циліндричної поверхні

Елементарному куту $d\theta$, рис. II.5., відповідає нескінчена довга та вузька полоска зарядженої циліндричної поверхні. Поле, яке вона створює в точці P визначається таким співвідношенням:

$$dE = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \rho} \cdot \tau_{||} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 \rho} \cdot \frac{ad\theta \cdot \tau}{2a}$$

де $\tau_{||}$ - лінійна густина заряду полоски, $\tau = 2\pi a \cdot \sigma$ - лінійна густина заряду циліндру.

Тоді, результуюче поле направлено вздовж радіусу циліндра, а величина його

$$E = \frac{\tau}{4\pi^2 \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha \cdot d\theta}{\rho},$$

$$\text{де } \cos \alpha = \frac{r - a \cos \theta}{r}, \quad \rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}.$$

$$E = \frac{\tau}{4\pi^2 \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(r - a \cos \theta) \cdot d\theta}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} = \frac{\tau}{4\pi \epsilon_0 \cdot r} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{|r^2 - a^2|} \right)$$

Проаналізуємо одержаний результат.

Поза межами циліндру, ($r > a$)

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 r}$$

А всередині циліндру ($r < a$)

$$E = 0$$

Приклад II.5. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} в області перетину двох куль, рівномірно заряджених протилежними за знаком зарядами з об'ємною густиною ρ і $-\rho$, якщо відстань між центрами куль визначається вектором \vec{l} .

Розв'язання: Електричне поле в області перетину куль слід розглядати як суперпозицію електричних полів, які створюються в певній точці P в області перетину куль позитивно та негативно зарядженими кулями (рис. II.6).

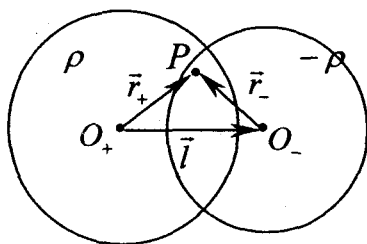


Рис. II.6.

Напруженість електричного поля *всередині* рівномірно заряджених куль

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0},$$

де \vec{r} - радіус-вектор, проведений із центру кулі в дану точку поля.

Таким чином, в деякій точці P такої області напруженість електричного поля дорівнює:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}$$

Тобто, поле в такій області являється однорідним. Крім того, цей висновок справедливий незалежно від радіусів куль та віддалі між їх центрами, і зокрема, і тоді, коли одна із куль знаходиться всередині іншої, рис. II.7.

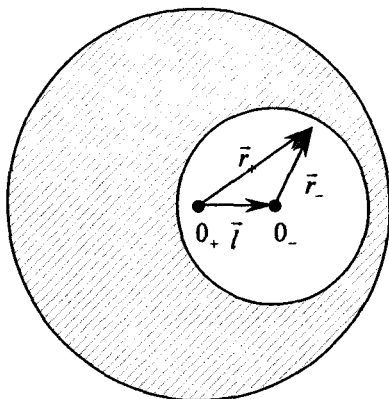


Рис. II.7.

Приклад II.6. Показати, електричне поле в області перетину двох куль однакового радіусу (див. **Приклад II.5.**), якщо вектор зміщення центрів куль $\vec{l} = \Delta\vec{r} \ll$ радіусу кулі a , співпадає з полем, що утворюється всередині кулі зарядом розподіленим з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. σ_0 - постійна, θ - полярний кут.

Розв'язання: Розглядаємо дві кулі радіусу a рівномірно заряджені по об'єму однаковими за модулями, але протилежними за знаками зарядами. Якщо центри куль змістити на $\vec{l} = \Delta\vec{r}$, то, згідно розв'язку попереднього прикладу, напруженість електричного поля в області перетину двох куль

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}, \quad \rho l = 3\epsilon_0 E$$

Якщо $\vec{l} = \Delta\vec{r} \ll a$, то заряд не рівний нулю буде розташований тільки в поверхневих шарах серповидної форми, рис. II.8. Максимальна товщина їх дорівнює $\vec{l} = \Delta\vec{r}$ і може бути зробленою нескінченною малою. Таким чином, при $\vec{l} = \Delta\vec{r} \ll a$ ми приходимо до уявлення про поверхневу густину заряду в цих серповидних областях. Товщина зарядженого серповидного тоненького шару, очевидно, залежить від полярного кута θ , і дорівнює $l \cos \theta$.

Якщо на поверхні серповидного шару вибрати елемент поверхні dS , то величина заряду на цьому елементі може бути подана так:

$$\sigma \cdot dS = \rho \cdot dS \cdot l \cos \theta$$

Тобто, поверхнева густина заряду областях утворення полярних «шапок», які зображені на рис. II.8., дорівнює:

$$\sigma = \rho l \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta = 3\epsilon_0 E \cos \theta$$

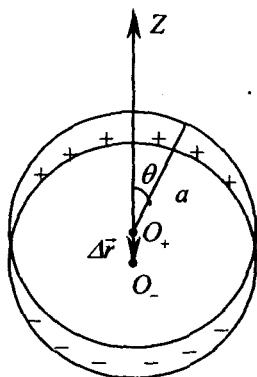


Рис. II.8. Знаходження напруженості електричного поля в області перетину двох однакових куль при умові $\vec{l} = \Delta \vec{r} \ll a$

Таким чином, можна стверджувати, що поверхневий розподіл заряду $\sigma = \rho l \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$ створює всередині кулі довільного радіуса поле, що визначається формулою:

$$\vec{E} = -\frac{\rho l \vec{k}}{3\epsilon_0} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{k},$$

де \vec{k} - одиничний орт осі OZ , від якої відраховується кут θ .

Приклад II.7. Металева куля радіуса R знаходиться в однорідному електричному полі E_0 . Знайти електричне поле поза межами кулі. Чому дорівнює дипольний момент кулі? Як розподілений по поверхні кулі індукований заряд?

Розв'язання: Виходячи із симетрії задачі введемо сферичну систему координат з початком в центрі кулі, рис. II.9. Тоді потенціал в довільній точці простору поза кулею дорівнює:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$$

де φ_0 - потенціал зовнішнього поля ($\varphi_0 = -E_0 x + C$), а φ_1 - зміна потенціалу, викликана індукованими зарядами на поверхні кулі. Таким чином, можна записати

$$\varphi = -E_0 x + \varphi_1 + C$$

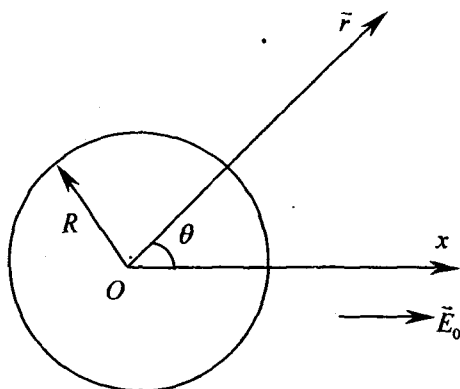


Рис. П.9. До визначення потенціалу поля металеві кулі, що знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі E_0

Потенціал φ_1 повинен визначатися так, щоб він задовольняв таким умовам:

1) φ_1 є розв'язком рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi_1 = 0$;

2) $\varphi_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ що рівносильне вимозі:

$$\varphi \rightarrow (-E_0 x + C) \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

іншими словами, на великих відстанях від кулі зовнішнє поле практично залишається незбуреним.

3) $\varphi_1 = E_0 x$ при $r = R$ ця умова означає, що потенціал $\varphi = -E_0 x + \varphi_1 + C$ є постійним на поверхні кулі.

Оскільки φ_1 пропорційний густині заряду індукованого на поверхні кулі, а, очевидно, $\sigma \sim E_0$, то із-за симетрії задачі впливає, що потенціал φ_1 може залежати тільки від одного постійного вектору \vec{E}_0 . Крім того, потенціал φ_1 у всіх точках сфери, яка проходить через точку поля і яка концентрична поверхні кулі, однаковий.

Може бути показано, що єдиним таким розв'язком рівняння Лапласа, який прямує до нуля $\varphi_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ являється

$$\varphi_1 = -\alpha E_0 \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \alpha \frac{\vec{E}_0 \vec{r}}{r^3},$$

де α - деяка константа.

З іншого боку перерозподіл електронів металеві кулі в полі \vec{E}_0 приводить до виникнення дипольного моменту перерозподілених зарядів кулі. Але потенціал, що створюється диполем (див. Приклад VII.9.) дорівнює

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Тобто, можна стверджувати, що дипольний момент металевої кулі, яка знаходиться в полі \vec{E}_0 дорівнює:

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \alpha \vec{E}_0$$

На основі третьої граничної умови маємо:

$$\frac{\alpha E_0}{R^2} \cos \theta = E_0 R \cos \theta$$

Звідси $\alpha = R^3$, для дипольного моменту отримуємо

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

Тоді вираз для потенціалу $\varphi = -E_0 x + \varphi_1 + C$ з урахуванням попереднього набуває вигляду

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) + C$$

А розподіл зарядів визначається

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (\text{II.}^*)$$

Але повний заряд дорівнює нулеві:

$$q = \int \sigma dS = 0$$

А напруженість електричного поля біля поверхні металевої кулі:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 3E_0 \cos \theta$$

Видно, що величина напруженості поля змінюється від нуля до $3E_0$. Звичайно, в будь-якій точці кулі вектор \vec{E} направлений по нормалі до поверхні.

Раніше ми показали, (Приклад II.6.) що такий розподіл зарядів, (II.*), може бути зумовленим зсунутими зарядженими різними за знаком заряду сферами однакового радіусу.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити напруженість електричного поля \vec{E} , що утворюється рівномірно зарядженим колом радіуса r_0 на його осі.
2. Знайти напруженість електричного поля, що утворюється:
 - рівномірно зарядженим відрізком нитки довжиною L ;
 - рівномірно зарядженою нескінченною ниткою;
 - рівномірно зарядженою нескінченною площиною. Чому дорівнює скачок напруженості при переході через заряджену поверхню? Знайти поле зарядженого плоского конденсатора.

3. Користуючись принципом суперпозиції знайти поле:

- рівномірно зарядженої нескінченної циліндричної поверхні;
- рівномірно зарядженої сферичної поверхні;
- рівномірно зарядженої по об'єму кулі;

4. Знайти напруженість поля, що утворюється рівномірно зарядженим диском на осі диска. Заряд диску q , радіус його r_0 . Розглянути граничні випадки. (Вказівка: скористатися розв'язком задачі П.1. та принципом суперпозиції, див. рис. П.6.

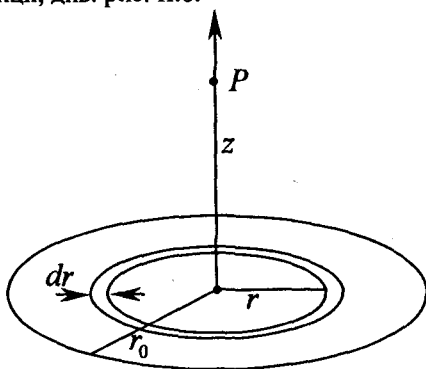


Рис. П.6. До задачі П.4.

5. Диск має поверхневий заряд з густиною $\sigma = \alpha r^2$, де r – відстань від центра диска, α – деяка константа. Знайти напруженість поля \vec{E} на осі диска.

6. Рівномірно заряджена проволочка довжиною l має форму дуги кола радіуса r_0 . Знайти напруженість електричного поля \vec{E} , в центрі кола.

7. Заряд q рівномірно розподілений по поверхні сферичного сегменту радіусом R , який видно з центру кривизни під кутом 2α . Знайти напруженість поля в центрі кривизни сегменту.

8: Точка P знаходиться на віддалі a від рівномірно зарядженої нескінченної площини. Довести, що половина повної напруженості поля в т. P зумовлена зарядами, які знаходяться на віддалі $a \leq r \leq 2a$ від т. P , а друга половина всіма останніми зарядами.

9. Всередині кулі радіуса r_0 розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = \alpha r^2$. Знайти напруженість поля \vec{E} .

10. Тонке плоске кільце, внутрішній і зовнішній радіуси якого a і b , відповідно заряджене негативно з густиною $\sigma = \sigma_0 r^2$. Визначити поле на вісі кільця.

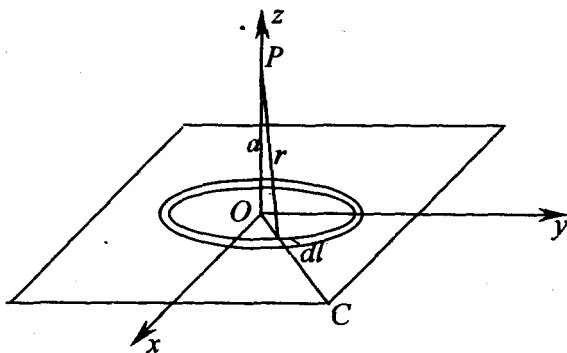


Рис. П.7. До задачі П.8.

11. Знайти потенціал поля та напруженість електричного поля \vec{E} , що створюється зарядженим диском в будь-якій точці, що лежить в площині диску.

12. Кільце радіуса r_0 заряджене з лінійною густиною $\tau = \tau_0 \cos \psi$, де $\tau_0 = \text{const}$, ψ - азимутальний кут. Знайти напруженість поля на вісі кільця. Дослідити розв'язок.

13. Нескінчена пластина товщиною $2a$ рівномірно заряджена з об'ємною густиною заряду ρ . Знайти напруженість поля всередині і зовні пластини.

14. Нескінченно довгий циліндр кругового перерізу заряджений рівномірно з поверхневою густиною σ . На осі циліндра розташована нескінченно довга нитка, рівномірно заряджена з лінійною густиною τ . При якій умові поле поза циліндром дорівнює 0.

15. Визначити поле, що створене рівномірно зарядженим по об'єму круглим циліндром радіуса r_0 . Об'ємна густина заряду ρ .

16. Система складається з рівномірно зарядженої сфери радіуса a , і навколишнього середовища з об'ємною густиною заряду $\rho = \frac{\alpha}{r}$, де α - постійна, r - відстань від центру сфери. Знайти заряд сфери, при якому напруженість \vec{E} поза сферою не буде залежати від r . Чому при цьому дорівнює напруженість поля \vec{E} .

17. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} в області перетину двох куль, рівномірно заряджених протилежними за знаками зарядами з об'ємною густиною ρ і $-\rho$, якщо відстань між центрами куль визначається вектором \vec{l} .

18. Нескінчена циліндрична поверхня рівномірно заряджена по довжині з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos \psi$, де ψ – полярний кут циліндричної СК, вісь якої співпадає з віссю даної поверхні. Знайти напруженість електричного поля на осі Z .

19. Всередині нескінченного рівномірно зарядженого по об'єму циліндра радіуса a , є нескінчена циліндрична порожнина радіуса b , причому її вісь знаходиться на відстані h від осі циліндра. Знайти поле всередині порожнини.

20. В середині рівномірно зарядженої по об'єму (густина заряду ρ) нескінченної плоско паралельної пластини товщиною $2a$ знаходиться циліндрична нескінчена довга порожнина радіуса r_0 , причому її вісь паралельна площинам пластин і знаходиться на відстані h від однієї з них. Визначити напруженість поля всередині порожнини.

21. В середині рівномірно зарядженої по об'єму (густина заряду ρ) нескінченної плоско паралельної пластини товщиною $2a$ знаходиться сферична порожнина радіуса r_0 , центр якої розташований на відстані h від однієї з площин пластини. Знайти напруженість поля всередині порожнини.

22. Поверхнева густина заряду на сфері $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, де θ – полярний кут. Впевнитися, що такий розподіл заряду можна подати як результат малого зсуву однієї відносно другої двох рівномірно заряджених куль радіусу r_0 , заряди яких однакові за модулем, але протилежні по знаку. Користуючись таким уявленням, знайти поле всередині даної кулі.

III. ЗАКОН БІО-САВАРА. ТЕОРЕМА ПРО ЦИРКУЛЯЦІЮ ВЕКТОРА \vec{B} . РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Магнітне поле $d\vec{B}$, що створюється елементом лінійного струму $i d\vec{l}$ визначається законом Біо-Савара:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}], \quad (\text{III.1})$$

де \vec{r} - радіус-вектор, проведений від елемента струму $i d\vec{l}$ в дану точку поля.

Якщо розподіл струмів в просторі задається густиною струму $\vec{j}(\vec{r}')$, то індукція магнітного поля в довільній точці простору визначається законом Біо-Савара для об'ємно розподілених струмів:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \vec{R}]}{R^3} dV', \quad (\text{III.2})$$

де \vec{r} - радіус-вектор, що визначає точку поля P , \vec{r}' - радіус-вектор, що визначає положення елемента струму, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ - радіус-вектор, проведений від елемента струму $\vec{j}(\vec{r}') dV'$ в дану точку поля P , див. рис. III.1.

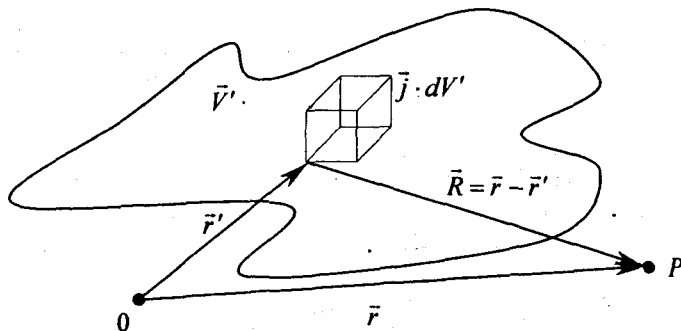


Рис. III.1. Пояснення змісту величин, що входять до закону (III.2)

Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i \quad (\text{III.3})$$

Теорема про циркуляцію використовується для знаходження магнітних полів, що створюються симетричними розподілами струмів.

Методика використання теореми про циркуляцію вектора \vec{B} для знаходження індукції магнітного поля.

1. Виходячи з симетрії задачі, вибираємо форму і розташування контуру L .

2. Находимо циркуляцію вектора \vec{B} : $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$

3. Знаходимо алгебраїчну силу струму i , що проходить через поверхню, обмежену цим контуром.

4. Розв'язуємо відповідне алгебраїчне рівняння.

Локальна форма закону (III.3) має вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{III.4})$$

Приклади розв'язування задач.

Приклад III.1. По довгому циліндричному провіднику, радіус поперечного перерізу якого r_0 , протікає рівномірно розподілений струм i . Знайти магнітне поле в будь-якій точці простору.

Розв'язання: Виходячи з симетрії задачі контур L , вздовж якого будемо знаходити циркуляцію $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$, виберемо у формі концентричного кола радіуса r , яке лежить в горизонтальній площині (провідник з струмом i розташований в вертикальній площині).

Якщо $r \leq r_0$, то теорема (III.3) дає:

$$\oint_{2\pi r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{2\pi r} dl = B \cdot 2\pi r$$

А сила струму, що протікає через площу круга обмеженого колом радіуса r , дорівнює:

$$i = j \cdot \pi r^2 = \frac{i}{\pi r_0^2} \cdot \pi r^2$$

$$\text{Тому } B \cdot 2\pi r = \frac{i}{\pi r_0^2} \cdot \pi r^2 \cdot \mu_0$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r_0^2} \cdot r,$$

Таким чином, при $r \leq r_0$ величина індукції магнітного поля пропорційна r .

Якщо $r \geq r_0$, то з допомогою (III.3) одержуємо:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = i \mu_0$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Тобто, величина індукції магнітного поля B поза межами циліндричного провідника пропорційна $\frac{1}{r}$.

Одержаний результат можна зобразити на рис. III.2.

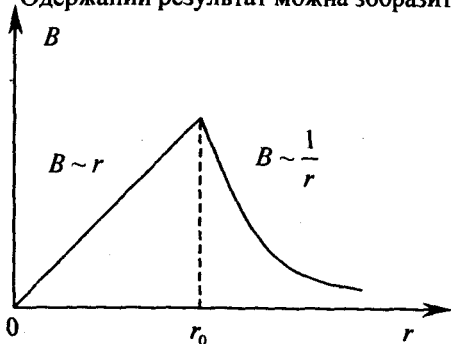


Рис. III.2. Залежність $B(r)$

Приклад III.2. Знайти магнітне поле (і виразити через магнітний момент \vec{p}_m), що утворюється кільцевим струмом i на осі його. Обчислити $\int \vec{H} d\vec{l}$ вздовж осі.

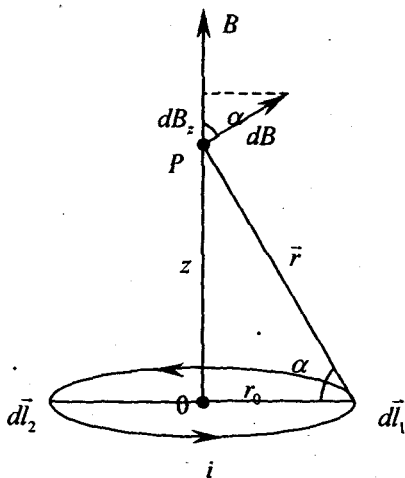


Рис. III.3. Магнітне поле кільцевого струму

Розв'язання: Векторна сума $d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$ індукцій магнітних полів, які створюються в точці P діаметрально протилежними елементами струмів $i d\vec{l}_1$ та $i d\vec{l}_2$ направлена по осі OZ . Тому і результуючий вектор \vec{B} колового струму, очевидно, направлений по осі OZ . А величина його дорівнює:

$$B = \int dB_z,$$

де $dB_z = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 \cdot idl \cdot \cos \alpha}{4\pi r^2}$. Враховуючи, що $\cos \alpha = \frac{r_0}{r}$, а $r^2 = z^2 + r_0^2$, після інтегрування одержуємо:

$$B = \frac{\mu_0 2\pi r_0^2 \cdot i}{4\pi (z^2 + r_0^2)^{3/2}}$$

Магнітний момент, згідно означення, дорівнює:

$$\vec{p}_m = iS\vec{n}, \quad p_m = iS = i \cdot \pi r_0^2$$

Тому індукція магнітного поля на осі кільцевого струму, як функція магнітного моменту, визначається

$$B = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi (z^2 + r_0^2)^{3/2}}$$

Якщо $r_0 \ll z$, то

$$B = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi \cdot z^3}$$

Остання формула являється наслідком більш загального способу знаходження індукції МП, яке створюється магнітним моментом:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right\},$$

де $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{p}_m \vec{r}]$ - векторний потенціал елементарного струму, магнітний момент якого \vec{p}_m , \vec{r} - радіус-вектор, проведений від «центру» елементарного струму (від магнітного моменту) в дану точку поля.

Знайдемо тепер циркуляцію вектора \vec{H} вздовж осі кільцевого струму.

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi r_0^2 \cdot i}{4\pi (z^2 + r_0^2)^{3/2}} dz = \frac{r_0^2 i}{2} \cdot \frac{z}{r_0^2 \sqrt{z^2 + r_0^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = i$$

Приклад III.3. Використовуючи закон Біо-Савара, знайти магнітне поле, що утворюється прямолінійним струмом:

- довжини l ;
- нескінченної довжини.

Розв'язання: Виберемо вісь OY вздовж провідника з постійним струмом, рис. III.4. Тоді елемент струму $id\vec{y}$ породжує, згідно закону Біо-Савара, МП в точці P , вектор $d\vec{B}$ якого перпендикулярний

і вектору idy і вектору \vec{r} . Із рис. III.4. видно, що і сумарний вектор \vec{B} має такий же напрямок.

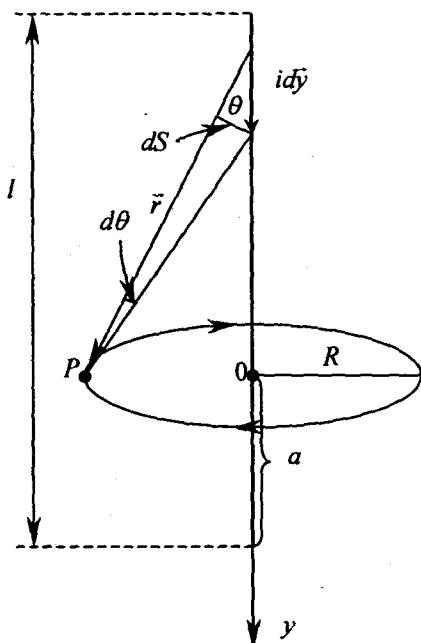


Рис. III.4. Знаходження індукції МП прямолінійного провідника зі струмом

Величина індукції МП дорівнює:

$$B = \int dB,$$

$$\text{де } dB = \frac{\mu_0 i dy}{4\pi r^2} \sin\theta, \quad r^2 = y^2 + R^2, \quad \sin\theta = \frac{R}{r}.$$

В результаті інтегрування одержуємо:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 i dy}{4\pi r^2} \sin\theta = \int_{-(l-a)}^a \frac{\mu_0 i dy \cdot R}{4\pi (y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \left(\frac{y}{R^2 \sqrt{R^2 + y^2}} \right) \Big|_{-(l-a)}^a$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{R^2 + (l-a)^2}} \right)$$

Якщо провідник достатньо довгий ($a, (l-a) \gg R$), то дужки в попередньому виразі дорівнюють 2, а для індукції МП нескінченного довгого ППС маємо:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Приклад III.4. Намоткою довгого соленоїда служить тонка стрічка-провідник шириною h , яка намотана щільно в один шар по циліндру з радіусом перерізу a . Вздовж стрічки протікає струм I . Знайти магнітне поле \vec{B} всередині і зовні соленоїду.

Розв'язання: Очевидно, що вектор лінійної густини струму, який протікає вздовж стрічки, можна подати у вигляді векторної суми:

$$\vec{i} = \vec{i}_\perp + \vec{i}_\parallel$$

Із рис. III.5 випливає, що $i_\perp = i \cos \alpha = i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2a\pi}\right)^2}$,

а $i_\parallel = i \sin \alpha = \frac{I}{2a\pi}$.

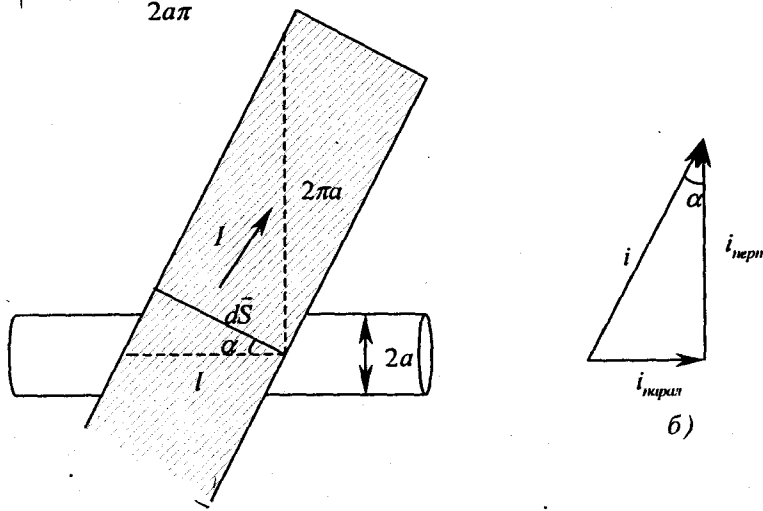


Рис. III.5. Намоткою довгого соленоїда з радіусом перерізу a служить тонка стрічка-провідник шириною h

Значить МП буде існувати і всередині і зовні соленоїду. МП зовні соленоїду визначається струмом, що протікає вздовж нього. Оскільки цей струм дорівнює $I_\parallel = 2a\pi \cdot i_\parallel$, то, згідно теореми про циркуляцію вектора \vec{B} , маємо при ($r > a$):

$$B_{\text{зовн}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

При ($r < a$), тобто всередині соленоїду, індукція МП дорівнює:

$$B_{\text{всеп}} = \mu_0 i_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{h} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2a\pi}\right)^2}$$

Приклад III.6. Показати, що закон Біо-Савара для об'ємних струмів, (III.3), може бути поданий у вигляді: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, де $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r'} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}$.

Розв'язання: Оскільки $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$, то векторний добуток $\frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3}$, що входить в закон Біо-Савара (III.3), можна подати у вигляді:

$$\frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3} = \left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \vec{j} \right]$$

З іншого боку, з допомогою формули векторного аналізу

$$\text{rot}(u\vec{a}) = u \cdot \text{rot}\vec{a} + [\text{gradu} \cdot \vec{a}],$$

попередня формула переписеться так:

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) = \frac{1}{R} \text{rot}\vec{j}(\vec{r}') + \left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \vec{j} \right]$$

Оскільки $\text{rot}\vec{j}(\vec{r}') = 0$, то

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) = \left[\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{R}]}{R^3}$$

Підставляємо цей вираз в (III.3)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r'} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{R}]}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r'} \int \text{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right) dV',$$

та враховуючи, що інтегрування по об'єму V' не залежить від диференційної операції знаходження ротора $\text{rot}\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)$ по координатам точки поля, одержуємо:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi r'} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}\right) = \text{rot} \vec{A},$$

де $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r'} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}$, що і треба було довести.

До речі, якщо розглядаються поля лінійних струмів, то вектор-потенціал лінійних струмів знаходять по формулі:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i d\vec{l}}{R}$$

Приклад III.7. Впевнитися, що для довільного розподілу постійних струмів $\vec{j}(\vec{r}') = \text{const}$ дивергенція вектора $\vec{A}(\vec{r})$ завжди дорівнює нулю.

Розв'язання:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{div}_p \int \frac{\vec{j}}{R} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_p \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV$$

$$\text{div}_p \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{div}_p \vec{j} + \vec{j} \nabla_p \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{j} \cdot \text{grad}_p \left(\frac{1}{R} \right)$$

бо $\text{div}_p \vec{j}(\vec{r}') = 0$.

Але $\vec{j} \nabla_p \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{j} \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) = -\text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) + \frac{1}{R} \text{div}_q \vec{j}$, оскільки

$$\text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{div}_q \vec{j} + \vec{j} \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right)$$

$\text{div}_q \vec{j} = 0$, як дивергенція густини постійного струму.

Тому $\text{div}_p \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = -\text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right)$, а $\text{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV$

По теоремі Гауса:

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \cdot d\vec{S}}{R} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_n}{R} dS$$

а інтегрування повинно виконуватися по поверхні, яка охоплює провідники з постійним струмом. Але на поверхні будь-якого провідника зі струмом

$$j_n = 0.$$

Таким чином $\text{div} \vec{A} = 0$.

Приклад III.8. Знайти магнітне поле в центрі кулі радіуса R , поверхня якої рівномірно покрита N паралельними досить тонкими витками із струмом i .

Розв'язання: Розглянемо сукупність витків AB , які знаходяться на віддалі Z від центру кулі, рис. III.6.

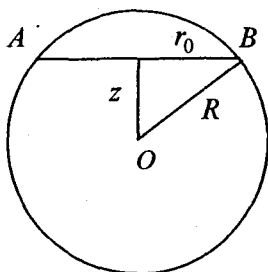


Рис. III.6. Поверхня кулі радіуса R рівномірно покрита N паралельними досить тонкими витками зі струмом i .

Індукція МП, створена цими витками в центрі кулі дорівнює:

$$dB = \frac{\mu_0 r_0^2 \cdot di}{2(z^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r_0^2 \cdot di}{2R^3},$$

де $di = in \cdot dz$, $n = \frac{N}{2R}$ - густина намотки, $r_0^2 = R^2 - z^2$.

Тоді, результуюче МП в центрі кулі, згідно принципу суперпозиції, дорівнює:

$$B = \int_{-R}^R \frac{\mu_0 r_0^2 \cdot ni}{2R^3} dz = \frac{\mu_0 ni}{2R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{\mu_0 ni}{2R^3} \cdot \frac{4R^3}{3} = \frac{\mu_0 N \cdot i}{3R}$$

Приклад III.9. Проволока утворює плоску спіраль, рівняння якої в полярній СК має вигляд: $r = \frac{l\varphi}{2\pi N}$, де N - число всіх витків, l - довжина радіус-вектора, проведеного від центру спіралі до її зовнішнього кінця, див. рис. III.7. Сила струму в проволочі i . Знайти аксіальну складову магнітної індукції на осі спіралі.

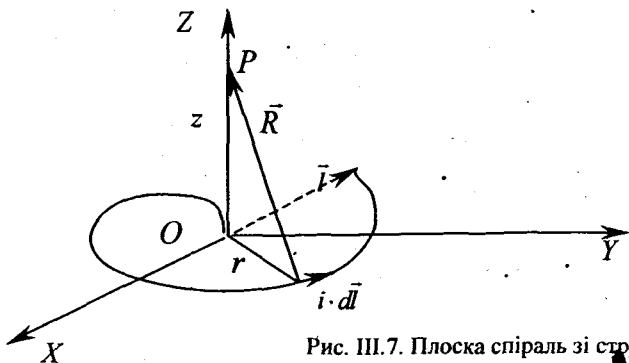


Рис. III.7. Плоска спіраль зі струмом i

Розв'язання: Згідно закону Біо-Савара, індукція МП, яке породжується елементом струму $i d\vec{l}$ в точці P дорівнює:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} [d\vec{l} \cdot \vec{R}]$$

Якщо вибрати систему декартових і циліндричних координат, рис. III.7., то

$$[d\vec{l} \cdot \vec{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ -r \cos \varphi & -r \sin \varphi & z \end{vmatrix} = z dx \vec{i} - z dy \vec{j} + (r \cos \varphi \cdot dy - r \sin \varphi \cdot dx) \vec{k}$$

Звідси для аксіальної складової вектора $d\vec{B}$ в точці P одержуємо:

$$dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} (r \cos \varphi \cdot dy - r \sin \varphi \cdot dx),$$

де $dx = d(r \cos \varphi)$, $dy = d(r \sin \varphi)$.

З урахуванням цього попередній вираз приймає форму:

$$dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{r^2 d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Оскільки

$$d\varphi = \frac{2\pi N}{R} dr,$$

то інтегрування по r в межах від 0 до R дає кінцевий результат:

$$B_z = \int_0^R dB_z = \frac{\mu_0 Ni}{2R} \left(\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти магнітне поле в центрі металеві кулі радіуса a , зарядженої до потенціалу φ , якщо вона обертається навколо одного з діаметрів з кутовою швидкістю ω .

2. По порожнистому циліндру протікає струм, рівномірно розподілений по його поверхні. Знайти поле всередині і зовні циліндра, не користуючись теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} .

3. Диск радіуса R рівномірно заряджений з поверховою густиною заряду σ обертається з кутовою швидкістю ω навколо його осі. Знайти магнітне поле на його осі.

4. Використовуючи принцип суперпозиції та результат *Прикладу III.2*, знайти магнітне поле на осі прямого соленоїду, довжина якого l , радіус витка r_0 , кількість витків N , сила струму i . (Вказівка: скористатися рис. III.8.).

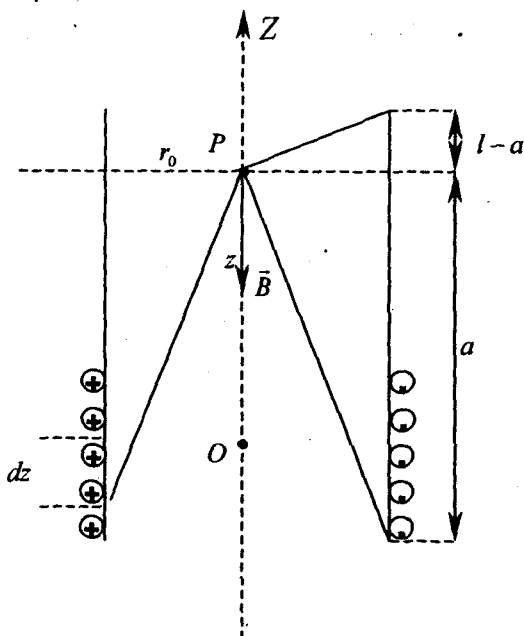


Рис. III.8.

5. Знайти магнітне поле, що виникає при швидкому обертанні мідного суцільного циліндра. Чи може магнітне поле Землі бути обумовлене цим ефектом?

6. Ізольований провід діаметром 0,3мм намотаний так, що утворює плоску спіраль з $N=100$ витків. Радіус внутрішнього витка дорівнює $r_1=10,3$ мм, зовнішнього витка $r_2=40,0$ мм. Знайти магнітне поле на осі спіралі. Знайти магнітний момент цього струму. Сила струму $i=10$ мА.

7. Всередині довгого циліндра радіуса a вздовж якого протікає струм i , рівномірно розподілений по перерізу, є циліндрична порожнина радіуса b , вісь якої паралельна вісі циліндра і знаходиться на відстані \bar{l} від неї, рис. III.9. Знайти поле всередині порожнини.

8. На тор радіуса R (з коловим перерізом радіуса a) намотано N витків проволочки, по якій протікає струм i . Вважаючи, що проволочка досить тонка, знайти магнітне поле в будь-якій точці простору.

9. Проволочний контур має форму еліпса, довжина якого l , а площа S . По контуру протікає струм i . Знайти індукцію магнітного поля в центрі еліпса.

10. Струм протікає по центральній лінії коаксіального кабелю радіусом r_1 і повертається по оболонці, внутрішній і зовнішній радіуси якої r_2 і r_3 . Знайти магнітне поле, що утворюється.

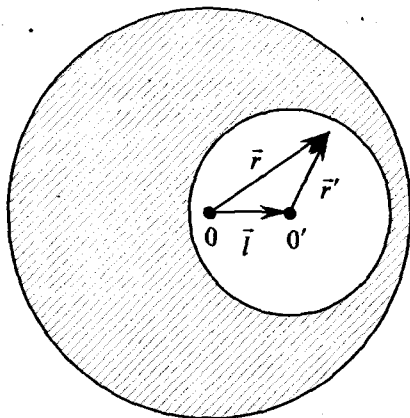


Рис. III.9. До задачі III.7

11. Струм i протікає по довгому прямому провіднику, який має форму жолоба з поперечним перерізом у вигляді тонкого півкільця радіуса R . Знайти магнітну індукцію \vec{B} на осі жолоба.

12. Знайти магнітне поле на осі порожнистого циліндра радіуса r_0 , що рівномірно заряджений по поверхні і обертається навколо цієї вісі з швидкістю ω .

13. Мідний диск обертається з кутовою швидкістю ω навколо вісі, що проходить через його центр. Знайти магнітне поле на осі диска.

14. Куля маси m , радіуса r_0 рівномірно заряджена по об'єму і обертається навколо своєї вісі з кутовою швидкістю ω . Знайти індукцію магнітного поля \vec{B} в центрі кулі та магнітний момент.

14. Маємо кільцевий соленоїд з прямокутним перерізом. Знайти магнітний потік через цей переріз, якщо струм в обмотці i , число витків N , відношення зовнішнього діаметра до внутрішнього λ , а товщина h .

15. Два довгих прямих взаємно перпендикулярних провідника із струмом і знаходяться на віддалі a один від одного. Знайти максимальне значення сили Ампера на одиницю довжини проводу.

16. Струм i протікає по довгому однорідному циліндричному провіднику. Враховуючи дію сили Лоренца на електрони провідності з боку власного МП (пінч-ефект), знайти об'ємну густину заряду $\rho(r)$, який виникає внаслідок цього ефекту.

IV. СТРУМИ ЗМІЩЕННЯ. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЗАРЯДУ

Закон збереження заряду в інтегральній та локальній формах має вигляд:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{IV.1})$$

Густина струмів зміщення:

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{IV.2})$$

Тому відповідне рівняння Максвелла має вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{IV.3})$$

В інтегральній формі це рівняння Максвелла набуває форми:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (\text{IV.4})$$

Приклади розв'язування задач

Приклад IV.1. Плоский конденсатор з обкладинками у вигляді дисків радіуса a і ємністю C підключений до змінної напруги $U = U_0 \sin \omega t$. Знайти:

- а) струм, що протікає через конденсатор;
- б) магнітне поле між пластинами конденсатора
- в) ємнісний опір конденсатора.

Розв'язання: Будемо вважати, що між пластинами знаходиться немагнітний діелектрик ($\mu = 1$) з діелектричною проникністю ϵ . Оскільки $U(t) = U_0 \sin \omega t$, то електричне поле між пластинами конденсатора змінюється по гармонічному закону:

$$E = E_0 \cdot \sin \omega t,$$

де ω - циклічна частота, E_0 - амплітудне значення напруженості електричного поля між пластинами конденсатора.

Тоді густина струму зміщення дорівнює:

$$\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 E_0 \omega \cdot \cos \omega t$$

А сила струму зміщення, який протікає через конденсатор дорівнює:

$$i_{3M} = \int_S \vec{j}_{3M} \cdot d\vec{S} = \varepsilon \cdot E_0 \varepsilon_0 \omega \cdot \cos \omega t \cdot \pi a^2 \frac{d}{d} = d \cdot E_0 C \omega \cos \omega t = \frac{U_0}{1/\omega C} \cos \omega t = \frac{U_0}{R_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (IV.5)$$

де d - відстань між пластинами конденсатора, $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi a^2}{d}$ - ємність плоского конденсатора.

Значить $R_C = \frac{1}{\omega C}$ - ємнісний опір його, а струм, що протікає че-

рез конденсатор випереджує напругу на ньому на кут $\frac{\pi}{2}$.

Для знаходження напруженості МП використаємо рівняння Максвела для струмів зміщення:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (IV.6)$$

Контур L виберемо у вигляді кола, що лежить в площині паралельній обкладинкам і концентричний круговим обкладинкам ($r \leq a$).

Тоді циркуляція вектора \vec{H} :

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{B}{\mu_0} \oint_L dl = \frac{B \cdot 2\pi r}{\mu_0}$$

Таким чином:

$$\frac{B \cdot 2\pi r}{\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{d} \omega \cdot \pi r^2 \cdot \cos \omega t,$$

Тобто, індукція магнітного поля пропорційна r і випереджає прикладену напругу на кут $\frac{\pi}{2}$:

$$B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 U_0 \cdot \omega r}{2d} \cdot \cos \omega t$$

Тобто, змінний струм протікає через конденсатор тільки завдяки струмам зміщення

Приклад IV.2. Точкова ЗЧ (величина заряду q) рухається рівномірно та прямолінійно вздовж вісі OX зі швидкістю \vec{V} , рис. IV.1. Користуючись рівнянням Максвела (IV.4) знайти магнітне поле в точці P .

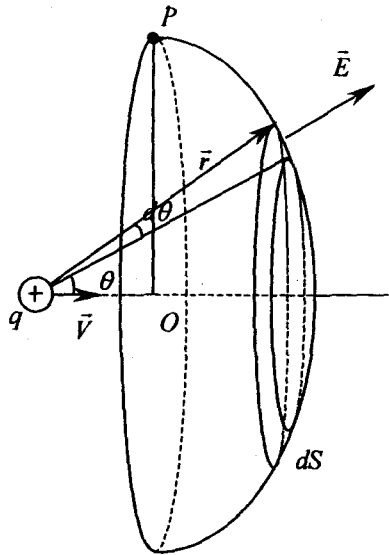


Рис. IV.1. До знаходження струму зміщення через сферичний сегмент

Розв'язання: Щоб скористатися теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} , рівняння (IV.4), необхідно знайти величину струму зміщення через поверхню, що спирається на певний контур. Виходячи із симетрії задачі, цей контур виберемо у вигляді кола що лежить в площині перпендикулярній вектору \vec{V} . На рис. IV.1. радіус цього кола OP .

Оскільки в виразі для струму зміщення інтегрування по поверхні S та взяття похідної по часі незалежні операції, то

$$i_{zm} = \int_S \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

Тому із симетрії задачі випливає, що зручніше всього поверхню, яка спирається на коло радіуса OP , слід вибрати у вигляді сферичного сегменту, а елементарну поверхню $dS = 2\pi \cdot r \sin\theta \cdot r d\theta$ - як поверхню сферичного поясокка. Тоді потік вектора \vec{E} через сферичний сегмент дорівнює:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta)$$

Знайдемо тепер $\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S}$, щоб потім скористатися теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} . Тоді:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

для знаходження $\frac{d\theta}{dt}$ розглянемо рис. IV.1a. Из цього рисунку видно,

що при переміщенні ЗЧ на $\vec{V}dt$ кут θ зріс на $d\theta$. Причому

$$dl = d\theta \cdot r, \quad r \cdot d\theta = V \cdot dt \cdot \sin\theta,$$

тобто

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r} \cdot \sin\theta$$

Тому сила струму зміщення через поверхню сферичного сегменту дорівнює:

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{qV \cdot \sin^2 \theta}{2r} \quad (\text{IV.7})$$

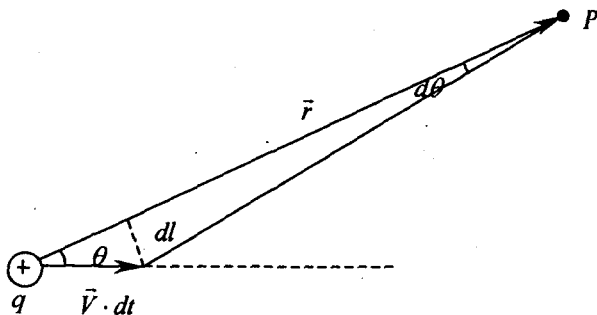


Рис. IV.1a. Ілюстрація способу знаходження величини $\frac{d\theta}{dt}$

Виходячи з симетрії задачі ми можемо стверджувати, що $H = \text{const}$ в кожній точці контуру, на який спирається наш сегмент.

І тоді теорема про циркуляцію вектора \vec{H} , $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$, набуває вигляду:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 2\pi R \cdot H = 2\pi \cdot \sin\theta \cdot H = \frac{qV}{2r} \sin^2 \theta$$

звідки для напруженості МП знаходимо:

$$H = \epsilon_0 \frac{qV \cdot \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qV \cdot \sin\theta}{4\pi r^2}$$

Або в векторному вигляді:

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi r^3} [\vec{v} \cdot \vec{r}]$$

Тобто, спираючись на концепцію струмів зміщення ми одержали вірний результат для індукції магнітного поля рухомої ЗЧ:

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}] \quad (\text{IV.8})$$

Приклад IV.3. Точкова ЗЧ рухається рівномірно та прямолінійно вздовж вісі OX зі швидкістю $v \ll c$. Знайти магнітне поле в будь-якій точці простору, користуючись уявленням про струми зміщення, тобто, використовуючи рівняння Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Розв'язання: При малих швидкостях руху ЗЧ, напруженість електричного поля визначається:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

де $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радіус-вектор, проведений із миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля (точка P), $\rho^2 = y^2 + z^2$, див. рис. IV.2.

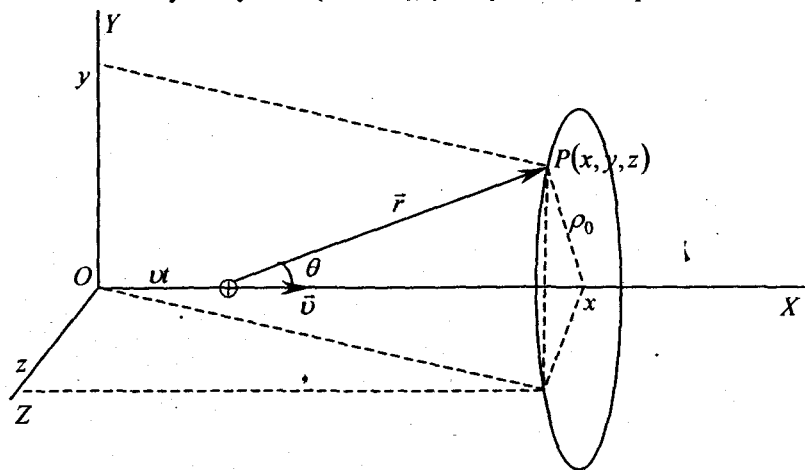


Рис. IV.2. ЗЧ рухається з постійною швидкістю вздовж вісі OX . Густина струму зміщення в довільній точці простору внаслідок руху ЗЧ визначається співвідношенням (IV.9)

Тоді, густина струму зміщення в довільній точці простору внаслідок руху ЗЧ, дорівнює:

$$\vec{j}_{zv} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left[\frac{3qv(x-vt)^2}{4\pi \{(x-vt)^2 + \rho^2\}^{5/2}} - \frac{qv}{4\pi \{(x-vt)^2 + \rho^2\}^{3/2}} \right] \vec{i} + \frac{3qvy(x-vt)}{4\pi \{(x-vt)^2 + \rho^2\}^{5/2}} \vec{j} + \frac{3qvz(x-vt)}{4\pi \{(x-vt)^2 + \rho^2\}^{5/2}} \vec{k} \quad (IV.9)$$

Характеристики МП в точці $P(x, y, z)$ можна знайти двома шляхами. Перший – подібний до методу розв'язання *Прикладу IV.2*. Тобто, необхідно скористатися теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} .

Величина струму зміщення через плоску поверхню круга радіуса ρ_0 :

$$i_{zv} = \int_{s_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_0^{\rho_0} \left[\frac{3qv \cdot (x-vt)^2}{\{(x-vt)^2 + \rho^2\}^{5/2}} - \frac{qv}{\{(x-vt)^2 + \rho^2\}^{3/2}} \right] \cdot \rho \cdot \partial \rho = \frac{qv \cdot (1 - \beta^2) \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \{(x-vt)^2 + \rho_0^2\}^{3/2}}$$

Тоді використання рівняння Максвелла (IV.4) ($i=0$) дає:

$$2\pi\rho_0 \cdot H = \frac{qv \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \{(x-vt)^2 + \rho_0^2\}^{3/2}}$$

Звідси

$$H = \frac{qv \cdot \rho_0}{4\pi \cdot \{(x-vt)^2 + \rho_0^2\}^{3/2}}$$

Другий шлях полягає в інтегруванні диференційного рівняння (IV.3). Таким чином, з огляду на локальний характер основних законів класичної та релятивістської електродинаміки знайдемо тепер напруженість магнітного поля в точці $P(x, y, z)$ користуючись відповідним

рівнянням Максвелла в диференційній формі $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Для нашого випадку ($H_x = 0$) вихор вектора \vec{H} дорівнює:

$$\text{rot} \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{k}$$

Тоді, враховуючи (IV.9) одержуємо систему диференційних рівнянь в частинних похідних відносно невідомих $H_y(x, y, z, t)$ та $H_z(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{3qv \cdot (x - ut)^2}{4\pi \cdot \{(x - ut)^2 + \rho^2\}^{5/2}} - \frac{qv}{4\pi \cdot \{(x - ut)^2 + \rho^2\}^{3/2}}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{3qv \cdot y \cdot (x - ut)}{4\pi \cdot \{(x - ut)^2 + \rho^2\}^{5/2}}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{3qv \cdot z \cdot (x - ut)}{4\pi \cdot \{(x - ut)^2 + \rho^2\}^{5/2}}$$

Інтегруючи два останніх рівняння знаходимо H_y та H_z :

$$H_z(x, y, z, t) = \frac{qv \cdot y}{4\pi \cdot \{(x - ut)^2 + \rho^2\}^{3/2}}$$

$$H_y(x, y, z, t) = -\frac{qv \cdot z}{4\pi \cdot \{(x - ut)^2 + \rho^2\}^{3/2}}$$

Останні дві формули дають вираз для вектора напруженості МП:

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi^3} [\vec{v} \cdot \vec{r}], \quad (IV.10)$$

що співпадає з результатом, одержаним шляхом узагальнення закону Біо-Савара.

Приклад IV.4. Знайти магнітне поле рівномірно та прямолінійно рухомої ЗЧ користуючись рівнянням Максвелла $rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Розв'язання: Результат, який ми отримали при розв'язку *Прикладу IV.2.* та *Прикладу IV.3.* можна одержати також виходячи безпосередньо і із рівняння Максвелла

$$rot \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)), \quad (IV.11)$$

де густину струмів провідності подано через дельта-функцію Дірака $\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$, $\vec{j} = q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$, $\vec{r}'(t)$ - радіус-вектор, що визначає положення ЗЧ в довільний момент часу.

Очевидно, що в тих точках простору, де $\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = 0$, (ЗЧ не знаходиться в дану мить в точці \vec{r}) похідна $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$. До речі, а в яких же

точках простору $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$?

З іншого боку похідну $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ можна подати так:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot v_z \right) = -(\vec{v}\nabla)\vec{E}$$

А диференційну операцію $(\vec{v}\nabla)\vec{E}$ знайдемо із наступної формули векторного аналізу:

$$\text{rot}[\vec{v}\vec{E}] = (\vec{E}\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{E} + \vec{v} \cdot \text{div}\vec{E} - \vec{E} \cdot \text{div}\vec{v}$$

Тому $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - (\vec{E}\nabla)\vec{v} - \vec{v} \cdot \text{div}\vec{E} + \vec{E} \cdot \text{div}\vec{v}$, але при $\vec{v} = \text{const}$, $(\vec{E}\nabla)\vec{v} = 0$, $\vec{E} \cdot \text{div}\vec{v} = 0$.

Тобто, для $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ знаходимо:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - \vec{v} \cdot \text{div}\vec{E}$$

Враховуючи рівняння Максвелла:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$$

попередній вираз має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - \vec{v} \cdot \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \quad (\text{IV.12})$$

І, нарешті, із (IV.11) одержуємо:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = \\ &= \epsilon\epsilon_0 \left(\text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - \vec{v} \cdot \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \right) + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = \epsilon\epsilon_0 \cdot \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] \end{aligned}$$

Тобто, локальний зв'язок в довільній точці простору, в довільний момент часу між індукцією магнітного поля та напруженістю електричного поля рухомої ЗЧ визначається формулою, що співпадає з (IV.10)

$$\vec{B} = \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 [\vec{v}\vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v}\vec{E}]$$

Приклад IV.5. Показати, що при релаксації зарядів в однорідному провідному середовищі струм зміщення компенсує струм провідності, так, що в процесі релаксації зарядів магнітне поле не утворюється.

Розв'язання: Закон збереження заряду $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ разом з законом

Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ приводить до наступного диференційного рівняння:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Враховуючи закон Кулона в локальній формі

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon},$$

одержуємо диференційного рівняння, яке визначає закон зміни густини заряду в процесі розсмоктування заряду в провідному середовищі:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\lambda \rho}{\epsilon_0 \epsilon}$$

Розв'язок його очевидний

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\lambda t}{\epsilon_0 \epsilon}}$$

Тому густина струму провідності

$$\vec{j} = \lambda \vec{E} = \lambda \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t) \vec{R}}{R^3} dV' \right),$$

та густина струму зміщення

$$\vec{j}_{zm} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \left(-\frac{\lambda}{\epsilon \epsilon_0} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t) \vec{R}}{R^3} dV' \right)$$

в будь-який момент часу однакові за величиною, але протилежні за напрямком:

$$\vec{j} = -\vec{j}_{zm}$$

Приклад IV.6. Прийнято вважати, що якщо відношення амплітуд сили струму зміщення і сили струму провідності в речовині менше 0,01, то середовище - провідник, якщо ж це відношення більше 100, то середовище - діелектрик. Яким є середовище з параметрами $\epsilon = 3$,

$\lambda = 0,1 \frac{\text{См}}{\text{м}}$ для частот електромагнітної хвилі $\nu_1 = 10^5 \text{ Гц}$,

$\nu_2 = 10^2 \text{ МГц}$, і $\nu_3 = 10 \text{ ГГц}$?

Розв'язання: Густина струму провідності дорівнює $j = \lambda E_0$, а густина струму зміщення дорівнює $j_{zm} = \epsilon_0 \epsilon 2\pi \nu E_0$, де E_0 - амплітудне значення електричного поля електромагнітної хвилі.

Отже, відношення амплітуд струму зміщення і струму провідності дорівнює: $\frac{j_{zm}}{j} = \frac{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$. Підставивши дані задачі одержуємо відповідь:

для частот ν_1, ν_2, ν_3 відношення $\frac{j_{zm}}{j}$ послідовно приймає значення $\approx 10^{-3}$; 1; 10^2 . Значить, при зміні частоти від ν_1 до ν_3 середовище можна послідовно розглядати як провідник, напівпровідник і діелектрик.

Приклад IV.7. Визначте частоту ν електромагнітної хвилі, при якій амплітуди струму зміщення і струму провідності рівні. Хвиля поширюється в середовищі з параметрами: а) $\varepsilon = 80, \lambda = 4 \frac{\text{См}}{\text{м}}$ (морська вода); б) $\varepsilon = 6, \lambda = 10^{-13} \frac{\text{См}}{\text{м}}$.

Розв'язання: Із попередньої задачі випливає, що відношення амплітудних значень густин струму зміщення і струму провідності дорівнює: $\frac{j_{zm}}{j} = \frac{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$. Оскільки $\frac{j_{zm}}{j} = 1$, то частота ν електромагнітної хвилі буде дорівнювати: $\nu = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}$.

Відповідь: а) $\nu = 9 \cdot 10^8 \text{ Гц}$; б) $\nu = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Якими властивостями характеризуються струми зміщення?
2. Обґрунтувати рівняння неперервності.
3. Обґрунтувати вираз для густини струмів зміщення виходячи із рівняння неперервності та рівняння $\text{rot} \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$.
4. Показати, що традиційне формулювання I-го закону Кірхгофа випливає із закону збереження заряду $\text{div} \vec{j} = 0$ для постійних струмів.
5. Користуючись результатом (IV.9) знайти \vec{j}_{zm} в точці простору на віддалі r від миттєвого положення ЗЧ при $\theta = 0$ і при $\theta = \frac{\pi}{2}$.
6. Впевнитися, що струм зміщення, який зумовлений рухом ЗЧ, через поверхню сегменту дорівнює струму зміщення через плоску поверхню круга радіусу OP , рис. IV.1. та рис. IV.3.
7. Показати, що із рівнянь Максвелла випливає закон збереження заряду.

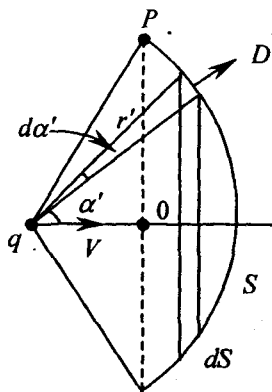


Рис. IV.3.

8. Впевнитися, що рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ і $\text{div}\vec{B} = 0$ не суперечать одне одному.

9. Показати, що при розрядці плоского конденсатора на його обкладинках струм провідності замикається струмом зміщення.

10. Показати, що при розрядці циліндричного і сферичного конденсаторів на їх обкладинках струм провідності замикається струмом зміщення.

11. Простір між обкладинками довгого циліндричного конденсатора заповнений однорідним діелектриком зі слабкою електропровідністю λ . Коли конденсатор заряджений в діелектрику від однієї обкладинки до іншої протікає струм. Знайти напруженість магнітного поля між обкладинками. Діелектрична проникність ϵ .

12. Простір між обкладинками сферичного конденсатора заповнений речовиною з провідністю σ та діелектричною постійною ϵ . В початковий момент на внутрішній обкладинці є заряд q_0 . Знайти:

- закон зміни величини заряду q на внутрішній обкладинці;
- магнітне поле всередині конденсатора;
- кількість теплоти, яка виділиться при проходженні заряду на зовнішню поверхню. За рахунок якої енергії виділиться теплота?

13. Рівномірно заряджена дуже довга нитка рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж своєї вісі. Користуючись виразом для $\vec{j}_{\text{зм}}$ знайти магнітне поле, що утворюється рухомою ниткою.

14. Знайти магнітне поле, що створюється довгим лінійним струмом i в будь-якій точці простору користуючись концепцією струмів зміщення.

15. Одна з пластин плоского конденсатора рухається зі швидкістю $V \ll c$ до другої пластини. Визначити $\vec{j}_{\text{зм}}$ і \vec{H} між пластинами у випадках:

- пластини приєднані до батареї;
- пластини зарядженого конденсатора відокремлені від батареї.

16. Плоский конденсатор з круглими пластинами приєднаний до батареї. Відстань між пластинами повільно змінюється по гармонічному закону $d = d_0 + \sin \omega t$. Знайти напруженість магнітного поля між пластинами.

17. Заряджений і вимкнений від джерела струму плоский конденсатор, що складається з двох однакових дисків радіусом R , пробивається іскрою вздовж своєї вісі. Вважаючи розряд квазістаціонарним і нехтуючи граничними ефектами, обчислити миттєве значення вектора \vec{B} всередині конденсатора, якщо сила струму в іскрі в цей момент дорівнює i . Знайти повний потік електромагнітної енергії, що витікає з конденсатора. Обговорити явище з точки зору збереження та перетворення енергії.

18. Простір між обкладинками циліндричного конденсатора заповнений діелектриком з провідністю λ і діелектричною постійною ϵ . В початковий момент на внутрішній обкладинці є заряд q_0 . Знайти:

- закон зміни величини заряду q на внутрішній обкладинці;
- магнітне поле всередині конденсатора;
- кількість теплоти, що виділяється при протіканні струму.

19. Довгий прямий соленоїд має n витків на одиницю довжини. По ньому протікає струм $I = I_0 \sin \omega t$. Знайти $\vec{j}_{\text{зм}}$ як функцію віддалі від вісі соленоїда. Радіус перерізу соленоїду r_0 .

20. Точковий заряд рухається зі швидкістю $V = \text{const}$ ($V \ll c$). Знайти $\vec{j}_{\text{зм}}$ в точці на віддалі r від заряду на прямій:

- що співпадає з траєкторією зарядженої частинки;
- що перпендикулярно траєкторії і проходить через заряджену частинку.

21. Заряд q рівномірно розподілений по поверхні кульки радіуса r_0 . Знайти $i_{\text{зм}}$ та $i_{\text{прое}}$ через поверхню перпендикулярну до швидкості в момент часу, коли заряд перетинає цю поверхню.

22. Простір між обкладинками сферичного конденсатора заповнений речовиною з провідністю σ та діелектричною постійною ϵ . В початковий момент на внутрішній обкладинці є заряд q_0 . Знайти зв'язок між $\vec{j}_{\text{зм}}$ та \vec{j} в один і той же момент часу та повний струм зміщення через довільну замкнену поверхню.

23. Дві ЗЧ, маса кожної m , заряди q і $-q$, рухаються під дією електричного притягання по колу так, що лінія яка їх з'єднує обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Знайти густину струму в центрі цієї системи.

V. ЗАКОН ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ

Закон електромагнітної індукції, який сформулював Дж. Максвел, має вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{V.1})$$

А в інтегральній формі цей закон записується в двох еквівалентних формах:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \varepsilon &= - \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

де $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ - потік індукції магнітного поля (магнітний потік) через будь-яку поверхню S , яка спирається на контур L ; $\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$ - е.р.с. індукції, що виникає в контурі L .

Згідно ортодоксальної точки зору природа е.р.с. індукції зумовлена виникненням вихрового електричного поля, якщо $\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \neq 0$, або дією магнітної сили пропорційної $[\vec{V} \cdot \vec{B}]$, або ж сумарним ефектом 2-х перших причин.

Приклади розв'язування задач.

Приклад V.1. Провідник у вигляді параболи, яка описується рівнянням $y = kx^2$, знаходиться у постійному магнітному полі, вектор індукції якого перпендикулярний площі, обмеженої параболою. З вершини параболи в початковий момент часу почали переміщувати перемичку. Знайти ЕРС в контурі як залежність $\varepsilon(y)$, якщо перемичку переміщують:

- А) з постійною швидкістю;
- Б) з постійним прискоренням;

Розв'язання: Задачу можна розв'язати декількома шляхами.

1) Використовуючи закон електромагнітної індукції в інтегральній формі:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$$

Для цього розглянемо наступний рисунок (Рис. V.1.):

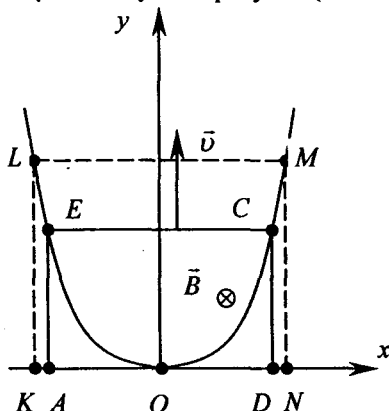


Рис. V.1. В однорідному магнітному полі знаходиться парабола LOM , а перемичка EC рухається вздовж вісі OY

За означенням магнітного потоку $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS \cos \alpha$, де \vec{B} - вектор магнітної індукції, \vec{S} - нормаль до S , S - площа, що обмежена параболою та перемичкою, α - кут між \vec{B} та нормаллю до S . У даному випадку ці вектори паралельні, тому $\cos \alpha = 1$, а отже $\Phi = BS$. Оскільки магнітне поле постійне, то \vec{B} не змінюється, отже

$$\varepsilon = B \frac{dS}{dt}$$

Зміну площі dS можна виразити двома способами:

а) dS - це за рис. V.1. площа фігури $LECM$, яку можна знайти як різницю площ LOM та EOC . Знайдемо ці площі:

$$S_{LOM} = S_{LKNM} - 2S_{LKO} = MN \cdot ON - 2S_{LKO}$$

$$S_{EOC} = S_{EADC} - 2S_{EAO} = DC \cdot OD - 2S_{EAO}$$

Вважаючи, що $OD = x$, $ON = x + dx$, $DC = y$, $MN = y + dy$, а також приймаючи, що $y = kx^2$ отримаємо:

$$\begin{aligned} dS &= S_{LKNM} - 2S_{LKO} - (S_{EADC} - 2S_{EAO}) = 2(y + dy)(x + dx) - 2 \int_0^{x+dx} y dx - \\ &- 2xy + 2 \int_0^x y dx = 2xy + 2ydx + 2xdy + 2dxdy - 2 \int_0^{x+dx} kx^2 dx - 2xy + 2 \int_0^x kx^2 dx \end{aligned}$$

Оскільки dx та dy - нескінченно малі величини, то добуток $2dxdy = 0$. Тепер розпишемо вирази для інтегралів:

$$\int_0^{x+dx} kx^2 dx = \frac{k}{3}(x^3 + 3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3 - 0^3) \approx \frac{k}{3}(x^3 + 3x^2 dx)$$

$$\int_0^x kx^2 dx = \frac{k}{3}(x^3 - 0^3) = \frac{k}{3}x^3$$

Якщо підставити останні рівності у вираз для dS , то отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} dS &= 2xy + 2ydx + 2xdy - \frac{2}{3}k(x^3 + 3x^2 dx) - 2xy + \frac{2}{3}kx^3 = 2kx^2 dx + \\ &+ 2xdy - \frac{2}{3}kx^3 - 2kx^2 dx + \frac{2}{3}kx^3 = 2xdy \end{aligned}$$

б) розглянемо інший варіант знаходження dS . Для цього розглянемо, той же в принципі, рисунок

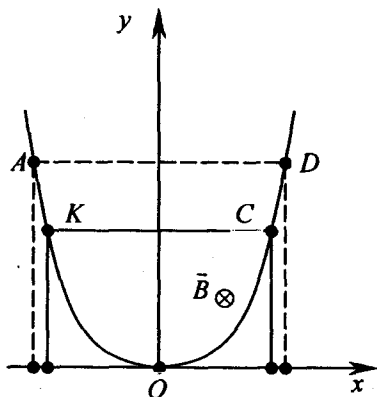


Рис. V.2.

У даному випадку dS - це значення площі криволінійної трапеції $AKCD$, яку наближено можна вважати прямокутником зі сторонами $AK=dy$, $KC=2x$. Таким чином, виходячи з означення площі прямокутника, маємо:

$$dS = 2xdy$$

Як бачимо в обох випадках $dS = 2xdy$. Підставимо отримане співвідношення у вираз для ε , отримаємо для ЕРС:

$$\varepsilon = B \frac{dS}{dt} = B \frac{2xdy}{dt} = 2Bx \frac{dy}{dt}$$

За умовою задачі $y = kx^2$, то $x = \sqrt{\frac{y}{k}}$. Отже:

$$\varepsilon = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

У тому випадку, коли перемичку переміщують з постійною швидкістю відношення $\frac{dy}{dt}$ - це є швидкість v переміщення перемички

вздовж вісі y і в даному випадку $\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}v$. Якщо ж перемичку рухають рівноприскорено з прискоренням a , то $v = \sqrt{2ay}$ і в результаті отримаємо рівність:

$$\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}v = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}\sqrt{2ay} = 2By\sqrt{\frac{2a}{k}}$$

2) За означенням електрорушійної сили

$$\varepsilon = \frac{A}{q}$$

де A - робота по переміщенню заряду, q - величина цього заряду.

У даному випадку роботу виконує сила Лоренца, яка діє на ЗЧ, які переміщуються у магнітному полі з індукцією \vec{B} разом з перемичкою. Тоді $F_L = qvB \sin \beta$, де β - кут між \vec{B} та \vec{v} і в даній задачі рівний 90°. Таким чином $F_L = qvB$.

За Рис. V.2 видно, що $l = 2x$, отже:

$$A = \int_0^l F_L dx = qvBl = qvB2x = 2qxv \frac{dy}{dt}$$

Для електрорушійної сили маємо вираз то же вираз, який ми одержали методом 1):

$$\varepsilon = 2xB \frac{dy}{dt}$$

Враховуючи, що $x = \sqrt{\frac{y}{k}}$ отримаємо:

$$\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}} \frac{dy}{dt}$$

У тому випадку, коли перемичку переміщують з постійною швидкістю v маємо вираз $\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}v$. Якщо ж перемичку рухають рівноприскорено з прискоренням a , то $v = \sqrt{2ay}$ і в результаті отримаємо співвідношення:

$$\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}v = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}\sqrt{2ay} = 2By\sqrt{\frac{2a}{k}}$$

$$\text{Відповідь: А) } \varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}},$$

$$\text{Б) } \varepsilon = 2By\sqrt{\frac{2a}{k}}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Рамка рухається в однорідному \vec{B} так, що е. р. с. індукції завжди рівна 0. Що це за рухи?

2. Металевий диск обертається зі швидкістю ω . Знайти різницю потенціалів між центром та ободом диска, що виникає у відсутності та при наявності магнітного поля.

3. Стержень OA обертається з кутовою швидкістю ω навколо точки O в площині, перпендикулярній вектору \vec{H} . Знайти е. р. с. індукції між точками O та A , якщо довжина стержня l .

4. Металеве кільце з проволочки радіуса r та перерізом S обертається з кутовою швидкістю ω в магнітному полі Землі навколо вертикальної вісі, що співпадає з діаметром кільця. Скільки джоулевого тепла виділиться в кільці за 1 сек.?

5. Показати, що при зміні в часі радіального магнітного поля у якого $H_x = H_y = 0, H_z = H(r, t)$ виникає вихрове електричне поле, силові лінії якого є концентричні кола з центрами, що лежать на вісі магнітного поля. Знайти напруженість вихрового електричного поля.

6. Заряд q та маса m однорідно заповняє об'єм кулі. В початковий момент часу вмикається зовнішнє поле $\vec{H} = \vec{H}(t)$ напрямком якого постійний. Знайти кутову швидкість обертання кулі.

7. В постійному магнітному полі рівномірно обертається замкнений контур площа якого S , опір R і самоіндукція L . Вісь обертання перпендикулярна напрямку індукції магнітного поля \vec{B} і лежить у площині контуру. Визначити величину струму індукваного в контурі.

8. Коловий провідник радіуса a розташований у вертикальній площині, що перпендикулярна вектору \vec{B} . Навколб його центру може вільно обертатися провідник довжиною a , вагою p . Яку напругу слід подати на кінці провідника, щоб він рівномірно обертася з кутовою швидкістю ω .

9. Силові лінії індукції $\vec{B}(t)$ паралельні осі тонкого рівномірно зарядженого диска радіуса r_0 та маси m . Знайти кутову швидкість обертання диска.

10. Горизонтальний стержень AB , маса якого m , може ковзати без тертя по двох вертикальних стержнях. AM та BN замкнені на опорі K . Визначити закон падіння стержня AB в однорідному поперечному маг

нітному полі, індукція якого \vec{B} . Опором стержня та самоіндукцією контуру знехтувати.

11. Плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля падає на рамочну антену. Визначити ЕРС індукції, яка виникає в антені. Антена має форму квадрату зі стороною a і лежить в площині коливань вектору \vec{E} .

12. Металевий диск радіуса $a = 25 \text{ см}$ обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 130 \text{ рад/сек}$ навколо його вісі. Знайти різницю потенціалів між центром та ободом диску, якщо:

- зовнішнього магнітного поля нема;
- маємо перпендикулярне до диску зовнішнє однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,5 \text{ МТл}$.

13. Коловий контур, який має площу S та опір R , обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо його діаметру, який перпендикулярний до однорідного магнітного поля з індукцією \vec{B} . Нехтуючи магнітним полем індукційного струму, знайти яким моментом сили треба діяти на контур в цих умовах. В момент $t = 0$ площина контуру перпендикулярна до напрямку магнітного поля.

14. Магнітний потік крізь нерухомий контур з опором R змінюється на протязі часу τ по закону $\Phi = at(\tau - t)$. Знайти кількість тепла, яке виділяється в контурі за цей час. Індуктивністю контуру знехтувати.

15. Непровідне тонке кільце маси m , яке має заряд q , може вільно обертатись навколо своєї вісі. В початковий момент кільце знаходилося в спокої, магнітне поле було відсутнє, потім ввімкнули однорідне магнітне поле, перпендикулярне площині кільця, яке почало наростати в часі по деякому закону $\vec{B}(t)$. Знайти кутову швидкість обертання ω кільця в залежності від індукції.

16. В середині довгого соленоїда знаходиться коаксіальне мідне кільце прямокутного перерізу. Товщина кільця h , його внутрішній та зовнішній радіуси a і b . Знайти індукційний струм в кільці, якщо індукція магнітного поля соленоїда змінюється за законом $B = \beta t$, де β - стала.

17. В довгому прямому соленоїді з радіусом перерізу a та кількістю витків на одиницю довжини n змінюється струм з сталою швидкістю $1 \frac{A}{c}$.

Знайти модуль напруженості вихрового електричного поля як функцію відстані r від вісі соленоїду. Зобразити приблизний графік цієї залежності.

18. Плоский виток з дуже великою кількістю витків N , щільно прилягаючих один до одного, знаходяться в однорідному магнітному полі, перпендикулярному до площини витка. Зовнішній радіус витків дорівнює a . Індукція поля змінюється в часу за законом $B = B_0 \sin \omega t$, де B_0 та ω - сталі. Знайти амплітудне значення ЕРС індукції в витку.

VI. ВЕКТОР ПОЙНТІНГА, ГУСТИНА ІМПУЛЬСУ ТА МОМЕНТ ІМПУЛЬСУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Закон збереження енергії для системи "електромагнітне поле - ЗЧ" має вигляд:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV + \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}, \quad (VI.1)$$

де $W = \int_V w \cdot dV$ - енергія ЕМП, а $w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$ - густина енергії електромагнітного поля, \vec{j} - густина струму провідності, \vec{E} - напруженість електричного поля, $\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$ - вектор Пойнтінга.

Формулу (VI.1) слід розуміти так.

Енергія електромагнітного поля зменшується тому, що сили електромагнітного поля виконують роботу по переміщенню зарядів в електродинамічній системі, а також це зменшення відбувається за рахунок того, що частина енергії електромагнітного поля ($\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$) витікає через поверхню S , що обмежує електродинамічну систему. В такому формулюванні закон збереження енергії поля називається теоремою Пойнтінга.

Фізичний зміст вектора Пойнтінга: $|\vec{S}|$ - це потік енергії електромагнітного поля в одиницю часу через одиницю поверхні, що орієнтована перпендикулярно вектору \vec{S} . Тобто, це густини потоку енергії електромагнітного поля.

Закон збереження енергії для електродинамічної системи з ЕРС.

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} \cdot dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S} + \int_V \frac{j^2}{\lambda} \cdot dV, \quad (VI.2)$$

де \vec{E}^{cm} - напруженість електричного поля сторонніх сил.

Ми бачимо, що перший доданок в правій частині (VI.2) - це збільшення енергії ЕМ поля в часі; другий доданок - сумарний потік енергії ЕМ поля через поверхню S ; третій доданок $\int_V \frac{j^2}{\lambda} \cdot dV = Q$ - тепло Джоуля-Ленца, яке виділяється в електродинамічній системі.

Таким чином закон збереження (VI.2) читається так: *робота сторонніх сил іде на збільшення енергії електромагнітного поля; покриття джоулевих витрат; і частина енергії витікає через поверхню, що обмежує цей об'єм.*

В локальній формі закон збереження енергії (VI.2) має вигляд:

$$\vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} = \frac{j^2}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B} H}{2} \right) + \text{div}[\vec{E} \cdot \vec{H}] \quad (\text{VI.3})$$

Закон збереження імпульсу для системи, яка складається з заряджених частинок та електромагнітного поля:

$$\vec{P}_v + \int_V [\vec{D} \cdot \vec{B}] dV = \text{const} \quad (\text{VI.4})$$

Сумарний імпульс заряджених частинок та імпульс електромагнітного поля для замкненої системи зберігається.

Тобто, кожна одиниця об'єму простору, в якій існує електромагнітне поле, характеризується об'ємною густиною імпульсу \vec{g} :

$$\vec{g} = [\vec{D} \cdot \vec{B}] \quad (\text{VI.5})$$

Оскільки електромагнітне поле характеризується густиною імпульсу, то можна говорити і про густину моменту імпульсу поля

$$\vec{l} = [\vec{r} \cdot \vec{g}] \quad (\text{VI.6})$$

Тому в електродинамічній системі буде мати місце закон збереження моменту імпульсу:

$$\vec{L}_{\text{мех}} + \int_V \vec{l} \cdot dV = \text{const} \quad (\text{VI.7})$$

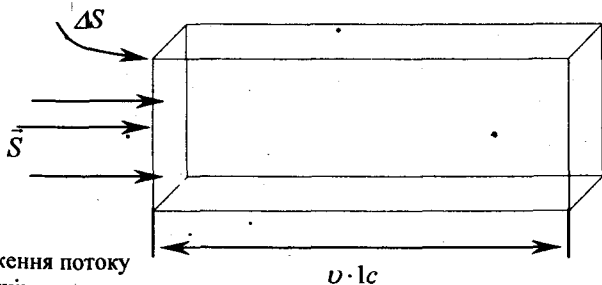
Тобто, векторна сума механічного моменту імпульсу та моменту імпульсу ЕМП залишається незмінною для замкненої електродинамічної системи.

Приклади розв'язування задач

Приклад VI.1. Знайти потік енергії та імпульсу ЕМП плоскої електромагнітної хвилі через плоску поверхню ΔS орієнтовану перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі, рис. VI.1.

Розв'язання: Як відомо, зв'язок між напруженістю електричного і магнітного полів плоскої хвилі такий:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H$$



VI.1. Знаходження потоку енергії електромагнітного поля

Розглянемо площадку ΔS , нормально до якої падає електромагнітна хвиля. Тоді за 1 секунду ця електромагнітна хвиля пройде шлях, що дорівнює:

$$v \cdot 1 \text{ сек}$$

Тоді через ΔS за одну секунду протече електромагнітна енергія, яка дорівнює:

$$w \cdot \Delta V = w \cdot \Delta S \cdot v \cdot 1$$

Оскільки для електромагнітної хвилі густина енергії дорівнює:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2}{2} = \varepsilon \varepsilon_0 E^2,$$

то через одиницю поверхні протече енергія, що чисельно дорівнює:

$$w \cdot v = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0 \mu}} \cdot E^2$$

З іншого боку, вектор Пойнтінга дорівнює (оскільки $H = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E$):

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}] = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \cdot \vec{n},$$

де \vec{n} – одиничний орт в напрямку розповсюдження хвилі.

Порівнюючи ці два останні вирази знаходимо зв'язок густини потоку енергії електромагнітного поля з густиною енергії електромагнітного поля:

$$S = I = w \cdot v \quad (\text{VI.8})$$

Аналогічно можна впевнитись, що потік густини імпульсу електромагнітного поля чисельно дорівнює тиску електромагнітного поля, при умові, що вся енергія електромагнітного поля поглинається поверхнею.

$$p = g \cdot v = \frac{S}{v^2} v = \frac{S}{v} \quad (\text{VI.9})$$

і тому з урахуванням (VI.8) одержуємо:

$$p = w$$

Або по іншому. Дійсно ($\vec{g} = [\vec{D} \cdot \vec{B}]$), для плоскої електромагнітної хвилі маємо:

$$g = \varepsilon \varepsilon_0 E \cdot \mu \mu_0 H = \varepsilon \varepsilon_0 E \cdot \mu \mu_0 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \cdot E = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \cdot \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mu},$$

а швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \mu}},$$

тому $g \cdot v = w = p$

Якщо електромагнітна хвиля відбивається від деякої поверхні, то тиск дорівнює:

$$p = (1 + \alpha) \cdot g \cdot v = (1 + \alpha) \cdot w \quad (\text{VI.10})$$

де α – коефіцієнт відбивання.

Приклад VI.2. Плоска електромагнітна хвиля

$\sqrt{\varepsilon_0} \cdot E_y = \sqrt{\mu_0} \cdot H_z = a \sin \omega(t - \frac{x}{c})$ падає при $x = 0$ на нормальну до вісі OX плоску поверхню провідника. Знайти створений хвилею тиск, якщо знехтувати відбиттям хвилі.

Розв'язання: Провідник, який розташований вправо від координатної площини YOZ , буде повністю поглинати енергію ЕМ хвилі. Тобто, такий провідник – приклад абсолютно чорного тіла. Тому величина світлового тиску на поверхню провідника дорівнює:

$$p = \frac{\bar{S}}{c},$$

де \bar{S} – середнє за період ЕМ хвилі значення вектора Пойнтінга, яке визначається при $x = 0$. Оскільки

$$S(x = 0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2 \sin^2 \omega t$$

а, значить,

$$\bar{S}(x = 0) = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2 \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2$$

Тому світловий тиск дорівнює:

$$p = \frac{\bar{S}}{c} = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2 = \frac{1}{2} a^2 \cdot \varepsilon_0$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обґрунтувати та пояснити закони збереження (VI.1), (VI.2).
2. Показати, що при квазістатичній зарядці конденсатора його енергія збільшується за рахунок притоку з зовні електромагнітної енергії.
3. Довести, що джоулеве тепло, що виділяється в прямому провіднику з струмом i , дорівнює енергії електромагнітного поля, яка поступає в провідник ззовні.
4. Пластини (диски) плоского конденсатора, зарядженого до високої різниці потенціалів, з'єднанні довгим циліндричним дротом, який проходить поза конденсатором. Довести, що повний потік електромагнітної енергії з конденсатора дорівнює повному потоку електромагнітної енергії, яка втікає в провідник з зовні дроту. Обговорити явище з точки зору уяви про рух, перетворення і збереження енергії.

5. Сферичний заряджений конденсатор, який знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого паралельний вісі Z , може вільно обертатися навколо цієї вісі. З якою кутовою швидкістю буде обертатися конденсатор після його розрядки, якщо момент інерції конденсатора I . Радіуси внутрішньої та зовнішньої обкладинок конденсатора дорівнюють, відповідно, a та b , рис. VI.2.

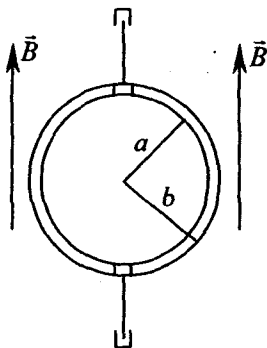


Рис. VI.2. Сферичний заряджений конденсатор знаходиться в однорідному магнітному полі

6. Визначити силу, з якою електромагнітний потік з інтенсивністю I діє на дзеркальну краплину радіуса r_0 .

7. Визначити сумарний потік енергії та імпульс електромагнітного поля ЗЧ, що рухається рівномірно з швидкістю V . Розглянути випадок $V \ll c$ та $V \approx c$.

8. Плоский повітряний заряджений конденсатор, який знаходиться всередині соленоїду зі струмом, утворює однорідне поле. Конденсатор пробивається електричною іскрою вздовж його вісі і розряджається. Як зміниться механічний імпульс системи після пробую? Обговорити результат з точки зору закону збереження імпульсу.

9. В задачі №8 конденсатор не пробивається, а розривається електричне коло батареї, що живить соленоїд. Як в результаті цього зміниться механічний імпульс системи?

10. Плоска електромагнітна хвиля $E_y = H_z = a \sin \omega(t - \frac{x}{c})$ падає при $x = 0$ на нормальну до вісі Ox площку поверхню провідника. Знайти створений хвилею тиск.

11. На орбіті Землі потік сонячної радіації дорівнює приблизно $1,510^3 \frac{Bm}{m^2}$. Обчислити середні квадратні значення \vec{E} та \vec{H} світлової хвилі.

12. Обчислити середньоквадратичне значення вектора \vec{E} та \vec{H} в випромінюванні 100Вт лампи на відстані 1м від неї.

13. Обчислити величину сили, яка діє на Землю через тиск світових променів, враховуючи що:

- поверхня Землі зовсім чорна;
- поверхня Землі зовсім дзеркальна.

14. Як змінюється відношення сили світлового тиску зі сторони Сонця до сили тяжіння при зменшенні об'єму тіла, яке опромінюється?

15. Ізольований постійний магніт заряджений до деякого потенціалу, тому навколо магніту буде і електричне і магнітне поле. Що можна сказати про вектор \vec{S} та про рух електромагнітної енергії?

16. Протони, які мають однакову швидкість v , утворюють пучок круглого перерізу з струмом i . Знайти вектор Пойнтінга \vec{S} поза пучком.

17. Струм, який протікає по обмотці довгого прямого соленоїда збільшується. Показати, що швидкість зростання енергії магнітного поля в соленоїді дорівнює потоку вектора Пойнтінга через його бічну поверхню.

18. Енергія від джерела постійної напруги U передається до споживача по довгому коаксіальному кабелю з дуже малим опором, струм в кабелі i . Знайти потік енергії через поперечний переріз кабелю.

19. При якій густині потоку енергії плоских електромагнітних хвиль не дуже великої частоти настає пробій в повітрі?

20. Циліндричний заряджений конденсатор розміщений в однорідному магнітному полі вектор індукції якого паралельний його вісі і навколо якої він може вільно обертатись.

- з якою кутовою швидкістю буде обертатися конденсатор після його розрядки?
- описати явище в випадку, коли конденсатор не розряджається, а магнітне поле вимикається.

21. Довгий циліндр радіуса a заряджений рівномірно по поверхні обертається навколо своєї вісі з кутовою швидкістю ω . Знайти енергію магнітного поля на одиницю довжини циліндра, якщо лінійна густина заряду циліндра λ та $\mu = 1$.

22. Тонке рівномірно заряджене кільце радіуса $a = 10\text{см}$ обертається навколо своєї вісі з кутовою швидкістю $\omega = 100 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Зайти відношення об'ємних густин енергії магнітного та електричного полів на вісі кільця в точці, яка знаходиться від його центра на відстані $l = a$.

VII. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОТЕНЦІАЛИ. РІВНЯННЯ ПУАССОНА. МАГНІТНИЙ МОМЕНТ.

Для довільної електродинамічної системи, що характеризується розподілом зарядів $\rho(\vec{r}, t)$ і струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$ розв'язки рівнянь Даламбера

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \vec{j} \quad (\text{VII.1})$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (\text{VII.2})$$

дають значення електромагнітних потенціалів $\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\varphi(\vec{r}, t)$. Тоді вектор індукції магнітного поля та вектор напруженості електричного поля довільної електродинамічної системи з допомогою електромагнітних потенціалів $\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\varphi(\vec{r}, t)$ визначається так:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{VII.3})$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{VII.4})$$

Крім того, що електромагнітні потенціали характеризуються градієнтною інваріантністю, вони задовольняються умовою калібровки Лоренца:

$$\text{div} \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII.5})$$

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Рівняння Даламбера (VII.1) (VII.2) мають розв'язки у вигляді потенціалів, які запізнюються (VII.6) (VII.7). Вирази (VII.6) (VII.7) визначають електромагнітні потенціали в довільній точці простору $P(\vec{r})$ в довільний момент часу t :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (\text{VII.6})$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV', \quad (\text{VII.7})$$

де \vec{r} - радіус-вектор, що визначає положення точки поля $P(\vec{r})$, \vec{r}' - радіус-вектор, що визначає положення елементарного джерела поля, $dq = \rho(\vec{r}', t') dV'$ або $id\vec{l} = \vec{j}(\vec{r}', t') dV'$, $R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$ - віддаль точки поля від елементарного джерела поля, V' - об'єм в якому розподілені заряди та струми (об'єм простору, в якому знаходиться електродинамічна система), $t' = t - \frac{R}{c}$, рис. VII.1.

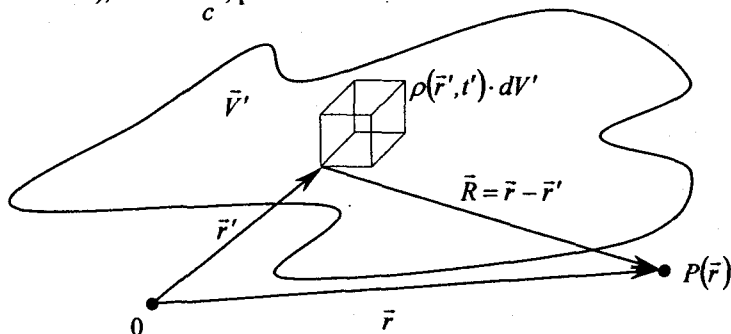


Рис. VII.1. Пояснення щодо геометричних та фізичних величин, які входять в вирази для скалярного та векторного потенціалів (VII.6) (VII.7)

Потенціали Лінара-Віхерта (VII.8), (VII.9) визначають електромагнітні потенціали, які створюються рухомою ЗЧ:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \phi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v}}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t - \frac{R}{c}}} \quad (\text{VII.8})$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t - \frac{R}{c}}} \quad (\text{VII.9})$$

Це потенціали електромагнітного поля, яке породжується окремою ЗЧ, яка рухається зі швидкістю \vec{v} . Значення величини $\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t - \frac{R}{c}}$, яка

входить в вирази (VII.8) та (VII.9) необхідно знаходити в момент $t' = t - \frac{R}{c}$.

Для стаціонарного електромагнітного поля із рівнянь Даламбера одержуємо рівняння Пуассона для потенціалів \vec{A} та ϕ :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j} \quad (\text{VII.10})$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \quad (\text{VII.11})$$

Розв'язки (VII.10) та (VII.11) мають вигляд:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{R} dV' \quad (\text{VII.12})$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV', \quad (\text{VII.13})$$

де $\vec{j}(\vec{r}')$, $\rho(\vec{r}')$ - густина струму та густина заряду; \vec{r} , \vec{r}' - радіус-вектори, що визначають, відповідно, точку поля та положення елементарного об'єму dV' в розподілі зарядів і струмів.

Далі, якщо це необхідно, знаходять напруженість електричного \vec{E} та індукція магнітного поля \vec{B} ЕМП

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

Магнітний момент елементарного струму \vec{l} :

$$\vec{p}_m = iS\vec{n}, \quad (\text{VII.14})$$

де S - площа обмежена контуром i , \vec{n} - одиничний орт до поверхні S .

Приклади розв'язування задач

Приклад VII.1. Нескінченно довгий круглий циліндр радіуса a рівномірно заряджений по об'єму. Визначити φ та \vec{E} всередині та зовні циліндра.

Розв'язання: Виходячи із симетрії задачі розв'язок її слід шукати в циліндричній системі координат. Рівняння Пуассона має вигляд:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Оскільки потенціал залежить тільки від r то дія оператора Лапласа на φ дорівнює:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Таким чином, рівняння Пуассона приймає вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\rho/\epsilon_0 \quad \text{при } (0 < r < a) \quad (\text{VII.15})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 \quad \text{при } (r > a) \quad (\text{VII.16})$$

Інтегрування (VII.15) і (VII.16) дає:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1 \quad (\text{VII.17})$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2, \quad (\text{VII.18})$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 - постійні інтегрування.

Очевидно, що потенціал φ_1 у всіх точка повинен мати кінцеве значення, тому слід прийняти $A_1 = 0$ (бо при $r \rightarrow 0, \ln r \rightarrow \infty$). Зручно далі потенціал всередині циліндра нормувати умовою $\varphi_1(0) = 0$, а тоді $B_1 = 0$.

За умовою задачі на поверхні циліндра відсутні заряди, тому напруженість електричного поля на поверхні циліндру неперервна.

Умови неперервності потенціалу та першої похідної від φ по r при $r = a$ дають два алгебраїчних рівняння для знаходження констант A_2, B_2 :

$$A_2 \ln a + B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2, \quad \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2,$$

$$B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 - A_2 \ln a = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \ln a$$

Тому потенціал в довільній точці простору визначається такими функціями:

$$\text{при } (0 < r \leq a) \quad \varphi_1(r) = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \quad (\text{VII.19})$$

$$\text{при } (r \geq a) \quad \varphi_2(r) = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \quad (\text{VII.20})$$

Тоді напруженість електричного поля

$$\text{при } (0 < r \leq a) \quad E_r = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} r$$

$$\text{при } (r \geq a) \quad E_r = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r}$$

Якщо врахувати, що $\rho \pi a^2 = \tau$ є лінійною густиною заряду, то напруженість електричного поля поза межами циліндру можна записати так:

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (\text{VII.21})$$

Приклад VII.2. Диск радіусу a рівномірно заряджений, заряд q , рис. VII.2. Знайти потенціал та напруженість електричного поля в точках на осі диску.

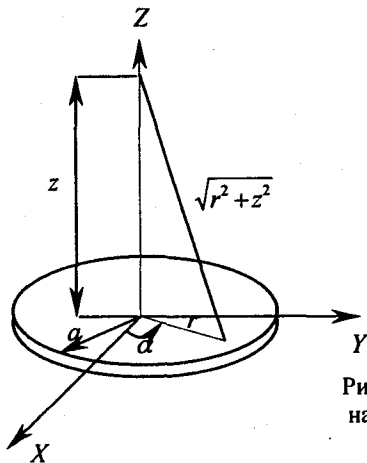


Рис. VII.2. Знаходження потенціалу та напруженості електричного поля, що створюється зарядженим диском

Розв'язання: Виходячи із закону Кулона та принципу суперпозиції для потенціалу маємо (див. також (VII.13)):

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sigma = \frac{q}{\pi a^2}$$

Симетрія задачі вимагає переходу до полярної СК, $x^2 + y^2 = r^2$, $dx \cdot dy = r dr d\alpha$. Тому попередній вираз інтегруємо в полярній СК:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z \right)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \quad (\text{VII.22})$$

Цей результат співпадає з тим, що ми отримали раніше іншим методом (див. тему II).

Дослідимо розв'язок (VII.22).

Так, при $z \gg a$:

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/z^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} + \dots$$

$$E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2}$$

Тобто, на великих відстанях від розподілу зарядів напруженість електричного поля співпадає з полем точкового заряду.

При $z \ll a$ другим доданком в дужках виразу (VII.22) можна знехтувати порівняно з одиницею, і тоді одержуємо:

$$E_z(z \ll a) \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

тобто, в точках дуже близьких до зарядженого диску поле приблизно таке, як поле нескінченної рівномірно зарядженої площини.

Приклад VII.3. Знайти потенціал та напруженість електричного поля, що створюється рівномірно зарядженою сферою радіуса R , заряд q .

Розв'язання: Виходячи із симетрії задачі, величина потенціалу $d\varphi$, який створюється нескінченно малим елементом зарядженої поверхні в точці поля P , рис. VII.3.

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\alpha}{\rho}, \quad (\text{VII.23})$$

де $R^2 \sin\theta d\theta d\alpha = dS$ елемент поверхні сфери в сферичній СК, полярна вісь якої співпадає з вектором \vec{r} .

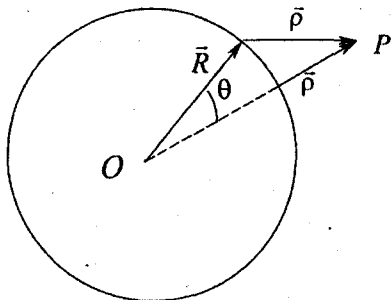


Рис. VII.3. До обчислення потенціалу та напруженості електричного поля зарядженої сфери

Із рис. видно, що $\vec{\rho} = \vec{R} - \vec{r}$.

Якщо взяти диференціал від обох частин рівності $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta$, то одержимо:

$$2\rho d\rho = Rr \sin\theta d\theta$$

Це дозволяє переписати (VII.23) в такому вигляді:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} d\rho d\alpha$$

Після інтегрування по поверхні всієї сфери знаходимо

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{|r-R|}^{r+R} d\rho = \frac{1}{2} \frac{\sigma R}{r} [\rho]_{r-R}^{r+R} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \text{ якщо } (r > R) \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \text{ якщо } (r < R) \end{cases}$$

Таким чином, для напруженості електричного поля одержуємо:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ якщо } (r > R) \\ 0 \text{ якщо } (r < R) \end{cases} \quad (\text{VII.24})$$

Тобто, поза межами рівномірно зарядженої сфери напруженість поля така як начебто увесь заряд сфери знаходиться в її центрі.

Приклад VII.4. Поле створюється рівномірно зарядженою ниткою, довжина якої $2l$. Знайти потенціал та напруженість електричного поля в довільній точці простору.

Розв'язання: Якщо початок координат помістити в центрі нитки, то потенціал поля створеного елементом заряду $\tau dz'$ в точці $P(r, z)$ дорівнює:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}$$

Значить, потенціал електричного поля, який створюється всією зарядженою ниткою

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{\tau dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z - l + \sqrt{r^2 + (z - l)^2}}{z + l + \sqrt{r^2 + (z + l)^2}} \right) \quad (\text{VII.25})$$

А компоненти напруженості електричного поля знаходяться так:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + l)^2}} \right)$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(\frac{z - l}{\sqrt{r^2 + (z - l)^2}} - \frac{z + l}{\sqrt{r^2 + (z + l)^2}} \right)$$

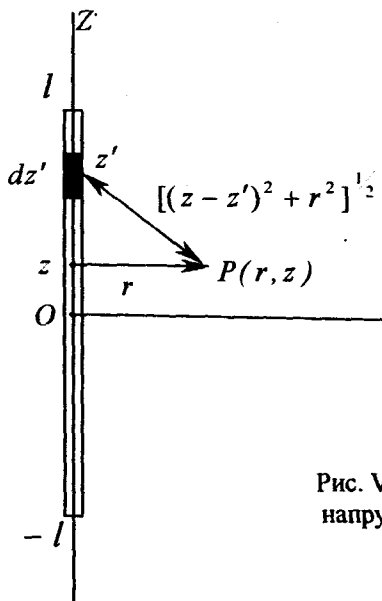


Рис. VII.4. До обчислення потенціалу та напруженості електричного поля лінійного заряду

Дослідимо розв'язки. Так, при $l \rightarrow \infty$ одержуємо знайомі результати:

$$E_z = 0, E_r = \tau / (2\pi\epsilon_0 r),$$

а потенціал при $l \rightarrow \infty$ теж прямує до нескінченості:

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} [\ln r - \ln(2l)] \rightarrow \infty$$

Це являється наслідком того, що заряд розташований не в кінцевій області простору і тому формулу (VII.25) не можна використовувати для знаходження потенціалу у випадку $l \rightarrow \infty$.

Але при великих віддальх точки поля від нитки ($R = \sqrt{r^2 + z^2} \gg l$) із розв'язку (VII.25) знаходимо

$$\varphi = \frac{\tau 2l}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R},$$

де $q = 2\tau \cdot l$. Тобто, на віддальх набагато більших ніж розміри нитки поле близьке до кулонівського.

Приклад VII.5. Дві металеві пластини утворюють кут α_0 , рис. VII.5. Довжина пластин в напрямку перпендикулярному рисунку нескінченна. Різниця потенціалів між пластинами U_0 . Знайти напруже-

ність електричного поля між пластинами та ємність, що приходится на одиницю довжини, ширина пластин $b - a$. В точці O пластини не доторкуються, але знаходяться досить близько одна від одної, і тому крайовими ефектами слід знехтувати.

Розв'язання: Поле між пластинами характеризується аксиальною симетрією. Тому вибираємо циліндричну систему координат, вісь Z якої направлена перпендикулярно до площини рисунку. У нас α - аксиальний кут, r - віддаль від осі. Тоді рівняння Лапласа для нашого випадку має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (\text{VII.26})$$

де враховано, що $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\varphi(r, \alpha) = R(r) \Phi(\alpha) \quad (\text{VII.27})$$

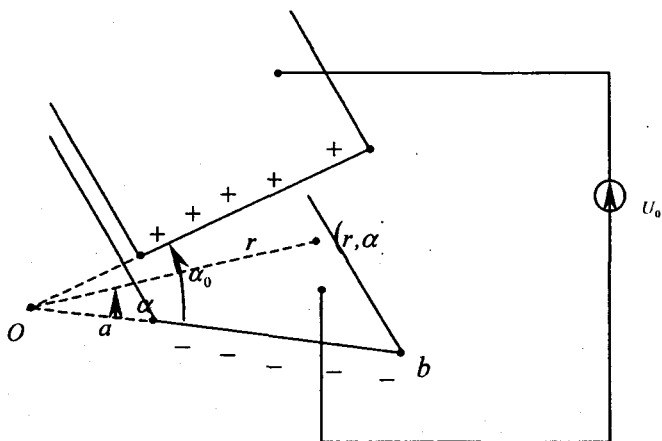


Рис. VII.5. До визначення поля конденсатора з непаралельними пластинами

Підставляємо (VII.27) в (VII.26), і помноживши потім обидві частини рівності на $\frac{r^2}{R\Phi}$, одержуємо

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2}$$

Ліва та права частина рівності, як бачимо, залежать від різних і незалежних величин. Тому обидві вони дорівнюють одній і тій же константі. Тобто

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -n^2 \quad (\text{VII.28})$$

Розв'язок для Φ очевидний:

$$\Phi = \begin{cases} B_1 \alpha + B_2 & \text{при } n = 0 \\ A_1 \sin n\alpha + A_2 \cos n\alpha & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$

Розв'язок для R будемо шукати і вигляді $R = Ar^\beta$ причому $\beta \neq 0$. Підставляючи такий розв'язок в перше із рівнянь (VII.28) одержуємо

$$\beta^2 = n^2$$

Тобто

$$\beta = \pm n$$

При $n = 0$ перше із рівнянь (VII.28) спрощується

$$r \frac{dR}{dr} = \text{const}$$

І може бути задоволене функцією

$$R = D_1 \ln r + D_2$$

Таким чином, функція R має вигляд:

$$R = \begin{cases} D_1 \ln r + D_2 & \text{при } n = 0 \\ C_1 r^n + C_2 r^{-n} & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$

Знайдемо розв'язання задачі, яке не залежить від r , тобто при $n=0$. Тоді $D_1 = 0$, а $\varphi(\alpha) = B_1 \alpha + B_2$. Використаємо граничні умови задачі:

$$\varphi(0) = 0, \varphi(\alpha_0) = U_0$$

І одержуємо $B_2 = 0, U_0 = B_1 \alpha_0$. Таким чином для $\varphi(\alpha)$ маємо:

$$\varphi(\alpha) = U_0 \alpha / \alpha_0$$

Тоді напруженість електричного поля між пластинами конденсатора дорівнює:

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -U_0 / (r \alpha_0)$$

Поверхнева густина заряду на пластинах

$$\sigma_1 = \varepsilon \cdot E_\alpha(\alpha = 0) = -\varepsilon \cdot U_0 / (r \alpha_0),$$

$$\sigma_2 = -\varepsilon \cdot E_\alpha(\alpha = \alpha_0) = \varepsilon \cdot U_0 / (r \alpha_0)$$

Заряд кожної із пластин (за модулем) на довжині l виражається формулою:

$$Q = l \int_a^b \sigma dr = (l \varepsilon_0 U_0 / \alpha_0) \ln(b/a)$$

Тому ємність на довжині l дорівнює:

$$C = \frac{Q \cdot l \varepsilon_0 \ln(b/a)}{U_0 \alpha_0}$$

Приклад VII.6. 8. Струм I протікає по лінійному провіднику. Знайти векторний потенціал \vec{A} та напруженість магнітного поля \vec{H} у випадках:

- нескінченно довгого провідника;
- провідника довжиною L .

Розв'язання: Початок координат розмістимо в центрі відрізка провідника зі струмом, рис. VII.6. Вісь OZ направлена вздовж ППС. І оскільки МП прямолінійного струму аксиально симетричне, то для наших цілей достатньо знайти векторний потенціал та індукцію МП в точках площини YOZ .

Тоді, згідно формули (VII.12), яка для лінійних струмів приймає вигляд $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot d\vec{l}}{R}$, де R - віддаль точки поля від елемента струму $I d\vec{l}$, для A_z одержуємо

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\left[(z-z')^2 + r^2 \right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{-z + L/2 + \left[(z - L/2)^2 + r^2 \right]^{1/2}}{-(z + L/2) + \left[(z + L/2)^2 + r^2 \right]^{1/2}} \right]$$

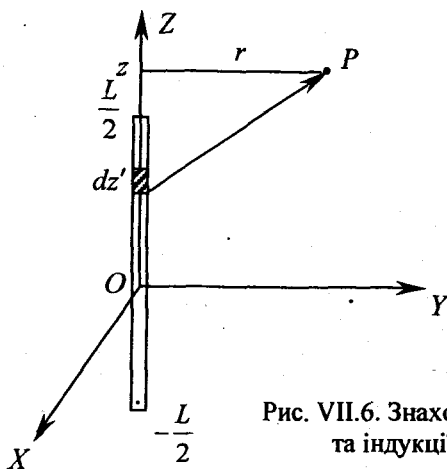


Рис. VII.6. Знаходження вектор-потенціалу та індукції МП відрізка струму

Індукція МП знаходиться по формулі (VII.3). В циліндричній СК, виходячи із симетрії нашої задачі, не рівна нулеві тільки одна компонента поля B_φ :

$$B_\varphi = -\partial A_z / \partial r$$

$$B_\varphi = \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{-z + L/2}{\left[r^2 + (z - L/2)^2\right]^{3/2}} + \frac{z + L/2}{\left[r^2 + (z + L/2)^2\right]^{3/2}} \right]$$

У випадку дуже довгого ППС для вектор-потенціалу та B_φ маємо:

$$A_z(L \rightarrow \infty) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{const}$$

$$B_\varphi(L \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Приклад VII.7. Знайти векторний потенціал \vec{A} та напруженість магнітного поля \vec{H} , які створюються струмом I , що протікає по коаксіальному кабелю, рис. VII.7.

Розв'язання: Задача, як бачимо, характеризується аксіальною симетрією. Тому використовуємо циліндричну СК. $\vec{A} = \vec{A}(r)$, векторний потенціал не залежить від z та від φ . Якщо вісь OZ направлена вздовж ППС, то не рівна нулеві буде лише одна компонента \vec{A} , а саме A_z .

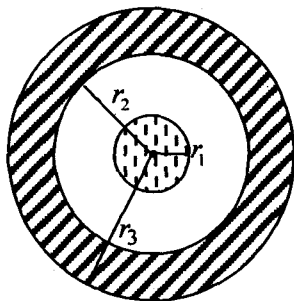


Рис. VII.7. Знаходження вектор-потенціалу та індукції МП, які створюються коаксіальним кабелем із струмом I

Далі цю компоненту ми позначатимемо просто A . І тоді рівняння Пуассона в чотирьох областях простору мають вигляд.

$$\text{При } 0 < r < r_1: \quad \nabla^2 A_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2}$$

$$\text{При } r_1 < r < r_2: \quad \nabla^2 A_2 = 0$$

$$\text{При } r_2 < r < r_3: \quad \nabla^2 A_3 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

При $r_3 < r < \infty$: $\nabla^2 A_4 = 0$

де $j_1 = I/(\pi r_1^2)$, $j_2 = 0$, $j_3 = I[r_3^2 - r_2^2]$, $j_4 = 0$.

Розв'язки цих рівнянь такі:

$$A_1 = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2} + C_1 \ln r + C_2 \quad (0 < r < r_1),$$

$$A_2 = C_3 \ln r + C_4 \quad (r_1 < r < r_2),$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi(r_3^2 - r_2^2)} + C_5 \ln r + C_6 \quad (r_2 < r < r_3),$$

$$A_4 = C_7 \ln r + C_8 \quad (r_3 < r < \infty).$$

Значення констант інтегрування знаходимо із граничних умов. Тоді вектор-потенціал та магнітна індукція в першій області

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} - \frac{C_1}{r}.$$

Очевидно, що при $r = 0$ значення B_1 повинно бути кінцевим. Тобто, $C_1 = 0$. Далі прийнемо значення вектор-потенціалу A_1 при $r = 0$ рівним нулеві, $A_1(0) = 0$. Це дає нам $C_2 = 0$. Тому, для A_1 та B_1 одержуємо:

$$A_1 = -\mu_0 I r^2 / (4\pi r_1^2), \quad B_1 = \mu_0 I r / (2\pi r_1^2)$$

Для області $r_1 < r < r_2$ отримуємо

$$B_2 = -C_3 / r$$

Із граничної умови для вектора \vec{B} , $B_2(r_1) = B_1(r_1) = -\frac{C_3}{r_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$,

знаходимо значення константи $C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$.

А із умови неперервності векторного потенціалу при $r = r_1$ знаходимо C_4 :

$$C_4 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_1$$

Тому для векторного потенціалу та індукції МП в області $r_1 < r < r_2$ маємо:

$$A_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Індукція в оболонці кабелю ($r_2 < r < r_3$) дорівнює

$$B_3 = -\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} - \frac{C_5}{r}$$

Із граничних умов $B_2(r_2) = B_3(r_2)$ знаходимо:

$$C_5 = \frac{\mu_0 I r_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)},$$

$$C_6 = \frac{\mu_0 I r_3^2}{4\pi(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{\mu_0 I r_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

Звідси

$$A_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r}{r_2} + 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right],$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}.$$

Використовуючи граничні умови при $r = r_3$ знаходимо векторний потенціал та індукцію магнітного поля в області ($r_3 < r < \infty$)

$$A_4 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = \text{const}, \quad B_4 = 0.$$

Приклад VII.8. Знайти векторний потенціал та індукцію МП, які створюються елементарним струмом i .

Розв'язання. Виберемо форму елементарного струму у вигляді прямокутника зі сторонами l_1, l_2, l_3, l_4 , рис. VII.8.

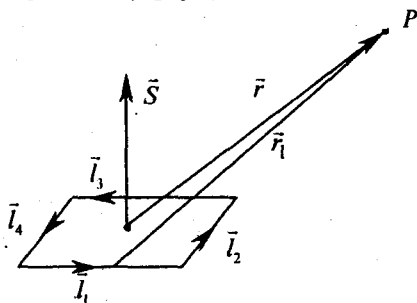


Рис. VII.8. Знаходження векторного потенціалу елементарного струму

Тоді, згідно означення, (VII.12)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{l_1/l_2/l_3/l_4} \frac{d\vec{l}}{r} \quad (\text{VII.35})$$

Сторони паралелограма (елементарного струму) набагато менші віддалі точки поля від відповідних сторін. Тому при інтегруванні одержуємо:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\frac{1}{r_1 l_1} \int d\vec{l} + \frac{1}{r_2 l_2} \int d\vec{l} + \frac{1}{r_3 l_3} \int d\vec{l} + \frac{1}{r_4 l_4} \int d\vec{l} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\frac{\vec{l}_1}{r_1} + \frac{\vec{l}_2}{r_2} + \frac{\vec{l}_3}{r_3} + \frac{\vec{l}_4}{r_4} \right),$$

де r_1, r_2, r_3, r_4 - відділи від точки поля до середини відповідних сторін елементарного струму.

Враховуючи, що $\vec{l}_1 = -\vec{l}_3$ $\vec{l}_2 = -\vec{l}_4$ знаходимо

$$\frac{\vec{l}_1}{r_1} + \frac{\vec{l}_3}{r_3} = \vec{l}_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right) = \vec{l}_1 \left(\frac{r_3 - r_1}{r_1 r_3} \right) \approx \frac{\vec{l}_1 (-\vec{l}_2 \cdot \vec{r})}{r^3} = -\frac{\vec{l}_1 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r})}{r^3}$$

$$\frac{\vec{l}_2}{r_2} + \frac{\vec{l}_4}{r_4} = \vec{l}_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \vec{l}_2 \left(\frac{r_4 - r_2}{r_2 r_4} \right) = \frac{\vec{l}_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r})}{r^3}$$

Рис. VII.9. пояснює ці обчислення

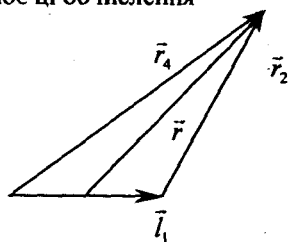


Рис. VII.9.

На основі очевидних перетворень

$$\vec{r}_4 = \vec{l}_1 + \vec{r}_2$$

$$r_4^2 = l_1^2 + r_2^2 + 2\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2$$

$$r_4^2 - r_2^2 = (r_4 - r_2)(r_4 + r_2) = l_1^2 + 2\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2$$

Тому, нехтуючи доданками другого порядку малості по l_1 , знаходимо:

$$r_4 - r_2 = \frac{2\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2 + l_1^2}{r_4 + r_2} \approx \vec{l}_1 \cdot \vec{r} / r$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} \left[\vec{l}_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}) - \vec{l}_1 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}) \right]$$

З урахуванням формули (A.17)

$$\vec{l}_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}) - \vec{l}_1 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}) = \vec{r} [\vec{l}_2 \vec{l}_1] = [\vec{r} \vec{l}_2] \vec{l}_1$$

та приймаючи до уваги, що $[\vec{r} \vec{l}_2] = \vec{S}$ являється вектором елементарної поверхні, яка охоплена струмом для векторного потенціалу одержуємо:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i[\vec{S}\vec{r}]}{r^3} \quad (\text{VII.36})$$

Величина $i\vec{S} = \vec{p}_m$ називається магнітним моментом елементарного струму.

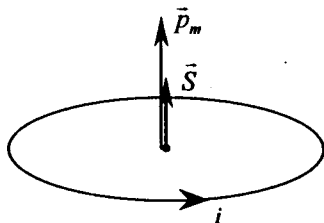


Рис. VII.10. Напрямок магнітного моменту утворює правий гвинт з напрямком струму в контурі

Відтак для векторного потенціалу та індукції магнітного поля, які створюються магнітним моментом маємо вирази:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m \cdot \vec{r}]}{r^3} \quad (\text{VII.37})$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right\} \quad (\text{VII.38})$$

Формула (VII.38) показує, що величина індукції магнітного поля магнітного моменту обернено пропорційна кубу віддалі точки поля від магнітного моменту. А величина індукції магнітного поля елемента струму, згідно закону Біо-Савара, обернено пропорційна квадрату цієї віддалі.

Приклад VII.9. Знайти потенціал та напруженість електричного поля, які створюються електричним диполем, рис. VII.11.

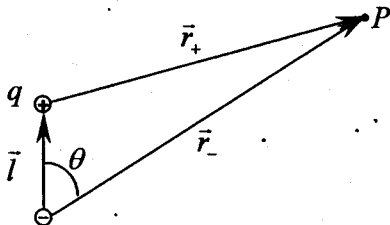


Рис. VII.11. Знаходження потенціалу диполя

Розв'язання:

Очевидно, що потенціал дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_+ r_-}$$

Оскільки $r \gg l$, $r_- - r_+ = l \cos \theta$, $r_+ r_- \approx r^2$, то

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \quad (\text{VII.39})$$

Як бачимо розподіл потенціалу в просторі аксіально симетричний. Тому скористаємося циліндричною СК для знаходження компонент напруженості електричного поля диполя. Згідно формул (I.7) маємо

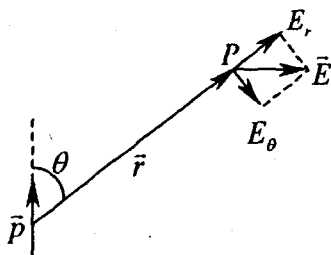


Рис. VII.12

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Тоді модуль вектора \vec{E} дорівнює:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \quad (\text{VII.40})$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

Приклад VII.10. Користуючись потенціалами Лієнара-Віхерта знайти напруженість електричного $\vec{E}(\vec{r}, t)$ та індукцію $\vec{B}(\vec{r}, t)$ магнітного полів, що створюється зарядженою частинкою, яка рухається з постійною швидкістю $\vec{v} = \text{const}$.

Розв'язання: Нехай ЗЧ рухається з постійною швидкістю $\vec{v} = \text{const}$ вздовж осі OX , рис. VII.13.

Оскільки ЗЧ рухається зі швидкістю \vec{v} , то в момент t вона буде знаходитись в точці з координатою $x = vt$ на вісі OX . Очевидно, що в момент $t = 0$ ЗЧ знаходиться у точці O .

Оскільки потенціали в точці поля $P(x, y, z, t)$ в момент t створюються положенням та значенням заряду в попередній момент часу (момент t'), то положення нашого заряду, який створив потенціали в момент t буде таким, як показано на рис. VII.13.

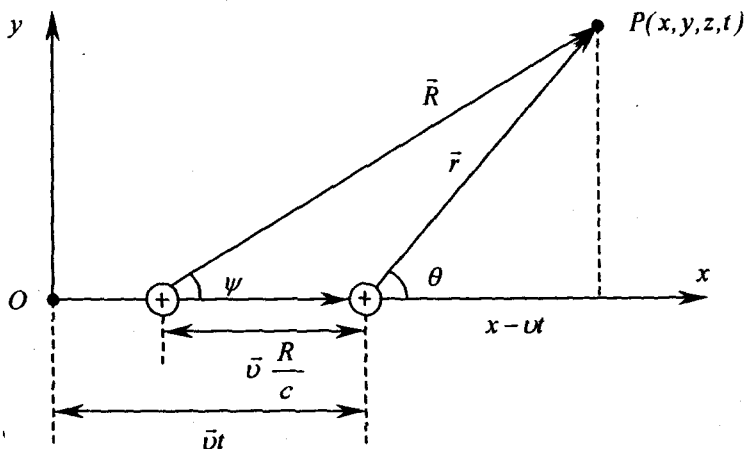


Рис. VII.13. Знаходження електромагнітного поля ЗЧ, що рухається з $\bar{v} = \text{const}$

Із рис. VII.13. видно, що зв'язок між радіус-вектором \bar{r} , проведеним із миттєвого положення заряду в дану точку поля та \bar{R} такий:

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{R}{c} \cdot \bar{v},$$

де \bar{R} - радіус-вектор, проведений від того положення ЗЧ, в якому вона знаходилася в попередній момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$.

Тому радіус-вектор \bar{r} виражається через R та \bar{R} так:

$$\bar{r} = \bar{R} - \bar{v} \cdot \frac{R}{c} \qquad r^2 = \left(\bar{R} - \frac{\bar{v} \cdot R}{c} \right)^2$$

Знайдемо r^2 :

$$r^2 = R^2 - \frac{2R}{c} (R \cdot \bar{v}) + \frac{v^2 \cdot R^2}{c^2} \qquad (\text{VII.41})$$

далі використаємо очевидне співвідношення:

$$[\bar{r} \cdot \bar{v}]^2 = [\bar{R} \cdot \bar{v}]^2 = R^2 v^2 \sin^2 \psi = R^2 v^2 (1 - \cos^2 \psi) = R^2 \cdot v^2 - (\bar{R} \cdot \bar{v})^2$$

З допомогою (VII.41) та останнього співвідношення знайдемо вираз:

$$r^2 - \frac{[\vec{r}, \vec{v}]^2}{c^2} = R^2 - \frac{2R}{c}(\vec{R} \cdot \vec{v}) + \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right)^2 = \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^2$$

Тоді величина $\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)$, що входить в означення скалярного

(VII.8) та векторного (VII.9) потенціалів Лієнара-Віхерта дорівнює:

$$\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right) = \sqrt{r^2 - \frac{[\vec{r}, \vec{v}]^2}{c^2}} = r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (\text{VII.42})$$

В формулі (VII.42) радіус-вектор, проведений із миттєвого положення ЗЧ в точку поля $P(x, y, z, t)$, рис. VII.13, визначається:

$$\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

В результаті скалярний та векторний потенціали Лієнара-Віхерта рівномірно рухомої ЗЧ дорівнюють:

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{VII.43})$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \varphi \quad (\text{VII.44})$$

Тепер ми можемо знайти електромагнітне поле в точці $P(x, y, z, t)$.

Магнітне поле в точці $P(x, y, z, t)$ дорівнює:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \text{rot}(\varphi \vec{v}) = \frac{1}{c^2} [\nabla \cdot (\varphi \vec{v})] = \frac{1}{c^2} [\nabla \varphi \cdot \vec{v}],$$

де використана формула векторного аналізу:

$$[\nabla \cdot (\varphi \vec{v})] = \varphi [\nabla \cdot \vec{v}] + [(\nabla \varphi) \cdot \vec{v}],$$

та враховано, що $[\nabla \vec{v}] = 0$, оскільки $\vec{v} = \text{const}$.

Знайдемо напруженість електричного поля використовуючи формулу:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

але $\dot{\vec{A}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \dot{\varphi}$, з іншого боку, може бути показано, що:

$$\dot{\varphi} = -(\vec{v} \cdot \nabla \varphi)$$

Дійсно, якщо довільна функція є функцією поля, то значення цієї величини буде таким самим, як і в попередній точці, в попередній момент часу:

$$f(x, y, z, t) = f(x - v_x \cdot dt, y - v_y \cdot dt, z - v_z \cdot dt, t - dt)$$

$$\text{тому } \frac{df}{dt} = \dot{f} = -(\vec{v} \cdot \nabla f).$$

Тобто, похідна по часі векторного потенціалу дорівнює:

$$\dot{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \dot{\varphi} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot (-\vec{v} \cdot \nabla \varphi)$$

І нарешті:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\vec{v}}{c^2} \{ -\vec{v} \cdot \nabla \varphi \}$$

З останньої рівності знайдемо градієнт скалярного потенціалу

$$-\nabla \varphi = \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla \varphi)$$

Підставимо цей вираз у формулу для індукції магнітного поля. Тоді маємо:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\nabla \varphi \cdot \vec{v}] = -\frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \nabla \varphi] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \{ \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla \varphi) \}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{E}]$$

Ми одержали зв'язок між напруженістю електричного та індукцією магнітного поля ЗЧ, що рухається з постійною швидкістю. По перше, вектор \vec{B} перпендикулярний векторам \vec{v} та \vec{E} , що ще раніше ми отримали із аналізу закону Біо-Савара. По-друге, можна стверджувати, узагальнюючи результат, що будь-яке "рухоме" електричне поле, яке характеризується напруженістю електричного поля \vec{E} породжує в тій самій просторово-часовій точці магнітне поле індукції \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{E}] \quad (\text{VII.45})$$

Повертаємося до знаходження напруженості електричного поля.

$$\vec{E} = -\nabla \varphi + \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla \varphi)$$

Компоненти вектора \vec{E} дорівнюють:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} (1 - \beta^2) = (1 - \beta^2) \cdot \frac{q(x - vt)}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1 - \beta^2) \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1 - \beta^2) \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (1 - \beta^2) \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

(VII.46)

де $s = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} = r \{1 - \beta^2 \sin^2 \theta\}^{1/2}$, якщо враховувати, що $\vec{r} = (x - \alpha) \cdot \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

Тоді, на підставі (VII.46) для вектора напруженості електричного поля ЗЧ, яка рухається з постійною швидкістю одержуємо:

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \beta^2) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3 (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (\text{VII.47})$$

або

$$\vec{E} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \left[(x - \alpha)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2) \right]^{3/2}}, \quad (\text{VII.48})$$

де \vec{r} - це радіус-вектор, який визначає положення точки поля відносно заряду в даний момент часу, θ - кут між векторами \vec{r} і \vec{v} .

Завдання для самостійної роботи

1. Впевнитися, що скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля характеризуються градієнтною інваріантністю.

2. Виходячи із рівнянь Максвелла одержати рівняння Даламбера та Пуассона для векторного та скалярного потенціалів.

3. Обґрунтувати та пояснити розв'язок рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, які запізнюються.

4. Пояснити принцип причинності в класичній механіці та класичній електродинаміці.

5. Обґрунтувати вираз для потенціалів Ліенара-Віхерта.

6. Знайти потенціал φ та напруженість електричного поля, утвореного рівномірно зарядженою з лінійною густиною заряду τ ниткою довжиною l та нескінченно довгою ниткою.

7. Знайти потенціал φ та напруженість електричного поля \vec{E} на вісі рівномірно зарядженого кільця. Радіус кільця r_0 , заряд q .

8. Знайти потенціал φ та напруженість електричного поля \vec{E} на осі рівномірно зарядженого диску радіуса r_0 , заряд диска q .

9. Обчислити потенціал φ та напруженість поля, яке утворюється зарядженою металевою кулею радіусом r_0 . Заряд кулі q . Знайти також власну електричну енергію кулі.

10. Знайти потенціал φ та напруженість поля, яке утворене електричним диполем.

11. Куля рівномірно заряджена з об'ємною густиною заряду ρ . Визначити напруженість електричного поля всередині та зовні кулі. Знайти власну електричну енергію заряду.

12. Нескінченно довгий круглий циліндр радіуса a рівномірно заряджений. Визначити φ та \vec{E} всередині та зовні циліндра.

13. Струм протікає по лінійному провіднику. Знайти векторний потенціал \vec{A} та напруженість магнітного поля \vec{H} у випадках:

- нескінченно довгого провідника;
- провідника довжиною L .

14. Плоский нескінченний шар товщиною $2a$ рівномірно заряджений. Знайти φ та \vec{E} в будь-якій точці простору.

15. Показати, що вектор-потенціал однорідного магнітного поля може бути записаний у вигляді $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H} \cdot \vec{r}]$.

16. В основному стані атому водню заряд електрона ($-e$) розподілений з об'ємною густиною заряду. $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$, де a – Боровський радіус, r – відстань від ядра. Обчислити φ та \vec{E} в атомі водню.

17. Струм проходить по металевій трубці, зовнішній та внутрішній радіус якої відповідно a та b . Знайти \vec{A} та \vec{B} в будь-якій точці простору.

18. Визначити магнітний момент зарядженого кільця радіуса a , яке обертається з кутовою швидкістю ω навколо вісі перпендикулярної до площини кільця і що проходить через його центр. Заряд кільця q . Як зміниться магнітний момент кільця, якщо його обертати навколо одного із діаметрів?

19. Однорідна немагнітна куля радіуса a , рівномірно заряджена по об'єму і обертається з кутовою швидкістю ω навколо вісі, яка проходить через центр. Визначити відношення $\frac{\vec{P}_m}{\vec{L}}$.

20. Власний магнітний момент електрона дорівнює: $\frac{eh}{2mc}$. Вважаючи, що цей момент зумовлений обертанням електрону навколо своєї вісі, визначити кутову швидкість цього обертання. Електрон розглядати, як кульку радіуса $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$, де e - заряд електрону, m - маса електрону.

21. Виходячи із виразів (VII.6) (VII.7) обґрунтувати формули для потенціалів Лієнара-Віхерта.

22. На основі (VII.8), (VII.9) одержати вирази для напруженості електричного та для індукції магнітного полів ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ.

VIII. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ. ДИПОЛЬНЕ ВИМІРЮВАННЯ

Хвильові рівняння для векторів поля \vec{E} та \vec{B} :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{VIII.1})$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{VIII.2})$$

мають розв'язок у вигляді плоскої хвилі:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left(t - \frac{r}{v} \right) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \left(t - \frac{r}{v} \right), \quad (\text{VIII.3})$$

де

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} \quad (\text{VIII.4})$$

швидкість розповсюдження електромагнітних збурень в однорідному та ізотропному середовищі.

Для плоскої монохроматичної хвилі, яка розповсюджується в однорідному та ізотропному середовищі, мають місце співвідношення:

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k} \cdot \vec{E}]}{\mu \mu_0 \omega}, \quad (\text{VIII.5})$$

$$\vec{E} = - \frac{[\vec{k} \cdot \vec{H}]}{\epsilon \epsilon_0 \omega}, \quad (\text{VIII.6})$$

де $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \cdot \vec{n}$ - хвильовий вектор.

У випадку ізотропних, немагнітних діелектриків амплітудні коефіцієнти відбиття та пропускання для ЕМ хвилі p -поляризації:

$$R_p = \frac{E_p^r}{E_p^i} = \frac{\text{tg}(\alpha - \beta)}{\text{tg}(\alpha + \beta)}, \quad (\text{VIII.7})$$

$$D_p = \frac{E_p^d}{E_p^i} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (\text{VIII.8})$$

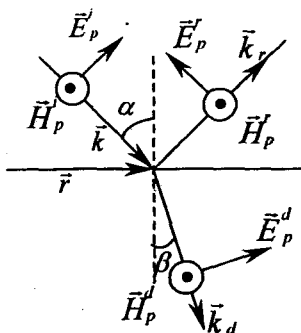


Рис. VIII.1. Відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі p -поляризації

Амплітудні коефіцієнти відбиття та пропускання для ЕМ хвилі S -поляризації, рис. VIII.2:

$$R_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (\text{VIII.9})$$

$$D_s = \frac{E_s^d}{E_s^i} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (\text{VIII.10})$$

Можна подати чотири різні формулювання умови квазістаціонарності (умов, коли можна знехтувати величиною $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ в підінтегральному виразі для потенціалів, що запізнюються):

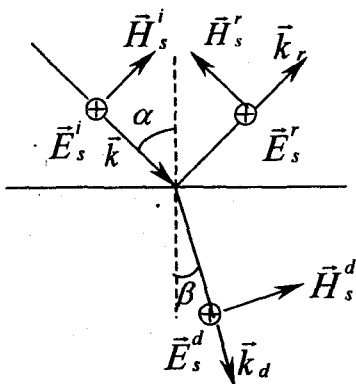


Рис. VIII.2. Відбиття та заломлення електромагнітної хвилі s -поляризації

1) $v \frac{L}{c} \ll L$ - віддаль, яку проходить ЗЧ за власний час запізнення набагато менша ніж розміри системи;

2) $v \ll c$, швидкість руху ЗЧ в електродинамічній системі набагато менша швидкості світла;

3) $\left(\frac{L}{v} \gg \frac{L}{c}\right)$, або $T \gg \tau$ - період квазіперіодичного руху ЗЧ набагато більший, ніж власний час запізнення;

4) $\lambda \gg L$ - довжина хвилі, що пов'язана з квазіперіодичним процесом в системі набагато більша, ніж розміри електродинамічної системи.

Область простору, що визначається нерівностями

$$\lambda \gg L, r \gg L \quad (\text{VIII.11})$$

називається хвилевою зоною.

Векторний потенціал в хвилевій зоні буде мати вигляд:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r'} \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r'}{c}) dV' \quad (\text{VIII.12})$$

Коли умова квазістаціонарності виконується, тоді у всіх точках системи в дану мить величина струму майже одна і та сама, і електромагнітні потенціали \vec{A} та φ в хвилевій зоні дорівнюють:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot \dot{\vec{P}}_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi r}, \quad (\text{VIII.13})$$

$$\varphi = \vec{n} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot c, \quad (\text{VIII.14})$$

де $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, \vec{r} - радіус-вектор точки поля, $\vec{P}_{t-\frac{r}{c}}$ - дипольний момент системи в момент часу $t - \frac{r}{c}$.

Електромагнітне поле в хвилевій зоні

Електромагнітне поле в хвилевій зоні

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right] \quad (\text{VIII.15})$$

$$\vec{E} = c \cdot \left[\vec{B} \cdot \vec{n} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \right]. \quad (\text{VIII.16})$$

Інтенсивність випромінювання в елементарному тілесному кути $d\Omega$, який стягується площадкою dS визначається так:

$$dI = \vec{S} \cdot d\vec{S} = S r^2 d\Omega = \frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c} d\Omega \quad (\text{VIII.17})$$

або

$$dI = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right]^2 d\Omega, \quad (\text{VIII.18})$$

де $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

Інтенсивність дипольного випромінювання по всім напрямках в вакуумі дорівнює:

$$I = \frac{\ddot{\vec{p}}^2}{6\pi c} \cdot \mu_0 \quad (\text{VIII.19})$$

Середнє значення інтенсивності випромінювання осцилятора:

$$\bar{I} = \frac{q^2 \omega_0^4 r_0^2 \mu_0}{c \cdot 12\pi}$$

Сила радіаційного тertia та коефіцієнт затухання:

$$\bar{F}_s = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \cdot \vec{q}, \quad \gamma = \frac{1}{6\pi} \frac{q^2 \omega^2}{\epsilon_0 m c^3}$$

Класична теорія ЕМ поля приводить до розумних (фізично прийнятних) результатів лише тоді, коли:

$$\frac{6\pi m c}{\mu_0 q^2} \gg \omega, \quad \frac{c}{\omega} \gg \frac{q^2}{m c^2 \cdot 6\pi \epsilon_0} \quad \lambda \gg r_0 \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

де r_0 – так званий класичний радіус електрона:

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \quad (\text{VIII.20})$$

Дисперсійна формула класичної електродинаміки

$$\sigma = \left(\frac{q^2}{4\pi m c^2 \epsilon_0} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot \frac{8\pi}{3} \quad (\text{VIII.21})$$

Приклади розв'язування задач.

Приклад VIII.1. Знайти скалярний потенціал електродинамічної системи в хвильовій зоні використовуючи умову калібровки Лоренца.

Розв'язання: Із умови калібровки Лоренца:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

одержуємо диференціальне рівняння для скалярного потенціалу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \text{div} \left(\frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}}{4\pi \cdot r} \right)$$

Будемо вважати, що вектор $\dot{\vec{p}}$ направлений по осі OZ , тоді:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial z} + \dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}$$

Використовуючи далі очевидні співвідношення:

$$\dot{\bar{p}} = \dot{\bar{p}}_r; \quad \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \ddot{\bar{p}} \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}, \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{z}{r}, \quad \text{де } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

для дивергенції векторного потенціалу знаходимо:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\ddot{\bar{p}} \cdot z}{cr^2} - \frac{\dot{\bar{p}} \cdot z}{r^3} \right\}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \cdot \operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \left\{ \frac{\ddot{\bar{p}} \cdot z}{r^2} + \frac{\dot{\bar{p}} \cdot z \cdot c}{r^3} \right\}$$

А інтегрування останнього рівняння дає вираз для скалярного потенціалу в хвилевій зоні:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \left(\frac{\dot{\bar{p}} \cdot z}{r \cdot r} + \frac{\bar{p} \cdot z \cdot c}{r^3} \right)$$

В загальному випадку, коли дипольний момент \bar{p} електродинамічної системи орієнтований довільно, то:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\bar{p}} \cdot \vec{r}}{r \cdot r} + \frac{\mu_0 c^2 \bar{p} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (\text{VIII.22})$$

Другий доданок в (VIII.22) являє собою потенціал, що створюється стаціонарним дипольним моментом (див. Приклад VII.9.):

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\bar{p} \cdot \vec{r}}{r^2} = \varphi_{\text{ст. диполь}},$$

значення якого обернено пропорційні r^2 , тобто на великих відстанях цим доданком можна знехтувати. І тоді, оскільки $\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \dot{\bar{p}}$, скалярний потенціал хвилевій зоні дорівнює:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{n} \cdot \bar{A} \cdot c \quad (\text{VIII.23})$$

Приклад VIII.2. Перпендикулярно до поверхні провідника з провідністю λ та постійними μ та ϵ падає плоска електромагнітна хвиля з частотою ω . Нехтуючи струмами зміщення порівняно зі струмами провідності, визначити, на якій глибині всередині провідника поле зменшиться в e разів?

Розв'язання: При такому виборі СК, рис. VIII.3, для ЕМП хвилі можна записати:

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y = E(x) \cdot e^{i\omega t}$$

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H(x) \cdot e^{i\omega t}$$

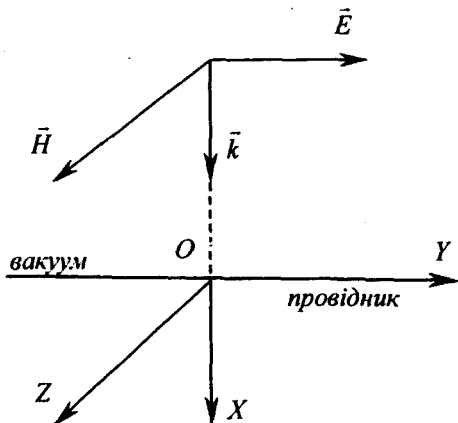


Рис. VIII.3. На поверхню провідника падає плоска електромагнітна хвиля

Електромагнітне поле в провіднику визначається рівняннями:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \lambda \vec{E} \quad (1)$$

(якраз в цьому рівнянні ми струмами зміщення $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ нехтуємо в порівнянні з струмами провідності \vec{j})

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

Згідно умові задачі

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{j} e^{i\omega t} \frac{dH}{dx}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{k} e^{i\omega t} \frac{dE}{dx}$$

І тоді рівняння (1) та (2) слід переписати у вигляді:

$$\frac{dH}{dx} = -\lambda E \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dx} = -i\omega\mu H \quad (4)$$

Знайдемо похідну по x рівняння (3) і підставивши в нього $\frac{dE}{dx}$ із

(4) одержимо диференціальне рівняння для визначення амплітуди магнітного поля хвилі:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - i\lambda\omega\mu H = 0 \quad (5)$$

Подібне рівняння одержуємо і для амплітуди вектора \vec{E} . Розв'язуємо (5). Корені характеристичного рівняння $k^2 - i\lambda\omega\mu = 0$, яке відповідає (5) такі:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda\omega\mu} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Умові задачі відповідає лише другий корінь, k_2 , (бо корню k_1 відповідає хвиля, амплітуда якої збільшується при поширенні хвилі в глибину провідника).

Таким чином, розв'язок рівнянь (3) та (4) слід записати так:

$$\begin{cases} E(x) = E(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\lambda\omega\mu}{2}} x} \cos \sqrt{\frac{\lambda\omega\mu}{2}} x \\ H(x) = H(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\lambda\omega\mu}{2}} x} \cos \sqrt{\frac{\lambda\omega\mu}{2}} x \end{cases}, \quad (6)$$

де $E(0)$ та $H(0)$ - амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів хвилі при $x = 0$, тобто на поверхні провідника.

Із розв'язків (6) випливає, що електромагнітна хвиля зменшується в e раз на глибині

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda\omega\mu}}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обґрунтувати співвідношення (VIII.5) та (VIII.6).
2. Виходячи із рівнянь Максвелла одержати формули (VIII.7) - (VIII.10).
3. Грунтуючись на рівняннях Максвелла пояснити закон Брюстера.
4. Обґрунтувати та пояснити розв'язок рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, які запізнюються.
5. Обґрунтувати та пояснити класичні співвідношення невизначеностей.
6. Знайти електромагнітне поле в хвилевій зоні.
7. Пояснити картину електромагнітного поля дипольного випромінювання в хвилевій зоні.

8. Вивести формулу Лармора (VIII.19).

9. Показати, що потенціали, які запізнюються задовольняють умові калібровки Лоренца.

10. Показати, що рівняння $\text{div} D = \rho$ може бути отримано з рівняння $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, закону збереження заряду та допоміжної умови, яку треба встановити.

11. Показати, що плоскій електромагнітній хвилі, що розповсюджується в однорідному середовищі, вектори \vec{E} , \vec{H} та \vec{k} взаємно перпендикулярні та $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} \cdot E = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot H$.

12. Перпендикулярно до поверхні провідника з провідністю λ та постійними μ та ϵ падає плоска електромагнітна хвиля з частотою ω . Нехтуючи струмами зміщення порівняно зі струмами провідності, визначити, на якій глибині всередині провідника поле зменшиться в e разів?

13. Плоскополяризована електромагнітна хвиля падає на межу поділу двох прозорих середовищ ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) з показником заломлення n_1 та n_2 . Електричний вектор хвилі паралельний площині поділу середовищ. Знайти коефіцієнти відбивання та заломлення світла.

14. Електромагнітна хвиля задана вектор-потенціалом $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, ($\varphi = 0$). Знайти напруженість електричного та магнітного полів \vec{E} , \vec{H} хвилі.

15. Знайти випромінювання диполя \vec{P} , який обертається в одній площині з постійною кутовою швидкістю ω .

16. На осі кільцевого заряду Q на відстані h від його центра розміщений електрон. Він буде здійснювати коливання. Знайти середню інтенсивність дипольного випромінювання. Затуханням знехтувати.

17. Чому при зіткненні двох заряджених частинок з однаковим відношенням $\frac{e}{m}$ не виникає ні електродипольного, ні магнітодипольного випромінювання?

18. Показати, що в хвильовій зоні при виконанні умови Лоренца потенціал φ обмеженої випромінювальної системи може бути представлений через векторний потенціал \vec{A} : $\varphi(\vec{r}, t) = \vec{n}\vec{A} \cdot c$

19. Знайти інтенсивність випромінювання частинки, що рухається по круговій орбіті під дією кулонівських сил.

20. Точковий заряд q обертається рівномірно по колу. Знайти утворене ним у вакуумі поле випромінювання та інтенсивність випромінювання.

21. Частинка маси m і зарядом q пролітає зі швидкістю v біля нерухомого заряду Q на граничній відстані a . Обчислити енергію, що втрачає рухома частинка на випромінювання. Враховувати, що відхилення від прямолінійного руху дуже маленьке.

22. Знайти інтенсивність електродипольного випромінювання системи двох заряджених частинок, що взаємодіють по закону Кулона.

23. Показати, що магнітодипольне випромінювання відсутнє у системі, що складається з двох заряджених частинок, а також у системі,

що складається з частинок з однаковим відношенням $\frac{e}{m}$.

24. По елементу провідника $\vec{i} dl$ протікає струм $i = i_m \sin \omega t$. Обчислити поля \vec{E}, \vec{H} та інтенсивність випромінювання.

25. Показати, що в хвильовій зоні поля в малих ділянках можна розглядати як плоску хвилю. Розглянути випадок гармонічно змінних з часом джерел поля.

26. Показати, що випромінювання магнітного диполя в хвильовій зоні набагато менше випромінювання електричного диполя.

ІХ. СИЛИ, ЩО ДІЮТЬ НА ПРОВІДНИКИ, ДІЕЛЕКТРИКИ І МАГНЕТИКИ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

Якщо замкнута електростатична система має енергію $W(x_1, x_2, \dots)$, де x_1, x_2, \dots - незалежні параметри, що визначають конфігурацію системи то діючі сили знаходять по формулі:

$$F_k = -\frac{\partial W}{\partial x_k} \quad (\text{ІХ.1})$$

Енергія диполя в зовнішньому полі та момент сил, що діє на нього:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \vec{N} = [\vec{p} \cdot \vec{E}] \quad (\text{ІХ.2})$$

Сила, що діє на диполь може бути подана в таких трьох варіантах:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \nabla) \vec{E} \quad (\text{ІХ.3})$$

$$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l},$$

$$F_x = \vec{p} \nabla E_x,$$

де ∇E_x - градієнт функції E_x , $\frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$ - похідна вектора \vec{E} по напрямку диполя.

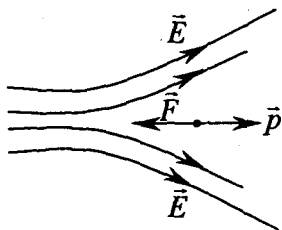


Рис. ІХ.1. Ілюстрація формули (ІХ.3) для сили, що діє на диполь в неоднорідному електричному полі

На заряджений провідник діють сили в напрямку зовнішньої нормалі з поверхневою густиною ($E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}$):

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma E}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{ІХ.4})$$

Сили, що діють на провідник в електростатичному полі можна визначити також:

$$F_k = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_q \quad (\text{IX.5})$$

$$\text{або } F_k = \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_\varphi$$

в залежності від того підтримується на провіднику постійний заряд чи потенціал φ .

Головний вектор подемоторних сил, що діють на об'єм V , який обмежений замкнутою поверхнею S можна обчислити по формулі:

$$F_i = \oint_S T_{ik} dS_k,$$

де $T_{ik} = \frac{\epsilon}{4\pi} (E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik})$ - максвелівський тензор напруг.

Сила і момент сил, що діють на магнітний момент \vec{p}_m :

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \quad (\text{IX.6})$$

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}_m \cdot \vec{B})$$

$$\vec{N} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}], \quad (\text{IX.7})$$

де $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$ - похідна \vec{B} по напрямку \vec{p}_m .

Сила Ампера:

$$d\vec{F} = [j \cdot \vec{B}] dV \quad (\text{IX.8})$$

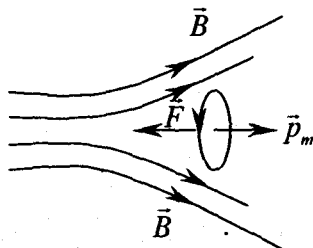


Рис. IX.2. Ілюстрація формули (IX.3) для сили, що діє на магнітний момент в неоднорідному магнітному полі

Якщо x_k - узагальнені координати, що визначають положення струму, то на нього діють сили:

$$F_k = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)_i \quad (\text{IX.9})$$

де $U = -\frac{1}{c} \int \vec{j} \vec{A} dV$ - "силова функція".

Декартові складові вектора сил, що діють на будь-яке тіло в постійному магнітному полі:

$$F_i = \int_S T_{ik} dS_k, \quad (\text{IX.10})$$

де $T_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} (H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik})$ - тензор напруг Максвелла.

Приклади розв'язування задач

Приклад IX.1. Знайти поверхневу густину сили, що діє на поверхню зарядженого провідника з боку електричного поля зарядів цього провідника.

Розв'язання: На елемент поверхні зарядженого провідника dS діє сила

$$d\vec{F} = \sigma \cdot dS \cdot \vec{E}_0,$$

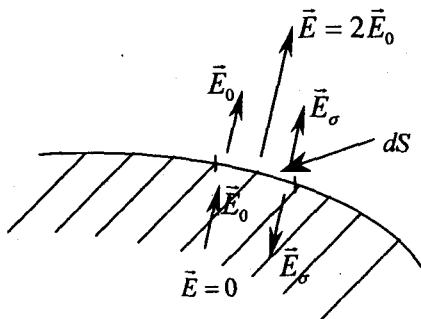


Рис. IX.3. Знаходження поверхневої густини сили, що діє на поверхню зарядженого провідника

де \vec{E}_0 - напруженість поля, яке створюється всіма останніми зарядами (крім заряду σdS) в місці знаходження цього заряду σdS .

Слід зауважити, що \vec{E}_0 не дорівнює напруженості електричного поля \vec{E} поблизу даного елемента поверхні dS . Але між ними існує певний зв'язок. Тому виразимо \vec{E}_0 через \vec{E} .

Якщо \vec{E}_σ - напруженість електричного поля, що створюється зарядом σdS поблизу елемента dS , то $E_\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$. Оскільки поле всере-

дині провідника поблизу елементу dS дорівнює нулеві, і воно, згідно принципу суперпозиції дорівнює $\vec{E}_0 + \vec{E}_\sigma = 0$, то (див. рис. IX.3.)

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{E}}{2}$$

Значить поверхнева густина сили, що діє на поверхню зарядженого провідника з боку електричного поля зарядів цього провідника визначається формулою:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma\vec{E}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} \vec{n} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \vec{n}$$

Приклад IX.2. Металеву сферичну поверхню радіуса a помістили в однорідне електричне поле \vec{E}_0 , а потім розрізали на дві половин площиною, яка перпендикулярна вектору \vec{E}_0 . Знайти силу відштовхування цих двох півсфер.

Розв'язання: Внаслідок електростатичної індукції на поверхні металевої сфери появляться певним чином розподілені заряди. Напрямок напруженості вектора \vec{E}_0 та знаки індукованих зарядів показані на рис. XI.4. Всередині сфери електричне поле відсутнє. Тобто, напруженість електричного поля, яке створюється індукованими зарядами всередині сфери повністю, в кожній точці об'єму сфери, компенсує зовнішнє однорідне електричне поле напруженості \vec{E}_0 . Але раніше ми знайшли, що однорідне електричне поле в об'ємі кулі може створюватися розподіленими по її поверхні зарядами. Причому, поверхнева густина повинна дорівнювати (**Приклад II.6.**):

$$\sigma = \rho l \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

де величина ρl знаходиться із формули $E_0 = \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}$.

Зауважимо, що напруженість електричного поля біля самої поверхні нашої металевої сфери

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3E_0 \cos \theta$$

звідки видно, що вона змінюється від нуля до $3E_0$.

Поле $E = \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}$ всередині сфери створюється розподіленими по поверхні сфери поверхневими зарядами $\sigma = \rho l \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$, або, що те ж саме, зсунутими одна відносно іншої на малий вектор \vec{l} різноймен-

но зарядженими кулями. Поле поза межами сфери (чи кулі), очевидно, дорівнює векторній сумі напруженості зовнішнього поля \vec{E}_0 та поля, що породжується зсунутими одна відносно іншої на малий вектор \vec{l} різномірно зарядженими кулями (або ще раз повторимо, що те ж саме, відповідними поверхневими зарядами).

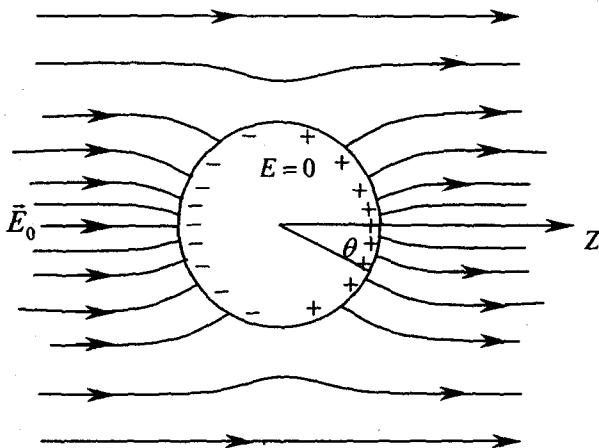


Рис. IX.4. Металева сфера в однорідному електричному полі

Із попереднього (див. тему II та VII) відомо, що електричне поле поза рівномірно зарядженою кулею таке, начебто весь заряд кулі зосереджений в центрі її. Тобто, електричне поле, яке створюється поверхневим зарядом $\sigma = \rho l \cos \theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ на кінцевій віддалі від зарядженої таким чином сфери еквівалентне полю двох точкових ЗЧ, коли положення одної відносно другої визначається вектором \vec{l} . Іншими словами, електричне поле, що створюється індукованими на поверхні сфери зарядами $\sigma = \rho l \cos \theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ в навколишньому просторі еквівалентне полю диполя.

Електричний момент нашого еквівалентного диполя дорівнює:

$$\vec{p} = q\vec{l} = \frac{4\pi R^3}{3} \rho \vec{l} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0,$$

де $\rho \vec{l} = 3\epsilon_0 \vec{E}_0$.

Надзвичайний результат. Використовуючи в основному принцип суперпозиції ми знайшли дипольний момент індукованих зарядів на поверхні металевої кулі. І цей момент визначається напруженістю зовнішнього однорідного поля \vec{E}_0 .

Тепер можемо перейти до знаходження сили відштовхування між сфер. Будемо вважати, що металева сфера знаходиться в вакуумі і розглянемо позитивно заряджену півсферу, рис. IX.5.

На одиницю поверхні сфери діє сила (див. *Приклад X.1.* та формулу (IX.4))

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0},$$

де $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$.

Із симетрії задачі випливає, що сумарна сила, яка діє на півсферу паралельна зовнішньому полю \vec{E}_0 і дорівнює:

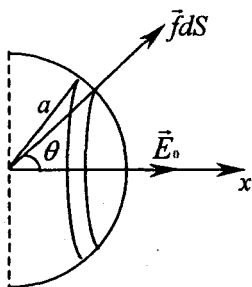


Рис. IX.5. До визначення сили відштовхування, яка діє на півсферу

$$F_x = \int f \cdot \cos\theta \cdot dS,$$

де dS - елемент поверхні сферичного пояса, який в сферичній системі координат рівний $dS = 2\pi a^2 \sin\theta \cdot d\theta$.

Інтегруємо і знайдемо силу відштовхування:

$$F_x = 9\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2$$

Приклад IX.3. Обґрунтувати формули (IX.3) та (IX.2).

Розв'язання: Нехай диполь знаходиться в неоднорідному електричному полі. \vec{E}_+ та \vec{E}_- - напруженості електричного поля в точках, де знаходяться позитивний та негативний заряди диполя, рис. IX.6а.

Тоді результуюча сила, що діє на такий диполь, дорівнює:

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q \cdot \Delta\vec{E},$$

де $(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \Delta\vec{E}$ - приріст вектора \vec{E} на довжині диполя l в напрямку вектора \vec{l} , див. рис. IX.6б. Оскільки відрізок l незначний по величині,

$$\Delta \vec{E} = \frac{\Delta \vec{E}}{l} l = \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} l$$

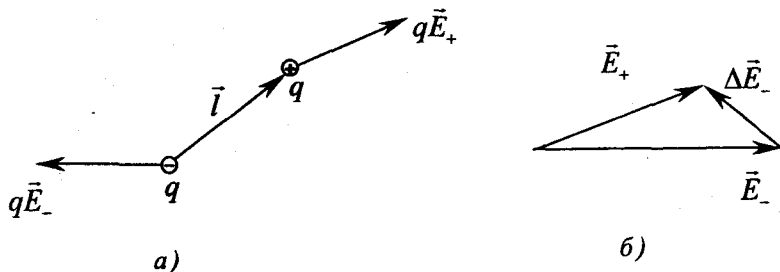


Рис. IX.6. До визначення сили, яка діє на диполь в електричному полі

Після підстановки цього виразу для $\Delta \vec{E}$ в формулу сили, одержуємо (X.3):

$$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l},$$

де $p = ql$ - електричний момент диполя.

Знайдемо тепер момент сил, що діє на диполь в електричному полі. Для цього розглянемо рис. IX.7.

Внаслідок того, що відрізок l незначний по величині можна вважати, що сили $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ та $\vec{F}_- = -q\vec{E}$ однакові по величині, але протилежні за напрямком. Тоді момент сили, що діє на диполь дорівнює добутку сили $F = qE$ на плече пари:

$$N = qE \cdot l \sin \alpha = pE \sin \alpha$$

$$\vec{N} = [\vec{p} \cdot \vec{E}]$$

Цей момент сил буде намагатися повернути диполь так, щоб вектор \vec{p} співпав з напрямком вектора \vec{E} в даній точці поля.

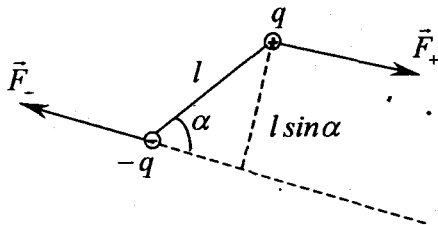


Рис. IX.7. Пара сил, яка діє на диполь в електричному полі

Тому в неоднорідному електричному полі диполь буде орієнтуватися по полю ($\vec{p} \uparrow \vec{E}$), а під дією сили $\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$ буде рухатися в напрямку де напруженість поля \vec{E} більша за модулем, рис. X.1.

Знайдемо тепер енергію диполя в зовнішньому полі.

$$W = q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

де φ_+ , φ_- - потенціали зовнішнього поля в точках, де знаходяться заряди диполя. Оскільки віддаль між зарядами диполя незначна по величині, то з точністю до величин другого порядку малості по l , можна записати:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l,$$

де $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ - похідна потенціалу по напрямку вектора \vec{l} . Але згідно (A.1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l. \text{ Тобто, } \varphi_+ - \varphi_- = -E_l \cdot l = -\vec{E} \vec{l}. \text{ І енергію диполя в полі можна}$$

подати в такому вигляді:

$$W = -\vec{p} \vec{E}$$

Приклад IX.4 Один із методів експериментального визначення поляризованості діелектриків полягає в наступному. Зразок у вигляді тонкого циліндру довжиною l зрівноважують на вагах, рис. IX.8. А потім його розміщують в електричному полі двох різнойменно заряджених сфер і знову зрівноважують. Знайти поляризованість діелектрика, якщо заряд сфери q , віддаль між сферами $2a$, площа поперечного перерізу зразка S , вага зразка P , вага його в полі P_1

Розв'язання: Сила, що діє на одиницю об'єму діелектрика в неоднорідному електричному полі визначається

$$\vec{f} = \frac{\alpha}{2} \text{grad}(E^2)$$

В нашому випадку сила, яка діє на зразок в електростатичному полі заряджених сфер паралельна осі OZ і дорівнює:

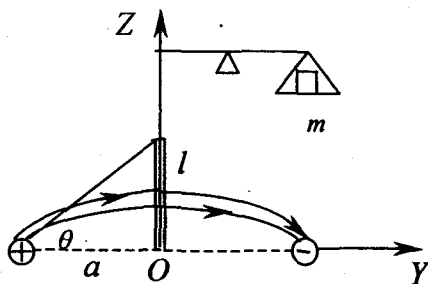
$$F_z = \frac{\alpha}{2} \int \text{grad}_z E^2 dV = \frac{\alpha S}{2} \int_0^l \frac{dE^2}{dz} dz = \frac{\alpha S}{2} (E^2(l) - E^2(0))$$

Із рис. XI.8. знаходимо:

$$E(l) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_1^2} \cos\theta = \frac{aq}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + l^2)^{3/2}}, \quad E(0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2},$$

де r_1 - віддаль від зарядженої сфери до відповідної точки зразка.

Рис. IX.8. Циліндричний діелектрик довжиною l в неоднорідному електростатичному полі заряджених сфер



Тобто, сила з боку електричного поля

$$F_z = -\frac{\alpha S \cdot a^2 q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \left[\frac{1}{a^6} - \frac{1}{(a^2 + l^2)^3} \right]$$

З іншого боку $F_z = -(P_1 - P)$. Таким чином, порівнюючи останні два вирази для політизованості α знаходимо:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \epsilon_0^2 (P_1 - P)}{S a^2 q^2} \left[\frac{1}{a^6} - \frac{1}{(a^2 + l^2)^3} \right]^{-1}$$

Приклад IX.5. Мильна кулька, що висить на трубі, при відкритій трубі стягується під впливом сил поверхневого натягу ($\alpha = 0,05 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$).

Чи можна шляхом електричного заряджання оберігти її від повного стиснення? При цьому слід мати на увазі обмежену діелектричну міцність повітря, рівну $2 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Якщо так, то при якому діаметрі залишиться кулька?

Розв'язання: Шляхом електричного заряджання сили поверхневого натягу мильної кульки можна зрівноважити силами електростатичного відштовхування зарядів, які розподілені будуть на кульці. Сили електростатичного відштовхування зарядів та поверхневого натягу (які відносяться до одиниці площі поверхні кульки) рівні відповідно:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{див. Приклад IX.1.})$$

$$\frac{4\alpha}{d},$$

де d – діаметр мильної кульки, E – напруженість електричного поля на поверхні кульки, α – коефіцієнт поверхневого натягу.

Тоді при рівновазі

$$\frac{4\alpha}{d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Але кулька може бути заряджена тільки до такого E , при якому не виникає пробій повітря. Із умови рівноваги знаходимо:

$$d = \frac{8\alpha}{\varepsilon_0 E^2} = 1,13 \text{ см}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Однорідне електричне поле напруженості \vec{E} і однорідне магнітне поле \vec{B} напрямлені взаємно перпендикулярно. Яка повинна бути швидкість електрона, щоб він в цьому комбінованому полі рухався рівномірно і прямолінійно?

2. По кільцю радіуса r_0 з дуже тонкої проволочки протікає струм i . Міцність проволочки на розрив α_0 . Знайти величину магнітного поля, перпендикулярного площині кільця, при якій кільце розірветься.

3. Заряд розподілений з лінійною густиною τ по довжині l вздовж радіус-вектора, що починається в точці знаходження точкового заряду q . Відстань від q до найближчої до нього точки лінійного заряду дорівнює R . Знайти силу, що діє на лінійний заряд.

4. Знайти силу взаємодії між двома паралельними рівномірно зарядженими нитками. Відстань між ними l , довжина нитки L , заряд q .

5. Заряджена металева куля, знаходиться в вакуумі, розрізана на дві половини. Обчислити силу їх відштовхування. Радіус кулі a , заряд q .

6. Вздовж довгого тонкостінного круглого циліндра радіуса r_0 протікає струм i . Знайти тиск на стінки циліндра.

7. Невелика котушка зі струмом, що має магнітний момент \vec{p}_m , знаходиться на вісі колового струму радіуса R , по якому протікає струм i . Знайти силу \vec{F} , що діє на коловий струм радіуса R , по якому протікає струм i . Знайти силу \vec{F} , що діє на котушку, якщо \vec{p}_m направлений вздовж вісі.

8. Два довгих провoda замкнуті з одного кінця на опір R , а з другого кінця ввімкнені до джерела постійної напруги. Радіус перерізу кожного провoda в k разів менше відстані між осями провoda. При якому значенні R результуюча сила взаємодії провoda дорівнює 0?

9. Безпосереднім обчисленням впевнитись у справедливості III закону Ньютона для двох прямокутних контурів зі струмами i , що знаходяться в паралельних площинах.

10. Диполь \vec{p} знаходиться на віддалі r від точкової ЗЧ. Знайти силу, що діє на диполь, якщо вектор \vec{p} орієнтований:

- по радіус-вектору;
- перпендикулярно \vec{r} та нитці.
- довільно.

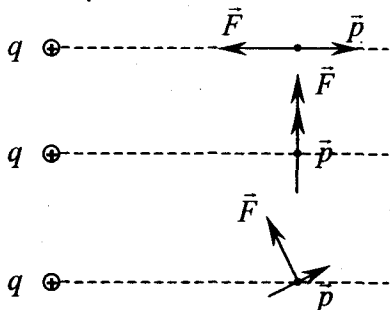


Рис. IX.9. До задачі IX.10

11. Диполь \vec{p} знаходиться на віддалі r від рівномірно зарядженої нитки. Знайти силу, що діє на диполь, якщо вектор \vec{p} орієнтований:

- вздовж нитки;
- по радіус-вектору;
- перпендикулярно \vec{r} та нитці.

12. Знайти силу, що діє на магнітний момент \vec{p}_m в полі прямого струму i , якщо вектор \vec{p}_m :

- паралельний струму;
- направлений по радіус-вектору \vec{r} ;
- співпадає по напрямку з \vec{B}

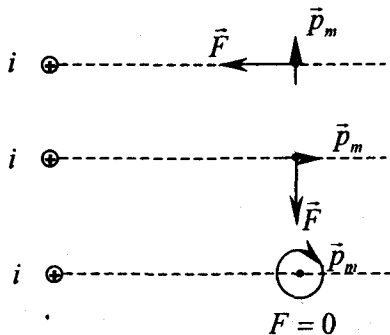


Рис. IX.10. До задачі IX.12

13. Знайти період коливань жорсткого диполя з моментом $\vec{p} = q\vec{l}$ у зовнішньому однорідному електричному полі \vec{E} . Маса заряджених частинок диполя дорівнює m .

14. Знайти період коливань магнітної стрілки в магнітному полі з індукцією \vec{B} .

X. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

Оскільки теорема Гауса для вектора поляризації \vec{P} має вигляд:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q', \quad (X.1)$$

де q' - величина зв'язаного заряду, то об'ємна і поверхнева густини зв'язаних зарядів діелектрика дорівнюють:

$$\rho' = -\text{div} \vec{P} \quad (X.2)$$

$$\sigma' = -(P_{2n} - P_{1n}), \quad (X.3)$$

Експерименти показують, що в значному інтервалі значень напруженості електричного полі в речовині вектор поляризації пропорційний \vec{E} :

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}, \quad (X.4)$$

де α - діелектрична сприйнятливість середовища.

Вектор \vec{D} та теорема Гауса для вектора \vec{D} :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (X.5)$$

де $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$, $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, $\epsilon = 1 + \alpha$

Граничні умови для електричного поля:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (X.6)$$

де σ - поверхнева густина стороннього (вільного) заряду на межі поділу двох середовищ.

Спіраючись на основну властивість вектора намагнічування:

$$i' = \oint_L i_{\text{м}} (\vec{S}' \cdot d\vec{l}) n = \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} \quad (X.7)$$

$$i' = \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{маг}} d\vec{S},$$

де i' - сумарний макроскопічний струм намагнічування, \vec{I} - вектор намагнічування, який, згідно означення, дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму магнетика, для густини молекулярних струмів одержуємо:

$$\vec{j}_{\text{маг}} = \text{rot} \vec{I} \quad (X.8)$$

Теорема про циркуляцію вектора \vec{H} :

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i, \quad (X.9)$$

де $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H}$, i - сила струму провідності.

Із дослідів випливає, що вектор намагнічування пропорційний вектору напруженості магнітного поля:

$$\vec{I} = \chi \vec{H} \quad (\text{X.10})$$

Тому для однорідного та ізотропного магнетика одержуємо зв'язок між векторами \vec{B} та \vec{H} :

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (\text{X.11})$$

де $\mu = (1 + \chi)$ - магнітна проникність, χ - магнітна сприйнятливість.

Середнє значення густини мікроскопічних струмів дорівнює:

$$\overline{\vec{j}_{\text{мікро}}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{пол}} + \vec{j}_{\text{пол}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \vec{I}, \quad (\text{X.12})$$

де $\vec{j}_{\text{пол}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - густина струмів поляризації.

Граничні умови для векторів магнітного поля:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_s, \quad (\text{X.13})$$

де i_s - лінійна густина поверхневих струмів провідності на межі поділу 2-х середовищ.

Система рівнянь Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{D} &= \rho & \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{X.14})$$

Приклади розв'язування задач

Приклад X.1. Точкова ЗЧ знаходиться в центрі кулі із однорідного ізотропного діелектрика. Радіус кулі r_0 , діелектрична стала ϵ , заряд q . Знайти напруженість та індукцію електричного поля в довільній точці простору.

Розв'язання: Оскільки невідомий нам зв'язаний заряд, то теорему Гауса для вектора \vec{E} , $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q'}{\epsilon_0}$, використати неможливо. Тому, виходячи із симетрії задачі, використання теореми Гауса для вектора \vec{D} , (X.5), дає:

$$4\pi r^2 \cdot D = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

А величина напруженості електричного поля ($D = \epsilon\epsilon_0 E$) при $r < r_0$ та при $r > r_0$, відповідно, дорівнює:

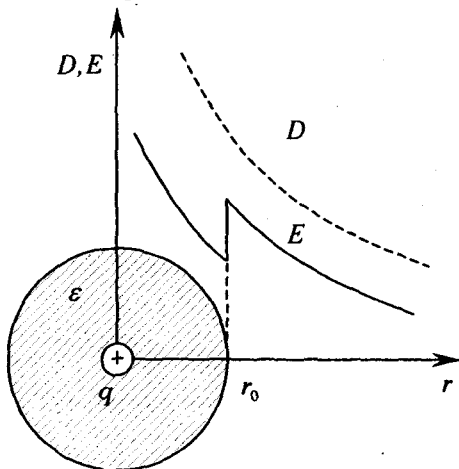


Рис. X.1. Залежності $D(r)$ та $E(r)$

$$E(r < r_0) = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

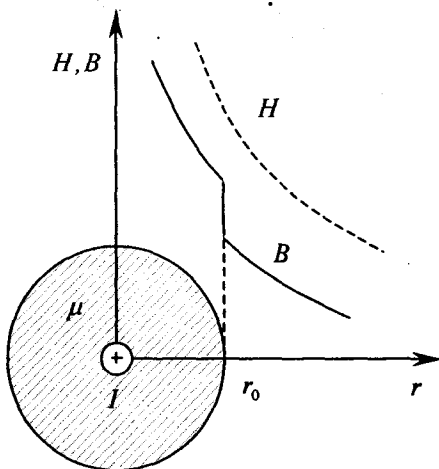
$$E(r > r_0) = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Графіки залежностей $D(r)$ та $E(r)$ зображені на рис. X.1.

Приклад X.2. Вздовж осі циліндричного магнетика радіусу r_0 протікає постійний струм i . Магнітна проникність магнетика μ . Знайти напруженість та індукцію магнітного поля в довільній точці простору.

Розв'язання: Оскільки струми намагнічування нам невідомі, то теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} скористатися ми не можемо. Тому виходячи із симетрії задачі використання теореми про циркуляцію вектора \vec{H} , (X.9), дає:

$$H \cdot 2\pi r = i$$

Рис. X.2. Залежності $B(r)$ та $H(r)$

Звідси одержуємо:

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 i}{2r\pi}$$

Бачимо, що при переході через межу поділу магнетик-вакуум індукція магнітного поля змінюється, на відміну від H , скачком, див. рис. X.2.

Збільшення B в магнетикі зумовлене появою поверхневих струмів намагнічування: біля провідника зі струмом, що на осі магнетика, ці струми намагнічування співпадають з напрямком i . Зовні циліндричного магнетика поверхневий струм намагнічування направлений в протилежну сторону. І тому він не впливає на поле всередині магнетика, а поза межами магнетика магнітні поля обох струмів намагнічування компенсують один одного.

Приклад X.3. Постійний струм i проходить по довгому циліндричному проволу із магнетика. Радіус поперечного перерізу проволу r_0 , магнітна сприйнятність χ . Знайти: 1) індукцію та напруженість магнітного поля в кожній точці простору; 2) густину струму намагнічування j' всередині проволу.

Розв'язання: 1). Теорема про циркуляцію вектора \vec{H} , (X.9), по колу радіуса r дозволяє знайти як H , так B :

при $r < r_0$ $2\pi \cdot H = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cdot i$, звідси одержуємо:

$$H = \frac{ir}{2\pi r_0^2}, \quad B = \mu_0(1 + \chi) \cdot \frac{ir}{2\pi r_0^2}$$

при $r > r_0$, аналогічним шляхом для значень векторів магнітного поля знаходимо:

$$2\pi \cdot H = i, \quad H = \frac{i}{2\pi}, \quad B = \mu_0(1 + \chi) \cdot \frac{i}{2\pi}$$

Графіки залежностей $B(r)$ та $H(r)$ показані на рис. X.3.

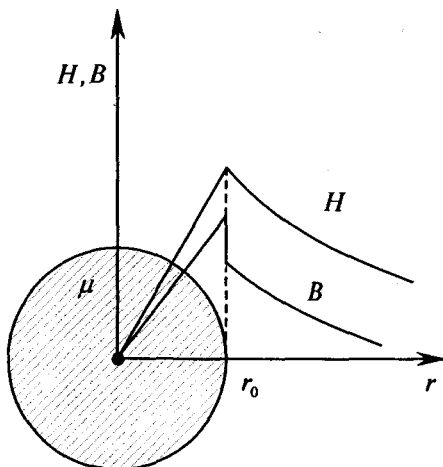


Рис. X.3. Залежності $B(r)$ та $H(r)$

2). Для знаходження густини струму намагнічування j' всередині проводу скористаємося теоремою про циркуляцію вектора намагнічування \vec{I} , (X.7), по колу радіуса r :

$$2\pi \cdot I = i'$$

Знайдемо спочатку диференціал цього виразу:

$$2\pi \cdot d(r \cdot I) = di'$$

Очевидно, що di' - це нескінченне мале значення сили струму намагнічування, який протікає через поверхню обмежену колами радіусами r та $r + dr$ (поверхня вузького колового поясокка). Тому $di' = j' \cdot 2\pi \cdot dr$, і попереднє рівняння набуває вигляду:

$$j' = \frac{I}{r} + \frac{dI}{dr},$$

а з урахуванням $I = \chi H = \chi \cdot \frac{ir}{2\pi r_0^2}$, нарешті одержуємо:

$$j' = \frac{\chi I}{\pi r_0^2}$$

Цей струм намагнічування протікає в тому ж напрямку, що і струм провідності. А от поверхневий струм намагнічування протікає в протилежному напрямку.

Приклад Х.4. Постійний магніт виготовлений у вигляді кільця з вузьким зазором між полюсами, рис. ХІ.4. Знайти модулі векторів \vec{H} та \vec{I} всередині кільця, якщо магнітна індукція в зазорі дорівнює \vec{B} , ширина зазору b .

Розв'язання: Використовуючи теорему (ХІ.9) вздовж кола радіуса r , див. рис. Х.4., та враховуючи, що струми провідності відсутні, маємо:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\pi d - b)H + \frac{bB}{\mu_0} = 0$$

Звідси для H одержуємо:

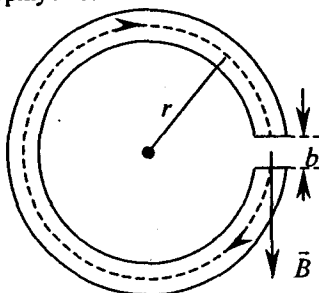


Рис. Х.4. Знаходження напруженості магнітного поля в зазорі кільцевого магніту

$$H = -\frac{bB}{\mu_0(\pi d - b)} \approx -\frac{bB}{\mu_0 \pi d}$$

Бачимо, що при $b \rightarrow 0$ і напруженість магнітного поля в зазорі теж прямує до нуля, $H \rightarrow 0$, що зрозуміло, бо наш коловий контур не охоплює будь-який струм провідності. А знак мінус в виразі для H означає, що вектор \vec{H} всередині магнетика направлений протилежно вектору \vec{B} в тій же точці.

Користуючись означенням вектора \vec{H} , $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H}$, та попереднім

результатом, для модуля вектора намагнічування всередині магнетика одержуємо:

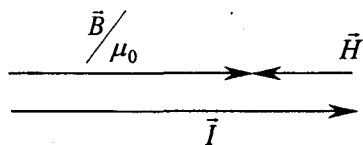


Рис. X.5. Співвідношення між векторами \vec{I} , \vec{H} та $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ в будь-якій точці речовини кільцевого магніту

$$I = \frac{B}{\mu_0 \left(1 - \frac{b}{2\pi r}\right)} \approx \frac{B}{\mu_0}$$

Тобто, всередині кільцевого магніту вектор намагнічування приблизно дорівнює $I \approx \frac{B}{\mu_0}$, що можна проілюструвати з допомогою рис. X.5.

Приклад X.5. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого $\chi = ar^2$, де a - постійна, r - віддаль від осі соленоїду. Знайти залежність від r : 1) намагніченості $\vec{I}(r)$; 2) густини струму намагнічування $j'(r)$, якщо на осі соленоїду магнітна індукція дорівнює \vec{B}_0 , рис. X.6.

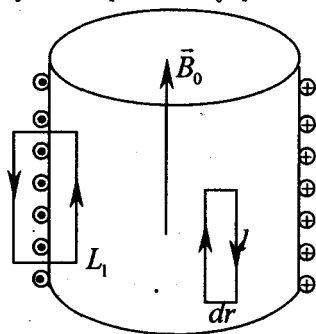


Рис. X.6. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком. На осі соленоїду магнітна індукція дорівнює \vec{B}_0

Розв'язання: Намагніченість магнетика $I = \chi H$, але в нашому випадку H не залежить від r . Дійсно, згідно теореми (XI.9) про циркуляцію вектора \vec{H} по контуру L_1 , $H \neq f(r)$. Тому $H = H_0$, і для намагніченості маємо:

$$I = ar^2 \frac{B_0}{\mu_0}$$

2. Из основної властивості вектора намагнічування, (X.7), $i' = \oint \vec{l} \cdot d\vec{l}$ впливає

$$l - (l + dl) \cdot l = j'_n \cdot l dr,$$

де l - довжина контуру, dr - його ширина.

Тому із останнього виразу отримуємо:

$$j'_n = -\frac{dl}{dr} = -\frac{2aB_0}{\mu_0} r$$

Знак мінус показує, що вектор густини струму намагнічування $\vec{j}'(r)$ направлений протилежно вектору нормалі \vec{n} . Цей вектору нормалі \vec{n} утворює з напрямком обходу контуру l правий гвинт. Тому вектор $\vec{j}'(r)$ в межах контуру l направлений перпендикулярно рис. X.6., «до нас». Іншими словами, об'ємні струми намагнічування утворюють з вектором \vec{B}_0 лівовинтову систему.

Приклад X.6. В однорідному електричному полі знаходиться діелектрична куля радіусу R . Діелектрична проникність середовища ϵ_2 , а діелектрика кулі ϵ_1 . Знайти електричне поле всередині кулі.

Розв'язання: Виберемо сферичну СК, причому полярну вісь направимо по осі OZ , див. рис. X.7.

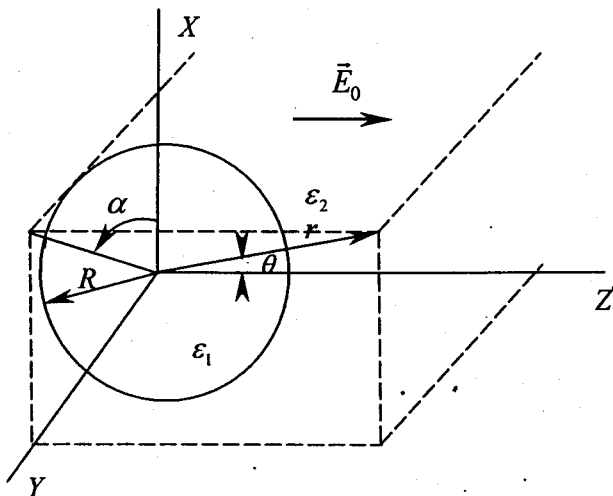


Рис. X.7. Однорідна діелектрична куля в постійному однорідному електричному полі

Рівняння Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$ в сферичній СК має вигляд:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

де α - аксиальний кут, θ - полярний кут.

Внаслідок аксиальної симетрії $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ і оскільки вільні заряди відсутні ($\rho = 0$), то задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{X.20})$$

Розв'язок цього рівняння повинен задовольняти таким умовам:

А) потенціал φ у всьому просторі має бути неперервним та кінцевим;

Б) нормальні компоненти вектора $\vec{D} = -\varepsilon \varepsilon_0 \cdot \nabla \varphi$ неперервні на межі поділу двох середовищ, тобто на поверхні кулі;

В) також неперервні тангенційні складові вектора напруженості електричного поля $\vec{E} = -\nabla \varphi$ на поверхні кулі.

Далі ми будемо позначати величини, що відносяться до внутрішньої області кулі індексом 1, а до зовнішньої - індексом 2.

Загальний розв'язок рівняння Лапласа в сферичній СК, відомий із теорії диференціальних рівнянь в частиних похідних, у вигляді шарових функцій такий:

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) (A e^{im\alpha} + B e^{-im\alpha}), \quad (\text{X.21})$$

де $P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ - приєднані поліноми Лежандра,

$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$ - поліноми Лежандра, $m = 0, 1, 2, \dots, l$, кожному

значенню l відповідає $l + 1$ приєднаних поліномів Лежандра; кожному значенню l відповідає $2l + 1$ сферичних функцій

$$Y_l^{(m)}(\theta, \alpha) = V(\theta) \cdot \Phi(\alpha) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \cdot e^{\pm im\alpha}$$

Але в нашому випадку шарові функції суттєво спрощуються, і прямою перевіркою можна впевнитися, що функції

$$\varphi_1 = A_1 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta,$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta$$

задовольняють диференційному рівнянню (X.20), де A_1, A_2, B_2 - постійні, E_0 - модуль напруженості електричного поля.

Із вимоги А) випливає, що $A_2 = 0$. А умова неперервності потенціалу на межі поділу має вигляд

$$A_1 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + B_2 R^{-2} \cos \theta, \quad (\text{X.22})$$

звідки отримуємо

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0$$

Дотична компонента вектора \vec{E} на поверхні кулі дорівнює:

$$E_r = E_\theta = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{r=R}$$

Умова $E_{1\theta} = E_{2\theta}$ задовольняється, якщо виконується умова (X.22), тобто між постійними A_1 та B_2 існує співвідношення $A_1 = B_2 R^{-3} - E_0$.

Нормальні складові вектора \vec{E} дорівнюють:

$$E_{1n} = E_{1r} = -(\partial \varphi_1 / \partial r)_{r=R} = -A_1 \cos \theta,$$

$$E_{2n} = E_{2r} = -(\partial \varphi_2 / \partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2B_2 R^{-3} \cos \theta.$$

Із умови $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$ випливає

$$A_1 = - \left(E_0 + 2B_2 R^{-3} \right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Розв'язуючи далі систему алгебраїчних рівнянь

$$A_1 = - \left(E_0 + 2B_2 R^{-3} \right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0$$

Знаходимо постійні A_1 та B_2

$$A_1 = - \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 E_0.$$

Таким чином, потенціал електричного поля всередині діелектричної кулі та зовні неї, відповідно, рівний:

$$\varphi_1 = - \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \theta,$$

$$\varphi_2 = - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right) E_0 r \cos \theta.$$

Тоді напруженість електричного поля всередині кулі

$$E_{1z} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial (r \cos \theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \quad (\text{X.23})$$

І, як бачимо, електричне поле всередині кулі являється однорідним.

Поле всередині кулі ми можемо розглядати як суперпозицію поля зовнішнього та електричного поля, яке створене зв'язаними зарядами, що виникли на поверхні кулі.

Тобто, напруженість електричного поля зв'язаних зарядів дорівнює:

$$E_{\text{зв}} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) \quad (\text{X.24})$$

Проаналізуємо одержані результати.

По-перше, напруженість результуючого електричного поля всередині кулі та поля зв'язаних зарядів постійна і направлена по осі OZ .

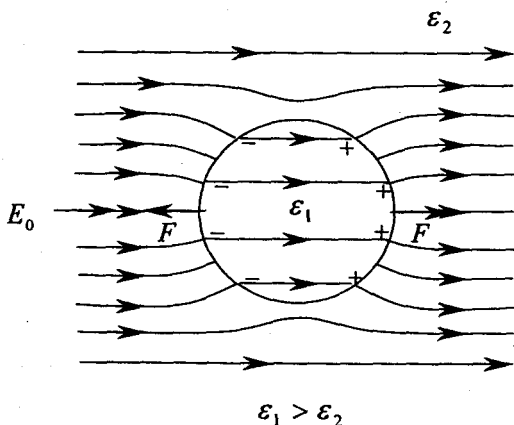


Рис. X.8. Лінії напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 та вектора \vec{D} всередині кулі при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

По-друге, із розв'язків задач *Приклад II.5.* та *Приклад II.6.* ми знаємо, що розподіл зарядів на поверхні кулі, який приводить до однорідного поля всередині кулі дається

$$\sigma = \rho l \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

Тому можна стверджувати, що поле зв'язаних зарядів $E_{\text{зв}} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$ створюється поверхневими зарядами розподіленими згідно попередньої формули.

По-третє, із виразу (X.24) видно, що при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ вектор $\vec{E}_{\text{зв}}$ направлений протилежно вектору напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 . Значить, величина напруженості поля всередині кулі менша ніж E_0 , рис. X.8.

При $\epsilon_1 < \epsilon_2$ вектор $\vec{E}_{\text{вс}}$ співпадає по напрямку з вектором напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 , а значить підсилює величину поля всередині кулі. На рис. X.9. зображені силові лінії вектора \vec{D} , а не вектора \vec{E} , оскільки саме вектор \vec{D} неперервний у відсутності вільних зарядів.

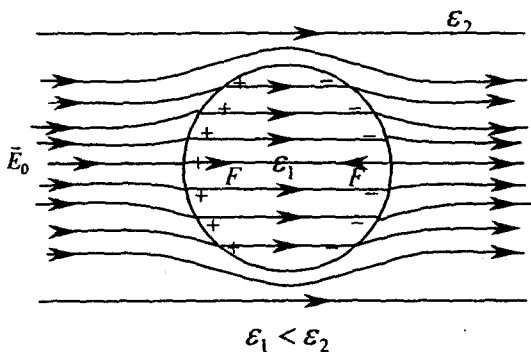


Рис. X.9. Лінії вектора \vec{D} всередині і зовні діелектричної кулі при $\epsilon_1 < \epsilon_2$

Приклад X.7. Знайти зв'язані заряди, вектор поляризації та напруженість електричного поля, яке породжується точковою ЗЧ, що знаходиться в центрі двох концентричних сфер. Радіуси цих сфер a_1 та a_2 , рис. X.10. Діелектрична проникність сферичного шару товщиною $a_2 - a_1$ дорівнює ϵ .

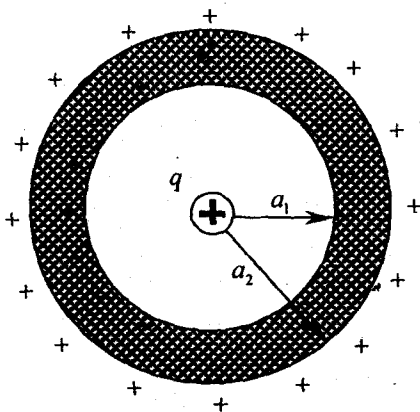


Рис. X.10. Точкова ЗЧ знаходиться в центрі сферичного шару діелектрика

Рівняння Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$ в сферичній СК має вигляд:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

де α - аксиальний кут, θ - полярний кут.

Внаслідок аксиальної симетрії $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ і оскільки вільні заряди відсутні ($\rho = 0$), то задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{X.20})$$

Розв'язок цього рівняння повинен задовольняти таким умовам:

А) потенціал φ у всьому просторі має бути неперервним та кінцевим;

Б) нормальні компоненти вектора $\vec{D} = -\varepsilon \varepsilon_0 \cdot \nabla \varphi$ неперервні на межі поділу двох середовищ, тобто на поверхні кулі;

В) також неперервні тангенційні складові вектора напруженості електричного поля $\vec{E} = -\nabla \varphi$ на поверхні кулі.

Далі ми будемо позначати величини, що відносяться до внутрішньої області кулі індексом 1, а до зовнішньої - індексом 2.

Загальний розв'язок рівняння Лапласа в сферичній СК, відомий із теорії диференційних рівнянь в частиних похідних, у вигляді шарових функцій такий:

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) (A e^{im\alpha} + B e^{-im\alpha}), \quad (\text{X.21})$$

де $P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ - приєднані поліноми Лежандра,

$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$ - поліноми Лежандра, $m = 0, 1, 2, \dots, l$, кожному

значенню l відповідає $l + 1$ приєднаних поліномів Лежандра; кожному значенню l відповідає $2l + 1$ сферичних функцій

$$Y_l^{(m)}(\theta, \alpha) = V(\theta) \cdot \Phi(\alpha) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \cdot e^{\pm im\alpha}$$

Але в нашому випадку шарові функції суттєво спрощуються, і прямою перевіркою можна впевнитися, що функції

$$\varphi_1 = A_1 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta,$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta$$

задовольняють диференційному рівнянню (X.20), де A_1, A_2, B_2 - постійні, E_0 - модуль напруженості електричного поля.

Із вимоги А) випливає, що $A_2 = 0$. А умова неперервності потенціалу на межі поділу має вигляд

$$A_1 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + B_2 R^{-2} \cos \theta, \quad (\text{X.22})$$

звідки отримуємо

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0$$

Дотична компонента вектора \vec{E} на поверхні кулі дорівнює:

$$E_r = E_\theta = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{r=R}$$

Умова $E_{1\theta} = E_{2\theta}$ задовольняється, якщо виконується умова (X.22), тобто між постійними A_1 та B_2 існує співвідношення $A_1 = B_2 R^{-3} - E_0$.

Нормальні складові вектора \vec{E} дорівнюють:

$$E_{1n} = E_{1r} = -(\partial \varphi_1 / \partial r)_{r=R} = -A_1 \cos \theta,$$

$$E_{2n} = E_{2r} = -(\partial \varphi_2 / \partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2B_2 R^{-3} \cos \theta.$$

Із умови $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$ випливає

$$A_1 = - \left(E_0 + 2B_2 R^{-3} \right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Розв'язуючи далі систему алгебраїчних рівнянь

$$A_1 = - \left(E_0 + 2B_2 R^{-3} \right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0$$

Знаходимо постійні A_1 та B_2

$$A_1 = - \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 E_0.$$

Таким чином, потенціал електричного поля всередині діелектричної кулі та зовні неї, відповідно, рівний:

$$\varphi_1 = - \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \theta,$$

$$\varphi_2 = - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right) E_0 r \cos \theta,$$

Тоді напруженість електричного поля всередині кулі

$$E_{1z} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial (r \cos \theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \quad (\text{X.23})$$

І, як бачимо, електричне поле всередині кулі являється однорідним.

Якщо ситуація склалася так, що вектор \vec{E} направлений в сторону діелектрика з меншою діелектричною сталою, то знак поверхневого заряду та орієнтація векторів поля будуть такі як це зображено на рис. X.116.

Приклад X.9. На основі принципу суперпозиції визначити електричне поле всередині та зовні рівномірно поляризованої діелектричної кулі. Радіус кулі a , вектор поляризації кулі \vec{P} .

Розв'язання: Задача може бути розв'язана трьома способами.

A). Потенціал електричного поля, що створюється зв'язаними в діелектрику зарядами має вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \frac{\rho_{\text{св'яз.}} dV}{R} + \int_S \frac{\sigma_{\text{св'яз.}} dS}{R} \right)$$

В нашому випадку $\rho_{\text{св'яз.}} = -\text{div}\vec{P} = 0$ (оскільки $\vec{P} = \text{const}$), і тому

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_{\text{св'яз.}} dS}{R} \quad (1)$$

Щоб про інтегрувати (1) початок сферичної СК (r, α, ψ) розмістимо в центрі кулі. Полярну вісь направимо в точку поля A , а площину векторів \vec{r} і \vec{P} приймемо за координатну площину XOZ , рис. X.12. Тоді в точці B , що лежить на площадці

$$dS = a^2 \sin\alpha d\alpha d\psi \quad (2)$$

на віддалі

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos\alpha} \quad (3)$$

від точки поля A поверхнева густина зв'язаного заряду дорівнює:

$$\sigma_{\text{св'яз.}} = P_n = P(\sin\alpha_0 \sin\alpha \cos\psi + \cos\alpha_0 \cos\alpha) \quad (4)$$

Співвідношення (4) обґрунтовується таким чином. Необхідно розкласти вектори \vec{P} та \vec{n} (див. рис. X.12.) по осям декартової СК і знайти $\vec{P}\vec{n} = P_n$. Після підстановки (2)-(4) в (1) та інтегрування по кутам α і ψ одержуємо:

$$\varphi = \frac{aP}{2\epsilon_0 r} \cos\alpha_0 \cdot \left\{ \frac{1}{3ar} \left[(r+a)^3 - (r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[-(r-a) - (r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (5)$$

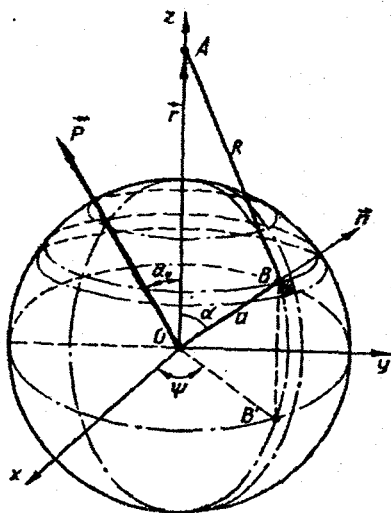


Рис. X.12. До знаходження поля, що створюється рівномірно поляризованою кулею

Враховуючи, що

$$(r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} r - a & \text{при } r > a, \\ a - r & \text{при } r < a, \end{cases}$$

для потенціалу поля всередині і зовні кулі маємо:

$$\varphi_e = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{P \cos \alpha_0}{r^2} \qquad \varphi_i = \frac{1}{3\epsilon_0} Pr \cos \alpha_0,$$

або

$$\varphi_e = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{P}\vec{r})}{r^3} \qquad \varphi_i = \frac{1}{3\epsilon_0} (\vec{P}\vec{r})$$

А напруженість електричного поля, очевидно дорівнює:

$$\vec{E}_e = -\text{grad} \varphi_e = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right]$$

$$\vec{E}_i = -\nabla \varphi_i = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Б). Оскільки $\vec{P} = \text{const}$, то об'ємна густина зв'язаних зарядів дорівнює нулю, $\rho' = -\text{div} \vec{P} = 0$. Тобто, поле, яке ми шукаємо створене тільки поверхневими зв'язаними зарядами. Причому, $\sigma' = P_n = P \cos \theta$, рис. X.13.

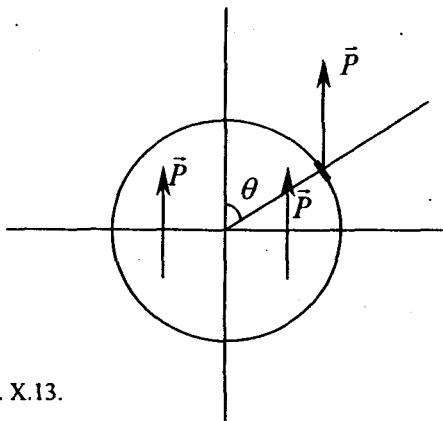


Рис. X.13.

Але відомо, що такий розподіл зарядів $\sigma' \approx \cos\theta$ виникає, якщо дві кулі однакового радіусу з рівномірно розподіленими по об'єму зарядами ρ і $-\rho$ зміщені на малий вектор \vec{l} . В той же час поле будь-якого сферичного розподілу зарядів (і зокрема рівномірного в межах будь-якої кулі) таке начебто весь заряд кулі зосереджений в центрі кулі. Тобто поле зовні поляризованої кулі буде таким же як і поле, що створюється двома точковими зарядами зміщеними на малий вектор \vec{l} . Іншими словами, зовнішнє поле поляризованої кулі повністю еквівалентне полю диполя.

Очевидно що дипольний момент однорідно поляризованої діелектричної кулі дорівнює:

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P}$$

Тоді потенціал (зовнішнього по відношенню до діелектричної кулі) поля визначається

$$\varphi_{\text{зов}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} = \frac{a^3(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0 r^3}$$

Як же знайти на цьому шляху потенціал і поле всередині кулі? Для цього скористаємося теоремою про єдиність рішення.

Потенціал дипольного моменту поляризованої кулі в будь-якій точці на сферичній поверхні радіуса a , тобто на поверхні кулі, приймає значення

$$\varphi(a) = \frac{Pa \cos\theta}{3\epsilon_0} = \frac{P \cdot z}{3\epsilon_0}$$

Всередині кулі потенціал повинен задовольняти рівняння Лапласа. Але згідно теореми про єдиність розв'язку, якщо знайдений будь-який

розв'язок, то він є вірним і єдиним. Оскільки на поверхні кулі потенціал рівний $\frac{P \cdot z}{3\epsilon_0}$, то і в довільній точці всередині кулі потенціал буде таким же.

Таким чином, всередині кулі

$$\varphi_{\text{внутр}}(\vec{r}) = \frac{(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0}$$

А напруженість електричного поля в зовнішньому просторі дорівнює:

$$\vec{E}_{\text{зов}} = -\text{grad}\varphi_{\text{зов}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right] = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right]$$

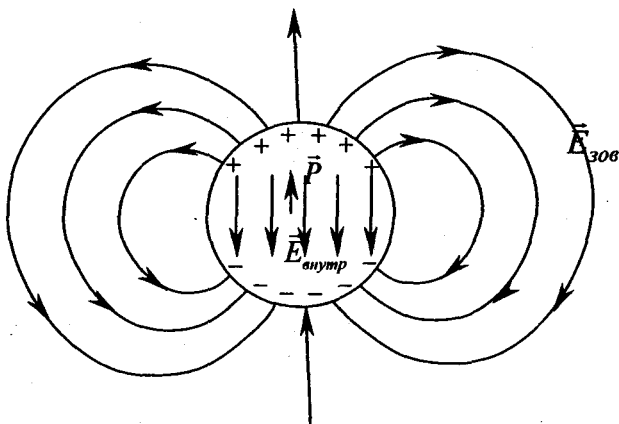


Рис. X.14. Зовнішнє поле однорідно поляризованої діелектричної кулі являється точно таким же, як і поле диполя, що розташований в центрі кулі, а внутрішнє поле являється однорідним, причому вектор $\vec{E}_{\text{внутр}}$ антипаралельний вектору \vec{P}

Напруженість електричного поля у внутрішніх точках діелектричної кулі

$$\vec{E}_{\text{внутр}} = -\nabla\varphi_{\text{ан}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Тобто, всередині кулі поле однорідне і вектор $\vec{E}_{\text{внутр}}$ направлений протилежно вектору поляризації \vec{P} .

В). Отже, згідно попереднього, однорідно поляризована куля створює таке ж поле як і ледь зсунуті одна відносно одної дві кулі такого ж

радіусу з рівномірно розподіленими по об'єму зарядами ρ і $-\rho$. Тому, якщо центри таких куль зсунуті на невеличкий вектор \vec{l} , то в довільній точці всередині кулі (*Приклад II.5.*)

$$\vec{E}_{\text{внутр}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{\rho\vec{l}}{3\epsilon_0}$$

Але $\rho\vec{l} = \vec{P}$ згідно означення. Тому $\vec{E}_{\text{внутр}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

Поведінка вектора \vec{E} в даній задачі при переході через поверхню кулі підтверджує загальні граничні умови для векторів поля. Дійсно, біля верхнього полюса кулі (рис. X.14) вектор $\vec{E}_{\text{зов}}$ направлений вгору і за величиною рівний

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\frac{4\pi}{3}a^3\bar{\rho}}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{2P}{3\epsilon_0},$$

що в два рази більше внутрішнього поля.

Поле \vec{E} зазнає розриву в околі поверхні поляризованого середовища точно так, як і це відбувалося б у зарядженої поверхні з щільністю заряду $\sigma' = P_n$ у вакуумі. Біля північного полюса нашої кулі скачок E_z дорівнює:

$$\frac{2P}{3\epsilon_0} - \left(-\frac{P}{3\epsilon_0} \right) = \frac{P}{\epsilon_0}$$

Але можна впевнитися, що компонента вектора \vec{E} , яка дотична до поверхні залишається неперервною в будь-якій точці на сфері при переході через її поверхню.

Приклад X.10. Визначити вектор поляризації однорідної діелектричної кулі, яка знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі \vec{E}_0 . Знайти також потенціали поля в довільній точці простору. Діелектрична проникність речовини ϵ .

Розв'язання: А). Поле всередині і зовні кулі, згідно принципу суперпозиції, дорівнює сумі зовнішнього поля \vec{E}_0 та поля, що створюється поверхневими зв'язаними зарядами однорідно поляризованої кулі. Якщо ввести сферичну СК, рис. X.15., то для потенціалу результуючого поля можемо записати:

$$\varphi_e = -E_0 x + \frac{a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{(\bar{P}\bar{r})}{r^3}, (r \geq a),$$

$$\varphi_i = -E_0 x + \frac{1}{3\epsilon_0} (\bar{P}\bar{r}), (r \leq a),$$

де $\varphi_0 = -Ex$ - потенціал зовнішнього однорідного поля.

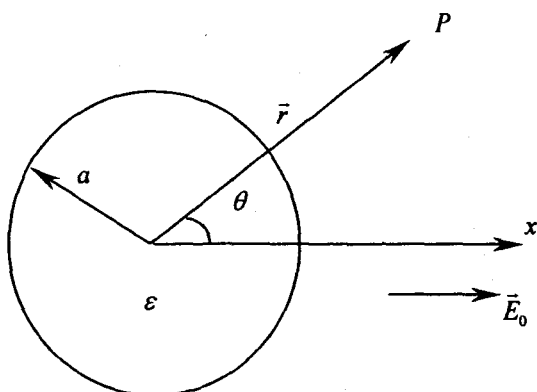


Рис. X.15. До знаходження вектора поляризації однорідної діелектричної кулі, яку внесли в зовнішнє електричне поле \vec{E}_0

Щоб записані вище вирази для потенціалів були розв'язками нашої задачі необхідно виконання двох граничних умов:

$$1) \varphi_i = \varphi_e \text{ при } r = a$$

$$2) D_{in} = D_{en} \text{ при } r = a,$$

$$\text{або } \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right)_{r=a} = \epsilon \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)_{r=a}$$

Видно відразу, що перша умова виконується автоматично. Для цього достатньо переписати вирази потенціалів φ_e та φ_i :

$$\varphi_e = -E_0 r \cos \theta + \frac{a^3 (\epsilon - 1)}{3r^2} E_0 \cos \theta,$$

$$\varphi_i = -E \cos \theta + \frac{\epsilon - 1}{3} E_0 r \cos \theta,$$

де враховано, що $x = r \cos \theta$, $\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}_i$.

Друга гранична умова дає:

$$E_0 + \frac{2(\epsilon - 1)}{3} E_i = \epsilon E_0 - \frac{\epsilon(\epsilon - 1)}{3} E_i$$

Звідки знаходимо:

$$\bar{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \bar{E}_0$$

$$E_i = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2}$$

І нарешті шукані потенціали поля мають вигляд:

$$\varphi_e = -E_0 x \left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right), (r \geq a),$$

$$\varphi_i = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} x, (r \leq a).$$

Б). Вектор поляризації \bar{P} знайдемо використовуючи принцип суперпозиції. Якщо однорідну діелектричну кулю внести в поле \bar{E}_0 , то внаслідок поляризації сумарне поле всередині кулі дорівнює:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_{\text{внутр}},$$

$$\text{де } \bar{E}_{\text{внутр}} = -\frac{\bar{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Як відомо, поле $\bar{E}_{\text{внутр}}$ залежить від поляризації \bar{P} , яка в свою чергу залежить від поля всередині кулі \bar{E} :

$$\bar{P} = \alpha \varepsilon_0 \bar{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \bar{E}$$

Таким чином, із попередніх формул маємо:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 - \frac{\bar{P}}{3\varepsilon_0} = \bar{E}_0 - \frac{(\varepsilon - 1)\bar{E}}{3}$$

Звідси знаходимо поле всередині кулі

$$\bar{E} = \frac{3}{2 + \varepsilon} \bar{E}_0$$

Оскільки $\varepsilon > 1$, то $\frac{3}{2 + \varepsilon} < 1$ і тому поле \bar{E} всередині діелектричної кулі менше за величиною ніж \bar{E}_0 .

А вектор поляризації дорівнює:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \bar{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \cdot \frac{3}{2 + \varepsilon} \bar{E}_0 = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2 + \varepsilon} \bar{E}_0,$$

що співпадає з результатом, знайденим способом А).

Завдання для самостійної роботи

1. Показати, що дипольний момент системи зарядів не залежить від вибору початку координат.

2. Показати, що магнітний момент $\vec{m} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}' \cdot \vec{j}] dV'$ не залежить від вибору початку координат.

3. Всередині кулі з однорідного ізотропного діелектрика з $\varepsilon = 50$ утворене однорідне електричне поле $E = 100 \frac{B}{M}$. Знайти максимальну поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' і середнє значення σ' одного знаку.

4. Скляна пластинка поміщена в однорідне поле \vec{E} і розташована так, що кут α_1 - це кут між нормаллю пластинки та \vec{E} . Знайти напруженість поля в пластинці, кут α_2 , який це поле утворює з нормаллю до пластинки, поверхневу щільність зарядів σ' , що виникає на поверхні пластини.

5. З рівнянь Максвелла вивести граничні умови для векторів поля.

6. Вивести з граничних умов закон заломлення векторів \vec{E} та \vec{D} , \vec{B} та \vec{H} та \vec{j} на межі поділу двох середовищ.

7. Показати, що густина зв'язаних зарядів всередині діелектрика рівна 0 при виконанні умов:

- діелектрик повинен бути однорідним;
- всередині його немає сторонніх зарядів.

8. Точковий сторонній заряд знаходиться в центрі кулі радіуса a з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ε . Знайти напруженість \vec{E} поля як функцію відстані r від центра даної кулі.

9. Знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів на поверхні однорідного діелектрика, що прилегла до зарядженої ділянки провідника.

10. Заряд q знаходиться в центрі діелектричної кулі з проникністю ε і радіусом r_0 . Знайти вектор \vec{P} як функцію \vec{r} відносно центру кулі, а також зв'язаний заряд q' всередині сфери $r < r_0$.

11. Заряд q знаходиться в центрі діелектричної кулі з проникністю ε і радіусом a . Куля розташована в середовищі з ε_2 . Знайти:

- поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі поділу двох діелектриків;
- $E(r), \varphi(r)$.

12. По циліндричному мідному провіднику тече струм $i = 100 A$. Знайти різницю потенціалів між віссю провідника і його поверхнею. Діаметр перерізу 3 мм.

13. Довгий діелектричний циліндр радіуса R поляризований так що $\vec{P} = \alpha \vec{r}$, де $\alpha - \text{const}$, \vec{r} - віддаль від осі. Циліндр обертається кутовою швидкістю ω навколо осі. Знайти \vec{B} в центрі циліндра.

14. Постійний струм i тече вздовж довгого циліндричного парамагнітного провідника. Знайти:

- поверхневий молекулярний струм;
- об'ємний молекулярний струм.

Магнітна сприйнятливість χ .

15. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком ($\chi = ar^2$), де $a - \text{const}$, r - віддаль від осі соленоїду. На осі соленоїду індукція магнітного поля B_0 . Знайти:

- намагніченість магнетика $I(r)$;
- густину молекулярного струму $j(r)$ всередині магнетика.

16. Куля радіуса r_0 з проникністю ε рівномірно заряджена по об'єму. Знайти:

- $E(r), \varphi(r)$;
- поверхневу та об'ємну густини зв'язаних зарядів.

17. Нескінченна діелектрична пластина рівномірно заряджена по об'єму. Знайти:

- $E(x), \varphi(x)$;
- поверхневу та об'ємну густини зв'язаних зарядів.

XI. РЕЛЯТИВІСТСЬКА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Компоненти 4-вимірної густини струму в деякій СВ визначаються так:

$$\vec{s}(\rho \cdot u_x, \rho \cdot u_y, \rho \cdot u_z, i \cdot c \cdot \rho), \quad (\text{XI.1})$$

де u_x, u_y, u_z - проекції швидкості розподілу заряду, ρ - густина заряду.

Враховуючи, що 4-вимірний радіус-вектор визначається:

$$\vec{R}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict) \quad (\text{XI.2})$$

закон збереження заряду в 4-вимірній формі набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{ds_i}{dx_i} = 0 \quad (\text{XI.3})$$

Компоненти 4-вектора $\vec{A}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ при переході від системи K' до системи відліку K перетворюються згідно таких формул:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(A'_1 - i \cdot B \cdot A'_4)}{\sqrt{1 - B^2}} \\ A_2 &= A'_2 \\ A_3 &= A'_3 \\ A_4 &= \frac{(A'_4 + i \cdot B \cdot A'_1)}{\sqrt{1 - B^2}} \end{aligned} \quad (\text{XI.4})$$

Якщо ввести 4-вимірний потенціал, просторові компоненти якого дорівнюють проекціям вектор-потенціалу відповідно на вісі x, y, z , а четверта компонента (часова компонента) $\Phi_4 = i \frac{\varphi}{c}$, де φ - скалярний потенціал електромагнітного поля:

$$\vec{\Phi} \left(\Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i \cdot \frac{\varphi}{c} \right) \quad (\text{XI.5})$$

то умова калібровки Лоренца

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

набуває вигляду:

$$\sum_i \frac{d\Phi_i}{dx_i} = 0 \quad (\text{XI.6})$$

А рівняння Даламбера (нагадаємо, що кожна подія визначається радіус-вектором події (XI.2)) в 4-вимірній формі набуває коваріантного вигляду:

$$\tilde{D}\Phi_i = -\mu_0 \cdot s_i \quad (\text{XII.7})$$

де $\tilde{D} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ - оператор Даламбера, s_i - компонента 4-струму.

Напруженість електричного поля та індукція магнітного поля рівномірно рухомої ЗЧ дорівнюють:

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \left[(x - V \cdot t)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot (y^2 + z^2) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{XI.8})$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = \frac{q \cdot \vec{r} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{XI.8a})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}], \quad (\text{XI.9})$$

де V - швидкість руху ЗЧ, $\vec{r} = (x - Vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радіус-вектор проведений із миттєвого положення ЗЧ в точку поля в СВ K , θ - кут між напрямком руху ЗЧ та радіус-вектором \vec{r} , $x - Vt = r \cdot \cos \theta$, $\frac{y^2 + z^2}{r^2} = \sin^2 \theta$ (див. рис. XII.1).

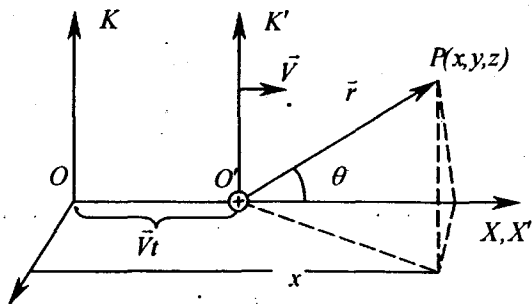


Рис. XI.1. ЗЧ рухається відносно системи відліку K з постійною швидкістю \vec{V}

4 – тензор електромагнітного поля в вакуумі:

$$F_{\mu\nu} = c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) \quad (\text{XI.10})$$

$$\mu, \nu = 1..4$$

де Φ_ν – 4-потенціалу (XI.5).

Компоненти тензора $F_{\mu\nu}$ зв'язані з компонентами векторів поля E та \vec{B} :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.11})$$

Перетворення компонент тензора при переході від однієї СВ до іншої здійснюється згідно формул:

$$F_{ik} = \alpha_{im} \cdot \alpha_{kl} \cdot F'_{ml}, \quad (\text{XI.12})$$

де α_{ik} – матриця перетворень Лоренца:

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (\text{XI.13})$$

що визначає формули перетворення компонент 4-радіус-вектору:

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k$$

Формули перетворення компонент електромагнітного поля (ФПКЕМП) при переході від СВ K' до СВ K :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma(E'_y + vB'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z - vB'_y) \quad (\text{XI.14})$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right), \quad B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right) \quad (\text{XI.15})$$

Напруженість електричного та індукцію магнітного полів ми можемо розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові компоненти поля: паралельні осі OX та перпендикулярні до вісі OX . Тоді ФПКЕМП набувають вигляду:

$$\vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel, \quad \vec{E}_\perp = \Gamma\left(\vec{E}'_\perp - [\vec{v}\vec{B}'_\perp]\right) \quad (\text{XI.16})$$

$$\vec{B}_\parallel = \vec{B}'_\parallel, \quad \vec{B}_\perp = \Gamma\left(\vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{v} \cdot \vec{E}'_\perp]\right) \quad (\text{XI.17})$$

В тому випадку, коли електричне поле \vec{E}' ($\vec{B}' = 0$), переміщується відносно СВ K , в цій СВ K виникає індукція магнітного поля \vec{B} :

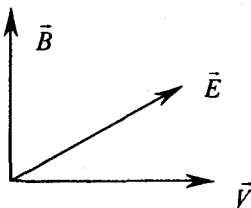


Рис. XI.2. Взаємна локальна орієнтація векторів \vec{V} , \vec{E} , \vec{B} в СВ K , якщо в СВ K' існує лише одне електричне поле \vec{E}' , яке рухається з швидкістю \vec{V} відносно СВ K

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}], \quad (\text{XI.17})$$

де \vec{E} - напруженість електричного поля в СВ K . Рис. XI.2. ілюструє взаємну орієнтацію векторів поля \vec{E} , \vec{B} та «швидкості руху поля \vec{E}' » \vec{V} . Рухоме електричне поле породжує магнітне поле.

Якщо ж в СВ K' $\vec{E}' = 0$ ($\vec{B}' \neq 0$), тоді в СВ K виникає електричне поле напруженість якого:

$$\vec{E} = -[\vec{V} \cdot \vec{B}], \quad (\text{XI.18})$$

де \vec{B} - вектор індукції магнітного поля в СВ K .

Це означає, що при переміщенні магнітного поля \vec{B}' із швидкістю \vec{V} в СВ K виникає електричне поле напруженістю $\vec{E} = -[\vec{V} \cdot \vec{B}]$. Тобто рухоме магнітне поле породжує електричне поле, причому вектори \vec{V} , \vec{B} , \vec{E} утворюють ліву трійку векторів, рис. XI.3.

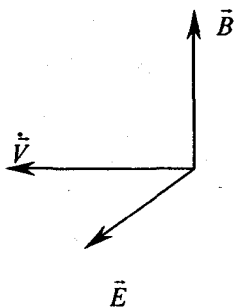


Рис. XI.3. Взаємна локальна орієнтація векторів \vec{V} , \vec{B} , \vec{E} в СВ K , якщо в СВ K' існує лише одне «рухоме» магнітне \vec{B}'

Тобто, якщо в системі K' існує тільки електричне або тільки магнітне поле, то в системі відліку K з'являється відповідно магнітне і електричне поля вектори індукції та напруженості яких, перпендикулярні, відповідно, вектору \vec{E} та \vec{B} . Можна сказати і так. У всіх інших системах відліку вектори \vec{E} та \vec{B} перпендикулярні один одному.

Тензор ЕМП в середовищі та тензор електричного і магнітного моментів визначаються:

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.19})$$

$$m_{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot F_{ik} - f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & I_z & -I_y & icP_x \\ -I_z & 0 & H_x & icP_y \\ I_y & -I_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.20})$$

Перша пара та друга пара рівнянь Максвелла в тензорній формі мають, відповідно, вигляд:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\text{XI.21})$$

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = s_\mu \quad (\text{XI.22})$$

Закон Ома в диференціальній формі $\vec{j} = \lambda \cdot \vec{E}$ через тензор електромагнітного поля записується таким чином:

$$s_\mu = \frac{\lambda}{c} \cdot \sum_{\nu} F_{\mu\nu} \cdot v_\nu \quad (\text{XI.23})$$

де λ – питома електропровідність, s_μ – компоненти 4 – струму, v_ν – компоненти 4 – швидкості: $v_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}$

В будь-якій ІСВ залишаються інваріантними такі комбінації полів:

$$I_1 = c^2 \cdot B^2 - E^2 \quad (\text{XI.24})$$

$$I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (\text{XI.25})$$

Приклади розв'язування задач

Приклад XI.1. Точковий заряд q в СВ K рухається із швидкістю \vec{V} вздовж вісі OX . Знайти напруженість електричного поля \vec{E} в СВ K .

Розв'язання: СВ K' зв'яжемо з зарядженою частинкою. Тоді в K' системі компоненти поля будуть такі:

$$V' = 0, \quad E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} x', \quad E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$$

де $\vec{r}' = x'i + y'j + z'k$ - радіус-вектор, що визначає положення точки поля в K' .

Складові електричного та магнітного полів в СВ K визначаються формулами перетворення (XI.14), (XI.15).

Поля \vec{E} та \vec{B} повинні бути виражені через координати точки поля в СВ K , тому для моменту часу, коли початки координат системи відліку K та K' співпадають ($t=0$) із перетворень Лоренца маємо:

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1)$$

Згідно (1):

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{q \cdot y}{4\pi\epsilon_0 r'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_0 r'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Оскільки $\frac{E_x}{E_y} = \frac{x}{y}$, то вектор \vec{E} направлений вздовж \vec{r} ;

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \left(\frac{1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right)$$

де $\sin^2 \theta = \frac{y^2 + z^2}{r^2}$ - кут між \vec{r} та \vec{V} в СВ K ; а модуль вектора \vec{E} дорівнює:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{q \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}$$

Таким чином,
$$\vec{E} = \frac{q \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$

Приклад XI.2. Знайти магнітне поле зарядженої частинки (величина заряду q), що рухається із швидкістю \vec{V} вздовж вісі OX .

Розв'язання: Використовуючи формули перетворення (XI.15) знаходимо:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \vec{E}],$$

де напруженість електричного поля \vec{E} в K -системі визначається останньою формулою попередньої задачі. Тому:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) [\vec{V} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$

Звідси випливає, що в точках простору в напрямку \vec{V} , магнітне поле $\vec{B} = 0$, а при $V \leq c$ магнітне поле в площині перпендикулярній \vec{V} дорівнює:

$$\vec{B}_\perp = \frac{\mu_0 q [\vec{V} \cdot \vec{r}]}{4\pi \cdot r^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

при $V \ll c$ одержуємо:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q [\vec{V} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

Приклад XI.3. Протон знаходиться в спокої між полюсами магніту. Знайти силу, що діє на нього в СВ відносно якої магніт з протоном рухається із швидкістю \vec{V} .

Розв'язання: СВ K' зв'яжемо з магнітом. Тому в СВ K' на заряд q не діє сила Лоренца. Але в K -системі, оскільки q рухається в магнітному полі, буде діяти і сила Лоренца і сила з боку електричного поля, яке з'явиться в K -системі в наслідок руху магнітного поля B' . Дій-

сно, із формул перетворення (XI.14) (XI.15) в СВ K буде існувати електромагнітне поле:

$$E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y) = -\Gamma VB'_y, \quad B_y = \Gamma B'_y$$

Тому сила, яка діє на заряд q в СВ K дорівнює:

$$F = qE_z + qVB_y = -q\Gamma VB'_y + q\Gamma VB'_y = 0$$

Таким чином, сумарна сила, що діє на заряд q в K -системі дорівнює 0, чого і слід було чекати на основі принципу відносності.

Приклад XI.4. Уявимо, що між пластинами конденсатора в СВ K' знаходиться в спокої протон. Чому дорівнює сила що діє на нього в СВ K ? (Рис. XI.4.).

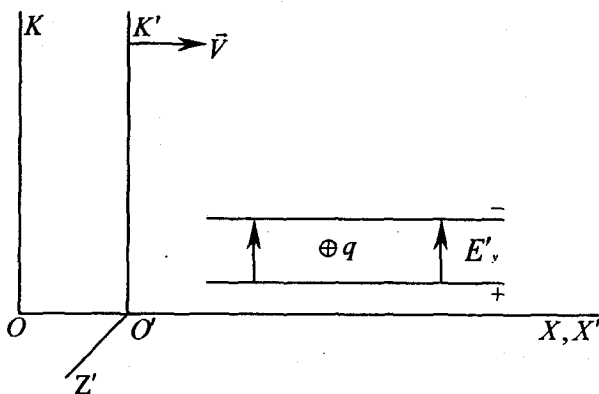


Рис. XI.4

Розв'язання. Знаходимо спочатку по формулам (XI.14) (XI.15) компоненти поля в СВ K :

$$E_y = \Gamma E'_y, \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y$$

тому сумарна сила, що діє на протон, з урахуванням напрямку векторів поля та напрямку швидкості його, дорівнює:

$$F_y = F_y^E - F_y^L = \Gamma q E'_y - q V B_z = q E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

тобто в СВ K сила зменшилася в Γ раз у відповідності з вимогами СТВ (оскільки в СВ K' протон нерухомий, то повинно мати місце таке співвідношення між поперечними складовими сил

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Показати, що рівняння Даламбера в 4- вимірному поданні мають релятивістсько-коваріантну форму.

2. Показати, що закон збереження заряду, умова калібровки Лоренца в 4- вимірному поданні мають релятивістсько-коваріантну форму.

3. Виходячи із означень векторів \vec{H} та \vec{D} , тензора ЕМП в вакуумі F_{ik} записати тензор ЕМП в середовищі.

4. Одержати формули перетворення для векторів поля \vec{D} та \vec{H} при переході із однієї ІСВ в іншу.

5. Показати, що $I_1 = c^2 B^2 - E^2$ та $\vec{B} \cdot \vec{E} = I_2$ є інваріантами відносно перетворень Лоренца.

6. Одержати формули перетворення для векторів поля \vec{E} та \vec{B} при переході із однієї ІСВ в іншу, використовуючи:

А) формули перетворення компонент тензора ЕМП;

Б) властивості ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ;

В) властивості ЕМП рівномірно рухомої зарядженої нитки.

7. Впевнитися, що тензорні рівняння (XII.21) і (XII.22) - це рівняння Максвелла, які записані в чотиривимірній формі.

8. Чи можливо відповідним вибором СВ замість електромагнітного поля одержати тільки електричне (або тільки магнітне) поле?

9. У вакуумі відносно деякої СВ K знаходяться взаємно перпендикулярні електричне ($\vec{E} = const$) та магнітне ($\vec{B} = const$) поля, причому $cB > E$. Знайти швидкість руху СВ K' , відносно якої буде спостерігатися тільки магнітне поле, та обчислити його індукцію.

10. До обкладинок повітряного циліндричного конденсатора, радіуси яких a та b , прикладена постійна напруга U . По внутрішній обкладці в напрямку її вісі проходить постійний електричний струм i . В якій СВ і при якій умові в конденсаторі існує лише магнітне поле? Яка його напруженість? Опором внутрішньої обкладки знехтувати.

11. Аналізуючи електромагнітні сили, що діють на протон в прикладах 3 та 4 [10, розділ 6] обґрунтувати співвідношення $E_z = -\Gamma V'_y$ та

$$B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y.$$

12. Обчислити потенціали електромагнітного поля, що створюється в вакуумі точковим зарядом q , що рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю \vec{V} . Обчислити напруженість та індукцію електромагнітного поля, що створюється цим зарядом.

13. В СВ K' електричне та магнітне поля напрямлені під кутом одне до одного. З якою швидкістю повинна рухатись СВ K' , щоб в СВ K поля були паралельні ($[\vec{E} \cdot \vec{B}] = 0$)?

14. Нескінчений довгий прямий дріт (радіус a), по якому тече струм i , оточений циліндричною оболонкою радіуса b . Між дротом і оболонкою підтримується постійна різниця потенціалів $\Delta\phi$. Визначити швидкість двох СВ, що рухаються паралельно вісі дроту, в яких відповідно зникають:

- магнітне поле;
- електричне поле.

Вказати умови, які зв'язують i та $\Delta\phi$, при яких можливий вибір указаних СВ.

15. Показати, що поле плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі однакове у всіх СВ.

16. Показати, що в СВ K' , що рухається зі швидкістю $\vec{V} = \frac{[\vec{E} \cdot \vec{B}]}{B^2}$

електричне поле відсутнє, якщо в СВ K $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $cV > E$.

17. Два точкових заряди, відстань між якими дорівнює a , рухаються зі швидкістю \vec{V} , перпендикулярно до відрізка, що їх сполучає. Знайти силу взаємодії між зарядами.

18. По прямому провіднику (дроту) тече струм з об'ємною густиною \vec{j} . Знайти швидкість СВ K' , в якій E' в n разів менше cV' .

19. Поля \vec{E} та \vec{B} в СВ K утворюють гострий кут α . Знайти модулі E' та B' в тій СВ, в якій кут між \vec{E}' та \vec{B}' дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

20. Впевнитись, що при переході до трьохвимірних позначень релятивістсько-коваріантна форма рівнянь Максвелла зводиться до звичайних рівнянь Максвелла для \vec{E} та \vec{B} .

21. Підтвердити співвідношення $B_x = B'_x, B_y = \Gamma B'_y, B_z = \Gamma B'_z$ для магнітних полів, що створюються соленоїдом та прямим довгим струмом.

22. При якій умові в СВ K (електричне) магнітне поле відсутнє, якщо в СВ K' $\vec{E} \perp \vec{B}$.

23. В СВ K' напруженості \vec{E}' та \vec{B}' однорідного електромагнітного поля задані, причому $\vec{E}' \cdot \vec{B}' > 0$. З якою швидкістю повинна рухатися СВ K' , щоб в СВ K спостерігалася паралельність векторів \vec{E} та \vec{B} ($\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{B}$).

24. Напруженості \vec{E} та \vec{B} однорідного електромагнітного поля в СВ K відомі, причому $[\vec{E} \cdot \vec{B}] \neq 0$. Знайти швидкість СВ K' , в якій $|\vec{E}'|$ або $|\vec{B}'|$ має таке саме значення, що і в СВ K .

25. Одержати формули перетворення компонент вектора поляризації та вектора намагнічування при переході від однієї СВ до іншої.

26. Показати, що в СВ K буде відсутнє електричне поле, якщо в СВ K' , яка рухається з швидкістю $\vec{V} = \frac{[\vec{B}' \cdot \vec{E}']}{B'^2}$, вектори \vec{E}' та \vec{B}' взаємоперпендикулярні.

27. При якій швидкості руху СВ K' в СВ K відсутнє магнітне поле, якщо в СВ K' $\vec{E}' \perp \vec{B}'$? $\left\{ \vec{V} = -\frac{[\vec{E}' \cdot \vec{B}']}{E'^2} c^2 \right\}$.

28. В СВ K' вздовж вісі $O'X'$ розташований однорідний провідник з постійним струмом (ППС) i . Пояснити явище виникнення об'ємної густини заряду в ППС з точки зору іншої довільної СВ.

29. Вважаючи, що ППС нейтральний у власній системі відліку (ВСВ), знайти густину струму та заряду в довільній СВ, відносно якої ППС рухається з швидкістю \vec{V}

30. Вважаючи, що ППС "заряджений" у ВСВ, знайти густину струму та заряду в довільній СВ, відносно якої ППС рухається з швидкістю \vec{V}

31. Обґрунтувати ФПКЕМП виходячи:

- а) із аналізу електромагнітного поля рухомої зарядженої нитки;
- б) із аналізу електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки;
- в) із вимоги релятивістської інваріантності сили Лоренца при переході від однієї СВ до іншої;
- г) із аналізу основних експериментальних законів електродинаміки.

32. Обґрунтувати ФПКЕМП виходячи із коваріантності рівнянь Максвелла при перетвореннях Лоренца.

33. Довести співвідношення $B_y = -\Gamma \frac{V}{C} E'_z, B_z = \Gamma \frac{V}{C} E'_y$ для поля, що створюється рухом рівномірно зарядженої нитки довжиною l (\vec{E}' - напруженість електричного поля у власній СВ).

34. Нескінчений довгий круговий циліндр рівномірно заряджений з лінійною густиною τ . Вздовж вісі циліндра тече рівномірно розподілений струм i . У всьому просторі $\epsilon = \mu = 1$. Знайти таку СВ, в якій існує тільки \vec{E}' або тільки \vec{B}' та знайти величину цих полів.

Основні формули векторного аналізу

Скалярне поле

Теорема. Якщо в просторі задане скалярне поле $\varphi(\vec{r})$ (наприклад, деяке температурне поле t^0 , поле електричного потенціалу, тиску і т.д.), то похідна цього скалярного поля по деякому напрямку \vec{l} в просторі дорівнює проєкції градієнта цього поля на вибраний напрямок \vec{l} :

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad}\varphi \cdot \vec{l} \quad (\text{A.1})$$

Оскільки $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$, а повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ дорівнює:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz,$$

то повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ можна подати у вигляді:

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{l} = \text{grad}\varphi \cdot dl,$$

де

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A.2})$$

Таким чином, фізичний зміст градієнту скалярного поля: це вектор, в напрямку якого скалярне поле зростає найшвидше.

Теорему (А.1) можна записати також і в такому вигляді:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, \vec{i}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, \vec{j}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, \vec{k}) = |\vec{l}| \cdot |\text{grad}\varphi| \cdot \cos(\vec{l}, \text{grad}\varphi) \quad (\text{A.3})$$

$$|\text{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Якщо ввести оператор Гамільтона (оператор «набла»)

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.5})$$

то означення (A.2) набуває вигляду

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \bar{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Із означення (A.5) випливають співвідношення:

$$\nabla r = \bar{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\bar{r}}{r} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{grad}\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \text{grad} \cdot r = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\bar{r}}{r}, \quad (\text{A.8})$$

де $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ віддаль між двома точками з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0) .

І взагалі, якщо є функція $f(\varphi)$, де φ в свою чергу залежить від просторових координат, то

$$\text{grad}f(\varphi) = \frac{df}{d\varphi} \cdot \text{grad}\varphi \quad (\text{A.9})$$

Властивості градієнта скалярної функції:

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi \quad (\text{A.10})$$

$$\text{grad}\varphi\psi = \psi\text{grad}\varphi + \varphi\text{grad}\psi \quad (\text{A.11})$$

Повна (або субстанціональна, матеріальна) похідна по часі t характеризує зміну певної величини для даної частинки, тоді як частина (або локальна) похідна описує зміну цієї величини в даному місці. Тобто, матеріальна похідна описує швидкість повної зміни величини в точці, яка рухається разом із середовищем. При цьому вважається, що ця величина залежить і від часу і від миттєвого положення точки.

Обґрунтуємо вираз для повної похідної трьома різними способами.

1. Повна похідна векторного поля $\bar{A}(x, y, z, t)$ по часу дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\bar{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\bar{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\bar{A}}{\partial z} = \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{A} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

2. Нехай деяка скалярна функція $u(\bar{r}, t)$ залежить від чотирьох змінних x, y, z, t , де $\bar{r}(t)$ - радіус-вектор, який характеризує положення точки в момент часу t . Тоді, приріст функції $u(\bar{r}, t)$ за проміжок часу Δt дорівнює:

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t) - u(t) &= u(\bar{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - u(\bar{r}(t), t) = \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \Delta \bar{r} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \Delta t = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \cdot \text{gradu} \right) \right] \Delta t \end{aligned}$$

де $gradu = \frac{\partial u}{\partial \vec{r}}$. Далі, якщо поділити обидві частини цієї рівності на Δt та знайти границю при $\Delta t \rightarrow 0$, то одержимо формулу подібну до (A.12):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot gradu \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot gradu) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) u$$

3. Розглянемо деяке векторне поле $\vec{B}(x, y, z, t)$. В лабораторній СВ зміна вектора поля визначається двома доданками:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_r + d\vec{B}_k,$$

де $d\vec{B}_r$ - локальна зміна вектора \vec{B} , що характеризує зміну його в даному місці (точці простору), $d\vec{B}_k$ - конвективна зміна (переносна) вектора \vec{B} , яка визначається неоднорідністю поля \vec{B} . Тобто, при переході від однієї точки простору до іншої - нескінченно близької точки поле \vec{B} зміниться на величину, яка визначається похідною по напрямку переміщення (тобто по напрямку \vec{V}):

$$d\vec{B}_k = \frac{d\vec{B}}{dl} \cdot dl = dl \cdot (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{B} = dl (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{B},$$

де $\vec{l} = \frac{\vec{V}}{V}$, $dl = |\vec{V}| dt$.

Тому $d\vec{B}_k = |\vec{V}| dt \cdot \left(\frac{\vec{V}}{V} \cdot \nabla \right) \vec{B} = dt (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}$. Як бачимо, $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}$ - дорівнює

миттєвому приросту вектора \vec{B} при переміщенні "точки спостереження" на відрізок, який рівний по величині і напрямку вектору \vec{V} . І нарешті, обґрунтуємо (A.12):

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

Зупинимося більш детально на властивостях скалярного диференційного оператора $(\vec{a} \cdot \text{grad}) \equiv (\vec{a} \nabla)$:

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

Виконання операції $(\vec{a} \nabla)$ над довільною функцією точки еквівалентне добутку похідної цієї функції, взятої по напрямку вектора \vec{a} , на чисельну величину вектора \vec{a} :

$$(\vec{a} \nabla) = a \frac{\partial}{\partial a}$$

Дійсно, знайдемо спочатку операцію $(\bar{a}\nabla)$ над скаляром φ

$$(\bar{a}\nabla) \cdot \varphi = a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \bar{a} \cdot \nabla \varphi$$

Але на основі $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \text{grad}_\tau \varphi$ маємо $(\bar{a}\nabla) \cdot \varphi = \bar{a} \cdot \nabla \varphi = a \frac{\partial \varphi}{\partial a}$

Операцію $(\bar{a}\nabla)$ над вектором \bar{b} дає вектор:

$$(\bar{a}\nabla) \cdot \bar{b} = a_x \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

компонента якого, наприклад, по осі Ox дорівнює:

$$\left((\bar{a}\nabla) \cdot \bar{b} \right)_x = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} = (\bar{a}\nabla) \cdot b_x$$

З іншого боку, похідна вектора \bar{b} по напрямку \bar{a} визначається:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial a} = \cos(x, \bar{a}) \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \cos(y, \bar{a}) \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \cos(z, \bar{a}) \frac{\partial \bar{b}}{\partial z}$$

Якщо помножити останню рівність на a та порівняти з (A.14), то впевнимися, що дійсно

$$(\bar{a}\nabla) \cdot \bar{b} = a_x \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = a \frac{\partial \bar{b}}{\partial a}$$

Таким чином, якщо вектор \bar{a} досить малий, то з точністю до величин другого порядку малості $(\bar{a}\nabla) \cdot \bar{b}$ та $(\bar{a}\nabla) \cdot \varphi$ дорівнюють відповідно приросту вектора \bar{b} і скаляру φ при переміщенні «точки спостереження» на відрізок, який дорівнює по величині і напрямку вектору \bar{a} .

Векторне поле

Векторним полем називають область простору, в кожній точці якого задано значення довільного вектору $\vec{a}(\vec{r})$.

Векторний добуток двох векторів \bar{a} і \bar{b} визначається

$$[\bar{a}\bar{b}] \equiv \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.15})$$

як вектор, що перпендикулярний векторам \bar{a} і \bar{b} та утворює з ними праву трійку векторів, а по величині дорівнює

$$\|[\bar{a}\bar{b}]\| = ab \cdot \sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (\text{A.16})$$

Подвійним векторним добутком називається вектор $\|[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]\|$ і він дорівнює

$$\|[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]\| = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}) \quad (\text{A.17})$$

(ця формула читається «бац мінус цаб»)

Диференціювання вектора, який залежить від скалярного аргументу:

$$\frac{d\bar{a}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \bar{a}_0(x) \alpha(x) = \bar{a}_0 \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \frac{d\bar{a}_0}{dx} = \bar{a}_0 \frac{d\alpha}{dx} + \bar{b}, \quad (\text{A.18})$$

де \bar{a}_0 - одиничний орт в напрямку вектора \bar{a} , $\bar{b} = \alpha \omega \bar{b}_0$, $\bar{b}_0 \perp \bar{a}_0$ та

$\omega = \left| \frac{d\bar{a}_0}{dx} \right|$ - швидкість зміни кута φ , що визначає орієнтацію вектора \bar{a} .

Наприклад, другий доданок в (A.18) можна пояснити так.

Зміна в часі постійного по величині вектора означає, очевидно, зміну орієнтації його в просторі. Тобто, похідна по часу постійного по величині вектора \bar{a} , $\frac{d\bar{a}}{dt}$, зумовлена приростом його внаслідок повороту вектора \bar{a} навколо певної осі. Оскільки приріст, наприклад одиничного орта \bar{j} , визначається:

$$d\bar{j} = [d\varphi \cdot \bar{j}], \quad (\text{A.19})$$

то похідна по часу вектора \bar{j} дорівнює:

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = [\bar{\omega} \bar{j}] \quad (\text{A.20})$$

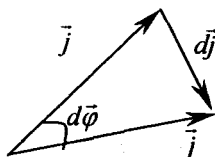


Рис. А.1. Приріст в часі (а значить і зміна в часі) одиничного орту \bar{j} зумовлений поворотом його

Може бути показано, що нескінченний малий потік довільного векторного поля \bar{a} через поверхню нескінченно малого кубика об'єму $dV = dx dy dz$ дорівнює:

$$dN = \bar{a} d\bar{S} = \text{div } \bar{a} dV, \quad (\text{A.21})$$

де диференціальна операція $\text{div} \vec{a}$ в декартовій системі координат визначається так:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

Деякі властивості дивергенції векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) &= \text{div} \vec{a}_1 + \text{div} \vec{a}_2 \\ \text{div}(c\vec{a}) &= c \cdot \text{div} \vec{a}, \text{ де } c = \text{const} \\ \text{div} \varphi(\vec{r}) &= -\text{div}_0 \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Якщо вектор $\vec{a}(u)$ залежить тільки від скаляра u , то

$$\text{div} \vec{a}(u) = (\nabla \vec{a}(u)) = \left(\frac{d\vec{a}}{du} \nabla u \right) = \left(\dot{\vec{a}} \cdot \text{grad} u \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\text{rot} \vec{a}(u) = \left[\nabla u \frac{d\vec{a}}{du} \right] = \left[\text{grad} u, \dot{\vec{a}} \right] \quad (\text{A.24})$$

Обчислення похідних від добутку та знаходження повторних похідних з допомогою оператора «набла» відбувається при виконанні таких двох правил:

1. Оператор «набла» ∇ повинен діяти по черзі на кожен скалярну чи векторну величину, що розташована за ним.

2. З оператором «набла» ∇ слід поводитися як із звичайним вектором, але його не можна переставляти місцями з величиною на яку він діє і виносити цю величину за знак ∇ . Наприклад:

$$1. \text{grad}(\varphi\psi) = \nabla \varphi\psi = \varphi \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla \varphi = \varphi \cdot \text{grad} \psi + \psi \cdot \text{grad} \varphi \quad (\text{A.25})$$

$$2. \text{div} \psi \vec{a} = \nabla \varphi \vec{a} = \vec{a} \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \nabla \vec{a} = \vec{a} \cdot \text{grad} \varphi + \varphi \cdot \text{div} \vec{a} \quad (\text{A.26})$$

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r} = \text{div} \vec{n} = \vec{r} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdot \text{div} \vec{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = [\nabla \cdot \varphi \vec{a}] = \varphi [\nabla_a \vec{a}] + [\nabla_\varphi \varphi, \vec{a}] = \varphi \cdot \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi, \vec{a}] \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} 3. \text{div} [\vec{a} \vec{b}] &= \nabla [\vec{a} \vec{b}] = \nabla_a [\vec{a} \vec{b}] + \nabla_b [\vec{a} \vec{b}] = \vec{b} [\nabla_a \vec{a}] - \nabla_b [\vec{b} \vec{a}] = \\ &= \vec{b} [\nabla_a \vec{a}] - \vec{a} [\nabla_b \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

При обґрунтуванні цієї формули зроблена циклічна перестановка векторів, а в другому доданку змінений порядок векторного множення. Якби останнє ми не зробили, то при циклічній перестановці було б порушене правило 2. – вектор \vec{b} був би пересунутий за знак оператора ∇_b .

$$\begin{aligned} \text{rot} [\vec{a} \vec{b}] &= [\nabla [\vec{a} \vec{b}]] = [\nabla_a [\vec{a} \vec{b}]] + [\nabla_b [\vec{a} \vec{b}]] = (\nabla_a \vec{b}) \vec{a} - (\nabla_a \vec{a}) \vec{b} + (\nabla_b \vec{a}) \vec{b} - (\nabla_b \vec{b}) \vec{a} = \\ 4. &= (\vec{b} \nabla_a) \vec{a} - \vec{b} (\nabla_a \vec{a}) + \vec{a} (\nabla_b \vec{b}) - (\vec{a} \nabla_b) \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \cdot \text{grad}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \text{grad}) \vec{b} + \vec{a} \cdot \text{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{div} \vec{a} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

В останньому виразі $(\bar{a} \cdot \text{grad}) \equiv (\bar{a} \nabla)$ - скалярний диференційний оператор (A.13)

$$(\bar{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$5. \text{grad}(\bar{a} \bar{b}) = \nabla_a(\bar{a} \bar{b}) + \nabla_b(\bar{a} \bar{b}) = (\bar{b} \nabla_a) \bar{a} + [\bar{b} [\nabla_a \bar{a}]] + (\bar{a} \nabla_b) \bar{b} + [\bar{a} [\nabla_b \bar{b}]] = \\ = (\bar{b} \cdot \text{grad}) \bar{a} + (\bar{a} \cdot \text{grad}) \bar{b} + [\bar{b} \cdot \text{rot} \bar{a}] + [\bar{a} \cdot \text{rot} \bar{b}] \quad (\text{A.30})$$

$$6. \text{grad} \frac{a^2}{2} = (\bar{a} \cdot \text{grad}) \bar{a} + [\bar{a} \cdot \text{rot} \bar{a}] \quad (\text{A.31})$$

$$7. \text{div grad} \varphi = (\nabla \nabla) \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \quad (\text{A.32})$$

$$8. \text{rot rot} \bar{a} = [\nabla [\nabla \bar{a}]] = \nabla (\nabla \bar{a}) - (\nabla \nabla) \bar{a} = \text{grad div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a} \quad (\text{A.33})$$

$$9. (\nabla \bar{a}) \bar{b} = (\nabla_a \bar{a}) \bar{b} + (\nabla_b \bar{a}) \bar{b} = \bar{b} \cdot \text{div} \bar{a} + (\bar{a} \nabla_b) \bar{b} = \bar{b} \cdot \text{div} \bar{a} + (\bar{a} \cdot \text{grad}) \bar{b} \quad (\text{A.34})$$

Із інтегрального подання оператора Гамільтона випливає формула

$$(\nabla \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int (\bar{n} \bar{a}) \cdot \bar{b} \cdot dS, \text{ при } V \rightarrow 0$$

із якої безпосередньо одержуємо

$$\int (\nabla \bar{a}) \bar{b} dV = \int (\bar{n} \bar{a}) \cdot \bar{b} \cdot dS \quad (\text{A.35})$$

або, враховуючи (A.34)

$$\int (\bar{n} \bar{a}) \cdot \bar{b} \cdot dS = \int (\bar{b} \cdot \text{div} \bar{a}) dV + \int (\bar{a} \cdot \text{grad}) \bar{b} dV \quad (\text{A.36})$$

Із інтегрального подання оператора Гамільтона випливає також і наступна формула

$$[[\nabla \bar{a}] \bar{b}] = \lim_{V \rightarrow 0} \int [[\bar{n} \bar{a}] \bar{b}] dS \quad (\text{A.37})$$

Звідки маємо:

$$\int [[\nabla \bar{a}] \bar{b}] dV = \int [[\bar{n} \bar{a}] \bar{b}] dS \quad (\text{A.38})$$

А далі, використовуючи

$$[[\nabla \bar{a}] \bar{b}] = [[\nabla_a \bar{a}] \bar{b}] + [[\nabla_b \bar{a}] \bar{b}] = -[\bar{b} \cdot \text{rot} \bar{a}] - [[\bar{a} \nabla] \cdot \bar{b}]$$

після підстановки в (A.38) одержуємо нарешті другу інтегральну рівність:

$$\int [\bar{b} \cdot [\nabla \bar{a}]] dV + \int [[\bar{a} \nabla] \cdot \bar{b}] dV = - \int [[\bar{n} \bar{a}] \cdot \bar{b}] \cdot dS \quad (\text{A.39})$$

Дельта-функція Дірака та її властивості

Як відомо, δ - функція була вперше введена П. Діраком, і визначається співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\delta(x) &= 0 \text{ при } x \neq 0 \\ \delta(x) &= \infty \text{ при } x = 0\end{aligned}$$

так, що

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \text{ де } a < 0 < b \quad (\text{A.40})$$

Із означення (A.40) одержуємо основну властивість δ - функції:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0) \text{ при } a < 0 < b \quad (\text{A.41})$$

δ - функція не може входити в будь-які кінцеві фізичні вирази і формули. Завжди коли пишеться δ - функція, мається на увазі подальше інтегрування по тим змінним, від яких залежить δ - функція.

δ - функцію можна розглядати як межу послідовності аналітичних функцій. Зокрема, такими властивостями характеризується вираз

$$F(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha x}{x\pi}, \quad (\text{A.42})$$

який при $\alpha \rightarrow \infty$ поводить себе як δ - функція.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x\pi} dx = 1 \text{ при будь-якому } \alpha$$

Тобто, ми бачимо, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{x\pi} = \delta(x) \quad (\text{A.43})$$

Через δ - функцію часто виражають інтеграли виду:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$, який слід розуміти так

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx} dk = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \sin \alpha x$$

Порівнюючи з (A.43) одержуємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x) \quad (\text{A.44})$$

Інші властивості δ - функції:

$$\begin{aligned}\int f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx &= f(x_0) \\ \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta'(-x) &= -\delta'(x)\end{aligned}$$

$$x \cdot \delta(x) = 0$$

$$x \cdot \delta'(x) = -\delta(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad (\text{A.45})$$

$$\int f(x) \cdot \delta'(x-a) dx = -f'(a)$$

$$\int \delta(a-x) \cdot \delta(x-b) dx = \delta(a-b)$$

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$$

$$\delta(f) df = \delta(x) dx$$

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x-x_0)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|}$$

δ - функція корисна також при розгляді інтегралів Фур'є. Так, якщо ми маємо розклад деякої функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk, \quad (\text{A.46})$$

то з допомогою (A.44) відразу одержуємо вираз для оберненого інтегралу Фур'є. Дійсно, помножимо ліву і праву частину (A.46) на $e^{-ik'x}$ та проінтегруємо по x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik'x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{i(k-k')x} dk \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} \cdot dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c(k) 2\pi \delta(k-k') dk = 2\pi c(k')$$

І тому одержуємо

$$c(k') = \frac{1}{2\pi} \int f(x) \cdot e^{-ik'x} dx \quad (\text{A.47})$$

Обґрунтуємо важливе співвідношення:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} \equiv \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r), \quad (\text{A.48})$$

де

$$\delta(r) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

Для цього розкладемо функцію $\frac{1}{r}$ в тривимірний інтеграл Фур'є:

$$\frac{1}{r} = \int c(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y dk_z \quad (\text{A.49})$$

Відповідно для функції $c(\vec{k}) \equiv c(k_x, k_y, k_z)$ маємо на основі (A.47)

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} dV \quad (\text{A.50})$$

Для знаходження $c(\vec{k})$ в (A.50) інтегруємо спочатку по куту, вибираючи полярну вісь в напрямку вектора \vec{k} :

$$c(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{r} r^2 dr \int_0^\pi e^{-ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{k} \int_0^\infty (e^{-ikr} - e^{ikr}) dr$$

Останній інтеграл знаходиться таким чином. Підінтегральний вираз множиться на $e^{-\alpha r}$, знаходиться інтеграл а потім в одержаному результаті α спрямовується до нуля ($\alpha \rightarrow 0$).

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2}$$

Після підстановки в (A.49) маємо

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

А тепер знайдемо лапласіан лівої і правої частини цього виразу:

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

Враховуючи (A.44) нарешті отримуємо:

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} (2\pi)^3 \delta(x)\delta(y)\delta(z) = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad (\text{A.51})$$

Співвідношення між формулами електродинаміки поданими в СІ та системі одиниць Гауса

Назва величини	СІ	Система Гауса	Назва величини	СІ	Система Гауса
Сила струму	i	$i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Електричний дипольний момент	p	$p \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$
Густина струму	j	$j \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Магнітний момент струму	p_m	$p_m \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$
Електричний заряд	q	$q \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Скалярний потенціал	φ	$\frac{\varphi}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
Густина заряду	ρ	$\rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Векторний потенціал	A	$A \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$
Питома електропровідність	λ	$4\pi\epsilon_0 \cdot \lambda$	Швидкість світла	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$	c
Електроємність	C	$C \cdot 4\pi\epsilon_0$	Магнітна сприйнятливість	χ	$4\pi\chi$
Напруженість електричного поля	E	$\frac{E}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	Діелектрична сприйнятливість	α	$4\pi\alpha$
Електричне зміщення	D	$D \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$	Діелектрична проникність	ϵ	$\epsilon\epsilon_0$
Напруженість магнітного поля	H	$\frac{H}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$	Магнітна проникність	μ	$\mu\mu_0$
Магнітна індукція	B	$B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$	Відносна діелектрична проникність	ϵ_r	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Потік магнітної індукції	Φ	$\Phi \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$	Відносна магнітна проникність	μ_r	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Індуктивність	L	$\frac{L}{4\pi\epsilon_0}$	Електричний опір	R	$\frac{R}{4\pi\epsilon_0}$
Вектор поляризації	P	$P \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Вектор намагнічування	I	$I \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$

Правила користування цією таблицею. Для того, щоб перевести будь-яку формулу записану в СІ у відповідну формулу в системі Гауса слід символ, який позначений в колонці «СІ» замінити символом із колонки «Система Гауса». Наприклад, рівняння Максвела в СІ

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

переводиться, згідно таблиці, заміною векторів \vec{H} на $\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$, \vec{D} на

$\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$, \vec{j} на $\vec{j} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$. І тоді маємо:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \right) = \vec{j} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0} + \frac{\partial \left(\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \right)}{\partial t}$$

В результаті одержуємо рівняння Максвела в системі Гауса:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ще один приклад. Записати формулу $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$, що визначає індукцію магнітного поля довгого провідника зі струмом, в системі Гауса. Робимо заміни

B на $B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$, а i на $i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$ і одержуємо:

$$B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} = \frac{\mu_0 i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{2\pi R} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = \frac{2i}{R} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2i}{cR}$$

$$B = \frac{2i}{cR}$$

Щоб записати рівняння $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ в системі Гауса, густину заряду

ρ замінюємо на $\rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$, а \vec{D} на $\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$ і одержуємо:

$$\operatorname{div} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \cdot \vec{D} = \rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

Зауваження. Перехід із СІ в систему Гауса, згідно цих правил, завжди приводить до вірних результатів. Але інколи при переході від системи Гауса до СІ *виникають помилки, якщо тільки формула в системі Гауса написана для вакууму.* Тому перш ніж переводити будь-яку формулу із системи Гауса в СІ її слід записати в формі, що справедлива для середовища.

Основні формули електродинаміки в системі Гауса та СІ

Назва формули	Система Гауса	СІ
Поле \vec{E} в плоскому конденсаторі	$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$
Зв'язок між \vec{E} та φ	$\vec{E} = -\nabla\varphi, \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$	
Зв'язок між \vec{P} та \vec{E}	$\vec{P} = \alpha\vec{E}$	$\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$
Означення вектора електричного зміщення \vec{D}	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi P = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + P = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$
Зв'язок між σ' , P , E	$\sigma' = P_n = \alpha E_n$	$\sigma' = P_n = \alpha\varepsilon_0 E_n$
Ємність плоского конденсатора	$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi h}$	$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{h}$
Густина енергії електромагнітного поля	$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{8\pi}$	$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2}$
Диполь \vec{p} в електричному полі \vec{E}	$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}, \vec{M} = [\vec{p}\vec{E}], W = -\vec{p}\vec{E}$	
Закон Біо-Савара	$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{i}{r^3} [d\vec{l}\vec{r}]$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} [d\vec{l}\vec{r}]$
Поле \vec{B} прямого струму	$B = \frac{1}{c} \frac{2i}{r}$	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i}{r}$
Циркуляція вектора намагнічування \vec{I}	$\oint_L \vec{I}d\vec{l} = \frac{I'}{c}$	$\oint_L \vec{I}d\vec{l} = I'$
Означення вектора напруженості магнітного поля \vec{H}	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$
	$\vec{I} = \chi\vec{H}$	$\vec{I} = \chi\vec{H}$
Індуктивність L	$L = \frac{c\Phi}{i}$	$L = \frac{\Phi}{i}$
Індуктивність соленоїду	$L = 4\pi\mu n^2 V$	$L = \mu\mu_0 n^2 V$
Енергія магнітного поля струму	$W = \frac{1}{c} \frac{Li^2}{2}$	$W = \frac{Li^2}{2}$
Густина струму зміщення	$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Назва формули	Система Гауса	СІ
Рівняння Максвелла в середовищі в інтегральній формі	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$
	$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV$	$\oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV$
	$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{4\pi \cdot \partial t} \right) d\vec{S}$	$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$
	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$
Рівняння Максвелла в середовищі в локальній формі	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
	$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
	$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Вектор Пойнтінга	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$	$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$
Густина імпульсу електромагнітного поля	$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{D} \vec{B}]$ $\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}, \nu = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$	$\vec{g} = [\vec{D} \vec{B}]$ $\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}, \nu = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$
Зв'язок між E та H в електромагнітній хвилі	$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$	$E \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H \sqrt{\mu \mu_0}$
Потужність випромінювання диполя	$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3}$	$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}$
Умова калібровки Лоренца	$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} = 0$	$\text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{d\varphi}{dt} = 0$
Формули перетворення компонент поля	$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$ $\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}'_{\perp}] \right)$	$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$ $\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v} \vec{B}'_{\perp}] \right)$
	$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{E}'_{\perp}] \right)$	$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}'_{\perp}] \right)$
Інваріанти електромагнітного поля	$\vec{E} \vec{B} = \text{inv}$	$\vec{E} \vec{B} = \text{inv}$
	$E^2 - B^2 = \text{inv}$	$E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}$

Співвідношення між одиницями вимірювання електромагнітних величин в системах Гауса та СІ

Величина	Одиниця величини		Співвідношення між одиницями
	Система Гауса	СІ	
Заряд	$1CGC_q$	$Kл$	$1CGC_q = \frac{10}{c} = \frac{10^{-9}}{3} Kл$
Сила струму	$1CGC_i$	A	$1CGC_i = \frac{10}{c} = \frac{10^{-9}}{3} A$
Напруженість електричного поля	$1CGC_E$	$\frac{B}{м}$	$1CGC_E = c \cdot 10^{-6} \frac{B}{м} = 3 \cdot 10^4 \frac{B}{м}$
Потенціал, напруга	$1CGC_V$	B	$1CGC_V = c \cdot 10^8 B = 300B$
Електричний момент	$1CGC_p$	$Kл \cdot м$	$1CGC_p = \frac{1}{3} 10^{-11} Kл \cdot м$
Вектор поляризації \vec{P}	$1CGC_P$	$\frac{Kл}{м}$	$1CGC_P = \frac{1}{3} 10^{-5} \frac{Kл}{м}$
Вектор електричного зміщення \vec{D}	$1CGC_D$	$\frac{Kл}{м^2}$	$1CGC_D = \frac{10^5 Kл}{4\pi c м^2} = \frac{10^{-5} Kл}{12\pi м^2}$
Опір	$1CGC_R$	Om	$1CGC_R = c^2 \cdot 10^{-9} Om = 9 \cdot 10^{11} Om$
Питома електропровідність	$1CGC_\lambda$	$\frac{Cм}{м}$	$1CGC_\lambda = \frac{1}{9} 10^9 Cм / м$
Електропровідність	$1CGC_\Sigma$	$Cм$	$1CGC_\Sigma = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} Cм$
Ємність	$1CGC_C$	Φ	$1CGC_C = 1cм = \frac{10^9}{c^2} \Phi$
Магнітна індукція	Gc	$Tл$	$1Gc = 10^{-4} Tл$
Потік магнітної індукції	Mkc	$Bб$	$1Mkc = 10^{-8} Bб$
Потік вектора \vec{D}	$1CGC_{ND}$	$Kл$	$1CGC_{ND} = \frac{10}{4\pi c} Kл = \frac{10^{-9}}{12\pi} Kл$
Магнітний момент	$1CGC_m$	$A \cdot м^2$	$1CGC_m = 10^3 A \cdot м^2$
Намагніченість \vec{I}	$1CGC_I$	$\frac{A}{м}$	$1CGC_I = 10^3 \frac{A}{м}$
Вектор \vec{H}	$1E$	$\frac{A}{м}$	$1E = \frac{10^3 A}{4\pi м}$
Індуктивність L	$1cм$	$Гн$	$1cм = 10^{-9} Гн$

Основні фізичні константи

Величина	Позначення і числове значення
Гравітаційна стала	$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$
Прискорення вільного падіння (нормальне)	$g_n = 9.80665 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Нормальний атмосферний тиск	$p_0 = 101325 \text{Па}$
Стала Авогадро	$N_a = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов	$V = 22.41383 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Універсальна газова стала	$R = 8.31441 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Стала Лошмідта	$n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}$
Стала Больцмана	$k = 1.38662 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = 1,25663706144 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 0,885418782 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 0,9110953410 \cdot 10^{-27} \text{г} = 5,4858026 \cdot 10^{-4} \text{а.о.м.} \\ 0,511 \text{МеВ} \end{cases}$
Маса протона	$m_p = 1.6726485 \cdot 10^{-27} \text{кг} = 1,007276470 \text{а.о.м.}$
Маса нейтрона	$m_n = 1.6749543 \cdot 10^{-27} \text{кг} = 1,008665012 \text{а.о.м.}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{а.о.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{кг}$ (відповідає енергії $\cdot 931,3 \text{МеВ}$)

Величина	Позначення і числове значення
Елементарний заряд	$e = \begin{cases} 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ} \end{cases}$
Відношення заряду електрона до його маси	$\frac{e}{m_e} = 1,7588047 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$
Стала Фарадея	$F = 9,648456 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$
Стала Віна	$b = 0,00289782 \text{ м} \cdot \text{К}$
Стала Ридберга	$R_\infty = 10973731,77 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	$a_0 = 0,52917706 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

Деякі позасистемні одиниці

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$$

$$1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж} = 4,1868 \cdot 10^7 \text{ ерг} (1 \text{ Дж} = 0,2388 \text{ кал})$$

$$1 \text{ мм.рт.ст.} = 133,3 \text{ Па} = 1333 \text{ дин} / \text{см}^2$$

$$1 \text{ рік} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$$

$$1 \text{ св.рік} = 9,5 \cdot 10^{17} \text{ см}$$

$$1 \text{ eV} = \begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \\ 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \end{cases}$$

$$1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ з} \\ 931,5 \text{ MeV} \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Е.Г. Векштейн. Сборник задач по электродинамике. - М.: Высшая школа, 1966. - 287 с.
2. А.И. Алексеев. Сборник задач по классической электродинамике. - М.: Наука, 1977. - 317с.
3. Н.И. Жирнов. Задачник-практикум по электродинамике. - М.: Просвещение, 1970. - 350 с.
4. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. - М.: Наука, 1970. - 535 с.
5. И.Е. Иродов. Электромагнетизм. Основные законы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. - 320 с.
6. Д.М. Мазуренко, М.М. Алперін. Задачі і вправи з теоретичної фізики. - К.: Вища школа, 1978. - 198 с.
7. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. Учеб. пособие для вузов. 4-е изд., исправленное. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 432 с.
8. Сборник задач по общему курсу физики. Под ред. В.А. Овчинкина. Часть 2. Электричество и магнетизм, оптика. Изд. 2-е, исправленное. - М.: Изд-во МФТИ, 2000. - 366 с.
9. О.А. Коновал. Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки. - Кривий Ріг: КДПУ, 1999. - 38 с.
10. О.А. Коновал. Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки. - Кривий Ріг: КДПУ, 2006. - 250 с.

Навчальний посібник

КОНОВАЛ Олександр Андрійович

**Задачі з класичної та
релятивістської електродинаміки**

Українською мовою

**В авторській редакції
Відповідальний за випуск В.В. Стецюк
Комп'ютерна верстка та дизайн Н.В. Багірова**

Коновал О.А.

К 64 Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. – 158 с.: іл.

В посібнику наведені методичні вказівки до розв'язку задач та індивідуальні завдання для самостійної роботи з курсу "Теоретична фізика", розділ "Класична та релятивістська електродинаміка". По кожній із 11 тем приведені приклади розв'язування типових задач з посиланням на основні рівняння та формули. Зміст і розв'язок більшості задач ілюструють та конкретизують основні положення теорії, причому наголос робиться на якісній та фізичній стороні явища. Зміст задач також перекликається зі шкільним та загальним курсом фізики, що дає можливість більш цілеспрямовано готувати вчителя фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів.

ББК 22.33
УДК 538.3 (075.8)

ISBN 966-7997-72-3

Періодична система хімічних елементів Д.І. Менделєєва

Г Р У П А

Період	Ряд	Г Р У П А																VIII									
		I	II	III	IV	V	VI	VII																			
1	1	H Гідроген 1,0079															He Гелій 4,0028	Символ елемента	Порядковий номер								
2	2	Li Літій 6,941	Be Берилій 9,012	B Бор 10,81	C Карбон 12,011 Вуглець	N Нітроген 14,067 Азот	O Оксисен 15,999 Кисень	F Флуор 18,998 Фтор	Ne Неон 20,179									H Гідроген 1,0079	I Йод 126,905	Назва елемента							
3	3	Na Натрій 22,990	Mg Магній 24,305	Al Алюміній 26,981	Si Силіцій 28,066	P Фосфор 30,973	S Сулфур 32,06 Сірка	Cl Хлор 35,453	Ar Аргон 39,948									Відносна атомна маса	Назва простої речовини								
4	4	K Калій 39,098	Ca Кальцій 40,08	Sc Скандій 44,956	Ti Титан 47,90	V Ванадій 50,941	Cr Хром 51,996	Mn Манган 54,938	Fe Ферум 55,847	Co Кобальт 58,933	Ni Нікел 58,70																
	5	Cu Купрум Мідь 63,546	Zn Цинк 65,38	Ga Галій 69,72	Ge Германій 72,59	As Арсен 74,921	Se Селен 78,96	Br Бром 79,904	Kr Криптон 83,80																		
5	6	Rb Рубідій 85,468	Sr Стронцій 87,62	Y Ітрій 88,906	Zr Цирконій 91,22	Nb Ніобій 92,906	Mo Молибден 95,94	Tc Технецій 98,906	Ru Рутеній 101,07	Rh Родій 102,905	Pd Паладій 106,4																
	7	Ag Аргентум Срібло 107,868	Cd Кадмій 112,40	In Індій 114,82	Sn Станум 118,71 Олово	Sb Стибій 121,75	Te Телур 127,60	I Йод 126,904	Xe Ксенон 131,30																		
6	8	Cs Цезій 132,91	Ba Барій 137,33	*La Лантан 138,905	Hf Гафній 178,49	Ta Тантал 180,948	W Вольфрам 183,85	Re Реній 186,207	Os Осмій 190,2	Ir Іридій 192,22	Pt Платина 195,09																
	9	Au Аурум Золото 196,967	Hg Меркурій Ртуть 200,59	Tl Талій 204,37	Pb Плюмбум Свинець 207,2	Bi Бісмут 208,980	Po Полоній [209]	At Астат [210]	Rn Радон [222]																		
7	10	Fg Францій [223]	Ra Радій 226,025	**Ac Актиній [227]	Tl Талій [227]	Pb Плюмбум [261]	Bi Бісмут [262]	Po Полоній [263]	At Астат [264]	Rn Радон [265]	Fr Францій [265]	Ra Радій [266]	Ac Актиній [266]	Th Торій [267]	Pa Протактиній [267]	U Уран [268]	Np Нептуній [269]	Pu Плутон [269]	Am Америцій [270]	Cm Кюріцій [270]	Bk Берклій [271]	Cf Каліфорній [271]	Es Ейнштейній [272]	Fm Фермій [272]	Md Менделєєвій [273]	No Нобелій [273]	Lr Лоуренцій [273]
Вищі оксиди		R₂O	RO	R₂O₃	RO₂	R₂O₅	RO₃	R₂O₇	RO₄																		
Легкі гідриди					RH₄	RH₃	H₂R	HR																			

*Лантаноїди

58	Ce	59	Pr	60	Nd	61	Pm	62	Sm	63	Eu	64	Gd	65	Tb	66	Dy	67	Ho	68	Er	69	Tm	70	Yb	71	Lu
140,12		140,908		144,24	[147]		150,4		151,96		157,25		158,925		162,50		164,93		167,26		168,93		173,04		174,97		
Церій		Празеодим		Неодим		Прометій		Самарій		Європій		Гадоліній		Тербій		Диспрозій		Гольмій		Ербій		Тулій		Ітербій		Лютецій	

**Актиноїди

90	Th	91	Pa	92	U	93	Np	94	Pu	95	Am	96	Cm	97	Bk	98	Cf	99	Es	100	Fm	101	Md	102	No	103	Lr
232,038		[231]		238,029	[237]		[244]		[243]		[247]		[247]		[251]		[252]		[257]		[257]		[258]		[259]		[260]
Торій		Протактиній		Уран		Нептуній		Плутон		Америцій		Кюріцій		Берклій		Каліфорній		Ейнштейній		Фермій		Менделєєвій		Нобелій		Лоуренцій	