Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет

# Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

*Збірник наукових праць*
*Випуск XI*

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ КМІ
2013

# ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Н. В. Богатинська, А. О. Шевченко
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
anashe@meta.ua

Задачі, розв'язування яких пов'язане з пошуком нової ідеї, відіграють важливу роль у розвитку учнів, оскільки розвивають сміливість мислення, примушують ламати певні психологічні бар'єри та підвищують інтерес до вивчення математики. Розвинений інтелект потрібен кожній людині, у якій би галузі вона не працювала. За словами О. І. Маркушевича, «знання з часом забуваються, а розвиток залишається». Процес розв'язування таких задач може зафіксуватись у підсвідомості учня і, можливо, навіть через багато років за сприятливих умов активізуватись. Саме тоді може настати та мить, яка має назву «Еврика!» [1].

Нові технології навчання, виховання та розвитку учнів мають забезпечити не лише достатній рівень теоретичної та практичної підготовки, а й методологічну переорієнтацію освіти на особистість, пріоритет соціально-мотиваційних чинників у процесі навчання, а також створювати умови для досягнення кожним учнем відповідного рівня знань, навичок та умінь [3].

Під час проведення різних дослідницьких форм роботи важливим етапом є застосування методики, яка дозволяє розвивати мислення дітей як на вербальному, так і на невербальному рівні, просторову уяву, кмітливість та винахідливість. Особлива увага приділяється таким аспектам мислення, як його логічність, комбінаторність, евристичність, здатність до аналізу та синтезу, здатність узагальнювати та конкретизувати, мислити за аналогією, бачити відмінності та закономірності, а також шукати нестандартні підходи [5].

Сучасні програми з математики, нова концепція математичної освіти вимагають удосконалення методів та форм організації навчального процесу. А тому учнів необхідно ознайомлювати з методами наукових досліджень, залучати до різних форм дослідницької діяльності, в процесі якої вони оволодівають такими способами і прийомами розумової діяльності, як спостереження і дослід, аналіз і синтез, конкретизація, узагальнення і систематизація знань та вмінь, експериментування, збирання і зіставлення матеріалу, використання аналогій, пошук способу розв'язання задач тощо.

Творча діяльність учнів дає їм можливість глибше проникнути в сутність матеріалу, що вивчається, створює умови для його засвоєння і практичного застосування здобутих знань, сприяє розвитку самостійності та пізнавальних здібностей. В результаті такої діяльності процес засвоєння стає для учня процесом «відкриття» нових знань.

Пізнання на уроці в принципі може складатися з тих самих етапів, що й наукове пізнання: а) постановка мети дослідження (проблеми) та усвідомлення її учнями; б) мисленнєвий аналіз можливих шляхів, способів і засобів здійснення дослідження; в) висунення гіпотези; г) перевірка гіпотези; д) застосування здобутих знань у процесі подальшого дослідження при вивченні нового теоретичного матеріалу та розв'язуванні задач.

Саме такі етапи є складовими проблемного навчання. Від того, наскільки активно учень бере участь на кожному з цих етапів, залежить ступінь самостійності його мислення. Він найвищий тоді, коли учень сам ставить проблему, розв'язує та перевіряє її. Але на практиці немає можливості кожного разу реалізовувати зазначені етапи. Тому вчителі математики часто обмежуються створенням проблемної ситуації, постановкою проблемних задач тощо [4].

У процесі розв'язування задач шкільного курсу математики, зокрема тригонометричних рівнянь, створюються сприятливі умови для розвитку дослідницьких умінь учнів. Тригонометричні рівняння займають одне з центральних місць в курсі математики середньої школи як за змістом навчального матеріалу, так і за способами навчально-пізнавальної діяльності, які можуть і повинні бути сформовані при їх вивченні та застосовані до розв'язування значної кількості завдань дослідницького характеру.

Навчаючи учнів розв'язувати тригонометричні рівняння, треба мати на увазі, що формування дослідницьких умінь базується на уміннях, які утворюють цілий комплекс, до складу якого входять уміння: 1) провести аналіз запропонованого рівняння з метою його віднесення до одного з відомих видів; 2) здійснити обґрунтований вибір способу розв'язання; 3) розв'язувати прості тригонометричні рівняння та ілюструвати розв'язання за допомогою графіка, тригонометричного кола; 4) застосовувати властивості тригонометричних функцій при розв'язуванні тригонометричних рівнянь; 5) виконувати перетворення тригонометричних виразів; 6) розв'язувати алгебраїчні рівняння різних видів, до яких можуть зводитись тригонометричні рівняння тощо.

Так, при розв'язуванні тригонометричних рівнянь доводиться перетворювати вирази, що входять до їх складу. Внаслідок таких перетворень може одержатись рівняння нерівносильне даному. Відсутність чіткого уявлення про рівносильність рівнянь часто приводить в процесі їх розв'язання до загублення коренів або до одержання сторонніх.

Розв'язуючи тригонометричні рівняння, учні виконують перетворення тригонометричних виразів формально, не замислюючись над тим, до якого кінцевого результату вони можуть привести. Наприклад, розв'язуючи рівняння $\cos x \cdot \operatorname{tg} x=1$, як правило, намагаються замінити вираз у лівій частині більш простим. Внаслідок такого перетворення одержується рівняння $\sin x=1$, яке нерівносильне даному внаслідок зміни області визначення. Розв'язок останнього рівняння не є розв'язком даного, оскільки за умови $\sin x=1$ функція $\operatorname{tg} x$ не має змісту. Щоб запобігти таких грубих помилок важливим є питання заміни розв'язуваного рівняння рівносильною мішаною системою: $\begin{cases}\cos x \neq 0, \\ \sin x = 1.\end{cases}$

Подальші міркування дають можливість зробити висновок, що дана система не має розв'язків, а отже й дане рівняння не має коренів.

Щоб запобігти помилок при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, необхідно разом з учнями зробити наступні теоретичні узагальнення.

Нехай рівняння

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

розв'язуване рівняння, яке має область визначення $M$, а перетворене рівняння

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad (2)$$

має область визначення $N$. Тоді в процесі розв'язання рівняння (1) можливі наступні випадки.

1. $M = N$ – область визначення вихідного рівняння не змінюється, тому дане і перетворене рівняння рівносильні.

2. $M \subset N$ – перетворення рівняння (1) розширює його область визначення; серед розв'язків рівняння (2) можуть бути розв'язки, сторонні для рівняння (1).

3. $N \subset M$ – перетворення рівняння (1) звужує його область визначення; тому до розв'язків рівняння (2) можуть не увійти розв'язки рівняння (1).

$M$, з одного боку, збагачується новими значеннями, а з другого боку, втрачає деякі з них. Внаслідок таких перетворень можуть одержатись сторонні корені для рівняння (1), в силу розширення його області визначення, і в той же час можуть бути загублені корені рівняння (1) в наслідок звуження його області визначення.

Для прикладу розглянемо рівняння

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg} x - 1 \qquad (1)$$

$$M: x \neq \pi n, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\,.$$

Перетворимо рівняння (1) до виду (2):

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 1 \qquad (2)$$

$$N_1: x \neq \pi n, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$N_1$ вужче, ніж $M$, а тому якщо трапиться втрата коренів рівняння (1), то відбудеться це лише за рахунок значень змінних $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ і тому це значення $x$ обов'язково слід буде перевірити відносно рівняння (1).

Помножимо обидві частини рівняння (2) на вираз (1–tg $x$)·tg $x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 2 - 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \qquad (3)$$

$$N_2: x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$N_2$ не співпадає з $M$: $x = pn$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ не належать $N_1$, у той же час належать $N_2$ і тому можна чекати появи сторонніх коренів.

Рівняння (3) має таку множину розв'язків: $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$ .

І. Перевіримо, чи не є $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ загубленим коренем рівняння (1):

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1\,.$$

–1=–1, тобто $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , $n \in Z$ – корінь рівняння.

ІІ. Перевіримо, чи не являється $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$ стороннім коренем рівняння (1).

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}\cdot 1} = 3$$

3=3, тобто $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$ є коренем.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $x$=arctg$\frac{1}{2}$+$\pi n$, $n \in Z$.

Учні вважають, що етап перевірки є важливим тільки для ірраціональних, дробових, логарифмічних рівнянь, а над перевіркою одержаних розв’язків тригонометричних рівнянь вони навіть не замислюються. Наведений приклад яскраво ілюструє той факт, що недостатнє володіння питаннями рівносильності рівнянь може привести не лише до неправильної відповіді, а й до невірного всього процесу розв’язування тригонометричного рівняння.

Зазначимо, що значну кількість дослідницьких завдань не вдається розв’язати безпосереднім обчисленням (або такі обчислення є дуже громіздкими). Тому часто доводиться спочатку обґрунтовувати якусь властивість заданого рівняння, а потім, користуючись цією властивістю, давати відповідь на запитання задачі. До таких завдань можна віднести і задачі з параметрами.

Мабуть, ніхто не заперечуватиме, що задачі з параметрами є одним із найпотужніших засобів формування в учнів гнучкості, критичності мислення, розвитку дослідницьких здібностей. Дійсно, будь-яке рівняння, нерівність, системи рівнянь або нерівностей, мішані системи, що містять один чи кілька параметрів, разом з вимогою завдання вимагають і відповідної організації математичної діяльності [4].

Розглянемо наступне завдання: визначте, при яких значеннях параметра $a$ рівняння $\cos^2 x+(2a+6)\cos x+(2a-7)(1-4a)=0$ має розв’язки.

*Розв’язання*. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно cos $x$. Звідси $\left[\begin{array}{l}\cos x = 2a - 7, \\ \cos x = 1 - 4a.\end{array}\right.$ Тоді шукані значення параметра $a$ – це розв’язки сукупності $\left[\begin{array}{l}-1 \le 2a - 7 \le 1, \\ -1 \le 1 - 4a \le 1.\end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l}3 \le a \le 4, \\ 0 \le a \le \frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Також цікавими і дієвими є завдання на знаходження розв’язків тригонометричних рівнянь та їх систем за певними умовами. Наприклад, розв’язки повинні бути обов’язково додатні чи від’ємні, задовольняти певну нерівність тощо. Щоб розв’язати тригонометричні рівняння з додатковими умовами, треба розв’язати їх не враховуючи цих умов із множини всіх розв’язків вибрати ті, які задовольняють додаткові умови.

Для прикладу розглянемо наступне завдання: визначте, скільки розв’язків має рівняння $\sin^2 x+\cos x=\frac{1}{4}$ на інтервалі $(-\pi; 2\pi)$.

Розв’язання. Знаходимо спочатку загальний розв’язок рівняння

$\sin^2 x+\cos x=\frac{1}{4}$: $1-\cos^2 x+\cos x-\frac{1}{4}=0$, $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$, звідки маємо: 1) $\cos x=-\frac{1}{2}$ і 2) $\cos x=\frac{3}{2}$, що неможливо. Тоді $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2k\pi$, або $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$.

Перейдемо тепер до виконання умови, а саме, щоб розв'язки лежали в інтервалі $(-\pi;\ 2\pi)$. Знайдемо значення $k$ з множини цілих чисел: 0; ±1; ±2; ... Підставивши ці значення в загальний розв'язок, простежимо, щоб частинні розв'язки не виходили за межі названого інтервалу. При $k=0$ маємо $x_{1,2}=\pm\frac{2\pi}{3}$ – ці корені задовольняють умову. При $k=1$ маємо $x_3=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$. Цей корінь задовольняє умову. Корінь $x_4=\frac{2\pi}{3}+2\pi$ умову не задовольняє. Отже, дане рівняння при заданій умові має три корені.

Відомо, що багато рівнянь допускають декілька різних способів їх розв'язання. Уміння знайти найбільш раціональне, нестандартне, «красиве», оригінальне розв'язання багато в чому залежить від рівня сформованості дослідницьких умінь учнів.

Список використаних джерел

1. Бурляй М. Ф. Задачі, розв'язування яких пов'язане з пошуком нової ідеї / М. Ф. Бурляй // Математика в школах України, – № 4 (340) – лютий 2012 р. – С. 8–9.

2. Гетманцев В. Д. Математика. Тригонометрія : посібник для слухачів підготовчих відділень, вступників до вищих навчальних закладів, студентів педагогічних інститутів / В. Д. Гетманцев, О. Ф. Саушкін. – К. : Либідь, 1994. – 144 с.

3. Мадзігон В. М. Проблеми і завдання педагогічної науки в умовах розбудови національної школи (до 70-річчя Інституту педагогіки АПН України) / Мадзігон В. М., Бурда М. І. // Педагогіка і психологія. – 1996. – № 3. – С. 3-9.

4. Повстемська В. І. Технологія розвитку дослідницьких здібностей учнів / В. І. Повстемська // Математика в школах України. – 2005. – №2. – С. 2-5.

5. Яцкова Т. Про розвиток евристичного мислення школярів / Т. Яцкова // Математика в школі. – 2001. №1. – С. 53.