Міністерство освіти та науки України
Криворізький державний педагогічний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ КДПУ
2001

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Н.В. Богатинська
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Навчити учнів розв'язувати математичні задачі, зокрема геометричні, завжди було і залишається одним із найважливіших завдань навчання математики.

Аналізуючи результати вступних екзаменів з математики, ми кожний раз переконуємося в тому, що більшість випускників середніх шкіл знає окремі означення, теореми, правила, але при цьому не знає загальних методів чи способів розв'язання задач, не володіє необхідними прийомами міркувань. Констатуючи недоліки в математичній підготовці абітурієнтів, слід наголосити на занадто слабких знаннях з геометрії. Значна частина абітурієнтів не розв'язує геометричну задачу і це стає тривожною традицією. Однією з причин цього, на наш погляд, є те, що в шкільній геометрії значно менше уваги приділяють навчанню учнів алгоритмам розв'язання задач, особливо задач стереометричних. Адже будь-який алгоритм завжди є конкретним вираженням у послідовності дій (операцій) деякого методу розв'язання певного типу задач. Так, багато хто з абітурієнтів не розв'язує стереометричну задачу на обчислення тому, що у них не сформована програма (алгоритм) виконання стереометричного малюнка поширеного виду фігур. Типовими є такі помилки: неправильно будують кут між прямою і площиною, лінійний кут двогранного кута, висоту похилої призми і неправильної піраміди, зображення різних видів призм (особливо похилих) і неправильних пірамід, зрізаних пірамід, тіл обертання, комбінацій просторових фігур.

Учителям добре відомо, що учні вірно зображають, наприклад, висоту правильного тетраедра, проведену до основи, але часто допускають помилки, пов'язані із зображенням висоти, проведеної з вершини основи на бічну грань. Розв'язуючи задачу "У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$, усі грані якого рівні ромби з рівними гострими кутами при вершині A, побудуйте перпендикуляри з вершини A_1 на площину ABC і з вершини D на площину ABB_1”, учні безпомилково будують висоту A_1O (хоча, як правило, повністю відсутні обґрунтування), але не помічають тієї ж задачі, будуючи перпендикуляр з вершини D на площину ABB_1 (рис. 1).

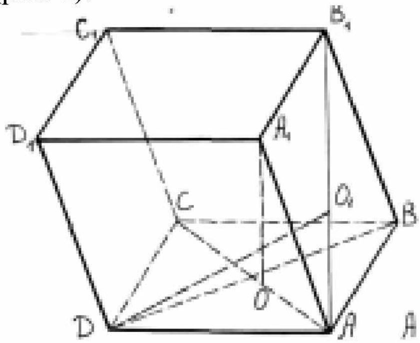

Рис. 1

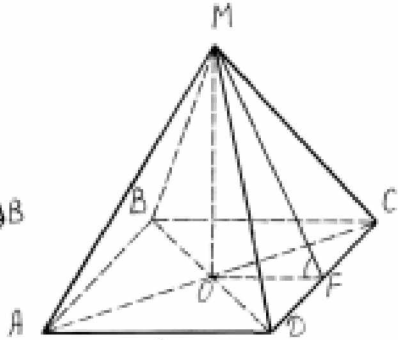

Рис. 2

Учні легко засвоюють поняття лінійного кута двогранного кута, без особливих проблем будують лінійні кути двогранних кутів при сторонах основи правильної піраміди. Але, розв’язуючи задачу “В основі піраміди лежить ромб; всі двогранні кути при сторонах основи рівні. Побудуйте лінійні кути двогранних кутів”, майже всі абітурієнти помилково вважали, що одним із таких кутів є кут MFO; міркування проводили як і для випадку правильної чотирикутної піраміди (рис. 2). Найчастіше учні допускають помилки під час побудови лінійного кута двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

Значна кількість помилок допускається при побудові перерізів призм і пірамід заданою площиною.

Приклад задачі: “У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B і середини M і N ребер AD і CC_1 проведена площина. Знайдіть кут, під яким ця площина нахилена до площини грані ABCD (рис. 3)”.

Потрібний переріз – чотирикутник BMNZ, де $K=BM\cap DC$, $Z=KN\cap DD_1$. Лінійним кутом двогранного кута при ребрі BM є кут NFC, де $F=CE\cap MB$, E – середина AB; так як $FC\perp BM$, то і $NF\perp BM$. Значна частина учнів шуканим перерізом помилково вважала трикутник BMN. Найбільша кількість помилок пов'язана з побудовою кута NFC. Учні помилково вважали лінійним кутом двогранного кута при ребрі BM кут NPC або NBC.

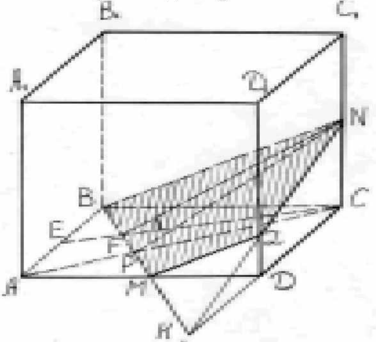

Рис. 3

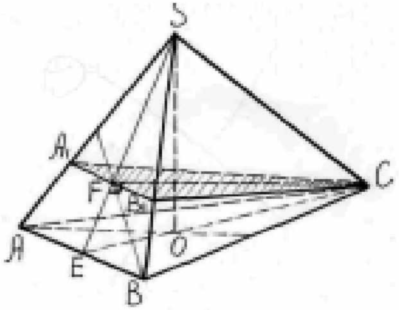

Рис. 4

Розглянемо приклад ще однієї відомої задачі: "У правильному тетраедрі SABC через вершину C проведена площина, перпендикулярна до грані SAB і паралельна ребру AB. Знайдіть площу одержаного перерізу, якщо ребро тетраедра дорівнює *a*". Так як тетраедр правильний, то вершина C проектується в центр правильного трикутника ABS (рис. 4). F – основа висоти тетраедра, проведеної з вершини C. Січна площина проходить через висоту CF і перетинає площину ABS по прямій A_1B_1, яка паралельна AB. Шуканий переріз – трикутник A_1B_1C. Багато хто з учнів проводили висоти у гранях BSC і ASC і стверджували, що шуканий переріз проходить через ці висоти. Не всі учні при цьому усвідомили, що одна з двох перпендикулярних площин (площина перерізу) містить перпендикуляр до другої площини (площини ASB), не уявляли розташування цього перпендикуляра.

Деякі учні не розуміють, що в прямокутному паралелепіпеді перпендикуляри до площини основи можуть належати бічним граням, а перпендикуляри до бічних граней – площині основи, що з умови перпендикулярності двох бічних граней піраміди площині основи випливає, що висотою піраміди є спільне ребро цих граней. Аналіз помилок можна продовжити.

Досвід викладання геометрії в середній школі свідчить про те, що учні не можуть самостійно вибирати знання для розв'язання стереометричної задачі.

У більшості випадків кожну наступну задачу учні розцінюють як абсолютно нову, не помічають того загального, що об'єднує раніше розв'язані задачі і розв'язувану задачу. Неможливо, звичайно, вказати такий загальний метод (алгоритм), за допомогою якого можна було б розв'язувати всі стереометричні задачі. Проте можна виділити певні типи задач на побудову, доведення, обчислення і дослідження, розв'язання яких базуються на застосуванні відповідних алгоритмів, часто повторюваних прийомів міркувань. Висновки, які одержуються внаслідок розв'язання цих задач, є "ключами" до розв'язання багатьох інших задач. Такі задачі є "ключовими" при складанні циклів взаємозв'язаних задач, що пронизують весь курс стереометрії.

Навчаючи учнів розв'язувати стереометричні задачі, корисно не тільки повідомляти їм алгоритми розв'язання типових задач у готовому вигляді, а й так організовувати навчання, щоб учні могли самостійно відкривати відповідні алгоритми.

Навчання алгоритмам повинно розглядатись не тільки як засіб ефективного навчання розв'язуванню стереометричних задач, а і як спосіб формування деяких специфічних прийомів математичної діяльності учнів (уміння відкрити загальний метод розв'язання нового типу задач, підвести задачу під відомий алгоритм, представити результати розв'язання в зручній для сприймання формі і т.д.).

Навички формуються на основі осмислених знань і умінь шляхом багаторазового повторення операцій, дій, прийомів, алгоритмів, які складають предмет вивчення. А тому для формування навичок потрібна ретельно продумана система вправ і задач. В такій системі повинна бути вірно підібрана послідовність вправ з урахуванням індивідуальних особливостей і можливостей учнів і принципу "від простого до складного". Слід дотримуватись доцільної різноманітності вправ і задач у системі.

Підбираючи систему вправ і задач, важливо щоб вона задовольняла принципу повноти. "Система вправ задовольняє принципу повноти, якщо вона забезпечує добре засвоєння теми, яка вивчається, і дозволяє виключити можливість формування помилкових асоціацій." [Груденов Я.И Совершенствование методики работи учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – С. 161].

Слід вчити учнів розв'язувати задачі окремих типів. Навчити будь-кого розв'язувати всі задачі не можна, а навчити розв'язувати задачі певних типів можна і треба. Зрозуміло, якщо ми не розв'яжемо з учнями задач якогось типу, то вони і не навчаться їх розв'язувати. Проте порушення принципу повноти системи задач відбувається і в інших випадках. Розглянемо приклад задачі.

Задача. В основі прямої призми лежить ромб із стороною a. Діагональ призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут α, а з бічною гранню кут β. Знайдіть об'єм призми (рис. 5).

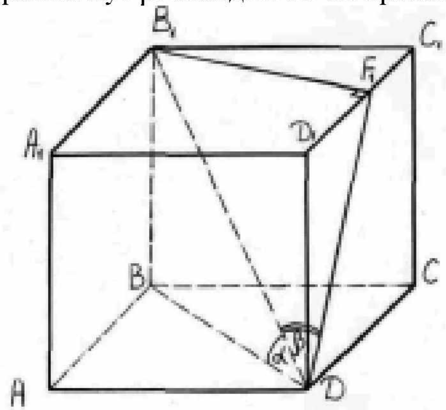

Рис.5

Помилкові розв'язання даної задачі пояснюються неправильною побудовою кута між діагоналлю призми і бічною гранню.

Причиною цього є порушення принципу повноти системи вправ і задач. Як правило, в ній є задачі, при розв'язанні яких доводилось будувати кути між прямою і площиною за відомим алгоритмом, якщо пряма розташовувалась "зверху" над площиною, і не зустрічались випадки, коли пряма розташована була б "ліворуч" чи "праворуч" від площини.

З аналогічною ситуацією ми маємо справу під час розв'язування задач на побудову лінійного кута двогранного кута. Якщо кожний раз пропонувати учням задачі на піраміди, в яких вимагається будувати лінійні кути двогранних кутів при сторонах основи піраміди, то учні виявляються безпорадними під час побудови лінійного кута двогранного кута при бічному ребрі піраміди (не вміють застосовувати відомий алгоритм в іншій ситуації розташування просторових об'єктів).

Звикаючи до одного розташування фігур, учні не впізнають їх в дещо незвичному розміщенні. Отже, підбираючи систему вправ і задач, необхідно передбачати всі можливі ситуації розташування фігур на площині і в просторі, зміну їх форм і позначень.

Стереометричні задачі мають свої специфічні особливості: просторові фігури не можна зобразити на малюнку без спотворень, і в цьому полягав складність сприймання та розв'язування стереометричної задачі. У зв'язку з цим учні натрапляють на такі труднощі: по-перше, необхідно уміти правильно зобразити просторову фігуру, врахувавши її властивості і властивості паралельної проекції; по-друге, необхідно уміти правильно уявити просторову фігуру за її умовним зображенням,

Аналіз задачного матеріалу курсу геометрії 10–11 класів показав, що більшість задач на обчислення, доведення і дослідження сполучаються із задачами на побудову. Отже, основою методики навчання розв'язуванню стереометричних задач є, перш за все, навчання розв'язуванню задач на побудову. Розв'язуванням задачі на побудову розпочинається розв'язування будь-якої стереометричної задачі. Озброєння учнів алгоритмами розв'язання основних типів задач на побудову є запорукою успішного розв'язання стереометричних задач.