

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ**  
**КИЕВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

УДК 519.281.2

На правах рукописи

**Шелевицкий Игорь Владимирович**

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ  
ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ  
СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ**

05.13.01 – Управление в технических системах

Диссертация на соискание ученой  
степени кандидата технических наук

Научные руководители:

доктор технических наук

**Н.А.Шутко**

кандидат физико-математических

наук

**И.Ф.Бойко**

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	4
1. АНАЛИЗ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭКСПЛУАТАЦИИ РЭС УВД . . .	14
1.1. Предпосылки использования сплайн-функций для обра- ботки измерительной информации при эксплуатации РЭС УВД. . . . .	14
1.2. Методы приближения функциональных зависимостей . . .	17
1.3. Методы статистического оценивания параметров моде- лей исследуемых процессов . . . . .	20
1.4. Методы идентификации законов распределения случай- ных величин . . . . .	22
1.5. Выводы . . . . .	25
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ В ИССЛЕДОВАНИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ УВД И ПРОЦЕССОВ В НИХ . . . . .	26
2.1. Постановка задачи . . . . .	26
2.2. Способы и алгоритмы построения сплайнов . . . . .	28
2.3. Построение двумерного сплайна, как тензорного про- изведения одномерных . . . . .	36
2.4. Построение эрмитовых сплайнов способом наименьших квадратов по результатам наблюдений . . . . .	42
2.5. Рекуррентный алгоритм построения сплайнов методом наименьших квадратов . . . . .	49
2.6. Выводы . . . . .	54
3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОР- МАЦИИ РЭС УВД . . . . .	56
3.1. Постановка задачи . . . . .	56

3.2. Параметрическая идентификация нелинейных статических систем сплайн-методами . . . . .	57
3.3. Идентификация законов распределения случайных данных . . . . .	61
3.4. Алгоритмы идентификации траекторных данных . . . . .	72
3.5. Статистическая идентификация линейных динамических систем с использованием сплайнов . . . . .	79
3.6. Выводы . . . . .	82
4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В РЭС УВД . . . . .	85
4.1. Постановка задачи . . . . .	85
4.2. Построение и экспериментальная проверка модели биполярного транзистора . . . . .	86
4.3. Исследование алгоритмов идентификации траекторных измерений . . . . .	91
4.4. Исследование и экспериментальная проверка алгоритма сплайн-идентификации линейных динамических систем . . . . .	101
4.5. Специализированные процессоры обработки данных . . . . .	106
4.6. Выводы . . . . .	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	114
ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИИ . . . . .	124
ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . .	125

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Развитие авиационного транспорта обуславливает разработку новых и совершенствование существующих радиоэлектронных систем управления воздушным движением /РЭС УВД/. Особо актуальными при этом являются вопросы дальнейшего повышения безопасности, регулярности и экономичности полетов. Эти факторы в значительной степени зависят от достоверности информации, получаемой от РЭС УВД в целях управления воздушным движением. В настоящее время разрабатываются микроволновые системы посадки, радиолокационные системы с адресным ответом, системы предупреждения столкновений, обсуждается возможность осуществления полетов по произвольным, оптимальным траекториям [1] [2] [6] [22] [32]. Эти и другие разработки способны во многом повысить эффективность работы воздушного транспорта. Однако разработка принципиально новых систем связана с большими материальными затратами. Развитие уже существующих радиоэлектронных систем путем совершенствования конструктивных особенностей, применения новой элементной базы, во многом исчерпано.

В то же время, из огромных потоков измерительной информации, получаемой в РЭС УВД, полезные данные извлекаются в далеко неполном объеме, так как при обработке используются простейшие методы и алгоритмы.

Развитие в последние годы вычислительной техники, и в частности широкое распространение персональных электронно-вычислительных машин /ПЭВМ/, а также математического обеспечения к ним открывает принципиально новые возможности в области обработки

информации. Благодаря ПЭВМ многократно повышается производительность интеллектуального труда, появилась возможность использовать в каждодневной инженерной практике сложные математические методы и алгоритмы, малодоступные ранее. Широко доступны мощные математические пакеты "MCAD", "MATLAB", "STATGRAF", "DERIVE", "REDUCE" позволяющие эффективно разрабатывать и исследовать методы и алгоритмы обработки информации [ 4 ] [10 ] [18 ] [25] [56].

Таким образом представляется возможной и перспективной разработка и использование в РЭС УВД новых методов и алгоритмов обработки измерительной информации, которые можно использовать, как при разработке новых систем, так и для совершенствования существующих.

Изложенное выше позволяет сформулировать важную научно-техническую задачу разработки прикладных математических методов, алгоритмов и программ обработки измерительной информации в РЭС УВД с целью повышения эффективности использования данных.

При решении этой задачи ведущую роль играют методы теории вероятностей [15], математической статистики [69], теории приближений [29] и теории статистических решений [73]. При обработке измерительной информации приходится приближенно представлять информационный параметр с помощью удобных аналитических зависимостей. Фактически строится математическая модель исследуемой экспериментальной зависимости с некоторой точностью. Подобные задачи относятся к теории и практике идентификации [ 1 ] [ 7 ] [39] [53] [78]. В качестве моделей функциональных зависимостей чаще всего используют степенные полиномы. Эти полиномы просты, требуют малого объема вычислений, имеется хорошо развитая теория приближения. Но существенным их недостатком

является быстрый рост старших коэффициентов с увеличением их степени, отсутствие физической интерпретации получаемых приближений и др. [25] [18]. Кроме того, последовательность интерполяционных полиномов не всегда сходится к интерполируемой зависимости [27]. Это имеет место не только при интерполяции негладких зависимостей. Существуют также примеры гладких функции без особенностей.

В связи с этим внимание привлекают другие классы аппроксимирующих функций, в частности полиномиальные сплайн-функции / или сплайны / [10] [25] [28] [42] [64] [72]. Основными достоинствами сплайнов являются хорошие приближающие свойства при относительной простоте и малом объеме вычислений. В ряде ситуаций сплайны обладают наилучшими аппроксимативными свойствами, обеспечивая минимально возможную при данной размерности погрешность [42].

Существует ряд работ посвященных применению сплайнов при решении эксплуатационных задач в РЭС УВД [23] [24] [76].

В связи с изложенным выше естественной является

Цель работы: разработка прикладных математических методов, алгоритмов и программ идентификации измерительной информации в радиоэлектронных системах управления воздушным движением в условиях эксплуатации, основанных на теории статистического оценивания параметров экспериментальных зависимостей с помощью сплайнов и обеспечивающих повышение эффективности и качества построенных моделей.

Основная задача исследования: разработка и модификация математических методов, алгоритмов, программ и устройств обработки измерительной информации и ее идентификации основанных на аппроксимации и экстраполяции эмпирических зависимостей в РЭС УВД с помощью сплайн-функций.

При этом решались следующие задачи:

1. Разработка методов, алгоритмов и программ построения статистических оценок измерительной информации РЭС УВД с помощью сплайнов в целях повышения эффективности и точности обработки.
2. Исследование возможности и разработка методов, алгоритмов и программ идентификации элементов РЭС УВД.
3. Создание алгоритмов и программ идентификации законов распределения случайных величин.
4. Исследование возможности использования сплайн-функций для обработки траекторных измерений. Разработка соответствующих алгоритмов и программ.
5. Создание специализированных устройств обработки измерительной информации с помощью сплайнов.
6. Проведение экспериментальной проверки основных разработанных методов, алгоритмов и программ.

Теоретический аппарат. Исследования проведены с использованием теории вероятностей и математической статистики, теории приближений и линейной алгебры.

Практическая ценность работы состоит в следующем :

1. Разработаны и внедрены методы, алгоритмы и программы для обработки измерительной информации в РЭС УВД, позволяющие повысить качество идентификации эмпирических зависимостей.
2. Показаны принципы создания специализированных устройств сплайн-обработки измерительной информации. Созданы устройства:  
сплайн-интерполятор;  
сплайн-аппроксиматор;  
сплайн-экстраполятор.

3. Экспериментально проверена возможность и даны рекомендации по идентификации нелинейных статических и линейных динамических систем в процессе эксплуатации РЭС УВД.

Научная новизна работы состоит в том, что впервые разработаны новые, оригинальные математические методы, алгоритмы и программы обработки измерительной информации с помощью сплайнов / в том числе рекуррентные и в реальном времени /;

разработаны новые алгоритмы и программы сплайн-идентификации элементов РЭС УВД ;

предложены и исследованы методы, алгоритмы и программы обработки траекторной информации сплайнами в скользящем окне и с рекуррентным наращиванием сплайна;

созданы технические средства для сплайн-обработки измерительной информации в РЭС УВД / сплайн-интерполятор, сплайн-аппроксиматор, сплайн-экстраполятор /, составляющие предмет изобретений, защищенных авторским свидетельством.

На защиту выносятся следующие основные положения работы:

созданные математические сплайн-методы идентификации измерительной информации:

разработанные алгоритмы и программы, реализующие методы:

способы и результаты применения разработанных сплайн-методов для идентификации в РЭС УВД:

принципы построения устройств для решения задач обработки измерительной информации с помощью сплайнов:

результаты технических решений разработанных методов:

результаты экспериментальных исследований основных алгоритмов и программ.

Внедрение результатов работы. Основные результаты работы использованы и внедрены в разработках которые выполнялись :

в научно-исследовательском институте "Буран" / г.Киев /, научно-исследовательском институте "Сатурн" / г.Киев /, центре эксплуатации радиотехнических систем и связи объединения "Авиалинии Украины", а также в учебный процесс на кафедре автоматизации приема и обработки информации КИИГА.

Аппробация работы. Результаты выполненных исследований докладывались и получили положительную оценку на 7 всесоюзных и республиканских научно-технических конференциях : "Статистические методы обработки информации" / Киев, 1985 ; Львов, 1986 ; Киев, 1992 / ; "Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов" / Москва, 1988 ; Киев, 1989 ; Киев, 1990 ; Киев, 1992 /.

В полном объеме работа докладывалась на семинаре кафедры теории автоматического управления и авиационных тренажеров и кафедры авиационных радиоэлектронных систем КИИГА.

Публикации. Основные результаты научной работы автора содержатся в 17 научных работах / в том числе в 4 статьях, 12 тезисах докладов, 1 авторском свидетельстве / и 1 отчете по НИР.

Структура работы и ее объем. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы и приложения. Объем работы без приложения, библиографии, рисунков и таблиц составляет 113 стр.; работа содержит 6 таблиц, 48 рисунков и 104 библиографических названия; общий объем работы - 142 страницы.

Во введении сформулирована задача исследования, обоснована ее актуальность, определены цель работы и решаемые задачи, указана ее практическая ценность и научная новизна.

, В первом разделе работы показаны предпосылки использования сплайнов в задачах обработки измерительной информации в РЭС УВД.

Приведены примеры физических процессов, имеющих кусочный или сплайновый характер.

Перечислены некоторые устройства и методы применяемые при обработке информации в РЭС УВД и использующие кусочные функции и сплайны.

Показана возможность и перспективность использования сплайнов в задачах обработки измерительной информации при эксплуатации РЭС УВД.

Приводится обзор основных методов статистического оценивания и обоснован выбор метода наименьших квадратов для использования в данной работе.

Обосновано использование сплайн-функций в задачах идентификации законов распределения случайных величин.

Во втором разделе производится выбор конкретного вида сплайна, наиболее соответствующего поставленным задачам. В качестве такового используем эрмитов сплайн, участки которого являются полиномами Эрмита [44].

Получены выражения для интегрирования и дифференцирования сплайнов.

Разработан алгоритм вычисления одномерных интерполяционных сплайнов и на его основе методы и алгоритмы вычисления двумерных интерполяционных сплайнов, являющихся тензорным произведением одномерных.

Приводятся полученные алгоритмы построения одно и двумерных сплайнов по результатам наблюдений методом наименьших квадратов. Особенностью алгоритмов является рекуррентное формирование матриц нормальной системы уравнений, что повышает их вычислительную эффективность.

Разработана модификация рекуррентного метода наименьших квадратов. Его особенностью является возможность увеличения количества оцениваемых параметров, что особенно важно для эффективной обработки измерительной информации сплайнами в реальном времени. Метод реализован в алгоритме и программе.

Третий раздел является основным в работе. Он посвящен разработке непосредственно сплайн-методов и алгоритмов обработки измерительной информации в РЭС УВД. В его основе лежат общие методы и алгоритмы предыдущего раздела.

Показаны основные принципы идентификации с помощью сплайнов нелинейных статических систем. Особое внимание уделено построению модели системы с двумя входами и одним выходом соответствующей в частности полупроводниковому триоду. Разработаны соответствующие алгоритмы и программы.

В разделе показаны общие принципы идентификации траекторной информации. Разработана демонстрационная программа и показан пример аппроксимации произвольной траектории на плоскости.

Разработаны метод, алгоритм и программа обработки траекторной информации сплайном в скользящем окне методом наименьших квадратов.

Модифицирован для конкретной сплайновой модели рекуррентный метод наименьших квадратов приведенный в предыдущем разделе. На его основе разработаны алгоритм и программа для рекуррентной идентификации траекторных данных.

Приводятся алгоритмы идентификации функций распределения случайных величин с помощью сплайнов. Особое внимание уделено бимодальной функции плотности вероятности. Разработаны метод, алгоритм и программа разделения бимодальной функции на сумму унимодальных. Метод и алгоритм проиллюстрированы примером.

Разработаны метод, алгоритм и программа сплайн-идентификации линейной динамической системы. Здесь для регуляризации решения уравнения Винера-Хопфа решение аппроксимируется эрмитовым сплайном.

Четвертый раздел содержит результаты экспериментальных исследований.

По результатам измерений выполнена идентификация транзистора и произведена проверка адекватности модели физическому устройству.

Произведены исследования сплайн-алгоритмов обработки траекторной информации. Выполнен сравнительный анализ корреляционных матриц ошибок метода наименьших квадратов предлагаемых моделей и классических - полиномиальных. Результаты проверялись численным моделированием.

Исследован метод сплайн-идентификации линейных динамических систем. Условия идентификации реального физического объекта моделировались математически.

Показаны основные принципы построения аппаратных систем обработки измерительной информации с помощью сплайнов. Рассмотрены сплайн-интерполятор, сплайн-аппроксиматор и сплайн-экстраполятор.

В заключении сформулированы основные научные результаты выполненных исследований, выводы, рекомендации по их использованию

Приложение содержит тексты некоторых программ и сведения, подтверждающие внедрение и использование полученных автором научных результатов в народном хозяйстве.

В работе принята последовательная нумерация подразделов, формул, рисунков, таблиц и алгоритмов внутри каждого раздела. Номера формул и рисунков состоит из трех чисел, отделенных друг от друга точкой. Первое число означает номер раздела, второе номер подраздела, третье — порядковый номер ссылки внутри подраздела. Номера таблиц и алгоритмов состоят из двух чисел. Первое число означает номер раздела, второе — порядковый номер ссылки внутри раздела.

Значения переменных, используемые в алгоритмах, в начале работы полагаются равными нулю.

# 1 АНАЛИЗ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭКСПЛУАТАЦИИ РЭС УВД

## 1.1 Предпосылки использования сплайн-функций для обработки измерительной информации при эксплуатации РЭС УВД

В процессе эксплуатации РЭС УВД получают и обрабатывают большие объемы разнообразной информации. Методы получения и обработки измерительной информации во многом определяют эксплуатационные характеристики радиоэлектронных систем. Так как разработка принципиально новых аппаратных комплексов сопряжено со значительными затратами, в последнее время особое внимание уделяется совершенствованию методов обработки получаемой информации. В связи с этим обращает на себя внимание развитие теории сплайнов [25] [27] [28] [71]. Сплайны являются кусочными функциями достаточно простого вида [66] [64], широко используемыми в прикладной математике [42] [71].

В настоящем подразделе покажем, что многие физические процессы в РЭС УВД имеют характер сплайнов. Поэтому и многие задачи эксплуатации РЭС УВД могут эффективно решаться с применением сплайн-методов. Решение части задач уже сегодня использует в том или ином виде сплайны.

Рассмотрим физические процессы имеющие отношение к нашей теме и в наибольшей степени соответствующие сплайнам. Траекторию движения космической цели делят на участки, соответствующие пассивному инерционному движению и участки маневра, где действует сила работы двигателя. Траектория описывается

непрерывной функцией с различными коэффициентами в уравнении движения на различных участках [46]. Аналогичную картину имеем и с траекторией воздушного судна, но здесь существенно влияние атмосферных факторов. Распространение радиоволн имеет различный характер в ближней и дальней зонах, причем в ближней зоне существенно влияют характеристики подстилающей поверхности. При этом диаграмма направленности является непрерывной функцией.

Распространение радиоволн в атмосфере зависит от физических характеристик последней, изменяющихся с высотой и в метеообразованиях. Эти зависимости также можно считать сплайнами [22].

Вольт-амперная характеристика полупроводникового диода в режиме малого и большого сигнала имеет различный характер и непрерывна.

Зависимость интенсивности отказов от времени эксплуатации делится на три участка различного характера [61].

Соответственно физическим процессам в методах обработки информации, связанной с этими объектами в более или менее явной форме, используют кусочные функции и сплайны. Наиболее яркой иллюстрацией явного использования сплайнов при эксплуатации РЭС УВД является компенсатор девиации в АРК-15. Гибкая металлическая линейка поджимаемая винтами - это классический сплайн / который в буквальном переводе обозначает гибкая линейка, лекало / [27]

[28]. Методы обработки траекторной информации в скользящем окне рассчитывают на каждом шаге свои коэффициенты для уравнения движения воздушного судна [46]. Траекторию при этом можно представить ломаной, состоящей из коротких отрезков. Хотя это тоже сплайн-функция, но она плохо соответствует непрерывному характеру движения воздушного судна и имеет смысл сознательно использовать более гладкий сплайн. При обработке радиолокационной информации используется картографирование помех [22].

Зона обзора делится на сектора, в пределах которых уровень помехи считают постоянным. Здесь имеем пример использования простейшего двумерного сплайна. При расчете усилительных устройств характеристики транзистора часто аппроксимируют отрезками прямых [13]. Аналогично работают методы линеаризации характеристик [3].

Имеет смысл простой сплайн - ломаную, заменить более гладким, что точнее соответствует характеру непрерывного процесса. Вольтамперную характеристику диода в режиме малого сигнала считают квадратичной, а в режиме большого - линейной. При этом вопроса непрерывности характеристики в целом обычно не касаются. Однако даже в такой постановке можно считать, что используется сплайн-функция, состоящая из двух участков. Если использовать кубическую полиномиальную сплайн-функцию, то можно получить универсальную зависимость пригодную для обоих режимов и не уступающую в точности предыдущей.

Для описания различных объектов сложной геометрии также используют ломаную, состоящую из отрезков прямых или поверхность аппроксимируют прямоугольниками. При обработке экспериментальных данных, например при построении зоны обнаружения РЛС, отдельные отсчеты соединяют плавной кривой, интуитивно используя сплайн.

Хорошие приближающие свойства, соответствие структуры многим физическим процессам, простота, определяют использование сплайнов для решения многих задач эксплуатации РЭС УВД.

Применение сплайнов в обработке траекторной информации рассматривается в работе [1]. Использование сплайнов в радионавигационных системах затронуто в работе [6]. Большой объем работ в по приложению сплайнов в эксплуатации РЭС УВД выполнен в КИИГА.

В работе [80] изложена программа и методика проверки посадочных радиолокаторов. В работах [82] [83] [84] [85] разработаны методы оценки эффективности функционирования АС УВД на различных этапах функционирования с применением сплайнов. В работе [83] при исследовании погрешностей измерения дальности в зависимости от высоты также использованы сплайн-функции. Работы [80] [81] [86] посвящены использованию сплайнов при решении задач надежности объектов РЭС УВД. Вопросы оптимального технического обслуживания, в частности, техническое обслуживание по состоянию с контролем уровня надежности, использующее прогнозирование значения параметров с помощью сплайнов, рассмотрены в [86].

Использование сплайнов в задачах обработки измерительной информации при эксплуатации РЭС УВД имеет ряд специфических особенностей. Это простота, универсальность, быстродействие, возможность работы в реальном времени и аппаратурной реализации используемых методов и алгоритмов. Кроме того измерительная информация включает погрешности, поэтому приходится использовать различные статистические методы. Рассмотрению математических аспектов этих проблем посвящены последующие подразделы.

## 1.2 Методы приближения функциональных зависимостей.

В основе многих методов обработки данных лежит приближение функциональных зависимостей неизвестного или сложного вида иными, как правило более простыми или удобными, с некоторой точностью [18]. В настоящем подразделе рассмотрим наиболее распространенные способы решения задач приближения и покажем преимущества приближения сплайнами.

В практических приложениях приближаемая функция чаще всего представлена конечным числом отсчетов и вид ее неизвестен. Будем полагать, что отсчеты являются точными, то есть не содержат погрешностей или погрешности пренебрежимо малы. В качестве приближающей функции используют простые и удобные в расчетах зависимости: степенные и гармонические полиномы, экспоненциальные и логарифмические функции [44].

Простейшей аппроксимацией является интерполяция. В этом случае имеем  $y_n = f(t_n)$ ,  $n=1, N$  отсчетов интерполируемой функции, а для интерполирующей  $q(t)$  выполняется условие  $y_n = q(t_n)$  [18].

Часто для интерполяции используют полином Лагранжа или иную его форму записи - полином Ньютона [55] [59]. Широко применяют также многочлены Чебышева, интерполяция которыми при определенном выборе узлов будет оптимальной в смысле

$$\min \max | f(t) - q(t) | .$$

В более общем случае для аппроксимации используют систему линейнонезависимых функций [10] [29]

$$y(t) = e(t) + \sum_{n=1}^M ( a_n X_n(t) ), \quad / 1.2.1 /$$

где:  $a_n$  - некоторые параметры, определяемые таким образом, чтобы получить хорошее приближение;

$X_n(t)$  - линейнонезависимые базисные функции иногда называемые функциями формы или пробными функциями;

$e(t)$  - погрешность приближения.

Важную роль при выборе приближающих функций играет условие полноты, заключающееся в том, что при устремлении  $M$  к бесконечности  $y(t)$  приближается сколь угодно точно.

Существуют различные способы определения значений  $a_n$ . Обычно в качестве нормы аппроксимации используют выражение

$$\sqrt{\int (y(t)-q(t))^2 dt}$$

и говорят о задачах среднеквадратичного приближения. Или -

$$\max | y(t) - q(t) |$$

и говорят о задачах равномерного приближения [64].

Наиболее общим методом определения параметров  $a_m$  является аппроксимация с помощью взвешенных невязок [56]. В этом случае минимизируется функция

$$\int_G W_m(y(t)-q(t)) dG = 0, m=1..M.$$

где:  $W_m$  - множество линейно независимых весовых функций. Частными случаями этого метода являются поточечная коллокация, коллокация по подобластям, метод Галеркина, метод наименьших квадратов [28].

Основной сложностью в решении задач приближения является подбор достаточно простых функций, хорошо приближающих искомую зависимость. Использование степенных полиномов для описания сложных зависимостей приводит к росту их степеней и значительному увеличению вычислительных затрат. Кроме того не гарантирована сходимость аппроксимации. Так, известны достаточно простые функции для которых условие сходимости не выполняется [24] [26] [71]. Свободными от этих недостатков являются кусочные сплайн-функции, отличающиеся простотой и хорошими приближающими свойствами [24] [42] [67]. Убедительной иллюстрацией преимуществ сплайнов является пример Рунге, где при интерполяции функции вида  $y(t)=1/(1+25t^2)$  на отрезке  $[-1,1]$  условие сходимости для полиномов Лагранжа и Чебышева не выполняется. Увеличение числа узлов интерполяции приводит к осцилляциям приближающей функции и получить качественного приближения не удастся. В работе [25] подробно рассмотрен этот пример и доказано, что приближение сплайном является в данном случае наилучшим.

Теория приближения сплайнами интенсивно развивается [18] [25] [29] [64] [71], охватывая все более широкий круг задач вычислительной математики.

### 1.3 Методы статистического оценивания параметров моделей исследуемых процессов

В предыдущем подразделе были рассмотрены вопросы приближения функциональных зависимостей в предположении отсутствия погрешностей. В реальных условиях приближения измерительной информации отсчеты содержат погрешности различного рода. В этом случае используют методы статистического оценивания параметров приближающей зависимости. Рассмотрим наиболее распространенные из них и применяемые при обработке информации в РЭС УВД.

Наиболее известен и широко используется метод наименьших квадратов [51] [53] [69]. В этом методе оценки параметров вектора  $A$  получают при минимизации выражения

$$\sum_{n=1}^N [ ( y_n - q(t_n, A) )^2 ], \quad n=1, N . \quad / 1.3.1 /$$

для модели вида  $y_n = f(t_n) + e_n$ , где  $e_n$  погрешности.

В случае, если погрешности имеют нормальное распределение и некоррелированы, полученные оценки являются несмещенными. Оценки также имеют минимальную дисперсию в классе линейных несмещенных оценок. На практике, при численном решении задач методом наименьших квадратов, минимизируют квадратичную форму вида:

$$( Y - X A )^* ( Y - X A ) . \quad / 1.3.2 /$$

где:  $Y$  - матрица исходных данных :

$A$  - матрица оцениваемых параметров, входящих линейно в  $q$  ;

$X$  - матрица планирования с коэффициентами зависящими от вида приближающей зависимости  $q$  и координат отсчетов исходных данных.

Решением формы / 1.3.2 / является :

$$A = ( X^* X )^{-1} ( X^* Y ) = C^{-1} B . \quad / 1.3.3 /$$

Для некоррелированных погрешностей с нормальным распределением оценки не смещены  $M( A ) = A$  /  $M$  - оператор математического ожидания /, а матрица ковариаций вычисляется по формуле

$$COV( A ) = M( (A-A)^* (A-A) ) = d^2 ( M( X^* X ) )^{-1} . \quad / 1.3.4 /$$

В случае неравноточных данных измерений с некоррелированными помехами используют взвешенный метод наименьших квадратов [53] [3]. При коррелированных погрешностях с известной корреляционной матрицей применяют обобщенный метод наименьших квадратов [10] [51]. Существует также рекуррентный метод наименьших квадратов [39] [54] [78]. Для задач метода наименьших квадратов разработан эффективный математический аппарат линейной алгебры [33] [34].

К недостаткам метода относят его зависимость от закона распределения погрешностей. В частности, особенно неприятен случай наличия импульсных помех [3]. В этом случае необходима предварительная обработка информации, заключающаяся в фильтрации или отбраковке аномальных данных [68]. В работе [62] показано, что метод достаточно эффективен для широкого класса распределений в зависимости от их коэффициента эксцесса.

Метод широко используется при решении различных навигационных, эксплуатационных, радиолокационных задач в РЭС УВД. Этот метод и будем использовать при разработке методов и алгоритмов обработки измерительной информации с помощью сплайнов.

Кратко рассмотрим и другие методы. Следующим, широко применяемым является метод максимального правдоподобия [6] [69]. За оценку параметров в этом случае принимаются те значения, при которых

плотность вероятности наблюдаемых случайных переменных имеет максимальное значение :

$$p(x, y) \rightarrow \max ,$$

где  $p(x, y)$  – совместная плотность вероятности всех наблюдаемых переменных.

Для использования данного метода необходимо иметь уравнение  $p(x, y)$ . В случае нормальности распределения  $p(x, y)$  метод максимального правдоподобия совпадает с методом наименьших квадратов. Преимуществом метода максимального правдоподобия является оптимальность оценок независимо от вида закона распределения погрешностей. Однако метод чаще используется в теоретических разработках, чем в прикладных задачах [73].

Широко используют также Байесовские оценки [50] и, в частности, фильтр Калмана [5]. Байесовские оценки строятся на основании минимизации функции риска. Для их использования необходимо иметь уравнения модели процесса и условной плотности вероятности. Оценки в фильтре Калмана получают с помощью рекуррентного алгоритма. Фильтр хорошо работает в предположении неизменности параметров объекта во времени. Фильтры Калмана широко используются в радионавигационных и радиолокационных системах УВД [2] [46].

Перечисленные методы являются лишь частью большого многообразия, более полный обзор которых приведен в [2] [6] [22] [46].

#### 1.4 Методы идентификации законов распределения случайных величин

Как следует из предыдущего подраздела, законы распределения случайных величин играют важную роль в задачах обработки

измерительной информации в РЭС УВД. Кроме использования в методах оценивания, законы распределения применяют в задачах генерирования случайных данных с заданным законом распределения [15] [46]. Закон распределения часто несет важную информацию об эксплуатационных характеристиках исследуемых систем [61] [62].

На практике вид закона распределения приходится определять по экспериментальной выборке конечного объема.

Пусть имеем  $N$  измерений случайной величины  $Y = \{ y_1, \dots, y_N \}$ . Необходимо оценить неизвестную функцию распределения  $F(y)$  или ее плотность вероятности  $p(y)$ . Для получения последней строят гистограмму, состоящую из  $m$  столбцов. Однако из-за конечного объема выборки / и особенно при малых  $N$  порядка 20-200 / закон распределения маскируется случайностью самой выборки. Поэтому приходится решать задачу выравнивания статистических рядов, заключающуюся в следующем. Необходимо подобрать теоретическую плавную кривую, отражающую существенные черты выборки. При этом аналитическая функция  $f(t)$  должна отвечать по меньшей мере двум требованиям:

$$\begin{cases} f(t) \geq 0 & - \text{ неотрицательности, } / 1.4.1 / \\ \int f(t) dt = 1 & - \text{ нормировки } [ ]. \end{cases}$$

Для определения функции плотности вероятности необходимо построить гистограмму и сгладить ее. При этом возникают трудности в выборе разбиения гистограммы на участки и в выборе вида аналитической функции  $f(t)$ .

По проблеме разбиения гистограммы на участки содержится большое количество порой противоречивых рекомендаций. В работе [62] приводится их сравнительный анализ. Этой проблемы можно

избежать. если строить функцию распределения, а плотность определять как производную от нее.

При сглаживании используют различные методы наилучшего приближения, включая метод наименьших квадратов и Байесовские методы, упомянутые в предыдущем подразделе. Кроме того используется метод моментов, где моменты теоретического распределения полагаются равными моментам выборки.

Общей трудностью этих подходов является выбор вида распределения. Обычно исходят из физического смысла данных или эвристических правил. Часто используют кривые Пирсона [15]. В работе [62] предлагают выбирать модель на основе топографической классификации, которая базируется на оценках энтропии и эксцесса. Особые трудности представляет аналитическое описание двух и более модальных распределений. Часто их представляют как сумму нескольких простых известных функций, а затем используют перечисленные выше методы. Кроме того используются специальные методы [65]: алгоритмы адаптивного вероятностного обучения и алгоритмы основанные на методе динамических сгущений.

Представляется интересным выбор в качестве аналитической модели функций распределения сплайнов. Вследствие хороших приближающих свойств сплайнов можно ожидать хорошего описания широкого класса распределений. Это обосновано тем, что гистограммы и вариационные ряды представляют ступенчатыми или ломаными функциями - простейшими сплайнами. Преимуществом степенных полиномиальных сплайнов является простота вычислений как значений самой функции, так и ее интегралов и производных.

Пример интерполяции гистограммы приведен в работе [25]. В последующих разделах рассмотрим вопросы идентификации законов распределения более детально.

## 1.5 Выводы

1. В разделе показано, что многие физические процессы в РЭС УВД имеют характер кусочных функций или сплайнов.
2. Многие методы, алгоритмы и устройства, применяемые при обработке информации в РЭС УВД используют кусочные функции и сплайны.
- 3.1 Сплайны, используемые в задачах приближения, имеют ряд преимуществ перед другими функциями: простоту, хорошие приближающие свойства, хорошо разработанную теорию.
4. В силу предыдущего, представляется перспективным использовать при обработке измерительной информации в РЭС УВД методы и алгоритмы включающие сплайн-функции.
5. Для приближения экспериментальных зависимостей в условиях наличия погрешностей будем использовать метод наименьших квадратов, как достаточно простой, широко используемый на практике и требующий минимальной информации о характере погрешностей.
6. Представляет интерес идентификация законов распределения случайных величин с использованием сплайн-функций.

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СПЛАИН-ФУНКЦИИ В ИССЛЕДОВАНИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ УВД И ПРОЦЕССОВ В НИХ

### 2.1 Постановка задачи

В предыдущем разделе было показано, что при решении многих задач обработки информации эффективно используют кусочные функции. Сплаины, относящиеся к этому же классу, имеют ряд преимуществ: простоту, непрерывность значений и части производных. Для решения задач приближения функциональных зависимостей сплайнами в детерминированной постановке / в особенности для интерполяционных задач / существует хорошо разработанная теория [25] [27] [28] [42].

Применение сплайнов при обработке измерительной информации в РЭС УВД имеет ряд особенностей. Это универсальность и простота вычислительных алгоритмов, быстроедействие и работа в реальном времени, возможность аппаратурной реализации. В подразделе 2.2 с учетом указанных требований выбирается конкретный вид сплайна из большого многообразия существующих [27]. Затем разрабатывается алгоритм приближения функции одной переменной в детерминированной постановке. Решение этой задачи лежит в основе более сложных случаев. Рассматриваются вопросы интегрирования и дифференцирования выбранного сплайна с получением соответствующих аналитических выражений.

Важное место в обработке результатов измерений в РЭС УВД занимают задачи приближения функциональных зависимостей двух и более независимых переменных. В подразделе 2.3 решаются эти задачи в детерминированной постановке, основываясь на ранее полученных выражениях и алгоритмах для одномерных сплайнов. В

реальных условиях практически редко встречаются случаи, когда приближаемая зависимость представлена своими отсчетами в отсутствии или с пренебрежимо малыми погрешностями. В случае наличия погрешностей пользуются статистическими методами. В частности широко используется метод наименьших квадратов, о достоинствах и ограничениях которого речь шла в подразделе 1.4. Отсчеты приближаемой зависимости запишем в виде  $y_i = f(t_i) + e_i$ , где  $e_i$  - случайная некоррелированная погрешность с нулевым математическим ожиданием. Тогда задача построения сплайна заключается в получении статистических оценок множества некоторых параметров, определяющих приближающую сплайн функцию. При использовании метода наименьших квадратов решают систему нормальных уравнений, конкретный вид которой зависит от используемой модели. Использование в качестве модели сплайн-функции обуславливает особенности, связанные с разреженностью матрицы планирования. Используя эти особенности построим вычислительные алгоритмы, добиваясь максимальной их эффективности. Описанная задача решается в подразделе 2.4.

Особую роль в обработке измерительной информации в реальном времени играют рекуррентные методы. Для метода наименьших квадратов известен рекуррентный его вариант [39] [54] [78]. Однако в случае, когда моделью процесса является сплайн, применение известного рекуррентного метода возможно только в случае, если наблюдения располагаются в пределах существующей сетки узлов сплайна. В подразделе 2.5 рассматривается модификация рекуррентного метода для случая, когда наблюдения располагаются справа за пределами существующего сплайна, что требует добавления следующего участка, а следовательно и оцениваемого параметра.

## 2.2 Способы и алгоритмы построения сплайнов

Функция  $S(t)$ , заданная и непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , называется полиномиальным сплайном порядка  $m$  с узлами  $x_j \in (j=0, n; a < x_0 < \dots < x_n \leq b)$ , если [39] :

на каждом из отрезков  $[x_{j-1}, x_j]$   $j=1, n$   $S(t)$  есть алгебраический многочлен степени, не превосходящей  $m$ , а в каждой из точек  $x_j$  некоторая производная  $S^{(v)}(t)$  ( $1 \leq v \leq m$ ) может иметь разрыв.

Если в точке  $x_j$  непрерывны функции  $S(t)$ ,  $S^{(1)}(t)$ , ...  $S^{(n-k_i)}(t)$ , а производная  $S^{(m-k_i)}(t)$  в точке  $x_j$  терпит разрыв, число  $k = \max(k_i)$  называют дефектом сплайна.

Множество  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  будем называть сеткой сплайна, а точки  $x_j$  узлами сплайна.

В зависимости от вида алгебраического многочлена и способа построения существует большое многообразие сплайнов. Сплайны Эйлера, Бернулли [64], чебышевские сплайны [71], эрмитовы сплайны [25] [24]. Различают также глобальные и локальные сплайны, В-сплайны [27] [28] [71].

В данной работе используем эрмитовы сплайны, совпадающие на участке с полиномом Эрмита [44] и записанные в форме Лагранжа [18]. Эрмитов сплайн имеет ряд преимуществ в наших приложениях. Это простота построения, локальность, явное определение через производные. В работе [23] подробно рассмотрено получение основных зависимостей для построения эрмитовых сплайнов. Рассмотрим некоторые модификации этих выражений и построим соответствующие алгоритмы для вычислений.

Простейший эрмитов сплайн первого порядка является ломаной, значения которой определяются по формуле :

$$S_1(t) = f_{j-1} + \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} (t - x_{j-1}) . \quad / 2.2.1 /$$

$$t \in [x_{j-1}, x_j] , j = \overline{1, R} .$$

Эрмитов сплайн 3-го порядка определяется выражением :

$$S_3(t) = f_{j-1} [1 - C_j(t)] + f_j C_j(t) + h_j V_j(t) R_j(t) \cdot \\ \cdot [f'_{j-1} V_j(t) - f'_j R_j(t)] , \quad / 2.2.2 /$$

где

$$R_j(t) = \frac{t - x_{j-1}}{h_j} , V_j(t) = \frac{x_j - t}{h_j} .$$

$$C_j(t) = 3 R_j^2(t) - 2 R_j^3(t) , h_j = x_j - x_{j-1} .$$

$$t \in [x_{j-1}, x_j] , j = \overline{1, R} ,$$

а 5-го порядка :

$$S_5(t) = f_{j-1} V_j^3(t) [1 + 3 R_j(t) + 6 R_j^2(t)] + \quad / 2.2.3 / \\ + f_j R_j^3(t) [1 + 3 V_j(t) + 6 V_j^2(t)] + \\ + f'_{j-1} h_j R_j(t) V_j^3(t) [1 + 3 R_j(t)] - \\ - f'_j h_j V_j(t) R_j^3(t) [1 + 3 V_j(t)] + \\ + 0.5 h_j^2 R_j^2(t) V_j^2(t) [f''_{j-1} V_j(t) + f''_j R_j(t)] .$$

Использование сплайнов более высоких порядков нецелесообразно, т.к. растет сложность расчетов, а качества приближения можно достигнуть и сплайнами низких порядков, используя более частую

сетку.

В выражениях /2.2.2/ и /2.2.3/ присутствуют значения производной в узлах. Их можно заменить приближенными значениями, определяемыми через разделенные разности. В работе [23] предлагается использовать

$$f'_j = q_j \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} + w_j \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}}, \quad / 2.2.4 /$$

где

$$q_j = 1 - w_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad j = 1, R-1.$$

Выражение / 2.2.4 / применяется для внутренних узлов. Производные в узлах  $x_0$  и  $x_R$  определим положив

$$q_0 = 0 \text{ и } f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_1}, \quad / 2.2.5 /$$

$$w_R = 0 \text{ и } f'_R = \frac{f_R - f_{R-1}}{h_R}, \quad / 2.2.6 /$$

$$f''_j = \frac{2}{h_j h_{j+1} (h_j + h_{j+1})} [ h_{j+1} f_{j-1} - (h_j + h_{j+1}) f_j + h_j f_{j+1} ] . \quad / 2.2.7 /$$

В форме Лагранжа выражения / 2.2.1 - 2.2.3 / имеют вид :

$$S_m(t) = \sum_{j=0}^R f_j X_j(t), \quad t \in [x_0, x_R]. \quad / 2.2.8 /$$

Выражения для определения локальных функций  $X_j$  приведены в

работе [24], а конкретный вид на рисунке 2.2.1, где показаны взвешенные локальные функции формы формирующие сплайн для значений  $x_j = \{ 1, 32, 64, 96, 128, 160 \}$ ,  $f_j = \{ 0.5, 0.6, 0.7, 1.0, 0.8, 0.4 \}$ .

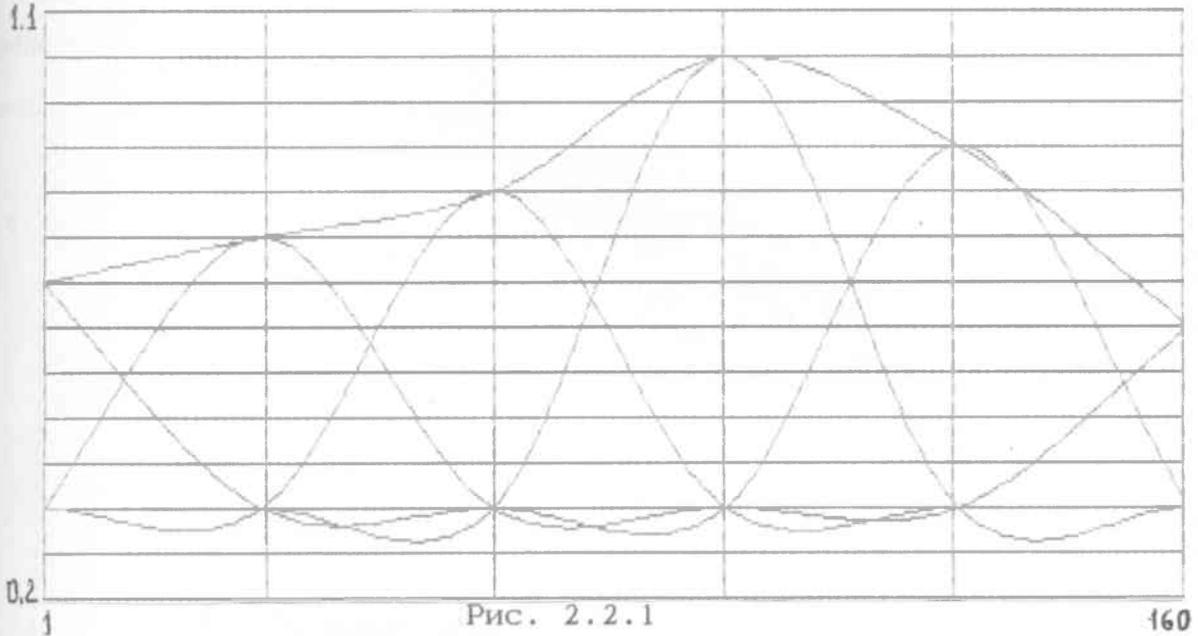


Рис. 2.2.1

Пусть имеем множество  $t_i$ ,  $i=1, N$ . Тогда с учетом /2.2.8/ для определения значений сплайна в точках  $t_i$  запишем матричное уравнение

$$S = X F. \quad / 2.2.9 /$$

где  $X$  - блочно-диагональная матрица размера  $N \times R$ , столбцами  $r$  которой являются взвешенные значения функции формы  $X_j$ . При заданных значениях  $x_j = \{ 0, 8, 16, 24, 32 \}$ ,  $t_i = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 26, 30 \}$

/ 2.2.10/

$$X = \begin{vmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7266 & 0.2969 & -0.0234 & 0 & 0 \\ 0.4375 & 0.6250 & -0.0625 & 0 & 0 \\ 0.1797 & 0.8906 & -0.0703 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0703 & 0.8672 & 0.2266 & -0.0234 & 0 \\ -0.0439 & 0.3896 & 0.7275 & -0.0732 & 0 \\ -0.0234 & 0.2266 & 0.8672 & -0.0703 & 0 \\ -0.0068 & 0.0908 & 0.9639 & -0.0479 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0703 & 0.8672 & 0.2266 & -0.0234 \\ 0 & -0.0625 & 0.5625 & 0.5625 & -0.0625 \\ 0 & 0 & -0.0703 & 0.8906 & 0.1797 \\ 0 & 0 & -0.0234 & 0.2969 & 0.7266 \end{vmatrix}$$

На отдельном участке / 2.2.8 / имеем :

$$S_{mj}(t) = f_{j-1} X(t) + f_j X(t) + f_{j+1} X(t) + \dots / 2.2.11/ \\ + f_{j+2} X(t) , \quad t \in [x_j, x_{j+1}] .$$

Выражения для определения  $LX(t)$  приведены в работе [24] .

Представим приведенные выше выражения в более удобном для вычислений виде . Рассмотрим участок сплайна Рис. 2.2.2.

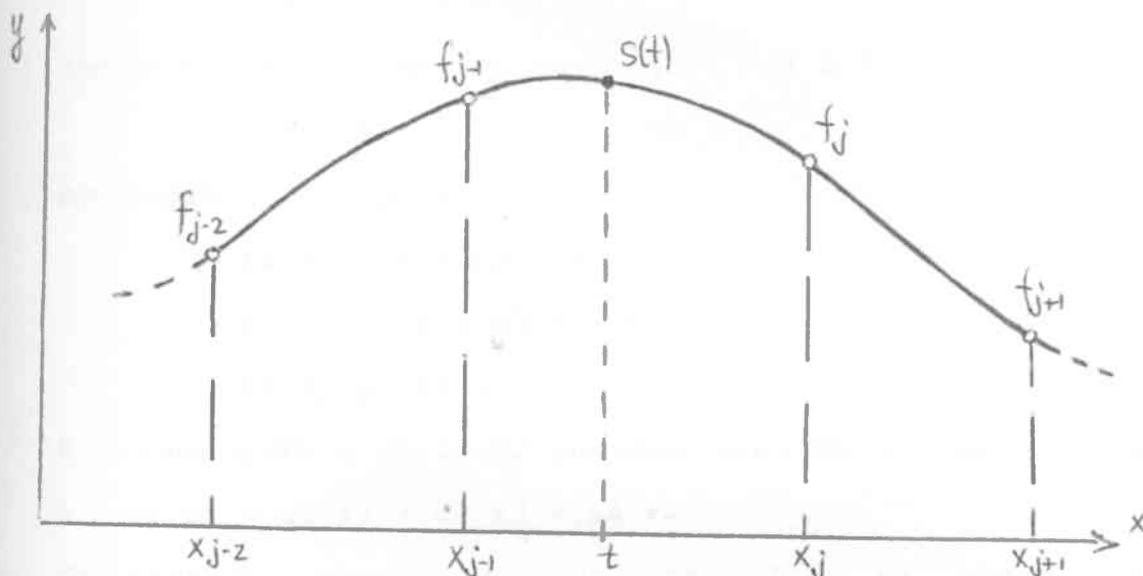


Рис. 2.2.2

Обозначим

$$tu1 = x_{j-2} , \quad tu2 = x_{j-1} , \quad tu3 = x_j , \quad tu4 = x_{j+1} ,$$

$$u1 = f_{j-2} , \quad u2 = f_{j-1} , \quad u3 = f_j , \quad u4 = f_{j+1} .$$

Тогда алгоритм вычисления значения сплайна в точке  $t$  , принадлежащей  $j$  - му участку , имеет следующий вид :

Алгоритм 2.1

1. Вычислить :  $hn = tu3 - tu2 ,$

$$hp = tu2 - tu1 ,$$

$$hb = tu4 - tu3 .$$

2. Для внутренних участков сплайна (  $1 < j < R$  )

$$p1 = hn / hp ,$$

$$p2 = hn / ( hp + hn ) ,$$

$$p_3 = h_n / (h_b + h_n) ,$$

$$p_4 = h_n / h_b ;$$

для  $j = 1$  в соответствии с /2.2.5/  $p_1 = 0$  ,  $p_4 = 0$  ;

для  $j = R$  положить  $p_2 = 0$  ,  $p_3 = 0$  .

3. Вычислить значения  $a = (t - t_{u2}) / h_n$  ,  $b = 1 - a$  .

4. Определить : для линейного сплайна /2.2.1/

$$c = 0 , \quad b = 0 ;$$

для кубического эрмитова сплайна /2.2.2/

$$c = a*b^2 , \quad d = a^2*b ;$$

5. Вычислить  $x_1 = -p_1 p_4 c$  ,

$$x_2 = p_1 c - p_2 d + b ,$$

$$x_3 = -p_4 c + p_3 d + a ,$$

$$x_4 = -p_3 p_2 d .$$

6. В соответствии с /2.2.11/ значение сплайна в точке  $t$  равно

$$S = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 .$$

Программная реализация алгоритма 2.1 на языке среды PCMATLAB приведена в приложении: программа 5 .

Практический интерес представляют также вычисления производных и интегралов сплайн-функций . Из /2.2.8/ следует , что интеграл сплайн-функции состоит из интегралов его участков . Для вычисления интеграла на произвольном участке эрмитового сплайна третьей степени

$$\int_{t_1}^{t_2} S(t) dt , \quad \text{при } t_1 , t_2 \in [x_j , x_{j-1}]$$

в алгоритме 2.1 следует вычислять :

$$a = \frac{t_2^2 - t_1^2 - 2 t_{u2} (t_2 - t_1)}{2 h_n} , \quad / 2.2.12 /$$

$$b = (t_2 - t_1) - a , \quad / 2.2.13 /$$

$$c = - \frac{12 tu_2^3 h_i + 6 tu_2^2 (4 h_n h_i - 3 h_{2i})}{12 h_n^3} +$$

$$+ \frac{12 tu_2 (h_n^2 h_i - 2 h_n h_{2i} + h_{3i})}{12 h_n^3} -$$

$$\frac{(6 h_n^2 h_{2i} - 8 h_n h_{3i} + 3 h_{4i})}{12 h_n^3}, \quad / 2.2.14 /$$

$$d = \frac{(12 tu_2^3 h_i + 6 tu_2^2 (2 h_n h_i - 3 h_{2i}))}{12 h_n^3} -$$

$$- \frac{12 tu_2 (h_n h_{2i} - h_{3i}) + 4 h_n h_{3i} - 3 h_{4i}}{12 h_n^3}, \quad / 2.2.15 /$$

где  $h_i = t_2 - t_1$ ,  $h_{2i} = t_2^2 - t_1^2$ ,  
 $h_{3i} = t_2^3 - t_1^3$ ,  $h_{4i} = t_2^4 - t_1^4$ .

При  $t_1 = tu_2$ ,  $t_2 = tu_3$  расчет значительно упрощается :

$$a = \frac{tu_2 - tu_3}{2}, \quad b = a, \quad / 2.2.16 /$$

$$c = - \frac{tu_2 - tu_3}{12}, \quad d = c.$$

Для определения значений производных сплайн-функции достаточно в алгоритме 2.1 вместо значений параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  вычислять их производные в соответствии с выражениями / для линейных и кубических эрмитовых сплайнов / :

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{hn} ; \quad \frac{d^2 a}{dt} = 0 ; \quad / 2.2.17 /$$

$$\frac{db}{dt} = - \frac{1}{hn} ; \quad \frac{d^2 b}{dt} = 0 ; \quad / 2.2.18 /$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{hn^3} ((tu_3^2 + 2 tu_2 tu_3) - 2 t (tu_2 + 2 tu_3) + 3 t^2) ; \quad / 2.2.19 /$$

$$\frac{d^2 c}{dt} = \frac{1}{hn^3} ( 6 t - 2 ( tu_2 + 2 tu_3 ) ) ; \quad / 2.2.20 /$$

$$\frac{dd}{dt} = \frac{1}{hn^3} ( 2 t (tu_3 + 2 tu_2) - (tu_2^2 + 2 tu_2 tu_3) - 3 t^2 ) ; \quad / 2.2.21 /$$

$$\frac{d^2 d}{dt} = \frac{1}{hn^3} ( 2 ( tu_3 + 2 tu_2 ) - 6 t ) ; \quad / 2.2.22 /$$

### 2.3 Построение двумерного сплайна , как тензорного произведения одномерных

При обработке информации требуется решать задачи приближения функций нескольких переменных . Рассмотрим решение этой задачи для функции 2-х переменных с помощью ранее рассмотренных алгоритмов для одномерных сплайнов . Часто для решения этой задачи применяют метод конечных элементов [77] , идеи которого во многом сходны со сплайн-методами . Одной из сложностей этого метода является разбиение приближаемой области на участки. Используем наиболее простое разбиение на прямоугольники .

Пусть имеем некоторую приближаемую зависимость 2-х переменных  $f(t,l)$ , представленную на участке  $t \in [ a_1, b_1 ]$  ,  $l \in [ a_2, b_2 ]$  отсчетами в узлах прямоугольной сетки :

$$f_k = f ( x_i, y_j ) , i = 0, R , j = 0, M , k = 0, L , \text{рис. 2.3.1}$$

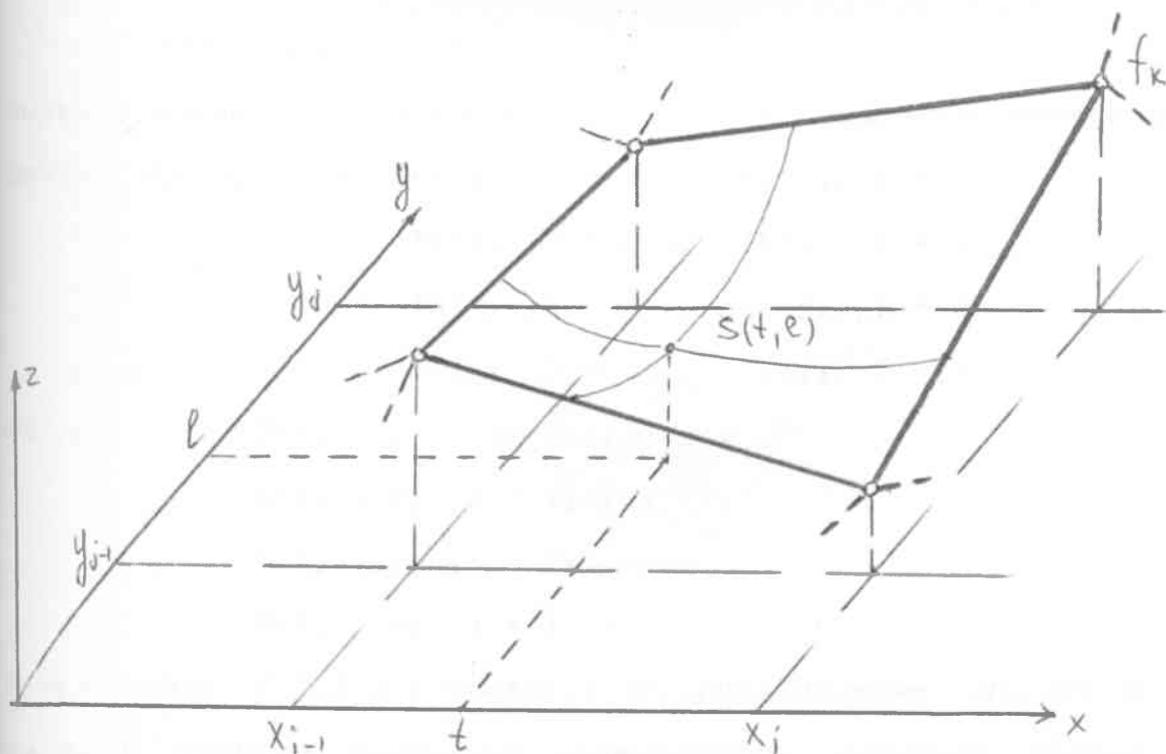


Рис. 2.3.1

Будем приближать  $f(t,1)$  двумерным сплайном  $S(t,1)$ , являющимся тензорным произведением одномерных сплайнов  $S(t)$  и  $S(1)$ .

В соответствии с / 2.2.8 /

$$S(t,1) = S(t) * S(1), \quad / 2.3.1 /$$

$$S(t,1) = \sum_{i=0}^R Q_i \tilde{X}_i(t) * \sum_{j=0}^M G_j \tilde{X}_j(1) = \sum_{k=0}^L f_k \tilde{W}_k(t,1).$$

Пусть  $S(t)$  и  $S(1)$  линейные эрмитовы сплайны. Найдем выражения для определения значений двумерного сплайна  $S(t,1)$  в произвольной точке  $(t,1)$ , где  $t \in [x_{i-1}, x_i)$ ,  $1 \in [y_{j-1}, y_j)$ .

Тогда:

$$S(t,1) = (Q_{i-1}^2 x(t) + Q_i^3 x(t)) (G_{j-1}^2 x(1) + G_j^3 x(1)),$$

$$\text{и } S(t,1) = f_{i-1, j-1}^1 W(t,1) + f_{i-1, j}^2 W(t,1) + f_{i, j-1}^3 W(t,1) + f_{i, j}^4 W(t,1), \quad / 2.3.2 /$$

$$\text{где : } {}^1 W(t,1) = {}^2 x(t) {}^2 x(1),$$

$${}^2 W(t,1) = {}^2 x(t) {}^3 x(1),$$

$${}^3 W(t,1) = {}^3 x(t) {}^2 x(1),$$

$${}^4 W(t,1) = {}^3 x(t) {}^3 x(1).$$

Покажем, что полученный сплайн действительно является интерполяционным. Из алг. 2.1  ${}^2 x(x_i) = 1$ ,  ${}^3 x(y_{j-1}) = 0$ ,

$${}^2 x(x_{i-1}) = 0, \quad {}^3 x(y_j) = 1,$$

$${}^2 x(x_{i-1}) = 1, \quad {}^3 x(y_{j-1}) = 0,$$

$${}^2 x(x_i) = 0, \quad {}^3 x(y_j) = 1,$$

$$\text{следует } S(x_{i-1}, y_{j-1}) = f_{i-1, j-1},$$

$$S(x_{i-1}, y_j) = f_{i-1, j},$$

$$S(x_i, y_{j-1}) = f_{i, j-1},$$

$$S(x_i, y_j) = f_{i, j}.$$

Таким образом / 2.3.2 / является интерполяционным сплайном и на отдельном участке полностью определяется четырьмя узлами по схеме рис 2.3.2.

	$f_{i-1,j}$	$f_{i,j}$
$y_j$		
	$f_{i-1,j-1}$	$f_{i,j-1}$
$y_{j-1}$		
	$x_{i-1}$	$x_i$

Рис. 2.3.2

Сплайн на участке является полиномом второго порядка с непрерывными значениями функции в точках и по линиям стыковки. Вдоль линий стыковки / при  $t = \text{const}$  или  $l = \text{const}$  / имеем ломаную, аналогичную исходным одномерным сплайнам.

Алгоритм определения значения двумерного сплайна в произвольной точке  $(t, l)$ , где  $t \in [x_{i-1}, x_i)$ ,  $l \in [y_{j-1}, y_j)$  имеет следующий вид :

**Алгоритм 2.2**

- $h_x = x_i - x_{i-1}$  ,  $h_y = y_j - y_{j-1}$  ,
- $a_x = (t - x_{i-1}) / (h_x)$  ,  $b_x = 1 - a_x$  ,  
 $a_y = (l - y_{j-1}) / (h_y)$  ,  $b_y = 1 - b_y$  ,
- $4W = a_x a_y$  ,  $3W = a_x b_y$  ,  
 $2W = b_x a_y$  ,  $1W = b_x b_y$  .
- значение сплайна равно:

$$S(t, l) = f_{i-1, j-1} 1W + f_{i-1, j} 2W + f_{i, j-1} 3W + f_{i, j} 4W .$$

Для определения значений рассмотренного двумерного сплайна в общем виде рассмотрим матричное уравнение

$$W F = S , \quad / 2.3.3 /$$

где  $F = \{(f_{00}, f_{01}, \dots, f_{0R}), \dots, (f_{M0}, f_{M1}, \dots, f_{MR})\}$  - значения интерполируемой функции в узлах, всего  $N$  точек ;

$S = \{s_0, \dots, s_n, \dots, s_N\}$  - значения сплайна в искомым точках.

Матрица  $W$  имеет размерность  $N \times (R+1 M+1)$ , является ленточной и состоит из блоков

$$W = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{M-1 \ 2M-1} & B_{M-1 \ 2M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{M-1 \ 2M} & B_{M \ 2M} \end{vmatrix}, \quad / 2.3.4 /$$

где матрицы  $B$  имеют число столбцов равное  $R$  и строк равное  $s$  - количеству искомых точек в пределах  $[x_{j-1}, x_j)$ .

$$B_{k,q} = \begin{vmatrix} 1w_i & 2w_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1w_{i+1} & 2w_{i+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1w_{i+s-1} & 2w_{i+s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1w_{i+s} & 2w_{i+s} \end{vmatrix}, \quad / 2.3.5 /$$

$$B_{k,q+1} = \begin{vmatrix} 3w_i & 4w_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3w_{i+1} & 4w_{i+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3w_{i+s-1} & 4w_{i+s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3w_{i+s} & 4w_{i+s} \end{vmatrix}, \quad / 2.3.6 /$$

$$k = 1, M-1, \quad q = 1, 3, \dots, 2M-1.$$

Для операций с матрицами вида /2.3.4/ существуют эффективные алгоритмы [34] [75].

Аналогично рассмотренному выше строятся двумерные интерполяционные сплайны, являющиеся произведением линейного и кубического, кубического и кубического эрмитовых сплайнов. Значения двумерного сплайна, являющегося тензорным произведением линей-

ного и кубического сплайнов, на участке определяются по 6 узловым точкам / Рис. 2.3.3 / в соответствии со следующим выражением

$$S(t,1) = f_{i-2,j-1}^1 W(t,1) + f_{i-1,j-1}^2 W(t,1) + f_{i,j-1}^3 W(t,1) + f_{i+1,j-1}^4 W(t,1) + f_{i-2,j}^5 W(t,1) + f_{i-1,j}^6 W(t,1) + f_{i,j}^7 W(t,1) + f_{i+1,j}^8 W(t,1). \quad / 2.3.7 /$$

где  $1w(t,1) = 1x(t) ay(1)$  ,  $2w(t,1) = 2x(t) ay(1)$  ,

$3w(t,1) = 3x(t) ay(1)$  ,  $4w(t,1) = 4x(t) ay(1)$  ,

$5w(t,1) = 1x(t) ay(1)$  ,  $6w(t,1) = 2x(t) ay(1)$  ,

$7w(t,1) = 3x(t) ay(1)$  ,  $8w(t,1) = 4x(t) ay(1)$  .

Значения  $Lx(t)$  и  $ay(1)$  определены в алгоритмах 2.1 и 2.2.

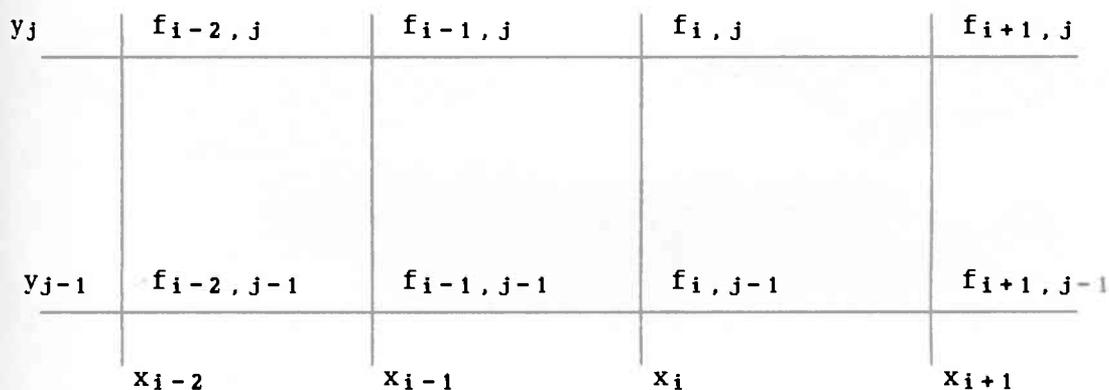


Рис. 2.3.3

Представление двумерных сплайнов через тензорное произведение одномерных позволяет относительно просто получать аналитические зависимости и строить алгоритмы на основе известных одномерных. Основным их недостатком является невозможность локальной оптимизации сетки и высокие степени полиномов. Ограничением при их использовании является требование к регулярности сетки узлов интерполяции. Последнее можно обойти, если количество узлов сетки равно числу отсчетов приближаемой зависимости. В этом случае уравнение /2.3.3/ имеет однозначное

решение. Если отсчетов больше, используем аппроксимацию по методу наименьших квадратов. Особенности матрицы  $W$  позволяют достаточно эффективно реализовать эти процедуры.

На рис. 2.3.4 показан пример аппроксимации двумерным сплайном вида 2.3.2 в соответствии с алгоритмом 2.2 функции вида:

$$\sin(r)/r .$$

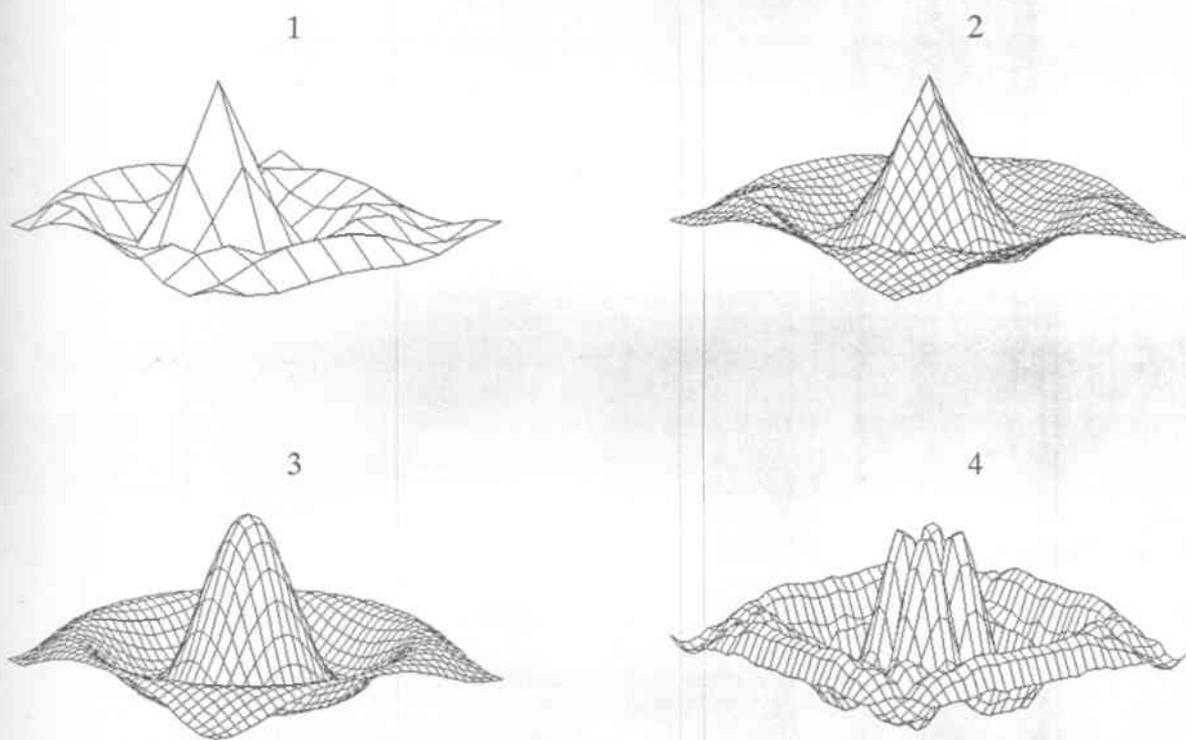


Рис 2.3.4

Здесь показана исходная сетка узлов интерполяции - 1, интерполяция сплайном - 2, действительный вид интерполируемой функции - 3, характер невязок интерполяции - 4.

## 2.4 Построение эрмитовых сплайнов способом наименьших квадратов по результатам наблюдений

Пусть необходимо приблизить сплайном некоторую функциональную зависимость, представленную множеством отсчетов, полученных в результате наблюдений и содержащих аддитивную погрешность.

Полагаем, что на отрезке  $[a, b]$  в узлах произвольной сетки наблюдений имеем значения функции  $y(t)$ , включающие погрешности и представляющие последовательность некоррелированных наблюдений :

$$E = e_1, \dots, e_1, \dots, e_N .$$

Опишем поведение  $y(t)$  функциональной зависимостью вида

$$y(t) = f[\Phi(t), A],$$

где  $A = \{ a_j \}_{R_j=0}$  - детерминированный вектор неизвестных числовых параметров, входящих линейно в  $f[\Phi(t), A]$  ;

$\Phi(t)$  - вектор с элементами  $X_j(t)$ , являющимися функциями независимой переменной  $t$  .

Необходимо построить статистические оценки неизвестных параметров  $A$  по результатам наблюдений  $E$ . Будем оценивать вектор  $A$  таким образом, чтобы построенная зависимость удовлетворяла условию минимума суммы квадратов разностей между наблюдениями и полученной зависимостью. В случае, когда  $f[\Phi(t), A]$  является сплайном описанным в 2.2 и 2.3 параметры  $A = \{ a_j \}_{R_j=0}$  являются значениями сплайна в точках стыковки.

$$\text{Полагая } M e_i = y(t_i) = y_i = \sum_{j=0}^R ( a_j X_j(t_i) )$$

$$\text{и } M( e_i - y_i )^2 = \text{err}_i , i = 1..N ,$$

где  $M$  - оператор математического ожидания , будем искать значения оценок  $A$  , обеспечивающие минимум выражения [51] :

$$\begin{aligned}
 (E - X A)^* (E - X A) &= \sum_{i=1}^N (e_i - \sum_{j=0}^R a_j x_{ij})^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^N (e_i - S(t_i))^2 . \quad / 2.4.1 /
 \end{aligned}$$

где  $X$  - матрица планирования с элементами  $x_{ij}$ .

Задача решается путем решения системы так называемых нормальных уравнений в виде

$$A = (X^* X)^{-1} X^* E . \quad / 2.4.2 /$$

Полученная таким образом оценка вектора  $A$  является несмещенной

$$M A = A .$$

Выражения для решения данной задачи приведены в работе [24].

Рассмотрим алгоритм ее решения.

Исходными данными являются / рис. 2.3.1 / :

$t(N)$ ,  $y(N)$  - массивы абсцисс и ординат наблюдений ;

$N$  - количество точек наблюдений ;

$tu(R)$  - массив абсцисс сетки узлов сплайна ;

$R$  - количество узлов сплайна .

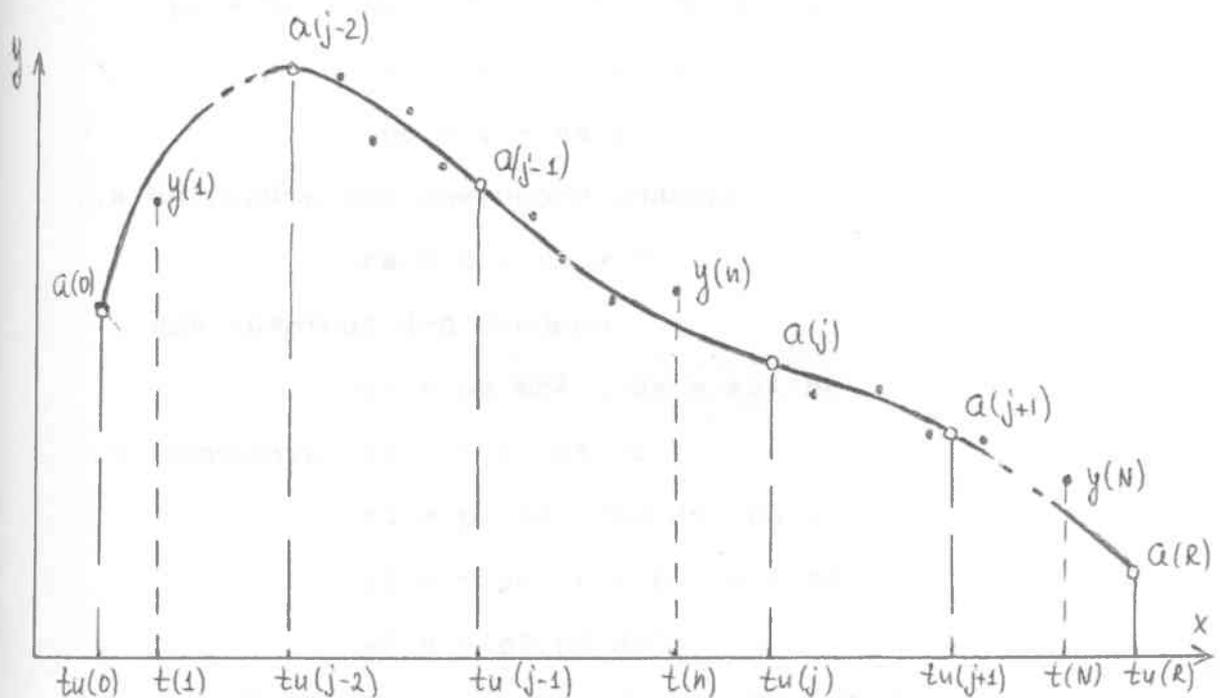


Рис. 2.3.1

### Алгоритм 2.3

1. Задать сетку узлов сплайна  $R$ ,  $tu(R)$  .

2. Для каждой точки наблюдений  $t(n)$ ,  $y(n)$ ,  $n = 1..N$  :

2.1 определить принадлежность участку сплайна

$$t(n) \in [ tu(j-1), tu(j) ) .$$

2.2 задать  $t = t(n)$  ,

$$tu1 = tu(j-2) ,$$

$$tu2 = tu(j-1) .$$

$$tu3 = tu(j) ,$$

$$tu4 = tu(j+1) ;$$

2.3 вычислить  $hn = tu3 - tu2$  ,

$$hp = tu2 - tu1 ,$$

$$hb = tu4 - tu3 ;$$

$$p1 = hn / hp , \text{ если } j > 1 , \text{ иначе } p1 = 0 ;$$

$$p2 = hn / ( hp + hn ) , \text{ если } j > 1 , \text{ иначе } p2 = 0 ;$$

$$p3 = hn / ( hb + hn ) , \text{ если } j < R , \text{ иначе } p3 = 0 ;$$

$$p4 = hn / hb , \text{ если } j < R . \text{ иначе } p4 = 0 ;$$

$$aa = ( t - tu2 ) / hn ;$$

$$bb = 1 - aa ;$$

2.4 вычислить для линейного сплайна

$$cs = 0 , ds = 0 ;$$

для эрмитова 3-й степени

$$cs = aa \cdot bb^2 , ds = aa^2 \cdot bb ;$$

2.5 вычислить  $x1 = - p1 \cdot p4 \cdot cs$  .

$$x2 = p1 \cdot cs - p2 \cdot ds + bb ,$$

$$x3 = - p4 \cdot cs + p3 \cdot ds + aa ,$$

$$x4 = - p3 \cdot p2 \cdot ds ;$$

2.6 формировать матрицы  $C = X^* X$  и  $B = X^* Y$  :

$$\text{если } j > 1 \quad c(j-2, j-2) = c(j-2, j-2) + x1 \cdot x1 .$$

если  $j > 1$   $c(j-1, j-2) = c(j-1, j-2) + x_1 x_2$  .

если  $j > 1$   $c(j, j-2) = c(j, j-2) + x_1 x_3$  .

если  $j > 1$   $b(j-2) = b(j-2) + x_1 y(i)$  ,

если  $j > 1$  и  $j < R$   $c(j+1, j-2) = c(j+1, j-2) + x_1 x_4$  .

$c(j-1, j-1) = c(j-1, j-1) + x_2 x_2$  .

$c(j, j-1) = c(j, j-1) + x_2 x_3$  .

$b(j-1) = b(j-1) + x_2 y(i)$  ,

если  $j < R$   $c(j+1, j-1) = c(j+1, j-1) + x_2 x_4$  .

$c(j, j) = c(j, j) + x_3 x_3$  .

$b(j) = b(j) + x_3 y(i)$  .

если  $j < R$   $c(j+1, j) = c(j+1, j) + x_3 x_4$  .

если  $j < R$   $b(j+1) = b(j+1) + x_4 y(i)$  .

если  $j < R$   $c(j+1, j+1) = c(j+1, j+1) + x_4 x_4$  .

3. Дополнить матрицу  $C$  из условия ее симметрии .

4. Вычислить  $COB = C^{-1}$  .

5. Определить искомые значения

$$a(i) = \sum_{j=0}^R [ cob(i, j) b(j) ] , \quad i = \overline{0, R} .$$

6. Оценить точность приближения

$$D = \sum_{n=1}^N [ ( y(n) - SPL( t(n) ) )^2 ] ,$$

где  $SPL(t(n))$  - функция, определяющая значение сплайна в точке  $t(n)$  в соответствии с алгоритмом 2.1 .

7. Определить доверительные интервалы

$$d_i(j) = a(j) \pm g \sqrt{D cob(j, j) / ( N - R - 1 )} , \quad j = \overline{0, R} ,$$

где  $g$  - значение критерия Стьюдента при заданном доверительном уровне значимости .

Рассмотрим решение приведенной выше задачи в случае, когда приближаемая зависимость является функцией двух переменных, а приближающий сплайн имеет вид /2.3.2 / . В этом случае функция  $y(t, l)$  представлена множеством отсчетов  $E = e_1, e_2, \dots, e_n, \dots, e_N$  в ограниченной области  $Q : t \in [a_t, b_t] , l \in [a_l, b_l] .$  Опишем  $y(t, l)$  функцией вида  $y(t, l) = f[\Phi(t, l), A],$  где  $A = \{ a_k \}_{k=0}^K$  ( $K = M R$ ) - детерминированный вектор неизвестных числовых параметров, входящих линейно в  $f[\Phi(t, l), A]$  и являющихся значениями сплайна в узлах сетки  $\{ \{ t_{x_i} \}_{R_i=0} , \{ t_{y_j} \}_{M_j=0} \}$  / рис.2.4.2 / ;  $\Phi(t, l)$  - вектор с элементами  $X_k(t, l),$  являющимися функциями независимых переменных  $t$  и  $l$  .

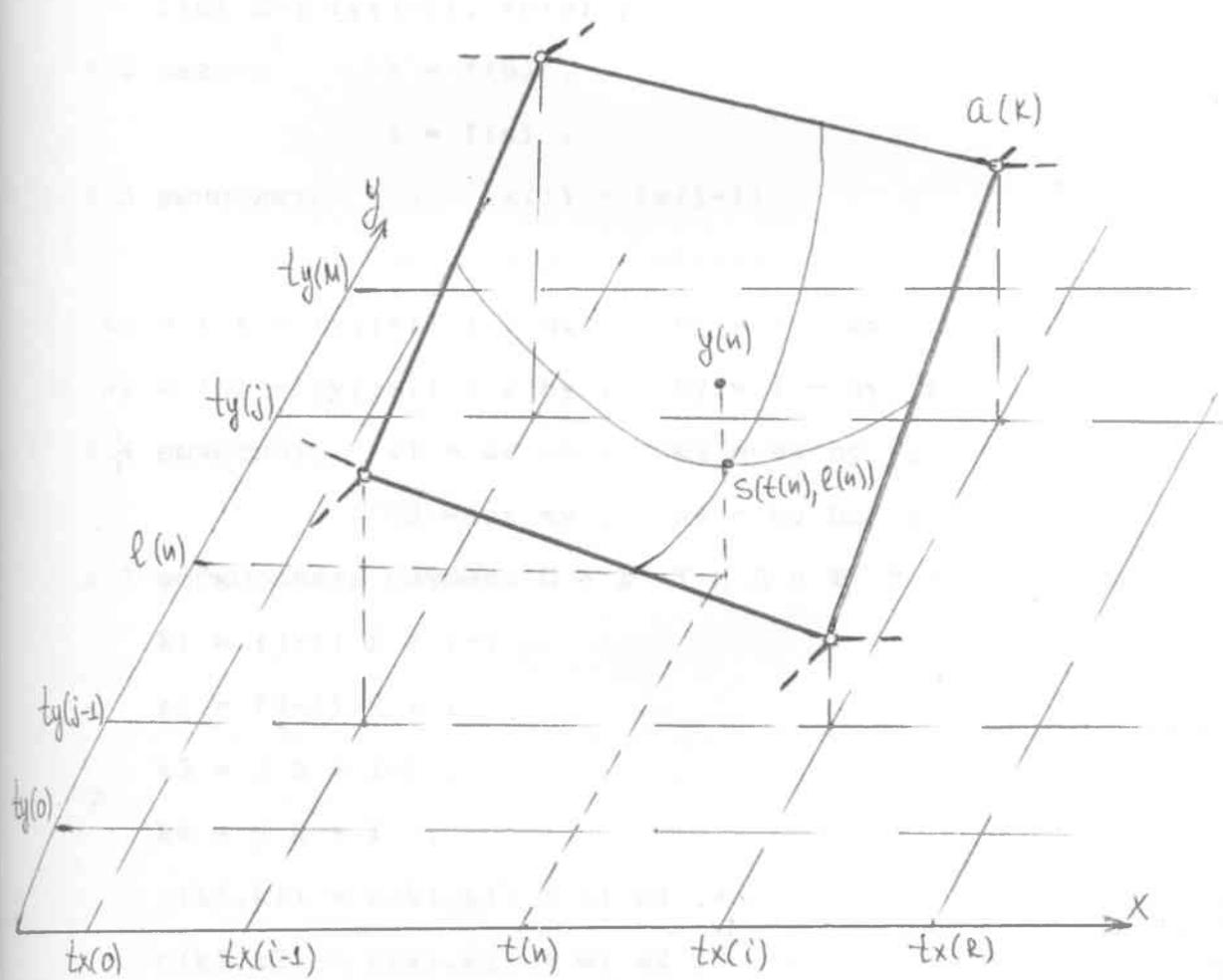


Рис. 2.4.2

Решение аналогично предыдущему и реализовано в следующем алгоритме.

Исходные данные :  $t(N)$ ,  $l(N)$ ,  $y(N)$  - массивы точек наблюдений ;

$N$  - количество точек наблюдений ;

$t_x(R)$ ,  $t_y(M)$  - массивы сетки узлов сплайна :

$R$  - размер сетки узлов сплайна по оси  $x$  ;

$M$  - размер сетки узлов сплайна по оси  $y$  ;

#### Алгоритм 2.4

1. Задать сетку узлов сплайна  $R$ ,  $M$ ,  $t_x(R)$ ,  $t_y(M)$ ,  $K = R M$  ;

2. Для каждой точки наблюдений  $t(n)$ ,  $l(n)$ ,  $z(n)$ ,  $n = 1, N$  :

2.1 определить принадлежность участку сплайна

$$t(n) \in [ t_x(i-1), t_x(i) ) ,$$

$$l(n) \in [ t_y(j-1), t_y(j) ) .$$

2.2 задать  $t = t(n)$  ,

$$l = l(n) .$$

2.3 вычислить  $h_x = t_x(i) - t_x(i-1)$  ,

$$h_y = t_y(j) - t_y(j-1) .$$

$$a_x = ( t - t_x(i-1) ) / h_x , \quad b_x = 1 - a_x ,$$

$$a_y = ( l - t_y(j-1) ) / h_y , \quad b_y = 1 - a_y ;$$

2.4 вычислить  $w_1 = a_x a_y$  ,  $w_2 = a_x b_y$  ,

$$w_3 = b_x a_y , \quad w_4 = b_y b_x ;$$

2.5 формировать матрицы  $C = X^* X$  и  $B = X^* Y$  :

$$k_1 = (j-1) R + i - 1 ,$$

$$k_2 = (j-1) R + i ,$$

$$k_3 = j R + i - 1 ,$$

$$k_4 = j R + i ,$$

$$c(k_1, k_1) = c(k_1, k_1) + w_1 w_1 ,$$

$$c(k_1, k_2) = c(k_1, k_2) + w_1 w_2 ,$$

$$c(k_1, k_3) = c(k_1, k_3) + w_1 w_3 ,$$

$$c(k1,k4) = c(k1,k4) + w1 w4 .$$

$$c(k2,k2) = c(k2,k2) + w2 w2 .$$

$$c(k2,k3) = c(k2,k3) + w2 w3 .$$

$$c(k2,k4) = c(k2,k4) + w2 w4 .$$

$$c(k3,k3) = c(k3,k3) + w3 w3 .$$

$$c(k3,k4) = c(k3,k4) + w3 w4 .$$

$$c(k4,k4) = c(k4,k4) + w4 w4 .$$

$$b(k1) = b(k1) + w1 y(n) .$$

$$b(k2) = b(k2) + w2 y(n) .$$

$$b(k3) = b(k3) + w3 y(n) .$$

$$b(k4) = b(k4) + w4 y(n) .$$

3. Дополнить матрицу C из условия ее симметрии .

4. Вычислить  $COB = C^{-1}$  .

5. Определить искомые значения

$$a(k) = \sum_{v=0}^K [ cob(v,k) b(v) ] , k = \overline{1, K} .$$

6. Оценить точность приближения

$$D = \sum_{i=1}^N [ ( y(n) - SPL( t(n), l(n) ) )^2 ] ,$$

где  $SPL(t(n), l(n))$  - функция определяющая значение сплайна в точке  $t(n)$ ,  $l(n)$  в соответствии с алгоритмом 2.2 .

7. Определить доверительные интервалы

$$di(k) = a(k) \pm g \sqrt{ D cob(k,k) / ( N - K - 1 ) } , k = \overline{0, K} .$$

где  $g$  - значение критерия Стьюдента при заданном доверительном уровне значимости .

## 2.5 Рекуррентный алгоритм построения сплайнов

### методом наименьших квадратов

Известные рекуррентные методы наименьших квадратов применительно к сплайнам имеют ограничение, серьезно сужающее возможности их использования. Проблема заключается в том, что известные методы работают при фиксированном числе оцениваемых параметров. Поэтому для построения сплайна необходимо иметь по меньшей мере по одному отсчету на каждом участке. Понятно, что работать в реальном времени такой метод не может.

Рассмотрим решение метода наименьших квадратов в несколько иной постановке. Пусть на  $n$ -шаге имеем  $N$  наблюдений принадлежащих  $r$ -участкам сплайна:

$$t_n, y_n, n = 1..N, t_n \in [x_0, x_r]$$

Пусть также известно расположение узлов сплайна на всем интервале работы метода:  $x_j, j = 0..R$ .

Тогда уравнение модели запишется в виде  $X_n A_n = Y_n$ .

где  $X_n$  - блочно-диагональная матрица вида /2.2.9/ размерности  $n \times r+1$ ,

$A_n$  - матрица оцениваемых параметров размерности  $r+1 \times 1$ ,

$Y_n$  - матрица наблюдений размерности  $n \times 1$ .

Пусть на  $n+1$  шаге получена точка  $t_{n+1}, y_{n+1}$  принадлежащая  $r+1$  участку сплайна. В этом случае уравнение модели имеет вид:

$$X_{n+1} A_{n+1} = Y_{n+1} \quad / 2.5.1 /$$

или

$$\begin{vmatrix} X_n & D \\ \star & \\ T_{n+1} & P_{n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_r \\ a_{r+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_n \\ Y_{n+1} \end{vmatrix}$$

где  $T_{n+1}^*$  - вектор связанный с новой точкой;

$D$  - нулевая матрица столбец;

$P_{n+1}$  - скалярный коэффициент.

Если на  $n$  - шаге при решении системы нормальных уравнений вида

/2.4.2/ имелись матрицы

$$C_n = X_n^* X_n, \quad B_n = X_n^* Y_n, \quad C_n^{-1}, \quad \text{то на } n+1 \text{ шаге имеем:}$$

$$C_{n+1} = X_{n+1}^* X_{n+1} = \left| \begin{array}{cc|cc} X_n^* & T_{n+1} & X_n & D \\ D & P_{n+1} & T_{n+1}^* & P_{n+1} \end{array} \right|.$$

$$C_{n+1} = \left| \begin{array}{cc|cc} X_n^* X_n + T_{n+1} T_{n+1}^* & T_{n+1} P_{n+1} & \tilde{C}_{n+1} & W \\ P_{n+1} T_{n+1}^* & P_{n+1} P_{n+1} & V & s \end{array} \right|.$$

$$B_{n+1} = X_{n+1}^* Y_{n+1} = \left| \begin{array}{cc|cc} X_n^* & T_{n+1} & Y_n & \\ D & P_{n+1} & Y_{n+1} & \end{array} \right|.$$

$$B_{n+1} = \left| \begin{array}{cc|c} X_n^* Y_n + T_{n+1} Y_{n+1} & & \tilde{B}_{n+1} \\ P_{n+1} Y_{n+1} & & h \end{array} \right|.$$

Известно [75], что: / 2.5.2 /

$$C_{n+1}^{-1} = \left| \begin{array}{cc|cc} \tilde{C}_{n+1} & W & -1 & \\ V & s & & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} C_{n+1}^{-1} + C_{n+1}^{-1} V^* U C_{n+1}^{-1} & -C_{n+1}^{-1} V^* z^{-1} & & \\ -U C_{n+1}^{-1} & z^{-1} & & \end{array} \right|.$$

где  $z = s - V C_{n+1}^{-1} V^*, \quad U = z^{-1} V.$

Известно также [37]: / 2.5.3 /

$$C_{n+1}^{-1} = [C_n + T_{n+1} T_{n+1}^*]^{-1} = C_n^{-1} - C_n^{-1} T_{n+1} d T_{n+1}^* C_n^{-1},$$

где  $d = [1 + T_{n+1}^* C_n^{-1} T_{n+1}]^{-1}.$

Запишем

$$C_{n+1}^{-1} = \left| \begin{array}{cc|c} \tilde{C}_{n+1}^{-1} + \tilde{C}_{n+1}^{-1} V^* Q & -Q^* & \\ -Q & z^{-1} & \end{array} \right|. \quad / 2.5.4 /$$

где

$$Q = U C^{-1}_{n+1} .$$

Тогда

/ 2.5.5 /

$$C^{-1}_{n+1} B_{n+1} = \begin{vmatrix} ( C^{-1}_{n+1} + C^{-1}_{n+1} V^* Q ) B_{n+1} - Q^* B_{n+1} \\ -( Q B_{n+1} + y_{n+1} p_{n+1} z^{-1} ) \end{vmatrix} .$$

$$C^{-1}_{n+1} B_{n+1} = \begin{vmatrix} A_n \\ a_{r+1} \end{vmatrix} = A_{n+1} .$$

Из приведенных выражений следует, что при добавлении точки наблюдения, принадлежащей следующему участку сплайна нет необходимости заново обращать матрицу  $C$ . Преобразованием можно показать, что  $A_{n+1}$  определяется из  $A_n$ . Если наблюдения принадлежат участку с ранее имевшимися наблюдениями, то  $p_{n+1} = 0$  и выражения совпадают с известными выражениями для рекуррентного метода наименьших квадратов с фиксированным числом оцениваемых параметров.

В этом случае

/ 2.5.6 /

$$C_{n+1} = C_{n+1} , C^{-1}_{n+1} = C^{-1}_{n+1} , B_{n+1} = B_{n+1} .$$

$$A_{n+1} = A_{n+1} = A_n + d C^{-1}_n T_{n+1} f ,$$

где

$$f = y_{n+1} - T^*_{n+1} A_n .$$

В соответствии с изложенным выше алгоритм имеет следующий вид .

### Алгоритм 2.5

1. Задать узлы  $x_j$ ,  $j = 0, R$  или закон их определения .
2. Получить  $n$ -начальных точек наблюдений  $t_i, y_i, i=1, n$  .
3. Для  $n$ -наблюдений на  $r$ -участках сплайна рассчитать вектор оценок  $A_n$  и матрицы  $C^{-1}_n, B_n$  .

4. Получить  $n+1$  отсчет  $t_{n+1}$ ,  $y_{n+1}$  и обработать :

4.1 сформировать вектор  $T_{n+1}$  :

4.2 вычислить

$$d = [ 1 + T_{n+1}^* C^{-1}_n T_{n+1} ]^{-1} ;$$

4.3 вычислить

$$\tilde{C}^{-1}_{n+1} = C^{-1}_n - C^{-1}_n T_{n+1} d T_{n+1}^* C^{-1}_n .$$

4.4 вычислить

$$\tilde{B}_{n+1} = B_n + T_{n+1} y_{n+1} .$$

5. Если  $t_{n+1} \in [ x_0, x_r ]$ , то :

5.1 вычислить

$$f = y_{n+1} - T_{n+1}^* A_n ;$$

5.1 вычислить

$$A_{n+1} = A_n + d C^{-1}_n T_{n+1} f ;$$

5.3  $n = n + 1$  ;

5.4 вывод полученных значений  $A_{n+1}$  ;

5.5 если отсчет не последний , то возвратиться на 4 ,

иначе окончить работу.

6. Если  $t_{n+1} > x_r$  , то

6.1 задать следующий участок сплайна  $x_{r+1}$  :

6.2 вычислить  $s = p^2_{n+1}$  ,  $V = p_{n+1} T_{n+1}^*$  ;

6.3 вычислить

$$z = s - V \tilde{C}^{-1}_{n+1} V^* .$$

$$U = z^{-1} V .$$

$$Q = U \tilde{C}^{-1}_{n+1} ;$$

6.3 вычислить

$$M = \tilde{C}^{-1}_{n+1} + \tilde{C}^{-1}_{n+1} V^* Q ;$$

6.4 сформировать

$$C^{-1}_{n+1} = \begin{vmatrix} M & -Q^* \\ -Q & z^{-1} \end{vmatrix} .$$

$$B_{n+1} = \begin{vmatrix} B_{n+1} \\ P_{n+1} \quad Y_{n+1} \end{vmatrix} ;$$

6.5 вычислить

$$A_{n+1} = C^{-1}_{n+1} B_{n+1} ;$$

6.6 вывести значения  $A_{n+1}$  ;

6.7 положить  $n = n + 1$  ;

6.8 если обработка не окончена продолжить с 4 .

Для иллюстрации полученных выражений рассмотрим простой численный пример . Пусть на  $n$ -шаге имеем матрицы :

$$X_n = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{vmatrix} , \quad A_n = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} , \quad Y_n = \begin{vmatrix} 2.6 \\ 1.8 \end{vmatrix} .$$

тогда

$$C_n = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{vmatrix} , \quad C^{-1}_n = \begin{vmatrix} 5.0 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{vmatrix} , \quad B_n = \begin{vmatrix} 1.6 \\ 2.8 \end{vmatrix} .$$

На  $n+1$  шаге имеем :

$$T_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.3 \end{vmatrix} , \quad P_{n+1} = 0.7 , \quad Y_{n+1} = 4.4 ,$$

отметим , что при этом  $a_{r+1} = 5$  .

В соответствии с /2.5.2/-/2.5.5/

$$d = 1/1.25 = 0.8163 .$$

$$C^{-1}_{n+1} = \begin{vmatrix} 4.5408 & -2.0408 \\ -2.0408 & 2.0408 \end{vmatrix} .$$

$$s = 0.49, \quad V = W^* = \begin{vmatrix} 0 & 0.21 \end{vmatrix}, \quad z = 0.4.$$

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0.5250 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} -1.0714 & 1.0714 \end{vmatrix}.$$

$$M = \begin{vmatrix} 5.0 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{vmatrix}, \quad \tilde{B}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1.60 \\ 4.12 \end{vmatrix}.$$

$$C^{-1}_{n+1} = \begin{vmatrix} 5.00 & -2.50 & 1.0714 \\ -2.50 & 2.50 & -1.0714 \\ 1.0714 & -1.0714 & 2.50 \end{vmatrix}, \quad B_{n+1} = \begin{vmatrix} 1.60 \\ 4.12 \\ 3.08 \end{vmatrix}.$$

Решение :

$$A_{n+1} = C^{-1}_{n+1} B_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \text{что совпадает с заданным .}$$

## 2.6 Выводы .

1. Для решения задач приближения функциональных зависимостей в задачах обработки измерительной информации в РЭС УВД, как наиболее удовлетворяющий специфическим требованиям, выбран эрмитов сплайн в лагранжевой форме записи.
2. Построен универсальный алгоритм вычисления значения сплайна в точке принадлежащей конкретному участку для эрмитовых сплайнов 1 и 3 степени.
3. Получены выражения для интегрирования и дифференцирования эрмитовых сплайнов 1 и 3 степени.
4. Рассмотрен простой метод построения двумерного интерполяционного сплайна через тензорное произведение одномерных.

5. Разработаны алгоритмы вычисления значений двумерных сплайнов, являющихся тензорным произведением двух линейных одномерных, кубического и линейного одномерных, позволяющие описывать двумерные зависимости сложного вида.

6. Разработан алгоритм построения одномерного и двумерного сплайна методом наименьших квадратов по данным измерений. Особенностью алгоритмов является рекуррентный способ формирования матриц системы нормальных уравнений, что повышает эффективность вычислений.

7. Разработана модификация рекуррентного метода наименьших квадратов, позволяющего в процессе вычислений увеличивать количество оцениваемых параметров - узлов сплайна. Создан соответствующий алгоритм. Вычисления проиллюстрированы простейшим численным примером. Метод позволяет 'наращивать' участки сплайна в реальном времени.

### 3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ РЭС УВД

#### 3.1 Постановка задачи.

Под идентификацией понимают процесс построения математической модели, адекватной объекту с точностью до заданного критерия по результатам измерений [39] [78]. Различают идентификацию в широком и в узком смысле. Идентификация в узком смысле - это оценивание параметров заданной математической модели по результатам измерений. Идентификация в широком смысле включает идентификацию в узком смысле, а также построение модели объекта. В разделе решаются задачи идентификации в предположении, что объект описывается сплайном. Это во многих случаях значительно упрощает решение. Задачи идентификации охватывают огромное многообразие различных систем. В разделе рассмотрена идентификация наиболее характерных подсистем РЭС УВД. В подразделе 4.2 показана идентификация нелинейных статических систем: диодов, транзисторов, варикапов и т.п. Их функциональные зависимости имеют различный характер, что требует индивидуального подхода при построении моделей. Использование сплайнов позволяет предложить универсальный подход к решению этой задачи. Рассматривается идентификация систем с одним входом и одним выходом и двумя входами и одним выходом с помощью одномерных сплайнов. В подразделе 3.3 рассмотрено решение задачи идентификации одномерных законов распределения случайных величин. Функциональные зависимости при этом аппроксимируются сплайнами. В этом случае отсутствует необходимость подбора вида закона из множества известных, что в ряде случаев / например для по-

лимодалных распределений / затруднительно.) Особое внимание уделено разложению бимодальной функции распределения на аддитивную совокупность унимодальных. Важное место в системах УВД занимает идентификация траекторных измерений [2] [6] [46]. Основываясь на результатах полученных в разделе 2 и подразделе 3.4 строятся алгоритмы рекурсивной и в скользящем окне обработки траекторных измерений сплайнами. Особое внимание уделено их быстродействию и простоте.

Рассматривая обработку информации при эксплуатации систем УВД нельзя обойти такой важный вопрос, как идентификация линейных динамических систем. Существует большое многообразие методов решения этой задачи [16] [8] [60] [78]. В подразделе 3.5 рассмотрена статистическая идентификация. Основная проблема при этом заключается в решении уравнения Винера-Хопфа / интегральное уравнение Вольтерры 1-го рода /. Задача относится к некорректно поставленным по Адамару, т.к. малые погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям результата [16] [72]. Хорошие аппроксимационные свойства и эффективный математический аппарат обусловил использование сплайнов в решении этих задач проекционными методами [16] [58]. В настоящей работе задача решается численно методом наименьших квадратов с аппроксимацией решения сплайнами, рассмотрены в разделе 2.

Подраздел 3.6 содержит основные выводы раздела.

### 3.2 Параметрическая идентификация нелинейных статических систем сплайн-методами

Рассмотрим решение задачи идентификации нелинейных статических систем с помощью сплайнов. Пусть имеем некоторое устрой-

ство с одним входом и одним выходом, описываемое неизвестной зависимостью  $F$  / рис.3.2.1 /.

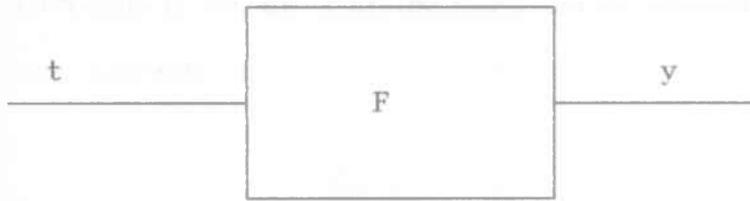


Рис. 3.2.1

В результате эксперимента на вход устройства подают входной сигнал представленный отсчетами  $t_n$ ,  $n=1, N$  из допустимого диапазона  $[a, b]$ . На выходе устройства имеем отсчеты выходного сигнала включающие погрешности. Можно записать:

$$y_n = F(t_n) + e_n$$
, где  $e_n$  - аддитивная погрешность которую полагаем некоррелированной.

Опишем неизвестную функцию  $F(t)$  сплайном  $S(\Phi(t), A)$ ,

где  $A = \{a_j\}_{j=0}^R$  - детерминированный вектор значений сплайна в точках стыковки, входящий линейно в  $S(\Phi(t), A)$ ;

$\Phi(t)$  - вектор, элементы которого зависят от вида сплайна и являются функциями независимой переменной  $t$ .

Сплайн строят на сетке заданных узловых точек  $\{t_{uj}\}_{j=0}^R$ . Для решения задачи необходимо получить оценки вектора  $A$ . Алгоритм решения этой задачи рассмотрен в разделе 2.4 / алгоритм 2.3 /.

В соответствии с алгоритмом создана программа SPL101 для IBM совместимых ПЭВМ. На рисунке 3.2.2 показана выполненная с ее помощью идентификация сложного вида вольт-амперной характеристики туннельного диода.

Рассмотрим идентификацию более сложного устройства - транзистора, имеющего два входа и один выход / рис. 3.2.3 / . Функционал  $F$  в этом случае зависит от двух параметров  $F(t, I)$  и в

общем случае может быть аппроксимирован двумерным сплайном. Однако на практике используют семейство характеристик  $F(t, l_i)$ ,  $i=1, K$ , которые и будем аппроксимировать сплайном аналогично предыдущему случаю.

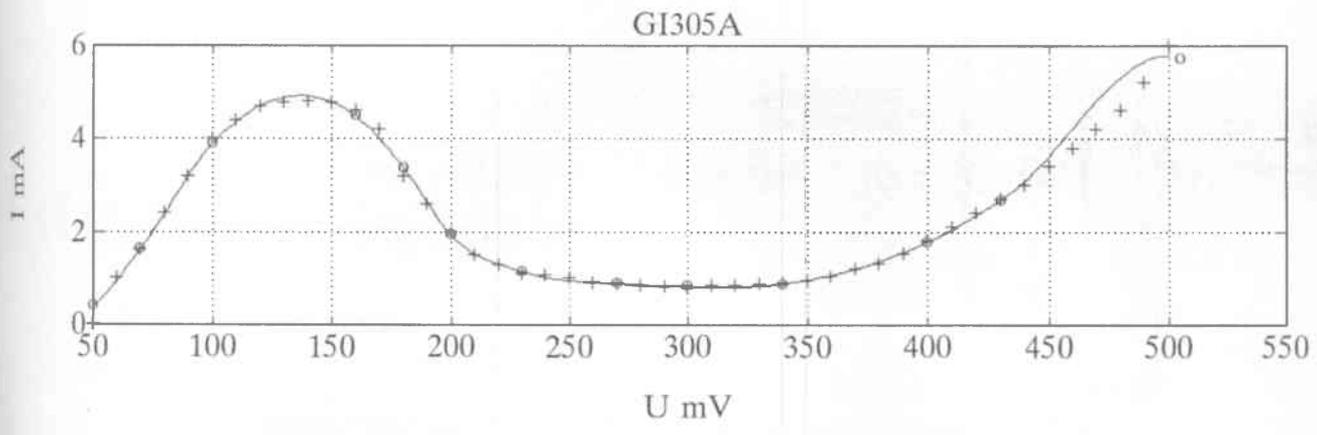


Рис. 3.2.2

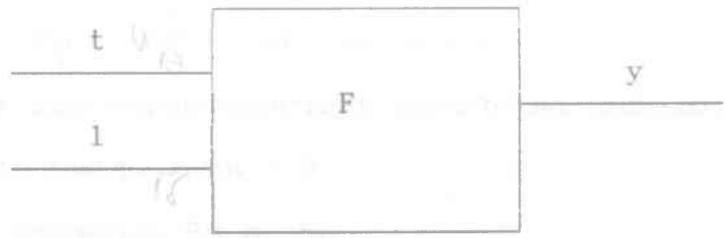


Рис. 3.2.3

При включении транзистора с общим эмиттером параметр  $t$  является напряжением коллектор-эмиттер  $U_{кэ}$ , а  $l$  током базы  $I_b$ . Значением функции является ток коллектора  $I_k$ . Таким образом, имеем функцию  $y=I_k=F(t, l)=F(U_{кэ}, I_b)$ , которая представляется семейством статических выходных характеристик транзистора [13] [49]. При проектировании транзисторных устройств строят динамические характеристики [13] [49]. Для этого выбирают сопротивление нагрузки  $R_n$

и напряжение питания  $U_p$ , а затем строят нагрузочную прямую, проходящую через точки  $U_{кэ}=0$ ,  $I_k=U_p/R_n$  и  $U_{кэ}=U_p$ ,  $I_k=0$ . От выбора  $R_n$  и  $U_p$  во многом зависят свойства разрабатываемого и эксплуатируемого устройства. Работу устройства в целом можно описать зависимостью  $I_k=f(I_b)$ , получение которой и является конечной целью идентификации. Рассмотрим алгоритм, решающий эту задачу с помощью сплайнов.

### Алгоритм 3.1

1. Получить семейство статических выходных характеристик транзистора в виде отсчетов  $I_{k_{n1}}$ ,  $U_{кэ_{n1}}$ ,  $n=1, N$ , при  $I_{b1}=\text{const}$ ,  $l=1, L$ .
2. Задать сетку узлов сплайнов аппроксимирующих статические характеристики  $tu_j=U_{кэ_j}$ ,  $j=0, R$ .
3. Аппроксимировать  $I_k(U_{кэ})$  сплайном в соответствии с алгоритмом 2.3.
4. Запомнить полученные оценки значений сплайна в точках стыковки  $A_j$ ,  $j=0, R$ , при заданном  $I_{b1}$ .
5. Если не все характеристики семейства аппроксимированы ( $l < L$ ), то продолжить с 2.
6. Задать значения  $R_n$  и  $U_p$ .
7. Выбрать сплайн, аппроксимирующий статическую характеристику и представленный точками  $tu_j$ ,  $A_j$ ,  $j=0, R$ .
8. Найти точку пересечения нагрузочной прямой со статической характеристикой :

8.1 Найти участок сплайна, который пересекает нагрузочная прямая ;

8.2 С заданной точностью определить точку пересечения нагрузочной прямой со сплайном / например методом дихотомии или золотого сечения /  $I_{k_1}(I_{b_1})$  .

9. Если точки пересечения найдены не для всех характеристик семейства, то продолжить с 7.

10. Вывести значения найденных точек зависимости  $I_{k_1}(I_{b_1})$ ,  $l=1, L$ .

11. Путем интерполяции сплайном точек  $I_{k_1}$ ,  $I_{b_1}$ , в соответствии с алгоритмом 2.1 строим искомую зависимость  $I_k(I_b)$  .

С помощью приведенного алгоритма можно решать задачи выбора оптимальной в заданном смысле нагрузочной прямой и рабочей точки. В соответствии с алгоритмом создана программа, решающая задачу идентификации транзисторного триода : SPL\_TRAN.

### 3.3 Идентификация законов распределения случайных величин

Пусть в результате наблюдений получен простой статистический ряд  $t_i$ ,  $i=1, N$  . По этим данным необходимо построить статистическую функцию распределения и функцию плотности вероятности. Вследствие конечности ряда данные содержат как типичные так и случайные черты [15]. Необходимо решить задачу сглаживания статистических данных и представить их в компактном и простом виде аналитических зависимостей. Используем для этой цели сплайн-функции. Возможны два варианта решения этой задачи.

#### Алгоритм 3.2

1. Получить исходные значения  $t_n$ ,  $n=1, N$  .
2. Сортировать  $t_n$  в порядке возрастания.
3. Получить значения  $f_n = p_n/N$ , где  $p_n$  - количество наблюдений на участке  $[0, t_n]$ .

4. Задать участок представления функции распределения [ a, b ],  
 $a \leq t_0$  ,  $b \leq t_N$  .

5. Задать сетку узлов сплайна  $tu_j$  ,  $j=0, R$  ,  $tu_0=a$  ,  $tu_R=b$  .

6. В соответствии с алгоритмом 2.3 решить задачу сглаживания и  
получить оценки  $A_j$  ,  $j=0, R$  , определяющие сплайн.

7. Определить значение

$$S_m = \int_a^b S'(t) dt .$$

8. Нормировать значения

$$A_j = A_j / S_m , j=0, R .$$

9. Вывести значения  $tu_j$  ,  $A_j$  ,  $j=0, R$  , определяющие функцию  
распределения.

10. Определить значения  $p_j = S'(tu_j)$  в соответствии с /2.2.17-  
2.2.19/.

11. Вывести значения  $tu_j$  ,  $p_j$  , определяющие функцию плотности  
распределения.

В результате вычислений по алгоритму 3.2 получаем сплайн-  
функцию  $S(t)$  , определяемую точками стыковки  $tu_j$  ,  $A_j$  и аппрокси-  
мирующую функцию распределения. Функция плотности вероятности  
может быть получена двояко. Как непосредственно производная от  
сплайна  $S'(t)$  , или как ряд значений производной в точках стыков-  
ки  $tu_j$  ,  $p_j$  , которые затем интерполируются сплайном с учетом  
условия нормировки. Специфические условия, налагаемые на функцию  
распределения, следует учитывать на шаге 6, используя МНК с  
ограничениями-неравенствами [53].

Алгоритм 3.3

1. Получить исходные данные  $f_n$  ,  $n=1, N1$  .

2. Построить статистический ряд  $t_i$  ,  $p_i$  ,  $i=1, N$  .

3. Задать участок представления функции плотности вероятности

[ a, b ],  $a < t_0$  ,  $b \geq t_N$  .

4. Задать сетку узлов сплайна  $t_{uj}$  ,  $j=0, R$  ,  $t_{u0}=a$  ,  $t_{uR}=b$  .
5. По МНК / алгоритм 2.3 / получить оценки  $A_j$  , определяющие сглаживающий сплайн.
6. Определить значение

$$S_m = \int_a^b S(t) dt .$$

7. Нормировать значения  $A_j = A_j / S_m$  ,  $j=0, R$  .
8. Вывести значения  $t_{uj}$  ,  $A_j$  ,  $j=0, R$  ,
9. Вычислить значения /2.2.12-2.2.16/

$$T_j = \int_a^{t_{uj}} S(t) dt , j=0, R .$$

10. Вывести значения  $t_{uj}$  ,  $T_j$  .

В этом алгоритме сплайном  $S(t)$  аппроксимируется гистограмма. Функцию вероятности получим путем интегрирования или как ряд отсчетов интеграла в точках стыковки с соответствующей нормировкой

Рассмотрим более сложный случай. Пусть на отрезке [ a, b ] имеем значения функции плотности вероятности  $f(t)$  , являющейся аддитивной совокупностью функций плотности вероятности  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Имеем также основания полагать, что  $f_1(t)$  сосредоточена в основном на отрезке [ a, c1 ], а  $f_2(t)$  на [ c1, b ] / рис.3.3.1/ .

Тогда  $N$  отсчетов функции  $f(t)$  -  $f_n = f(t_n)$  ,  $n=1, N$  распределятся следующим образом :

$N_1$  отсчет на отрезке [ a, c1 ] ;

$N_2$  отсчет на отрезке [ c1, c2 ] ;

$N_3$  отсчет на отрезке [ c2, b ] .

Интерполируем  $f_1(t)$  на отрезке [ a, b ] сплайном  $S_1$  с узлами  $t_{uj}$  ,  $j=0, R_1$  , которые расположены:

$m_1$  узел на отрезке  $[a, c_2]$ .

$m_2$  узел на отрезке  $[c_2, b]$ .

Аналогично интерполируем  $f_2(t)$  на отрезке  $[a, b]$  сплайном  $S_2$  с

узлами  $t_{2j}$ ,  $j=0, R_2$ , которые расположены:

11 узел на отрезке  $[a, c_1]$ .

12 узел на отрезке  $[c_1, b]$ .

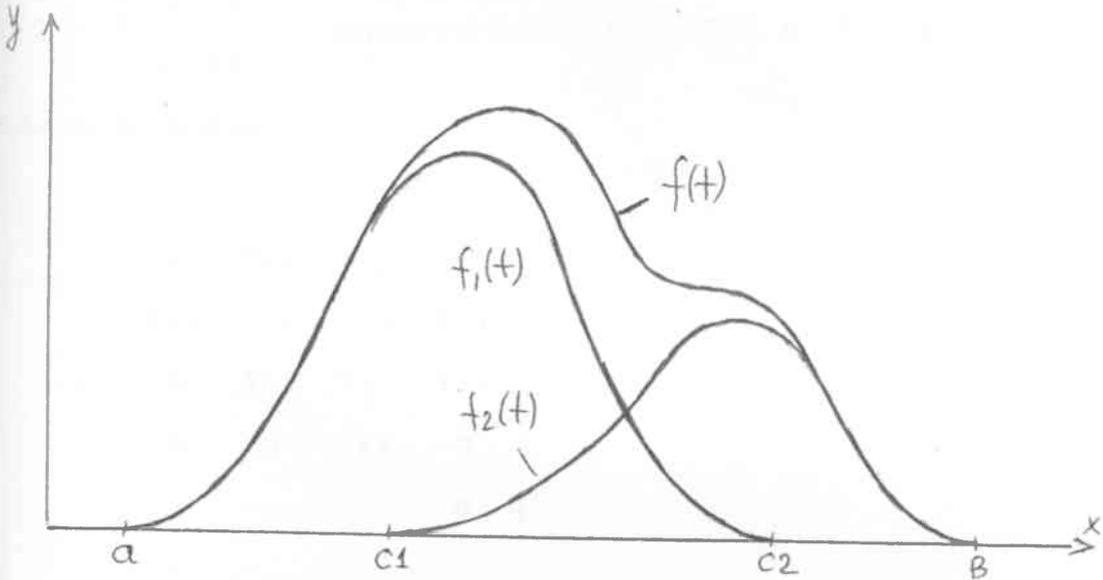


Рис. 3.3.1

Тогда можно записать

$$F_1 = X_1 A_1 \quad \text{и}$$

$$F_2 = X_2 A_2 \quad ,$$

где  $F_1$  - матрица размера  $N \times 1$  с элементами  $f_1(t_i)$ ,  $i=1, N$  ;

$F_2$  - матрица размера  $N \times 1$  с элементами  $f_2(t_i)$ ,  $i=1, N$  ;

$X_1$  - блочно диагональная матрица вида /2.2.10/,

размерности  $N \times (R_1+1)$  ;

$X_2$  - блочно диагональная матрица вида /2.2.10/,

размерности  $N \times (R_2+1)$  ;

$A_1$  - матрица значений сплайна  $S_1(t)$  в узловых точках,

размерности  $(R_1+1) \times 1$  с элементами  $a_{1j}$ ,  $j=0, R_1$  ;

$A_2$  - матрица значений сплайна  $S_2(t)$  в узловых точках, размерности  $(R_2+1) \times 1$  с элементами  $a_{2j}$ ,  $j=0, R_2$ .

Или  $\tilde{F} = \tilde{X} \tilde{A}$ , где матрицы

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ размерности } (N+N_1+N_3) \times 1;$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ E_1 & E_2 \end{pmatrix}, \text{ размерности } (2N+N_1+N_3) \times (R_1+R_2+2);$$

В ином виде можно записать :

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & 0 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ 0 & V_{32} & V_{33} & V_{34} \\ 0 & 0 & V_{43} & 0 \\ 0 & V_{52} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \\ 0 & V_{32} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} V_{13} & 0 \\ V_{23} & V_{24} \\ V_{33} & V_{34} \end{pmatrix}$$

Размерность матрицы  $\tilde{X}$  схематично представлена на рис.3.3.2.

	m1	m2	l1	l2
N1	$V_{11}$	$V_{12}$	$V_{13}$	0
N2	$V_{21}$	$V_{22}$	$V_{23}$	$V_{24}$
N3	0	$V_{32}$	$V_{33}$	$V_{34}$
N1	0	0	$V_{43}$	0
N2	0	$V_{52}$	0	0

Рис. 3.3.2

Для наблюдаемых значений  $f_i = f_1(t_i) + f_2(t_i)$  имеем:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \text{ или}$$

$F = X A$ , где матрицы имеют размерность:

$$F - N \times 1, \quad X - N \times (R_1 + R_2 + 2), \quad A - (R_1 + R_2 + 2) \times 1.$$

Для определения функций  $f_1$  и  $f_2$  в виде сплайнов необходимо определить значения матриц  $A_1$  и  $A_2$  матрицы  $A$ . Решение может быть получено методом наименьших квадратов в виде:

$$A = (X^* X)^{-1} X^* F.$$

Однако имеет смысл при определении матрицы  $A$  учесть дополнительную информацию о поведении  $f_1$  и  $f_2$ , заключающуюся в следующем:

$$f_1 = 0 \text{ на отрезке } [c_2, b],$$

$$f_2 = 0 \text{ на отрезке } [a, c_1].$$

С учетом этого имеем систему уравнений вида:

$$\tilde{F} = \tilde{X} A.$$

В этом случае решение ищем в виде

$$A = (\tilde{X}^* \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^* \tilde{F}, \text{ или в иной записи}$$

$$A = C^{-1} B.$$

Так как матрица  $X$  имеет специальный вид и разрежена, то нет необходимости получать матрицы  $C$  и  $B$  непосредственно умножением. Удобнее использовать рекуррентный способ, аналогичный используемому в алгоритме 2.3 и вытекающий из следующих выражений:

$$C = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ E_1 & E_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ E_1 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^* X_1 + E_1^* E_2 & X_1^* X_2 + X_2^* E_2 \\ X_2^* X_2 + E_2^* X_2 & X_2^* X_2 + E_2^* E_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ E_1 & E_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^* F \\ X_2^* F \end{bmatrix}.$$

Схематично алгоритм формирования матриц  $C$  и  $B$  представлен на рис.3.3.3. Здесь для точки наблюдения  $t$ , принадлежащей  $i$ -му участку сплайна  $S_1$  и  $j$ -му участку сплайна  $S_2$  имеем значения элементов матриц. Для  $X_1 : x_1, x_2, x_3, x_4$ , для  $X_2 : \text{'}x_1, \text{'}$  $x_2, \text{'}$  $x_3, \text{'}$  $x_4$ .

Из рис.3.3.3 следует, что произведения, например  $x_3 \text{'}$  $x_1$  добавляются к элементу матрицы  $C(i, k-2)$ , а произведение  $x_3 f(t)$  добавляется к элементу матрицы  $B(i)$ . Аналогично добавляются все остальные произведения таблицы. Здесь индекс  $k=j+(R_1+1)$  для принятого порядка следования элементов матрицы  $A$ .

Полный алгоритм разделения аддитивной совокупности двух функций плотности распределения вероятности приведен ниже.

		C								B
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\text{'}$ $x_1$	$\text{'}$ $x_2$	$\text{'}$ $x_3$	$\text{'}$ $x_4$	
$x_1$		$i-2$ $i-2$	$i-2$ $i-1$	$i-2$ $i$	$i-2$ $i+1$	$i-2$ $k-2$	$i-2$ $k-1$	$i-2$ $k$	$i-2$ $k+1$	$i-2$
$x_2$		#	$i-1$ $i-1$	$i-1$ $i$	$i-1$ $i+1$	$i-1$ $k-2$	$i-1$ $k-1$	$i-1$ $k$	$i-1$ $k+1$	$i-1$
$x_3$		#	#	$i$ $i$	$i$ $i+1$	$i$ $k-2$	$i$ $k-1$	$i$ $k$	$i$ $k+1$	$i$
$x_4$		#	#	#	$i+1$ $i+1$	$i+1$ $k-2$	$i+1$ $k-1$	$i+1$ $k$	$i+1$ $k+1$	$i+1$
$\text{'}$ $x_1$		#	#	#	#	$k-2$ $k-2$	$k-2$ $k-1$	$k-2$ $k$	$k-2$ $k+1$	$k-2$
$\text{'}$ $x_2$		#	#	#	#	#	$k-1$ $k-1$	$k-1$ $k$	$k-1$ $k+1$	$k-1$
$\text{'}$ $x_3$		#	#	#	#	#	#	$k$ $k$	$k$ $k+1$	$k$
$\text{'}$ $x_4$		#	#	#	#	#	#	#	$k+1$ $k+1$	$k+1$

Рис.3.3.3

### Алгоритм 3.4

1. Получить отсчеты функции плотности вероятности  $t_n, f_n, n=1, N$ .

2. Задать  $c_1$  - начало аддитивного участка,

$c_2$  - конец аддитивного участка.

3. Задать абсциссы узлов сплайнов :

S1:  $tu_{1i}, i=0, R_1$  и

S2:  $tu_{2j}, j=0, R_2$  .

4. Для  $t_n$  определить принадлежность точки отсчета участкам

сплайнов :  $t_n \in [tu_{1i-1}, tu_{1i})$  ,

$t_n \in [tu_{2j-1}, tu_{2j})$  .

5. Определить в соответствии с / 2.2.11 / элементы матриц X1 и

X2 .

6. Формировать матрицы C и B :

6.1 в соответствии с рис.3.3.3 прибавить 36 произведений к соответствующим элементам матрицы C ;

6.2 в соответствии с рис.3.3.3 прибавить 8 произведений к элементам матрицы B ;

6.3 если  $t_n \in [tu_{20}, c_1)$ , то  $k=(R_1+1)+1$  и

$$C(k-2, k-2) = C(k-2, k-2) + 'x_1 'x_1 .$$

$$C(k-2, k-1) = C(k-2, k-1) + 'x_1 'x_2 .$$

$$C(k-2, k) = C(k-2, k) + 'x_1 'x_3 .$$

$$C(k-2, k+1) = C(k-2, k+1) + 'x_1 'x_4 .$$

$$C(k-1, k-1) = C(k-1, k-1) + 'x_2 'x_2 .$$

$$C(k-1, k) = C(k-1, k) + 'x_2 'x_3 .$$

$$C(k-1, k+1) = C(k-1, k+1) + 'x_2 'x_4 .$$

$$C(k, k) = C(k, k) + 'x_3 'x_3 .$$

$$C(k, k-2) = C(k, k+1) + 'x_3 'x_4 .$$

$$C(k+1, k+1) = C(k+1, k+1) + 'x_4 'x_4 .$$

$$B(k-2) = b(k-2) + 'x_1 f_n .$$

$$B(k-1) = b(k-1) + 'x2 f_n ,$$

$$B(k) = b(k) + 'x3 f_n ,$$

$$B(k+1) = b(k+1) + 'x4 f_n ;$$

6.4 если  $t_n \in [c_2, tu1_{R1})$  . то  $k=i$  и

$$C(k-2, k-2) = C(k-2, k-2) + x1 x1 ,$$

$$C(k-2, k-1) = C(k-2, k-1) + x1 x2 ,$$

$$C(k-2, k) = C(k-2, k) + x1 x3 ,$$

$$C(k-2, k+1) = C(k-2, k+1) + x1 x4 ,$$

$$C(k-1, k-1) = C(k-1, k-1) + x2 x2 ,$$

$$C(k-1, k) = C(k-1, k) + x2 x3 ,$$

$$C(k-1, k+1) = C(k-1, k+1) + x2 x4 ,$$

$$C(k, k) = C(k, k) + x3 x3 ,$$

$$C(k, k-2) = C(k, k+1) + x3 x4 ,$$

$$C(k+1, k+1) = C(k+1, k+1) + x4 x4 ,$$

$$B(k-2) = b(k-2) + x1 f_n ,$$

$$B(k-1) = b(k-1) + x2 f_n ,$$

$$B(k) = b(k) + x3 f_n ,$$

$$B(k+1) = b(k+1) + x4 f_n .$$

7. Если обработаны не все отсчеты, то дальше 4 .

8. Дополнить матрицу C из условия симметрии.

9. Определить  $COB = C^{-1}$  .

10. Найти  $A = COB B$  .

11. Определить  $err = \sum_{n=N}^N ( [ f_n - S1(A, t_n) - S2(A, t_n) ]^2 )$  .

12. Для  $t_n \in [ tu2_0, c1 )$  определить

$$err2 = \sum_n ( [ f_n - S2(A, t_n) ]^2 ) .$$

13. Для  $t_n \in [ c2, tu1_{R1} )$  определить

$$err1 = \sum_n ( [ f_n - S1(A, t_n) ]^2 ) .$$

14. Вычислить доверительные интервалы

$$d_j = \text{std} \sqrt{\text{COB}(j, j) (\text{err} + \text{err}_1 + \text{err}_2) / (N + N_1 + N_2 - R_1 - R_2 - 1)} ,$$

$$j = 0.R_1 + R_2 + 2 , \text{std} - \text{коэффициент стьюдента} .$$

15. Нормировать результат

15.1 вычислить

$$S_m = \int_{a_j}^{b_j} (S_1(t) + S_2(t)) dt ;$$

15.2 нормировать

$$A_j = A_j / S_m ,$$

$$d_j = d_j / S_m . j = 0.R_1 + R_2 + 2 ;$$

16. Выдать результат:  $A_j, d_j, j = 0.R_1 + R_2 + 2$  .

Особенностью решаемой задачи является то, что искомые сплайн-функции / или по меньшей мере искомые значения сплайнов в точках стыковки / должны быть неотрицательными. Добиться выполнения этого условия можно несколькими способами или их сочетанием. Приведенный алгоритм этих условий не учитывает, но может являться частью этих процедур.

Простейшим способом является определение параметров, удовлетворяющих условию путем подбора соответствующей сетки узлов. Поиск может быть организован перебором или градиентными методами.

Следующий способ - это взвешивание отсчетов и дополнительных уравнений, что эквивалентно решению задачи МНК с ограничениями неравенствами [53].

Можно также использовать решение задачи МНК с ограничениями неравенствами, алгоритм и программа которого имеются в работе [53]. Этот метод может также включать и два предыдущих.

На основании алгоритма 3.4 \ разработана программа, в которой для выполнения условий неотрицательности используется взвешивание

отсчетов. На рис.3.3.4 показан пример разделения суммы двух вероятностных распределений вида

$$f(t) = 0.6 \exp(-0.5(t-64.5)^2) + 0.4 \exp(-0.5(t-67)^2) .$$

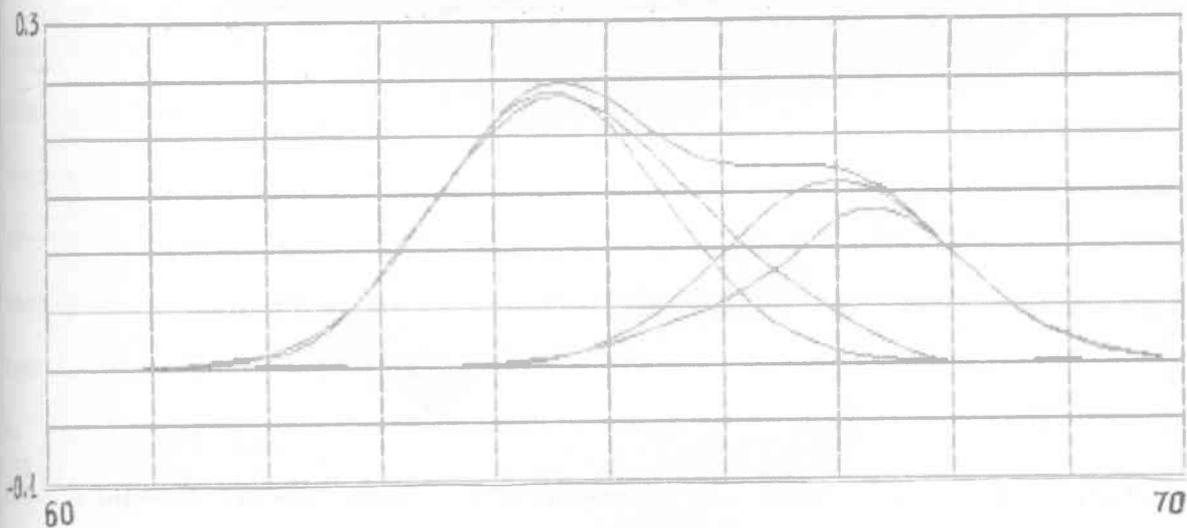
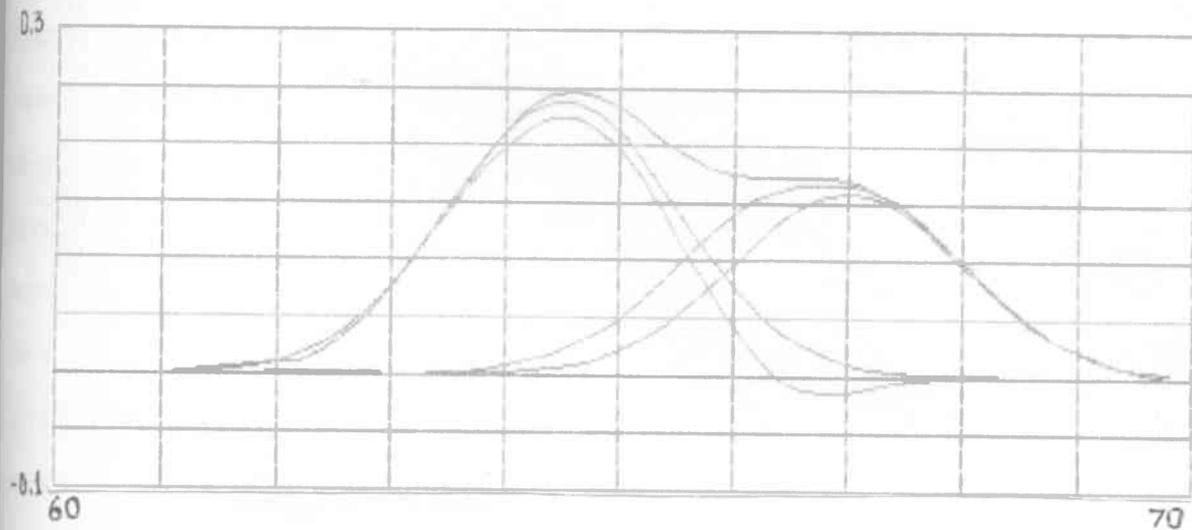


Рис.3.3.4

В данном примере продемонстрировано также улучшение приближения и устранение выхода сплайна в область отрицательных значений путем подбора сетки узлов сплайна.

### 3.4 Алгоритмы идентификации траекторных данных

При обработке параметров полета в процессе эксплуатации воздушных судов приходится иметь дело с  $m$ -мерными векторами, изменяющимися во времени. Пусть в момент времени  $t_n$  измерены с некоторой погрешностью  $e_{nk}$  значения параметров описывающих траекторию  $y_{nk} = f_k(t_n) + e_{nk}$ ,  $n = 1, N$ ,  $k = 1, m$ .

Всего для оценки параметров траектории имеем  $N$  отсчетов на интервале  $[0, T]$ . Опишем траекторию сплайнами  $S_k(t)$ , значения которого линейно зависят от вектора параметров  $A_k$ , которые являются значениями сплайна в узлах сетки.

Полагая, что погрешности некоррелированы и имеют нормальное распределение, будем искать оценки значений параметров сплайна по методу наименьших квадратов. Для этого решаем систему нормальных уравнений в виде  $A_k = (X^* X)^{-1} X^* Y_k$ .

Общее решение представлено ранее в алгоритме 2.3. В соответствии с алгоритмом для случая  $m=2$  создана программа, демонстрирующая возможности моделирования траекторий с помощью сплайнов. Программа позволяет с помощью устройства мышь рисовать произвольные траектории на плоскости, а затем аппроксимировать их сплайном. На рис.3.4.1 приведен пример аппроксимации произвольной траектории, построенной по 1000 отсчетов, сплайном, состоящим из 30 участков.

На практике к алгоритмам обработки траекторных данных, применяемым в РЭС УВД / вторичная обработка радиолокационной информации /, предъявляют жесткие требования по эффективности. Поэтому рассмотрим частные случаи решения задачи оценивания и экстраполяции траекторных данных с помощью сплайнов.

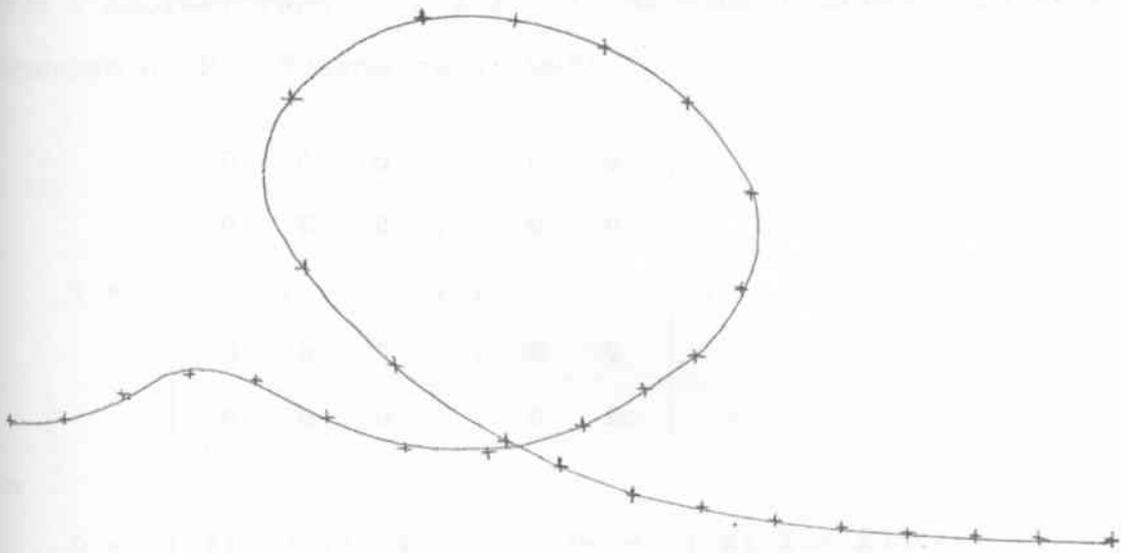


Рис. 3.4.1

Пусть измерения располагаются на регулярной сетке  $t_{n+1} = t_n + h$ ,  $n=1, N$ . Сетка узлов сплайна строится следующим образом.  $R-1$  участок имеет одинаковую длину  $h_s$ , а участок  $R$  длину  $h_e$ :

$$t_{j+1} - t_j = h_s, \quad j=0, R-2;$$

$$t_R - t_{R-1} = h_e.$$

Последний участок является интервалом экстраполяции. Наблюдения на нем отсутствуют. Наблюдения также отсутствуют и на первом участке / рис.3.4.2 /.

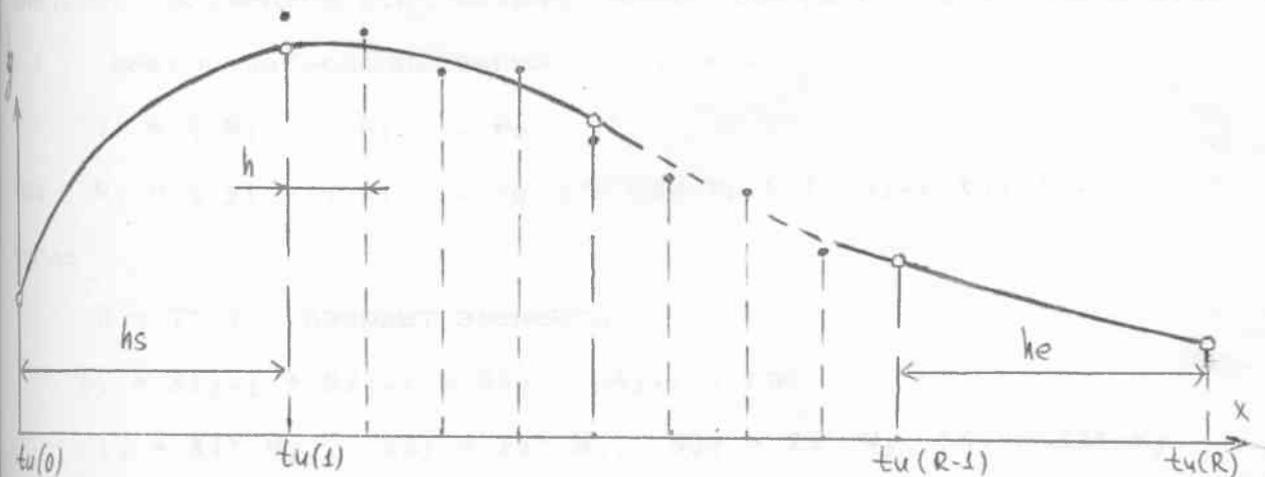


Рис. 3.4.2

Тогда в соответствии с / 2.2.9 / матрица T размерности N x R+1, состоящая из R-2 блоков имеет вид:

$$T = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & De \end{vmatrix},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} X1 & X2 & X3 & X4 \end{vmatrix}, \quad De = \begin{vmatrix} X1 & X2e & X3e & X4e \end{vmatrix}.$$

$$X1 = \begin{vmatrix} x1(t_1) \\ \dots \\ x1(t_n) \\ \dots \\ x1(t_{Nj}) \end{vmatrix}, \quad X2 = \begin{vmatrix} x2(t_1) \\ \dots \\ x2(t_n) \\ \dots \\ x2(t_{Nj}) \end{vmatrix}, \quad X3 = \begin{vmatrix} x3(t_1) \\ \dots \\ x3(t_n) \\ \dots \\ x3(t_{Nj}) \end{vmatrix}, \quad X4 = \begin{vmatrix} x4(t_1) \\ \dots \\ x4(t_n) \\ \dots \\ x4(t_{Nj}) \end{vmatrix},$$

$$X2e = \begin{vmatrix} x2e(t_1) \\ \dots \\ x2e(t_n) \\ \dots \\ x2e(t_{Nj}) \end{vmatrix}, \quad X3e = \begin{vmatrix} x3e(t_1) \\ \dots \\ x3e(t_n) \\ \dots \\ x3e(t_{Nj}) \end{vmatrix}, \quad X4e = \begin{vmatrix} x4e(t_1) \\ \dots \\ x4e(t_n) \\ \dots \\ x4e(t_{Nj}) \end{vmatrix}.$$

Значения элементов этих матриц определяются согласно алгоритму

2.1. Вектор наблюдений запишем в виде :

$$Y = \begin{vmatrix} W_2 & \dots & W_j & \dots & W_{R-1} \end{vmatrix}^*,$$

где  $W_j = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_i & \dots & y_n \end{vmatrix}$ , где  $t_i \in [t_{uj-1}, t_{uj})$ .

Тогда

$B = T^* Y$  содержит элементы

$$B_j = S1_{j-2} + S2_{j-1} + S3_j + S4_{j+1}, \text{ где}$$

$$S1_j = X1^* W_j, \quad S2_j = X2^* W_j, \quad S3_j = X3^* W_j, \quad S4_j = X4^* W_j.$$

Отсюда следует, что для организации вычисления сплайна в скользящем окне необходимо хранить по  $R-2$  значения  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Чтобы избежать этого доопределим матрицу  $T$  следующим образом :

$$T = \begin{pmatrix} T \\ T \end{pmatrix}$$

где  $T = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & Z \\ X_2 & X_1 & 0 & Z \\ X_3 & X_2 & X_1 & Z \end{pmatrix}$ .  $Z$  - нулевая матрица размерности  $n \times R-3$ .

Это дополнение несколько изменит используемую сплайновую модель. В этом случае для вычисления значений элементов  $B$  в скользящем окне достаточно сохранять значения  $S_{1R-1}, S_{2R-1}, S_{3R-1}, S_{4R-1}, S_{2R-2}, S_{3R-2}, S_{4R-2}, S_{3R-3}, S_{4R-3}, S_{4R-4}$  / при поступлении отсчетов справа и сдвиге сетки наблюдений влево /.

Тогда  $B_R = S_4 e$ ,

$$B_{R-1} = S_3 e + S_{4R-2},$$

$$B_{R-2} = S_2 e + S_{3R-2} + S_{4R-3},$$

$$B_{R-3} = S_{1R-4} + S_{2R-3} + S_{3R-2} + S_{4R-1},$$

где  $S_2 e = X_2 e^* W_{R-1}$ ,  $S_3 e = X_3 e^* W_{R-1}$ ,  $S_4 e = X_4 e^* W_{R-1}$ .

Для остальных элементов значения  $B$  определяются сдвигом

$$B_j = B_{j+1}, \quad j=0, R-4.$$

Значения сплайна в узлах определяется по формулам / 2.4.2 /.

Матрица  $C^{-1}$  не зависит от значений экстраполируемой функции и при фиксированной сетке может быть вычислена предварительно.

Таким образом задача сводится к формированию элементов матрицы  $B$  и операциям / 2.4.2 /.

### Алгоритм 3.5

1. Задать  $n, R, h, h_s, h_e$ .

2. Вычислить  $x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), i=1, n$  .
3. Вычислить  $x_{2e}(t_i), x_{3e}(t_i), x_{4e}(t_i), i=1, n$  .
4. Вычислить  $C^{-1} = (T^* T)^{-1}$  .
5. Получить значение  $y_i, t_i \in [t_{uR-2}, t_{uR-1}]$  .
6. Вычислить
 
$$SM01 = SM01 + y_i x_{1i} ,$$

$$SM02 = SM02 + y_i x_{2i} ,$$

$$SM03 = SM03 + y_i x_{3i} ,$$

$$SM04 = SM04 + y_i x_{4i} .$$

$$SME2 = SME2 + y_i x_{1e_i} ,$$

$$SME3 = SME3 + y_i x_{1e_i} ,$$

$$SME4 = SME4 + y_i x_{1e_i} .$$
7. Если  $i < n$  то  $i=i+1$  и выполнить 5, иначе :
 
$$B_{j-1} = B_j , j=R-3, 1 .$$
8. Выполнить
 
$$B_R = SME4 ,$$

$$B_{R-1} = SME3 + SM14 ,$$

$$B_{R-2} = SME2 + SM13 + SM24 ,$$

$$B_{R-3} = SM34 + SM23 + SM12 + SM01 .$$
9. Выполнить
 
$$SM12 = SM02 ,$$

$$SM23 = SM13, SM13. = SM03 ,$$

$$SM34 = SM24, SM24 = SM14, SM14 = SM04 ,$$

$$SM01=0, SM02=0, SM03=0, SM04=0, SME2=0, SME3=0, SME4=0 .$$
10. Определить  $A = C^{-1} B$  .
11. Если обработка продолжается, то положить  $i=1$  и выполнить 5.

Приведенный алгоритм отличается простотой и возможностью параллельного выполнения целого ряда операций. Однако для получения экстраполируемого значения требуется обработать отсчеты на всем последнем участке сплайна. Эта проблема может

быть решена . если использовать несколько алгоритмов с перекрывающимися сетками.

Рассмотрим иной алгоритм, основанный на полученных в 2.6 соотношениях для рекуррентного МНК .

### Алгоритм 3.6

1. Задать сетку узлов сплайна в виде множества  $tu_j, j=0,R$  , или закона их определения .  $R$  - максимальное количество участков сплайна .
2. Задать  $r=r_0$  и начальную сетку узлов сплайна  $tu_0, \dots, tu_{r_0}$  .
3. Получить  $n=r_0+1$  - начальных точек наблюдений  $t_i, y_i, i=1, n$  .
4. Для  $n$ -наблюдений на  $r$ -участках сплайна рассчитать вектор оценок  $A_n$  и матрицы  $C^{-1}_n, B_n$  согласно алгоритму 2.3 .
5. Получить  $n+1$  отсчет  $t_{n+1}, y_{n+1}$  и обработать :
6. Если  $t_{n+1} < tu_{r-1}$  ( отсчет принадлежит текущей сетке ) выполнить 7, иначе 15 .
7. Определить значения  $x_1, x_2, x_3, x_4$  согласно алгоритму 2.1.
8. Вычислить матрицу  $F$  с элементами
$$F(i) = C^{-1}(i,r) x_4 + C^{-1}(i,r-1) x_3 + C^{-1}(i,r-2) x_2 + C^{-1}(i,r-3) x_1, i=0,r .$$
9.  $d = 1 / ( 1 + F(r) x_4 + F(r-1) x_3 + F(r-2) x_2 + F(r-3) x_1 ) .$
10.  $C^{-1} = C^{-1} + F^* d F .$
11.  $B(r) = B(r) + y_{n+1} x_4 :$ 
$$B(r-1) = B(r-1) + y_{n+1} x_3 ;$$
$$B(r-2) = B(r-2) + y_{n+1} x_2 ;$$
$$B(r-3) = B(r-3) + y_{n+1} x_1 .$$
12.  $f = y_{n+1} - ( A(r) x_4 + A(r-1) x_3 + A(r-2) x_2 + A(r-3) x_1 ) :$ 
$$A = A + d f F^* .$$
13. Положить  $n=n+1$  .
14. Если отсчет не последний, то 5. иначе 30.

15. Задать  $tu_{r+1}$  .
16. Определить значения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  согласно алгоритму 2.1.
17. Вычислить матрицу  $F$  с элементами

$$F(i) = C^{-1}(i,r-1) x_3 + C^{-1}(i,r-2) x_2 + C^{-1}(i,r-3) x_1 \quad i=0..r$$

18.  $d = 1 / ( 1 + F(r-1) x_3 + F(r-2) x_2 + F(r-3) x_1 )$  .

19.  $C^{-1} = C^{-1} + F^* d F$  .

20.  $B(r) = B(r) + y_{n+1} x_3$  ;

$$B(r-1) = B(r-1) + y_{n+1} x_2 ;$$

$$B(r-2) = B(r-2) + y_{n+1} x_1 .$$

21.  $p = x_4 x_4$  .

22. Вычислить  $V(r) = x_4 x_3$  ;

$$V(r-1) = x_4 x_2 ;$$

$$V(r-2) = x_4 x_1 .$$

23. Вычислить  $L(i) = C^{-1}(i,r) V(r) + C^{-1}(i,r-1) V(r-1) + C^{-1}(i,r-2) V(r-2)$  ,  $i=0..r$  .

24.  $z = p - ( L(r) V(r) + L(r-1) V(r-1) + L(r-2) V(r-2) )$  .

25.  $M = C^{-1} + L^* L / z$  .

26. Сформировать

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} M & -L^*/z \\ -L/z & 1/z \end{vmatrix} .$$

$$B = \begin{vmatrix} B \\ x_4 y_{n+1} \end{vmatrix} .$$

27. Вычислить

$$A = C^{-1} B .$$

28. Положить  $r=r+1$ ,  $n=n+1$  .

29. Если обработка не окончена, продолжить с 5 , иначе 30 .

30. Конец работы .

Рекуррентный алгоритм более сложен, но позволяет модифицировать сплайн с каждым новым отсчетом. Его недостатком является увеличение объема вычислений с ростом числа оцениваемых параметров.

Имеет смысл комбинировать работу алгоритмов. На начальных этапах использовать рекуррентный алгоритм, а с ростом числа участков включать оконный. Оба алгоритма реализованы программно в среде MATLAB, их тексты приведены в приложении.

### 3.5 Статистическая идентификация линейных динамических систем с использованием сплайнов

При идентификации динамических систем необходимо по имеющимся случайным данным об изменении входных и выходных сигналов получить импульсную переходную функцию системы (ИПФ) [8]. В этом случае ИПФ, определяют решая интегральное уравнение Винера-Хопфа вида:

$$R_{xy}(q) = \int_0^T w(t) R_{xx}(t - q) dt, \quad / 3.5.1 /$$

где:  $R_{xx}(t)$  - корреляционная функция входного сигнала;

$R_{xy}(t)$  - взаимно корреляционная функция входного и выходного сигналов;

$w(t)$  - ИПФ.

В связи со сложностью аналитического решения уравнения /3.5.1/ наиболее часто применяют численные методы [16]. При численном решении, уравнение /3.5.1/ аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений:

$$R_{xy}(i h) = \sum_{j=0}^n [c_j w(i h) R_{xx}((i-j)h)], \quad i=0, \dots, n, \quad / 3.5.2 /$$

где  $h=T/n$  - шаг дискретизации по времени ;

$c_j$  - коэффициент, зависящий от выбора квадратурной формулы, аппроксимирующей интеграл .

В матричной форме система уравнений /3.5.2/ имеет вид :

$$R_{xy} = R_{xx} W . \quad /3.5.3/$$

Однако система /3.5.3/ относится к некорректно поставленным задачам [60] и ее решение имеет ряд трудностей [72]. Малые неточности в исходных данных приводят к неприемлемо большим погрешностям решения. Для решения этой проблемы существуют регуляризирующие алгоритмы решения [16], однако они сложны и в любом случае приходится иметь дело с системой уравнений порядка  $n$ .

Используют также проекционные методы, идея которых заключается в аппроксимации решения некоторой гладкой функцией. Мы при решении системы /3.5.3/ полагаем, что ИПФ аппроксимирована полиномиальным сплайном. Тогда значения сплайна в  $n$  - точках определяются как :

$$S = X A , \quad /3.5.4/$$

где  $X$  - блочно-диагональная матрица размерности  $N \times R+1$  вида /2.2.10/;

$A$  - матрица-столбец абсис узловых точек сплайна размерности  $R+1$ ;

$S$  - матрица-столбец значений сплайна в  $n$  точках размерности  $n$  ;

$\lambda$  - количество точек стыковки сплайна / узлов сплайна / на интервале интегрирования .

Пусть  $w(t)$  - сплайн вида /3.5.4/, подставив который в /3.5.3/ имеем :

$$R_{xy} = R_{xx} X A , \quad /3.5.5/$$

или 
$$R_{xy} = P A , \quad /3.5.6/$$

где  $P = R_{xx} X$  - матрица размерности  $N \times R+1$  .

Сформулируем задачу следующим образом : построить статистические оценки неизвестных параметров  $A$  по результатам  $R_{xy}$ . Для

решения поставленной задачи необходимо найти значения  $A$ , обеспечивающие минимум выражения :

$$(R_{xy} - P A)^* (R_{xy} - P A) . \quad /3.5.7/$$

Это достигается путем решения системы так называемых нормальных уравнений в виде

$$A = (P^* P)^{-1} P^* R . \quad /3.5.8/$$

На основании изложенного выше, рассмотрим алгоритмы решения системы /3.5.6/. В случае эргодичности входного процесса на входе идентифицируемой системы для представления автокорреляционной матрицы  $R_{xx}$  достаточно одной строки. Так как используемый нами сплайн локален и матрица  $X$  является блочно-диагональной вида /2.2.10/, то можно эффективно организовать вычисление матрицы  $P = R_{xx} X$ . Для этого потребуется примерно  $4N^2$  умножений против  $N^2R$  при умножении обычных матриц .

Матрица  $C = P^* P$  симметрична с доминирующей диагональю, что делает ее хорошо обусловленной, а решение системы устойчивым даже при больших  $R$ . Отметим, что использование сплайнов /которые имеют хорошие приближающие качества / позволяет не использовать больших  $R$ . Кроме того, качество аппроксимации ИПФ можно существенно улучшить, выбрав оптимальное расположение узлов сплайна .

Наиболее общий алгоритм решения уравнения Винера-Хопфа предлагаемым методом приведен ниже . В соответствии с ним создана программа SPLI\_IPF, решающая задачу статистической идентификации линейных динамических систем .

### Алгоритм 3.7

1. Определение корреляционной матрицы отсчетов входного и выходного сигналов системы  $R_{xy}$  и автокорреляционной матрицы отсчетов

входного сигнала  $R_{xx}$ . Задание ординат сплайна, аппроксимирующего импульсную переходную функцию системы .

1. Расчет матрицы  $P = R_{xx}^{-1} X$ . В предварительном расчете матрицы  $X$  нет необходимости, т.к. исходя из структуры матриц прямое получение  $P$  эффективнее в вычислительном плане.

3. Расчет матрицы  $C = P^* P$ .

4. Расчет вектора  $B = P^* R_{xy}$ .

5. Обращение матрицы  $C$ .

6. Определение оценок абцисс узлов сплайна  $A = C^{-1} B$ .

7. Расчет  $Y = P A$  и определение суммы квадратов погрешностей

$$e = \sum_{i=1}^N [(R_{xy}(i) - Y(i))^2]$$

8. Определение доверительных интервалов для оценок вектора  $A$

$$D_j = A_j \pm \text{std} \sqrt{(C^{-1}(j,j) e / (N-R-1))}, j=0,R,$$

где  $\text{std}$  - коэффициент Стьюдента.

9. Вывести значения  $A, D$ .

### 3.6 Выводы

1. В настоящем разделе разработаны универсальные и эффективные алгоритмы, позволяющие решать практические задачи по идентификации систем УВД с помощью сплайнов.

2. Показано решение задачи идентификации нелинейного статического устройства с одним входом и одним выходом. Это позволяет строить математические модели различных диодов, варикапов, датчиков в целях выбора оптимальных режимов работы, повышения точностных и надежностных характеристик систем УВД.

3. Приведено решение задачи идентификации нелинейного статического устройства с двумя входами и одним выходом. Это позволяет строить математические модели полупроводниковых и ламповых триодов. Полученную модель можно использовать для выбора рабочих характеристик при расчете усилительных устройств.
4. Разработаны алгоритмы для идентификации широкого класса непрерывных законов распределения случайных величин. Использование в качестве модели сплайнов дает универсальный подход к приближению различных эмпирических законов, в том числе и полимодальных. Алгоритмы могут применяться при моделировании процессов в РЭС УВД.
5. Получены алгоритм и программа разделения аддитивной совокупности двух функций плотности вероятности. Данная задача имеет место при классификации величин /например анализ погрешностей/ в распознавании образов.
6. Приведены алгоритм и разработана программа идентификации траекторных измерений, позволяющая производить сжатие данных, построение произвольных траекторий при планировании полетов.
7. Разработаны алгоритм и программа рекуррентного сглаживания и экстраполяции траекторных измерений с помощью сплайнов методом наименьших квадратов.
8. Созданы алгоритм и программа обработки траекторных измерений в скользящем окне с помощью сплайнов по методу наименьших квадратов. Последние два алгоритма могут применяться при вторичной обработке траекторной информации в РЭС УВД.
9. Разработаны алгоритм и программа для решения задач статистической идентификации линейных динамических систем при эксплуатации РЭС УВД.

10. Преимуществом сплайн-методов является упрощение процедуры выбора вида модели, которая должна быть адекватна обрабатываемой зависимости. В нашем случае проблема сводится к выбору подходящей сетки узлов сплайна. Результаты работы алгоритмов имеют явную физическую интерпретацию.

## 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В РЭС УВД

### 4.1 Постановка задачи

В разделе 2 были получены общие выражения для сплайн-методов обработки измерительной информации, а в разделе 3 разработаны конкретные алгоритмы и программы решения задач обработки измерительной информации в процессе эксплуатации РЭС УВД.

В настоящем разделе произведем экспериментальную проверку основных методов и алгоритмов, а также покажем основные принципы построения аппаратурных средств обработки информации с помощью сплайнов.

В подразделе 4.2 по измеренным в эксперименте значениям выходных статических характеристик биполярного транзистора / как наиболее типичного и распространенного прибора / строим математическую модель, что соответствует идентификации нелинейной статической системы с двумя входами и одним выходом. Задав сопротивление нагрузки и напряжение питания, по данным модели строим динамическую характеристику  $I_k = f(I_b)$ . Затем проверяем адекватность последней экспериментальной зависимости, полученной при тех же условиях.

Исследованию методов и алгоритмов обработки траекторной информации посвящен подраздел 4.3. Для сравнительного анализа используем наиболее близкий способ сглаживания и экстраполяции по методу наименьших квадратов с использованием в качестве модели полиномиальных сплайнов. Анализируем корреляционные матрицы и проверяем полученные результаты на математических моделях траекторной

информации. Использование математической модели, включающей аддитивную погрешность, имеющую нормальное распределение с известной дисперсией и нулевым матожиданием, позволяет сравнивать полученные результаты с истинными значениями. Показана также аппроксимация сплайнами реальных траекторных данных полученных с КСРП.

В подразделе 4.4 исследуем метод сплайн-идентификации линейных динамических систем. Исследования производятся с использованием математических моделей корреляционных функций, а также математическим моделированием линейных динамических систем и процесса прохождения через них информационных сигналов. Последнее аналогично процессу идентификации реальных физических объектов.

Описание устройства и функционирования специализированных процессоров обработки измерительной информации: сплайн-интерполятора, сплайн-аппроксиматора и сплайн-экстраполятора приведено в подразделе 4.5.

Подраздел 4.6 содержит основные выводы по разделу.

#### 4.2 Построение и экспериментальная проверка модели биполярного транзистора

Построим математическую модель кремниевого биполярного транзистора типа 2Т201Г во включении с общим эмитером. Для этого на лабораторной установке [57] измерим выходные статические характеристики  $I_k = f(U_{ek})$ , при  $I_b = \text{const}$ . Результаты измерений представлены в табл.4.1. В соответствии с алгоритмом 3.1, с помощью программы SPL\_TRAN, аппроксимируем полученные данные сплайном на заданой сетке узлов. Результаты аппроксимации представлены в таблице 4.2 и на рис 4.2.1. Приняв сопротивление

нагрузки равным  $R_H=4000$  ом при напряжении питания  $U_H=12$  В с помощью сплайн-модели находим выходную динамическую характеристику  $I_{k_{\text{н}}} = f(I_b)$  в виде интерполяционного сплайна, представленного значениями в узловых точках. Результаты приведены в таблице 4.3. При тех же условиях измеряем значения выходной динамической характеристики на лабораторной установке. С помощью программы SPL\_TXY получаем значения тока коллектора модельной характеристики  $I_{k_{\text{н}}}$  для тех значений тока базы, которые использовались на лабораторной установке :  $I_{b_1}$ . Результаты представлены в таблице 4.4. На рис.4.2.2 показаны экспериментальная и модельная выходные характеристики транзистора 2Т201Г при  $R_H=4000$  ом и  $U_H=12$ В. На рисунках 4.2.3 и 4.2.4 соответственно абсолютная и относительная погрешность между экспериментальными и модельными данными.

Таблица 4.1

Iк мА	Т о к б а з ы мА										
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
Н	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
а	2.3	0.85	2.10	3.43	4.75	5.90	7.10	8.15	9.31	10.4	11.4
п	2.5	0.88	2.15	3.47	4.73	6.00	7.20	8.20	9.40	10.5	11.6
р	3.0	0.90	2.19	3.55	4.90	6.10	7.40	8.48	9.60	10.7	11.8
я	3.5	0.91	2.24	3.61	5.00	6.30	7.50	8.59	9.80	10.8	12.0
ж	4.0	0.93	2.26	3.65	5.10	6.40	7.60	8.82	9.95	11.0	12.2
е	4.5	0.94	2.29	3.72	5.20	6.46	7.80	8.91	10.0	11.2	12.5
н	5.0	0.96	2.35	3.80	5.30	6.50	7.90	9.10	10.2	11.2	12.6
и	5.5	0.97	2.39	3.88	5.36	6.70	8.01	9.20	10.4	11.4	12.8
е	6.0	0.99	2.43	3.89	5.50	6.79	8.10	9.41	10.6	11.6	13.2
7.0	1.00	2.49	4.00	5.61	7.01	8.40	9.65	10.9	12.0	13.5	
U	8.0	1.05	2.58	4.16	5.82	7.20	8.60	10.0	11.2	12.4	14.2
е	9.0	1.08	2.71	4.30	6.00	7.40	9.03	10.3	11.6	12.7	14.4
k	10	1.10	2.80	4.52	6.35	7.80	9.40	10.8	12.0	13.2	15.0
11	1.14	2.91	4.72	6.61	8.20	9.80	11.3	12.6	14.0	15.6	
В	12	1.23	3.10	5.00	7.11	8.80	10.5	12.1	13.5	15.0	16.9

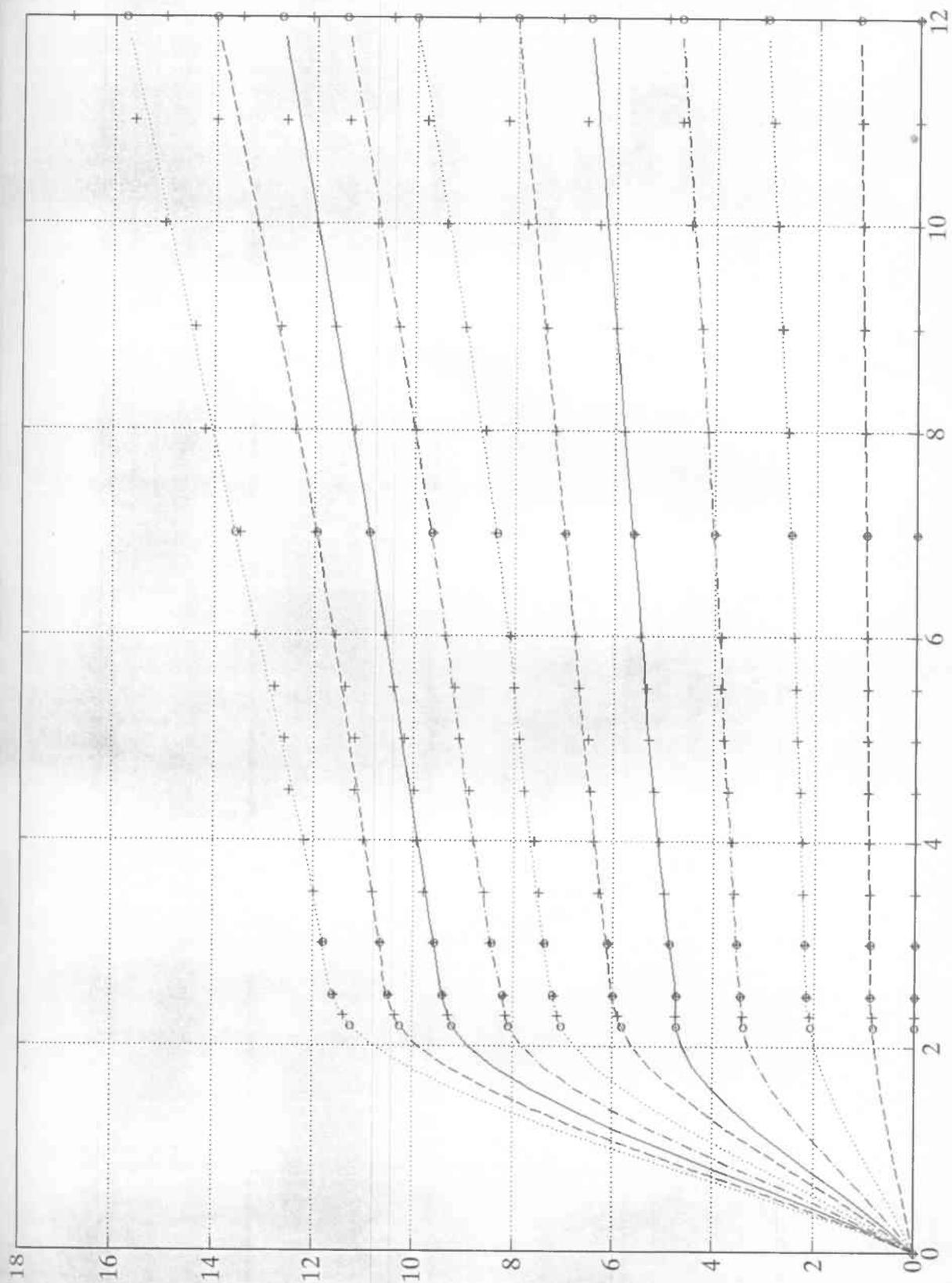


Рис. 4.2.1

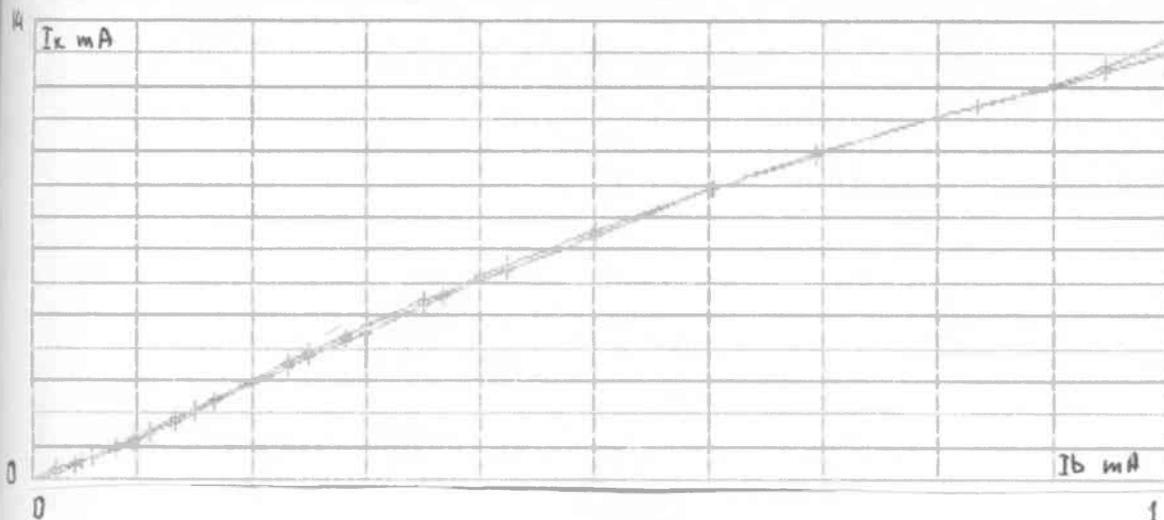


Рис. 4.2.2

Таблица 4.2

	Iк мА	Т о к б а з ы Iб мА				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
U	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2.2	0.831	2.067	3.397	4.740	5.828
	2.5	0.879	2.150	3.470	4.741	6.002
B	3	0.897	2.191	3.542	4.878	6.129
	7	1.011	2.499	4.021	5.633	6.989
	12	1.191	3.030	4.733	6.539	8.022
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
U	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2.2	7.021	8.087	9.222	10.27	11.24
	2.5	7.208	8.222	9.421	10.51	11.61
B	3	7.370	8.431	9.591	10.66	11.80
	7	8.367	9.668	10.90	11.96	13.59
	12	10.02	11.41	12.70	13.98	15.79

j	Iб (мА)	Iк <sub>м</sub> (мА)
0	0.00000e+00	1.22070e-02
1	1.00000e-01	1.18408e+00
2	2.00000e-01	2.89307e+00
3	3.00000e-01	4.47998e+00
4	4.00000e-01	6.09131e+00
5	5.00000e-01	7.40967e+00
6	6.00000e-01	8.82568e+00
7	7.00000e-01	9.99756e+00
8	8.00000e-01	1.10962e+01
9	9.00000e-01	1.20239e+01
10	1.00000e+00	1.34277e+01

Таблица 4.3

Таблица 4.4

I <sub>b</sub>	I <sub>k</sub>	I <sub>k<sub>н</sub></sub>	I <sub>k</sub> -I <sub>k<sub>н</sub></sub>
0	0	0.01221	-0.01221
0.025	0.18	0.2926	-0.1126
0.043	0.41	0.4878	-0.07781
0.051	0.53	0.5756	-0.04563
0.06	0.67	0.6767	-0.006658
0.081	0.96	0.9279	0.03205
0.097	1.23	1.141	0.08866
0.1	1.28	1.184	0.09592
0.111	1.45	1.349	0.1007
0.133	1.83	1.713	0.1173
0.15	2.13	2.013	0.1174
0.167	2.4	2.319	0.08145
0.2	3.01	2.893	0.1169
0.232	3.55	3.409	0.1409
0.25	3.89	3.693	0.1974
0.282	4.35	4.194	0.1555
0.3	4.68	4.48	0.2
0.35	5.48	5.302	0.1776
0.368	5.66	5.597	0.06349
0.4	6.21	6.091	0.1187
0.424	6.57	6.426	0.1441
0.5	7.59	7.41	0.1803
0.603	8.87	8.864	0.00569
0.605	8.94	8.89	0.05013
0.695	9.85	9.941	-0.09091
0.7	10.04	9.998	0.04244
0.8	11.05	11.1	-0.0462
0.834	11.45	11.41	0.0439
0.9	12	12.02	-0.0239
0.945	12.5	12.62	-0.1232
1	13.05	13.43	-0.3777

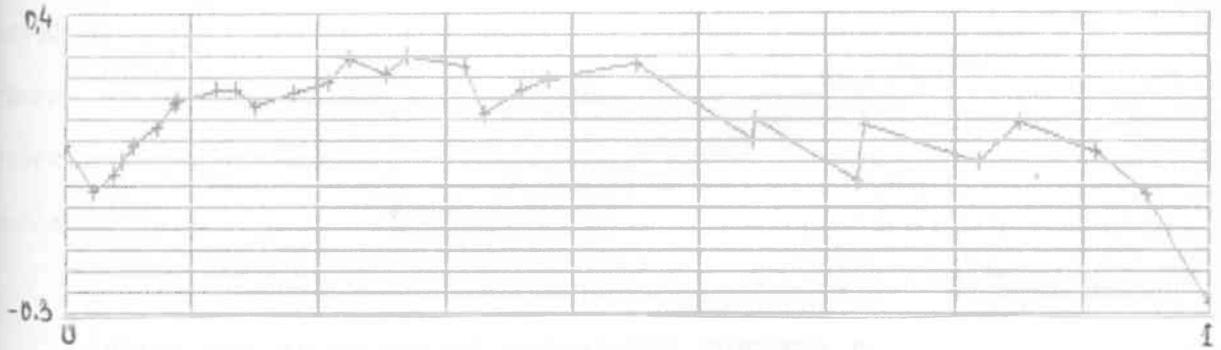


Рис. 4.2.3

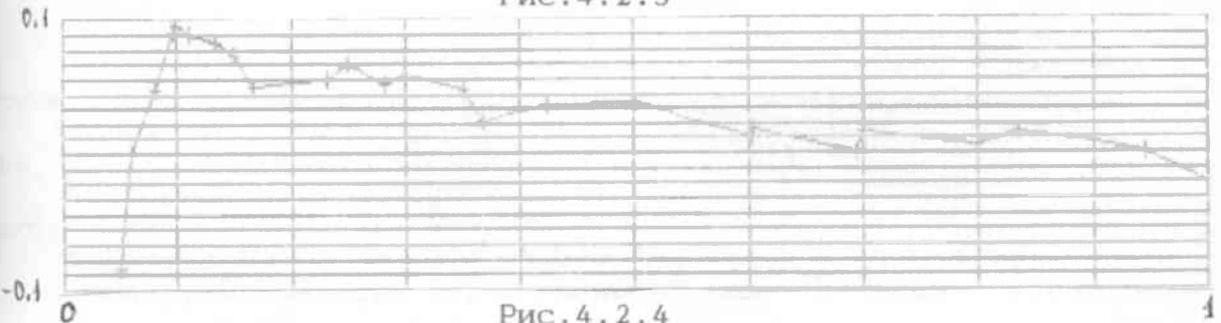


Рис. 4.2.4

Из приведенных данных следует, что модель хорошо соответствует реальному объекту. На графиках динамических характеристик и погрешностей видно уменьшение несоответствия модели объекту в области, где отсчеты статической характеристики измерены с меньшим интервалом ( $U_{эк}=0.5-5$  В). Отметим также, что измерения в эксперименте соответствуют точности примерно 5%, а число измерений сравнительно мало. Применение ПЭВМ с АЦП позволит строить модели со значительно большей точностью.

#### 4.3 Исследование алгоритмов идентификации траекторных измерений

Для сглаживания и экстраполяции траекторных измерений часто используют в качестве уравнения движения линейную модель вида  $y=at+b$ . Оценки параметров  $a$  и  $b$  строят по  $n$  точкам методом наименьших квадратов. При анализе метода рассматривают корреляционную матрицу ошибок оцениваемых параметров [51]. Для сравнения существующего и предложенного метода рассмотрим обработку траекторной информации линейным сплайном. Тогда оценки траектории с помощью сплайна, с учетом ограничений алгоритма изложенных в разделе 3, будут зависеть от двух факторов:

количества узлов сплайна  $R$  ;

количества отсчетов на интервале сплайна  $n$  .

В процессе экспериментов установлено, что точность оценки траектории для сплайнов практически не зависит от числа участков, начиная с некоторого малого  $R < 4$ , что обусловлено локальностью функций формы.

Исследуем зависимость ковариационной матрицы погрешностей /1.3.4/ от числа отсчетов на отдельном интервале сплайна.

В исследованиях сетки наблюдений и узлов сплайна строились по следующему правилу:  $t = \{ 0, 1, 2, \dots, n-1, \dots, (R-1)n-1 \}$ ,

$$t_u = \{ -n, 0, n, 2n, \dots, (R-1)n \} .$$

Вычисления производились с помощью программ, приведенных в приложении, а результаты представлены в таблице 4.5. Здесь для сравнения в первых колонках приведены результаты для линейной модели. Видно, что при  $R=2$  сплайн является единичным отрезком прямой и соответствующие оценки методов совпадают. С ростом  $R$  оценки сплайн-метода для внутренних точек траектории улучшаются. Это, вероятно, связано с корректирующим влиянием соседних участков.

Таблица 4.5

n	a t + b		R = 2	
	дисп.оц. b	дисп.оц. a	cob(1,1)	cob(2,2)
2	1.0000e+000	2.0000e+000	5.0000e+000	1.0000e+000
3	8.3333e-001	5.0000e-001	2.3333e+000	8.3333e-001
4	7.0000e-001	2.0000e-001	1.5000e+000	7.0000e-001
5	6.0000e-001	1.0000e-001	1.1000e+000	6.0000e-001
6	5.2381e-001	5.7143e-002	8.6667e-001	5.2381e-001
7	4.6429e-001	3.5714e-002	7.1429e-001	4.6429e-001
8	4.1667e-001	2.3810e-002	6.0714e-001	4.1667e-001
9	3.7778e-001	1.6667e-002	5.2778e-001	3.7778e-001
10	3.4545e-001	1.2121e-002	4.6667e-001	3.4545e-001
11	3.1818e-001	9.0909e-003	4.1818e-001	3.1818e-001
12	2.9487e-001	6.9930e-003	3.7879e-001	2.9487e-001
13	2.7473e-001	5.4945e-003	3.4615e-001	2.7473e-001
14	2.5714e-001	4.3956e-003	3.1868e-001	2.5714e-001
15	2.4167e-001	3.5714e-003	2.9524e-001	2.4167e-001
16	2.2794e-001	2.9412e-003	2.7500e-001	2.2794e-001
17	2.1569e-001	2.4510e-003	2.5735e-001	2.1569e-001
18	2.0468e-001	2.0640e-003	2.4183e-001	2.0468e-001
19	1.9474e-001	1.7544e-003	2.2807e-001	1.9474e-001
20	1.8571e-001	1.5038e-003	2.1579e-001	1.8571e-001
n	R = 3		R = 4	
	cob(3,3)	cob(2,2)	cob(4,4)	cob(3,3)
2	4.8333e+000	8.3333e-001	4.8286e+000	8.2857e-001
3	2.1930e+000	6.1404e-001	2.1865e+000	6.0386e-001
4	1.3864e+000	4.7727e-001	1.3802e+000	4.6514e-001
5	1.0059e+000	3.8824e-001	1.0004e+000	3.7582e-001
6	7.8676e-001	3.2648e-001	7.8189e-001	3.1445e-001

7	6.4502e-001	2.8139e-001	6.4070e-001	2.6997e-001
8	5.4610e-001	2.4709e-001	5.4223e-001	2.3634e-001
9	4.7324e-001	2.2018e-001	4.6975e-001	2.1008e-001
10	4.1741e-001	1.9851e-001	4.1423e-001	1.8902e-001
11	3.7329e-001	1.8070e-001	3.7037e-001	1.7177e-001
12	3.3755e-001	1.6580e-001	3.3487e-001	1.5739e-001
13	3.0803e-001	1.5317e-001	3.0554e-001	1.4521e-001
14	2.8324e-001	1.4231e-001	2.8092e-001	1.3478e-001
15	2.6213e-001	1.3289e-001	2.5995e-001	1.2574e-001
16	2.4393e-001	1.2463e-001	2.4189e-001	1.1783e-001
17	2.2809e-001	1.1734e-001	2.2616e-001	1.1086e-001
18	2.1418e-001	1.1085e-001	2.1236e-001	1.0466e-001
19	2.0186e-001	1.0504e-001	2.0013e-001	9.9118e-002
20	1.9088e-001	9.9813e-002	1.8924e-001	9.4132e-002

R = 9

n	cob(9,9)	cob(8,8)
2	4.8284e+000	8.2843e-001
3	2.1861e+000	6.0334e-001
4	1.3798e+000	4.6440e-001
5	1.0000e+000	3.7500e-001
6	7.8155e-001	3.1362e-001
7	6.4039e-001	2.6915e-001
8	5.4194e-001	2.3556e-001
9	4.6949e-001	2.0934e-001
10	4.1400e-001	1.8832e-001
11	3.7016e-001	1.7110e-001
12	3.3466e-001	1.5676e-001
13	3.0535e-001	1.4461e-001
14	2.8074e-001	1.3421e-001
15	2.5979e-001	1.2520e-001
16	2.4173e-001	1.1732e-001
17	2.2602e-001	1.1037e-001
18	2.1222e-001	1.0419e-001
19	2.0000e-001	9.8667e-002
20	1.8911e-001	9.3698e-002

Графики изменения нормированной дисперсии оценок для внутреннего R-1 узла при различных  $R = \{ 2, 3, 4, 9 \}$  показаны на рис.4.3.1.

При этом дисперсия оценки ломаной при  $R=2$  совпадает с оценкой по МНК линейной модели. На графиках хорошо видно слабую зависимость дисперсии оценок от количества участков ломаной при  $R>3$ .

Отношение дисперсии оценок траектории линейной модели и ломаной-сплайна для внутренних узлов показано на рис.4.3.2. Как видно из рисунка, выигрыш по степени уменьшения исходной дисперсии для сплайн-метода в данном случае приближается к двум.

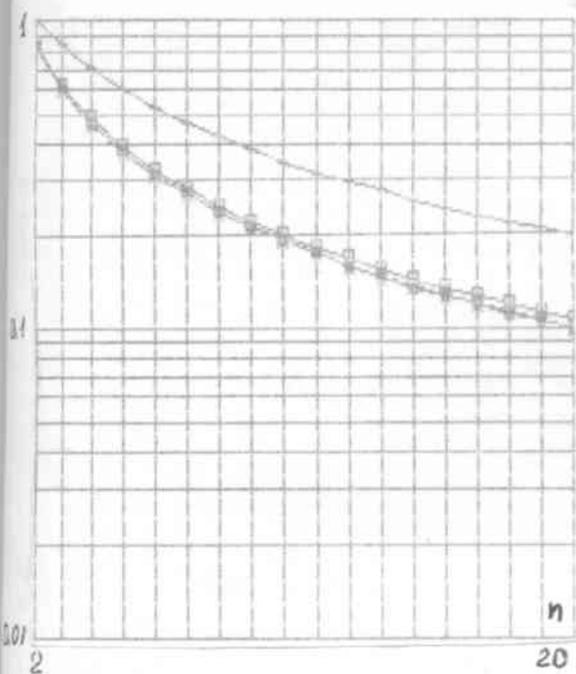


Рис. 4.3.1

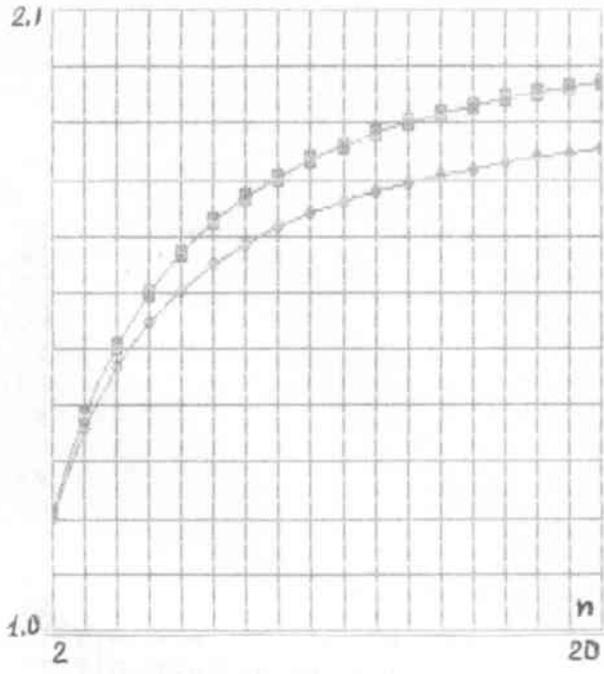


Рис. 4.3.2

Аналогичные исследования выполнены и для кубического эрмитова сплайна. Для сравнения использовался кубический полином вида  $y=at^3/3+bt^2/2+ct+d$ . Для расчетов использовались программы, приведенные в приложении. Результаты приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6

n	$at^3/3+bt^2/2+ct+d$				R = 3		
	d	c	b	a	R	R-1	R-2
2	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	5.0000	1.0000	459.00
4	1.0000	14.722	4.6000e+1	5.0000e+0	2.4646	0.9843	331.85
5	0.9857	6.3790	1.0286e+1	6.2500e-1	1.6262	0.9550	282.58
6	0.9603	3.6232	3.5794e+0	1.3889e-1	1.2105	0.9185	252.32
7	0.9285	2.3161	1.5476e+0	4.1667e-2	0.9630	0.8792	230.04
8	0.8939	1.5886	7.6623e-1	1.5152e-2	0.7990	0.8397	212.20
9	0.8585	1.1437	4.1703e-1	6.3131e-3	0.6825	0.8013	197.30
10	0.8237	0.8535	2.4359e-1	2.9138e-3	0.5955	0.7648	184.52
11	0.7902	0.6552	1.5035e-1	1.4569e-3	0.5281	0.7305	173.38
12	0.7582	0.5146	9.7014e-2	7.7700e-4	0.4743	0.6984	163.55
13	0.7280	0.4119	6.4935e-2	4.3706e-4	0.4305	0.6685	154.79
14	0.6995	0.3351	4.4823e-2	2.5710e-4	0.3941	0.6407	146.94
15	0.6728	0.2763	3.1764e-2	1.5711e-4	0.3633	0.6148	139.85
16	0.6478	0.2306	2.3027e-2	9.9230e-5	0.3370	0.5908	133.41
17	0.6243	0.1945	1.7028e-2	6.4499e-5	0.3142	0.5684	127.54
18	0.6023	0.1656	1.2814e-2	4.3000e-5	0.2943	0.5475	122.17

19	0.5816	0.1422	9.7939e-3	2.9318e-5	0.2768	0.5280	117.23	
20	0.5622	0.1230	7.5905e-3	2.0395e-5	0.2612	0.5097	112.68	
	R = 4				R = 5			
n	R	R-1	R-2	R-3	R	R-1	R-2	R-3
2	7.2857	1.0000	1.0000	448.42	6.4945	0.7580	0.8254	0.9978
3	2.6697	0.5855	0.9966	298.85	2.5309	0.4790	0.5309	0.9958
4	1.5927	0.4251	0.9767	257.89	1.5279	0.3515	0.3961	0.9763
5	1.1267	0.3357	0.9440	233.25	1.0861	0.2780	0.3170	0.9437
6	0.8692	0.2780	0.9049	214.34	0.8401	0.2300	0.2647	0.9047
7	0.7066	0.2376	0.8637	198.58	0.6841	0.1962	0.2273	0.8635
8	0.5949	0.2075	0.8229	185.03	0.5765	0.1710	0.1993	0.8227
9	0.5134	0.1842	0.7837	173.18	0.4980	0.1516	0.1775	0.7835
10	0.4515	0.1657	0.7467	162.71	0.4382	0.1362	0.1600	0.7465
11	0.4028	0.1506	0.7121	153.40	0.3911	0.1236	0.1457	0.7119
12	0.3636	0.1380	0.6799	145.07	0.3532	0.1131	0.1337	0.6797
13	0.3313	0.1274	0.6500	137.57	0.3219	0.1043	0.1236	0.6498
14	0.3042	0.1183	0.6224	130.78	0.2957	0.0968	0.1149	0.6221
15	0.2813	0.1104	0.5967	124.62	0.2735	0.0902	0.1073	0.5964
16	0.2615	0.1035	0.5728	119.00	0.2543	0.0845	0.1007	0.5726
17	0.2443	0.0975	0.5507	113.86	0.2377	0.0795	0.0949	0.5505
18	0.2293	0.0920	0.5301	109.13	0.2231	0.0750	0.0897	0.5299
19	0.2160	0.0872	0.5109	104.78	0.2101	0.0711	0.0850	0.5106
20	0.2041	0.0829	0.4929	100.75	0.1986	0.0675	0.0808	0.4927
	R = 9							
n	R	R-1	R-2	R-3				
2	6.4197	0.7423	0.6675	0.6484				
3	2.5157	0.4726	0.4438	0.4362				
4	1.5207	0.3474	0.3318	0.3275				
5	1.0815	0.2749	0.2650	0.2620				
6	0.8368	0.2275	0.2206	0.2184				
7	0.6815	0.1941	0.1889	0.1872				
8	0.5744	0.1692	0.1652	0.1638				
9	0.4963	0.1500	0.1468	0.1456				
10	0.4367	0.1348	0.1320	0.1310				
11	0.3898	0.1223	0.1200	0.1191				
12	0.3520	0.1120	0.1100	0.1092				
13	0.3209	0.1032	0.1015	0.1008				
14	0.2948	0.0958	0.0942	0.0936				
15	0.2726	0.0893	0.0879	0.0873				
16	0.2535	0.0837	0.0824	0.0819				
17	0.2369	0.0787	0.0776	0.0771				
18	0.2224	0.0743	0.0733	0.0728				
19	0.2095	0.0703	0.0694	0.0689				
20	0.1980	0.0668	0.0659	0.0655				

На рисунках 4.3.3 и 4.3.4 показано изменение нормированной дисперсии оценок значений сплайна в R и R-1 узлах при R={3,4,5,9}. Значение в R-м узле является экстраполяцией на один отсчет.

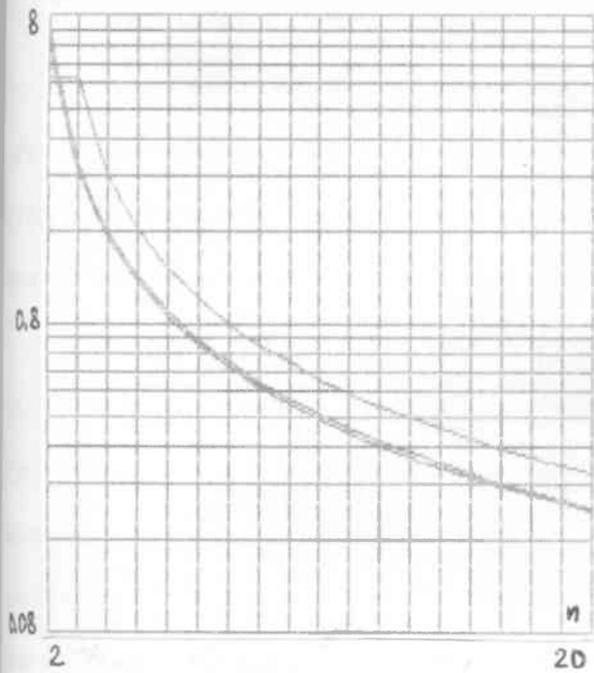


Рис. 4.3.3

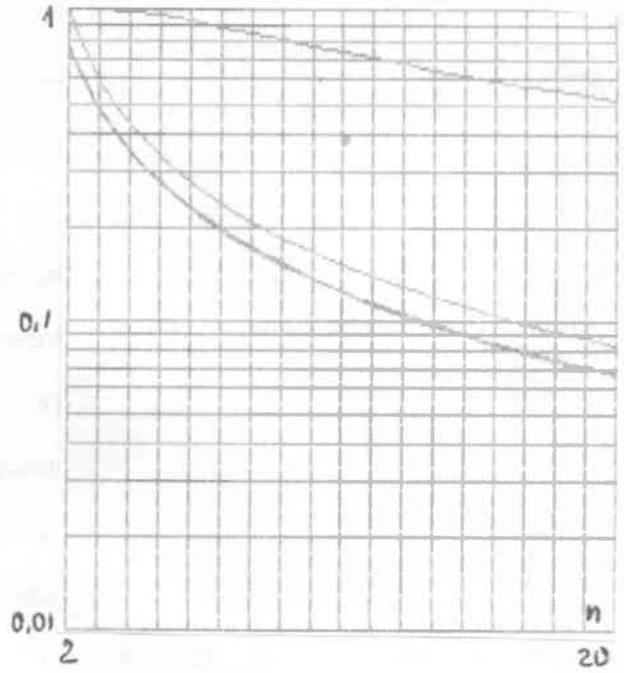


Рис. 4.3.4

Для сравниваемой модели дисперсия экстраполяции на один шаг ( $t=1$ ) будет равна сумме дисперсий коэффициентов. На рис. 4.3.5 показана зависимость отношения дисперсии экстраполяции кубической модели и кубического эрмитова сплайна при  $R=9$ . Из рисунка видно, что используя сплайн, при малых  $n$  имеем значительный выигрыш, который с ростом  $n$  убывает к трем.

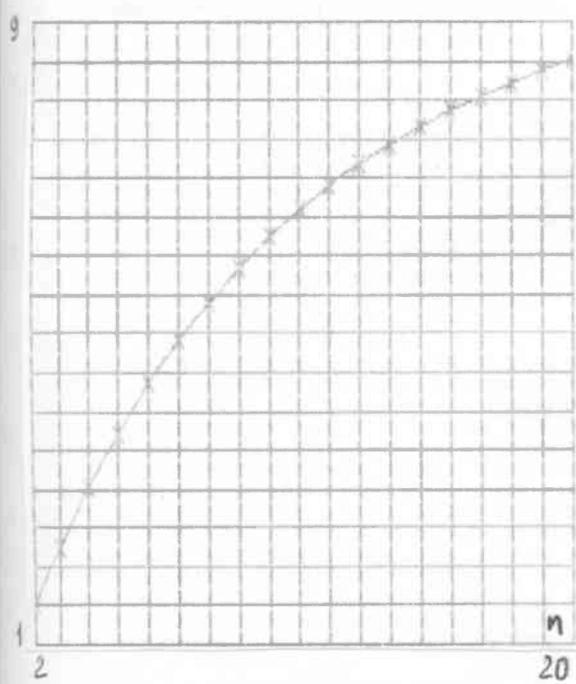


Рис. 4.3.5

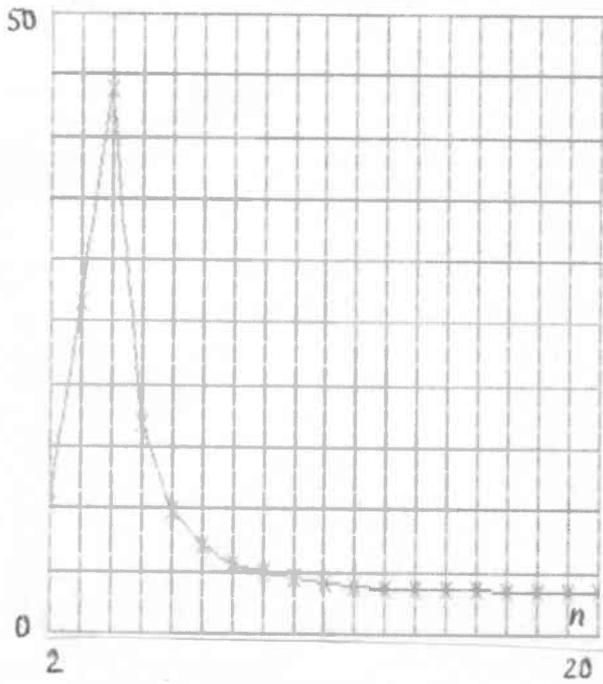


Рис. 4.3.6

На рис.4.3.6 показано отношение дисперсии оценки координаты для сравниваемой модели и дисперсии оценки значения внутреннего узла сплайна / R-2 / при R=9 . В этом случае выигрыш при использовании сплайна с ростом n стремится к девяти.

Проверим соответствие полученных результатов на примере обработки некоторой модельной траектории. Для построения траектории используем методику, приведеную в [46]. Полагаем, что воздушное судно / ВС / движется равномерно и прямолинейно со скоростью 150 м/с . Отсчеты с измерителя координат / РЛС / поступают каждую секунду. Через 100 секунд ВС совершает вираж глубиной 180 градусов с постоянной перегрузкой равной 1.2g . Пусть РЛС имеет координаты  $x=1000$ ,  $y=3000$ , а ВС начинает движение из точки с координатами  $x=0$ ,  $y=0$ . Расчет производился по программе 7 / приложение / . График траектории в полярных координатах представлен на рис.4.3.7 , а на рис.4.3.8 показан график изменения расстояния от ВС до РЛС.

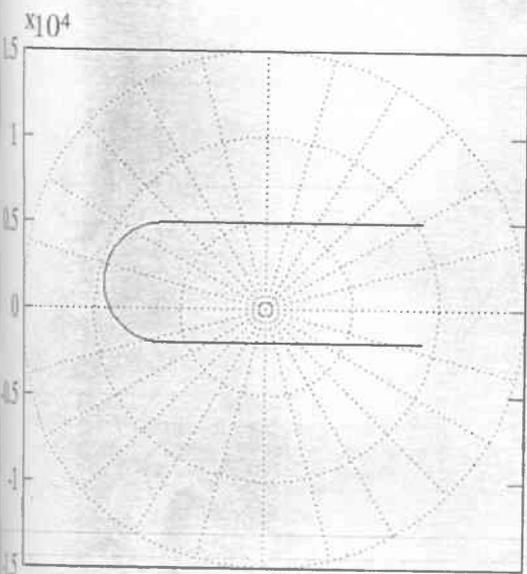


Рис.4.3.7

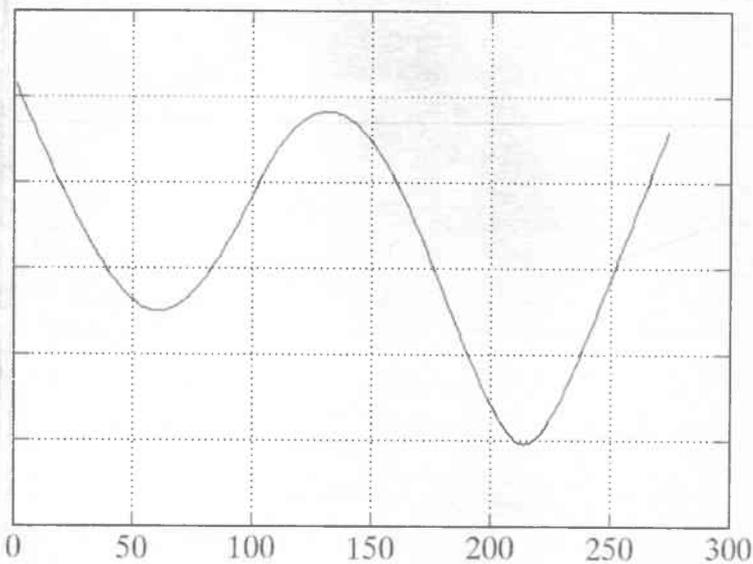


Рис.4.3.8

Полученные отсчеты дальности модельной траектории будем обрабатывать кубическим эрмитовым сплайном в окне по схеме: восемь узлов - восемь отсчетов на участке, крайний левый участок наблюдения не содержит. Таким образом, имеем узлы  $t_u = \{-8, 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$  и точки наблюдений  $t = \{0, 1, 2, \dots, 47\}$ . При вычислениях используется модифицированная сплайновая модель / алгоритм 3.4 / и ожидаемое уменьшение дисперсии будет несколько отличаться от приведенного в таблице. Диагональные элементы матрицы погрешностей имеют следующие значения  $\{0.15817, 0.16264, 0.16351, 0.16360, 0.16374, 0.16518, 0.16924, 0.57445\}$ . Обработаем отсчеты при условии отсутствия погрешностей. В этом случае будем иметь только динамическую погрешность приближения сплайна к обрабатываемой зависимости. На рис.4.3.9 показана функция удаления ВС от РЛС и полученное приближение для внутренних точек. На рис.4.3.10 показана погрешность приближения, на рис.4.3.11 то же, но детальнее, без переходного процесса, который вносит значительную погрешность в начале работы алгоритма.

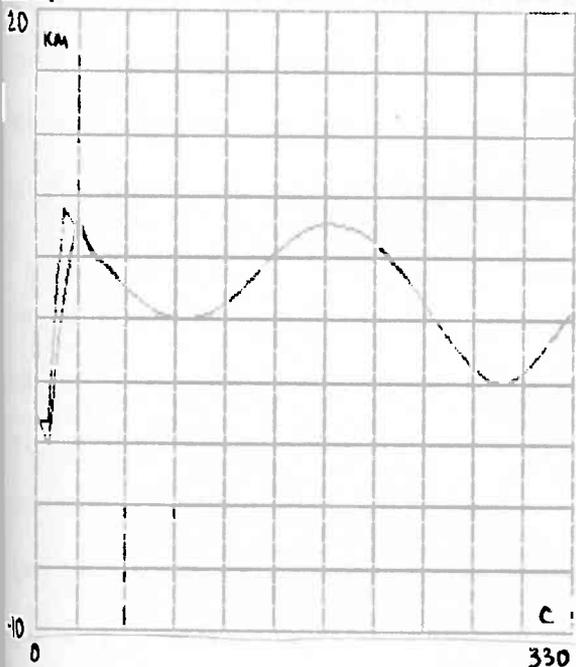


Рис. 4.3.9

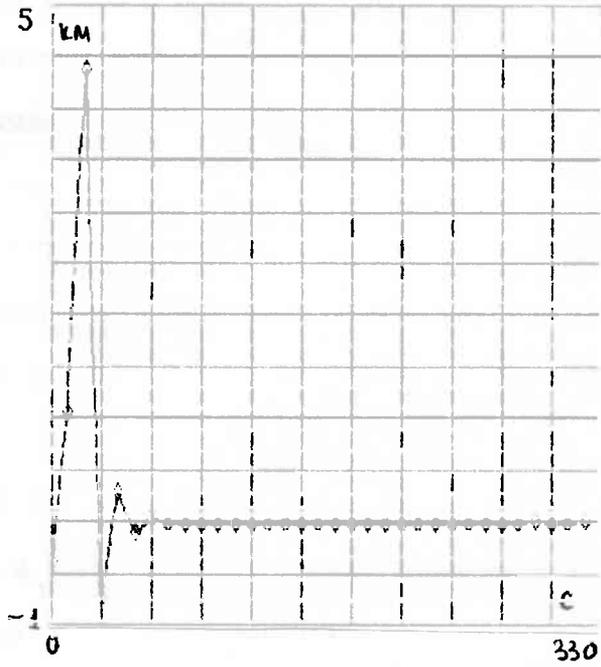


Рис. 4.3.10

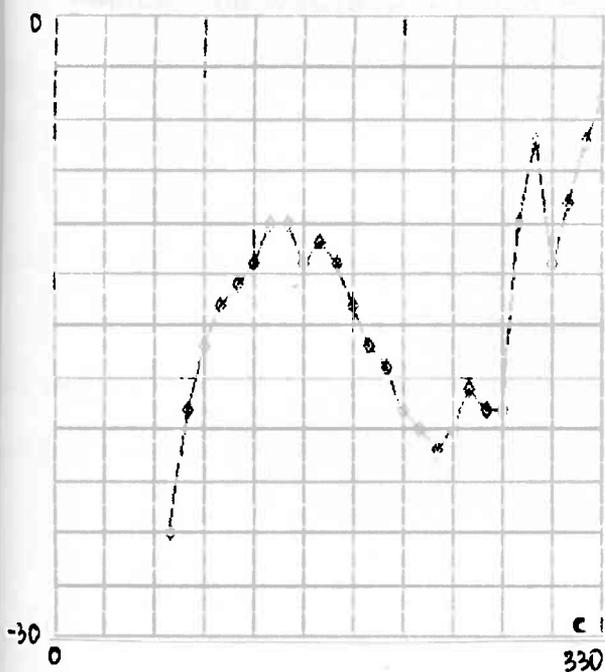


Рис.4.3.11

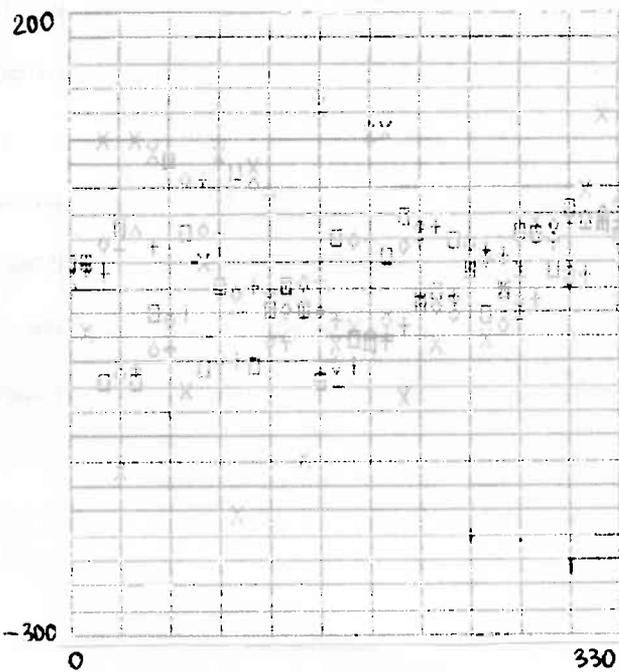


Рис.4.3.12

Добавим к отсчетам модели траектории погрешность, распределенную по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением 100 м. В качестве генератора случайных чисел использовалась функция RAND среды PCMATLAB со стартовым числом 1992. После сглаживания сплайном, аналогично предыдущему, из результатов вычтем данные, полученные при отсутствии погрешностей, и таким образом, имеем погрешности оценки, обусловленные погрешностями исходных данных без динамической погрешности. Результаты показаны на рис.4.3.12.

В соответствии с [15] получим статистические оценки дисперсии погрешностей оценивания модельной траектории. Для построения доверительных интервалов примем уровень доверительной вероятности 0.9.

- Для R - узла  $D = 6996.6 \pm 2830.0$  , ожидаемая 5744.5 ;
- Для R-1 - узла  $D = 2203.3 \pm 891.2$  , ожидаемая 1692.4 ;
- Для R-2 - узла  $D = 1810.2 \pm 732.2$  , ожидаемая 1651.8 ;
- Для R-3 - узла  $D = 1609.8 \pm 651.1$  , ожидаемая 1637.4 .

Полученные результаты хорошо согласуются с ожидаемыми, что служит подтверждением правильности работы и эффективности метода и алгоритма.

На рис. 4.3.13, 4.3.14 показаны результаты обработки реальных траекторных данных: курсового угла и барометрической высоты, записанных МСРП сплайном по схеме: восемь узлов - 16 отсчетов на участке. Явно видно хорошее приближение и устойчивость работы алгоритма.

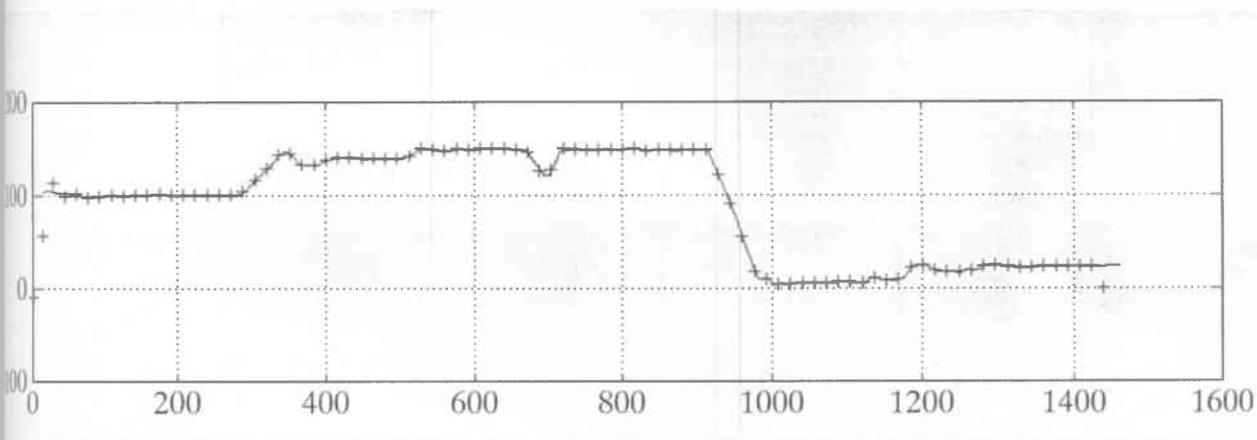


Рис. 4.3.13

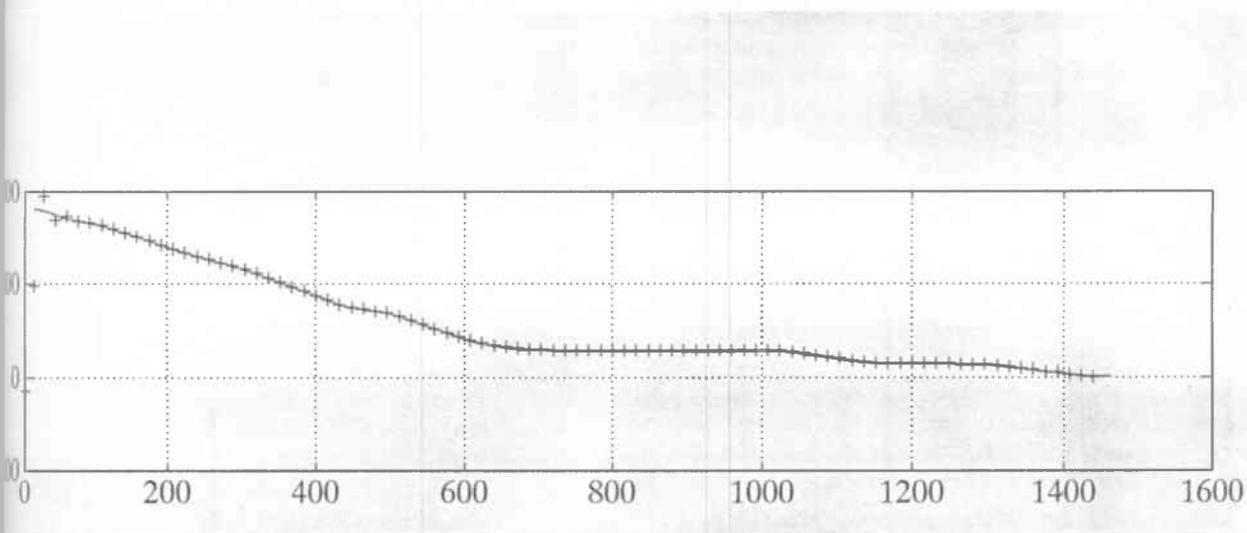


Рис. 4.3.14

#### 4.4 Исследование и экспериментальная проверка алгоритма сплайн-идентификации линейных динамических систем

Исследуем возможности алгоритма решения интегрального уравнения Винера-Хопфа с помощью сплайнов в сравнении с обычным численным решением системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором ведущего элемента.

Положим, что автокорреляционная функция сигнала воздействующего на вход системы имеет вид:

$$R_{xx}(t) = A \exp(-b t), \quad A > 0, \quad b > 0, \quad t \geq 0, \quad /4.4.1/$$

где  $A$  и  $b$  некоторые коэффициенты.

Если исследуемая система имеет импульсную характеристику вида:

$$W(t) = K/T \exp(-t/T), \quad t \geq 0, \quad /4.4.2/$$

где  $K$  и  $T$  некоторые параметры объекта.

Для этих условий взаимнокорреляционная функция входного и выходного сигналов имеет вид [8] :

$$R_{xy}(t) = \frac{2 K A T b}{b^2 T^2 - 1} \exp(-t/T) - \frac{K A}{b T - 1} \exp(-bt) + q(t),$$

где  $q(t)$  случайный процесс с некоррелированными значениями и нормальным распределением с нулевым средним, учитывающий погрешности возникающие при определении  $R_{xy}(t)$ .

Зададимся конкретными значениями параметров  $K=1$ ,  $T=0.5$ ,  $A=1$ ,  $b=0.5$ . При численных расчетах будем иметь  $N$  отсчетов корреляционных функций. Погрешности определения корреляционных функций будем характеризовать отношением шум/сигнал.

Положим отношение шум/сигнал равным 0.05 и исследуем зависимость среднеквадратичной ошибки определения импульсной характеристики исследуемой системы от  $N$ . Результаты представлены на рис.4.4.1

для сплайн-метода, на рис.4.4.2 для классического метода. Как следует из рисунков, неустойчивость решения методом Гаусса с ростом  $N$  значительно увеличивается, что связано с ростом порядка решаемой плохо обусловленной системы уравнений и отсутствием регуляризации. Напротив, использование МНК и сплайнов приводит к регуляризации решения и решению системы нормальных уравнений фиксированного порядка, равного количеству узлов сплайна.

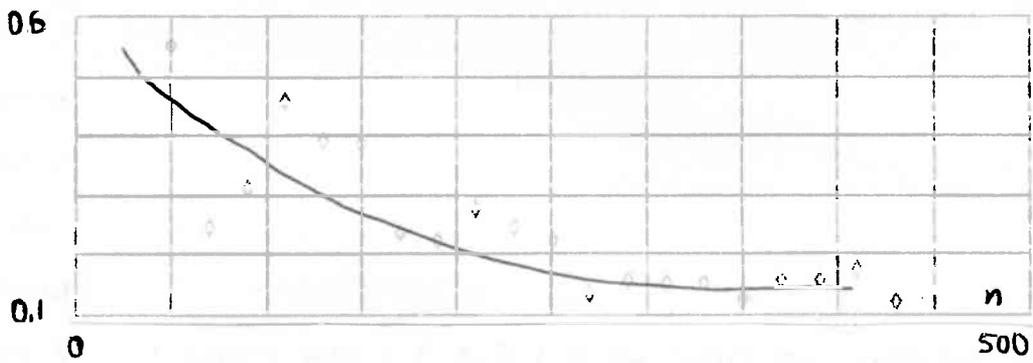


Рис.4.4.1

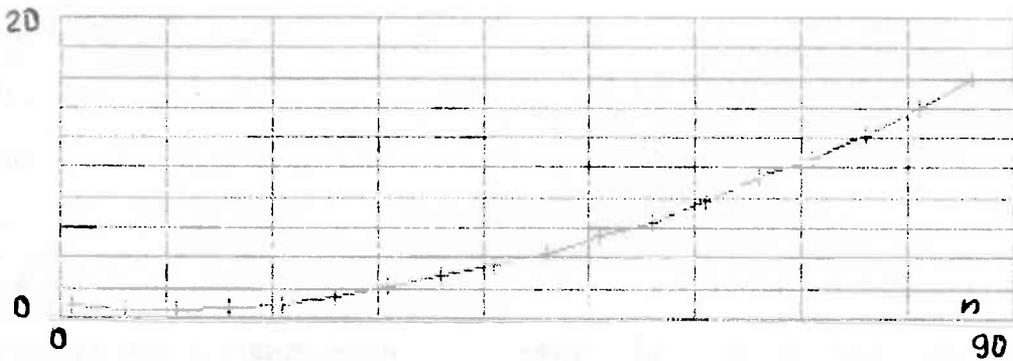


Рис.4.4.2

На рис.4.4.3 и 4.4.4 показана зависимость среднеквадратичной ошибки от соотношения шум/сигнал при различных  $N$ . Для обоих методов с ростом входной погрешности качество результата ухудшается и носит примерно одинаковый характер, но при этом значительно отличаются порядки погрешностей.

Проведем численный эксперимент, соответствующий идентификации реального физического объекта - ФНЧ. В соответствии с рис. 4.4.5 некоррелированную последовательность случайных отсчетов  $\{e_1, \dots, e_N\}$ , имеющих нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, подадим на вход нормирующего ФНЧ, имеющего импульсную характеристику вида / 4.4.2 / и параметрами  $K=1, T=0.1$ . На выходе фильтра имеем случайный процесс с известной корреляционной функцией вида / 4.4.1 /, представленной отсчетами  $X=\{x_1, \dots, x_N\}$ . Эта последовательность поступает на вход исследуемой системы с импульсной характеристикой вида / 4.4.2 / и параметрами  $K=1, T=1$ . На выходе исследуемой системы имеем случайный процесс, представленный отсчетами  $Y=\{y_1, \dots, y_N\}$ . Взаимокорреляционная функция  $X$  и  $Y$  имеет вид / 4.4.3 / и на практике неизвестна. Она определяется численно. Иногда численно также определяется и автокорреляционная функция сигнала  $X$ . На рис. 4.4.6 и 4.4.7 показаны нормированные корреляционная и автокорреляционная функции, определенные численно и точные. В результате расчетов получена нормированная импульсная характеристика исследуемой системы, которая вместе с заданным точным решением представлена на рис. 4.4.8. Видим, что полученный результат / график 1 / хорошо согласуется с ожидаемым / график 2 / и является непрерывной гладкой функцией. Отметим, что решение можно улучшать, изменяя количество и расположение узлов сплайна.

Идентификация данной системы путем решения уравнения Винера-Хопфа в частотной области, без применения специальных методов регуляризации дает совершенно неприемлемые результаты, что также показано на рис. 4.4.8 / график 3 /.

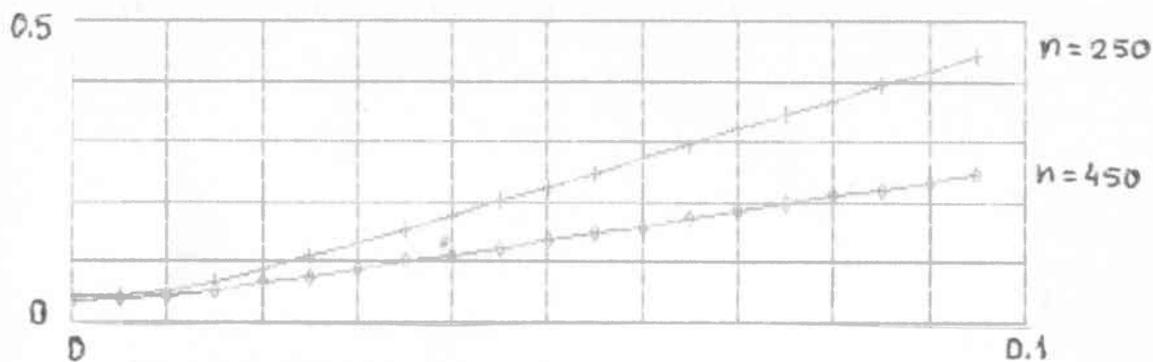


Рис. 4.4.3

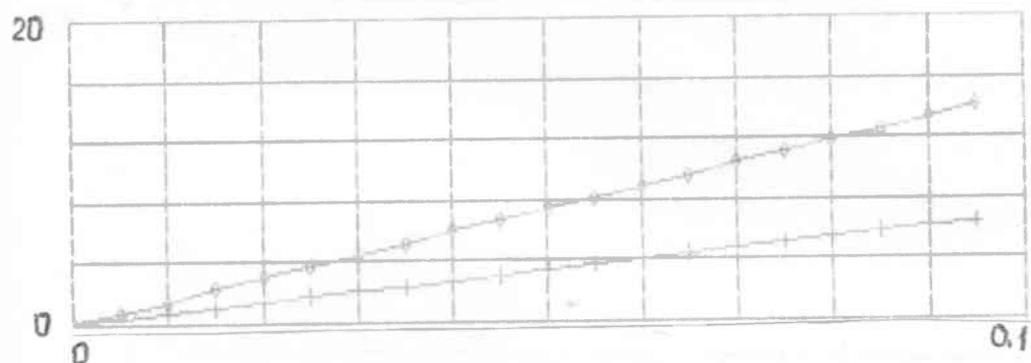
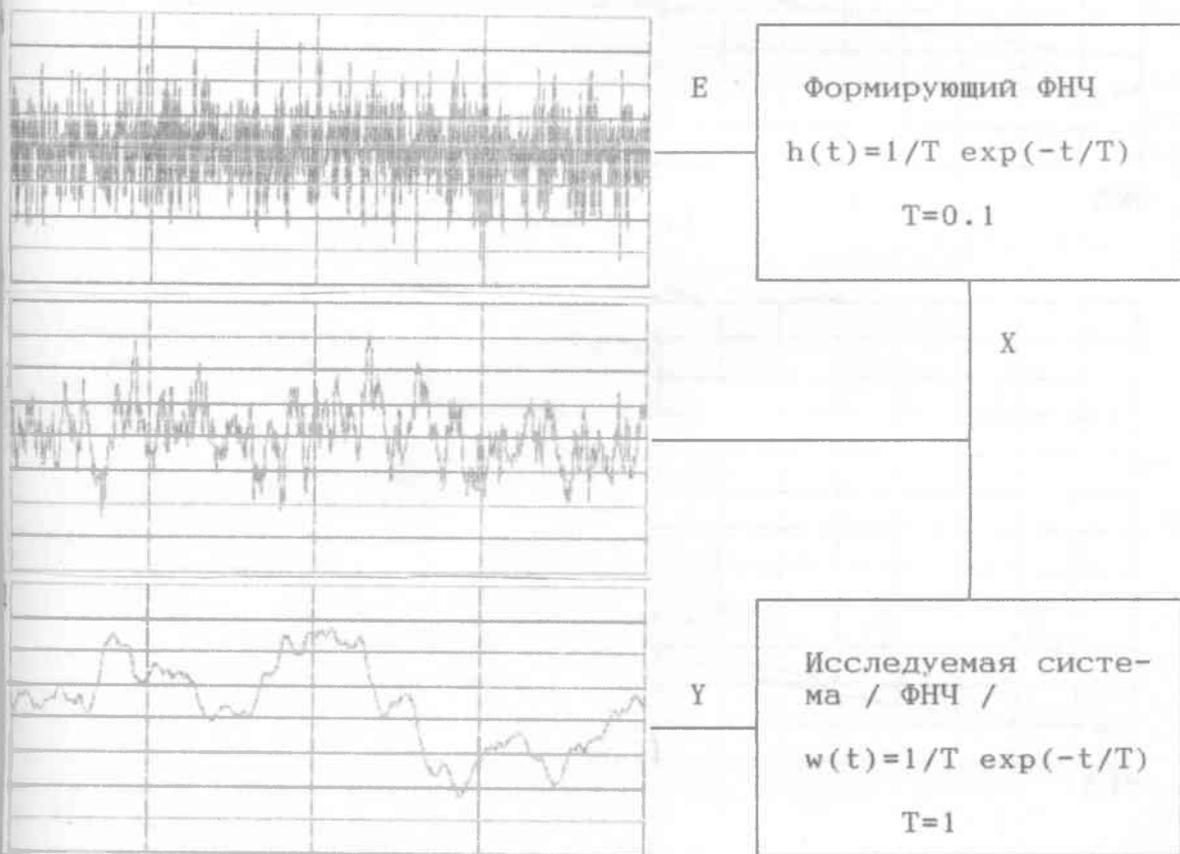


Рис. 4.4.4



10.23

Рис. 4.4.5

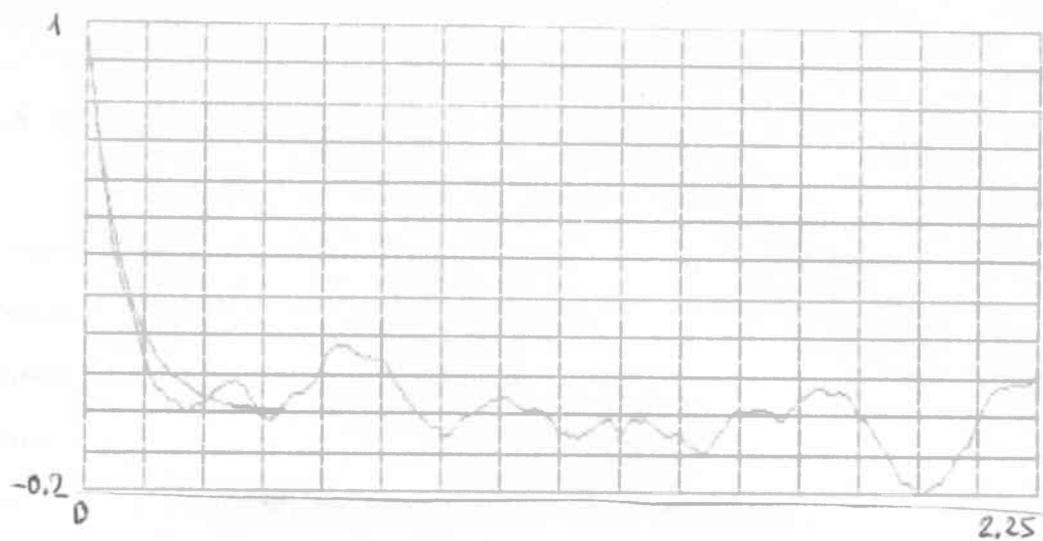


Рис. 4.4.6

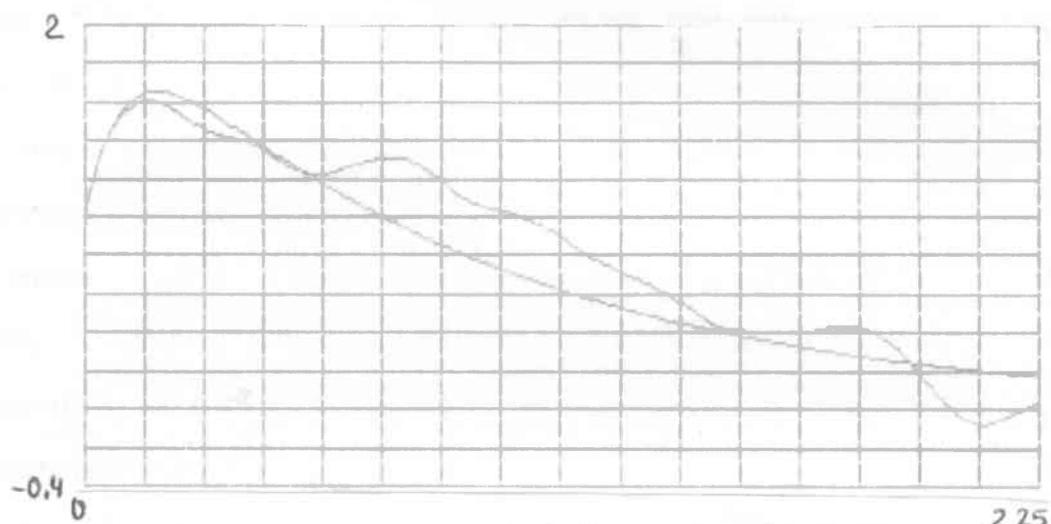


Рис. 4.4.7

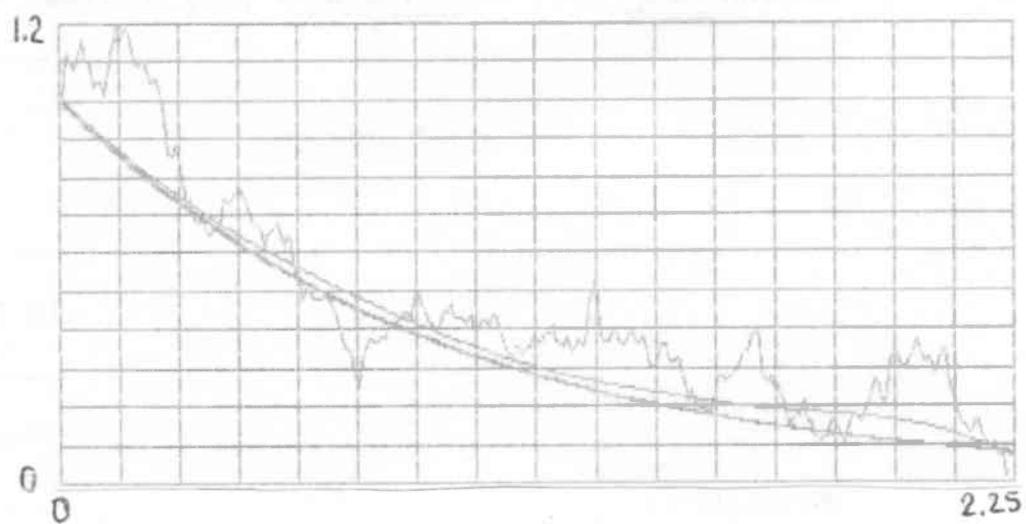


Рис. 4.4.8

#### 4.5 Специализированные процессоры обработки данных

Простейшей задачей, решаемой при обработке данных, является интерполяция. Для используемых в работе сплайнов это сводится к вычислению по элементарной формуле / 2.2.11 /, содержащей 4 умножения и 4 сложения при известных функциях формы. Если положить, что участки сплайна одинаковы и интерполируемые точки располагаются на участках одинаково, то функции формы для всех участков будут одинаковыми и их можно предварительно вычислив хранить в некотором блоке памяти небольшого объема. Всего необходимо  $4n$  ячеек памяти, где  $n$  - число интерполируемых точек на участке сплайна. Учитывая структуру вычислений функций формы, можно хранить только  $3n$  коэффициентов, из которых путем сложений можно получить необходимые. Описанный принцип и реализован в устройстве сплайн-интерполятор [104], структурная схема которого представлена на рис.4.5.1.



Рис.4.5.1

Q 239

Устройство состоит из запоминающего устройства коэффициентов функции формы ; вычислителя функций формы  ${}^1X_i, \dots, {}^4X_i$  ; блока памяти, куда заносятся значения интерполируемой функции в узлах  $t_j$  ; блока выборки, управляющего выборкой значений  $a_j$  и коэффициентов функций формы ; блока умножителей ; блока сумматоров и блока управления.

Работает интерполятор следующим образом. В блок памяти записываются значения  $a_j$  интерполируемой функции. По командам блока выборки из блока памяти и запоминающего устройства коэффициентов функции формы выбираются соответствующие значения. На выходе вычислителя функций формы имеем значения  ${}^1X_i, \dots, {}^4X_i$ , которые в блоке умножителей перемножаются со значениями  $a_{j-2}, \dots, a_{j+1}$ . Сформированные произведения складываются в блоке сумматоров и на выходе устройства имеем искомое значение.

Значительно сложнее для аппаратурной реализации обработка информации с помощью сплайнов по методу наименьших квадратов, где вычисления производятся в соответствии с /2.4.2/. Решение возможно, если использовать регулярные сетки узлов сплайна и данных, а обработку производить в окне по  $n$  - фиксированным отсчетам. Пример общей схемы вычислений при  $n=5, R=3, t_u=\{-5,0,5\}, t=\{0,1,2,3,4\}$  приведен на рис.4.5.2. Эту схему легко преобразовать к классической структуре нерекурсивного цифрового фильтра рис.4.5.3. В данном примере матрицы планирования и обратная соответственно равны:

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.0640 & 0.9280 & 0.1360 \\ -0.0720 & 0.7440 & 0.3280 \\ -0.0480 & 0.4960 & 0.5520 \\ -0.0160 & 0.2320 & 0.7840 \end{vmatrix}, \quad (X^* X)^{-1} = \begin{vmatrix} 282.5826 & 11.5255 & 10.1832 \\ 11.5255 & 0.9550 & 0.0322 \\ 10.1832 & 0.0322 & 1.6262 \end{vmatrix}$$

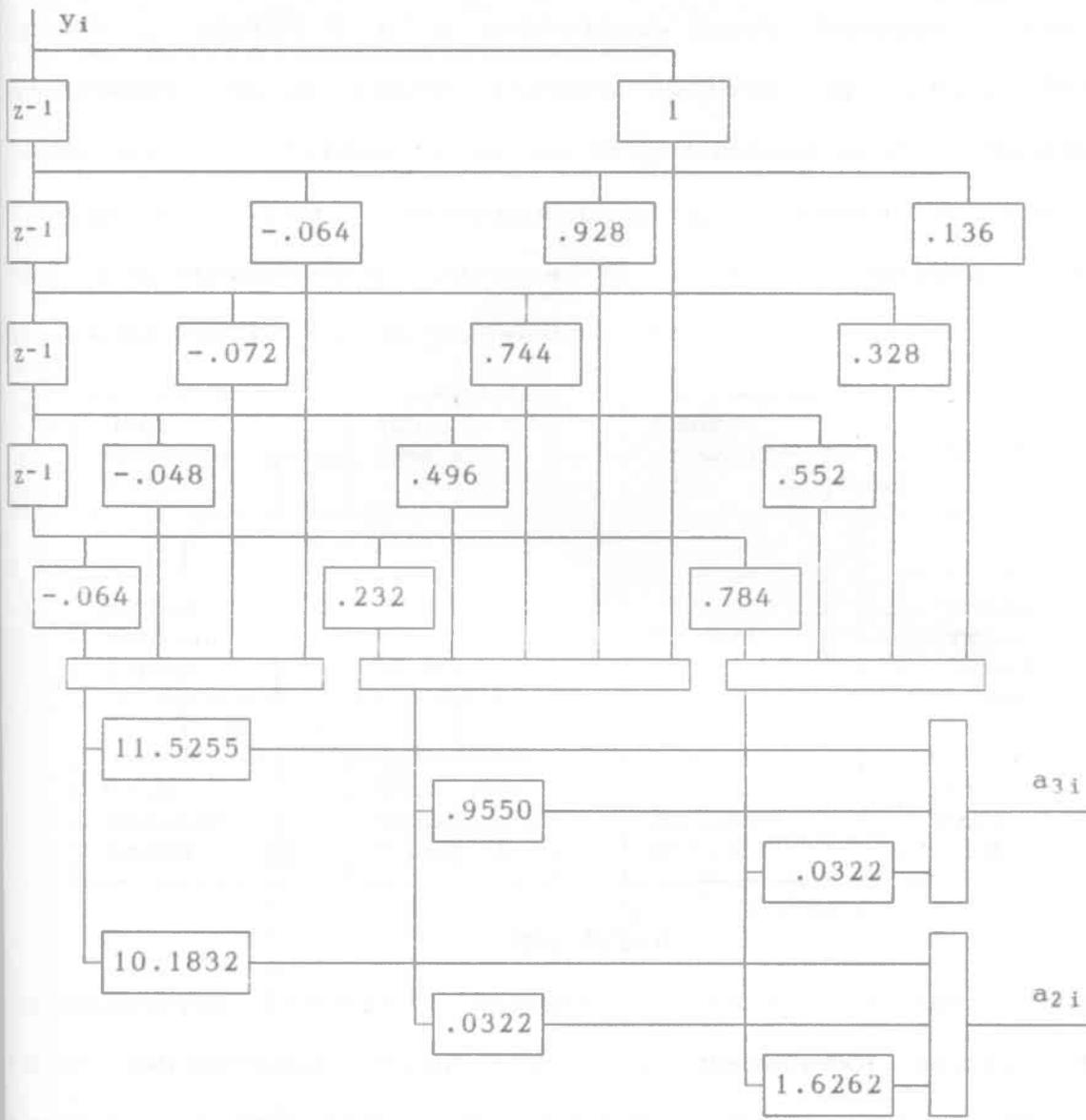


Рис. 4.5.2

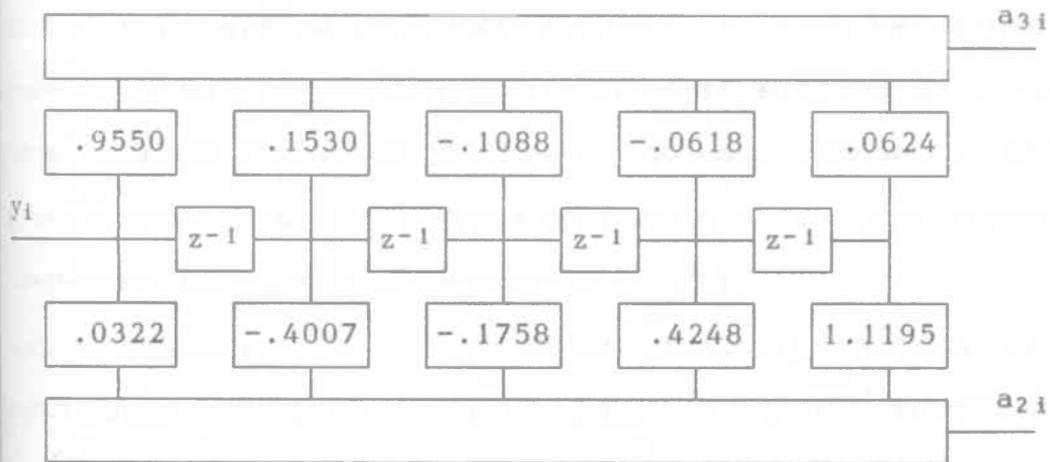


Рис. 4.5.3

Однако с ростом  $R$  и  $n$  реализация таких фильтров становится трудоемкой. Имеет смысл строить фильтры на основе оконного алгоритма 3.4. Особенностью такой фильтрации будет прореживание сигнала в  $n$  раз. Восстановление до прежней частоты можно выполнить сплайн-интерполятором. На рис.4.5.4 показана структурная схема такого сплайн-аппроксиматора.



Рис.4.5.4

Аппроксиматор работает следующим образом. Входные отсчеты в блоке умножителей перемножаются со значениями функции формы, которые сформированы на выходе вычислителя. Полученные произведения  $y_i^1 X_i, \dots, y_i^4 X_i$   $n$  - отсчетов накапливаются в блоке накопителей слагаемых вектора  $V$ . Блок регистров задержки формирует на выходе слагаемые элемента вектора  $V$ , которые через блок ключей / который учитывает краевые условия / поступают на блок сумматоров. Полученные на выходе блока сумматоров значения элементов вектора  $V$  записываются в ЗУ  $V$ .

После обработки  $n$  - отсчетов каждого участка производится вычисление искомых значений сплайна в узловых точках в матричном умножителе. Значения элементов вектора  $V$  и матрицы  $C^{-1}$ , в соответствии с кодами формируемыми блоком выборки, перемножаются

в множителе и накапливаются в накопителе А. Сформированные значения вектора А из накопителя поступают по назначению. Описанное устройство работает на регулярной сетке узлов сплайна. Однако при решении задач экстраполяции необходимо иметь последний участок сплайна отличным от остальных. Для этого разработан сплайн-экстраполятор, структурная схема которого представлена на рис.4.5.5.



Рис.4.5.5

Устройство содержит два канала: аппроксимации предыстории и экстраполяции и работает следующим образом. Отсчеты  $y_i$  экстраполируемой функции в блоках формирования слагаемых элементов матрицы В умножаются на  $1X_i, \dots, 4X_i$ , накапливаются и задерживаются / аналогично аппроксиматору /. Полученные слагаемые в обоих каналах складываются в блоках сумматоров и записываются в соответствующие ЗУ. В ЗУ В хранятся и обновляются значения  $b_1, \dots, b_{R-2}$ , а в ЗУ  $b_{экстр}$  значения  $b_{R-1}, b_R$ . Для экстраполяции по коду j блок выборки В выбирает из ЗУ требуемые значения и передает потребителю / ЭВМ или матричный вычислитель /, который вычисляет искомое значение согласно выражению

$$a_R = \sum_{i=1}^R C^{-1}(R,i) b(i) .$$

07.2015

#### 4.6 Выводы

1. Сплайн-идентификация нелинейного статического устройства позволяет строить математическую модель, удачно схватывающую физические зависимости, даже при малых объемах и невысокой точности измерений.
2. В экспериментальных исследованиях показаны преимущества обработки траекторной информации с использованием сплайнов. Разработанные методы способны обеспечить выигрыш за счет уменьшения исходной дисперсии по сравнению с соответствующими степенными полиномами от двух до девяти раз.
3. На примере фильтрации данных модельной и реальной траекторий показано, что сплайны хорошо описывают зависимости сложного вида на значительных интервалах.
4. Использование сплайн-идентификации линейных динамических систем позволяет избежать ряда трудностей при решении интегрального уравнения Винера-Хопфа. В частности, увеличение числа отсчетов корреляционных функций не приводит к росту размерности решаемой системы линейных уравнений и отпадает необходимость в дополнительной регуляризации решения.
5. Показана возможность аппаратной реализации сплайн-методов обработки информации на примере построения нерекурсивного цифрового фильтра на основе приближения зависимостей сплайнами по методу наименьших квадратов.
6. Разработаны специализированные устройства: сплайн-интерполятор, сплайн-аппроксиматор и сплайн-экстраполятор, обеспечивающие решение задач приближения в реальном времени.

## Заключение

### Основные результаты работы и выводы

Сущность, научная новизна, прикладная направленность и практическая значимость основных результатов выполненных исследований состоит в следующем:

разработаны, исследованы и экспериментально проверены математические методы, алгоритмы, программы и устройства обработки измерительной информации в радиоэлектронных системах управления воздушным движением в условиях эксплуатации с помощью сплайнов и обеспечивающие повышение эффективности работы и качества результатов.

Решение задачи выполнено в следующих аспектах:

1. Разработаны методы, алгоритмы и программы построения статистических оценок параметров одномерных и двумерных сплайнов по результатам измерений методом наименьших квадратов.

Отличительной особенностью методов является рекуррентное формирование матриц системы нормальных уравнений, что позволяет эффективно организовать вычисления в алгоритмах и программах, в частности строить оконные алгоритмы. Модифицированный рекуррентный метод наименьших квадратов позволяет наращивать число участков сплайна / увеличивать количество оцениваемых параметров /. Разработанные на его основе алгоритмы и программы способны обрабатывать измерительную информацию в реальном времени .

2. Разработаны методы, алгоритмы и программы идентификации одномерных законов распределения случайных данных.

Разработанные алгоритмы не требуют подбора вида распределения из известных классов. Как сами полученные аналитические зависимости, так и их интегралы и производные являются простыми выражениями, удобными в вычислениях.

Впервые разработаны метод, алгоритм и программа разделения бимодальной функции плотности вероятности на сумму унимодальных функций с помощью сплайнов.

3. Разработаны и исследованы новые методы, алгоритмы и программы идентификации элементов РЭС УВД.

Решена задача построения по экспериментальным данным модели нелинейного статического устройства, как функции от одного и двух параметров. Использование в качестве основы модели сплайнов делает алгоритм универсальным, в смысле разнообразия и сложности описываемых зависимостей.

Созданы и исследованы алгоритм и программа эффективного решения интегрального уравнения Винера-Хопфа, решаемого в процессе идентификации линейных динамических систем.

Результаты проверены в численных и натуральных экспериментах.

4. Показаны возможность и эффективность использования сплайнов в задачах обработки траекторной информации. Разработаны и исследованы рекуррентные и оконные методы, алгоритмы и программы идентификации траекторной информации.

В экспериментальных исследованиях показана высокая эффективность предлагаемых методов в сравнении с аналогичными, использующими степенные полиномы.

5. Показаны основные принципы построения устройств обработки измерительной информации с помощью сплайнов и разработаны: сплайн-интерполятор, сплайн-аппроксиматор, сплайн-экстраполятор.

## Список литературы

1. Автоматизация процессов управления воздушным движением / под ред. Г.Ф.Крыжановского.- М.: Транспорт, 1981. - 400 с.
2. Автоматизированные системы управления воздушным движением / под ред. В.И.Савицкого.- М.:Транспорт, 1986. - 192 с.
3. Адаптивные системы сбора и передачи аналоговой информации. Основы теории / А.Н.Дядюнов, Ю.А.Онищенко, А.И.Сенин.- М.: Машиностроение, 1988. - 288 с.
4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.- М.: Мир, 1979. - 536 с.
5. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана.- М.: Мир, 1988. - 168 с.
6. Беляевский Л.С.,Новиков В.С., Олянюк П.В. Обработка и отображение радионавигационной информации.- М.: Радио и связь, 1990. - 232 с.
7. Бендат Дж.,Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных.- М.: Мир, 1989. - 540 с.
8. Бессонов А.А.,Загишвили Ю.В.,Маркелов А.С. Методы и средства идентификации динамических объектов.- Л.: Энергоатомиздат, 1989. - 280 с.
9. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.- М.: Мир, 1989. - 448 с.
10. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование.- М.: Высш.школа, 1990. - 544 с.
11. Боревич З.И. Определители и матрицы.- М.: Наука, 1988. - 184 с.

12. Валях Е. Последовательно-паралельные вычисления.- М.: Мир. 1985. - 456 с.
13. Варшавер Б.А. Расчет и проектирование импульсных усилителей.- М.: Высшая школа. 1967. - 336 с.
14. Василенко В.А. Слайн-функции: теория, алгоритмы, программы.- Киев: Наукова думка. 1986. - 543 с.
15. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Физматгиз, 1962. - 564 с.
16. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев: Наукова думка, 1986. - 543 с.
17. Воинов В.Г., Никулин М.С. Несмещенные оценки и их применения.- М.: Наука, 1989. - 440 с. *Приведено*
18. Волков Е.А. Численные методы.- М.: Наука, 1987. - 248 с.
19. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания.- М.: Наука, 1987. - 336 с.
20. Гирко В.Л. Многомерный статистический анализ.- Киев: Вища школа. 1988. - 320 с.
21. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания.- М.: Высш.школа, 1984. - 208 с.
22. Давыдов П.С., Сосновский А.А., Хайлович И.А. Авиационная радиолокация: Справочник.- М.: Транспорт, 1984. - 223 с.
23. Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. Применение сплайн-функций в задачах статистического анализа информационных сигналов.- Киев: Знание, 1981. - 20 с.
24. Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. Применение эрмитовых сплайнов для восстановления информационных сигналов по дискретным наблюдениям.- Киев: Знание, 1983. - 24 с.
25. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.

16. Дж Ортега. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем.- М.: Мир, 1991. - 367 с.
17. Завялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.П. Методы сплайн-функций.- М.: Наука, 1980. - 352 с.
18. Завялов Ю.С., Леус В.А. Сплайны в инженерной геометрии.- М.: Машиностроение, 1985. - 224 с.
19. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация.- М.: Мир, 1986. - 318 с.
20. Иванов В.А., Ильницкий Л.Я., Фузик М.И. Электромагнитная совместимость РЭС.- Киев: Техника, 1983. - 120 с.
21. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов.- М.: Радио и связь, 1991. - 280 с.
22. Игнатов В.А., Маньшин Г.Г., Трайнев В.А. Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем.- М.: Энергия, 1974. - 264 с.
23. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений.- М.: Наука, 1988. - 160 с.
24. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем.- М.: Наука, 1988. - 160 с.
25. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения.- М.: Наука, 1985. - 208 с.
26. Каленанпур Г. Стохастическая теория фильтрации.- М.: Наука, 1987. - 320 с.
27. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике.- Харьков: Из-во Харьковского университета. 1972. - 412 с.
28. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.- М.: Наука, 1976. - 568 с.
29. Киричков В.Н. Идентификация объектов систем управления технологическими процессами.- Киев: Виша школа. 1990. - 263 с.

40. Коваленко И.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем.- М.: Сов.радио, 1980. -209 с.
41. Колтон Д.,Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.- М.: Мир, 1987. - 311 с.
42. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.- М.: Наука. 1984. - 352 с.
43. Корнильев Э.А.,Прокопенко И.Г. Устойчивые алгоритмы обработки сигналов в информационных системах.- Киев: Техніка. 1989. - 224 с.
44. Корн Г.,Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1973. - 832 с.
45. Кудрицкий В.Д. Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств.- Киев: Техніка, 1982. - 168 с.
46. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации.- М.: Сов.радио, 1974. - 432 с.
47. Кульбак С. Теория информации и статистика.- М.: Наука. 1967. - 408 с.
48. Купер Дж.,Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем.- М.: Мир, 1989. - 376 с.
49. Лавриненко В.Ю. Справочник по полупроводниковым приборам.- Киев: Техніка. 1984. - 424 с.
50. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая.- М.: Сов.радио, 1974. - 552 с.
51. Леонтьев Р.Г. Прогнозирование авиапотоков и оптимизация управления воздушной транспортной системой.- М.: Наука, 1984. - 184 с.
52. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.- М.: Физматгиз, 1962. - 352 с.

53. Лоусон ,Хенсон Численное решение задач метода наименьших квадратов.- М.: Мир. 1988. - 240 с.
54. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя.- М.: Наука, 1991. - 432 с.
55. Маликов В.Т., Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ.- Киев: Виша школа, 1989. - 213 с.
56. Математика и САПР / Жермен-Лакур П. и др.- М.: Мир, 1989 - 264 с.
57. Медведенко Б.И., Никитин А.П. Электронные приборы: лабораторные работы 1-4.- Киев: КИИГА, 1990 - 44 с.
58. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.- М.: Наука, 1987. - 240 с.
59. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль.- Томск: МП"Раско", 1991.- 272 с.
60. Некорректные задачи естествознания / под ред. А.Н.Тихонова. А.В.Гончарского.- М.: Из-во Московского университета. 1987. - 299 с.
61. Новиков В.С. Техническая эксплуатация авиационного радиоэлектронного оборудования.- М.: Транспорт, 1987. - 261 с.
62. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений.- Л.: Энергоатомиздат. 1991. - 304 с.
63. Паралельные вычисления / под ред. Г.Родрига. М.: Наука, 1986. - 376 с.
64. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами.- Киев: Наук.думка, 1989. - 372 с.
65. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: С.А.Айвазян и др.- М.: Финансы и статистика, 1989. - 607 с.

66. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение.- М.: Мир, 1984. - 264 с.
67. Сабоннадьер Ж.К. Кулон Ж.Л. Метод конечных элементов и САПР.- М.: Мир, 1989. - 190 с.
68. Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике / под ред. Г.Нолета.- М.: Мир, 1990. - 416 с.
69. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т1./ под ред. Э.Ллойда и др.- М.: Финансы и статистика, 1989. - 510 с.
70. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т2./ под ред. Э.Ллойда и др.- М.: Финансы и статистика, 1989. - 526 с.
71. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике.- М.: Наука, 1976. - 248 с.
72. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1990. - 232 с.
73. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника.- М.: Радио и связь, 1982. - 624 с.
74. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.- М.: Мир, 1988. - 352 с.
75. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.- М.: Мир, 1989. - 655 с.
76. Цифровая обработка сигналов: Справочник / Гольденберг Л.М. и др.- М.: Радио и связь, 1985. - 312 с.
77. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов.- М.: Наука, 1989. - 288 с.
78. Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления.- М.: Энергоатомиздат, 1987. - 80 с.

79. Шутко Н.А., Демьянчук В.С. Экспериментальное исследование ошибок измерения координат посадочных РЛС в условиях эксплуатации // Вопросы авиационной радиотехники: Сб. научн. тр. - Киев: КИИГА, 1972. - с.104-106.
80. ОСТ 5471006-85 Оценка надежности радиоэлектронных средств АС УВД в процессе испытаний и эксплуатации / В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Д.Н.Деменчук, Н.А.Шутко и др. - М: МГА, 1987. - 70 с.
81. Разработка программ и методик испытаний средств, входящих в АС УВД: Отчет по НИР N 249-В75; N ГР 75054532 / В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко и др. - Киев: КИИГА, 1977. - 107 с.
82. Разработка методов оценки показателей функционирования АС УВД в период ввода в строй и в процессе эксплуатации: Отчет по НИР N 249-В75: N ГР 75054532 / В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко и др. - Киев: КИИГА, 1978. - 189 с.
83. Анализ результатов испытаний АС УВД, обобщение опыта их проведения и разработка рекомендаций по их совершенствованию: Отчет по НИР N 249-В75; N ГР 75054532 / В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко и др. - Киев: КИИГА, 1979. - 92 с.
84. Разработка рекомендаций по повышению эффективности технических средств АС УВД: Отчет по НИР N 249-В75; N ГР 75054532 / В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко и др. - Киев: КИИГА, 1979. - 141 с.
85. Разработка алгоритмов оценки показателей эффективности функционирования информационных подсистем АС УВД: Отчет по НИР N 365-В80: N ГР 80052804 / В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко и др. - Киев: КИИГА, 1981. - 166 с.
86. Разработка рекомендаций по организации технической эксплуатации АС УВД: Отчет по НИР N 365-В80; N ГР 80052804 /

В.С.Демьянчук, И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко и др.- Киев: КИИГА, 1981.- 200 с.

87. Разработка методов повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем: Отчет по НИР N 36-ГБ92 / И.Ф.Бойко, Н.А.Шутко, И.В.Шелевицкий и др.- Киев: КИИГА, 1981.- 98 с.

\* \* \*

88. Беляевский Л.С., Кислый Ю.А., Шелевицкий И.В., Шутко Н.А. Алгоритм обработки навигационной информации с помощью сплайн-аппроксимации // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Тез.докл.Межд.НТК.- Киев: КИИГА, 1992. - с.84.

89. Бойко И.Ф., Матиборский В.В., Скрипец А.В., Шелевицкий И.В., Шутко Н.А., Яппаров А.Н. Сплаины в задачах обработки полетной информации // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Тез.докл.Межд.НТК.- Киев: КИИГА, 1992. - с.55.

90. Бойко И.Ф., Шелевицкий И.В., Шутко Н.А., Стохастический анализ радиоэлектронных систем и комплексов // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Тез.докл.Межд.НТК.- Киев: КИИГА, 1992. - с.39.

91. Бойко И.Ф., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В. Параметрическая идентификация радиоэлектронных систем с помощью сплайн-функций // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Сб.научн.тр.- Киев: КИИГА, 1990. - с.100-107.

92. Бойко И.Ф., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В. Статистическая идентификация линейных динамических систем с помощью полиномиальных сплайнов // Статистические методы обработки информации: Тез.докл.Межд.НТК.- Киев: КИИГА, 1992. - с.94.
93. Бойко И.Ф., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В. Статистическая идентификация линейных динамических систем с помощью сплайнов // Повышение эффективности функционирования радиоэлектронных систем : Сб.научн.тр.- Киев: КИИГА, 1992. - с.93-96.
94. Денисюк В.П., Картавая Т.Г., Шелевицкий И.В., Шутко Н.А. Повышение эффективности систем обработки данных // Проблемы совершенствования процессов технической эксплуатации авиационной техники: Тез.докл.Всес.НТК.- М.: МИИГА, 1988. - с.100.
95. Денисюк В.П., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В. Алгоритм построения простых полиномиальных сплайнов произвольных степеней // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Тез.докл.Всес.НТК.- Киев: КИИГА, 1989. - с.83.
96. Каменев В.А., Поляков В.Н., Шелевицкий И.В., Яппаров А.Н. Алгоритм и программа для решения задач интерполяции, аппроксимации и сглаживания результатов наблюдений по методу наименьших квадратов с помощью сплайн-функций // Статистические методы обработки информации: Тез.докл.Всес.НТК.- Киев: КИИГА, 1985. - с.129.
97. Каменев В.А., Шелевицкий И.В. Сравнительный анализ двух алгоритмов обработки информационных сигналов // Статистические методы обработки информации: Тез.докл.Всес.НТК.- Киев: КИИГА, 1985. - с.128.
98. Картавая Т.Г., Шелевицкий И.В., Шешина Л.А., Яппаров А.Н. Повышение достоверности обработки измерительной информации с

помощью сплайнов // Статистические методы обработки информации: Тез. докл. Всес. НТК.- Львов: ЛИАП. 1986. - с. ....

99. Марченко Б.Г., Шутко Н.А., Каменев В.А., Шелевицкий И.В., Яппаров А.Н. Применение двумерных сплайнов для статистической обработки информационных сигналов // Статистические методы обработки информации: Тез. докл. Всес. НТК.- Киев: КИИГА. 1985. - с. 20.

100. Марченко Б.Г., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В., Яппаров А.Н. Прогнозирование параметров радиоэлектронной аппаратуры с помощью сплайнов // Вопросы оптимального обслуживания и ремонта АиРЭО воздушных судов ГА: Межвуз. сб. научн. тр.- Киев: КИИГА, 1985. - с. 67-73.

101. Прокопенко И.Г., Никитин А.П., Шелевицкий И.В. Применение сплайн-аппроксимации в задачах стохастического анализа полупроводниковых приборов в нелинейном режиме // Статистические методы обработки информации: Тез. докл. Межд. НТК.- Киев: КИИГА, 1992. - с. 16-17.

102. Шелевицкий И.В. Обработка информации сплайнами по методу наименьших квадратов в скользящем окне // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Тез. докл. Межд. НТК.- Киев: КИИГА, 1992. - с. 39.

103. Шелевицкий И.В., Шутко Н.А. Способ обработки и моделирования траекторной информации // Статистические методы обработки сигналов в авиационном радиоэлектронном оборудовании: Сб. научн. тр.- Киев: КИИГА, 1992. - с. 88-91.

104. А.С. N1686461 СССР: Сплайн-интерполятор/ Н.А. Шутко, И.В. Шелевицкий, В.П. Денисюк и др.- М.: Госкомизобретений, 1990 - 7 с.

## Перечень сокращений

- АС УВД - автоматизированная система управления воздушным движением ;
- АРК - автоматический радиокompас ;
- АЦП - аналого-цифровой преобразователь ;
- ВС - воздушное судно ;
- ЗУ - запоминающее устройство ;
- КИИГА - Киевский институт инженеров гражданской авиации ;
- МСРП - магнитный самописец режимов полета ;
- МНК - метод наименьших квадратов ;
- ИПФ - импульсная переходная функция ;
- ПЭВМ - персональная электронно-вычислительная машина ;
- РЛС - радиолокационная станция ;
- РЭС УВД - радиоэлектронные системы управления воздушным движением ;
- ФНЧ - фильтр нижних частот ;

## Приложение

### Тексты программ

#### Программа 1

```
% программа расчета корреляционной
% матрицы ошибок метода наименьших
% квадратов для модели вида
%  $a t + b$ 
clear
pack
M=input('количество точек ');
m=input('масштаб по x ');
% формирование матрицы планирования
err=zeros(M,2) ;
for N=2:M
for i=1:N
T(i,2)=(i-1)*m;
T(i,1)=1;
end
T
% получение корреляционной матрицы
C=T'*T
pause
COB=C^(-1)
pause
% сохранение результатов
err(N,1)=COB(1,1);
err(N,2)=COB(2,2);
plot(err)
pause
end
```

#### Программа 2

```
% программа расчета корреляционной
% матрицы ошибок метода наименьших
% квадратов для модели вида
%  $a(t^3)/3 + b(t^2)/2 + c t + d$ 
clear
pack
M=input('количество точек ');
m=input('масштаб по x ');
% формирование матрицы планирования
err=zeros(M,4);
for N=4:M
for i=1:N
T(i,4)=(((i-1)*m)^3)/3;
T(i,3)=(((i-1)*m)^2)/2;
T(i,2)=(i-1)*m;
T(i,1)=1;
end
T
% получение корреляционной матрицы
C=T'*T
pause
```

```

COB=C^(-1)
pause
% сохранение результатов
err(N,1)=COB(1,1);
err(N,2)=COB(2,2);
err(N,3)=COB(3,3);
err(N,4)=COB(4,4);
plot(err)
pause
end

```

### Программа 3

```

% программа расчета корреляционной
% матрицы ошибок метода наименьших
% квадратов для модели вида
% a t + b
clear
pack
M=input('количество точек ');
m=input('масштаб по x ');
% формирование матрицы планирования
err=zeros(M,2) ;
for N=2:M
for i=1:N
T(i,2)=(i-1)*m;
T(i,1)=1;
end
T
% получение корреляционной матрицы
C=T'*T
pause
COB=C^(-1)
pause
% сохранение результатов
err(N,1)=COB(1,1);
err(N,2)=COB(2,2);
plot(err)
pause
end

```

### Программа 4

```

% программа исследования корреляционной матрицы
% метода наименьших квадратов для модели
% кубический эритов сплайн
clear
pack
disp('кубический сплайн ');
M0=input('минимальное к-во точек на участке');
M=input('максимальное количество точек на участке ');
R=input('количество участков ');
m=input('масштаб по x ');
R=R+1;
% формирование рабочих массивов
ers2=zeros(M,4);
for N=M0:M
% формирование узлов сплайна

```

```

tu = [-N:N:(R-2)*N]    %+0.0001
% формирование точек измерений
x = [1:(R-2)*N]-1
pause
% расчет матрицы планирования
T = creat_ps(tu*m,x*m,(R-2)*N,R,2)
% расчет корреляционной матрицы
C = T'*T
pause
COB = C^(-1)
pause
% сохранение результатов
ers2(N,1) = COB(R,R);
ers2(N,2) = COB(R-1,R-1);
ers2(N,3) = COB(R-2,R-2);
if (R-3) > 0
ers2(N,4) = COB(R-3,R-3);
end
plot(ers2)
pause
end

```

#### Программа 5

```

function [p] = creat_ps(tu,x,n,r,vid)
%CREAT_PS Формирование матрицы планирования для сплайн-функции
% Матрица блочно-диагональная из r-1 блока , размером
% n x r .
% [p] = creat_ps(tu,x,n,r,vid)
% p матрица планирования
% tu координаты узлов сплайна
% x координаты отсчетов
% n количество отсчетов x
% r количество узлов сплайна
% vid вид сплайна

for i = 1:n
str = i*r ;
[z,xx] = spllxu(tu,x(i),r,vid) ;
if (z > 1)
p(i,z-1) = xx(1) ;
end
p(i,z) = xx(2) ;
p(i,z+1) = xx(3) ;
if (z < r-1)
p(i,z+2) = xx(4) ;
end
end
end

```

#### Программа 6

```

function [N, x] = spllxu(tu,t,r,vid)
%SPL1XU вычисление элементов матрицы планирования для сплайна
% [N,X] = spllxu(tu,t,r,vid)
% tu координаты узлов
% t координата искомой точки

```

```

r      КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ
vid    ВИД СПЛАЙНА

```

```

if t<tu(1)
  if t>=tu(r)
    error(' Точка за пределами сплайна !');
  end
end

for i = 1:r-1
  if ( (tu(i)<=t)&(t < tu(i+1) ))
    break ;
  end
end

if i>1
  tu1 = tu(i-1) ;
end
tu2 = tu(i) ;
tu3 = tu(i+1) ;
if i<r-1
  tu4 = tu(i+2) ;
end

hn = tu3-tu2 ;
if i>1
  hp = tu2-tu1 ;
else
  hp = hn ;
end

if i<r-1
  hb = tu4-tu3 ;
else
  hb = hn ;
end

if i>1
  p1 = hn/hp ;
  p4 = hn/(hp+hn);
else
  p1 = 0 ;
  p4 = 0 ;
end

if i<r-1
  p2 = hn/(hb+hn);
  p3 = hn/hb ;
else
  p2 = 0 ;
  p3 = 0 ;
end

aa = ( t-tu2 )/hn ;
b = 1 - aa ;
if (vid==2)
  c = aa * b * b ; d = aa * aa * b ;
else
  c=0; d=0;
end

```

```

x(1) = -p1 * p4 * c ;
x(2) = p1 * c - p2 * d + b ;

```

```

x(3) = -p4 * c + p3 * d + aa ;
x(4) = -p3 * p2 * d ;
N=i ;

```

## Программа 7

```

% программа построения модельной траектории
%
while 1.
clc
disp(' Программа построения модельной траектории ');
disp(' ');
disp(' исходная точка траектории ');
x0=input(' x0=');
y0=input(' y0=');
v =input(' скорость (м/сек) v=');
dt=input(' интервал между отсчетами (сек)');
Nt=input(' всего отсчетов не более (0 - симметрично выражу) ');
alfa=input(' исходное направление полета (град)');
alfa=pi*alfa/180;
nvirag=input(' начало виража через N отсчетов N=');
g=input(' нормальное ускорение на вираже m g m=');
fi=input(' глубина виража (град) ');
fi=fi*pi/180;
disp(' Ожидайте окончания счета ');
vtr_info=sprintf('%g %g %g',x0,y0,v);
vtr_info=[vtr_info,sprintf(' %g %g %g',dt,alfa,nvirag)];
vtr_info=[vtr_info,sprintf(' %g %g %g',g,fi,Nt)];
[x,y]=traect(x0,y0,v,dt,alfa,nvirag,g,fi,Nt);
mx=max(x);
my=max(y);
mix=min(x);
miy=min(y);
hx=mx-mix;
hy=my-miy;
h=min([hx,hy]);
plot(x,y),title(vtr_info)
pause ;
axis([mix,mix+h,miy,miy+h]);
plot(x,y),title(vtr_info)
pause;
axis;
axis('square');
plot(x,y),title(vtr_info)
pause;
disp(' 0 - окончить ');
disp(' 1 - сохранить результат и закончить ');
disp(' 2 - сохранить результат и продолжить ');
disp(' 3 - продолжить ');
m=input(' ?=');
if (m==3),
else
if (m>0),
tr=[x',y'];
save model_tr tr vtr_info ;
end
if (m<2),
axis ;

```

```

break:
end
end
x=[];
y=[];
axis ;
end

```

#### Программа 8

```

function [r,b]=rls_xy(xrls,yrls,x,y)
% [r,b]=rls_xy(xrls,yrls,x,y)
% функция пересчитывает координаты с прямоугольных
% в полярные с центром в xrls, yrls:
% x,y прямоугольные координаты
% r - радиус
% b - угол
%
i=sqrt(-1);
c=x-xrls + (y-yrls)*i ;
r=abs(c);
b=imag(log(c));

```

#### Программа 9

```

clc
echo on
% демонстрация сглаживания сплайном по мнк в
% скользящем окне траекторных данных
%
echo off
disp(' реальная траектория ')
disp(' 1 барометрическая высота' )
disp(' 2 геометрическая высота по РВ')
disp(' 3 воздушная скорость')
disp(' 4 курсовой угол')
disp(' модельная траектория ')
disp(' 5 координата x ')
disp(' 6 координата y ')
disp(' 7 координата r ')
disp(' 8 координата alfa ')
param=input('вид траекторных измерений:');
if (param<=0)|(param>8)
    param=1;
end
R = input('количество узлов сплайна:');
if ( R<=5 )|(R>32)
    R=9
end
nt = input('точек наблюдений на участке:');
if (nt<2)|(nt>124)
    nt=32
end
std= input('дисперсия аддитивной погрешности N(0,d), d= ');
startg=input(' стартовое число генератора RND ');
if startg==0
    startg=1;
end

```

```

files=input('имя выходного файла данных ')
disp('Рекомендуем сохранять err errm')
varname=input(' список сохраняемых данных (пустой - все) ')
R=R+1 ;
r = R ;
t = [1:(r-3)*nt]-1;
N = (r-3)*nt;
n = (r-3)*nt;
t0= (r-4)*nt;
tu=[-nt:nt:(r-3)*nt];
NT=nt;

```

```

disp('список узлов')
tu=tu
pause
r=r-1;
R=R-1;

```

```

h=t(2)-t(1);
h2=tu(4)-tu(3);
dt=0;
y=t*0;
sm01=0;
sm02=0;
sm03=0;
sm04=0;
sm12=0;
sm13=0;
sm14=0;
sm23=0;
sm24=0;
sm34=0;
se02=0;
se03=0;
se04=0;

```

```

T = creat_ps(tu,t,n,r,2)

```

```

C=T'*T
COB=C^(-1)
y=y';
COBP=COB ;

```

```

D = T(1:nt,1:5);
D2= D(1:nt,2);
D3= D(1:nt,3);
D4= D(1:nt,4);
D0= D(1:nt,5);
Z = D0 ;
for i=1:r-4,
Z = [Z,D0];
end
De=rand(nt,4);
for i=1:nt,
[k,x]=spllxu(tu,tu(r-1)+i-1,r,2);
De(i,:)=xe;
end
Tv= [D4,D0,D0,Z;D3,D4,D0,Z;D2,D3,D4,Z]

```

```

D = T(1:nt,1:4);
Te= [Tv:T];
D2= [];
D3= [];
D4= [];
D0= [];
Z = [];
pack ;
B = [1:r];
B = B'*0 ;
COB=(Te'*Te)^(-1);
A = COB*B ;

clc
echo on
% Исходные данные для первого шага скользящего алгоритма
% построения% сплайна по методу наименьших квадратов
% модель Te*A=Y
% нормальные уравнения COB*B=A COB=(Te'*Te)^(-1) B=Te'*Y
% текущее количество наблюдений n
% текущее количество узлов r
%
% Press any key ...
pause
Te
% Press any key ...
COB
% Press any key ...
pause

if (param<5).
    load traekt;
else
    load model_tr ;
    param=param-4 ;
end

[NN,pp]=size(tr);
if (param>pp).
    param=pp;
    disp('изменен параметр траектории на')
    pp
end

err=zeros(4,NN/NT+1);
echo off
nt=0;
gr=1;
rr=0;
dt=0;
rand('normal');
rand('seed',startg);
ddt=t(n);
axis([tu(1),tu(r),min(tr(:,param)),max(tr(:,param))])

while 1.
if (gr==1)
gr=0;
txt=sprintf(' spline r= %g n= %g',rr,nt):

```

```

plot(t,y.',',tu-dt,A,'o',tu-dt,A,'--g')
title(txt)
end
nt=nt+1;
if(nt>NN)
    eval(['save ',files,' err ',varname]);
    break
end
dt=dt+h;
ddt=ddt+h;
tt=t0+dt;

for i=1:n-1,
    y(i)=y(i+1);
end

y(n)=tr(nt,param);
if std>0
y(n)=y(n)+rand(1)*std ;
end
yy=y(n);

xx=D(dt,:);
xe=De(dt,:);

sm01=sm01+yy*xx(1);
sm02=sm02+yy*xx(2);
sm03=sm03+yy*xx(3);
sm04=sm04+yy*xx(4);

se02=se02+yy*xe(2);
se03=se03+yy*xe(3);
se04=se04+yy*xe(4);

if ( dt<NT ).
else
dt=0;

for i=1:r-1,
    B(i)=B(i+1);
end

B(r)=se03+sm14;
B(r-1)=se02+sm13+sm24;
B(r-2)=sm34+sm23+sm12+sm01;

sm12=sm02;

sm23=sm13;
sm13=sm03;

sm34=sm24;
sm24=sm14;
sm14=sm04;

se02=0;
se03=0;

```

```

se04=0;
sm01=0;
sm02=0;
sm03=0;
sm04=0;

A=COB*B;
rr=rr+1;
err(1,rr)=A(r);
err(2,rr)=A(r-1);
err(3,rr)=A(r-2);
err(4,rr)=A(r-3);
gr=1;
end

end

```

### Программа 10

```

clc
echo off
% демонстрация рекурсивного мнк с переменным числом
% оцениваемых параметров
%
echo off
disp(' реальная траектория ')
disp(' 1 барометрическая высота ')
disp(' 2 геометрическая высота по РВ ')
disp(' 3 воздушная скорость ')
disp(' 4 курсовой угол ')
disp(' модельная траектория ')
disp(' 5 координата x ')
disp(' 6 координата y ')
disp(' 7 координата r ')
disp(' 8 координата alfa ');
param=input('вид траекторных измерений:');
if (param<=0)|(param>8)
    param=1;
end
R = input('максимальное количество узлов сплайна:');
if ( R<=5 )|(R>32)
    R=9
end
nt = input('точек наблюдений на участке:');
if (nt<2)|(nt>124)
    nt=32
end
std= input('дисперсия аддитивной погрешности N(0,d), d= ');
std=sqrt(std);
startg=input(' стартовое число генератора RND ');
if startg==0
    startg=1;
end
files=input('имя выходного файла данных ');
disp('сохранятся err A A0 ');
varname=input(' дополнительный список сохраняемых данных ');
info_rec=sprintf('p=%g R=%g nt=%g ',param,R,nt);
info_rec=[info_rec,sprintf('RND=%g D=%g ',startg,std)];

```

```

r = R ;
t = [1:(r-3)*nt] ;
N = (r-3)*nt;
n = (r-3)*nt;
tu = [-nt:nt:(r-2)*nt];
r = 4 ;
dscrl = 0.01 ;

disp('список узлов')
tu = tu + dscrl
pause

if (param < 5),
    load traekt;
    vtr_info = ' traekt ';
else
    load model_tr ;
    param = param - 4 ;
end

[N, pp] = size(tr);
if (param > pp),
    param = pp;
    disp('изменен параметр траектории на')
    pp
end
err = rand(2*nt, R+1);
err1 = rand(R-4, R);
err1 = err1 * 0;
err = err * 0;

A0 = [0, 0, tr(nt:nt:N, param)'];
rand('normal');
rand('seed', startg);

t = [1:N] ;
n = 4 ;

T = creat_ps(tu, t, n, r, 2) ;
tr(1:N, param) = tr(1:N, param) + rand(N, 1) * std;
y = tr(1:n, param);

C = T' * T;
COB = C ^ (-1);
B = T' * y ;

A = COB * B;

clc
echo on
% Исходные данные для первого шага рекуррентного алгоритма
% построения сплайна по методу наименьших квадратов
% модель T * A = Y
% нормальные уравнения COB * B = A COB = (T' * T) ^ (-1) B = T' * Y
% текущее количество наблюдений n
% текущее количество узлов r
COB

```

```

% Press any key ...
pause
B
% Press any key ...
pause
echo off

nk=0;
nd=n;
axis([-nt,tu(R),min(tr(:,param)).max(tr(:,param))])
while 1,
txt=sprintf('recursive spline d= %g n= %g r= %g'.nd,n,r);
plot(t,tr(:,param),'.',tu(1:r),A(1:r),'*',t(1:n),y(1:n))
title(txt)
n=n+1;
nd=nd+1;
if ( n>tu(R-1) ),
    title('END')
    break
end
v=tr(1:n,param) ;
if ( t(n)<tu(r-1) ),
% curent
[j,xx]=spllxu(tu,t(n),r,2) ;
for i=1:r
    f(i)=COB(i,r)*xx(4)+COB(i,r-1)*xx(3)+COB(i,r-
2)*xx(2)+COB(i,r-3)*xx(1);
end
psi=1+f(r)*xx(4)+f(r-1)*xx(3)+f(r-2)*xx(2)+f(r-3)*xx(1);
psi=1/psi;
COB=COB-f'*psi*f;
eps=y(n)-A(r)*xx(4)-A(r-1)*xx(3)-A(r-2)*xx(2)-A(r-3)*xx(1) ;
A=A+eps*psi*f;
err(nd+nt,r)=(A0(r-1)-A(r-1));
err(nd,r)=(A0(r)-A(r));
B(r) =B(r) +v(n)*xx(4);
B(r-1)=B(r-1)+y(n)*xx(3);
B(r-2)=B(r-2)+v(n)*xx(2);
B(r-3)=B(r-3)+y(n)*xx(1);

else
[j,xx]=spllxu(tu,t(n),r+1,2) ;
for i=1:r,
    f(i)=COB(i,r)*xx(3)+COB(i,r-1)*xx(2)+COB(i,r-2)*xx(1);
end
psi=1+f(r)*xx(3)+f(r-1)*xx(2)+f(r-2)*xx(1);
psi=1/psi;
COB=COB-f'*psi*f;

B(r)=B(r)+y(n)*xx(3);
B(r-1)=B(r-1)+y(n)*xx(2);
B(r-2)=B(r-2)+y(n)*xx(1);

p=xx(4)*xx(4);
b=xx(4);
V(r) =xx(4)*xx(3);
V(r-1)=xx(4)*xx(2);
V(r-2)=xx(4)*xx(1);

```

```

for i=1:r.
    L(i)=COB(i,r)*V(r)+COB(i,r-1)*V(r-1)+COB(i,r-2)*V(r-2);
end
beta=p-L(r)*V(r)-L(r-1)*V(r-1)-L(r-2)*V(r-2);
O=L/beta;
M=COB+L'*L/beta;
COB=[M,-O';-O, 1/beta] ;
B=[B;xx(4)*y(n)] ;
A=COB*B ;
nd=1;
err(nd+nt,r+1)=(A0(r)-A(r));
err(nd,r+1)=(A0(r+1)-A(r+1));
r=r+1;
nk=nk+1;
for ii=1:r
    err1(nk,ii)=A(ii);
end
end
end
eval(['save '.files.' vtr_info info_rec A0 A err err1
',varname]);
clear
pack

```

## Программа 11

```

% демонстрация рекурсивного мнк с переменным числом
% оцениваемых параметров
%
%
%
echo on
tu=[-8.1 0.1 8.1 16.1 24.1 32.1 40.1] ;
r = 4 ;
t =[0:39] ;
R = 6 ;
N = 39;
n = 8 ;
yy = sin(t/10) ;

T = creat_ps(tu,t,n,r,2) ;
y = yy(1:n);

C=T'*T;
COB=C^(-1);
B = T'*y';

A = COB*B;

save recmnk:

while 1,
plot(t,yy,tu(1:r),A,t(1:n),y)
pause(1)
n=n+1;
if ( t(n)>=tu(R)),
    break
end

```

```

y=yy(1:n)';
if ( t(n)<tu(r-1) ),
% curent
[j,xx]=spl1xu(tu,t(n),r,2) :
Tp=[1:r]*0 :
Tp(j-1)=xx(1) :
Tp(j) =xx(2) :
Tp(j+1)=xx(3) :
Tp(j+2)=xx(4) :
Tp=Tp';
T=[T;Tp'];
CD=T'*T;
BD=T'*y;
B=BD;
curent=1 ;

else
[j,xx]=spl1xu(tu,t(n),r+1,2) :
Tp=[1:r]*0 :
Tp(j-1)=xx(1) :
Tp(j) =xx(2) :
Tp(j+1)=xx(3) :
Tp=Tp';
p=xx(4)*xx(4);
b=xx(4);
curent=0;
end
%if
psi=Tp'*COB*Tp+1;
psi=1/psi;
COBP=COB-COB*Tp*psi*Tp'*COB;
COBD=CD^(-1) ;

if (curent==1)
eps=y(n)-Tp'*A;
A = A + psi*COB*Tp*eps;
COB = COBP ;
AD = COBD*BD;
else
V=b*Tp';
beta=p-V*COBP*V';
gama=V/beta;
O=gama*COBP;
M=COBP+COBP*V'*O;
Bp=B+Tp*y(n);

COB=[M,-O';-O,1/beta];
B=[Bp;b*y(n)];
A=COB*B;
T=[T,[1:n-1] '*0;Tp',b];
r=r+1;

end %if
end

```