



**Шелевицький І.В.**

**МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ СПЛАЙН-  
ТЕХНОЛОГІЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ  
СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

Шелевицький Ігор Володимирович

**МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ СПЛАЙН-ТЕХНОЛОГІЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ  
СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

Під редакцією д.т.н., професора Шутка М.О.

Кривий Ріг-2002

ББК 32.88  
УДК 621.372

Рецензенти:

д.т.н., проф. Ігнатов В.О. (Національний авіаційний університет),  
д.ф-м.н., проф. Задірака В.К. (Інститут кібернетики НАН України)

Шелевицький І.В. Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. – Кривий Ріг: Європейський університет, 2002.  
- 304 с.,іл.

Ця монографія є результатом досліджень автора в сфері застосування сплайнів для обробки цифрових сигналів, якими він займається з 1983 року. Сплайни є ровесниками комп'ютерних систем і тісно пов'язані із розвитком комп'ютерних інформаційних технологій. Сплайни є невід'ємною частиною комп'ютерної графіки та систем автоматизованого проектування. В системах цифрової обробки сигналів інтерес до сплайнів проявився у вейвлет методах та технологіях. Сплайни проявляють свої переваги перед іншими функціями, коли необхідно описувати сигнали складної форми: геофізичні, біомедичні, аудіо та відео. Книга присвячена методам та засобам сплайн-обробки цифрових сигналів складної форми: інтерполяції, фільтрації, ідентифікації, стиснення. Розроблено метод адаптації сплайнів до частотних властивостей сигналів. Отримані алгоритми та засоби, що дозволяють будувати системи реального часу та адаптивні системи. Особливістю підходу є приведення методів та алгоритмів до добре відомих інженерам конструкцій нерекурсивних цифрових фільтрів і представлення похибок наближення в термінах частотних характеристик фільтрів. Представлені методи, методики, засоби та алгоритми складають цілісну сплайн-технологію обробки даних.

Книга призначена для інженерно-технічних працівників, студентів та аспірантів, що займаються питаннями цифрової обробки сигналів в системах підтримки прийняття рішень та управління. З автором можна зв'язатися за адресою [Sheleviv@mail.ru](mailto:Sheleviv@mail.ru).

Бібліогр.: 307 назв.

Друкується за рекомендацією Вченої ради Європейського університету.

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	7
1. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ СПЛАЙНОВИХ МОДЕЛЕЙ У ТЕХНОЛОГІЯХ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ.....	13
1.1 Постановка задачі .....	13
1.2 Особливості технології обробки сигналів у технічних системах .....	21
1.3 Сплайни, їх різновиди та способи побудови .....	25
1.4 Точність наближення сплайнами .....	31
1.5 Статистичні оцінки параметрів моделей .....	34
1.6 Використання сплайнів в інформаційних технологіях обробки сигналів .....	38
1.7 Висновки .....	48
2. МЕТОДИ ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ .....	50
2.1 Постановка задачі .....	50
2.2 Загальний підхід до побудови локальних інтерполяційних сплайнів.....	52
2.3 Побудова інтерполяційних сплайнів із неперервною першою похідною на рівномірних сітках вузлів.....	60
2.4 Утворення інтерполяційних сплайнів із неперервною першою та другою похідними на рівномірній сітці вузлів. ....	65
2.5 Отримання дискретних сплайнових базисів.....	75
2.6 Синтез ермітових сплайнових базисів .....	77
2.7 Приведення сплайнових базисів до лагранжівової форми .....	82
2.8 Висновки.....	87
3. АЛГОРИТМИ НАБЛИЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ З ДОПОМОГОЮ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ .....	89
3.1 Постановка задачі .....	90
3.2 Аналогії між математичним та технічним поняттями інтерполяції .....	92

3.3	Особливості алгоритмів середньоквадратичного наближення в сплайнових базисах .....	99
3.4	Алгоритми розрахунку необмежених сплайнів .....	110
3.5	Перетворення Фур'є у сплайнових базисах .....	117
3.6	Якість алгоритмів наближення сплайнами .....	124
3.7	Висновки .....	134
4.	ПАРАМЕТРИЧНА СПЛАЙН-ІДЕНТИФІКАЦІЯ СИГНАЛІВ .....	136
4.1	Постановка задачі .....	136
4.2	Ідентифікація спектрів сигналів.....	137
4.3	Віконні та рекурентні алгоритми ідентифікації спектрів сигналів.....	147
4.4	Алгоритми оптимізації розміщення вузлів у сплайнових моделях .....	161
4.5	Сплайн-ідентифікація законів розподілу випадкових величин.....	175
4.6	Висновки .....	180
5.	АЛГОРИТМИ ТА ЗАСОБИ СПЛАЙН-ОБРОБКИ СИГНАЛІВ .....	182
5.1.	Постановка задачі .....	182
5.2.	Швидкі алгоритми сплайн-інтерполяції .....	184
5.3.	Швидкі алгоритми оцінювання параметрів сплайн-моделі за МНК.....	193
5.4.	Реалізація децимуючих МНКсплайн-фільтрів .....	202
5.5.	Рекурентні алгоритми та засоби отримання МНК оцінок .....	211
5.6.	Висновки .....	221
6.	ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ СПЛАЙН- ТЕХНОЛОГІЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ 223	223
6.1.	Постановка задачі .....	223
6.2.	Інформаційна сплайн-технологія обробки сигналів.....	224
6.3.	Експериментальне дослідження алгоритмів фільтрації сигналів .....	229

6.4. Система фільтрації та стиснення сигналів у реографічних дослідженнях .....	246
6.5. Фільтрація та ідентифікація геологічних та геофізичних даних .....	253
6.6. Обробка доплерівських сигналів від метеорологічних об'єктів .....	256
6.7. Фільтрація та стиснення цифрових растрових зображень .....	263
6.8. Висновки .....	274
Список використаних джерел .....	280

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ

$a(\text{mod } b)$	залишок від ділення $a$ на $b$
$\text{int}(x)$	ціла частина числа $x$
$\text{sup}$	верхня грань
PFDD	process flow description diagrams
UOB	units of behavior
АКФ	автокореляційна функція
АЦП	аналоговий цифровий перетворювач
АЧХ	амплітудно-частотна характеристика
ЕОМ	електронна обчислювальна машина
МНК	метод найменших квадратів
РЕС УПР	радіоелектронні системи управління повітряним рухом
РЛС	радіолокаційна станція
РМНК	рекурентний МНК
СКВ	середньоквадратичне відхилення
СЩП	спектральна щільність потужності
ШПФ	швидке перетворення Фур'є
ФНЧ	фільтр нижніх частот
ФВЧ	фільтр верхніх частот

## ПЕРЕДМОВА

Інтенсивний розвиток комп'ютерних технологій та засобів комунікацій робить актуальними питання якісної обробки акустичних, біомедичних, геофізичних сигналів та інших сигналів складної форми в системах підтримки прийняття рішень. Опосередковано вказаний розвиток, пов'язаний із зростанням якості життя, енергозбереженням та питаннями екології. Прямими прикладами з цього ряду є електрокардіографія високої роздільної здатності, акустична та сейсмічна томографія, відкриті виробничі технології, оптоволоконний солітонний зв'язок, тощо. Прості, поліноміальні моделі, що використовуються в цифрових методах для обробки сигналів складної форми (у даній роботі неперіодичних гладких сигналів, що мають більше 4-6 екстремумів) не здатні адекватно чи ефективно описати вказані сигнали в цілому. Тому такі сигнали обробляють короткими фрагментами (вікнами), в межах яких зберігається практично достатня адекватність моделі. За наявності випадкових шумів, для якісних статистичних оцінок параметрів моделі сигналу бажано врахувати максимальну кількість даних, для чого необхідно збільшити розкриття вікна. Розширення фрагмента потребує ускладнення моделі (наприклад, зростання порядку полінома), що призводить до погіршення статистичних оцінок, та обчислювальних труднощів. Це погіршення знову необхідно компенсувати збільшенням числа даних (розширенням вікна). Використання сплайнів, в якості моделі сигналу, дозволяє уникнути зазначених труднощів і підвищити якість обробки сигналів. Сплайни мають добре розвинену математичну теорію і відомі своїми хорошими наближуваними властивостями у поєднанні з ефективним апаратом розрахунків. На інтерполяційних сплайнових моделях ґрунтується значна частина систем комп'ютерної графіки. В області цифрової обробки сигналів сплайни інтенсивно почали використовуватись з кінця 80-х років у wavelets методах, в основі яких інтерполяційні схеми з локальними базисними функціями. Сучасний стан досліджень та перспектив в області застосування сплайнів для обробки цифрових даних найбільш повно висвітлено в



роботі [M. Unser, "Splines: a perfect fit for signal and image processing," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999]. Використання більш складних, статистичних методів, обробки: статистичної ідентифікації, оптимальної фільтрації та адаптація сплайнів до характеристик конкретних сигналів потенційно дозволяє отримати точніші моделі та ефективніші статистичні оцінки параметрів емпіричних цифрових даних. Однак цілий ряд особливостей обробки емпіричних цифрових даних не дозволяють безпосередньо застосувати існуючий математичний апарат сплайнів і потребують нетривіальних підходів до реалізації методів і засобів сплайн-обробки та їх об'єднання в рамках технології.

Найбільш перспективними галузями застосування сплайн-технології в системах підтримки прийняття рішень є аерокосмічна галузь, радіолокація та системи передачі даних, телеметрія, геологія й геофізика, медична діагностика.

Ця книга є відредагованим варіантом дисертаційної роботи, яку автор сподівається захистити. Майже всі алгоритми реалізовано у вигляді програм пакета MatLab. Їх можна отримати звернувшись до автора за адресою Sheleviv@mail.ru.

### **Структура книги**

Взаємозв'язок питань, розглянутих в окремих підрозділах монографії у контексті запропонованої сплайн-технології показано на рис.1.

В першому розділі розглянуто існуючі математичні методи наближення сплайнами, та особливості сигналів, що підлягають обробці. Автор пояснює, що має на увазі під терміном сплайни та розглядає особливості технології обробки сигналів.

У другому розділі розроблено загальний метод побудови інтерполяційних ермітових сплайнів, та методи побудови базисних сплайнів із допомогою операції згортки на рівномірних сітках. Розглянуто умови формування сплайнових базисів та їх особливості. Показано способи перетворення сплайнових базисів у лагранжіву форму.

У третьому розділі з аналогії між низькочастотною фільтрацією з підвищенням частоти дискретизації та інтерполяцією, розкривається поняття спектру сплайнового базису.

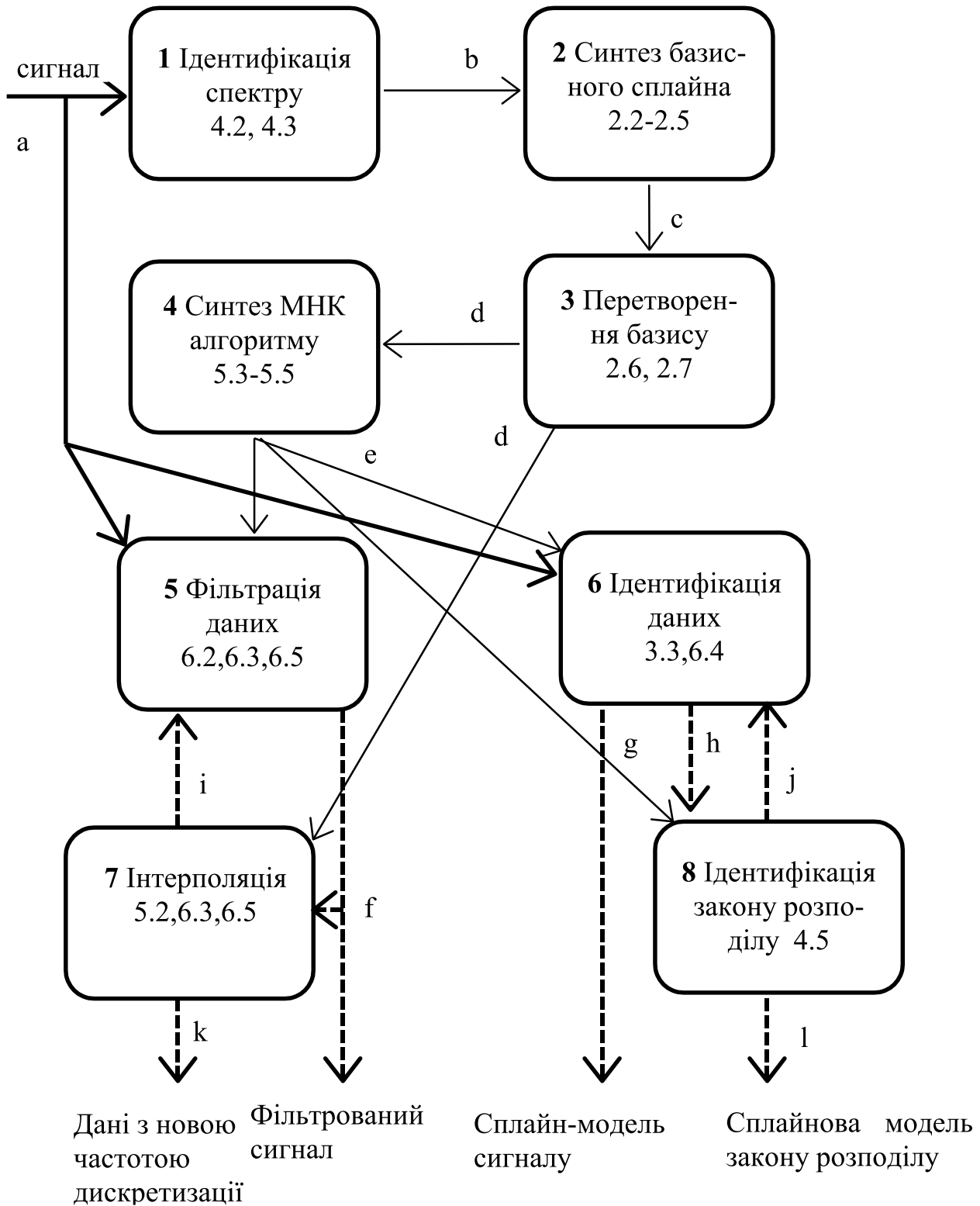


Рис.1. Структура роботи в контексті сплайн-технології обробки емпіричних цифрових сигналів.

Розглянуто МНК із сплайновою моделлю та особливості, що слідують із специфічного вигляду матриці планування для локальних сплайнів.

Розроблено алгоритми для роботи зі сплайнами з необмеженою кількістю фрагментів однакової ширини. Для цього отримано метод наближеного обернення діагональної матриці у припущенні, що інверсна також має обмежене число ненульових діагоналей. Створено метод узагальненого перетворення Фур'є в локальних не ортогональних сплайнових базисах. Розглянуто питання оцінки якості сплайнових алгоритмів.

В четвертому розділі розглянуто методи сплайн-ідентифікації спектру даних.

Спектр наближаємо за МНК сплайном так, щоб середньоквадратична нев'язка в часовій області між даними та часовим образом спектра була мінімальною. Досліджені методи оптимізації сітки вузлів сплайна, що використовують по координатний спуск та дроблення сітки для фіксованого числа вузлів. Для розміщення вузлів із послідовною побудовою сплайна розроблено алгоритм із послідовним контролем залишків на відсутність невідповідної складової. Алгоритм застосовано для ідентифікації емпіричної інтегральної функції розподілу.

В п'ятому розділі приділено увагу основним підходам до реалізації швидких алгоритмів оцінювання за МНК сплайнових моделей. Розглянуто синтез МНК фільтрів із використанням проекційної матриці, комбінації узгоджених фільтрів та рекурентні алгоритми.

В шостому розділі показано результати фільтрації сигналів із різними спектрами, сплайновими МНК фільтрами різної структури, із різними базисами. Проілюстрована залежність результатів від спектральних співвідношень між даними та базисами моделі. Описано приклади застосування сплайнових технологій у медичній функціональній діагностиці, при обробці доплерівських сигналів від метеоб'єктів та в задачах аналізу геохімічних даних. Розроблено принцип стиснення з утратами зображень, що використовують отримані методи.

Повернемося до схеми інформаційних потоків (рис.1). Вхідні сигнали (а) підлягають ідентифікації, із метою встановлення їх частотних характеристик (СЦП), як значень спектральної потужності у вузлах сплайна. Ця інформація (b) є вхідною для синтезу базисного сплайну з близькими частотними характеристиками. Отриманий базисний сплайн (с) підлягає приведенню до більш зручної лагранжівової форми та створення базису.

Утворений базис (d) є основою для синтезу МНК процедур та процедури інтерполяції. МНК процедури (e) служать для фільтрації або ідентифікації вхідних сигналів, що мають частотні характеристики, близькі до ідентифікованих. Фільтровані сигнали (f) можуть бути стиснутими. Для відновлення необхідної вихідної частоти слідування даних (k) служить сплайн-інтерполятор. Інтерполяція (i) також необхідна в частині процедур МНК фільтрації. Результатом ідентифікації є отримання сплайн-моделі детермінованої складової (g) та випадкових залишків (h). Випадкові залишки аналізуються з метою ідентифікації закону розподілу, як сплайн-функції (l). Інформація про закон розподілу (j) є корисною для оцінки достовірності оцінок моделі детермінованої складової.

Автор наперед вдячний тим читачам, що знайдуть час практично випробувати представлені методи і засоби та зможуть зробити свої зауваження та відгуки стосовно викладеного.

**Про автора**

Шелевицький Ігор Володимирович (1963) з відзнакою закінчив Київський інститут інженерів цивільної авіації у 1986 році. Науковою роботою займається з 1983 року. Сфера наукових інтересів: сплайни, та їх застосування для обробки даних. В 1993 році захистив кандидатську дисертацію. Працює доцентом кафедри інформаційних систем та технологій Криворізького підрозділу Європейського університету.

З Шелевицьким І.В. можна зв'язатися за адресою [Sheleviv@mail.ru](mailto:Sheleviv@mail.ru).

# 1. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ СПЛАЙНОВИХ МОДЕЛЕЙ У ТЕХНОЛОГІЯХ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

## 1.1 Постановка задачі

Поняття “сигнал”, що походить від латинського “signum” - “знак”, має широкий смисловий діапазон, який необхідно звужити до кола тих питань, що розглядаються в роботі. Сигналом є процес зміни в часі (просторі) фізичного стану якогось об’єкта, що служить для відображення, реєстрації і передачі інформації [116]. Ми розглядатимемо одновимірні сигнали  $y(t)$ , що є адитивною сукупністю корисної складової  $f(t)$  і некорельованого випадкового шуму  $\xi$  з нульовим математичним сподіванням. Сигнали представлені дискретними відліками  $y_i$ , що за винятком окремих випадків є дійсними числами  $y_i = f(t_i) + \xi_i$ . Враховуючи особливе значення для даної роботи спектральних характеристик сигналів, розглядатимемо лише сигнали з обмеженою енергією  $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty$ .

Визначимо, що є носієм корисної інформації у сигналів в контексті даної роботи. В першу чергу нас цікавитимуть задачі де носієм інформації є конкретна форма корисної складової. Це біомедичні сигнали, сигнали відеозображень, геофізичні сигнали тощо. В цих випадках загальна форма сигналів може бути відомою, проте нас цікавитимуть тонкі деталі форми, що є мінливими і встановлення їх в конкретному випадку дозволяє підвищити інформативність результатів обробки. Закон розподілу випадкової складової в окремих випадках також може бути інформативним (геофізичні сигнали). Частіше ця характеристика необхідна для оцінювання достовірності визначення параметрів моделі детермінованої складової. Енергетичний спектр сигналу та частотний діапазон корисного сигналу матиме важливе, але допоміжне значення. Ці характеристики

часто бувають відомі апріорно (принаймні, як характеристики реєструючого обладнання), або їх можна оцінити.

Таким чином, нас цікавитиме побудова моделі сигналу  $S(t_i, \hat{A})$  ( $\hat{A}$  - оцінка вектора параметрів моделі) з найбільш точним відтворенням форми корисної складової. Похибка встановлення цієї складової  $e_i = y_i - S(t_i, \hat{A})$  обумовлена двома причинами. Похибкою апроксимації інформативною складовою  $f(t)$  моделлю, котру називатимемо динамічною похибкою (її отримуємо за умови відсутності шумової складової). Випадковою похибкою, що обумовлена випадковим характером оцінки параметрів моделі, внаслідок наявності шумової складової. Динамічна похибка залежить від вдалого вибору класу моделі, що має відповідати характеру складової  $f(t)$ . Випадкову похибку зменшують застосовуючи статистичні методи оцінювання параметрів моделі, що враховують характер випадкової складової. Таку класифікацію похибок застосовано в [179].

Побудова моделі для сигналів з інформативною складовою простої форми є тривіальною задачею, для розв'язку якої застосовують поліноми низьких порядків (алгебраїчні чи тригонометричні). Сигнали, що мають складну форму не вдається адекватно описати простими моделями [193]. Сигналами складної форми ми вважатимемо такі, складова  $f(t)$  котрих є гладкою і має більше 4-6 екстремумів в області обробки, що не є періодичною. Звичайно, таке означення не є строгим, оскільки можна знайти приклади окремих сигналів, які легко обробляти не зважаючи на вказані ознаки. Але в переважній кількості випадків для таких сигналів класичні моделі з поліномів низьких порядків дають значну динамічну похибку, а зростання порядку приводить до зростання випадкової похибки і обчислювальних труднощів.

Успішно розв'язати проблему обробки сигналів складної форми потенційно дозволяють сплайнові моделі. Перша публікація по сплайнах з'явилася в 1946 році (Shoenberg, I.) [32]. Широкого поширення сплайни набули разом із загальним

поширенням комп'ютерної техніки з 1960 років. Основною сферою їх застосування стала комп'ютерна графіка та геометричне моделювання. За цей період Шенбергом було написано і опубліковано більше 40 статей. Підсумком цих досліджень стала монографія з питань Cardinal Spline Theory, видана в 1973 році [33]. Результатом подальшої праці Шенберга була публікація ще 56 наукових робіт. Вторгненню сплайнів в теорію наближення відбулося через задачі інтерполяції функцій і завдяки поширенню і розвитку комп'ютерної техніки. Виявилось, що в багатьох випадках сплайни мають цілий ряд переваг перед алгебраїчними та тригонометричними поліномами. Теорії та практиці сплайнів присвячені роботи К.Бора (deBoor,C) [19,142], Шумейкера (Shumaker, L.L.) [37], Альберга (Ahlberg,A.), Нільсона (Nilson,E.), Уолша [107], Завялова Ю.С. [151,152], Квасова Б.І. [151], Корнейчука М.П. [176], Стечкіна С.Б., Суботіна Ю.Н. [254]. В інтернеті під редакцією Бора та Шумейкера функціонує електронна база даних по роботах присвячених сплайнам: Spline Bibliography Database (SBD) ([www.math.auckland.ac.nz/~waldron/Splinebib/splinebib.html](http://www.math.auckland.ac.nz/~waldron/Splinebib/splinebib.html)). Проте переважну більшість розробок та досліджень присвячених сплайнам можна віднести до сфери прикладної математики, або чисельних методів. Інженерна сфера застосування сплайнів є досить скромною в порівнянні з обсягом математичних досліджень. Поділ на математичний та інженерний напрямки в даному контексті не має характеру протиставлення. Для ясності можна навести приклад зі спектральним аналізом. Математичний напрям тут представлений відповідними розділами математичного аналізу та абстрактного гармонічного аналізу, а інженерний дискретними та швидкими алгоритмами і методами та засобами спектрального оцінювання [190], а також рядом специфічних прикладних методів в різних сферах техніки: радіотехніки [122], механіки [188], акустики [242], геології та геофізики [206] і т.д.

Найбільш відомою інженерною областю використання сплайнів довгий час залишалася комп'ютерна графіка [191]. Новим поштовхом до інженерних застосувань сплайнів стали wavelet методи обробки сигналів[2,31,133]. В основу



wavelet методів покладена кратна інтерполяція даних в ортогональних локальних базисах [12]. Існує досить велика різноманітність локальних базисів включаючи і сплайни [48,267]. Проте сплайни тут не займають домінуючого положення, не зважаючи на їхні незаперечні переваги саме в інтерполяційних задачах. Однак можна сказати, що це перше серйозне вторгнення сплайнів в сферу signal processing і алгоритми реального часу. Найбільш переконливим є використання wavelet для стиснення даних з втратами [72]. Існує добре розроблена теорія і є досить алгоритмів та прикладів їх успішної роботи для стиснення зображень. Не зважаючи на це домінуючими є не wavelet методи, а евристичні і значно складніші jpeg алгоритми зі слабким теоретичним обґрунтуванням [203]. Інші спроби використання сплайнів в інженерній галузі обробки цифрових даних є досить локальними і епізодичними. Це моделювання нелінійних систем [194], реконструкція зображень [72], генерація сигналів складної форми [221]. Є цікава спроба замінити гармонічні функції в ДПФ їх сплайн-інтерполяцією і тим самим спростити розрахунки [80]. Проте проблема використання сплайнів, що мають цілий ряд переваг перед традиційними поліномами, в задачах технології цифрової обробки сигналів залишається актуальною і відкритою.

Очевидно, що існує ряд серйозних проблем із застосуванням математичного апарату сплайнів в інженерній практиці обробки даних і зокрема в задачах ідентифікації і фільтрації.

В цьому розділі на підставі власного досвіду, відомого теоретичного апарату, літературних джерел та інших доступних матеріалів розглядаються особливості застосування сплайнів в задачах обробки цифрових сигналів. Основною метою розділу є виявлення загальної структури, специфічних особливостей та кола найбільш актуальних функцій, що підлягають реалізації у вигляді сплайн-технології, а також огляд кола задач де застосування сплайнів найбільш доцільне.

В підрозділі 1.2 аналізуються основні особливості сигналів. Частина цих факторів накладає суттєві обмеження на математичні методи та алгоритми, інша –

сприяє подоланню цих обмежень. Розглянуто існуючі технології та програми, що застосовують сплайни для обробки емпіричних даних та сигналів.

Огляду фізичних процесів, які потенційно мають сплайновий характер, процесів, які не вдається вдало описати з допомогою простих поліноміальних моделей та методів, котрі є спробою подолання відомих обмежень поліноміальних моделей присвячено розділ 1.3.

В підрозділі 1.4 обговорюється поняття “Сплайн”, яке з часу виникнення значно розширилось в порівнянні з класичним. Розглядаються різновиди підходів до теорії побудови сплайнів і їх різновидів. Думки з цих питань не є однозначними і тому автор вважає за необхідне уточнити, що саме розуміє під сплайном в даній роботі. В підрозділі зроблено огляд основних теоретичних робіт з теорії сплайнів та винесені основні результати, важливі для подальшого розгляду і коментарі щодо їх практичного використання.

Теорія наближення детально розроблена в основному для інтерполяційних сплайнів. Внаслідок значної розмірності сигналів та наявності похибок вимірів, значно важливішою є апроксимація та статистичне оцінювання сплайнами.

В підрозділі 1.5 розглядаються ці задачі з врахуванням особливостей сигналів. Використано, як відомі результати інших дослідників, так і власні результати. Тут формулюються основні проблеми розробки спеціалізованих математичних методів та алгоритмів.

В підрозділі 1.6 виконано огляд основних практичних досліджень та розробок з використанням сплайнів, відомих авторові. В тому числі й розробки, що виконувались за його участю. Тут формулюється загальна структура сплайн-технології обробки сигналів.

В заключному підрозділі 1.7 наведені основні висновки цього розділу, де по суті обгрунтовані основні завдання теоретичних та прикладних досліджень даної роботи.

## 1.2 Особливості технологій обробки сигналів у технічних системах

Розглядаючи технологію обробки сигналів, як сукупності певних специфічних способів обробки даних, необхідно встановити характерні особливості цих сигналів та даних. Саме особливості характеру самих даних, так вимог до реалізації способів обробки, роблять необхідними розробку методів, котрі суттєво відрізняються від загальних, математичних.

Найбільш характерними і важливими є наступні особливості:

- відліки дискретні в часі чи просторі;
- сигнали включають, як корисну так і значну шумову складову;
- сигнали є необмеженими в часі (в тому розумінні, що не можна певно вказати моменти початку і закінчення надходження даних, а кількість даних необмежено зростає);
- дані знаходять через регулярні проміжки часу;
- в сигналах часто присутні виражені періодичні складові;
- процеси мають нестационарний характер і поведінку як корисної, так і шумової складових, котрі не можна адекватно описати простими алгебраїчними виразами;
- до методів обробки сигналів висувуються жорсткі часові обмеження: вони повинні працювати в реальному часі;
- точність представлення значень в більшості застосувань не перевищує 1%, рідше 0.1% ( 8-12 розрядів АЦП, ЦАП);
- для сигналів характерним є частотне представлення їх характеристик.

Сукупність вказаних особливостей суттєво звужує можливості застосування відомих математичних методів аналізу та обробки сигналів. Основне протиріччя полягає в необхідності використання складної моделі в той час, як робота в реальному часі потребує її максимального спрощення. Саме тому найбільш вживаними моделями є алгебраїчні, або тригонометричні поліноми невисоких порядків. Методи обробки даних з такими моделями є достатньо простими для роботи в реальному часі та їх апаратної реалізації.

Проте прості моделі не здатні адекватно описувати сигнали складної форми та процеси на значних інтервалах. Зростання порядків поліномів та ускладнення моделей призводить до відомих негативних наслідків:

- ускладнення обчислень;
- зниження швидкості обробки;
- погіршення якості статистичних оцінок;
- осциляції моделі ( відсутність збіжності наближення).

Щоб обійти вказані труднощі застосовують наступні підходи:

- сигнали розбивається на відносно короткі фрагменти, на яких поведінку процесу можна адекватно описати простою моделлю [190,232];
- обробка сигналів виконується у обмеженому побіжному вікні, в межах якого досить проста модель адекватно описує дані [178,179,232];
- застосовують алгоритми з обмеженою пам'яттю, що враховують старіння даних [178,179].

Найбільш відомими є методи, що застосовують в якості моделі – ламану. Типовим представником цього класу є задача синтезу систем регулювання з заданими частотними властивостями, де прямим приблизно відповідають типові динамічні блоки. Простота та ефективність таких моделей, як і їх недоліки загальновідомі [268].

Більш складними є методи, де моделі будуються з фрагментів функцій, часом різних класів: експоненти і прямої, прямої і параболи і т.п. [189]. Такий пофрагментний підхід в багатьох випадках має глибоке фізичне обґрунтування. Різний характер даних процесів, що обробляються, обумовлений різницею в фізичній природі явищ, що їх породжують. Як приклад: робота транзистора в режимах малого сигналу, підсилення та насичення. Поширення радіохвиль в ближній та дальній зонах; зміна умов поширення радіохвиль в атмосфері з висотою; зміна характеру відбиття радіохвиль від земної і водної поверхні, зміна динамічних характеристик літака при зміні профілю крила.

Однак особливим недоліком фрагментарного підходу є відсутність гладкості апроксимуючої функції. Серйозним недолік є саме тому, що більшість досліджуваних фізичних процесів мають саме гладкий характер. Іноді можна зустріти думку про абстрактність сплайнових конструкцій. В роботі [197] дано значний перелік фізичних процесів в радіоелектронних системах, котрі по своїй суті є сплайновими. Як показали дослідження, виконані в даній роботі, сплайновий характер мають процеси, що утворились згорткою фрагментів функцій. Це зокрема закони розподілу та дані, що пройшли через лінійні динамічні системи із скінченими імпульсними характеристиками. Тобто в багатьох випадках сплайни прямо відповідають характеру сигналу. Важливо також відмітити, що такі дані мають як мінімум неперервність першої похідної. Отже сплайнові моделі є цілком природними для процесів утворених фільтрацією. Інший приклад це так звані окремі хвильові сигнали (wave), яскравим представником яких є солітони [129,208]. Локальний характер цих явищ добре відповідає локальному сплайновому базису. Саме тому цілком природним є використання для моделювання складних сигналів сплайн-функцій.

Розглянемо програмні засоби обробки сигналів, що можуть застосовуватись в автоматизованих системах [108,196,211,223]. Найкраще представлені цифрові методи обробки сигналів в пакетах MathCad, MatLab, MathConex, Simulink. Фактично це є один з найбільш повних наборів спеціалізованих прикладних методів, реалізованих програмно. Розвиткові системи сприяє її відкритість і доступність до оновлення та доповнення. Останні версії MatLab включають засоби безпосереднього конвертування програм на алгоритмічні мови "C" та "Fortran". Пакети є зручним середовищем для розробки, відладки, моделювання та реалізації цифрових методів обробки сигналів. В пакетах представлені технології обробки зображень, звуку, цифрової фільтрації, оптимізації, структурного моделювання систем. Розділ сплайнів включає розробки Де Бора [142]. Це кубічні глобальні сплайни, B-сплайни та тензорні двомірні сплайни. Оригінальними є B-сплайни з кратними вузлами. Безпосереднє застосування в технологіях цифрової обробки

сигналів сплайнів є у wavelet методах, де користуються кубічними В-сплайнами. Характерною особливістю сплайнових розділів у пакетах (включаючи й попередню групу) є не достатнє представлення переваг та пріоритетних сфер застосування сплайнів і особливо конкретних рекомендацій до застосування.

В цілому, вказана група програм найбільше підходить для розробки та представлення інформаційних технологій цифрової обробки сигналів.

Іншу групу складають окремі програми, пакети та бібліотеки функцій, що не є цілісними програмними пакетами, а виконують певні часткові функції. В першу чергу це незалежні реалізації методів та алгоритмів в середовищі MatLab, MathCad, які часто є додатками до монографій та статей. Такі матеріали презентують нові розробки та досягнення, що не увійшли до базового комплекту. Сюди ж можна віднести і набори програмних функцій виконані в класичних алгоритмічних мовах. Так методи та програми представлені в [142] можна отримати за адресою [www.cs.wisc.edu/~deboor/](http://www.cs.wisc.edu/~deboor/). Розробки Унсера, стосовно фракціональних сплайнів [42,46], знаходяться в [bigwww.epfl.ch](http://bigwww.epfl.ch). Частина програм представлена лише в друкованому вигляді в монографіях. Це в основному розробки авторів з СНД [132,141,254]. Відсутність безпосередньо доступних електронних варіантів утруднює їх використання, але не зменшує цінності.

Підсумовуючи виконаний пошук та огляд реалізацій прикладних сплайн-методів можна стверджувати, що на даний момент не існує розробок чи пакетів функцій та програм в котрих сплайни були б повно і цілісно представлені у вигляді певної технології обробки цифрових сигналів, із врахуванням їх специфічних особливостей. Таким чином відомі достоїнства сплайнів, детально досліджені в роботах математиків, не знайшли достатнього втілення в сучасних інформаційних технологіях обробки цифрових сигналів.

Однак найбільш близькою до сплайнів і такою, що успішно розвивається є wavelet технологія обробки сигналів. Цій темі присвячено цілий розділ на сайті MathWorks та toolbox в пакеті MatLab. Ідеї та технологія wavelet є найбільш

близькою до розробок представлених в даній роботі. Тому варто детальніше розглянути цю тему.

Ідеї wavelet методів ґрунтуються на інтерполяційних схемах із використанням локальних базисних функцій. Саме в цій технології конструктивно взаємодіють математичний апарат наближення (інтерполяції) і звичний інженерам частотний підхід до побудови систем обробки сигналів. Ці питання досить повно відображені в роботах [15,48,51,54,73,147,150,212,213]. У wavelet методах інтерполяція з допомогою локальних базисів і інтерполяція взагалі знайшла застосування не лише для підвищення частоти дискретизації, але в основному для аналізу, стиснення, фільтрації. Застосування локальних базисів більш точно відповідає характеру реальних сигналів, що представлені на певних відрізках. Проблеми та перспективи цього напрямку розглянуті в роботі [99]. Детальніше wavelet технологію розглянемо в підрозділі 1.6.

### 1.3 Сплайни, їх різновиди та способи побудови

Розглянемо досить значну різноманітність функцій, що їх називають сплайнами. На даний час з одного боку маємо найбільш відомі алгебраїчні сплайни, з іншого багато інших конструкцій, що відрізняються виглядом фрагментів та особливостями побудови [26,39,42,58,84,85,86,87,144,163,198,204,221,222,239]. Тому логічним є питання вибору сплайн-функцій, що відповідають характеру конкретних даних та специфіці застосування.

Відоме класичне визначення сплайна [176]: Функція  $S(t)$  визначена і неперервна на відрізку  $[a,b]$  називається поліноміальним сплайном порядку  $m$  з вузлами  $x_j \in (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ , якщо на кожному з відрізків  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j=1, n$ ,  $S(t)$  є алгебраїчним поліномом степені, що не перевищує  $m$ , в кожній з точок  $x_j$  деяка похідна може мати розрив. Якщо в точці  $x_j$  неперервні функції  $S(t)$ , ...,

$S^{(m-k_i)}(t)$ , а похідна  $S^{(m-k_i+1)}(t)$ , у точці  $X_j$  терпить розрив, число  $k = \min_{0 \leq i \leq n} k_i$  називають дефектом сплайна.

Слід зауважити, що таке класичне визначення сплайна є дещо звуженими. Так К.Бор застосовує сплайна з кратними вузлами [142], де  $x_j \in (a = x_0 \leq x_1, \leq \dots \leq x_a = b)$ .

Б.А.Попов будує сплайни, фрагменти яких не є алгебраїчними поліномами, а складаються з раціональних функцій, функцій Паде, степеневих функцій [98]. В монографії розглянуто питання рівномірного наближення сплайнами та приведено оцінку нев'язки. Для побудованих сплайнів даються рекомендації, що до практичного застосування. Проте в роботі не наведено загального визначення таких сплайнів. Інформація, викладена в роботах [138,221,227] є хорошим довідником, що сприятиме виборіві та побудові базисних сплайнів для конкретних задач.

К.де Бор дає визначення сплайна через лінійну комбінацію В-сплайнів, які у свою чергу визначаються на не спадаючій послідовності вузлів  $(\dots \leq x_i \leq x_{i+1}, \leq \dots \leq x_j \leq x_{j+1} \leq \dots)$  через аналітичну формулу [142]. В цьому випадку сплайн вже не є обмеженим відрізком  $[a,b)$  із фіксованим числом вузлів, умова неперервності похідних не є домінуючою, але фрагменти задаються, як алгебраїчні поліноми. Бор розглядає поняття "сплайн" як особливу точку зору на кусково-многочленні функції. Шенберг також розглядав питання побудови інтерполяційних сплайнів для необмеженого числа фрагментів за умови однакової довжини фрагментів [19].

З погляду автора цієї роботи, відсутність обмежень на скінченність сітки вузлів є прийнятною і корисною. Але під сплайном будемо розуміти саме гладку функцію з неперервними щонайменше значеннями і першою похідною на фрагментах та в точках склейки.

Випадки кусково-постійної, ламаної, як і сплайна з одним фрагментом, можна розглядати, як корисні іноді ілюстрації вироджених сплайнів.



Цілком прийнятним є й використання в фрагментах не алгебраїчних поліномів, якщо вдається знайти достатньо простий спосіб забезпечити неперервність у точках стику.

Узагальнюючи поняття сплайна, слід визначитись, що саме той у даній роботі розумітимемо під поняттям "сплайн".

*Визначення автора:* сплайном називатимемо неперервну і визначену на фрагментах функцію  $S$ , яка складається із фрагментів, що є функціями одного виду і стиковані спеціальним чином. Точки стикування фрагментів називатимемо вузлами сплайна. Основною умовою стикування фрагментів є неперервність значень і частини похідних у точках стикування.

Послідовність вузлів є зростаючою (кратність вузлів у даній роботі не розглядатимемо). Оскільки число похідних у функцій, з яких складатиметься сплайн не задається, (вони можуть мати невизначене, або нескінченне число похідних), то поняття дефекту сплайна втрачає зміст і зручніше говорити про сплайн із неперервними  $m$ -похідними в точках стикування.

Розглянемо способи побудови сплайнів. Основна проблема полягає в забезпеченні зазначених раніше спеціальних умов стикування сусідніх фрагментів. Функція, що представляє окремі фрагменти має залежати від деякого вектора параметрів, зміна яких повинна забезпечити виконання умов стикування у вузлах (рівність значень та частини похідних). Окремий фрагмент обмежений двома вузлами. Звідси слідує необхідність мати число параметрів, кратне двом, від яких лінійно залежить функція на фрагменті. Тому переважно користуються сплайнами, які складаються з відрізків прямих та кубічних парабол. Функції з непарним числом параметрів також розглядають, але доводиться задавати деякі додаткові умови для "зайвого" параметра, що є дещо неприродно. Очевидно, що значення параметрів можна однозначно визначити із системи лінійних рівнянь (за умови лінійної залежності функції від параметрів). При такій методиці виникає ряд серйозних проблем.

Сплайн визначається на обмеженому сегменті. З точки зору обробки числових даних це означає пакетний метод розрахунків. Лише задавши всю множину вузлових точок, можна отримати значення сплайна в довільній точці.

Проблема розв'язку системи лінійних інтерполяційних рівнянь в принципі не є надто гострою, оскільки система має специфічний діагональний вигляд, добре обумовлена й розроблені ефективні методи її розв'язку [159,160,162]. Проте для алгоритмів реального часу ця проблема є серйозною.

Труднощі з визначенням крайових умов є наслідком наявності крайніх лівого та правого вузлів, для котрих відсутні сусідні фрагменти. Отже пара параметрів залишаються вільними і їх потрібно задати деяким способом. Цих труднощів вдається позбутися, користуючись періодичними сплайнами, для котрих крайні вузли відсутні (є природне продовження). В інших випадках задають певні крайові умови з деяких практичних міркувань (досить довільно). Наприклад рівність нулю першої похідної у крайніх вузлах [151]. Крайові умови є неприємним моментом, що псує досконалість алгоритмів ефективних розрахунків для сплайнів. Оскільки у визначенні параметрів функцій на фрагментах приймають участь всі вузли інтерполяції, то сплайни такого виду називають глобальними, або фундаментальними. Назва обґрунтована, як глибиною досліджень даних сплайнів, так і наявністю ряду оптимальних властивостей (надзвичайно приємних для математиків). Найбільш відомий представник таких сплайнів — кубічний сплайн із двома неперервними похідними. Він має властивості мінімальної гладкості та найкращого наближення. Значення першої похідної у вузлах підпорядковується умові неперервності другої похідної [136,266].

Менш поширеними є локальні сплайни. Назва походить від того, що в задоволенні умов стикування фрагментів задіяна обмежена кількість найближчих вузлів. Тому для їх побудови не потрібно розв'язувати систему лінійних рівнянь. Відмінності локальних сплайнів полягають у різних способах визначення неперервних похідних. Найбільш природнім є рівність першої похідної першій похідній інтерпольованої функції (аналогічно і для вищих похідних). Тому такі

сплайни називають ермітовими. На жаль, значення першої похідної у вузлах відоме виключно рідко. Тому ці значення визначають через розділені, або центральні різниці з використанням сусідніх вузлів. Для ермітового кубічного сплайна з неперервною першою похідною значення в точці визначатимуть чотири найближчих вузли. Труднощі вибору крайових значень є менш актуальними, оскільки є декілька відносно природних шляхів їх вирішення. Можна для розрахунку похідної задіяти лише існуючі вузли, або центральні різниці замінити розділеними. Інший підхід полягає в тому, щоб продовжити фрагменти ліворуч та праворуч. Для фрагментів однакової ширини - аналогічними. Для довільної - продовженими в нескінченність. Для ермітових кубічних сплайнів це дає хороші результати (детальніше про це в 2-му розділі).

Ермітові сплайни мають неперервних похідних менше, ніж глобальні. Так кубічний ермітові сплайн має у вузлах неперервність лише першої похідної. Вони також не мають оптимальних властивостей глобальних сплайнів. До локальних ермітових сплайнів відноситься ламана, яка є хорошою ілюстрацією їх основних переваг. Саме локальні ермітові сплайни є найкращими кандидатами на застосування в задачах обробки цифрових даних. Їх перевага не лише в простоті розрахунків. В більшості випадків неперервність другої похідної та оптимальні властивості не є продиктованими природою даних. Значно важливіша відповідність першої похідної характеру даних, а розрив другої похідної візуально непомітний. Слід відмітити, що аналогія глобального кубічного сплайна з реальними фізичними об'єктами є досить умовною (лише для малих величин першої похідної). Лінійка (лекало - сплайн) має бути ідеальною, інакше потрібно враховувати нелінійності зв'язані з деформацією і т.п. Практично форма глобального та локального сплайнів побудованих на одних вузлах відрізняється мало. Локальність дозволяє будувати сплайн без обмежень на число фрагментів.

Пояснимо ще декілька термінів, що часто зустрічаються.

Кардинальні сплайни - це сплайни із фрагментами рівної довжини. Іноді цей термін невірно застосовують до глобальних сплайнів, оскільки саме вони вперше

розглядалися в даному контексті Шенбергом. Однак К.Бор ці поняття розділяє, застосовуючи до глобальних сплайнів термін “фундаментальні сплайни”. Кардинальні сплайни є ідеальними претендентами для використання в алгоритмах реального часу. Якщо не враховувати крайові умови, то в системі інтерполяційних рівнянь матимемо Тепліцеву матрицю, для якої існують ефективні методи розрахунків.

В-сплайни в літературі асоціюється з алгебраїчними сплайнами. По суті вони близькі до глобальних і є відповідні вирази для перерахунку. Різниця у формі представлення. Сплайн визначається, як лінійна комбінація з локальних базисних сплайнів, що розраховуються через рекурентні вирази. Це дає певні переваги в розрахунках та дослідженні їх властивостей. Сам сплайн побудований, як лінійна комбінація локальних В-сплайнів є глобальним, оскільки для знаходження коефіцієнтів розв’язується система лінійних рівнянь, що враховує всі вузли. В даній роботі термін В-сплайни матиме дещо ширше значення і не означатиме лише алгебраїчні сплайни, а локальні сплайнові базиси довільних неперервних на фрагментах функцій.

Нелінійні сплайни (сплайни, що нелінійно залежать від параметрів, які їх визначають), сплайни високих порядків, та з неперервністю похідних вище другої у даній роботі не розглядатимуться. Частково тому, що вони вимагають серйозного ускладнення розрахунків і тому є поганими претендентами на роботу в реальному часі. З іншого боку, сплайни відрізняє саме простота та ефективність математичного апарату, і втрата цих переваг перед класичними методами ставить під сумнів доцільність таких побудов в сфері обробки сигналів узагалі. Цілком очевидно, що такі побудови мають мати дуже серйозне обґрунтування їх переваг перед класичними сплайнами в конкретних випадках. Зазначимо, що підвищення якості наближення сплайнами низьких порядків ефективно досягається шляхом збільшення числа фрагментів, без суттєвого ускладнення розрахунків. Тому це навряд чи може бути аргументом для зазначеного ускладнення самих сплайнів.

Отже, найбільш придатними для задач обробки сигналів у цифрових системах є сплайни утворені з локальних сплайнових базисів, та ермітові сплайни. Що стосується методики підвищення ефективності розрахунків, то ці питання розглядаються в багатьох роботах [112,122,130,153,215,154,211,217,264,269,270] і використовуються автором.

#### 1.4 Точність наближення сплайнами

Основні переваги сплайнів перед іншими апаратами наближення виявляються в інтерполяційних задачах. Саме інтерполяційні сплайни в багатьох випадках забезпечують мінімальну похибку наближення на класі функцій. Теорія сплайн-інтерполяції є добре розробленою, особливо для сплайнів мінімальних дефектів (глобальних). Результати досліджень похибок інтерполяції досить повно висвітлені в багатьох монографіях [132,142,151,176,221].

Типовий підхід до оцінок інтерполяції потребує віднесення інтерпольованої функції до певного класу з певними диференційними властивостями [142,176]. Оскільки інтерполяція сплайном по суті є інтерполяцією функціями, що є фрагментами сплайна, то побудова оцінок нев'язки близька до відповідних класичних теорій стосовно одного фрагмента.

Так для функцій з чотирма неперервними похідними максимальна нев'язка інтерполяції глобальними кубічними сплайнами на рівномірній сітці вузлів становить [176]

$$\|g - S\|_C \leq \frac{5}{384} |h|^4 \|g^{(4)}\|, \quad (1.1)$$

де  $g \in W_\infty^4$  інтерпольована функція ;

$S$  глобальний інтерполяційний кубічний сплайн;

$h$  ширина фрагмента сплайна.

Для кубічного ермітового сплайна

$$\|g - S\|_C \leq \frac{1}{384} |h|^4 \|g^{(4)}\|, \quad (1.2)$$

Для ламаної нев'язки ідентична нев'язці для відрізка прямої:

$$\|g - S\|_C \leq \frac{1}{8} |h|^2 \|g''\|, \quad g \in W_\infty^2. \quad (1.3)$$

Як бачимо, похибка наближення залежить від ширини фрагмента та диференційних властивостей інтерпольованої функції. Нев'язка для кубічних сплайнів є близькою до відповідного залишкового члена в кубічній інтерполяції [136]

$$\|g - P\|_C \leq \frac{1}{24} |h|^4 \|g^{(4)}\|, \quad g \in W_\infty^4. \quad (1.4)$$

Суттєва відмінність і перевага сплайнів перед класичними методами полягає в тому, що збільшення вузлів інтерполяції (і відповідно зменшення ширини інтервалів) не пов'язано з ускладненням інтерполяційного полінома. Тому найкраще досягти зменшення нев'язки шляхом скорочення довжини фрагментів сплайна. Ускладнення розрахунків при цьому є незначним. Для глобальних сплайнів зростає розмірність інтерполяційних рівнянь, які, однак, є добре обумовленими. Для локальних сплайнів ця процедура практично зводиться до втрат пов'язаних із збільшенням затрат на пошук фрагмента, якому належить задана точка інтерполяції. Таким чином для сплайнів збільшення розмірності наближаючого простору не має катастрофічних наслідків, характерних для класичних методів. Саме з цих міркувань у практиці дуже рідко використовують сплайни, фрагменти яких є складними для розрахунків функціями. Для алгебраїчних поліномів обмежуються степенем не вище третього.

Іншим позитивним фактором наближення сплайнами є залежність нев'язки від норми похідної фіксованого порядку. Це дозволяє успішно виконувати наближення “поганих” функцій, у яких вищі похідні швидко зростають (як  $n!$  і швидше), та функції з розривами похідних. Це відомий приклад Рунге  $(1/(1+25x^2)^{1/2})$ ,  $|x|$  - що має розрив першої похідної та інші [142].

Отримані оцінки точності наближення на практиці мають лише потенційне значення і можуть слугувати для визначення відносної зміни нев'язки при зміні сітки вузлів. З іншого боку, такі оцінки є дуже песимістичними, вони дають верхню грань похибки наближення. Априорно встановити величину нев'язки для конкретних даних на практиці важко, оскільки це потребує віднесення даних до певного класу функцій, згідно диференційним властивостям. Така інформація в переважній більшості випадків відсутня, а чисельне визначення диференційних властивостей еквівалентне тій же інтерполяційній задачі.

Отже підходи, що ґрунтуються на класичних оцінках похибки наближення для певних класів функцій є малоприматними для застосування в технології цифрової обробки сигналів. По-перше, такі оцінки є надто песимістичними, по-друге, відкритим залишається питання віднесення емпіричних даних до того чи іншого класу. Нев'язка наближення залежить від значення вищих похідних, котрі за емпіричними даними визначити не можливо. Отже, для оцінки якості наближення в інженерній практиці слід знайти інший підхід, можливо з евристичними алгоритмами, але більш прийнятний на практиці. В роботі для вибору конкретного сплайна та оцінки його придатності для наближення конкретних даних пропонується скористатись співвідношеннями між спектрами сплайнових базисів та даних. Певні дослідження в цьому напрямку можна знайти в Унсера [48] Із практики застосування наближення гармонічними функціями можна стверджувати, що практично всі дані вважаються такими, що відповідають умовам теореми Діріхле. З цієї точки зору можливий вибір конкретного виду сплайнового базису, спектр котрого відповідатиме спектру даних. Таким чином можна сформулювати задачу синтезу сплайнового базису, що відповідає заданим частотним характеристикам, котра потребує специфічних методів побудови базисних сплайнів. Специфічність полягає у близькості вказаної задачі до відомих задач синтезу цифрових фільтрів. Розробка такого методу дозволить змінювати частотні характеристики базисів, не лише керуючи шириною фрагментів, але й безпосереднім вибором необхідного виду фрагментів. Це дозволить формувати

сплайнні бази з врахуванням особливостей конкретних даних та певних обмежень на якість наближення. Частотний підхід застосовується авторами, що займаються задачами обробки цифрових даних, із допомогою алгебраїчних B-сплайнів [48,49,50,54]. Проте частотний підхід застосовується в основному у зв'язку з аналізом типових інженерних конструкцій, що отримуються при застосуванні сплайнів у сфері цифрової обробки даних. Зворотній вплив такого підходу на самі способи побудови сплайнів не є вираженим. В даній роботі цей напрямок розвивається і ставиться задача знайти способи побудови довільних сплайнних базисів, що мають певні частотні властивості та розробити технологію їх застосування в задачах згладжування, ідентифікації та фільтрації. А саме, розробити методи побудови сплайнів, що зручні в першу чергу для інженерних застосувань, а не виходячи зі зручності саме для математичних досліджень.

### 1.5 Статистичні оцінки параметрів моделей

Переважає більшість емпіричних даних містить як детерміновану складову, так і деякий випадковий шум, котрим не можна знехтувати. Отже, задача сплайн-інтерполяції матиме зміст лише для відносно вузького кола задач, де шуми є малозначимими і кількість даних не надто велика. Це, наприклад, задачі підвищення частоти дискретизації сигналів [263].

Наявність випадкових складових в даних, безумовно передбачає використання статистичних методів обробки. А саме, маємо використовувати статистичне оцінювання параметрів сплайн-моделі [106,139,171,181,185].

В математичній теорії наближення сплайнами найчастіше розглядається згладжуючий сплайн (1.5) [95,142,236].

За умови, що маємо значення з адитивною похибкою деякої гладкої функції  $f(x)$ :  $y_i = f(x_i) + E_i$  в точках  $x_1, \dots, x_n$ , та оцінку СКВ  $\delta(x)$ , можна з певною



точністю відновити  $f(x)$ . Для цього будують сплайн  $S$ , який для заданого параметра  $p \in [0,1]$  мінімізує функціонал

$$p \sum_i \left( \frac{y_i - S(x_i)}{S(x_i)} \right)^2 + (1-p) \int_{x_1}^{x_N} (S^{(m)}(t))^2 dt \quad (1.5)$$

по всіх фрагментах  $S$  із  $m$  – похідними. Параметр  $p \in [0,1]$  – встановлює компроміс між гладкістю  $S$  та наближенням до даних.

Питання вибору параметра згладжування  $p$  є відкритим. При його виборі слід опиратися на деякі апріорні дані про  $f(x)$ , а практично необхідно порівнювати отриманий результат з потенційно очікуваною гладкістю  $f(x)$ . Проблема в тому, що апріорна інформація про гладкість має якісний характер, а параметр задає точне, кількісне співвідношення. При  $p=0$  маємо чисто середньоквадратичне наближення, при  $p=1$  звичайну інтерполяцію без згладжування. Ідея побудови такого згладжуючого сплайна належить Уїттекеру і розвинута Шенбергом і Рейншем [142]. Для побудови згладжуючого сплайна похідні замінюються розділеними різницями. Проблема подібних процедур полягає в складності розв'язку системи рівнянь при побудові згладжуючого сплайна, та значне погіршення обумовленості рівнянь. Подібні недоліки роблять сумнівним безпосереднє використання такого підходу в алгоритмах реального часу. З точки зору статистики модель має надмірну кількість ступенів вільності, що перевищує розмірність даних. Тому стійкість розв'язку досягається лише завдяки інтегральній складовій. Подібна модель згладжування реалізована в пакеті Statistika, для згладжування двомірної поверхні на графіках. Число наукових розробок та публікацій присвячених згладжуючим сплайнам відносно невелике і зустрічаються вони саме при розв'язковій прикладних задач [38,76,95,117,143,144,183,209,250,258].

Інший підхід застосовують у методах згладжування даних із сплайновими базисами. Ефект згладжування досягається за рахунок того, що сплайновий базис є більш гладким відносно шумової складової сигналу. Як гладкість сплайна, так і якість його статистичних оцінок визначаються шириною фрагментів та кількістю

вузлових точок. В порівнянні з попереднім підходом число ступенів вільності тут не перевищує число відліків даних. У випадку рівності числа вузлів числу відліків маємо звичайний інтерполяційний сплайн. Максимальне згладжування отримаємо для сплайна, що складається з одного фрагмента. Тобто, згладжуючий сплайн є природнім продовженням класичної моделі, яка не здатна адекватно наблизити на заданому інтервалі детерміновану складову. Керування ступенем згладжування, змінюючи ширину фрагментів відносно даних, реалізоване на регулярних сітках у wavelet методах, зокрема, в пірамідальних схемах, та методах multiresolution analysis [12,13,23,83,90,91,98]. Такий підхід має конструктивну основу, що ґрунтується на співвідношеннях спектрів даних та сплайнових базисів. Скорочення фрагментів розширює смугу пропускання wavelet фільтра і зменшує гладкість.

Питання вибору кількості та розміщення вузлів згладжуючого сплайна у загальному випадку ідентична вибору параметра в (1.5). Однак даний спосіб є більш гнучкий, оскільки дозволяє локально змінювати гладкість (задаючи фрагменти різної ширини). Задача пошуку оптимальної множини вузлів згладжуючого сплайна є задачею багатомірної оптимізації з обмеженнями. Обмеження полягає в тому, що послідовність вузлів має бути зростаючою (або неспадаючою). Для заданої кількості вузлів таким способом можна знайти таке їх розміщення, що мінімізуватиме заданий критерій. Критерієм оптимальності найчастіше обирають мінімум середньоквадратичного відхилення, або мінімум модуля відхилення. Однак досягнення вказаного мінімуму не гарантує оптимального згладжування (у тому розумінні, що сплайн адекватно опише лише детерміновану складову). Наближаючи число вузлів до числа даних, ми можемо звести значення обох критеріїв до нуля (інтерполяційний сплайн), але нічого не виграти в якості статистичних оцінок.

В роботі пропонується використовувати, як критерій, статистичну оцінку ймовірності наявності детермінованої складової у залишках наближення. Такий підхід гарантує певну якість згладжування, та кількісно обґрунтовує мінімальне число ступенів вільності. Найбільш прийнятними для вказаного застосування є

непараметричні критерії серій та інверсій [119,251], які відрізняються простотою розрахунків та дають хороші практичні результати і можуть застосовуватись разом із згладжуванням за методом найменших квадратів (МНК). Детально це питання розглядатиметься в третьому розділі.

Найбільш прийнятним для технології цифрової обробки емпіричних сигналів є згладжування за методом найменших квадратів, що є найкращою по нормі апроксимацією, отриманою на базі скалярного добутку. Основна проблема у даному випадку полягає у виборі вдалого базису, в якому можна досить “добре“ наблизити  $f(x)$ .

Якщо базис є сплайном певного виду, то проблема полягає у виборі деякої оптимальної множини вузлових точок (абсцис точок склеювання) сплайна. Загальні аспекти вирішення цієї проблеми розглянуті вище. Тому надалі будемо вважати, що МНК оцінки будуються на деякій заданій множині вузлів. Саме для цієї множини вузлів ми отримаємо оптимальне за МНК наближення. Інша множина вузлів дасть інші результати. МНК можна включити в загальну процедуру пошуку оптимальної множини вузлів. Тоді МНК забезпечуватиме оптимальне значення параметрів лінійної комбінації сплайнових базисів для заданої множини вузлів, а багатомірна оптимізація близьке до оптимального розміщення вузлів.

Отже, сплайн розглядається як функція  $\Phi(x,A)$ , що лінійно залежить, від деяких параметрів  $A$ . Для ермітового сплайна в лагранжівській формі запису параметри  $A$  є значеннями сплайна в точках стику. Таким чином, ці параметри мають явну фізичну інтерпретацію, що співпадає зі змістом вхідних даних [143,145].

Локальність ермітового сплайна дозволяє ефективно розв’язувати системи лінійних рівнянь, що в цьому випадку є добре обумовленими. Найбільш доцільно користуватися кубічним сплайном, оскільки він має неперервну першу похідну і ефективний у розрахунках. Сплайни вищих степенів використовувати в загальному випадку недоцільно у зв’язку зі зростанням обсягів розрахунків при відносно малих виграшах якості наближення.

Серед інших методів найбільш підходящим є МНК із базисом із В-сплайнів. Проте, в цьому випадку коефіцієнти не матимуть явної фізичної інтерпретації, а умова неперервності другої похідної у багатьох випадках не є необхідною (не підтверджується фізикою процесів).

Іноді за МНК будують глобальний кубічний сплайн, включаючи в систему нормальних рівнянь умову неперервності похідних. Однак, це знижує ефективність розрахунків, а окрім цього умовам неперервності потрібно довільно надавати значно більшої ваги ніж власне умовам наближення.

Статистичні властивості МНК, методика побудови довірчих інтервалів та інше, залишаються тими ж, що й для інших лінійних моделей [106,139,185]. Проте, використання сплайнової моделі дозволяє отримати якісно кращі результати. Розв'язання задач оцінювання параметрів сплайна відрізняється від МНК для класичних моделей значно кращими обчислювальними властивостями. Для сплайнів збільшення кількості оцінюваних параметрів не пов'язано з ускладненням характеру моделі й проблемою поганої обумовленості. Тим самим вдається адекватно описати дані на значних інтервалах із більшим числом відліків і відповідно отримати хороші статистичні оцінки. Детально це буде показано у 3-му розділі.

Що стосується інших статистичних методів (максимальної правдоподібності, найменших модулів [115,177]), то в даній роботі вони не розглядаються, хоч безумовно, заслуговують на цілий ряд спеціальних досліджень, що виходять за рамки цієї роботи.

## **1.6 Використання сплайнів в інформаційних технологіях обробки сигналів**

Якісні зміни в інформаційних технологіях за останні десять років зробили можливим загальне впровадження складних методів обробки інформації у широку інженерну практику. Потужність персональних комп'ютерів загального

призначення дає можливість виконувати обробку в реальному часі відеосигналів за незначної вартості. Зростання потужності систем обробки цифрових даних має два напрями: зростання швидкості роботи електронних компонентів та створення нових, потужних алгоритмів обробки даних. Ці напрямки є як конкуруючими, так і тісно взаємозв'язаними. Переважний розвиток одного напрямку неминуче висуває нові вимоги до іншого, що пов'язано з освоєнням нових сфер застосування цифрової обробки та її якісно нового рівня. Так, наприклад, інтенсивний розвиток електроніки забезпечив широкі можливості для обробки аудіо та відео даних. Це стимулювало до розробки якісно нових алгоритмів стиснення даних (JPEG, wavelet, MPEG). Результатом цього процесу є інтенсивний розвиток цифрової фотографії, відео та аудіо техніки, Інтернет телефонії, інтерактивного радіо та телебачення, то що. Особливо цікавим є напрям розвитку систем передачі цифрових даних із використанням солітонів в оптоволоконних лініях. Для таких систем зв'язку реальними є швидкості до 320-400 Гбіт/с при передачі даних на практично необмежені відстані з довжиною фрагментів між підсилювачами 50-100 км [243]. Солітон є окремою хвилею, яку зручно апроксимувати сплайном. Такий підхід є в багатьох роботах [27,28,36,75,88,94,140,172,216,259]. Інша ідея полягає у використанні солітонів для синтезу фільтрів [186]. Результати отримані в 2 розділі, дозволяють будувати В-сплайни - солітони.

Процес розробки й удосконалення алгоритмів далеко не є завершеним, або таким, що досяг рівня потенційних можливостей, адекватних рівню електроніки. Особливо це стосується сфери обробки емпіричних сигналів, характерною особливістю котрих є наявність суттєвої шумової складової. Гнучким і потужним комп'ютерним системам не відповідають методи обробки сигналів налаштовані на обмежені технічні ресурси і відносно скромні можливості попередніх поколінь процесорів, а також орієнтовані на аналогові рішення з обмеженою точністю і не здатні використати потенційні можливості сучасних цифрових систем.

Обсяг публікацій, що стосуються сплайнів на теренах СНД є дуже обмеженим і, як уже зазначалося, носять більш математичний ніж прикладний

характер. В даному випадку під прикладним характером мається на увазі можливість безпосереднього застосування результатів для обробки цифрових сигналів. З перекладних видань маємо лише дві монографії [107,142]. Значно повніше ця тематика представлена авторами з Росії: Зав'ялов Ю.С., Квасов Б.І., Суботін Ю.Н., Стечкін С.Б., Марчук Г.І., Морозов В.А., Василенко В.А. [24,51,89,123]. Та України: Корнейчук М. П., Лігун А.А., Назаренко Н.А., Попов Б.О., Марченко Б.Г., Денисюк В.П., [144,145,176,184,221]. Прикладні роботи стосуються в переважній більшості комп'ютерних систем геометричного проектування та комп'ютерної графіки [152,191,192,201,240,241]. В роботах [135,200] розглянуто застосування сплайнів для розв'язку інтегральних рівнянь та некоректно поставлених задач. В роботі [242] висловлювались ідеї відносно застосування сплайнів для розв'язку задач сейсмічної томографії. Згладжування сплайном виду (1.5) спектрів отриманих спектроскопами описано в [95]. Двомірні сплайни використані в пакеті "Геоформ" для моделювання поверхні геологічних об'єктів та космічних тіл. Питаннями використання сплайнів для опису законів розподілу випадкових величин та застосуванням отриманих результатів в задачах геології, геофізики та екології займається група науковців під керівництвом Приставки О.П. Результати їх досліджень представлені в роботах [229,235,236]. Цій же тематиці присвячені роботи і зарубіжних авторів [22,64]. Перераховані задачі не вимагають роботи в режимі реального часу. Навіть представлені в системах комп'ютерної графіки інтерполяційні сплайни будуються в пакетному режимі (затримка з побудовою є цілком очевидною) [224,225]. Навіть не дуже глибокий пошук застосувань сплайнів відображає очевидний контраст між обсягом математичних досліджень і обсягом інженерних застосувань.

Значним кроком у сфері застосуваннях сплайнів для обробки сигналів став розвиток wavelets методів [12,98,99,212,213,255,267,]. У вказаних методах сплайни є одним із багатьох можливих локальних wavelet базисів. Wavelets методи розроблені саме для алгоритмів реального часу і використовуються для стиснення та згладжування даних [48,100]. Методи мають надзвичайно швидкий розвиток і

популярність, завдяки наявності хорошої теоретичної основи та можливості обробки складних сигналів, тому сфера їх застосування досить широка. Основні питання використання wavelet методів відображені на сайті [www.mathsoft.wavelets.com](http://www.mathsoft.wavelets.com) [238] фірми MathSoft InC, та на сайті [www.wavelet.org](http://www.wavelet.org).

Вейвлети беруть початок із квадратурних дзеркальних фільтрів (quadrature mirror filter, QMF), котрі мають імпульсні характеристики  $h$  та  $g$  і фільтрують сигнал поділений на непарні та парні відліки відповідно. Фільтри спроектовано так, що виконується умова точної реконструкції фільтрованих сигналів:

$$H(z^{-1})H(z) + G(z^{-1})G(z) = 2,$$

$$H(z^{-1})H(-z) + G(z^{-1})G(-z) = 0.$$

Фільтр із  $H(z)$  (ФНЧ) відповідає за інтерполяцію, а  $G(z)$  (ФВЧ) за формування залишків інтерполяції. Частина реалізацій таких фільтрів реалізує інтерполяцію в явному вигляді. Вхідний сигнал  $x$  розкладається на дві послідовності  $d_2$  - непарних відліків і  $v_1$  - нев'язок інтерполяції парних відліків. Послідовно застосовуючи процедуру до  $d_i$  - послідовностей непарних відліків отримуємо пірамідальне представлення вхідного сигналу у вигляді низькочастотної складової  $d_n$  та залишків інтерполяції  $v_{n-1}, \dots, v_1$ . Такій процедурі відповідає інтерполяції сигналу в базисі скейлінг функцій і вейвлетів. Якщо базиси ортогональні, то маємо ортогональний багатомасштабний аналіз (ОМА). Недоліками ОМА є несиметричність фільтрів і вузький клас базисів (Хаара і поліноми Дебеші) [14,31,49,50,52,67,74,81,84]. Клас базисів розширено в біортогональному багатомасштабному аналізі (ВМА), де застосовують біортогональні вейвлети [4,5,6,14,49,50,57,71,79,82,83]. Ідея полягає у застосуванні для розкладання й відновлення різних пар фільтрів:  $(h, g)$  - основні,  $(\tilde{h}, \tilde{g})$  - дуальні. Зміщення основних базисів ортогональні дуальним, але не ортогональні між собою. До біортогональних відносяться і вейвлети зі скейлінг функціями В-сплайнами [18,20,21,23,25]. Фільтри в біортогональних вейвлетах можуть бути симетричними. Практична реалізація вейвлет перетворень має два основних алгоритми. Алгоритм Малла (Mallat algorithm) швидкого вейвлет

перетворення (WFT) і ліфтинг алгоритм [12,43,98]. Для роботи з багатоканальними сигналами розроблені мультивейвети (multiwavelets) [92].

Сфера застосування wavelet методів дуже широка. Серед робіт з цифрової обробки сигналів слід відмітити дослідження Biomedical Imaging Group у Швейцарському федеральному інституті технологій (EPFL, [bigwww.epfl.ch](http://bigwww.epfl.ch)) під керівництвом M.Unser. Варто звернути особливу увагу на роботу [48], що містить досить повний огляд застосування сплайнів в системах обробки цифрових даних (Signal Processing) у зарубіжжі. Бібліографія цієї роботи нараховує 100 наукових праць. Фактично, в ній окреслено місце, що займають сплайни в Signal Processing, та перспективні напрямки розвитку. Серед перспективних задач відмічено задачі регуляризації та згладжування емпіричних даних із значним рівнем шумів та створення цифрових сплайн-фільтрів та швидких алгоритмів. Найбільш цікавими є сфери застосування сплайнів для обробки зображень та звукових сигналів, включаючи розробки ЦАП та АЦП із застосуванням сплайнів.

Детальний огляд wavelet методів, включаючи й сплайни, міститься в роботі [99]. Ряд незалежних фахівців оцінюють стан розвитку методів, їх проблеми та перспективи. Як позитивний момент для дальшого розвитку відмічено наявність добре розвинутої теорії. Серед проблем відмітимо проблему обробки високочастотних даних, даних із шумами та побудову базисів, що враховують характер вхідних даних. Спільним є твердження про динамічний та далекий від завершення процес розвитку напряму. Відмічається відсутність усталеної термінології і навіть самого поняття wavelet функції.

Сплайни та wavelet функції досить сильно переплітаються, проте сплайни не є домінуючими. Вони скоріше складають певну підмножину більш загального класу локальних функцій. Викладене ілюструють рис.1.1 та рис.1.2, де показано число публікацій по сплайнах та wavelet методах в часі.

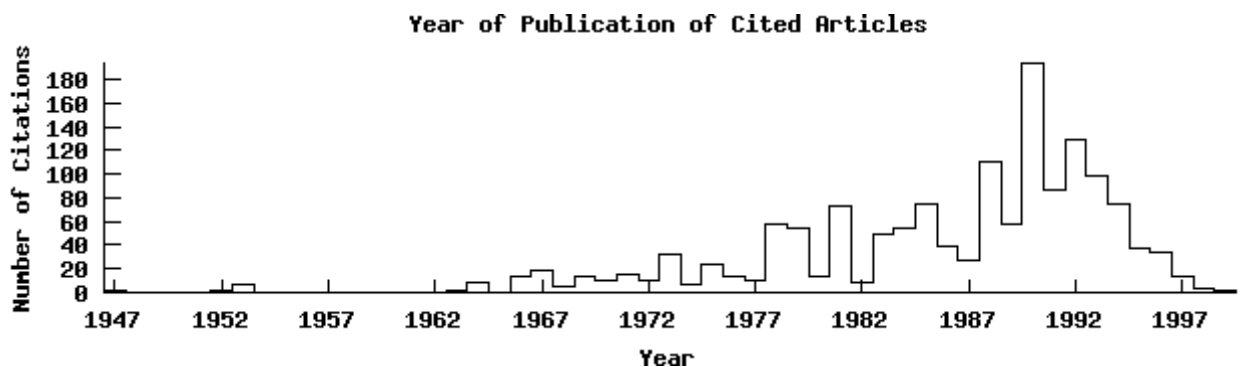
Очевидно, що доля сплайнів не є домінуючою. Графіки дають дещо песимістичне відношення в силу того, що пошук у базі citeseer здійснювався за



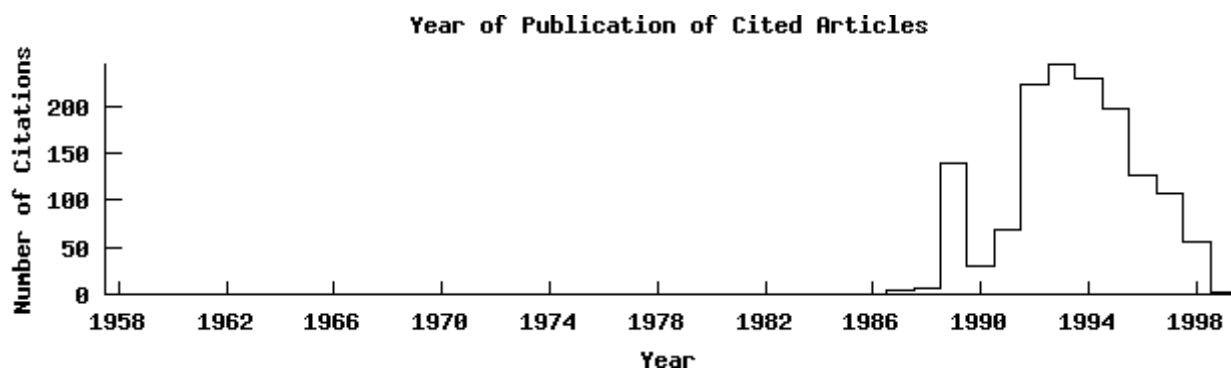
ключовими словами spline та wavelet. Частина wavelet публікацій включає сплайни неявно, тому останні не враховані на графікові сплайнових публікацій.

З погляду автора даної роботи переваги сплайнів не проявилися суттєвіше тому, що wavelet методи використовують лише двократну інтерполяцію і вимагають ортогональності базисів. На малих проміжках інтерполяції зі сплайнами успішно конкурують інші локальні функції. Фактично використовується в основному лише локальність сплайнового базису. В той час, як два інших фактори сплайнів: гладкість та здатність наближати на значних проміжках, не є принциповими для wavelets методів. В розділах 3 та 4 ці питання будуть розкриті дещо повніше, в контексті конкретних методів та алгоритмів.

Wavelet методи є відносно мало знайомими широкому колу інженерів. На сьогодні дуже мало перекладів на українську або російську мови монографій та вітчизняних публікацій з цих питань для інженерів [147,169,170,212,213,255,267]. Оригінальна англomовна література практично недоступна, внаслідок значної для наших науковців вартості (50-100\$). Виправленню такої ситуації дещо сприяє доступність internet ресурсів. Хороший підбір матеріалів по сплайнах знаходиться на сайті [www.autex.spb.ru](http://www.autex.spb.ru). В Україні почала діяти Національна електронна бібліотека ([www.nbuv.gov.ua](http://www.nbuv.gov.ua)) при Національній бібліотеці України імені В.І.Вернадського. Обсяг матеріалів ще є досить скромним, проте відкритість системи та статус національної програми дає надію на краще.



**Рисунок 1.1** Оцінка числа публікацій за посиланнями в наукових роботах. Пошук у системі citeseer за словом spline.



**Рисунок 1.2 Оцінка числа публікацій за посиланнями в наукових роботах. Пошук у системі citeseer за словом wavelet.**

Слід відмітити, що розвиток застосувань сплайнів у нашій країні відбувався ізольовано, як від зарубіжних досліджень так власне і в середині тих груп науковців, що займалися цими питаннями. Такий стан зумовлений як надмірною секретністю прикладних досліджень, так і морально та технічно застарілою системою поширення науково-технічної інформації. В плані інформаційного забезпечення, постановка та розв'язок наукових проблем є складною задачею із суб'єктивними та об'єктивними труднощами [137].

Ця робота є результатом практичної діяльності автора по застосуванню сплайнів у задачах обробки даних, а також узагальненням та вивченням результатів попередників. В першу чергу це роботи, розпочаті в КМУЦА в 1972 році Марченко Б.Г. та Шутко М.О., котрі створили наукову школу, послідовники котрої займаються проблемами розробки та застосування сплайн-методів в інженерних сферах. Шутко М.О. є науковим консультантом автора. Основним напрямком цих робіт є використання сплайн-функцій для обробки емпіричних цифрових даних та сигналів. Особливістю робіт є застосування в основному ермітових сплайнів у якості моделей детермінованої складової, при статистичному оцінюванні. Частина цих робіт виконувалась в рамках планів галузевої науково-дослідницької лабораторії експлуатації систем управління повітряним рухом. Сплайни застосовувались в задачах обробки даних, які характеризують експлуатаційні

характеристики РЕС УПР [143]. В повній мірі сплайни проявили свої переваги перед іншими, класичними поліноміальними моделями в задачах побудови аналітичних моделей характеристик точності радіолокаційних систем УПР [197]. Хороші результати отримані при використанні сплайнів у дослідженні та статистичному оцінюванні надійності систем УПР [143]. Сплайн-методи застосовувались в програмах та методиках політної перевірки систем УПР. В дослідженнях відображених у звітах брав участь і автор даної роботи.

Інші роботи виконувались в основному з ініціативи і на ентузіазмі дослідників у різних сферах діяльності, де у відповідних задачах було доцільним застосування сплайнів.

Це зокрема, обробка даних геофізичного зондування. Задача полягала у виділенні тренда в результатах гама та електромагнітного каротажу свердловин. Ставилась задача побудови емпіричної функції залежності відсоткового вмісту руди від каротажних даних. Отримана залежність використовувалась для розрахунку вмісту залізної руди вздовж профілю свердловини. Роботи виконувались для партії руднично-шахтної геофізики та в співпраці з геологами. На жаль, відсутність фінансування не дозволило розширити ці роботи до обсягів необхідних для оцінки кількісного економічного ефекту. Саме в цих задачах були розроблені підходи до побудови оптимальної сітки вузів для стохастичних даних [277,297]. Ці роботи є яскравим прикладом галузі, де зростання достовірності статистичних оцінок може дати значний економічний ефект. Зокрема - це чорна металургія. Так у роботі [244] зазначено: “Снижение колебаний содержания железа в агломерате с существующего уровня ( $\pm 1.5\%$ ) до теоретически необходимого ( $\pm 0.2\%$ ) позволит в масштабе СРСР увеличить выплавку чугуна на 4 млн.т/год при экономии около 2.5 млн.т кокса. ...

На горнорудных предприятиях требуется провести следующие организационные и технологические мероприятия:

- 1) улучшение работы геологических служб с целью выбора наиболее рационального направления ведения горных работ, обеспечивающего необходимое среднее качество добываемых руд в течение продолжительного времени;

2) применение математических методов и современной вычислительной техники при планировании добычи железной руды на шахтах и карьерах;

...

4) создание и использование специальных приборов для оперативного контроля за качеством руды; ... “

Очевидно, що ситуація з часом не лише не покращилась, але й погіршилась з очевидних економічних та соціальних причин. Необхідність застосування сплайнових моделей пояснюється потребою в тонких методах аналізу даних [165]: “ Для эффективного усреднения рудного сырья важны не только величины колебаний усредняемого компонента, но и внутренняя структура случайной функции этих колебаний, главным образом низкочастотная часть спектра случайной функции. Рудоусреднение содержит ряд сложных элементов, без учета которых не будет реальной пользы от дорогостоящих рудоусреднительных складов и соответствующих технических комплексов.”

Досягти зниження дисперсії, можна лише оптимізуючи весь технологічний цикл, але початок полягає в точній оцінці якості сировини у певній області кар'єру за даними геохімічних та геофізичних досліджень.

Роботи продовжуються у співпраці з кафедрою мінералогії Криворізького технічного університету, де сплайн-методи застосовують для фільтрації та аналізу результатів хімічних та спектрографічних досліджень.

Цілий ряд геофізичних явищ описуються солітонами і обробка цих сигналів із допомогою сплайнів є перспективною [1,27,28,29,36,66,75,88,94,117,129,24,186,216].

Алгоритми реального часу та стиснення – відновлення даних були розроблені і апробовані для потреб функціональної діагностики в медицині. З допомогою сплайнів здійснювалась фільтрація та стиснення даних реограм та електрокардіограм [299]. Для медичної діагностики стану кровоносної системи розроблялись методи лінійної та нелінійної ідентифікації її, як динамічної системи [279].

Методи сплайн екстраполяції показали свої переваги перед поліноміальними в економічних задачах: зокрема для оперативного прогнозування курсу валют у дилінгових операціях [284]. Для вказаних даних характерний складний характер нестационарності математичного сподівання та дисперсії [164].

Роль тонких методів аналізу сигналів та зображень в медичній діагностиці є загально зрозумілою, що підтверджується значною кількістю наукових досліджень в цій сфері із застосуванням вейвлет методів в розвинених країнах (зокрема, в Biomedical Imaging Group) [7,8,9,10,11,16,17,35,41,44,47,53,55,56,68,69,70,72,77, 93,96,97]. Сплайн-методи використовують моделювання руху людини [192] та створення протезів. Методам аналізу електрокардіографічних та реографічних сигналів присвячено багато наукових робіт у ближньому зарубіжжі [104,127,128,131,155,156,173,210,214,218,219,237]. Застосування вейвлет методів для аналізу кардіографічних сигналів дозволило підвищити прогнозну цінність інформації у середньому на 20% [156,218].

Що стосується авіаційної та космічної техніки то роль сплайнових технологій у радіолокації, експлуатації є доведеною цілим рядом теоретичних та прикладних досліджень [195,197,221,231,249,265].

Цілий ряд наукових робіт виконаних останнім часом в Україні пов'язані із сплайн-функціями [110,165,176,177,194,205,228,229,230,234,246,247,248,242].

Розробки по ідентифікації спектрів сигналів знайшли застосування в радіолокації: для вимірювання доплерівських сигналів [272], та картографування завад[289]. Перспективною є обробка радіолокаційних зображень з РЛС із синтезованою апертурою (synthetic aperture radar, SAR) [30,65] доплерівських сигналів від метеорологічних об'єктів [24,78,101,102,103,111,125,148,253,262,271].

Таким чином, перераховані апробовані напрями застосування сплайнів в різних сферах практичної діяльності свідчать про безпосередній зв'язок теоретичних сплайнових розробок із їх застосуванням. Саме практичні потреби в сплайнових алгоритмах стимулювали теоретичні пошуки та алгоритмічні рішення.

Значний досвід практичної роботи та викладені вище міркування дозволяють окреслити основні риси цілісної сплайнкової технології обробки цифрових сигналів.

Інформаційна сплайн-технологія повинна охоплювати широку сферу застосування і має включати:

- розв'язання задач ідентифікації сигналів (у вузькому розумінні, як оцінювання параметрів сплайн-моделі) у частотній та (або) часовій чи просторовій області. Побудова числової моделі може мати як окреме прикладне значення, так і є необхідною для вибору чи синтезу сплайнового базису, що максимально відповідає би характеру вхідних даних;
- сплайн-фільтрацію сигналів. Очевидно, що варто говорити про алгоритми фільтрації, що реалізують очевидні переваги сплайнів у поєднанні з високою ефективністю розрахунків.

Для реалізації зазначених вище основних завдань необхідно розв'язати практичні задачі:

- побудови згладжуючого сплайна на оптимальних (або близьких до оптимальних) сітках вузлів;
- побудови сплайнових базисів із заданими частотними властивостями;
- вирішення задачі побудови інтерполяційних сплайнів без розв'язування системи інтерполяційних рівнянь;
- створення ефективних швидких алгоритмів фільтрації сигналів із шумами.

## **1.7 Висновки**

Сплайни виникли, як апарат наближення, що дозволяв вирішити ряд труднощів класичного поліноміального наближення та орієнтований на використання комп'ютерної техніки. Розвиток теорії та практики сплайнів тісно пов'язаний з розвитком та поширенням комп'ютерної техніки. Переважними сферами застосування сплайнів є прикладна математика та геометричне

моделювання. Інженерні області застосування сплайнів розвинуті значно менше ніж чисто математичні. В області обробки цифрових даних і зокрема, в алгоритмах реального часу сплайни застосовуються у wavelet методах, поряд з іншими локальними функціями. Розвиток сплайн-методів обробки цифрових даних потребує врахування специфічного характеру даних, та ряду особливих вимог до таких методів. Особливості цифрових даних можуть як ускладнювати, так і сприяти розробці відповідних алгоритмів та методів.

З точки зору автора можна виділити наступні проблеми, розв'язок яких сприятиме широкому застосуванню сплайнів в інженерних задачах обробки цифрових даних:

- спрощення розрахунків і забезпечення можливості роботи в реальному часі;
- застосування не лише інтерполяційних сплайнів, але в основному згладжуючих, побудованих за методом найменших квадратів;
- визначення прийнятної для практичних цілей процедури оптимального розміщення абсцис точок стикування фрагментів;
- визначення процедури оцінки нев'язки за емпіричними даними.

Актуальність та перспективність використання сплайнів у задачах обробки цифрових даних безпосередньо впливає з їх хороших наближувачих та обчислювальних властивостей. Це твердження не прямо підтверджується інтенсивним розвитком wavelet методів, що застосовують локальні базисні функції, до котрих належать і сплайни. Іншим аргументом є хороші результати застосування сплайнів у деяких інженерних сферах.

Найбільш придатними для використання у сфері signal processing є локальні ермітові сплайни з неперервною першою похідною. Для статистичних оцінок найбільш придатним є метод найменших квадратів.

## 2. МЕТОДИ ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

### 2.1 Постановка задачі

Основною метою даного розділу є розробка та обґрунтування методів побудови інтерполяційних сплайнів, найбільш придатних для застосування в задачах обробки сигналів за наявності емпіричної інформації про частотні властивості чи природу сигналів.

В попередньому розділі було показано, що існує велика різноманітність в підходах до побудови сплайнів і до самого визначення сплайна. Домінуючим видом сплайнів є кубічний сплайн з двома неперервними похідними та відповідний B-сплайн. Це пояснюється його оптимальними властивостями та легкістю математичних побудов. Оптимальні властивості та неперервність двох похідних не є невід'ємним явищем серед даних, що описують технічні системи. Тим більше, якщо перша похідна в точках стику визначається з умови неперервності другої похідної. З цієї точки зору більш привабливими є ермітові сплайни, перша похідна яких задається незалежно. Як правило її значення задають довільно, або визначають з вхідних даних. Розрив другої похідної, що має місце в багатьох випадках, не має принципового значення. Очевидні і обчислювальні переваги ермітових сплайнів, зв'язані з локальним способом визначення похідних у вузлах. Тому в підрозділі 2.2 розглядається універсальний підхід до побудови ермітових сплайнів. Поставлена задача побудувати систему інтерполяційних рівнянь на локальному фрагменті сплайна, та привести рішення до лагранжівної форми. Вибір лагранжівної форми дозволяє виразити значення сплайна через обмежену кількість значення у вузлах. Отримавши вирази для локального фрагмента необхідно побудувати локальний базисний сплайн, та відповідну систему базисних функцій. Лінійна комбінація базисних сплайнів утворює довільний сплайн.

Повернемося до іншої ознаки сплайна: вигляду його окремого фрагмента. Коли мова йде про сплайн, то майже автоматично мається на увазі алгебраїчний поліном. Проте рішенням більшості диференціальних рівнянь, котрі описують



реальні технічні системи є гармонійні або експоненційні функції. Відомі підходи до побудови сплайнів з різноманітних фрагментів потребують індивідуального підходу до кожного випадку [221]. Це перешкоджає розробці сплайн-технології, яка потребує однозначності фаз. Тому необхідний метод який дозволять будувати сплайн з неперервних фрагментів широкого класу функцій на основі загального підходу. Отже, коли надалі мова йтиме про ермітові чи В-сплайни, то це не означатиме, що вони є алгебраїчними. Автор надалі робитиме відповідні зауваження, якщо матеріал стосуватиметься конкретного виду сплайна.

Універсальність методу пов'язана зі зниженням ефективності в порівняннях з методами пристосованими до певних особливостей. Оскільки одним із завдань даної роботи є побудова методів та алгоритмів реального часу, то їх характерною особливістю є регулярність даних. Якщо обмежитись регулярністю сітки вузлів сплайна, то виявляється можливим будувати сплайни, використовуючи згортку локальних симетричних функцій. Такий спосіб побудови відомий для алгебраїчних В-сплайнів [142]. Автор ставить задачу вивчити особливості такої побудови для неперервних відрізків широкого класу функцій. В підрозділах 2.3 та 2.4 розглядається метод побудови базисних сплайнів з однією та двома неперервними похідними на регулярних сітках вузлів [273,274]. Проте аналітичний спосіб побудови навіть для рівномірної сітки вузлів часто виявляється досить громіздким. В підрозділі 2.5 розглянуто побудову дискретних В-сплайнів для регулярної сітки вузлів та сітки даних [275]. Крок сітки вузлів та сітки даних мають бути кратними. Тобто схема розміщення даних на кожному фрагменті сплайна має бути однаковою. Отриманням сплайнового базису не завершується задача інтерполяції. Необхідно вирішити систему інтерполяційних рівнянь, щоб визначити коефіцієнти при базисних функціях. Уникнути цих розрахунків можна привівши В-сплайн до лагранжівної форми. В підрозділі 2.6 ця задача вирішується локальним способом [274]. Розглядається локальний фрагмент сплайна і для нього вирішується задача інтерполяції. Трансформований базис є ермітовим. Інший спосіб, розглянутий в підрозділі 2.7, ґрунтується на наближеному вирішенні глобальної системи

інтерполяційних рівнянь [278]. В заключному підрозділі 2.8 сформульовано висновки. Всі питання розглянуті в другому розділі стосуються виключно інтерполяційних сплайнів. Проте саме інтерполяційні сплайни є основою, на якій будуються більш складні методи обробки даних, розглянуті в наступних розділах.

## 2.2 Загальний підхід до побудови локальних інтерполяційних сплайнів

Розглянемо значення сплайна  $S(x)$  в точці  $x$ , яка належить  $i$ -му фрагменту сплайна, обмеженому вузловими точками:  $x_i, x_{i+1}$ . Для довільного полінома  $n$ -го порядку (  $n$ -парне число) маємо

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i(x), \quad (2.1)$$

де  $B_i(x)$  - лінійно незалежні, неперервні функції певного виду;  $a_i$  - числові коефіцієнти. Для даного полінома знайдемо розв'язок інтерполяційної задачі на множині вузлів інтерполяції  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ . Вважатимемо, що вузли інтерполяції співпадають з вузлами сплайна і виконується умова  $x_i < x_{i+1}$ .

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (2.2)$$

де  $f(x_i)$  значення інтерпольованої функції у вузлових точках (рис.2.1).

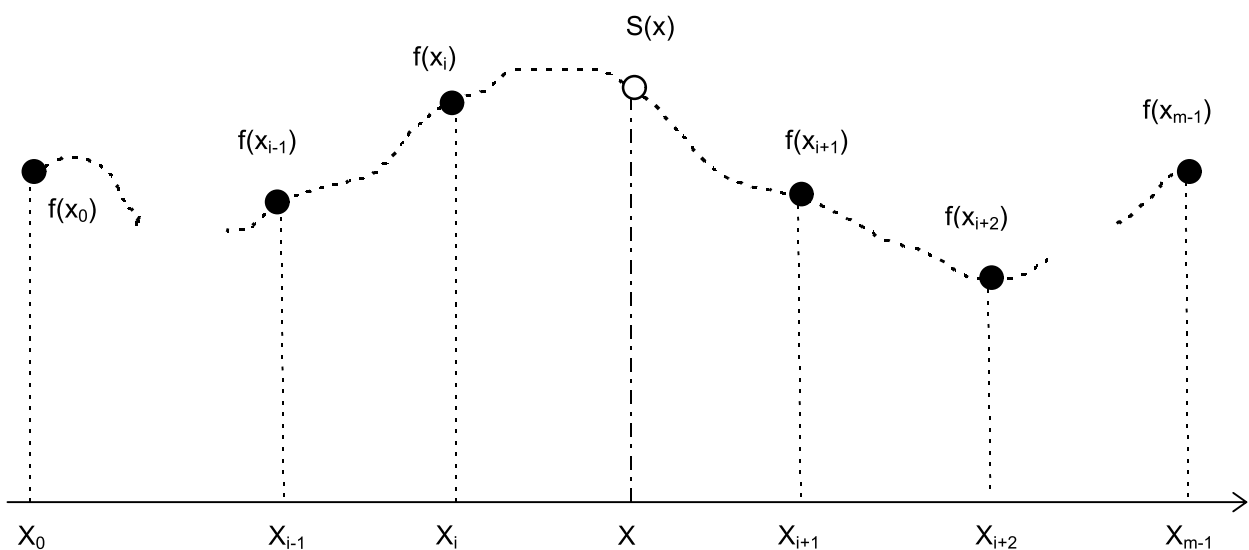


Рисунок 2.1. Схема побудови інтерполяційного сплайна.

Задача матиме однозначний розв'язок за умови наявності  $m=n$  вузлів інтерполяції.

Для  $m$  вузлів система з  $m$  рівнянь має вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ P_n(x_{m-1}) = f(x_{m-1}) \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

Якщо  $m=n$ , маємо загальновідомий спосіб інтерполяції. Розглянемо інший випадок:  $n=2m$ . Для однозначного розв'язку доповнимо систему з  $m$  рівнянь  $m$  рівняннями для похідних. Тобто вимагатимемо рівності у вузлах не лише значень  $f(x_i)$ , але й першої похідної  $f'(x_i)$ . Задавши значення першої похідної у вузлах сплайна, ми задали нахил дотичної у точках стику фрагментів сплайна. В матричному вигляді отримаємо:  $\mathbf{BA}=\mathbf{F}$ .

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ P_n(x_{m-1}) = f(x_{m-1}) \\ P'_n(x_0) = f'(x_0) \\ P'_n(x_1) = f'(x_1) \\ \dots \\ P'_n(x_{m-1}) = f'(x_{m-1}) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

або

$$\left. \begin{array}{l} a_0 B_0(x_0) + \dots + a_i B_i(x_0) + \dots + a_{n-1} B_{n-1}(x_0) = f(x_0) \\ a_0 B_0(x_1) + \dots + a_i B_i(x_1) + \dots + a_{n-1} B_{n-1}(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ a_0 B_0(x_{m-1}) + \dots + a_i B_i(x_{m-1}) + \dots + a_{n-1} B_{n-1}(x_{m-1}) = f(x_{m-1}) \\ a_0 B'_0(x_0) + \dots + a_i B'_i(x_0) + \dots + a_{n-1} B'_{n-1}(x_0) = f'(x_0) \\ a_0 B'_0(x_1) + \dots + a_i B'_i(x_1) + \dots + a_{n-1} B'_{n-1}(x_1) = f'(x_1) \\ \dots \\ a_0 B'_0(x_{m-1}) + \dots + a_i B'_i(x_{m-1}) + \dots + a_{n-1} B'_{n-1}(x_{m-1}) = f'(x_{m-1}) \end{array} \right\} \cdot$$

Звідки відомим методом Крамера знаходимо

$$a_i = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{ki} f(x_k)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{m+ki} f'(x_k)}{\Delta}, \quad (2.5)$$

де  $\Delta_{ki}$  алгебраїчне доповнення матриці планування В;  $\Delta$  детермінант матриці В.

Отримані значення підставимо в рівняння (2.1), та зведемо подібні:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x) \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{ki} f(x_k)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{m+ki} f'(x_k)}{\Delta} \right], \\ P_n(x) &= \frac{1}{\Delta} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x) \Delta_{ki} + \sum_{k=0}^{m-1} f'(x_k) \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x) \Delta_{m+ki} \right], \\ P_n(x) &= \left[ \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \tilde{X}_k(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f'(x_k) \tilde{\tilde{X}}_k(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким чином ми визначили базисні функції  $\tilde{X}_k(x)$  та  $\tilde{\tilde{X}}_k(x)$  в лагранжівій формі запису. Проблема полягає в тому, що у виразах присутні значення похідних у вузлах інтерполяції. На практиці подібна ситуація зустрічається доволі рідко. Проте можемо визначити похідні у вузлах наближено, через розділені різниці значень функції:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad (2.7)$$

або через центральні розділені різниці, з врахуванням нерівномірності сітки:

$$f'(x_k) \approx q_k \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} + w_k \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad (2.8)$$

$$\text{де } q_k = 1 - w_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}}.$$

Звівши подібні, отримаємо для  $x \in [x_{m/2-1}, x_{m/2}]$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \hat{X}_k(x). \quad (2.9)$$

Фактично отримано вираз, за допомогою якого визначатиметься значення сплайна на одному фрагменті, через значення в обмеженому числі вузлових точок. Тобто ми

маємо локальний ермітів сплайн (враховуючи застосування похідних).

Для сплайна, що складається з  $R$  фрагментів отримаємо

$$S(x) = \sum_{j=0}^R f(x_j) \tilde{X}_j(x), \quad x \in [x_0, x_R], \quad (2.10)$$

де  $\tilde{X}_j(x)$  локальна функція форми, що є сумою відповідно зважених функцій  $\hat{X}_k(x)$ .

Принципова відмінність останнього виразу в тому, що  $x$  визначається на всій множині фрагментів сплайна. Значення сплайна в точці  $x$ , яка належить  $j$ -му фрагменту визначатиметься через локальні базисні сплайни за формулою:

$$S(x) = f(x_{j-m/2-1}) \tilde{X}_{j-m/2-1}(x) + \dots + f(x_j) \tilde{X}_j(x) + f(x_{j+1}) \tilde{X}_{j+1}(x) + \dots + f(x_{j+m/2}) \tilde{X}_{j+m/2}(x). \quad (2.11)$$

Врахувавши, що базисна функція складається з  $m$  фрагментів і відповідно є сумою  $m$  складових, можна записати:

$$S(x) = f(x_{j-m/2-1}) \hat{X}_{0,j-m/2-1}(x) + \dots + f(x_j) \hat{X}_{m/2-1,j}(x) + f(x_{j+1}) \hat{X}_{m/2,j+1}(x) + \dots + f(x_{j+m/2}) \hat{X}_{m-1,j+m/2}(x). \quad (2.12)$$

Подвійний індекс біля складових базисних функцій  $\hat{X}_{k,j}(x)$  слід трактувати як  $k$ -та складова  $j$ -ї базисної функції.

Відмітимо ще один важливий аспект побудови сплайнів. Це крайові умови. В нашому контексті проблема виникає в розрахунках на крайніх фрагментах і пов'язана з відсутністю сусідніх фрагментів ліворуч та праворуч. Внаслідок цього розрахункові вирази, отримані для центральних фрагментів, необхідно модифікувати. Найпростіше відкинути складові суми (2.12) для відсутніх фрагментів. Однак, довжина сусідніх фрагментів часто неявно задіяна у розрахункових виразах. Тому можливе спотворення крайніх фрагментів. Інша складність - визначення похідних, вирішується для крайніх вузлів заміною центральної різниці на звичайну. При цьому втрачається точність її визначення. З погляду автора найбільш прийнятним і природним є неявне продовження сплайна ліворуч та праворуч у нескінченість. Винесені у нескінченість крайні вузли явно не

враховуються, але в розрахунках приймають участь, як граничні відношення. Практика використання такого продовження для кубічних ермітових сплайнів показує відсутність спотворень з країв, та дає можливість вести розрахунки сплайна поза межами явних крайніх вузлів.

Для сплайнів з рівною шириною фрагментів природнім є неявне продовження фрагментами рівної довжини.

Розглянемо, як приклад, побудову кубічних ермітових сплайнів.

Базисні функції алгебраїчного полінома:  $B_i(x) = x^i$ , та перша похідна від них  $B_i'(x) = ix^{i-1}$ . Для кубічного рівняння прийнемо  $m=2, n=4$ :

$$P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (2.13)$$

Система інтерполяційних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1' \\ f_2' \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Знайшовши  $\mathbf{A}$  та підставивши в (2.13) отримаємо:

$$\tilde{X}_0(x) = \frac{2x^3 - 3x^2(x_1 + x_2) + 6x_1x_2x - x_2^2(3x_1 - x_2)}{(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)(x_2 - x_1)}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{X}_1(x) = \frac{(x - x_1)^2(2x + x_1 - 3x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)},$$

$$\tilde{\tilde{X}}_0(x) = \frac{(x - x_1)(x^2 - 2x_2x + x_2^2)}{(x_1 - x_2)^2},$$

$$\tilde{\tilde{X}}_1(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)}{(x_1 - x_2)^2},$$

$$P_4(x) = [f(x_1)\tilde{X}_0(x) + f(x_2)\tilde{X}_1(x) + f'(x_0)\tilde{\tilde{X}}_0(x) + f'(x_1)\tilde{\tilde{X}}_1(x)]. \quad (2.16)$$

Вигляд складових отриманих базисів на окремому фрагменті, для рівномірної сітки  $\{0,100,200,300,400\}$  показано на рис.2.2.

Визначимо похідні за формулами

$$f'_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}\right) \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1},$$

$$f'_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} + \left(1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2},$$

підставимо в формулу (2.16) та зведемо подібні, аналогічно попередньому.

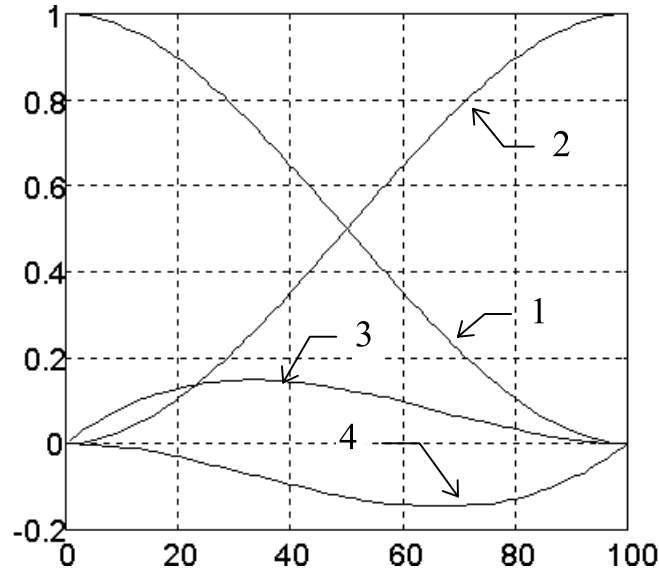


Рисунок 2.2. Складові базисних функцій (2.15). 1- $X_0$ , 2- $X_1$ , 3- $\tilde{X}_0$ , 4- $\tilde{X}_1$ .

Отримаємо  $\hat{X}_0(x), \hat{X}_1(x), \hat{X}_2(x), \hat{X}_3(x)$ . В загальному вигляді, зваживши на обсяг, вирази наводити не будемо. Відмітимо, що аналітичні вирази отримані з допомогою системи аналітичної алгебри “Derive”. Дана система безпосередньо генерує програмні коди на чотирьох алгоритмічних мовах, тому для програмної реалізації довжина виразу не є проблемою. Для вказаного базису вирази опубліковані в [143], де вони отримані дещо іншим способом. Шляхом перетворень автор отримав більш оптимальний з точки зору обчислень алгоритм ніж в [143]:

$$\begin{aligned} \hat{X}_0(x) &= -p_1 p_4 b, \\ \hat{X}_1(x) &= p_1 c - p_2 d + b, \\ \hat{X}_2(x) &= -p_4 c - p_3 d + a, \\ \hat{X}_3(x) &= -p_3 p_2 d \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
a &= (x - x_j) / h_j, \\
b &= 1 - a, \\
c &= ab^2, \\
d &= a^2b, \\
p_1 &= \frac{h_j}{h_{j-1}}, \quad p_2 = \frac{h_j}{(h_{j+1} + h_j)}, \\
p_3 &= \frac{h_j}{h_{j+1}}, \\
p_4 &= \frac{h_j}{(h_{j-1} + h_j)}, \\
h_{j-1} &= x_j - x_{j-1}, \\
h_j &= x_{j+1} - x_j, \\
h_{j+1} &= x_{j+2} - x_{j+1},
\end{aligned}$$

Труднощі розрахунку на крайніх фрагментах розв'язуються дуже природно, якщо вважати, що сплайн доповнюється з обох країв нескінченими фрагментами. Тоді для першого фрагмента маємо  $p_1 = 0$ ,  $p_4 = 0$ , для останнього  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 0$ . Зауважимо, що якщо покласти  $c = 0$ ,  $d = 0$ , то отримаємо лінійний сплайн (ламану).

В загальному вигляді, для сплайна який складається з  $R$  фрагментів маємо вираз:

$$S(x) = \sum_{j=0}^R f(x_j) \check{X}_j(x), \quad (2.18)$$

де  $\check{X}_j(x)$  локальна базисна сплайн-функція, що складається з чотирьох фрагментів:

$$\check{X}_j(x) = \begin{cases} \hat{X}_{0,j-1}(x), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \hat{X}_{1,j}(x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ \hat{X}_{2,j+1}(x), & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ \hat{X}_{3,j+2}(x), & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+3}) \end{cases} \quad (2.19)$$



Вигляд базисної функції показано на рис.2.3.

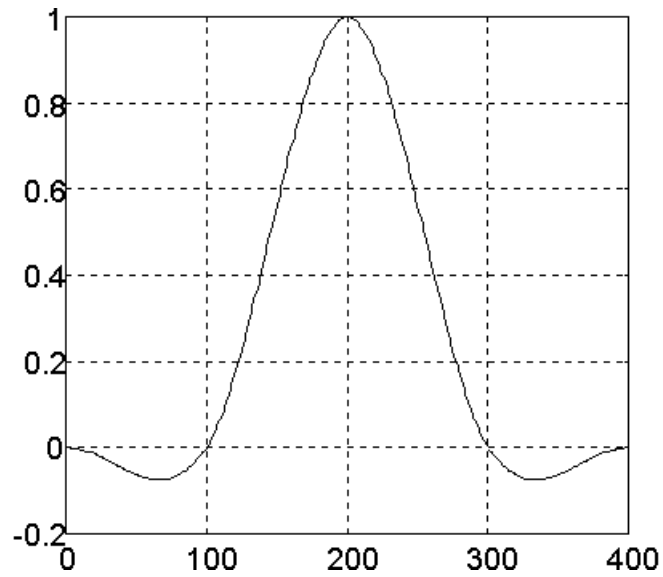


Рисунок 2.3. Базисна функція кубічного ермітового сплайна

Отже значення сплайна в довільній точці, що належить  $j$ -му фрагменту дорівнює (рис.2.4):

(2.20)

$$S(x) = f(x_{j-1})\hat{X}_{0,j-1}(x) + f(x_j)\hat{X}_{1,j}(x) + f(x_{j+1})\hat{X}_{2,j+1}(x) + f(x_{j+2})\hat{X}_{3,j+2}(x).$$

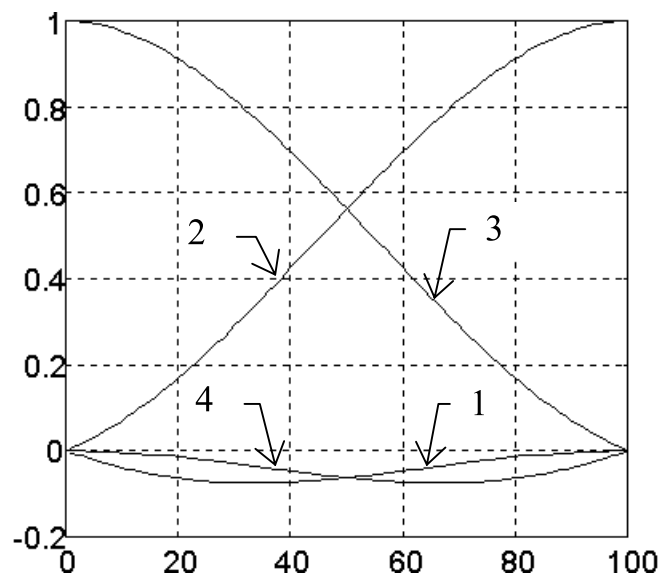


Рисунок 2.4. Складові базисних функцій на окремому фрагменті сплайна. 1- $\hat{X}_0$ , 2- $\hat{X}_1$ , 3- $\hat{X}_2$ , 4- $\hat{X}_3$ .

Якщо фрагменти сплайна однакової довжини, то індекси фрагмента в останньому виразі можна опустити ( за винятком крайніх фрагментів).

Перевагою розглянутого підходу є його універсальність і відносна простота. Таким способом можлива побудова двох та  $n$  мірних ермітових сплайнів. Проте аналітичні вирази можуть бути надзвичайно громіздкими, що робить проблематичним їх використання для швидких алгоритмів. Описаним способом можна будувати сплайни лише з фрагментів поліномів з лінійною залежністю від параметрів. Тому розглянемо інший підхід до побудови сплайнових базисів.

### 2.3 Побудова інтерполяційних сплайнів із неперервною першою похідною на рівномірних сітках вузлів

Твердження: нехай функція  $f(x)$ , певного вигляду, є локальна

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ f_2(x), & x \in [\frac{a+b}{2}, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.21)$$

неперервна і інтегрована на  $[a, b]$ , обмежена знизу  $f(x) > D$  та зверху  $f(x) < U$ , і симетрична:

$$f_1(a+x) = f_2(b-x), \quad x \in [0, \frac{b-a}{2}], \quad (2.22)$$

а функція 
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.23)$$

тоді лінійна згортка  $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$  є локальним сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні значення функції та щонайменше першої похідної. Функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  називатимемо

породжуючими базисний сплайн. Вважатимемо також, що породжуючі функції та їх добуток в заданій локальній області інтегровані (рис.2.5).

Покажемо це. Для зручності позначимо  $(b-a)/2=h$ .

Тоді

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f_1(t) dt, & x \in [a, a+h) \\ \int_a^{a+h} f_1(t) dt + \int_{a+h}^x f_2(t) dt, & x \in [a+h, b) \\ \int_{a+h}^b f_1(t) dt + \int_{a+h}^x f_2(t) dt, & x \in [b, b+h) \\ \int_{x-2h}^b f_2(t) dt, & x \in [b+h, b+2h) \\ 0, & x \notin [a, b+2h) \end{cases}, \quad (2.24)$$

або

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [a, a+h) \\ F_2(x), & x \in [a+h, b) \\ F_3(x), & x \in [b, b+h) \\ F_4(x), & x \in [b+h, b+2h) \\ 0, & x \notin [a, b+2h) \end{cases}. \quad (2.25)$$

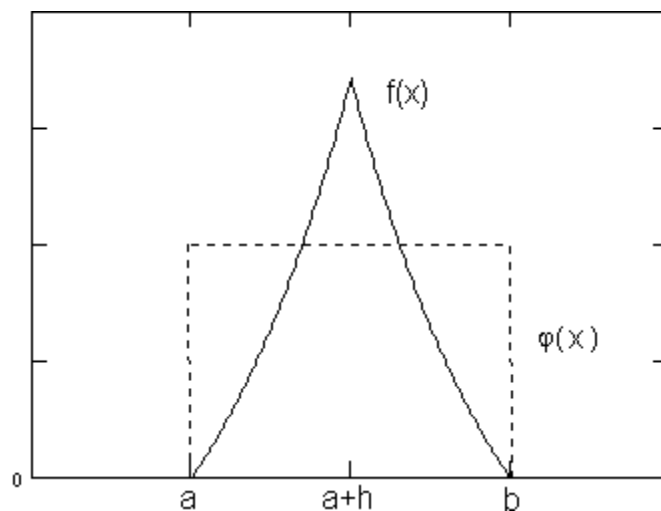


Рисунок 2.5. Функції, що породжують базисний сплайн

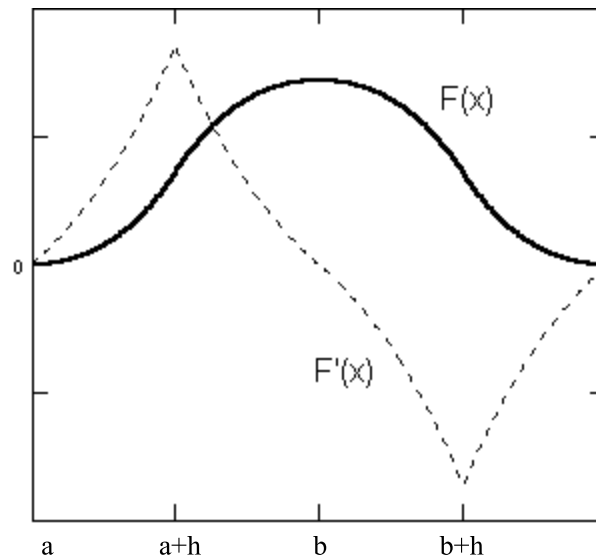


Рисунок 2.6. Базисний сплайн та його перша похідна

З (2.24, 2.25) слідує, що отримана функція складається з чотирьох фрагментів (рис.2.6). З симетричності функцій  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  впливає симетричність функції  $F(x)$ . Її неперервність є очевидною, як інтегралу від добутку неперервних функцій. Отже маємо сплайн. Вияснимо неперервність похідних. Знайдемо значення першої похідної  $F(x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, a+h), \\ f_2(x), & x \in [a+h, a+2h], \\ -f_1(x), & x \in [a+2h, a+3h), \\ -f_2(x), & x \in [a+3h, a+4h], \\ 0, & x \notin [a, a+4h] \end{cases} \quad (2.26)$$

Таким чином, перша похідна  $F(x)$  на чотирьох інтервалах є неперервною, якщо неперервні породжуючі функції. В неперервності похідної в точках стику  $F(x)$  легко переконатись, розглянувши вирази та рис.2.5,2.6. Фактично перша похідна від  $F(x)$  є антисиметричною відносно  $b$  копією  $f(x)$  рис.2.6. Значення першої похідної в точках  $a$ ,  $b+2h$  рівне нулю, а в точках  $a+h$ ,  $b+h$  приймає значення рівне  $f(a+h)$ ,  $-f(a+h)$ . Неперервність другої похідної не гарантується, якщо не гарантована неперервність першої похідної від  $f(x)$ .

Побудуємо сплайновий базис. Нехай  $a=0$ . Позначимо такий сплайн  $H_0=F(x)$ , а зміщені відносно  $H_0$  (пропорційно  $h$ ) сплайни відповідно  $\dots, H_{-m}, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$ . *Елементарні сплайни  $\dots, H_{-m}, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$  є лінійно незалежні і складають систему лінійно незалежних базисних функцій  $\{H_m\}$ .*

В лінійній незалежності конкретного базису легко переконатися склавши інтерполяційне рівняння для чотирьох точок, що належать одному фрагменту.

$$\begin{bmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & F_3(x_1) & F_4(x_1) \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & F_3(x_2) & F_4(x_2) \\ F_1(x_3) & F_2(x_3) & F_3(x_3) & F_4(x_3) \\ F_1(x_4) & F_2(x_4) & F_3(x_4) & F_4(x_4) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Відмінність дискримінанта від нуля свідчатиме про лінійну незалежність складових на фрагменті. Для всієї області сплайна матриця буде блочно-діагональною, з дискримінантом відмінним від нуля.

Розглянемо властивості базисних функцій  $\{H_m\}$ . Функції сімейства  $\{H_m\}$  є локальними. Відмітимо, що спочатку автор використовував термін “квазіортогональні” [273] (термін був використаний Хемінгом для позначення не

зовсім ортогональних функцій, для котрих скалярний добуток  $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)f_n(x) \approx 0$

[260]). Проте він погано відображає особливості сплайнових базисів, які суттєво відмінні від ортогональних. В той же час саме локальність визначає ефективність обчислень. Локальні властивості проявляються в особливостях розрахунку скалярного добутку для базисних сплайнів.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)dx = 0 \text{ при } |m - n| > 3. \quad (2.28)$$

Для кожної функції  $H_m$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_m(x)]^2 dx = \int_0^{4h} [H_0(x)]^2 dx = k, \text{ де } k = \text{const}, k > 0, \quad (2.29)$$

отже систему  $\{H_m\}$  легко нормувати, визначивши  $k$  для однієї з функцій. Тоді можна користуватись локальним нормованим сплайновим базисом  $\{\bar{H}_i\}$ , де  $\bar{H}_i = \frac{1}{\sqrt{k}} H_i$ .

Розглянемо скалярний добуток двох довільних базисних функцій:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_m(x) \bar{H}_n(x) dx = 1, \text{ при } m = n, \text{ для нормованого базису.}$$

В довільному випадку маємо

(2.30)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 2 \left[ \int_{-2h}^h F_1^2(x) dx + \int_{-h}^0 F_2^2(x) dx \right], & |m - n| = 0 \\ \int_{-h}^0 F_1(x) F_2(x) dx + \int_0^h F_2(x) F_3(x) dx + \int_h^{2h} F_3(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 1 \\ \int_{-h}^h F_1(x) F_3(x) dx + \int_h^{2h} F_2(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 2 \\ \int_0^{2h} F_1(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 3 \\ 0, & |m - n| > 3 \end{cases}$$

Тобто в довільній точці лише 4 базисних функції приймають ненульові значення. Зважаючи на симетричність базисних функцій та регулярність сітки вузлів сплайна в довільній точці  $x$  маємо ненульові значення  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$ ,  $F_4(x)$ .

Розглянемо приклади деяких сплайнових базисів.

Експоненційний базисний сплайн на сітці вузлів 0,1,2,3,4.

$$f_1(x) = e^x - 1, \quad f_2(x) = e^{(2-x)} - 1. \quad (2.31)$$

$$F_1(x) = e^x - x - 1, \quad F_2(x) = 2e - x - 1 - e^{(2-x)},$$

$$F_3(x) = 2e + x - 5 - e^{(x-2)}, \quad F_4(x) = e^{4-x} + x - 5. \quad (2.32)$$

Породжуючі функції показано на рис.2.5, а базисний сплайн на рис.2.6.

Квадратичний базисний сплайн на сітці вузлів 0,1,2,3,4

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2 - x. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}, \\
 F_2(x) &= \int_0^x t dt + \int_1^x (2-t) dt = 2x - \frac{x^2}{2} - 1, \\
 F_3(x) &= 2(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} - 1, \quad F_4(x) = \frac{(4-x)^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

## 2.4 Утворення інтерполяційних сплайнів з неперервною першою та другою похідними на рівномірній сітці вузлів

Аналогічний попередньому підхід використаємо для побудови сплайнів із двома неперервними похідними. Як і в попередньому випадку маємо деяку локальну функцію  $f(x)$ , неперервну на  $[a, b]$  і симетричну (рис.2.7):

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{для } x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ f_2(x), & \text{для } x \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, & \text{для } x \notin [a, b] \end{cases}, \tag{2.35}$$

$$f_1(a+x) = f_2(b-x), \quad x \in [0, \frac{b-a}{2}],$$

Функція  $\varphi(x)$  має аналогічні властивості (рис.2.7)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{для } x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ \varphi_2(x), & \text{для } x \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, & \text{для } x \notin [a, b] \end{cases}. \tag{2.36}$$

Лінійна згортка  $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$  є локальним сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні значення функції і першої та другої похідних. Покажемо це. Позначимо  $(b-a)/2=h$ .

(2.37)

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f_1(t)\varphi_1(x-t)dt, & x \in [a, a+h] \\ \int_{a+h}^x f_1(t)\varphi_2(x-t)dt + \int_a^{x-h} f_1(t)\varphi_1(x-t)dt + \int_{a+h}^x f_2(t)\varphi_1(x-t)dt, & x \in [a+h, a+2h] \\ \int_{a+h}^{x-h} f_1(t)\varphi_2(x-t)dt + \int_{a+h}^x f_2(t)\varphi_2(x-t)dt + \int_{x-h}^{a+2h} f_2(x)\varphi_1(x-t)dt, & x \in [a+2h, a+3h] \\ \int_{x-2h}^{a+2h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt, & x \in [a+3h, a+4h] \\ 0, & x \notin [a, a+4h] \end{cases} \quad (2.38)$$

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [a, a+h] \\ F_2(x), & x \in [a+h, a+2h] \\ F_3(x), & x \in [a+2h, a+3h] \\ F_4(x), & x \in [a+3h, a+4h] \\ 0, & x \notin [a, a+4h] \end{cases}.$$

Функція  $F(x)$  є сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні першу та другу похідні (рис.2.8). Очевидно, що отримана функція є сплайном, оскільки складається з чотирьох фрагментів. Щоб визначити диференційні властивості побудованого сплайна, звернемося до математичного аналізу. Фрагменти сплайна є інтегралами, що залежні від параметрів, включаючи інтеграли з межами інтегрування залежними від параметрів. Тому для з'ясування властивостей наведемо відомі з курсу матаналізу основні теореми [161].

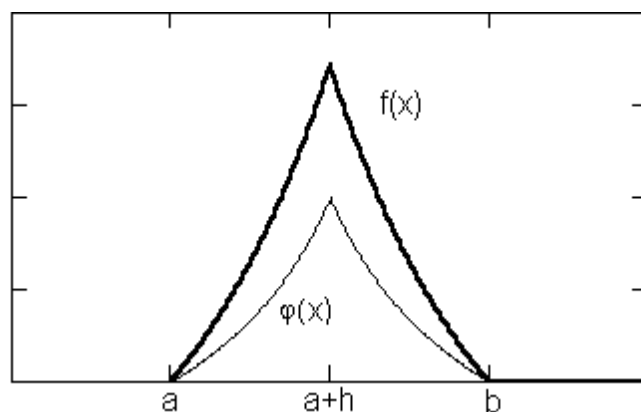


Рисунок 2.7. Функції, що породжують базисний сплайн



Позначимо підінтегральну функцію, що є добутком породжуючих функцій,  $Q(x,t) = f(t)\varphi(x-t)$ .  $Q(x,t)$  задана в прямокутнику  $\Pi$ , який включає область визначену співвідношенням  $\{d(x) \leq t \leq u(x), c \leq x \leq v\}$ . Позначимо також інтеграл

$$I(x) = \int_{u(x)}^{d(x)} Q(x,t) dt.$$

Визначимо межі прямокутника  $\Pi$  для нашого випадку. Функція нижньої межі  $d(x)$  та верхньої  $u(x)$  є лінійними функціями. Межі зміни параметра  $x$ :  $c=a$ ,  $v=a+4h$ .

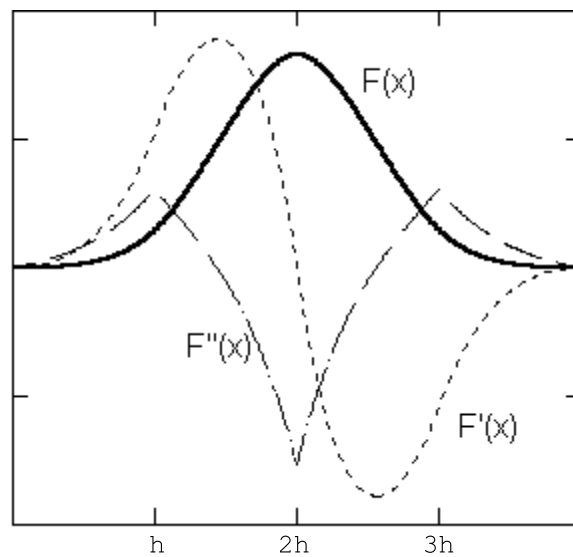


Рисунок 2.8 Базисний сплайн та його похідні

Теорема 1, [161]: Нехай  $Q(x,t)$  неперервна на прямокутнику  $\Pi$ , а функції  $u(x)$ ,  $d(x)$  неперервні на сегменті  $[c,v]$ . Тоді функція  $I(x)$  неперервна на сегменті  $[c,v]$ .

Теорема 2, [161]: Нехай функція  $Q(x,t)$  і її похідна  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  неперервні в прямокутнику  $\Pi$ . Нехай  $d(x)$ ,  $u(x)$  диференційовані на сегменті  $[c,v]$ . Тоді  $I(x)$  диференційована на сегменті  $[c,v]$  і її похідна  $I'(x)$  може бути розрахована за формулою

$$I'(x) = \int_{d(x)}^{u(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dt + u'(x)Q(u(x),x) - d'(x)Q(d(x),x).$$

З теореми 1 слідує, що сплайн є неперервним на сегменті, оскільки  $Q(x,t)$  є добутком неперервних функцій, а  $u(x)$  та  $d(x)$  прямі, або константи.

Розглянемо питання неперервності значень та першої і другої похідних в точках стику сплайна. Для спрощення викладення покладемо  $a=0$ .

Вияснимо неперервність функції в точках стику.

В точці  $x=0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \int_0^x f_1(t) \varphi_1(x-t) dt = \lim_{x \rightarrow 0-0} 0 = 0.$$

В точці  $x=h$ :

$$\lim_{x \rightarrow h-0} F(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow h+0} F(x) &= \int_0^0 f_1(t) \varphi_2(x-t) dt + \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt + \int_h^h f_2(t) \varphi_1(x-t) dt = \\ &= \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt. \end{aligned}$$

В точці  $x=2h$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2h-0} F(x) &= \int_0^h f_1(t) \varphi_2(x-t) dt + \int_h^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1(x-t) dt = \\ &= \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1(x-t) dt \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2h+0} F(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_2(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1(x-t) dt.$$

В точці  $x=3h$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3h-0} F(x) = \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2(x-t) dt,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3h+0} F(x) = \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2(x-t) dt.$$

В точці  $x=4h$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4h-0} F(x) = \int_{2h}^{2h} f_2(t) \varphi_2(x-t) dt = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4h+0} F(x) = 0.$$

Таким чином  $F(x)$  є безумовно неперервною у всіх точках стику.

Скориставшись теоремою 2 визначимо першу похідну

$$F'(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(x) \varphi_1(0), & x \in (0, h] \\ \int_0^{x-h} f_1(t) \varphi_2'(x-t) dt + \int_{x-h}^h f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + \int_h^x f_2(t) \varphi_1'(x-t) dt + \\ \quad + f_1(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(x) \varphi_1(0), & x \in (h, 2h] \\ \int_{x-2h}^h f_1(t) \varphi_2'(x-t) dt + \int_h^{x-h} f_2(t) \varphi_2'(x-t) dt + \int_{x-h}^{2h} f_2(x) \varphi_1'(x-t) dt + \\ \quad + f_2(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(x-2h) \varphi_2(2h), & x \in (2h, 3h] \\ \int_{x-2h}^{2h} f_2(t) \varphi_2'(x-t) dt - f_2(x-2h) \varphi_2(2h), & x \in (3h, 4h] \\ 0, & x \notin (0, 4h] \end{cases}$$

Розглянемо неперервність першої похідної в точках стику.

Точка  $x=0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} F'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F'(x) = \int_0^0 f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(0) \varphi_1(0) = f_1(0) \varphi_1(0).$$

Для неперервності  $F'(x)$  в точці  $x=0$  необхідно, щоб  $f_1(0) \varphi_1(0) = 0$ . Тобто для неперервності першої похідної в точці  $x=0$  необхідно, щоб  $f_1(0) = 0$ , або  $\varphi_1(0) = 0$ .

Точка  $x=h$ :

$$\lim_{x \rightarrow h-0} F'(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(h) \varphi_1(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow h+0} F'(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(h) \varphi_1(0).$$

Розглянемо можливий стрибок похідної

$$\Delta F'(h) = \lim_{x \rightarrow h+0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow h-0} F'(x) = f_1(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(h)\varphi_1(0) - f_1(h)\varphi_2(0).$$

Для рівності останнього нулю необхідно, щоб функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  були неперервними в точці  $x=h$ . Тобто необхідно, щоб  $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$  та  $f_1(h) = f_2(h)$ .

Точка  $x=2h$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2h-0} F'(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(2h)\varphi_1(0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2h+0} F'(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_2(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(0)\varphi_2(2h).$$

Розглянемо можливий стрибок похідної

$$\Delta F'(2h) = \lim_{x \rightarrow 2h+0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow 2h-0} F'(x) = (\varphi_2(h) - \varphi_1(h))(f_2(h) - f_1(h)) - f_2(2h)\varphi_1(0) - f_1(0)\varphi_2(2h).$$

Для рівності останнього нулю необхідно, щоб функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  були неперервними в точці  $x=h$ . Тобто необхідно, щоб  $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$  та  $f_1(h) = f_2(h)$  і  $f_1(0) = \varphi_1(0) = 0$ .

Точка  $x=3h$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3h-0} F'(x) = \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_2'(x-t)dt + f_2(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(h)\varphi_2(2h)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3h+0} F'(x) = \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_2'(x-t)dt - f_2(h)\varphi_2(2h)$$

$$\Delta F'(3h) = \lim_{x \rightarrow 3h+0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow 3h-0} F'(x) = \varphi_2(2h)(f_1(h) - f_2(h)) - f_2(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)).$$

Для рівності останнього нулю необхідно, щоб функції  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  були неперервними в точці  $x=h$ . Тобто необхідно, щоб  $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$  та  $f_1(h) = f_2(h)$ , або  $f_2(2h) = \varphi_2(2h) = 0$ .

В точці  $x=4h$  перша похідна також неперервна, що очевидно з міркувань аналогічних для точки  $x=0$ .

Знайдемо значення другої похідної:

$$F''(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(x)\varphi_1'(0) + f_1'(x)\varphi_1(0), & x \in (0, h] \\ \int_0^{x-h} f_1(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_{x-h}^h f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + \int_h^x f_2(t)\varphi_1'(x-t)dt + \\ + f_1(x-h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + f_1'(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2'(x)\varphi_1(0) + f_2(x)\varphi_1'(0), & x \in (h, 2h] \\ \int_{x-2h}^h f_1(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_h^{x-h} f_2(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_{x-h}^{2h} f_2(x)\varphi_1'(x-t)dt + f_2(x-h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + \\ + f_2'(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(x-2h)\varphi_2'(2h) - f_1'(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (2h, 3h] \\ \int_{x-2h}^{2h} f_2(t)\varphi_2''(x-t)dt - f_2(x-2h)\varphi_2'(2h) - f_2'(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (3h, 4h] \\ 0, & x \notin (0, 4h] \end{cases}$$

Вияснимо умови неперервності другої похідної в точках стику.

В точці  $x=0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} F''(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F''(x) = f_1(0)\varphi_1'(0) + f_1'(0)\varphi_1(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F''(x) - \lim_{x \rightarrow 0-0} F''(x) = 0, \text{ якщо } f_1(0) = 0, \varphi_1(0) = 0.$$

В точці  $x=h$ :

$$\lim_{x \rightarrow h-0} F''(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(h)\varphi_1'(0) + f_1'(h)\varphi_1(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow h+0} F''(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(0)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + f_2'(h)\varphi_1(0) + \\ + f_1'(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(h)\varphi_1'(0)$$

$$\Delta F''(h) = \lim_{x \rightarrow h+0} F''(x) - \lim_{x \rightarrow h-0} F''(x) = \varphi_1'(0)(f_2(h) - f_1(h)) + f_1'(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + \\ + f_1(0)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)).$$

Таким чином умовами неперервності є  $f_1(0) = 0$  та  $f_1(0) = f_2(0)$  і  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ .

В точці  $x=2h$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2h-0} F''(x) &= \int_0^h f_1(t) \varphi_2''(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + \\ &+ f_2(2h) \varphi_1'(0) + f_1'(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2'(2h) \varphi_1(0) \\ \lim_{x \rightarrow 2h+0} F''(x) &= \int_0^h f_1(t) \varphi_2''(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_2(h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) - \\ &- f_1(0) \varphi_2'(2h) + f_2'(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1'(0) \varphi_2(2h) \\ \Delta F''(2h) &= (f_2(h) - f_1(h))(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + (f_2'(h) - f_1'(h))(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - \\ &- \varphi_1'(2h) f_1(0) - f_1'(0) \varphi_2(2h) - f_2'(2h) \varphi_1(0) + f_2(2h) \varphi_1'(0). \end{aligned}$$

Таким чином умовами неперервності є  $f_2(2h) = 0$ ,  $\varphi_2(2h) = 0$ ,  $f_1(0) = 0$ ,  $\varphi_1(0) = 0$  та  $f_1(h) = f_2(h)$  і  $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$ .

В точці  $x=3h$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3h-0} F''(x) &= \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2''(x-t) dt + f_2(2h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) - f_1(h) \varphi_2'(2h) + \\ &+ f_2'(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1'(h) \varphi_2(2h) \\ \lim_{x \rightarrow 3h+0} F''(x) &= \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2''(x-t) dt - f_2(h) \varphi_2'(2h) - f_2'(h) \varphi_2(2h) \\ \Delta F''(3h) &= -f_2(2h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) - f_2'(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + \varphi_2(2h)(f_1'(h) - f_2'(h)) + \\ &+ \varphi_1'(2h)(f_1(h) - f_2(h)). \end{aligned}$$

Умовами неперервності є  $f_2(2h) = 0$ ,  $\varphi_2(2h) = 0$ ,  $f_1(0) = 0$ ,  $\varphi_1(0) = 0$  та  $f_1(h) = f_2(h)$  і  $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$ .

В точці  $x=4h$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4h-0} F''(x) = -f_2(h) \varphi_2'(2h) - f_2'(h) \varphi_2(2h), \quad \lim_{x \rightarrow 4h+0} F''(x) = 0.$$

Умовами неперервності є  $f_2(2h) = 0$ ,  $\varphi_2(2h) = 0$ .

Отже з викладеного вище слідує, що функція  $F(x)$  є неперервною, включаючи точки стику, має неперервну першу та другу похідні, якщо виконуються наступні умови:

$$f_1(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad f_1(h) = f_2(h), \quad \varphi_1(h) = \varphi_2(h), \quad f_2(2h) = 0, \quad \varphi_2(2h) = 0.$$

При цьому маємо на увазі, що функції  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  є неперервними і інтегрованими на фрагментах.

Побудуємо зі зміщених пропорційно  $h$  сплайнів базис  $\{H_m\}$ , рис.2.10. Оскільки сплайн  $F(x)$  і базис відрізняються від розглянутих попередньо лише нерозривністю другої похідної, то всі властивості попереднього базису залишаються вірними і для даного базису.

Виділимо випадок коли  $f(x) = \varphi(x)$ . Для ряду функцій це спрощує розрахунки. Так, якщо  $f(x)$  є трикутником і  $f(x) = \varphi(x)$ , то  $F(x)$  є кубічним В-сплайном із двома неперервними похідними (рис.2.9). Властивості цього базису досліджені найбільш повно. Сам базис у задачах обробки даних на регулярних сітках зустрічається найбільш часто. Приклади роботи з такими базисами розглянемо далі.

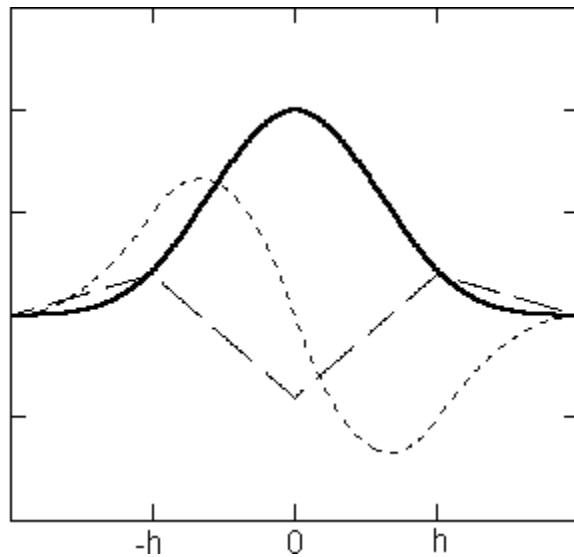


Рисунок 2.9. Кубічний В-сплайн та його похідні

Розглянемо приклади побудови базисних сплайнів.

Експоненційний базис на сітці  $0,1,2,3,4$ :  $f_1(x) = e^x - 1$ ,  $f_2(x) = e^{(2-x)} - 1$  (2.39)

$$F_1(x) = \int_0^x (e^t - 1)(e^{x-t} - 1) dt = x e^x - 2e^x + x + 2,$$

$$F_2(x) = \int_{x-1}^1 (e^t - 1)(e^{x-t} - 1) dt + \int_1^x (e^{2-t} - 1)(e^{x-t} - 1) dt = U1(x) + U2(x),$$

$$U1(x) = \frac{1}{e}(ee^x + e^x + e - e^2) - \frac{1}{e^{x-1}}(e^x e^{x-1} x - e^{2(x-1)} - e^x e^{x-1} + e^x + e^{x-1} x - e^{x-1}),$$

$$U2(x) = \frac{1}{2e^x}(e^2 + 2e^x + 2xe^x) + \frac{1}{2e^2}(e^2 e^x - 2e^2 e - 2e^x e - 2e^2),$$

$$F_3(x) = F_2(4-x), \quad F_4(x) = F_1(4-x). \quad (2.40)$$

Породжуючі функції показано на рис.2.7, а базис та його похідні на рис.2.8.

(2.41)

Кубічний базис на сітці 0,1,2,3,4:  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = 2 - x$

$$F_1(x) = \int_0^x t(x-t)dt = \frac{x^3}{6},$$

$$F_2(x) = \int_{x-1}^1 t(x-t)dt + 2 \int_1^x (2-t)(x-t)dt = -\frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3}, \quad (2.42)$$

$$F_3(x) = F_2(4-x), \quad F_4(x) = F_1(4-x).$$

Породжуючі функції є трикутниками, а базис та його похідні показано на рис.2.9.

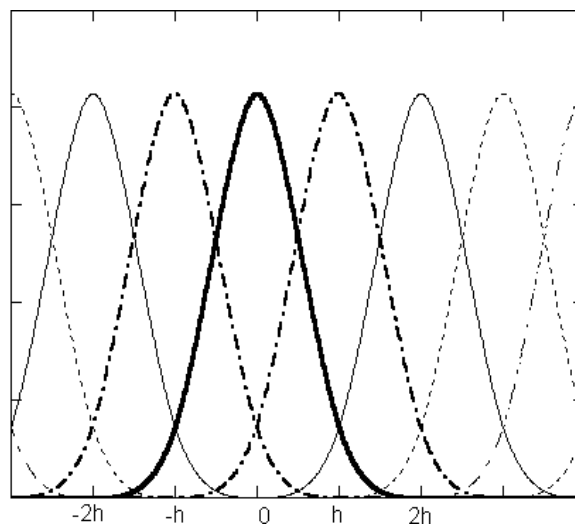


Рисунок 2.10. Сплайновий базис

Програма розрахунку базисного сплайна в MathCad показана в додатку А.



## 2.5 Отримання дискретних сплайнових базисів

Отримання аналітичних виразів для базисних сплайнів може виявитись досить складною справою. Інтегралі від породжуючих функцій можуть мати досить складний вигляд, або взагалі не братися аналітично. Тому розглянемо побудову таких сплайнів у дискретному варіанті.

Породжуючі функції представимо у вигляді окремих відліків на фрагменті сплайна з інтервалом  $\Delta$ . Для простоти розрахунків приймемо ширину інтервалу рівною 1, а відлік починатимемо з 0 ( $a=0$ ).

$$f_i = \begin{cases} f_1(x_i), & \text{для } i = \overline{1, N} \\ f_2(x_i), & \text{для } i = \overline{N+1, 2N} \\ 0, & \text{для } i = \overline{2N+1, 4N} \end{cases}, \quad \varphi_i = \begin{cases} \varphi_1(x_i), & \text{для } i = \overline{1, N} \\ \varphi_2(x_i), & \text{для } i = \overline{N+1, 2N} \\ 0, & \text{для } i = \overline{2N+1, 4N} \end{cases}, \quad (2.43)$$

Дискретна лінійна згортка розраховується за виразом

$$F_i = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^i f_{(i-n)} \varphi_n, \quad i = \overline{1, 4N}. \quad (2.44)$$

Сформований сплайн складатиметься з чотирьох фрагментів, які можна визначити через загальну функцію (44), як

$$\begin{aligned} F1_i &= F_i, & i &= \overline{1, N}; \\ F2_i &= F_{i+N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F3_i &= F_{i+2N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F4_i &= F_{i+3N}, & i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Сплайновий базис складається з відліків функції  $F_i$  зміщеної пропорційно  $N$  на регулярній сітці  $H_{ij} = F_i$ . Наслідком цього сума всіх базисних функцій у певній точці сітки даних є сумою чотирьох фрагментів базисного сплайна:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{ij} = F1_i + F2_i + F3_i + F4_i \quad (2.46)$$

Індекс “j” є номером базисної функції, а індекс “i” є номером точки на відрізку сплайна, якому ця точка належить. Ця особливість сплайнових базисів має

вирішальне значення для ефективності розрахунків кардинальних сплайнів. Сплайновий базис є локальним, що дозволяє ефективно реалізовувати розрахунки з використанням скалярного добутку базисних функцій.

$$\sum_i H_{im} H_{in} = 0, \text{ для } |m - n| > 3. \quad (2.47)$$

Оскільки базисні функції є зміщеними копіями, то номер фрагмента не має значення й індекс номера фрагмента сплайна у складових базисної функції відсутній. Звичайно мова йде про внутрішні фрагменти сплайна. Розрахунок для перших і останніх фрагментів потребує врахування відсутності сусідніх вузлів. Це легко здійснити, відкинувши відповідні суми, однак, в алгоритмах реального часу операції порівняння можуть займати суттєвий час, зважаючи на простоту наведених виразів. З огляду на регулярність сітки можна умовно продовжити послідовність вузлів у нескінченість праворуч та ліворуч і не змінювати вирази. Однак усе ж не вдасться уникнути факту відсутності даних на продовжених фрагментах. Вказані спрощення призведуть до наявності певного перехідного процесу на початку і в кінці оброблюваної послідовності даних. Такий перехід не простягатиметься далі двох сплайнових фрагментів.

Безумовною перевагою дискретних сплайнових базисів є простота їх розрахунку. Зважаючи на локальність базису (мале значення  $N$ ) дискретна лінійна згортка не є проблемою. Відсутня проблема аналітичних перетворень, в зв'язку з чим розширюється множина можливих варіантів базисів. Зворотною стороною є необхідність сформулювати певні критерії побудови базису для конкретних потреб. Тобто постає запитання, як побудувати базис, що найкраще відповідатиме потребам конкретного застосування.

Побудова такого базису можлива при наявності апріорної інформації про характер процесу, що наближуватиметься (експоненційний, логарифмічний, синусоїдальний і т.п.). Це дозволяє зробити вибір породжуючої функції. Частіше є інформація про частотні властивості сигналу. Для детермінованих сигналів це частотна характеристика сигналу, для випадкових сигналів – енергетичний спектр (чи його оцінка). Зважаючи на те, що зміщені базисні сплайни, які утворюють

сплайн, відрізняються фазою, але мають однаковий амплітудний і енергетичний спектри будемо користуватися саме ними. Якщо враховувати лише максимальну похибку, то достатньо знати лише ненульовий частотний діапазон сигналу. Частотний діапазон сигналу дає можливість правильно вибрати ширину базисної функції, та оцінити похибку інтерполяції, через нерівномірність частотної характеристики базисного сплайна в області сигналу. Найбільш повною є апіорна інформація про амплітудний чи енергетичний спектр сигналу. Це дає можливість оцінити середньоквадратичну похибку наближення. За наявності білого шуму є зміст користуватися базисним сплайном з енергетичним спектром, що відповідає енергетичному спектру сигналу. В цьому випадку в якості дискретної породжуючої функції можна використати імпульсну характеристику нерекурсивного цифрового фільтра.

## 2.6 Синтез ермітових сплайнових базисів

Для наближення деякої залежності  $Y(x)$  розраховують числові коефіцієнти  $a_j$  так, що зважена сума базисних функцій є близькою до залежності  $Y(x) \approx \sum_j a_j F_j(x)$ . Зазначені коефіцієнти  $a_j$  не мають явної фізичної інтерпретації, а їх розрахунок потребує значного обсягу обчислень. В даному підрозділі розглянемо побудову ермітових сплайнових базисів на регулярних сітках, що складаються з неперервних відрізків функцій довільно класу. Однією з переваг таких базисів є рівність вагових коефіцієнтів вузловим значенням інтерпольованої функції, що значно спрощує розрахунки.

Розглянемо побудову інтерполяційного сплайна на окремому фрагменті  $[T_1, T_2]$ , рис.2.11. Як слідує з локальності сплайнового базису на довільному фрагменті ненульовими будуть лише чотири базисні функції:

$$F_j(x) = \begin{cases} F1(x), & x \in [c, c+h) \\ F2(x), & x \in [c+h, c+2h) \\ F3(x), & x \in [c+2h, c+3h) \\ F4(x), & x \in [c+3h, c+4h) \\ 0, & x \notin [c, c+4h) \end{cases}, \quad (2.48)$$

де  $h = T_2 - T_1$ , -- лівий вузол базисного сплайна.

На окремому фрагменті сплайна ці базиси представлені чотирма фрагментами  $F1, F2, F3, F4$ , зваженими відповідно значенням коефіцієнтів  $a_j$ . Отже, значення інтерполяційного сплайна в довільній точці  $x$  на фрагменті  $p$  визначатиметься чотирма коефіцієнтами  $F1(x), F2(x), F3(x), F4(x)$ :

$$S(x) = \sum_j a_j F_j(x) = \sum_{j=n-1}^{n+2} a_j F_j(x) = a_{n-1} F1(x-c) + a_n F2(x-c) + a_{n+1} F3(x-c) + a_{n+2} F4(x-c), \quad (2.49)$$

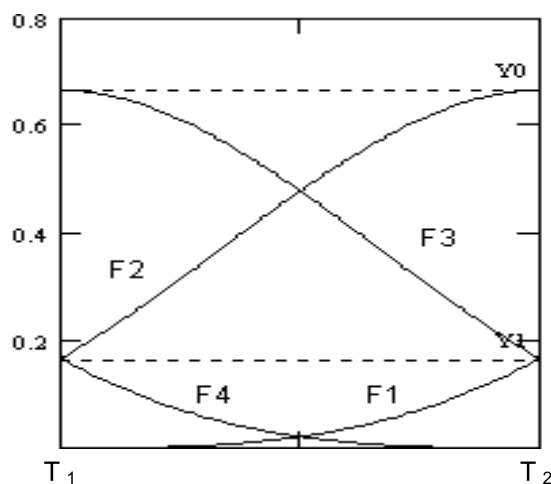


Рисунок 2.11. Складові базисних функцій на фрагменті сплайна

З іншого боку, фрагмент сплайна задано двома вузовими точками  $(T_1, A_1), (T_2, A_2)$ . Для встановлення однозначного взаємозв'язку між вузовими точками та чотирма коефіцієнтами сплайна потрібно ще два параметри пов'язаних із вузлами. За ці параметри приймемо значення першої похідної у вузових точках. Перша похідна базисних функцій у вузових точках легко визначається. Позначимо її  $z_1$ . При відсутності даних про значення похідних у вузлах розрахуємо їх наближено, через центральні різниці  $A_1' \approx (A_2 - A_0)/2$ ,  $A_2' \approx (A_3 - A_1)/2$ . Таким чином буде встановлена

однозначна лінійна залежність між чотирма вузлами функції, яку наближають та чотирма параметрами інтерполяційного сплайна. В матричному вигляді маємо:

$$\begin{bmatrix} 0 & Y_1 & Y_0 & Y_1 \\ Y_1 & Y_0 & Y_1 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & -z_1 \\ z_1 & 0 & -z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ (A_2 - A_0)/2 \\ (A_3 - A_1)/2 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Інверсна матриця має вигляд:

$$\frac{1}{z_1(Y_0^2 - 4 \cdot Y_1^2)} \begin{bmatrix} z_1 \cdot Y_0 & -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & Y_0 \cdot Y_1 & Y_0^2 - 2 \cdot Y_1^2 \\ -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & z_1 \cdot Y_0 & -2 \cdot Y_1^2 & -Y_0 \cdot Y_1 \\ z_1 \cdot Y_0 & -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & Y_0 \cdot Y_1 & 2 \cdot Y_1^2 \\ -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & z_1 \cdot Y_0 & 2Y_1^2 - Y_0^2 & -Y_0 \cdot Y_1 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Її дискримінант дорівнює:  $4z_1^2 Y_1^2 - Y_0^2 z_1^2$ . Очевидно, що дискримінант рівний нулю при  $Y_0 = 2 \cdot Y_1$ . Це означає, що базиси побудовані, як згортка симетричної локальної функції з прямокутним вікном до лагранжівної форми привести не можна. Тоді коефіцієнти інтерполяційного сплайна визначатимуться через вузлові точки наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \frac{-(-2Y_0 A_1 z_1 + 4Y_1 A_2 z_1 - Y_1 Y_0 A_2 + Y_1 Y_0 A_0 + 2Y_1^2 A_3 - 2Y_1^2 A_1 - Y_0^2 A_3 + Y_0^2 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \\ \frac{(-4Y_1 A_1 z_1 + 2Y_0 A_2 z_1 - 2Y_1^2 A_2 + 2Y_1^2 A_0 - Y_1 Y_0 A_3 + Y_1 Y_0 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \\ \frac{(2Y_0 A_1 z_1 - 4Y_1 A_2 z_1 + Y_1 Y_0 A_2 - Y_1 Y_0 A_0 + 2Y_1^2 A_3 - 2Y_1^2 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \\ \frac{-(4Y_1 A_1 z_1 - 2Y_0 A_2 z_1 - 2Y_1^2 A_2 + 2Y_1^2 A_0 + Y_0^2 A_2 - Y_0^2 A_0 + Y_1 Y_0 A_3 - Y_1 Y_0 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Отриманий результат є корисним, оскільки дозволяє за вузловими значеннями розраховувати коефіцієнти інтерполяційного сплайна за досить простими аналітичними виразами. Підкреслимо, що при цьому не зроблено припущень про вигляд функцій, що породили сплайновий базис. Достатньо значень  $A_0, A_1$  та першої похідної у двох точках стику базису (включаючи центральну)  $z_1, -z_1$ . Знайдені значення  $d_1, d_2, d_3, d_4$  підставимо в інтерполяційне рівняння  $S(x) = d_1 F_1(x) + d_2 F_2(x) + d_3 F_3(x) + d_4 F_4(x)$ .

Зведемо подібні так, щоб відокремити вузлові значення:

$$S(x) = A_1 F_1(x) + A_2 F_2(x) + A_3 F_3(x) + A_4 F_4(x), \quad (2.53)$$

де

$$F_1 = \alpha((2Y_0 z_1 + 2Y_1^2 - Y_0^2)F_1 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_2 + (2Y_0 z_1 - 2Y_1^2)F_3 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_4)$$

$$F_2 = \alpha((2Y_0 z_1 - 2Y_1^2)F_2 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_1 + (2Y_0 z_1 + 2Y_1^2 - Y_0^2)F_3 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_4);$$

$$F_3 = \alpha[(-Y_0 Y_1)F_1 + (2Y_1^2)F_2 + (-Y_0 Y_1)F_3 + (Y_0^2 - 2Y_1^2)F_4];$$

$$F_4 = \alpha[(-Y_0 Y_1)F_4 + (2Y_1^2)F_3 + (-Y_0 Y_1)F_2 + (Y_0^2 - 2Y_1^2)F_1];$$

$$\alpha = 1/(2[z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2)]).$$

В отриманому виразі функції біля вузлових значень  $F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x)$  є фрагментами нових базисних функцій

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \tilde{F}_1(x), & x \in [c, c+h) \\ \tilde{F}_2(x), & x \in [c+h, c+2h) \\ \tilde{F}_3(x), & x \in [c+2h, c+3h) \\ \tilde{F}_4(x), & x \in [c+3h, c+4h) \\ 0, & x \notin [c, c+4h) \end{cases}, \quad (2.54)$$

Знайдені базисні функції також є локальними сплайнами, оскільки отримані, як зважена сума фрагментів локального сплайнового базису. Неперервність значень базису в точках стику є очевидною, оскільки він є лагранжівим. В центральній точці стику базис рівний одному й нулю у двох інших. Неперервність першої похідної у точках стику гарантується умовою рівності похідної сплайна похідній функції. Відповідно маємо однаковий спосіб розрахунку для першої похідної у точках стику для правого та лівого фрагмента. Неперервність другої похідної не гарантується. За аналогією з алгебраїчним ермітовим сплайном, отриманий базис називатимемо ермітовим, маючи на увазі спосіб визначення його через похідні. При цьому клас функцій, що утворюють фрагменти може бути широким.

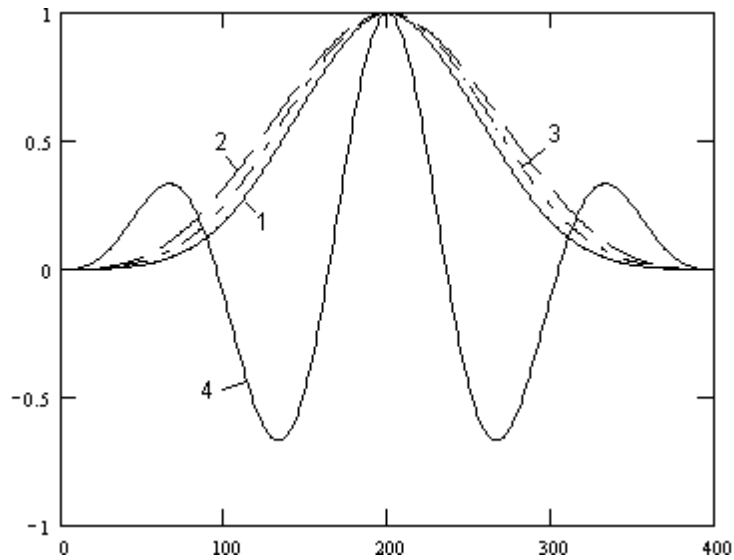


Рисунок 2.12. Приклади В-форми сплайнових базисів. 1-експоненційний, 2-кубічний, 3-синусоїдальний (четверть), 4-синусоїдальний (половина).

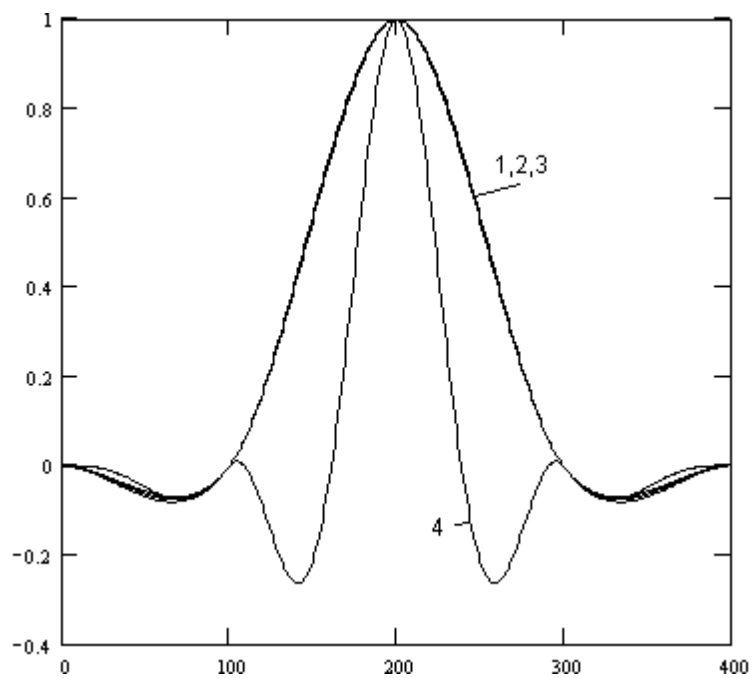


Рисунок 2.13. Ермітові базисні сплайни утворені з В-форми

На рис.2.12 показані сплайнові базиси, утворені різними породжуючими функціями, як результат згортки самих з собою. Функції 1-3 є відповідно експоненціальною, алгебраїчною та гармонійною. Ці базиси відносно схожі за формою (для порівняння вони нормовані по максимумам). Четверта базисна функція утворена половиною

відрізка синусоїди і ілюструє значну мінливість сплайнових базисів порівняно зі звичними, алгебраїчними В-сплайнами.

На рис.2.13 показані ермітові базиси утворені з попередніх базисних функцій. Ці базиси рівні 1 в центрі і 0 в інших точках стику, що відповідає лагранжівій формі. Відмінності між близькими базисами стали менш помітними внаслідок виконання попередніх умов. Проте останній базис відрізняється суттєво. Це ілюструє значну мінливість форми розглянутих базисів.

## 2.7 Приведення сплайнових базисів до лагранжівій форми

Наближення з допомогою базисних сплайнів з двома неперервними похідними вимагає розв'язання системи лінійних рівнянь, або певних обмежень точності та співвідношень між базисом та функцією, яку наближають [16]. Тому побудуємо базис у лагранжівій формі з неперервністю двох похідних. Перевагою такого базису буде рівність вагових коефіцієнтів вузловим значенням інтерпольованої функції. Розглянемо дещо інший підхід ніж в попередньому підрозділі.

Нехай маємо довільний сплайновий базис  $\{H_m\}$ , що складається з базисних функцій  $H_m(x)=H_0(x-m)$ . Значення базисної функції  $H_0(x)$  у вузлових точках (0, 1, 2, 3, 4) рівні (0, f1, f0, f1, 0). До іншої системи вузлів легко перейти, змінивши масштаб чи початок координат. Тоді для інтерполяційного сплайна побудованого на вузлах, що співпадають із вузловими точками базисних функцій запишемо систему інтерполяційних рівнянь

$$\tilde{F} * A = Y, \quad (2.55)$$

де  $\tilde{F}$  квадратна симетрична тридіагональна матриця. Матриця повністю визначається двома ненульовими значеннями f0 та f1. Розмірність матриці вважатимемо довільною, або навіть необмежено великою, проте не менше п'яти.

$$(2.56)$$



$$F = \left[ \begin{array}{cccc|c} f_0 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & f_0 \end{array} \right]$$

Матриця - стовпець  $Y$  містить значення інтерпольованої функції у вузлах інтерполяції.

Знайдемо значення елементів матриці  $A$ , котрі задовольняють рівняння (55). Специфічна форма матриці  $F$  дозволяє скористатись наближеним методом визначення елементів інверсної матриці. Детально цей метод розглянуто в підрозділі 3.4. Вважатимемо, що інверсна матриця складається із семи ненульових діагоналей. Запишемо наближену матрицю:

$$\left[ \begin{array}{cccc} f_0 & 2f_1 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & f_1 & f_0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_1 & f_0 \end{array} \right]. \quad (2.57)$$

З останньої отримуємо аналітичний розв'язок для ненульових елементів матриці, інверсної до  $F$ :

$$\begin{aligned} d_0 &= f_0(f_0^2 - 2f_1^2)/Q, \quad d_1 = -f_1(f_0^2 - f_1^2)/Q, \\ d_2 &= f_0f_1^2/Q, \quad d_3 = -f_0^3/Q, \\ Q &= f_0^4 - 4f_0^2f_1^2 + 2f_1^4. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Для з'ясування точності порівняємо значення 6-го стовпця інверсної матриці розмірності 10 із наближеними значеннями для кубічного В-сплайна ( $f_0=0.6667$ ,  $f_1=0.16665$ ).

Таблиця 1. Порівняння точного і наближеного розв'язків.

	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
наближено	<b>1.731786</b>	<b>-0.463791</b>	<b>0.123657</b>	<b>-0.030910</b>	<b>0.0000</b>
точно 10x10	<b>1.731874</b>	<b>-0.463963</b>	<b>0.124254</b>	<b>-0.033129</b>	<b>0.0082</b>

Бачимо, що числа співпадають із точністю до сотих, що цілком прийнятно для більшості технічних застосувань.

Визначимо  $A = \bar{F}^{-1} * Y$ .

Підставимо в інтерполяційні рівняння для довільних точок інтерполяції при прийнятій схемі вузлів  $F * \bar{F}^{-1} * Y = S$ , де  $F$  матриця з числом стовпців, що співпадає з розмірністю матриці  $\bar{F}$  й числом рядків рівним числу точок інтерполяції. Стовпці цієї матриці є значеннями базисних функцій у точках інтерполяції.

Останнє рівняння можна записати інакше:  $L * Y = S$ ,

де  $L$  матриця планування з розмірністю, що співпадає з розмірністю матриці  $F$ .

Оскільки коефіцієнтами інтерполяційних рівнянь є значення інтерпольованої функції у вузлах інтерполяції, то маємо лагранжіву схему інтерполяції. Стовпці матриці  $L$  є базисними функціями, що мають властивості лагранжівих базисів. Позначимо такий базис  $L(x)$ . Знайдемо значення базисної функції у центральній точці

$$f1 * d_1 + f0 * d_0 + f1 * d_1 = (f0^2(f0^2 - 2f1^2) - 2f1^2(f0^2 - f1^2)) / Q = Q / Q = 1.$$

В наступних вузлах ліворуч та праворуч 0:

$$f1 * d_2 + f0 * d_1 + f1 * d_0 = (f1f0f1^2 - f0f1(f0^2 - f1^2) + f1f0(f0^2 - 2f1^2)) / Q = 0,$$

$$f1 * d_3 + f0 * d_2 + f1 * d_1 = (-f1 * f1^3 + f0f0f1^2 - f1f1(f0^2 - f1^2)) / Q = 0,$$

$$f0 * d_3 + f1 * d_2 = (-f0f1^3 + f1f0f1^2) / Q = 0,$$

$$f1 * d_3 = (-f1^4) / Q \neq 0.$$

Отже базисна функція рівна 1 у центральному вузлі і 0 в інших. За винятком четвертого вузла. В четвертому вузлі від центру значення базисної функції відмінне від нуля. Проте - це є результатом наближеного розрахунку. Розрахуємо це значення:

$$f1 * d_3 = (-f1^4) / Q = \frac{-0.000771}{0.149735} = -0.005151.$$

Відмінність від нуля є незначною, в межах точності елементів інверсної матриці.

Проте принципова проблема полягає в іншому. В результаті трансформації базису нові базисні функції значно розширили область ненульових значень. Якщо бути точними і вважати інверсну матрицю повністю заповненою, то маємо нелокальний базис. При цьому втрачаємо одну з основних переваг локальних сплайнових базисів - ефективність розрахунків.

Однак, вважаючи інверсну матрицю діагональною, можна дещо виправити ситуацію. Зрозуміло, що така заміна можлива лише з певною точністю, яка диктується умовами конкретної прикладної задачі. В розглянутому вище розрахункові елементів інверсної матриці остання вважається семидіагональною. Тоді лагранжівий базис складатиметься з 10 фрагментів (рис.2.14), котрі розраховуватимуться за формулами:

$$\begin{aligned}
 L1(x) &= B_1(x) * d_3, \\
 L2(x) &= B_2(x) * d_3 + B_1(x) * d_2, \\
 L3(x) &= B_3(x) * d_3 + B_2(x) * d_2 + B_1(x) * d_1, \\
 L4(x) &= B_4(x) * d_3 + B_3(x) * d_2 + B_2(x) * d_1 + B_1(x) * d_0, \\
 L5(x) &= B_4(x) * d_2 + B_3(x) * d_1 + B_2(x) * d_0 + B_1(x) * d_1, \\
 L6(x) &= B_4(x) * d_1 + B_3(x) * d_0 + B_2(x) * d_1 + B_1(x) * d_2, \\
 L7(x) &= B_4(x) * d_0 + B_3(x) * d_1 + B_2(x) * d_2 + B_1(x) * d_3, \\
 L8(x) &= B_4(x) * d_1 + B_3(x) * d_2 + B_2(x) * d_3, \\
 L9(x) &= B_4(x) * d_2 + B_3(x) * d_3, \\
 L10(x) &= B_4(x) * d_3,
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

де  $B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x)$  складові базисної функції. Оскільки для регулярної сітки даних ці складові визначаються незалежно від зміщення базисної функції, то при одиничній довжині відрізка маємо

$$H_k(x) = \begin{cases} B_1(x - k), & x - k \in [0,1) \\ B_2(x - k), & x - k \in [1,2) \\ B_3(x - k), & x - k \in [2,3) \\ B_4(x - k), & x - k \in [3,4) \end{cases} \tag{2.60}$$

По суті лагранжівий базис отримуємо, як інтерполяцію ряду  $\dots, 0, d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3, 0, \dots$  із допомогою базису  $\{H_m\}$ . Тому отриманий базис є також сплайном аналогічного виду з двома неперервними похідними (рис.2.15).

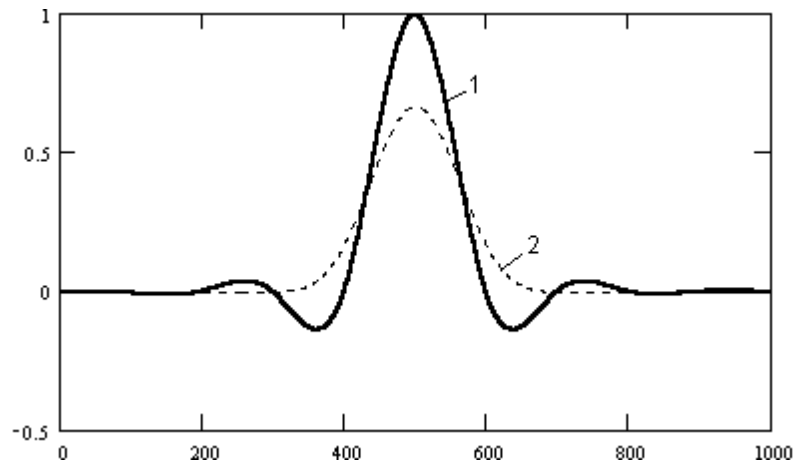


Рисунок 2.14. Кубічний В-сплайн (2) та його лагранжівіа форма (1).

Тобто приведення базису до лагранжівіа форми не призводить до значного ускладнення інтерполяційної функції. Якщо в основі перетворення є кубічний поліном, то отриманий базис також буде складатись із кубічних поліномів. Це компенсує розширення базису і відповідне зростання обсягу розрахунків. Очевидною є альтернатива: або знаходити коефіцієнти при базисних функціях із системи інтерполяційних рівнянь і економити на розрахунків значень інтерполяційного сплайна ( 4 множення, 3 складання ), або скористатись лагранжівіа формою і тоді зросте обсяг розрахунків при інтерполяції ( 10 множень, 9 складань ). Перше можливе лише в пакетному режимі побудови інтерполяційної функції і для обмеженої кількості вузлів. Причому обсяг обчислень зростатиме як квадрат числа вузлів. Другий варіант дозволяє виконувати інтерполяцію в реальному часі та необмежений потік даних. Платою за це є збільшення майже у три рази розрахунків на відлік і розрахунок з обмеженою точністю (до двох знаків після коми). Таку процедуру легко реалізувати у вигляді нерекурсивного числового фільтра (точніше у вигляді поліфазної структури таких фільтрів).

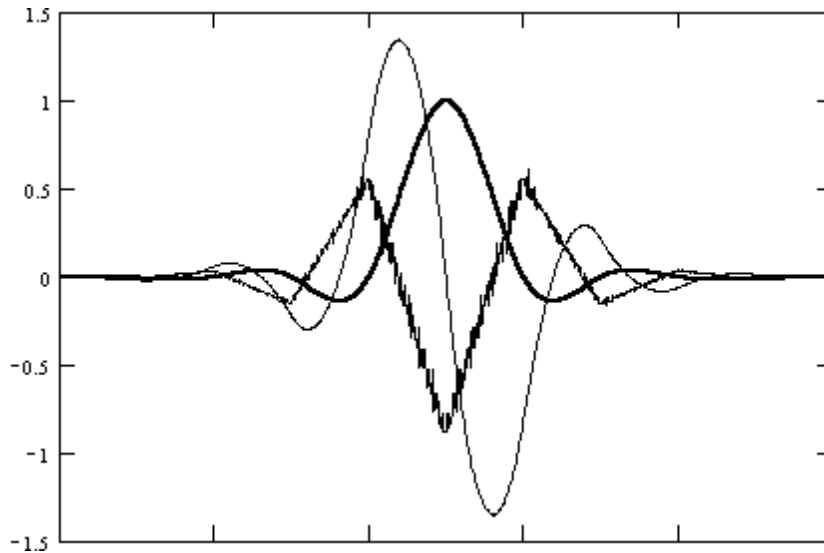


Рисунок 2.15. Лагранжівий базис і його похідні

Можна також розглядати приведення, як фільтрацію послідовності  $\dots, 0, d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3, 0, \dots$  нерекурсивним фільтром, що має імпульсну характеристику  $H_k(x_i)$  з підвищенням частоти дискретизації. Тоді частотна характеристика лагранжівого базису є добутком частотної характеристики початкового базису та послідовності  $\dots, 0, d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3, 0, \dots$ .

Розрахунки перетворень в MathCad показано в додатках Б, В.

## 2.8 Висновки

В розділі розроблений загальний підхід до побудови ермітових сплайнів на довільній сітці вузлів, з фрагментів функцій, форма яких лінійно залежить від деяких параметрів. Сформульована необхідна умова розв'язку даної задачі, що полягає у кратності параметрів кількості вузлів. Показана ідентичність результатів отриманих запропонованим способом з отриманими іншим, більш вузьким способом для кубічних ермітових сплайнів. Запропонований підхід принципово дозволяє автоматизувати процес побудови ермітових сплайнів з допомогою систем аналітичної алгебри.

Розглянуто специфічний спосіб побудови сплайнових базисів, як згортки локальної симетричної функції з прямокутним вікном на рівномірній сітці вузлів. Вказаний спосіб дозволяє отримати базисний сплайн, що складається з чотирьох фрагментів і має неперервну першу похідну. Зміщені пропорційно кроку вузлів базисні сплайни утворюють сплайновий базис.

Згортка двох симетричних локальних функцій на рівномірній сітці вузлів дозволяє отримати базисний сплайн з неперервними першою та другою похідними. Досліджені вимоги до породжуючих функцій, котрі гарантують неперервність першої та другої похідних. Наведені приклади побудови зазначених базисних сплайнів.

З допомогою отриманих сплайнових базисів вирішується інтерполяційна задача. Для цього необхідно знайти чисельні коефіцієнти при відповідних базисних функціях. Розроблені процедура приведення сплайнових базисів до лагранжівної форми, де коефіцієнти є значенням функції у вузлах інтерполяції.

Перший спосіб є локальним. Розглядається інтерполяція на локальному фрагменті. Необхідна інформація про значення базису та першої похідної на краях фрагмента. Шляхом алгебраїчних перетворень отримуємо лагранжівий базис. Оскільки задіяні похідні то базис називатимемо також ермітовим. Утворений базис не гарантує неперервність другої похідної.

Другий спосіб полягає в наближеному розв'язку глобальної системи інтерполяційних рівнянь. Специфічна діагональна форма інтерполяційної матриці дозволяє знайти наближений розв'язок, включаючи й аналітичні вирази. Алгебраїчні перетворення приводять до лагранжівого базису. Утворений базисний сплайн вже не є локальним, проте з певною точністю його можна вважати локальним, але область ненульових значень значно розширюється (число фрагментів також). Втрата локальності серйозно збільшує обсяг розрахунків. Проте цей базис зберігає неперервність двох похідних.

Аналітичні розрахунки при побудові сплайнових базисів на рівномірній сітці вузлів можуть бути досить складними, однак цю проблему можна обійти

скориставшись дискретним варіантом розглянутих методів. Неперервна згортка замінюється дискретною, для дискретних відліків деяких породжуючих функцій, вимоги до котрих є аналогічними неперервному варіантові.

Отримані сплайнові базиси дозволяють ефективно розв'язувати інтерполяційні задачі, що є основою розглянутих далі методів обробки цифрових сигналів. Отримана альтернатива широкого вибору сплайнових базисів одночасно ставить серйозну задачу вибору найкращого з них для вирішення конкретної задачі.

### 3. АЛГОРИТМИ НАБЛИЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ З ДОПОМОГОЮ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

#### 3.1 Постановка задачі

В попередньому розділі було розглянуто методи побудови сплайнів та довільних сплайнових базисів у різних формах. Однак розгляд обмежувався лише формальною побудовою сплайнових базисів. Поза увагою залишилось питання точності наближення та вибору найбільш придатного для цього базису. Основною задачею розділу є встановлення аналогій між загальними сплайновими методами наближення, типовими конструкціями цифрової обробки даних та розробка специфічних методів обробки нескінчених послідовностей даних на регулярних сітках. Розгляд цих питань почнемо із задач інтерполяції. Методи інтерполяції глобальними інтерполяційними сплайнами є загальновідомими [123,126,136]. Для розв'язку інтерполяційних рівнянь існують достатньо ефективні алгебраїчні методи [146,159,160]. Дещо рідше користуються алгебраїчними B-сплайнами з аналогічним математичним апаратом [142]. Питання нев'язки інтерполяції сплайнами також вивчені досить повно [142,151,176]. Однак у практиці обробки цифрових даних використання цих теоретичних розробок дозволяє робити лише висновки про потенційно можливу нев'язку, зробивши певні припущення про диференційні властивості даних. Проблема полягає в тому, що нев'язка оцінюється за диференційними властивостями сплайна та даних, які наближають. На практиці така апіорна інформація про дані в переважній більшості випадків відсутня, а чисельна оцінка не дозволяє досягти прийнятної точності. Ідея альтернативного підходу до оцінки точності інтерполяції належить, очевидно, Хемінгу [260]. Суть її у тому, що точність інтерполяції оцінюється за відмінністю амплітудних спектрів даних та інтерполяційної функції. Подібна ідея, але у статистичній постановці, була розроблена Железновим Н.А. [105]. На продуктивність такого підходу звертає увагу також М.Унсер [48,54]. Перевага такого підходу в тому, що в цифрових системах спектральне представлення даних є загальноприйнятим. З іншого боку, для



отримання цифрових даних користуються технічними засобами з відомими частотними властивостями. Отже завжди існує певний мінімум апріорної інформації про спектр даних. Поняття спектральних властивостей сплайнових базисів частково досліджені в роботах, що стосуються wavelet методів [48,54]. Однак - це питання розкривається лише для окремих видів сплайнів і стосується реалізації цифрових систем [98]. Автор розглядає це питання у тісному взаємозв'язку зі спектральними характеристиками даних, які підлягають інтерполяції. Тому в підрозділі 3.2 проводиться аналогія між математичним поняттям інтерполяції та інтерполяцією в технічному розумінні. Досліджується відмінності у спектрах звичайних B-сплайнів та ермітових [275,300]. Це дозволяє дещо інакше поглянути, як на сплайн-інтерполяцію, так і на синтез цифрових інтерполяційних фільтрів.

Задача інтерполяції є лише першим і найбільш дослідженим етапом у наближенні сплайнами. Значно цікавіші питання середньоквадратичного наближення та згладжування сплайнами [40,95,142,143]. Традиційними є два підходи. Розв'язок задачі середньоквадратичного наближення методом найменших квадратів одночасно з побудовою глобального інтерполяційного сплайна, або побудова згладжуючого сплайна, що мінімізує

$$\lambda \sum_{i=1}^N (y_i - S(x_i))^2 + (1 - \lambda) \int_a^b (S^{(m)}(x))^2 dx, \text{ де } \lambda = [0,1]. \quad (3.1)$$

Обидва способи є малоприматними для алгоритмів реального часу, зважаючи на громіздкість розрахунків. Інший підхід, що започаткований Шутко М.О. [143,197] полягає у використанні ермітових локальних сплайнів. Це дозволяє користуватися традиційним методом найменших квадратів [106,115,134,166,185,187]. Дана робота є продовженням останнього напрямку. В підрозділі 3.3 розглянемо деякі аспекти наближення сплайнами з допомогою методу найменших квадратів. Зокрема дослідимо властивості матриці планування та матриць системи нормальних рівнянь.

Враховуючи особливий інтерес у даній роботі до методів реального часу в підрозділі 3.4 розглянемо необмежені сплайни, тобто сплайни з необмеженим числом фрагментів однієї довжини. Значний досвід практичних розрахунків дозволив виявити автору специфічні особливості матриць методу найменших квадратів для сплайнів із великим числом фрагментів. Враховуючи специфічну форму матриці планування та матриць системи нормальних рівнянь ставиться задача розробити алгоритм розрахунку вказаних матриць та побудови сплайна.

Розроблені в попередньому підрозділі алгоритми розрахунку матриць необмеженої розмірності для сплайнів із регулярними сітками вузлів та даних дозволяють виконати узагальнене перетворення Фур'є у сплайнових базисах. З точки зору розрахунків таке перетворення ідентичне методу найменших квадратів. Хоча МНК із сплайновими базисами нас цікавитиме і з статистичного погляду, в даному розділі обмежимося його формальною, розрахунковою стороною. В підрозділі 3.5 розглянемо дискретне та інтегральне перетворення Фур'є в різних сплайнових базисах. В підрозділі 3.6 дослідимо питання якості алгоритмів наближення сплайнами.

### 3.2 Аналогії між математичним та технічним поняттями інтерполяції

Математичне поняття інтерполяції є загальновідомим [126,136]. Ставиться задача за відомими значеннями деякої функції  $f(x)$  в окремих точках знайти проміжні значення. При цьому використовується інша, інтерполяційна функція  $g(x)$ , значення якої повинні співпадати із значеннями  $f(x)$  у вузлах інтерполяції  $g(x_i) = f_i, i = \overline{1, R}$ . Інтерполяційна функція  $g(x)$  має бути досить простою і зручною в розрахунках. В переважній більшості - це поліном виду

$$g(x) = \sum_{j=0}^{R-1} a_j \varphi_j(x).$$

Тоді задача зводиться до знаходження числових параметрів  $a_j$

із системи інтерполяційних рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{R-1} a_j \varphi_j(x_i) = f_i, \quad i = \overline{1, R}. \quad (3.2)$$

Питання точності наближення  $g(x)$  до  $f(x)$  між вузлами детально розглядається в курсі математичного аналізу, виходячи з диференційних властивостей обох функцій [175,227]. Таким чином оцінити нев'язку інтерполяції можна лише настільки, наскільки відомі диференційні властивості  $f(x)$  та  $g(x)$ . Проблеми класичної інтерполяції загальновідомі, як і переваги сплайнів [142].

Технічне поняття інтерполяції стосується області цифрової обробки й передачі даних і під ним розуміють збільшення частоти дискретизації при виконанні певних умов, стосовно спектрів вхідного та інтерпольованого сигналів. Технічно інтерполяцію даних виконують із допомогою цифрових фільтрів. В загальному випадку такі фільтри включають експандер частоти та формуючий фільтр (рис.3.1) [263].

Експандер доповнює вхідну послідовність  $X^*(nt)$  із періодом  $T$  нулями до вихідної частоти (у  $m$  раз більшої):

$$X^*(nt) = \{x(T \cdot n/m), n=0, m, 2m, \dots; 0, n \neq 0, m, 2m, \dots\}. \quad (3.3)$$

Спектри  $X(Z^m)$  - до експандера та  $X^*(Z)$  - після експандера однакові і періодичні з частотою дискретизації вхідної послідовності ( $Z=e^{iwT}$ ).

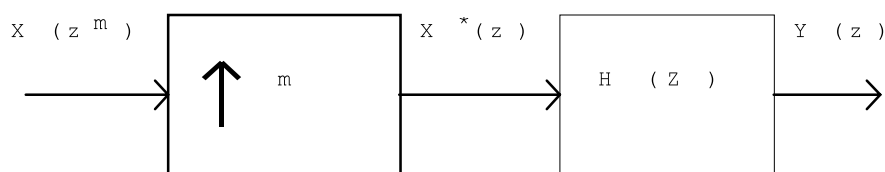


Рисунок 3.1. Узагальнена схема цифрового інтерполятора

Формуючий фільтр, із передаточною характеристикою  $H(Z)$ , повинен затримати зайві копії корисного сигналу так, щоб спектр вихідного сигналу мав у  $m$  раз більший період:  $Y(Z) = X^*(Z)H(Z)$ . Коли важливо не спотворити форму вхідного сигналу використовують нерекурсивні лінійні фільтри. Тоді сигнал на виході фільтра рівнятиметься

$$y(nT) = \sum_{j=0}^n h_j x^*(nT - jT), \quad (3.4)$$

де  $h_j$ -відліки імпульсної характеристики нерекурсивного цифрового фільтра з передаточною функцією  $\mathbf{H}(Z)$ .

Інтерполятор можна представити у вигляді поліфазного фільтра, який складається з

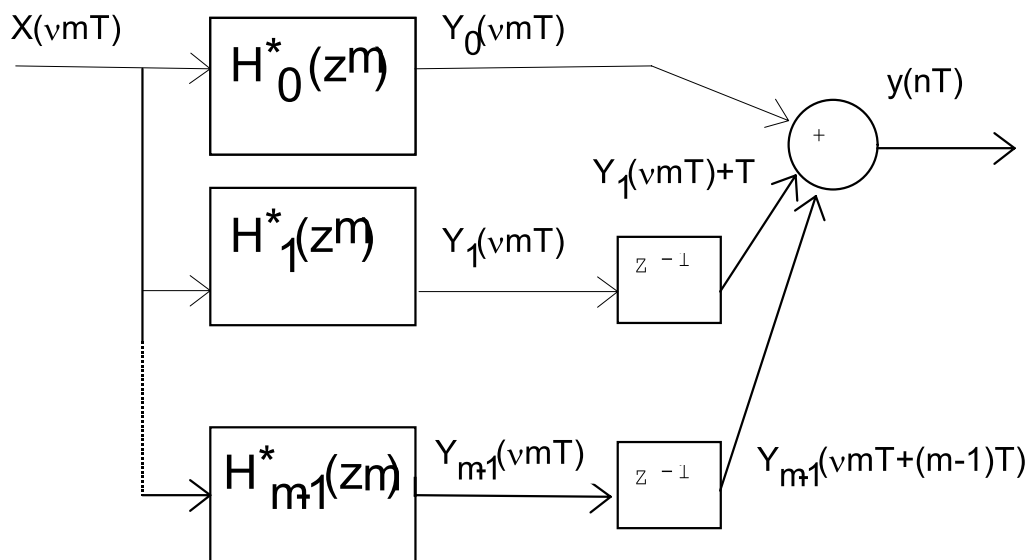


Рисунок 3.2. Поліфазна структура інтерполятора

$m$  паралельних гілок. В кожній з гілок знаходиться цифровий фільтр, що має передаточну характеристику

$$H_k^*(z^m) = z^k \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} H(z e^{i \frac{2\pi j}{m}}) e^{i \frac{2\pi j k}{m}}, \quad (3.5)$$

а відліки імпульсної характеристики є відліками загальної, взяті зі зміщенням

$$h_{k,j}^* = h_{k+jm}, \quad k = 0, m-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Сума імпульсних характеристик фільтрів у гілках поліфазної структури складають загальну імпульсну характеристику фільтра [263].

Тоді можемо записати

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{m-1} g_k \sum_{j=0}^v h_{k+jm} x((v-j)mT), \quad (3.7)$$

де  $v = \text{int}(n/m)$ ,

$g_k = 1$  при  $k=n(\text{mod } m)$ , а в іншому випадку  $g_k = 0$ .

З останнього слідує, що базис такої інтерполяції є локальним. Форма вихідного сигналу повністю визначатиметься формуючим фільтром ( $h_k$ -відліки імпульсної характеристики фільтра).

Поглянемо на інтерполяцію сплайнами. Значення сплайна в лагранжівій формі в загальному випадку розраховується за формулою:

$$S(nT) = \sum_v x(v) F_v(nT, m), \quad (3.8)$$

де  $F_v(t, m)$  -  $v$ -та функція форми.

З врахуванням локальності функції форми та регулярності сітки даних маємо наступні вирази:

$$y(nT) = h_k x(vmT) + h_{k+m} x((v-1)mT) + h_{k+2m} x((v-2)mT) + h_{k+3m} x((v-3)mT),$$

де  $h_i$  - відліки функції форми, рівні:

$$h_i = \begin{cases} i = \overline{1, m} & , h_{1_k}; \\ i = \overline{m+1, 2m} & , h_{2_k}; \\ i = \overline{2m+1, 3m} & , h_{3_k}; \\ i = \overline{3m+1, 4m} & , h_{4_k}; \end{cases} \quad \text{де } k=i(\text{mod } m), \quad (3.9)$$

Отже, маємо аналогічну, поліфазну структуру з  $m$  гілок, в кожній з яких присутній нерекурсивний цифровий фільтр з імпульсною характеристикою, що є відліками базисної функції. За умови, що базисний сплайн складається з чотирьох фрагментів, порядок кожного фільтра не перевищуватиме чотирьох.

Таким чином між інтерполяційним фільтром та математичною процедурою сплайн-інтерполяції виявляється аналогія.

З технічної точки зору локальний базисний сплайн є імпульсною характеристикою нерекурсивного цифрового інтерполяційного фільтра.

З точки зору математичної, враховуючи особливості синтезу нерекурсивних фільтрів, імпульсну характеристику фільтра можна вважати локальним сплайновим базисом.

Можна заперечити, що таке твердження не зовсім обґрунтоване з огляду на фрагментарний характер сплайнового базису. Однак завжди можна представити фільтр із заданою імпульсною характеристикою через каскадне включення двох фільтрів. В цьому випадку фрагментарний характер імпульсної характеристики буде очевидним. В аналогії між математичним та технічним представленням сплайн-інтерполяції нас цікавитиме погляд на інтерполяцію, як фільтрацію цифровим фільтром зі скінченою імпульсною характеристикою.

Під спектром сплайнового базису розумітимемо амплітудний спектр його довільної базисної функції. З огляду на властивості перетворення Фур'є спектр зміщених базисних сплайнів відрізнятиметься лише фазовим зміщенням і отже матиме однаковий амплітудний спектр. Тоді інтерполяція полягає у підборі відповідних множників для спектрів, що відрізняються фазовим зміщенням, таким чином, щоб виконувались умови інтерполяції. Це пояснює, чому при синтезі базисного сплайна має значення амплітудний або енергетичний спектр сигналу, а не повний.

Важливим підсумком аналогії є можливість представлення нев'язки інтерполяції через відмінність спектрів інтерпольованих даних та базису інтерполяції. В звичній для цифрової обробки даних термінах це буде нерівномірність амплітудно-частотної характеристики базисної функції в області ненульових значень спектра сигналу. В практиці цифрової обробки даних спектр вважають обмеженим, з певною верхньою частотою.

Однак такому спектру відповідають дані не обмежені в часі. Звичайно дані, що представляють інтерес є локалізованими в певній обмеженій часовій області. Спектр таких даних є необмеженим в частотній області. Спектр локальних базисних функцій також є необмеженим, що узгоджується з необмеженим спектром

даних. Тому критерій нерівномірності частотної характеристики в умовній області пропускання не є найкращим критерієм відповідності базису сигналу.

Поглянемо на це питання з точки зору класичної інтерполяції. Нев'язка наближення кубічним сплайном становить (1.1,1.2). Очевидно, що кубічний сплайн, який є лінійною комбінацією локальних В-сплайнів можна з нульовою невязкою наблизити аналогічним сплайном. В спектральній області інтерпольованим даним і інтерполяційному базису відповідатимуть ідентичні спектри. Отже невязка інтерполяції буде нульовою при рівності спектрів даних та інтерполяційної функції. Якщо розглядати лише амплітудні спектри, то при рівності спектрів амплітудні спектри також будуть рівні. Рівність амплітудних спектрів є необхідною умовою нульової невязки, але не достатньою, оскільки не враховуються фазові співвідношення. Встановлена аналогія між цифровою фільтрацією та математичним поняттям інтерполяції дозволяє отримати ряд практичних результатів.

Для певних сигналів виявляється можливим виконувати інтерполяцію В-сплайнами без розв'язування системи інтерполяційних рівнянь. Розглянемо інтерполяційну формулу

$$f(x) = \sum_i^N a_i B_{3,i}(x). \quad (3.10)$$

З точки зору фільтрації, вагові коефіцієнти  $a_i$  є вхідним потоком даних фільтра з імпульсною характеристикою, що є В-сплайном. Замінімо розраховані значення  $a_i$  на значення інтерпольованої функції у вузлах сплайна. Процедура інтерполяції буде задовільною за умови, що спектр вхідних даних лежить в області пропускання спектру базису. Для алгебраїчного В-сплайна легко отримати аналітичні вирази для спектра базису, оскільки В-сплайн можна отримати, як згортку прямокутних функцій. Задавши рівень нерівномірності в децибелах та нижній поріг спектру вхідного сигналу отримаємо значення допустимої верхньої частоти спектру вхідних даних, що допускає заміну коефіцієнтів при вагових функціях значеннями у вузлах інтерполяції, якщо положення вузлів інтерполяції та

сплайна співпадає.

Розглянемо приведення сплайнового базису до ермітового. Перевага ермітового базису в лагранжівій формі в тому, що вагові коефіцієнти є значеннями інтерпольованої функції у вузлах. З частотного погляду процедура приведення полягає у вирівнюванні вершини амплітудно-частотної характеристики базису. З іншого боку різницю між значеннями інтерпольованої функції у вузлах і розрахованими ваговими коефіцієнтами базисних функцій можна використати для аналізу відмінності спектрів даних та базису.

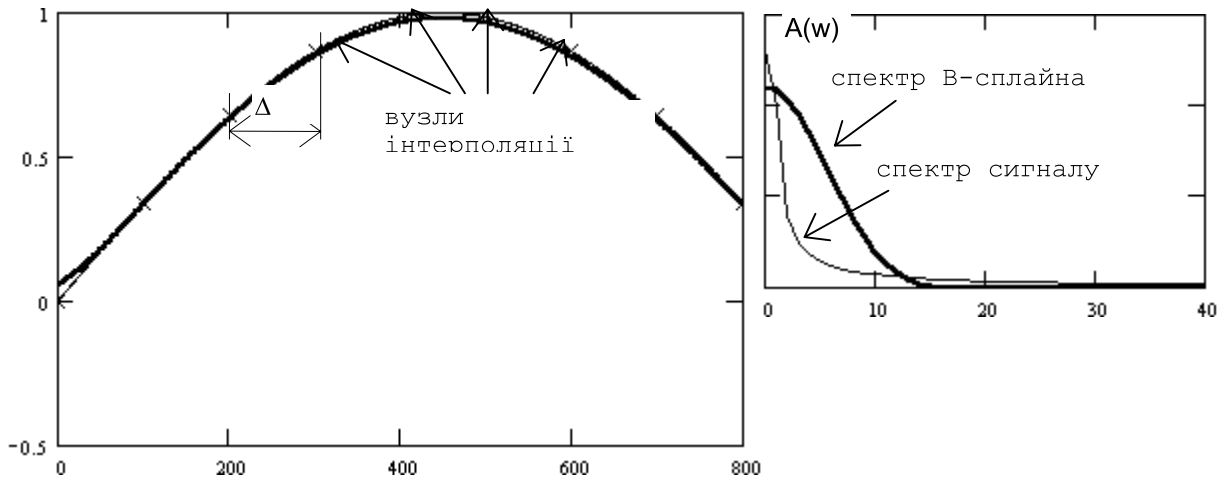
В інтерполяційних фільтрах  $a_i$  є значеннями відліків даних, що інтерполюються. Оскільки фільтр лінійний, зі скінченою імпульсною характеристикою, то вхідний сигнал зберігає форму. Фактично відбувається фільтрація вхідного сигналу ФНЧ з АЧХ [8]

$$A(\omega) = \left( \frac{\sin \pi m \omega}{\pi m \omega} \right)^4. \quad (3.11)$$

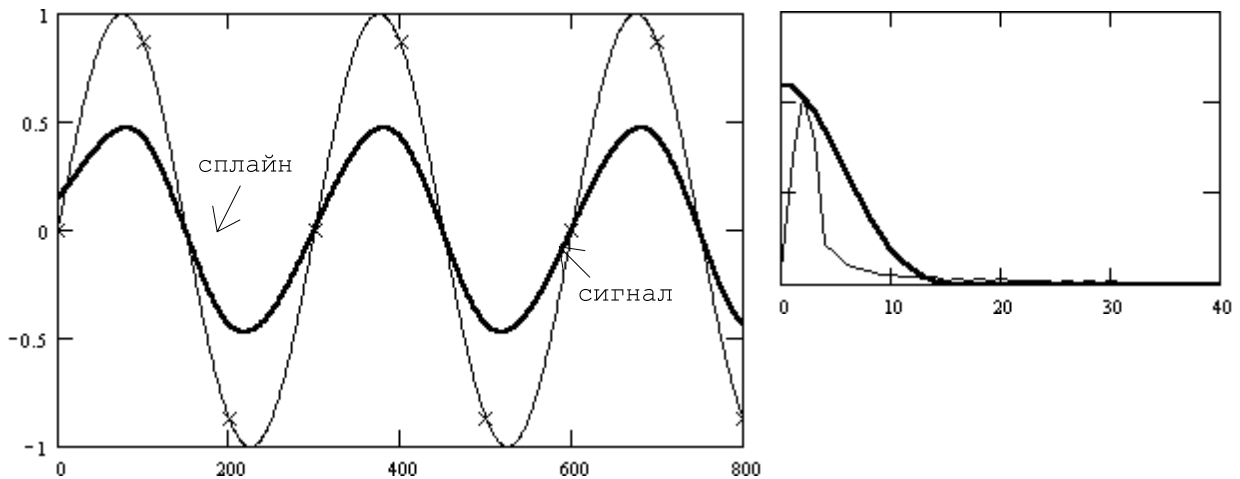
В результаті інтерполяції отримуємо кубічний сплайн з дефектом не більше одиниці. При побудові сплайна, як лінійної комбінації В-сплайнів необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь для визначення числових коефіцієнтів з (3.10). Такий підхід має певні труднощі з доповненням сплайна вузлами ліворуч та праворуч і інтерполяцією даних на значних відрізках. Проте в певних випадках можна обійтися без цієї процедури. Якщо розглянути інтерполяцію (3.10), як низькочастотну фільтрацію, то зрозуміло, що коефіцієнти  $a_i$  є вхідними значеннями фільтра. Отже можна безпосередньо рахувати вузлові значення інтерпольованої функції рівними  $a_i$ , якщо спотворення сигналу фільтром з АЧХ (3.11) є допустимим. Тобто інтерпольований сигнал повинен бути низькочастотним. На рис.3.3-3.5 показано, як відбувається апроксимація синусоїди з різним періодом відносно кроку вузлів інтерполяції  $\Delta$ . При  $\Delta=0.044\pi$  отримуємо інтерполяцію з достатньою точністю. При збільшенні  $\Delta$  зростає похибка наближення, яка спочатку обумовлена зменшенням амплітуди ( $\Delta=0.222\pi$ ). При наближенні  $\Delta$  до  $\pi$  і далі сплайн не встигає за процесом. Коли  $\Delta$  співпадає з періодом, відліки приймають



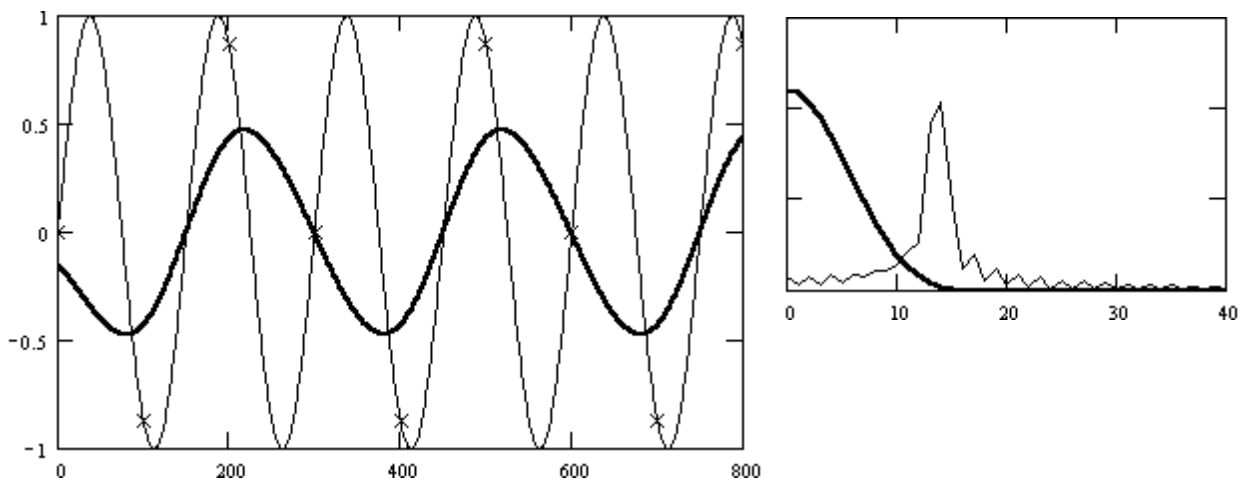
одинакові значення і сплайн стає рівний константі. Для  $\Delta=1.33\pi$  результат є абсолютно незадовільним (має місце відомий ефект маскування частот).



**Рисунок 3.3**  $\Delta=0.044\pi$



**Рисунок 3.4**  $\Delta=0.222\pi$



**Рисунок 3.5**  $\Delta=1.333\pi$

На рисунках, праворуч від зображень сигналів показані їх амплітудні спектри, отримані з допомогою дискретного перетворення Фур'є.

### 3.3 Особливості алгоритмів середньоквадратичного наближення в сплайнових базисах

Інтерполяція є найпростішим способом наближення, що застосовується в основному до сигналів, випадковою складовою в котрих можна знехтувати. Якщо мова йде про згладжування сигналів, або про статистичне оцінювання параметрів сигналів, то найбільш широко користуються методом середньоквадратичного наближення. В загальному випадку задачу середньоквадратичного наближення сигналів  $y(t) = f(t) + \xi$ , що містять корисну  $f(t)$  та випадкову шумову  $\xi$  складові, для моделей  $Q(t, A)$  з лінійною залежністю від вектора параметрів  $A$ , розв'язують з допомогою методу найменших квадратів (МНК). Корисна складова може бути як детермінованою так і стохастичною в залежності від конкретних особливостей прикладної задачі [115]. Достоїнством МНК є поєднання розв'язку задачі оптимального наближення детермінованих залежностей з оптимальними властивостями статистичного оцінювання, практично без зміни алгоритмів розрахунку. Теорія та практика МНК є добре розробленою, існує велика кількість варіантів алгоритмів відповідних розрахунків, включаючи рекурентні та реального часу [178,181,188,202]. Однією з найбільш актуальних проблем МНК є погана обумовленість системи нормальних рівнянь, що виникає при ускладненні моделі. Іншою проблемою є певне протиріччя між точністю наближення детермінованої складової і якістю статистичних оцінок параметрів моделі.

Оптимальність середньоквадратичного наближення безпосередньо впливає з розв'язку системи нормальних рівнянь. А саме, якщо маємо модель  $Q(t, A)$ , яка лінійно залежить від вектора параметрів  $A$ , то для точок спостережень  $y(t_i)$  гарантується  $\sum (y(t_i) - Q(t_i, A))^2 \rightarrow \min$ .

Якщо  $y(t_i)$  є відліками функції складної форми, то для якісного наближення модель  $Q(t, A)$  доводиться ускладнювати (збільшувати порядок полінома), що пов'язано зі збільшенням розмірності вектора параметрів  $A$ .

Статистичні властивості МНК визначені в теоремі Гауса-Маркова [106].

За умови, що

$$Y = XA + \Xi, \quad (3.12)$$

де  $Y$  вектор спостережень;  $A$  вектор параметрів;

$X$  детермінована матриця розмірності  $n \times k$ , що має максимальний ранг  $k$  (матриця планування);

$\Xi$  випадкова складова з математичним сподіванням  $M(\Xi) = 0$ , та матрицею коваріацій  $D(\Xi) = \sigma^2 I_n$ .

Оцінка за МНК  $\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y$  є найбільш ефективною (в смислі найменшої дисперсії) в класі лінійних незміщених оцінок.

В статистичному контексті матриця  $\sigma^2 (X'X)^{-1}$  є матрицею коваріацій МНК оцінки. Діагональні елементи вказаної матриці характеризують дисперсію оцінки відповідних параметрів моделі. Достовірність оцінки параметрів характеризує довірчий інтервал, що визначається у випадку нормальності даних, як

$$\hat{a}_j \pm t_{\beta}(n-k) \sqrt{\frac{(Y - XA)'(Y - XA)g_{j,j}}{n-k}}, \quad (3.13)$$

де

$t_{\beta}(n-k)$  двохстороння  $\beta * 100\%$  квантиль закону Стюдента з  $n-k$  ступенями вільності;

$g_{j,j}$  діагональний елемент кореляційної матриці МНК  $G = (X'X)^{-1}$ .

Звідси очевидні негативні наслідки ускладнення моделі:

- зменшення ступенів вільності при оцінюванні параметрів моделі призводить до зростання квантиля  $t_{\beta}(n-k)$ ;

- ускладнення моделі призводить до зростання діагональних елементів  $g_{j,j}$  коваріаційної матриці.

Наслідком цього є погіршення достовірності оцінок.

З іншого боку зменшення ступенів вільності призводить до того, що модель наближує не лише детерміновану, але й випадкову складову відліків. Очевидним результатом цього є, як неточність наближення детермінованої складової  $f(t)$ , так і заниження оцінки дисперсії випадкової складової.

Надто проста модель, яка не здатна адекватно наблизити детерміновану складову  $f(t)$  призводить до появи в залишках детермінованої складової (автокореляції). Це призводить до спотворення оцінок дисперсії оцінюваних параметрів. Таким чином, модель, що використовується в МНК має бути як можна простішою, але при цьому адекватно описувати детерміновану складову  $f(t)$  представлену відліками. Для класичних поліноміальних моделей при складному вигляді детермінованої складової, або при обробці даних на значних фрагментах важко задовольнити вказані умови. Складний характер детермінованої складової вимагає ускладнення моделі (збільшення порядку полінома), це в свою чергу погіршує статистичні оцінки. Для покращання оцінок необхідно збільшити вибірку, що знову вимагає ускладнення моделі.

В таких ситуаціях віддають перевагу простим моделям (не вище третьої степені для алгебраїчних поліномів), обробляючи дані в обмеженому вікні, в рамках котрого модель здатна адекватно описати детерміновану складову.

МНК, що використовує сплайнову модель принципово не відрізняється від того, котрий застосовується для класичних моделей. Проте ряд особливостей сплайнових базисів дозволяє позбутися описаних вище проблем, та ефективно організувати обчислювальний процес. Ці особливості досліджені в роботах стосовно ермітових кубічних та лінійних сплайнів, проте не має принципових відмінностей при використанні інших ермітових сплайнів.

Розглянемо інтерполяційний сплайн, побудований на множині вузлів  $T = \{t_{u_0}, \dots, t_{u_j}, \dots, t_{u_R}\}$ . Знайдемо значення сплайна  $S$  на множині  $N$  точок  $t = \{t_1, \dots, t_N\}$ , причому  $N \gg R$ .

Запишемо систему рівнянь:

$$S(t_i) = \sum_{j=0}^R a_j \bar{X}(t_i) \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.14)$$

або в матричному вигляді :

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{A},$$

$$\begin{bmatrix} S(t_1) \\ \dots \\ S(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & \dots & x_{1R} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & \dots & x_{NR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_R \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

В даній системі рівнянь для нас важливе значення має матриця  $X$ , яку називають матрицею планування. Значення  $j$ -го стовпця є значеннями  $j$ -ї функції форми  $\bar{X}_j(t)$  для  $t = t_1 \dots t_N$ . Внаслідок локальних властивостей функції форми матриця  $X$  є блочно-діагональною:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & G1_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & G2_{j-1} & G1_j & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & G3_{j-1} & G2_j & G1_{j+1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & G4_{j-1} & G3_j & G2_{j+1} & G1_{j+2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & G4_j & G3_{j+1} & G2_{j+2} & G1_{j+3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

де  $G1_j, G2_j, G3_j, G4_j$  матриці-стовпці, котрі складаються з відліків базису на відповідних суміжних фрагментах. Якщо зобразити ненульові елементи матриці планування точками, то вони матимуть характерний вигляд, що зображено на рис.3.6.

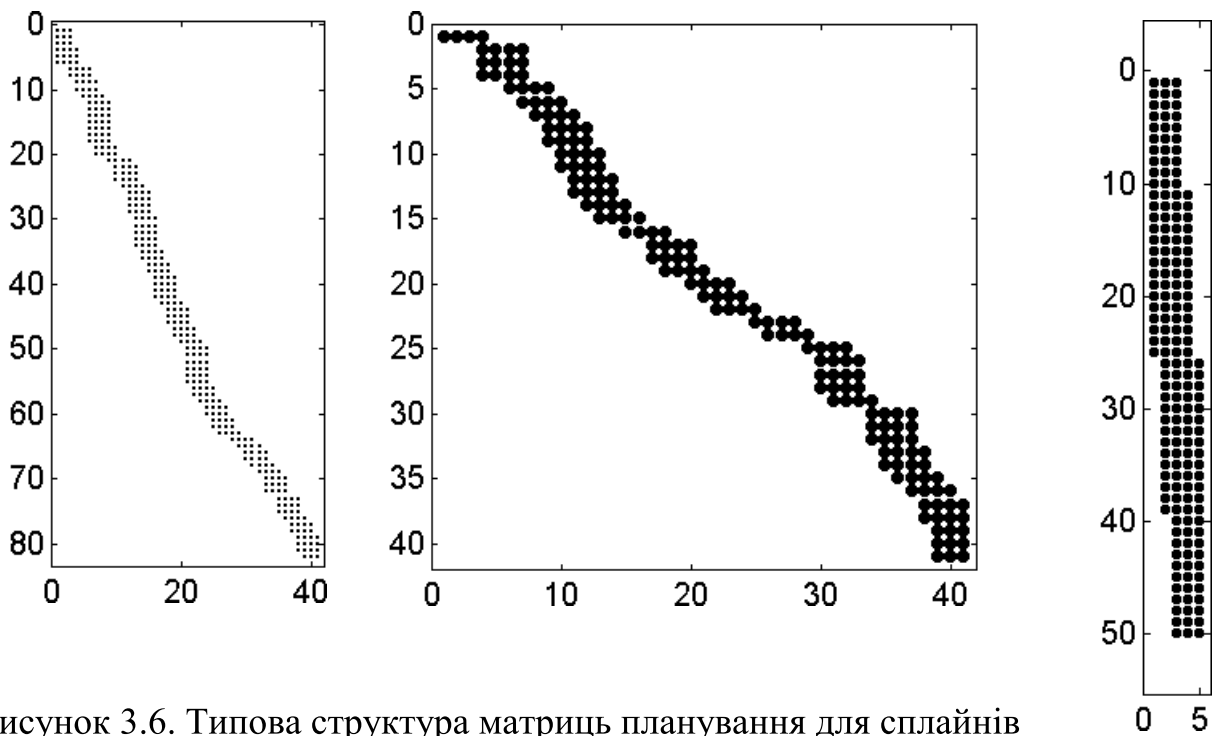


Рисунок 3.6. Типова структура матриць планування для сплайнів

Розглянемо особливості формування матриць в розв'язку системи нормальних рівнянь.

Матриця  $C=X^T X$ .

Наслідком локальності сплайнового базису є специфічна форма матриці  $C$ .

Ця матриця є симетричною, семидіагональною матрицею, значення елементів котрої визначаються згідно виразів:

$$\begin{aligned}
 c_{j,j} &= \sum_{t_i \in (tu_{j-1}, tu_j]} g1_j^2(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_j, tu_{j+1}]} g2_j^2(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g3_j^2(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g4_j^2(t_i), \\
 c_{j,j+1} &= \sum_{t_i \in (tu_j, tu_{j+1}]} g1_{j+1}(t_i)g2_j(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g2_{j+1}(t_i)g3_j(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g3_{j+1}(t_i)g4_j(t_i) \\
 c_{j,j+2} &= \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g1_{j+2}(t_i)g3_j(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g2_{j+1}(t_i)g4_j(t_i), \\
 c_{j,j+3} &= \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g1_{j+3}(t_i)g4_j(t_i), \\
 c_{j,j+1} &= c_{j+1,j}, \quad c_{j,j+2} = c_{j+2,j}, \quad c_{j,j+3} = c_{j+3,j}, \\
 c_{j,j+k} &= c_{j+k,j} = 0, \quad k > 3.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Функції  $g1_j(t), g2_j(t), g3_j(t), g4_j(t)$  є складовими відповідних базисних сплайнів  $G_j$ , що складаються з чотирьох фрагментів

$$G_j(t) = \begin{cases} g1_j(t), & t \in (tu_{j-1}, tu_j] \\ g2_j(t), & t \in (tu_j, tu_{j+1}] \\ g3_j(t), & t \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}] \\ g4_j(t), & t \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}] \end{cases} \quad (3.18)$$

Наведені вирази не враховують крайових умов, наслідки яких є очевидними. Для крайніх елементів будуть відсутні відповідні суми, а складові базисів для крайніх фрагментів розраховуватимуться з врахуванням цієї специфіки (див. розділ 2.3).

Для того, щоб матриця  $C$  мала інверсну до матриці планування  $X$  висуваються наступні вимоги:

1. Якщо є чотири, або більше суміжних інтервалів (виключаючи крайні), котрі не містять точок спостережень, то  $C$  вироджена.
2. Якщо є три, або більше суміжних інтервали з лівого, або правого краю сплайна без точок спостережень, то  $C$  вироджена.

Вузли сплайна та дані спостережень повинні розташовуватись таким чином, щоб уникнути ситуації, коли на трьох або більше сусідніх фрагментах сплайна були відсутні точки спостережень.

Інша особливість матриці  $C$  відрізняє її від аналогічних для класичних моделей. Збільшення числа параметрів (вузлів сплайна) не впливає суттєво на норму матриці. Це є наслідком того, що збільшення числа оцінюваних параметрів призводить до збільшення кількості блоків у матриці планування  $X$ . Елементи матриці планування для ермітового сплайна залишаються одного порядку (як точки сплайнового базису) у межах абсолютного значення одного порядку.

Оскільки зміни норми матриці  $C$  є незначними, та враховуючи хорошу початкову обумовленість системи рівнянь слід очікувати дуже незначної зміни в обумовленості розширеної системи рівнянь. Такий висновок підтверджується емпірично численними прикладами розрахунків. Аналітично довести це

твердження у загальному випадку автору не вдалося. Питання обумовленості для конкретного випадку рівномірної сітки даних розглядатимуться в розділі 4.

Проте варто особливо підкреслити, що проблеми, зв'язані з поганою обумовленістю рівнянь МНК для сплайнових моделей на практиці відсутні, а число обумовленості є порядку не вище сотень. Нижче показано число обумовленості  $\text{cond}(C)$  для ермітових кубічних сплайнів із різним числом вузлів  $R$ :

Таблиця 3.1. Число обумовленості матриці планування.

R	5	20	25
<b>cond(C)</b>	<b>1.9691</b>	<b>1.8547</b>	<b>1.8300</b>

Розглянемо матрицю  $C$  з точки зору цифрової обробки даних. Легко помітити, що значення елементів матриці мають зміст взаємної енергії базисних функцій. Таке наближення буде досить точним при значній кількості точок даних, та рівномірній сітці даних. Граничний перехід при необмеженій кількості даних дасть наступні вирази:

$$c_{i,j} = \sum_k G_i(t_k)G_j(t_k), \quad (3.19)$$

у загальному випадку, звідки

$$\lim_{t_{k+1}-t_k \rightarrow 0} c_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(t)G_j(t)dt. \quad (3.20)$$

Внаслідок локальності базисних функцій значення матриці характеризуватимуть взаємну енергію базисних функцій не на фрагменті, а по всій області значень базисів. Очевидно, що діагональні елементи матриці  $C$  відповідають нормам  $\|\cdot\|_2$  відповідних базисів. Незмінністю виду базисних функцій (за винятком зміщення та масштабування) пояснюється хороша обумовленість матриці  $C$ .

Окремої уваги заслуговує вектор  $\mathbf{V}=\mathbf{X}\mathbf{Y}$  із системи рівнянь МНК. Наслідком локальності сплайнових базисів, є локальна залежність елементів вектора  $\mathbf{V}$  від вхідних даних. Елементи вектора  $\mathbf{V}$  визначаються згідно виразів:



$$\begin{aligned}
b_j = & \sum_{t_i \in (tu_{j-1}, tu_j]} g1_j(t_i)y_i + \sum_{t_i \in (tu_j, tu_{j+1}]} g2_j(t_i)y_i + \\
& + \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g3_j(t_i)y_i + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g4_j(t_i)y_i
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Легко помітити, що елементи матриці  $\mathbf{B}$  мають зміст взаємної енергії базису та функції даних:

$$b_j = \sum_{k=0}^N G_j(t_k)y_k . \tag{3.22}$$

Якщо вважати сітку вузлів рівномірною, то можна вважати вектор  $\mathbf{B}$  лінійною згорткою вхідних даних із відповідними базисними функціями:

$$b_j = \sum_{k=0}^n B_0(t_k - jh)y_k , \tag{3.23}$$

де  $B_0(t)$  “еталонна” базисна функція з нульовим зміщенням (див.2.3),

$h$  - крок сітки вузлів.

$$\lim_{(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} b_j = \int_{-\infty}^{\infty} G_j(t)y(t)dt \tag{3.24}$$

Фактично, елементи вектора можна розглядати, як результат фільтрації вхідних даних нерекурсивним лінійним фільтром із коефіцієнтами, що є відліками відповідних базисних сплайнів. З теорії оптимальної фільтрації узгодженими фільтрами відомо, що максимальне значення елементів  $\mathbf{B}$  отримаємо при вхідному сигналові, що є дзеркальним відображенням базису [252,257].

Оцінки параметрів сплайнової моделі за МНК знаходять згідно виразу:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} .$$

Для коваріаційної матриці  $\mathbf{V} = \sigma^2 \mathbf{C}^{-1}$  сплайнової моделі характерним є чітке діагональне переважання, що є наслідком локальності базисних функцій. Зважаючи на те, що базисний сплайн приймає ненульові значення лише на чотирьох інтервалах, слід очікувати значиму кореляцію між вузлами не далі дев'яти параметрів (вузлів сплайна). Практично малозначимими є вже елементи, що

відстоять далі чотирьох від головної діагоналі. Отже з достатньою для практики точністю можна записати:

$$a_j = d_{j,j}b_j + \sum_{i=1}^4 d_{j,j+i}(b_{j-i} + b_{j+i}), \quad (3.26)$$

де  $d_{i,j}$  елемент матриці  $\mathbf{C}^{-1}$ .

Такий підхід до МНК дозволяє побудувати узагальнену схему отримання МНК оцінки параметра сплайна (значення сплайна у заданому вузлі), як послідовність лінійних фільтрів.

Розглянемо вектор прогнозних значень сплайнової моделі

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}. \quad (3.27)$$

Матриця  $\mathbf{L} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$  є матрицею оператора ортогонального проектування на підпростір  $\eta$ , породжений сплайновими базисами. З точки зору цифрової обробки даних рядки матриці  $\mathbf{L}$  є імпульсними характеристиками нерекурсивних цифрових фільтрів нижніх частот. МНК оцінку в точці можна отримати, як результат лінійної фільтрації нерекурсивним цифровим фільтром. Така схема відповідає максимальній швидкості, але й максимальним схемним затратам.

Залишки  $e = \mathbf{Y} - \mathbf{S}$  отримаємо аналогічно попередньому з допомогою матриці  $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{L}$  - оператора ортогонального проектування на  $\eta^\perp$  - ортогональне доповнення до підпростору  $\eta$  в  $R^n$ . Рядки матриці  $\mathbf{M}$  також можна розглядати, як коефіцієнти нерекурсивного фільтра верхніх частот, ортогонального до попереднього. Матриці  $\mathbf{L}$  та  $\mathbf{M}$  ідемпотентні, із властивостями:

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}' = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{X}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

На властивостях перетворень:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{L}\mathbf{Y}, \\ e &= \mathbf{M}\mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$Y = e + S,$$

ґрунтуються wavelet методи обробки даних. Проте в wavelet методах мова йде про інтерполяційні схеми з різноманітними локальними базисами. В даній роботі будуть розглянуті подібні wavelet методам схеми, але в контексті апроксимації за МНК із сплайновими моделями.

Стосовно сплайнових моделей варто особливо підкреслити, що мова йде про довільну (але фіксовану) схему розміщення вузлів та точок спостережень, яка допускає елементарну апаратну реалізацію та роботу в реальному часі.

Викладене вище також дозволяє об'єднати два підходи до середньоквадратичного наближення. З точки зору класичного математичного аналізу й інженерного підходу, котрий ґрунтується на спектральному представленні даних та систем обробки.

### 3.4 Алгоритми розрахунку необмежених сплайнів

Класичне визначення дає сплайн  $S(t)$ , як функцію, задану на деякому обмеженому відрізку  $[a, b]$ , котрий розбито фіксованою системою з  $R+1$  точок на  $R$  фрагментів:  $\Delta_R[a, b]: a = t_0 < t_1 < \dots < t_R = b$  [72].

Однак застосування такої моделі для оптимальної (у середньоквадратичному розумінні) фільтрації даних обмежене, оскільки інформаційні потоки є необмеженими в часі:  $f(x_i), -\infty < x_i < \infty$ . Якщо просто використати вікно  $[a, b]$ , то не гарантуватиметься гладкість результату. Вихід полягає у застосуванні локальних сплайнів із регулярними сітками вузлів  $h = t_{j+1} - t_j$  та даних  $\alpha = x_{i+1} - x_i$ . При побудові таких сплайнів використовується інформація малої частини даних на кожному фрагменті. В результаті кореляційна матриця методу найменших квадратів має мале число значимих діагоналей і апертура вікна приймається трохи більшою за інтервал кореляції. Тому у практичних розрахунках коефіцієнтів сплайн-фільтрів необмежене число  $R$  приймають достатньо великим

( $R > 30$ ). Проте працювати з матрицями значних розмірів незручно і практично неможливо отримати аналітичне рішення.

Якщо сітка вузлів сплайна регулярна і на кожному з фрагментів сплайна  $N$  дані розміщені однаково чиним  $\beta_i = t_j - x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , то такий сплайн із необмеженим числом вузлів  $R \rightarrow \infty$  повністю описується одним фрагментом. Покажемо що це так. Для локального сплайна значення в довільній  $i$ -й точці регулярної сітки даних дорівнює :

$$S(x_i) = A_{j-1}\varphi_{j-1}(x_i) + A_j\varphi_j(x_i) + A_{j+1}\varphi_{j+1}(x_i) + A_{j+2}\varphi_{j+2}(x_i), \quad (3.30)$$

де  $A_j$  - значення сплайна в  $j$ -му вузлі ;

$\varphi_i$  - локальна функція форми.

Врахувавши характер функції форми, запишемо:

$$S_i = A_{j-1}g1_i + A_j g2_i + A_{j+1}g3_i + A_{j+2}g4_i, \quad (3.31)$$

Тоді для  $N$  точок, що належать одному фрагменту, можна записати систему з  $N$  лінійних рівнянь  $\mathbf{S} = \mathbf{GA}$ ,

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g1_1 & g2_1 & g3_1 & g4_1 \\ g1_2 & g2_2 & g3_2 & g4_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g1_N & g2_N & g3_N & g4_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ A_{j+2} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Для необмеженого числа фрагментів матриця  $\mathbf{G}$  буде блочно-діагональною і складатиметься з однакових ненульових блоків для фрагментів. Таку матрицю з необмеженими розмірами позначимо  $\vec{\mathbf{G}}$ , а також аналогічно  $\vec{\mathbf{S}}, \vec{\mathbf{A}}$ .

Щоб отримати оцінки сплайна у вузлах за методом найменших квадратів по необмеженій кількості даних  $\vec{\mathbf{F}}$  запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\vec{\mathbf{G}}'\vec{\mathbf{G}}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{G}}'\vec{\mathbf{F}}, \quad (3.33)$$

або, позначивши інакше  $\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ .

Матриця  $\vec{\mathbf{C}}$  симетрична семидіагональна матриця, яка повністю визначається чотирма ненульовими елементами довільного рядка:

$$c_{j,j}, c_{j,j+1} = c_{j+1,j}, c_{j,j+2} = c_{j+2,j}, c_{j,j+3} = c_{j+3,j}. \quad (3.34)$$

Позначимо ці елементи відповідно як  $c_0, c_1, c_2, c_3$ , що рівняються

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{i=1}^N (g1_i^2 + g2_i^2 + g3_i^2 + g4_i^2), \\ c_1 &= \sum_{i=1}^N (g1_i g2_i + g2_i g3_i + g3_i g4_i), \\ c_2 &= \sum_{i=1}^N (g1_i g3_i + g2_i g4_i), \\ c_3 &= \sum_{i=1}^N g1_i g4_i. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Елементи матриці  $\vec{\mathbf{B}}$  в силу локальності функцій форми розраховуються за формулою:

$$b_j = \sum_{i=1}^N (g1_i f_{i-N} + g2_i f_i + g3_i f_{i+N} + g4_i f_{i+2N}). \quad (3.36)$$

Порівнявши з відповідними виразами з попереднього підрозділу зауважимо відсутність індексу по номеру базисної функції. Це є наслідком рівномірності сітки вузлів та даних. На всіх фрагментах відповідні відліки базисних функцій мають однакові значення, тому індекс можна опустити.

Розв'язанням системи є  $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}}^{-1} \vec{\mathbf{B}}$ . Отже проблема полягає у знаходженні інверсної матриці, яка є кореляційною матрицею похибок оцінки параметрів і за структурою - симетричною з діагональним переважанням. Така структура є наслідком локальності базисних функцій. З обмеженою точністю її можна вважати діагональною із шириною діагоналі  $2m+1$ . Позначимо цю наближену до  $\vec{\mathbf{C}}^{-1}$  матрицю як  $\vec{\mathbf{D}}$ .

Остання повністю визначатиметься  $m+1$  елементами  $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}, d_m$  довільного рядка (аналогічно елементам  $c_0, c_1, c_2, c_3$ ). Запишемо систему рівнянь

$\vec{C}\vec{D} = \vec{E}$ , де  $\vec{E}$  одинична матриця необмеженої розмірності:

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \dots & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ \dots & 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & d_0 & d_1 & \dots & d_m & 0 & 0 & 0 \\ \dots & d_1 & d_0 & d_1 & \dots & d_m & 0 & 0 \\ \dots & \dots & d_1 & d_0 & d_1 & \dots & d_m & 0 \\ \dots & d_m & \dots & d_1 & d_0 & d_1 & \dots & d_m \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_1 & d_0 & d_1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & d_m & \dots & d_1 & d_0 & d_1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & d_m & \dots & d_1 & d_0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array} = \vec{E} \quad (3.37)$$

Звідси слідує система з  $m$  рівнянь, із допомогою котрої можна знайти невідомі значення  $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}, d_m$ :

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline c_0 & 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 + c_2 & c_1 + c_3 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 + c_3 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ \hline d_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad (3.38)$$

Якщо прийняти  $m=3$ , то матимемо аналітичне рішення

$$\begin{aligned} d_0 &= (c_0^3 + c_0^2 c_2 - 2c_0 c_1^2 - 2c_0 c_1 c_3 - c_0 c_2^2 - c_0 c_3^2 + c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 c_3) / Q, \\ d_1 &= -(c_0^2 c_1 - c_0 c_1 c_2 - 2c_0 c_2 c_3 - c_1^3 + c_1^2 c_3 + c_1 c_2^2 + c_1 c_3^2) / Q, \\ d_2 &= -(c_0^2 c_2 - c_0 c_1^2 - 2c_0 c_1 c_3 - c_2^3 + c_0 c_2^2 + c_1^2 c_2 + c_2 c_3^2) / Q, \\ d_3 &= -(c_0^2 c_3 - 2c_0 c_1 c_2 + c_0 c_2 c_3 + c_1^3 - 2c_1 c_3^2 + c_2^2 c_3 - c_3^3) / Q, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де

$$Q = c_0^4 + c_0^3 c_2 - 4c_0^2 c_1^2 - 2c_0^2 c_1 c_3 - 3c_0^2 c_2^2 - 3c_0^2 c_3^2 + 5c_0 c_1^2 c_2 + 14c_0 c_1 c_2 c_3 - 2c_0 c_2^3 - 2c_0 c_2 c_3^2 + 2c_1^4 - 4c_1^3 c_3 - 4c_1^2 c_2^2 - 2c_1^2 c_3^2 + 4c_1 c_3^3 + 2c_2^4 - 4c_2^2 c_3^2 + 2c_3^4.$$

Приймати  $m < 3$  недоцільно з огляду на структуру системи.

Вияснимо похибку наближеного розрахунку інверсної матриці. Якщо матриця  $\tilde{\mathbf{D}}$  є інверсною до,  $\tilde{\mathbf{C}}$  то мають виконуватись наступні співвідношення:  $e_{j,j} = 1$  для довільного діагонального елемента,  $e_{j,i} = 0, j \neq i$  для інших елементів.

З розв'язку системи рівнянь (3.38) слідує, що

$$c_3 d_3 + c_2 d_2 + c_1 d_1 + c_0 d_0 + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 1, \quad (3.40)$$

$$c_3 d_2 + c_2 d_1 + c_1 d_0 + c_0 d_1 + c_1 d_2 + c_2 d_3 + c_3 d_4 = 0,$$

...

$$c_3 d_{m-3} + c_2 d_{m-2} + c_1 d_{m-1} + c_0 d_m = 0.$$

Для конкретного випадку  $m=3$  у цьому легко переконатись, виконавши відповідні підстановки та перетворення.

Отримання елементів довільного рядка  $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}$ , починаючи з діагонального, при перемноженні матриць можна схематично представити наступним чином:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & d_{m-1} & \dots & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots & d_{m-1} & d_m & 0 & \dots \\ \leftarrow i & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Рисунок 3.7. Схема перемноження елементів матриць

Тут елементи, котрі стоять по вертикалі - перемножуються і добутки додаються. Індекс "і" відповідає номеру елемента від діагоналі. На схемі показана ситуація розрахунку діагонального елемента ( $i=0$ ). Для зображення ситуації при розрахунку елементів, зміщених на  $i$  від діагоналі ( $e_{j,j+i} = e_{j+i,j}$ ) потрібно змістити другий рядок ліворуч на  $i$  елементів. Розглянемо елементи матриці  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,

отриманої добутком  $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}$ , де елементи матриці  $\tilde{\mathbf{D}}$  знаходяться згідно розв'язку системи (3.37). Діагональний елемент,  $e_{j,j}$  рівний одиниці, згідно розв'язку системи рівнянь (3.38). Елементи по дві сторони від діагоналі, до  $m$  включно, рівні нулю також згідно рівнянь (3.38).

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & d_{m-1} & \dots & d_{m-3} & d_{m-2} & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m \end{array}$$

Рисунок 3.8. Схема формування нульових елементів матриці  $\tilde{\mathbf{E}}$

На рис.3.8 показана ситуація для  $i=m$ .

Рівність нулю інших елементів не впливає з рівнянь (3.38). Проте лише три з них можуть приймати ненульові значення. Це зрозуміло зі схеми рис.3.9.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_{m-3} & d_{m-2} & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_{m-2} & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m + 3 \end{array}$$

Рисунок 3.9. Схема формування ненульових елементів матриці  $\tilde{\mathbf{E}}$

Таким чином отримана матриця  $\tilde{\mathbf{E}}$  відрізнятиметься від одиничної лише трьома смугами елементів (незалежно від  $m$ )



$$\left[ \begin{array}{cccccccc}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & e_{m+2} & e_{m+3} & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & e_{m+2} & e_{m+3} & \dots \\
 \dots & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & e_{m+2} & \dots \\
 \dots & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & \dots \\
 \dots & e_{m+2} & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & \dots \\
 \dots & e_{m+3} & e_{m+2} & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & e_{m+3} & e_{m+2} & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right], \quad (3.41)$$

де

$$\begin{aligned}
 e_{m+1} &= c_3 d_{m-2} + c_2 d_{m-1} + c_1 d_m, \\
 e_{m+2} &= c_3 d_{m-1} + c_2 d_m, \\
 e_{m+3} &= c_3 d_m.
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тобто, точність наближеного розрахунку суттєвим чином залежить від того наскільки швидко зменшуються значення елементів  $c_0, c_1, c_2, c_3$  із віддаленням від головної діагоналі. Чисельні розрахунки показали недостатнє їх зменшення для сплайнових базисів, отриманих способом показаним у розділі 2.3 (згорткою з прямокутним вікном). Для базисів із двома неперервними похідними, та отриманими з них приведенням до лагранжової форми (розділи 2.4-2.6) запропонований підхід дає хороші результати. Із зростанням  $m$  похибка швидко зменшується.

Розглянемо наслідки наближеного визначення інверсної матриці при розв'язанні лінійних рівнянь. Нехай маємо деяку систему лінійних рівнянь:

$$\mathbf{CA} = \mathbf{B}, \quad (3.43)$$

де  $\mathbf{A}$  - вектор невідомих коефіцієнтів,

$\mathbf{B}$  - вектор значень,

$\mathbf{C}$  - квадратна, симетрична, семидіагональна матриця коефіцієнтів.

Усі матриці вважатимемо достатньо великої (або необмеженої) розмірності й структури визначеної вище. Розв'язок знайдемо, помноживши обидві частини рівності на інверсну матрицю:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CA} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}. \quad (3.44)$$

Отримаємо

$$\mathbf{IA} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}, \quad (3.45)$$

де  $\mathbf{I}$  - одинична матриця.

Для наближеної до інверсної матриці отримаємо систему рівнянь:

$$\mathbf{EA} = \mathbf{DB}, \quad (3.46)$$

де  $\mathbf{E}$  - матриця наближена до одиничної.

Однак розв'язком вважатимемо систему

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{DB}. \quad (3.47)$$

Різниця між елементами  $\tilde{\mathbf{A}}$  та  $\mathbf{A}$  дорівнює (3.48)

$$\Delta_j = \tilde{a}_j - a_j = e_{j+m+1}(a_{j+m+1} + a_{j-m-1}) + e_{j+m+2}(a_{j+m+2} + a_{j-m-2}) + e_{j+m+3}(a_{j+m+3} + a_{j-m-3})$$

Задамо  $M$  - модуль максимально можливого значення елемента вектора  $\mathbf{A}$ .

Зауважимо, що максимальне значення на практиці легко визначити, виходячи з фізичного змісту даних, або умов технічної чи програмної реалізації розрахунків.

Тоді максимально можлива похибка становитиме не більше:

$$\max|\tilde{a}_j - a_j| = 2M(e_{j+m+1} + e_{j+m+2} + e_{j+m+3}), \quad (3.49)$$

або інакше

$$\max|\tilde{a}_j - a_j| = 2M[c_3(d_{m-2} + d_{m-1} + d_m) + c_2(d_{m-1} + d_m) + c_1d_m]. \quad (3.50)$$

Враховуючи структуру наведених вище матриць оцінку значення сплайна в довільному вузлі розраховуємо за формулою:

$$\tilde{a}_j = d_0b_j + \sum_{i=1}^m d_i(b_{j-i} + b_{j+1}). \quad (3.51)$$

Розглянемо приклад розрахунку оцінок значень необмеженого кубічного ермітового сплайна на регулярній сітці вузлів з  $N=4$ .

$$\text{Отримаємо } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.0703 & 0.8672 & 0.2266 & -0.0234 \\ -0.0625 & 0.5625 & 0.5625 & -0.0625 \\ -0.0234 & 0.2266 & 0.8672 & -0.0703 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$c_0 = 3.2583, \quad c_1 = 0.5065, \quad c_2 = -0.1428, \quad c_3 = 0.0072.$$

Тоді

m	d <sub>0</sub>	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>
3	0.3270	-0.0575	0.0245	-0.0071	-	-	-
4	0.3270	-0.0576	0.0247	-0.0074	0.0024	-	-
5	0.3270	-0.0576	0.0247	-0.0075	0.0025	-0.0008	-
30	0.3270	-0.0576	0.0247	-0.0075	0.0025	-0.0008	0.0003

Як бачимо, наближений розрахунок достатньо точний навіть при  $m=3$ .

Отже отримуємо вираз для розрахунку ( $m=3$ ):

$$a_j = 0.327b_j - 0.057(b_{j-1} + b_{j+1}) + 0.024(b_{j-2} + b_{j+2}) - 0.007(b_{j-3} + b_{j+3}). \quad (3.53)$$

Похибка за рахунок наближеного визначення інверсної матриці становитиме не більше:  $0.013 \cdot M$  ( $m=3$ ),  $0.0042 \cdot M$  ( $m=4$ ),  $0.0014 \cdot M$  ( $m=5$ ). За  $M$  можна прийняти максимальне значення при 10 бітовому представленні чисел у випадку технічної реалізації. Тоді  $M=1023$  і при  $m=5$  отримаємо максимально можливу похибку в межах одного розряду.

Практично дуже просто визначити збіжність процедури наближеного визначення інверсної матриці. Якщо із зростанням  $m$  знайдені коефіцієнти змінюються мало (у молодших розрядах), то припущення про малозначимість елементів коваріаційної матриці з віддаленням від основної діагоналі коректне. Якщо базис є непридатним для наближеного визначення інверсної матриці, то зміна  $m$  призводить до суттєвих змін в уже визначених коефіцієнтах (для базисів розглянутих у підрозділі 2.3).

### 3.5 Перетворення Фур'є у сплайнових базисах

Отримані в попередньому підрозділі результати дозволяють розглянути середньоквадратичне наближення локальними сплайнами, як узагальнене перетворення Фур'є у сплайнових базисах.

Розглянемо сплайновий базис із підрозділу 2.4. Нехай  $a+h=0$ . Позначимо такий сплайн  $H_0$ , а зміщені відносно  $H_0$  пропорційно  $h$  сплайни відповідно  $\dots, H_m, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$ . Тобто  $H_m(x) = H_0(x - mh)$ .

*Елементарні сплайни  $\dots, H_m, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$  є лінійно незалежні і складають систему лінійно незалежних базисних функцій  $\{H_m\}$ .*

Лінійна незалежність для конкретних базисів легко перевіряється, оскільки функції  $H_m$  є копіями  $H_0$  зміщеними пропорційно  $h$  по ординарній осі.

Розглянемо властивості базисних функцій  $\{H_m\}$ . Функції сімейства  $\{H_m\}$  є локальними і звідси слідує ряд їх особливостей, котрі дозволяють організувати ефективні обчислення. Зауважимо, що у статтях такі базиси автор спочатку називав квазіортогональними (термін був використаний Хемінгом для позначення не зовсім ортогональних функцій, для яких достатньою умовою ортогональності було

наближене до нуля значення  $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) f_n(x) \approx 0$  [252]). Проте сплайнові базиси

суттєво відрізняються від ортогональних. Скалярні добутки сусідніх базисних функцій не можна вважати наближено рівними нулю. В той же час скалярний добуток більш далеких базисних функцій є точно рівний нулю. Тому варто говорити саме про локальні базиси, підкреслюючи, що саме локальні властивості базисів визначають їх відмінності від ортогональних та неортогональних.

З локальності сплайнових базисів слідує:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad \text{при } |m - n| > 3. \quad (3.54)$$

Для кожної функції  $H_m$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_m(x)]^2 dx = k \quad \text{де } k = \text{const}, k > 0, \quad (3.55)$$

отже, систему  $\{H_m\}$  легко нормувати, визначивши  $k$  для однієї з функцій. Тоді

можна користуватись локальним нормованим базисом  $\{\bar{H}_i\}$ , де  $\bar{H}_i = \frac{1}{\sqrt{k}} H_i$ .

Розглянемо скалярний добуток двох довільних базисних функцій:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_m(x) \bar{H}_n(x) dx = 1, \quad \text{при } m = n, \quad \text{для нормованого базису.} \quad (3.56)$$

В довільному випадку маємо (3.57)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 2 \left[ \int_{-2h}^h F_1^2(x) dx + \int_{-h}^0 F_2^2(x) dx \right], & |m - n| = 0 \\ \int_{-h}^0 F_1(x) F_2(x) dx + \int_{0}^h F_2(x) F_3(x) dx + \int_{h}^{2h} F_3(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 1 \\ \int_{-h}^h F_1(x) F_3(x) dx + \int_{h}^{2h} F_2(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 2 \\ \int_{0}^{2h} F_1(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 3 \\ 0, & |m - n| > 3 \end{cases}$$

Тобто в довільній точці лише 4 базисних функції приймають ненульові значення. Зважаючи на симетричність базисних функцій та регулярність сітки вузлів сплайна в довільній точці  $x$  маємо ненульові значення  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$ ,  $F_4(x)$ .

Представимо з допомогою сплайнового базису на регулярній сітці вузлів деяку функцію  $Q(x)$ , визначену та неперервну на проміжку  $[a, b]$ :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^N c_k H_k(x) \quad (3.58)$$

Розглянемо розкладення в ряд Фур'є функції  $Q(x)$  по системі  $\{H_m\}$ . Знаходження узагальнених коефіцієнтів Фур'є є простим для ортогональних систем. Для локальної сплайнової системи на регулярній сітці вузлів також можливе досить просте визначення коефіцієнтів.

Знайдемо узагальнені коефіцієнти Фур'є функції  $Q(x)$  відносно системи функцій  $\{H_m\}$ :

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b H_k(x)H_n(x)dx . \quad (3.59)$$

Врахувавши локальність базису, маємо

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = \sum_{k=n-3}^{n+3} c_k \int_a^b H_k(x)H_n(x)dx . \quad (3.60)$$

Звідки

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = a_3c_{n-3} + a_2c_{n-2} + a_1c_{n-1} + a_0c_n + a_1c_{n+1} + a_2c_{n+2} + a_3c_{n+3} , \quad (3.61)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-2h}^{-h} F_1^2(x)dx + \int_{-h}^0 F_2^2(x)dx + \int_0^h F_3^2(x)dx + \int_h^{2h} F_4^2(x)dx, \\ a_1 &= \int_{-h}^0 F_1(x)F_2(x)dx + \int_0^h F_2(x)F_3(x)dx + \int_h^{2h} F_3(x)F_4(x)dx, \\ a_2 &= \int_0^h F_1(x)F_3(x)dx + \int_h^{2h} F_2(x)F_4(x)dx, \\ a_3 &= \int_h^{2h} F_1(x)F_4(x)dx, \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ліва частина рівняння

$$\begin{aligned} \int_a^b Q(x)H_n(x)dx &= \int_{(n-2)h}^{(n-1)h} Q(x)F_1(x)dx + \int_{(n-1)h}^{nh} Q(x)F_2(x)dx + \int_{nh}^{(n+1)h} Q(x)F_3(x)dx + \\ &+ \int_{(n+1)h}^{(n+2)h} Q(x)F_4(x)dx \end{aligned} \quad (3.63)$$

або

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = q_n . \quad (3.64)$$

Тоді коефіцієнти на відрізку  $[a,b]$  для обмеженого ряду з  $n$  елементів можна знайти, розв'язавши систему рівнянь

$$A * C = Q, \quad (3.65)$$

де  $A$  - семидіагональна симетрична матриця розмірності  $n$ ;

$C$  - вектор-стовпець коефіцієнтів  $c$ ;

$Q$  - вектор-стовпець з елементами  $q$ .

$$\begin{bmatrix}
 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3
 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix}
 \dots \\
 c_{n-3} \\
 c_{n-2} \\
 c_{n-1} \\
 c_n \\
 c_{n+1} \\
 c_{n+2} \\
 c_{n+3} \\
 \dots
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \dots \\
 q_{n-1} \\
 q_n \\
 q_{n+1} \\
 \dots
 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Для побудови крайніх базисних функцій сітку вузлів продовжуємо праворуч та ліворуч. Проте нас більше цікавитиме випадок, коли дані не обмежені певним інтервалом, а надходять послідовно так, що інтервал  $[a,b]$  можна вважати нескінченим. Специфічна форма системи рівнянь (3.66) дозволяє знайти наближений розв'язок за умов необмеженої розмірності матриць.

Розв'язанням системи (3.66) є  $C = A^{-1}Q$ . Отже проблема полягає у знаходженні інверсної матриці, яка є симетричною з діагональним переважанням. З обмеженою точністю її можна вважати симетричною діагональною із шириною діагоналі  $2m+1$ . Позначимо цю наближену до  $A^{-1}$  матрицю як  $D$ . Остання повністю визначатиметься  $m+1$  елементами  $d_0, d_1, d_2, d_3$  довільного рядка (аналогічно елементам  $a_0, a_1, a_2, a_3$ ). Метод розрахунку зазначених коефіцієнтів та питання точності таких розрахунків розглянуто в попередньому підрозділі.

Значення довільного коефіцієнта Фур'є в локальному сплайновому базисі розраховується за формулою:

$$c_j = d_0 q_j + \sum_{i=1}^m d_i (q_{j-i} + q_{j+i}). \quad (3.67)$$

Розглянемо дискретний варіант узагальненого перетворення Фур'є в локальних сплайнових базисах. Питання формування дискретних сплайнових базисів розглянуто в підрозділі 2.5. Сформований сплайн складатиметься з чотирьох фрагментів, які можна визначити через загальну функцію, як

$$\begin{aligned} F1_i &= F_i, & i &= \overline{1, N}; \\ F2_i &= F_{i+N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F3_i &= F_{i+2N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F4_i &= F_{i+3N}, & i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Сплайновий базис складається з відліків функції  $F_i$  зміщеної пропорційно  $N$  на регулярній сітці  $H_{ij} = F_i$ . Наслідком цього сума всіх базисних функцій у певній точці сітки даних є сумою чотирьох фрагментів базисного сплайна:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{ij} = F1_i + F2_i + F3_i + F4_i \quad (3.69)$$

Індекс “ $j$ ” є номером базисної функції, а індекс “ $i$ ” є номером точки на відрізку сплайна, якому ця точка належить. Ця особливість сплайнових базисів має вирішальне значення для ефективності розрахунків кардинальних сплайнів.

$$\sum_i H_{im} H_{in} = 0, \text{ для } |m - n| > 3. \quad (3.70)$$

Розглянемо розрахунок узагальнених коефіцієнтів Фур'є в отриманому базисі для залежності представлені відліками  $Q_i$ :

$$\sum_i Q_i H_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_i H_{ik} H_{in}. \quad (3.71)$$

Наслідком локальності базису є семидіагональна форма матриці  $A$  в рівняннях  $A^*C=Q$ , де  $A$  - семидіагональна симетрична матриця;

$C$  - вектор-стовпець коефіцієнтів  $c$ ;  $Q$  - вектор-стовпець з елементами  $q$ .



Елементи діагональної матриці розраховуються за формулами:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N F1_i^2 + \sum_{i=1}^N F2_i^2 + \sum_{i=1}^N F3_i^2 + \sum_{i=1}^N F4_i^2 \right), \\
 a_1 &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N F1_i F2_i + \sum_{i=1}^N F2_i F3_i + \sum_{i=1}^N F3_i F4_i \right), \\
 a_2 &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N F1_i F3_i + \sum_{i=1}^N F2_i F4_i \right), \\
 a_3 &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N F1_i F4_i \right).
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Оскільки базисні функції є зміщеними копіями, то номер фрагмента не має значення й індекс номера фрагмента сплайна у складових базисної функції  $c_j$  відсутній. Звичайно мова йде про внутрішні фрагменти сплайна. Розрахунок для перших і останніх фрагментів потребує врахування відсутності сусідніх вузлів. Це легко здійснити, відкинувши відповідні суми, однак, в алгоритмах реального часу операції порівняння можуть займати суттєвий час, зважаючи на простоту наведених виразів. З огляду на регулярність сітки можна умовно продовжити послідовність вузлів у нескінченість праворуч та ліворуч і не змінювати вирази. Однак усе ж не вдасться уникнути факту відсутності даних на продовжених фрагментах. Вказані спрощення призведуть до наявності певного перехідного процесу на початку і в кінці оброблюваної послідовності даних. Такий перехід не простягатиметься далі двох сплайнових фрагментів.

Розрахуємо значення елементів правої частини рівняння 3.71

$$q_j = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N F1_i Y_{i,j-2} + \sum_{i=1}^N F2_i Y_{i,j-1} + \sum_{i=1}^N F3_i Y_{i,j} + \sum_{i=1}^N F4_i Y_{i,j+1} \right), \quad j = \overline{1, R}. \tag{3.73}$$

Тут  $Y_{i,j}$  є відліками залежності, яку наближають. Індекс  $j$  означає належність відліку до  $j$ -го фрагмента сплайна. Як і в попередніх виразах відсутність сусідніх фрагментів на краях легко врахувати відкиданням відповідних сум. Можна вважати, що відліки та сітка сплайна продовжуються з нульовими значеннями. Наявність

необмеженої послідовності сплайнових фрагментів  $j = \overline{-\infty, \infty}$  не змінює вираз, оскільки базис локальний.

Узагальнені коефіцієнти Фур'є знайдемо із системи рівнянь 3.74:

$$\begin{bmatrix}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{bmatrix}
 *
 \begin{bmatrix}
 \dots \\
 c_{j-3} \\
 c_{j-2} \\
 c_{j-1} \\
 c_j \\
 c_{j+1} \\
 c_{j+2} \\
 c_{j+3} \\
 \dots
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \dots \\
 q_{j-1} \\
 q_j \\
 q_{j+1} \\
 \dots
 \end{bmatrix}
 \quad (3.74)$$

Оскільки матриця  $\mathbf{A}$  симетрична, семидіагональна з діагональним переважанням, то інверсна матриця  $\mathbf{D}=\mathbf{A}^{-1}$  має елементи, які швидко зменшуються з віддаленням від діагоналі. Довільний рядок інверсної матриці (за виключенням крайніх) повністю представляє інші. Таким чином, якщо вважати нульовими значення елементів  $d_{j\pm k}$ , для  $k>m$ , то коефіцієнти  $c_j$  визначатимуться за формулою:

$$c_j = d_0 q_j + \sum_{k=1}^m d_k (q_{j+k} + q_{j-k}) . \quad (3.75)$$

Зважаючи на те, що інверсна матриця не залежить від відліків  $Y_{i,j}$  її елементи можна розрахувати попередньо, якщо задати характеристики сітки вузлів та даних. Остання формула є ключовою для реалізації алгоритмів реального часу, для розрахунку узагальнених коефіцієнтів Фур'є по сплайнових базисах.

Практично для більшості сплайнових базисів із точністю до 1%  $d_m$  можна вважати рівним нулю для  $m>3$ .

### 3.6 Якість алгоритмів наближення сплайнами

В попередніх розділах розроблено методика побудови сплайнів із фрагментів неперервних функцій та їх використання в алгоритмах інтерполяції та оцінювання. Проте залишається відкритим питання критеріїв вибору сплайна певного виду. Для цього розглянемо якісні характеристики створених алгоритмів. Скористаємось формалізацією оцінки характеристик обчислювальних алгоритмів із [264].

Позначимо функції:  $P(D)$  - задача,  $A(U)$  - алгоритм,  $C(K)$  - пристрій для розрахунків.  $D, U, K$  множини параметрів, від яких суттєво залежить розв'язок задачі  $P$  на пристрої  $C$  із допомогою алгоритму  $A$ .

Прийmemo наступні основні характеристики алгоритмів:  $E(D, U, K)$  повна похибка розв'язку;  $T(D, U, K)$  час розв'язку;  $M(D, U, K)$  розмір пам'яті необхідної для розв'язку. Задача полягає у розкритті змісту характеристик та параметрів. Вектор  $D$  включає апріорну інформацію про сигнал. Важливими є характер сигналу (експоненційний, гармонійний, гладкий), верхня частота сигналу, амплітудний чи енергетичний спектр сигналу, характер шумової складової, закон розподілу шуму. Параметрами алгоритму є вид сплайна, вид сітки вузлів сплайна, ширина фрагментів сплайна, амплітудний чи енергетичний спектр сплайна. Параметрами пристрою є тактова частота, розрядність, обсяг пам'яті.

Розглянемо похибку розв'язку. Вона складається з похибки у вхідних даних, похибки метода, похибки округлення.

Похибка методу в задачах інтерполяції і апроксимації за МНК розглядається за умови відсутності похибки (шуму) у вхідних даних і достатньо високої точності розрахунків (подвійна точність дійсного типу даних) і в основному зводиться до оцінок нев'язки наближення. У класичному підході з точки зору теорії наближення отримують верхні оцінки похибки, віднісши дані до певного класу функцій з певними диференційними властивостями. Такі оцінки отримані для окремих видів сплайнів. Для алгебраїчних  $B$ -сплайнів порядку  $k$ , мінімального дефекту, на сітці вузлів  $t$  маємо [176]:

$$\sup_{f \in \mathcal{C}^m[a,b]} \|f - S_{k,t}\|_c \leq \text{const}_{k,m} |t|^m \omega(f^{(m)}; |t|), \quad (3.78)$$

де  $m = 0, \dots, k-1$ ,  $\omega(f; h) = \max\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq h, x, y \in [a, b]\}$ ,

$$|t| = h = \max_i (t_{i+1} - t_i) = \max_i h_i.$$

Якщо  $f$  має  $k$  неперервних похідних ( $m=k-1$ ):

$$\sup_{f \in \mathcal{C}^m[a,b]} \|f - S_{k,t}\|_c \leq \text{const}_k |t|^k \|f^{(k)}\|. \quad (3.79)$$

Для ермітових сплайнів непарної степені  $2n-1$  при  $a=0$ ,  $b=1$  маємо [176]:

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_\infty^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_c = \frac{|t|^{2n}}{(2n)! 2^{2n}}, \quad (3.80)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_p^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_p = \frac{M_{n,p}}{(2n)!} \left( \sum_{i=1}^N h_i^{2np+1} \right)^{1/p}, \quad (3.81)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_1^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_1 = \frac{|t|^{2n}}{(2n)! 2^{2n}}, \quad (3.82)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_p^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_{p'} = \frac{M_{n,p'}}{(2n)!} \left( \sum_{i=1}^N h_i^{2np'+1} \right)^{1/p'}, \quad (3.83)$$

де  $M_{n,p} = \left[ \frac{\Gamma^2(np+1)}{\Gamma(2np+2)} \right]^{1/p}$ ,  $1 < p \leq \infty$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$ .

Для рівномірної сітки з  $N$  вузлів на інтервалі  $[a, b] = [0, 1]$ :

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_\infty^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_c = \frac{1}{(2n)! 2N^{2n}}, \quad (3.84)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_p^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_p = \frac{M_{n,p}}{(2n)! N^{2n}}, \quad (3.85)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_p^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_{p'} = \frac{M_{n,p'}}{(2n)! N^{2n}}. \quad (3.86)$$

Для ермітового кубічного сплайна похибка наближення становить

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_\infty^4[a,b]} \|f - S_{3,t}\|_c = \frac{|t|^4}{386}, \quad (3.87)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{W}_\infty^4[a,b]} \|f - S_{3,t}\|_2 = \frac{1}{600} \left( \sum_{i=1}^N h_i^9 \right)^{1/2}. \quad (3.88)$$

Аналогічні оцінки похибок для рівномірного наближення сплайнами з різноманітними фрагментами можна знайти в роботі [221]. На практиці апріорно оцінити диференційні властивості реальних сигналів важко. Практичне значення цих результатів у можливості порівняння потенційних можливостей різних сплайнів та у цілеспрямованому пошуку способів оптимізації алгоритмів.

Оцінимо можливості впливу параметрів сплайнів на якість алгоритмів. В наближенні сплайнами є ряд суттєвих особливостей, котрі відрізняють їх від класичних поліномів. Основна особливість полягає у локальності базисних функцій. Традиційні базисні функції мають ненульові значення на всьому інтервалі наближення. При цьому зростання розмірності простору базисних функцій пов'язано зі зміною їхнього вигляду і як правило, призводить до суттєвого росту розрахунків. На визначення параметрів впливає вся множина вхідних відліків.

В сплайнах базисні функції є локальними (навіть у глобальних сплайнах вони швидко зменшуються до нуля). Завдяки цьому з'являється можливість додаткової адаптації сплайна до сигналу з допомогою операцій масштабування та зміщення локальної базисної функції. Саме цей прийом застосовується у вейвлет технологіях. Теоретичні та прикладні аспекти вейвлетів описані досить повно в багатьох роботах [147,212,255]. Варто особливо відмітити, що вейвлет технологія образно кажучи побудувала міст між математичною теорією наближення й практикою обробки сигналів [213] і є результатом перетину чистої математики, обчислювальної математики і обробки сигналів. У вейвлетах похибка наближення розглядається не лише через диференційні властивості функцій, але й у звичних для інженерів термінах спектрів сигналів і базисів. На практиці важливо оцінити похибку наближення конкретного сигналу, що представлений вектором відліків. Складність

задачі точної оцінки похибки наближення сплайнами за вектором інформації індивідуальної функції відзначає зокрема М.П.Корнейчук [176]. Проблема полягає в, тому, що оцінки верхньої грані похибки по класу функцій є песимістичними, оскільки розглядається випадок “найгіршої” функції з класу. Задача оптимального відновлення функції за вектором значень формулюється наступним чином [176]. Максимально використовуючи наявну апіорну інформацію про функцію, відновить її за окремими відліками з мінімально можливою похибкою. Такою апіорною інформацією є частотні властивості сигналу.

Розглянемо в цьому аспекті похибку інтерполяції сплайнами. Якщо прийняти модель сигналу з обмеженою верхньою частотою, то достатньо лише знати верхню частоту сигналу  $\omega_h$ . В процесі інтерполяції відбувається подавлення “зайвих” копій періодичного спектра. Тому найбільш прийнятною для інженерної практики оцінкою похибки є нерівномірність амплітудної характеристики спектра базисного сплайна в смузі частот  $[0, \omega_h]$   $\Delta H_s$ , та мінімальна глибина подавлення в області “зайвих копій” спектра сигналу  $H_z$ , чи нерівномірність АЧХ в області затримки  $\Delta H_z$  (рис.3.10).

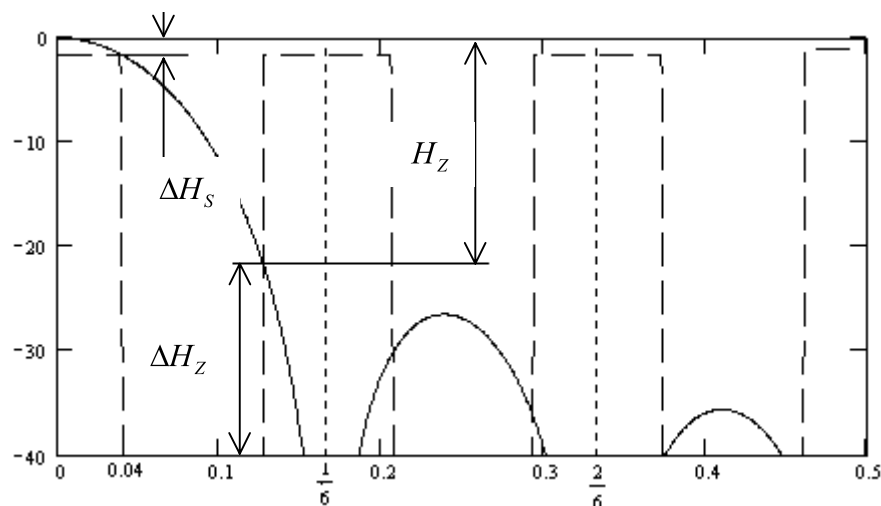


Рис.3.10 Частотні показники якості інтерполяції

Звідси зрозуміло, що вибираючи масштаб базисної функції по відношенню до сигналу можна керувати цими параметрами для заданого базису. Похибка

інтерполяції з цього погляду має дві складові. Похибка нерівномірності АЧХ в області пропускання сигналу, що має низькочастотний характер, та похибка пропускання “зайвих спектрів”, що має високочастотний характер. Скорочення базису покращує першу складову, але може суттєво погіршити другу (рис.3.11). З іншого боку, скорочення ширини базису обмежене шириною сітки даних, що є вузлами інтерполяції, та технічними умовами задачі (коефіцієнтом інтерполяції та періодом вхідних даних).

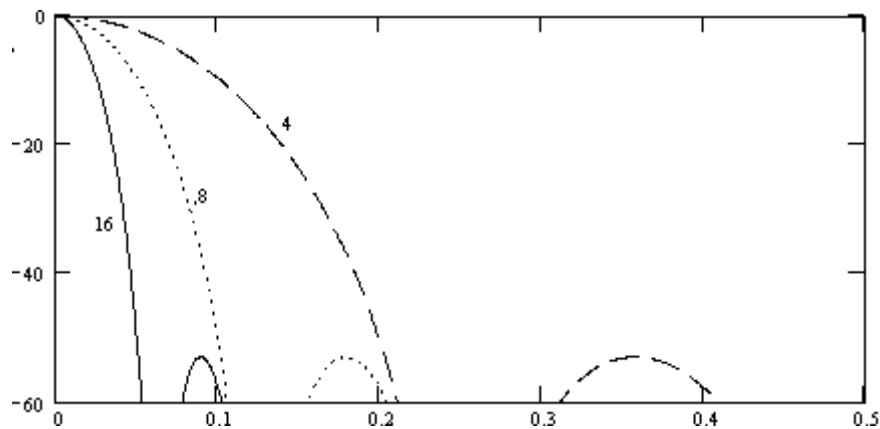


Рис. 3.11. Зміна спектра базису при зміні його відносної ширини (4, 8, 16)

За цих умов подальше зменшення похибки можливе за рахунок вибору виду базисного сплайна. Традиційним підходом є підвищення порядку базисних функцій. Довільні алгебраїчні сплайни розраховуються на сітці вузлів  $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$  згідно рекурентних виразів [43]:

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & x \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases},$$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x). \quad (3.76)$$

З іншого боку, алгебраїчні В-сплайни на рівномірній сітці вузлів можна отримати з допомогою згортки прямокутних функцій  $B_{i,1}(x)$ :

$$B_{i,k}(x) = \underbrace{B_{i,1}(x) * B_{i,1}(x) * \dots * B_{i,1}(x)}_k, \quad (3.77)$$

де  $*$  - операція згортки.

Кубічний В-сплайн у підрозділі 2.4 отримано згорткою двох трикутних симетричних функцій, котрі у свою чергу можна отримати згорткою двох прямокутників.

Вигляд В-сплайнів показано на рис.3.12, а АЧХ на рис.3.13.

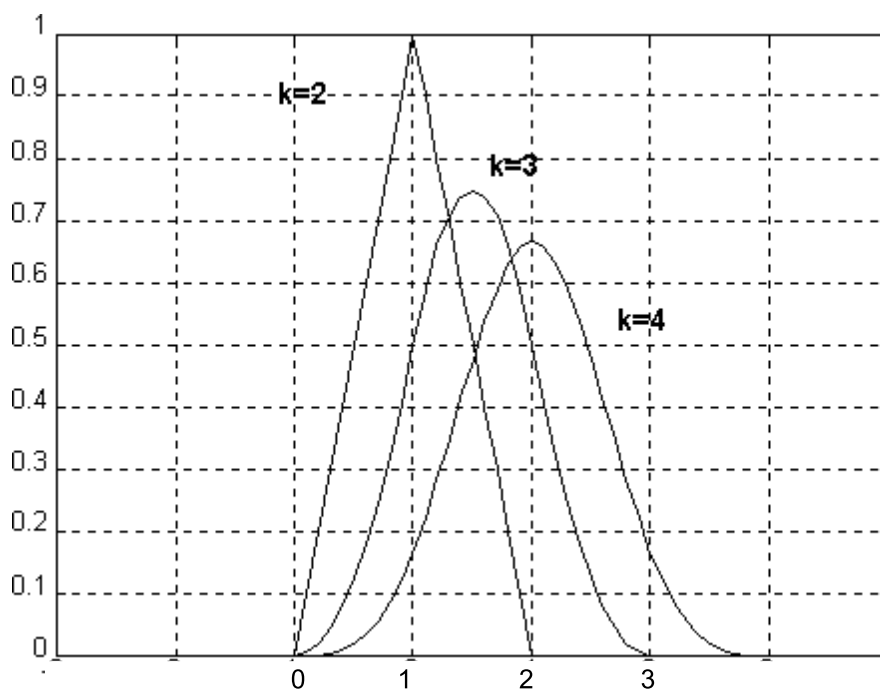


Рисунок 3.12. Алгебраїчні базисні сплайни 2,3,4 порядків

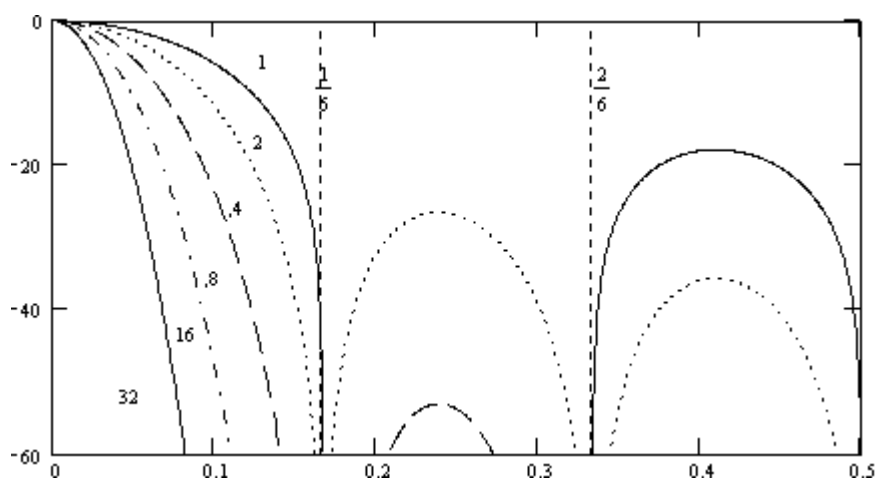


Рис. 3.13. АЧХ алгебраїчних В-сплайнів різних порядків



З рисунків видно, що зростання порядку базисного сплайна призводить до його розширення й зростання числа фрагментів. В частотній області це призводить до звуження області пропускання і відповідно погіршення  $\Delta H_s$ . Водночас зменшується високочастотна складова похибки за рахунок покращення  $H_z$ . Однак зростання порядку супроводжується тим, що базисні сплайни високих порядків усе менше відрізняються за формою. Це пояснюється тим, що за умовами побудови, породжуючі функції формально відповідають вимогам центральної граничної теореми [134] і мають такий самий алгоритм формування, що й закони розподілу. Отже при зростанні порядку базисних сплайнів вони наближаються до кривої Гауса. Практично вже при порядках більше 6-10 отримуємо базисний сплайн близький до кривої Гауса (рис.3.14). Це стосується базисних сплайнів, що утворені згорткою взагалі, а не лише алгебраїчних.

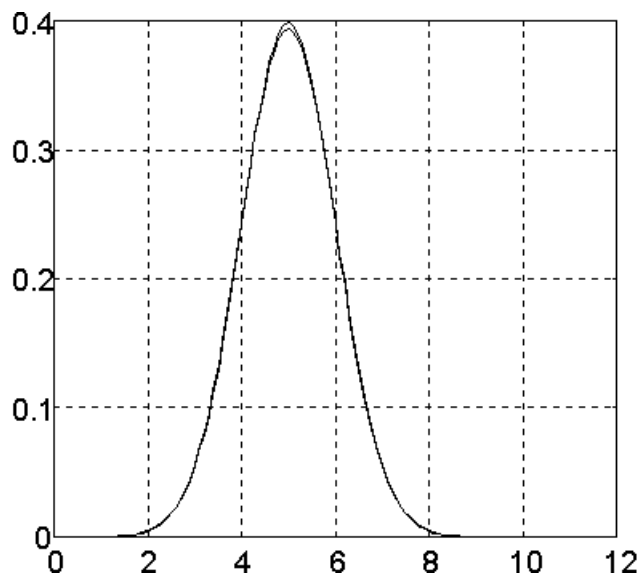


Рис.3.14 В-сплайн 12 порядку та крива Гауса

Від порядку базисних сплайнів суттєво залежать інші характеристики алгоритмів:  $T(D,U,K)$  - час розв'язку та  $M(D,U,K)$  - розмір пам'яті. Абстрагувавшись від конкретної технічної реалізації, зафіксуємо час операцій додавання та множення й розрядність розрахунків. Очевидно, що розрахунок інтерпольованого значення потребує принаймні одного множення й одного додавання на кожен базисний

сплайн, що приймає ненульові значення на фрагменті. Таким чином маємо наступну оцінку часових затрат. Для послідовного виконання операцій з одним суматором і одним перемножувачем:  $T = kT_M + (k-1)T_A + 2kT_V$ , де  $k$  - порядок базису (число фрагментів базисного сплайна),  $T_M$  - час на операцію множення,  $T_A$  - час на операцію додавання,  $T_V$  - час на пересилання коефіцієнта в пам'яті. Затрати пам'яті  $M = k + (k * n)$ , де  $n$  - коефіцієнт інтерполяції. Друга складова є обсягом постійної пам'яті.

Алгоритм дозволяє виконувати розрахунок паралельно. Для цього необхідно  $k$  перемножувачів і  $k$  суматорів. Тоді затрати часу складуть  $T = T_M + T_A + T_V$ . Затрати пам'яті аналогічні попередньому, хоча без постійної пам'яті в явному вигляді можна обійтися (замінивши комутаційною схемою).

Таким чином зростання порядку базисних сплайнів призводить до зростання часових витрат або схемних ресурсів, що суттєво для алгоритмів реального часу.

Розглянемо інший аспект зростання порядку базисних сплайнів – розв'язок інтерполяційних рівнянь та гладкість. Базисний сплайн першого порядку складається з одного фрагмента і не забезпечує навіть неперервність значень. Базисний сплайн другого порядку складається з двох фрагментів і забезпечує неперервність значень у точках стику, але не гарантує неперервності похідних. Методики розрахунку, викладені в другому розділі для базисних сплайнів четвертого порядку, очевидним чином можна застосувати і для них у спрощеному вигляді. Базисні сплайни третього порядку здатні забезпечити неперервність значення та першої похідної в точках стикування, але для них властиві труднощі з інтерполяцією оскільки число ненульових фрагментів на відрізьку не кратне двом. Тому отримати ермітів базисний сплайн із допомогою методики описаної в 2.6 не вдасться. Тому найбільш прийнятним для використання є базисний сплайн четвертого порядку. Він забезпечує неперервність двох перших похідних в  $B$  формі й неперервність першої похідної для ермітового базисного сплайна. При необхідності виконання цих умов базисний сплайн третього порядку забезпечує мінімальне число розрахунків або схемних ресурсів. Використання сплайнів вищих

порядків може бути доцільним, якщо цього безпосередньо потребують умови конкретної задачі, або необхідні властивості не вдається досягнути більш простими засобами.

Більш ефективним методом досягнення заданих характеристик є зміна вигляду базисного сплайна третього порядку. Якщо повернутися до рис.3.10, то очевидно, що задача синтезу базисного сплайна із заданими частотними властивостями ідентична задачі синтезу нерекурсивного цифрового фільтра з лінійною фазовою характеристикою. При цьому базисний сплайн можна отримати, вважаючи імпульсну характеристику породжуючою функцією, за методикою, викладеною в другому розділі.

Розглянемо похибку обумовлену наявністю похибки у вхідних даних. В роботі розглядається некорельована похибка, обумовлена адитивною шумовою складовою. За таких умов застосування інтерполяційних схем забезпечує незначне зниження рівня шумів у результаті інтерполяції, як наслідок низькочастотної фільтрації. Для ермітових базисів досить просто можна порахувати дисперсію шуму. Вона зміниться пропорційно сумі квадратів чотирьох базисних функцій. Для кубічного ермітового сплайна на рівномірній сітці максимальне зниження дисперсії у середині фрагмента становитиме 0.64 від дисперсії у вузлах. Але така фільтрація не має оптимальних властивостей і дисперсія не рівномірна на фрагменті.

Тому, як зазначалося вище, доцільніше використовувати метод найменших квадратів. Сплайнова модель в МНК фактично є інтерполяційною в тому сенсі, що оцінювані параметри моделі є інтерполяційними коефіцієнтами при розрахунку модельних значень у точках спостережень. Для ермітового сплайна оцінювані параметри є значеннями інтерполяційного сплайна у вузлах. Априорно в МНК вважається, що модель достатньо точно відповідає детермінованій складовій. Практично це означає, що за відсутності шумової складової похибка середньоквадратичного наближення є практично малозначимою. Оскільки  $\|f(x) - S(x)\|_2 \leq \|f(x) - S(x)\|_c$  [266], то априорні оцінки похибки інтерполяції є хорошими орієнтирами для оцінки похибки середньоквадратичного наближення і

вибору параметрів моделі. Тому вважатимемо, що параметри сплайнової моделі вибрані таким чином, що за відсутності шумів похибка є практично малозначимою. Тоді при наявності шумів вихідна похибка МНК буде обумовлена саме ними. Оцінку цієї похибки дає статистична теорія. Діагональні елементи коваріаційної матриці МНК (3.13) показують ступінь зниження дисперсії вхідного шуму у вихідних оцінках і можуть розраховуватись апріорно.

Розглянемо як впливають параметри сплайнової моделі на діагональні елементи коваріаційної матриці. Розширення базисних функцій призводить до збільшення числа вхідних відліків на фрагменті сплайна і покращення оцінок (зменшення довірчого інтервалу). Формула для наближеного розрахунку цих елементів наведена вище (3.39). Практично ширина фрагментів обмежена зростанням динамічної похибки.

Зростання порядку сплайнової моделі в МНК призводить до декількох негативних моментів. Внаслідок розширення базисних функцій зростає обсяг розрахунків, ширина діагоналі матриці  $C$  зростає і погіршується обумовленість системи нормальних рівнянь. Якість статистичних оцінок (ширина довірчого інтервалу) погіршується, як внаслідок зростання діагональних елементів коваріаційної матриці так і за рахунок зменшення ступенів вільності. З огляду на це бажано мати базисний сплайн мінімального порядку.

Міркування стосовно вибору форми базисного сплайна для застосування в МНК відрізняються від інтерполяційної задачі, оскільки мова йде про виділення корисного сигналу на фоні білого шуму. В цьому контексті для забезпечення мінімуму дисперсії сигналу похибки, модуль частотного коефіцієнта передачі МНК фільтра має бути близьким за формою до спектральної потужності корисного сигналу. В наступних розділах буде показано, що можна так побудувати МНК алгоритм, у вигляді фільтра, щоб його модуль АЧХ був близький до АЧХ базисного сплайна. Тоді слід синтезувати базисний сплайн з АЧХ близькою до корисного сигналу. Це також слідує з досліджень Железнова по оптимальній дискретизації, де

знайдено, що базисні функції мають бути близькими до автокореляційної функції процесу.

Похибки округлення практично мало залежать від виду сплайна і методика їх оцінки не відрізняється від добре висвітленої у роботах [154,263,264,266]. Зауважимо лише, що дана похибка може мати значення в основному при апаратній реалізації з низькою розрядністю. Проте мале число операцій при відсутності зворотних зв'язків не призводить до значного накопичення похибки. Легко порахувати, максимальну похибку інтерполяції внаслідок округлення в розрахунках. Прийmemo крок квантування рівним  $Q$ . Тоді абсолютна похибка при квантуванні з округленням становить  $\Delta = 0.5Q$ . Для інтерполяційного сплайна  $k$ -го

порядку можна записати: 
$$\sum_{j=1}^k (a_j + \Delta)(B_j(x) + \Delta) = S(x) + \Delta \sum_{j=1}^k (a_j + B_j(x)) + k\Delta^2.$$

Прийнявши максимальні значення  $a_j$  та  $B_j(x)$  не більшими за одиницю отримаємо максимальну похибку  $E_o = 2k\Delta + k\Delta^2 \approx 2k\Delta$ .

Для реалізації МНК алгоритму у вигляді нерекурсивного цифрового фільтра  $m$  порядку та вважаючи модуль вхідного сигналу не більшим одиниці отримаємо максимально можливу похибку [263] 
$$E_o = \Delta \sum_{i=0}^m |h_i|.$$

Реальна похибка буде значно меншою, оскільки максимально несприятливе складання похибок мало ймовірне. Більш реалістичною є ймовірнісна оцінка [263]

через дисперсію шуму квантування  $\sigma_\Delta^2$ : 
$$\sigma_o^2 = \sigma_\Delta^2 \sum_{j=1}^k (B_j(x))^2$$
 для інтерполяції;

$$\sigma_o^2 = \sigma_\Delta^2 \sum_{i=0}^m (h_i)^2$$
 для МНК фільтрації ( $\sigma_o^2$  - дисперсія шуму квантування на виході).

### 3.7 Висновки

1. Між математичним поняттям інтерполяції та технічним, що ґрунтується на низькочастотній фільтрації існує безпосередній взаємозв'язок. Встановлено, що базисну функцію кардинального сплайна можна вважати імпульсною характеристикою нерекурсивного фільтра нижніх частот в інтерполяційному фільтрі. Запропонована технічна реалізація інтерполяційного сплайн-фільтра у вигляді поліфазної структури з фільтрами четвертого порядку у гілках, коефіцієнти котрих є відліками локального сплайнового базису.

2. Базисний сплайн можна розглядати як імпульсну характеристику деякого фільтра. Коефіцієнти при базисних функціях розглядаються як вхідна послідовність даних фільтра. Якщо спектр вхідних даних потрапляє в область пропускання фільтра з малою нерівномірністю характеристики, то похибка інтерполяції є малою.

3. У практичних випадках точність наближення сплайнами доцільно виражати через відмінності спектрів базисних сплайнів і функції, котру наближають. Це ґрунтується на наявності апріорної інформації про спектри в цифрових системах.

4. Метод найменших квадратів із сплайновою моделлю має ряд особливостей не характерних для класичних поліноміальних моделей. Ускладнення сплайнової моделі не зв'язано з ускладненням базисних функцій, тому зростання числа оцінюваних параметрів не призводить до погіршення обумовленості нормальних рівнянь.

5. Отримано метод наближеного розрахунку інверсної матриці МНК для локального сплайна необмеженої розмірності, та вирази для оцінки похибки наближення та похибки визначення МНК оцінок. Це дозволяє будувати згладжуючі сплайни для необмеженої послідовності даних.

6. Підвищення порядку сплайнових базисів отриманих згорткою призводить до отримання базисних сплайнів близьких за формою до кривої Гауса.

7. Зменшення нев'язки наближення сплайнами шляхом підвищення порядку базисних сплайнів є недоцільним внаслідок подібності базисів високих порядків,

втрати локальних властивостей, зростання обсягів розрахунків. Оптимальним є використання сплайнових базисів не вище четвертого порядку. Найбільш доцільним є зменшення нев'язки шляхом скорочення фрагментів сплайна та синтезу базисних сплайнів із заданими АЧХ.

## 4. ПАРАМЕТРИЧНА СПЛАЙН-ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИГНАЛІВ

### 4.1 Постановка задачі

В попередніх розділах було показано, що якість наближення сплайнами залежить від співвідношень між спектрами вхідних сигналів і базисних сплайнів. На відміну від диференційних властивостей вхідних даних, спектральні характеристики в технічних системах, як правило задані, або їх можна визначити. Таким чином актуальною є задача визначення спектральних характеристик сигналів при наявності в них випадкової складової. Не зважаючи на значний обсяг досліджень в цій області [106,119,135,158,181,182,190] задача ідентифікації спектрів сигналів є нетривіальною. Частково це пояснюється тим, що ця задача відноситься до класу некоректних задач за Адамаром [135]. В [161] доведено, що як завгодно мале відхилення в значеннях коефіцієнтів Фур'є може призвести до як завгодно великого відхилення між сумами тригонометричних рядів Фур'є. Отже задачі де застосовують суми тригонометричних рядів Фур'є з неточно заданими коефіцієнтами потребують спеціальних методів регуляризації. Одним із способів регуляризації є апроксимація результату гладкою функцією [135]. Такі методи називають проєкційними. В якості регуляризуючих функцій використовують сплайни. В роботі [200] доводяться оптимальні властивості сплайнів в подібних задачах. Тому в підрозділі 4.2 розглядається метод ідентифікації спектрів даних з допомогою сплайнів. Особливість підходу в тому, що сплайн будується в спектральній області, а нев'язка наближення розглядається в часовій області [287,272]. В підрозділі 4.3 розглянуто алгоритми, котрі є модифікаціями загального методу з підрозділу 4.2.

На відміну від класичних поліноміальних моделей, сплайнові моделі містять вектор параметрів - абсцис точок стику, від котрого суттєво залежить якість наближення. Тому практичне значення мають дві задачі: визначення оптимальної



кількості вузлів, та оптимального розміщення заданого числа вузлів. Подібна задача спрощується лише при рівномірному розміщенні вузлів, де вона зводиться до вибору ширини фрагмента сплайна. Не зважаючи на значну кількість рекомендацій та алгоритмів оптимального розміщення вузлів важко вибрати прийнятний для задач обробки сигналів. Існуючі рекомендації ґрунтуються на апріорній інформації про диференційні властивості функції, котру наближають [176]. Тому на практиці вузли розміщуються виходячи з деяких суб'єктивних міркувань та досвіду роботи з конкретним видом даних, або виконують попередній аналіз даних [120,121]. Автор пропонує для даних, що містять випадкову складову використати статистичний критерій, котрий перевіряє залишки наближення на відсутність в них не випадкової складової [292]. Ці питання розглянуто в підрозділі 4.4.

Ще один важливий аспект використання сплайнів в задачах статистичного оцінювання стосується ідентифікації випадкової складової в сигналах. Відомо, що точні довірчі інтервали для оцінок будуються за умови нормальності випадкової складової. Тому ідентифікація закону розподілу залишків, що еквівалентна задачі оптимального згладжування емпіричної функції розподілу, дозволяє розв'язати дві задачі. Перевірити гіпотезу про нормальність даних, або застосувати бутстреп [140] метод для побудови довірчих інтервалів ненормальних даних. З іншого боку ідентифікація випадкових даних представляє окремий інтерес в задачах де параметри цих даних несуть корисну інформацію [113,118,119,140,157,171,207,252]. Вказані питання досліджуються в підрозділі 4.5.

В заключному підрозділі 4.6 містяться основні висновки розділу. Отримані результати використовуються в наступних розділах при розробці прикладних методів та алгоритмів обробки даних.

## **4.2 Ідентифікація спектрів сигналів**

Під задачею ідентифікації спектрів даних будемо розуміти оцінювання деякої функції частоти за вибіркою даних. При цьому функцію частоти вважатимемо

гладкою, неперервною функцією. Тобто в даній роботі не розглядаються задачі оцінки деяких локальних параметрів в частотній області (наприклад амплітуди певної частоти). Досить повний огляд методів спектрального аналізу даних міститься в [190]. Методи спектрального оцінювання можна класифікувати наступним чином.

1. Прямі або періодограмні методи. Спектр оцінюють за перетворенням Фур'є деяких вибірок в часовій області. Якщо не використовувати статистичного осереднення, результуюча функція буде статистично неспроможною, оскільки середньоквадратична похибка оцінок близька до середніх значень оцінки. Тому застосовують різноманітні способи осереднення у вигляді часових або спектральних вікон.
2. Непрямі або корелограмні методи. Знаходять автокореляційну функцію даних, а від неї розраховують спектральну функцію. Оскільки вибіркова автокореляційна функція є статистичною оцінкою, то перетворення Фур'є від неї дає статистично стійкий результат.
3. Параметричні методи. Будується модель в часовій області, що відповідає аналізованому випадковому процесу. Спектр визначають, як деяку функцію від знайденої моделі. В якості моделі найчастіше використовують авторегресію, ковзке середнє, та їх комбінацію.

Перші два методи відносяться до класичних. Їх перевагами є робастність та обчислювальна ефективність. Недоліки обумовлені спотворенням, котрі є наслідком застосування вікон (зокрема нереалістичного припущення про нульові значення даних поза вікном, або далі значимих відліків автокореляційної функції). Для вказаних методів важко добитися статистичної стійкості в поєднанні з високою роздільною здатністю спектру.

Параметричні моделі дозволяють отримати більшу точність та роздільну здатність, оскільки не потребують застосування вікон і максимально використовують наявну апіорну інформацію про вхідні дані.

Всі методи застосовуються в припущенні про стаціонарність вхідних даних.

Характерною особливістю методів 1-3 є те, що основна частина обробки даних виконується в часовій області (зважування, оцінювання АКФ, оцінювання параметрів моделі), де отримують стійкі статистичні оцінки, а потім здійснюють перехід до спектральної області. Таким чином вдається уникнути труднощів обумовлених некоректністю задачі спектрального оцінювання.

В даному розділі пропонується отримувати оцінки безпосередньо в спектральній області, розв'язуючи інтегральне рівняння Фредгольма I роду

$$\int_a^b K(t, \omega) F(\omega) d\omega = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

з ядром  $K(t, \omega) = e^{j\omega t}$  і відомою правою частиною.

Розв'язок знаходиться проекційним методом з представленням результату сплайном.. Регуляризація розв'язку досягатиметься за рахунок гладкості сплайн-функції. Значною перевагою такого підходу є можливість локальної деталізації спектру за рахунок згущення сітки вузлів сплайна. Схема розміщення сітки вузлів може будуватися із використанням апіорної інформації про очікуваний характер спектру.

Розглянемо часову послідовність з  $N$  відліків вхідних даних:

$$Y' = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}. \quad (4.1)$$

Вказаній послідовності відповідають відліки в спектральній області:

$$F' = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}. \quad (4.2)$$

Відліки в обох областях однозначно зв'язані прямим та зворотнім дискретним перетвореннями Фур'є:

$$F = \Phi(Y), \quad Y = \Phi^{-1}(F), \quad (4.3)$$

де  $\Phi, \Phi^{-1}$  - оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є.

В матричному вигляді дискретне перетворення Фур'є можна записати як:

$$F = MY, \quad (4.4)$$

$$Y = QF, \quad (4.5)$$

де  $M$  та  $Q$  матриці коефіцієнтів прямого та зворотного перетворення Фур'є.

Вважатимемо, що відліки є значеннями локального ермітового сплайна третьої степені, що лінійно залежить від вектора параметрів  $A$ . Відмітимо, що відліки є комплексними числами. Отже в даному випадку мова йтиме про комплексні значення сплайна від дійсної змінної. Такий сплайн можна розглядати, як параметричне представлення деякої кривої на площині. Тому міркування відносно неперервності та диференційованості залишаються незмінними. Запишемо:

$$F = XA, \quad (4.6)$$

$X$  - блочно-діагональна матриця, стовпцями якої є базисні функції інтерполяційного сплайна в частотній області, комплексні;

$A$  - вектор параметрів моделі, в даному випадку це значення спектра в вузлах сплайна (також комплексна величина).

Підставимо (4.6) в (4.5) і отримаємо:

$$Y = QXA. \quad (4.7)$$

Позначимо  $W = QX$ , що є зворотнім перетворенням Фур'є над стовпцями - базисними функціями сплайна. Отже:

$$Y = WA. \quad (4.8)$$

Аналогічний результат отримаємо для неперервного варіанта даних. Опишемо спектральну функцію сплайном побудованим на множині вузлів  $U$ :

$$f(\omega) = \sum_j X_j(\omega, U) A_j. \quad (4.9)$$

Застосувавши інверсне перетворення Фур'є отримаємо:

$$\Phi^{-1} f(\omega) = \sum_j \Phi^{-1} X_j(\omega, U) A_j, \quad (4.10)$$

$$y(t) = \sum_j W_j(t) A_j. \quad (4.11)$$

Особливість останнього в тому, що в часовій області ми отримали

функцію  $y(t)$ , котра не є сплайном.. Базисні функції  $W_j(t)$  також не є сплайнами, як інверсне перетворення від базисних сплайнів в частотній області  $X_j(\omega, U)$ . Коефіцієнти при базисних функціях  $W_j(t)$  є значеннями гармонік у вузлових точках сплайна, побудованого в частотній області. Зауважимо, що оскільки сплайновий базис в частотній області  $X_j(\omega, U)$  є локальним, то в часовій області  $W_j(t)$  буде необмеженим. Проте ширина базису  $W_j(t)$  в часовій області залежатиме від форми та ширини базису  $X_j(\omega, U)$  в частотній області. Чим вужчий базисний сплайн в частотній області тим ширший він в часовій. Практично (зваживши на схожість форми до Гаусової кривої) значення часового образу базисного сплайна швидко зменшуються і його також можна вважати локальним. Як відомо, зміщенню в частотній області відповідає модуляція в часовій. За огинаючу  $W_j(t)$  відповідатиме форма та ширина базисного сплайна  $X_j(\omega, U)$  в частотній області. Отже образу базису  $X_0(\omega, U)$  з центром на нульовій частоті відповідатиме відеосигнал обмеженої довжини, а зміщеним ( $j > 0$ ) - радіосигнали з аналогічною огинаючою та різними частотами заповнення. Відповідні пари сигналів для ермітових кубічних сплайнів показано на рис.4.1-4.6.

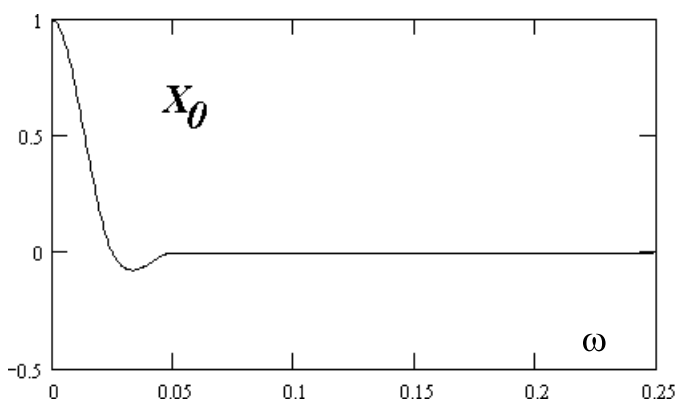


Рисунок 4.1. Базис в спектр.області

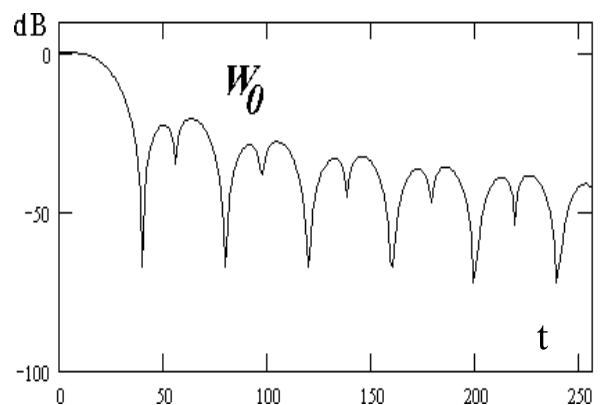


Рисунок 4.2. Базис в часовій області

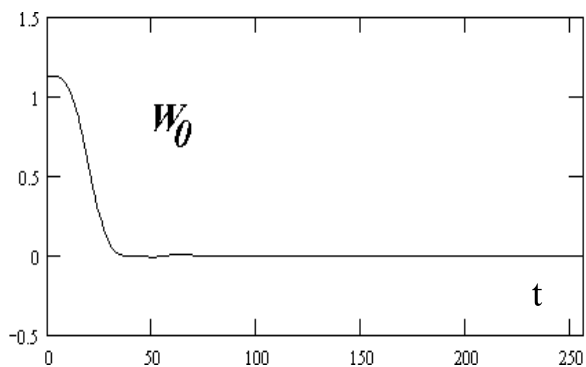


Рисунок 4.3. Базис в часовій області (лінійний масштаб амплітуди)

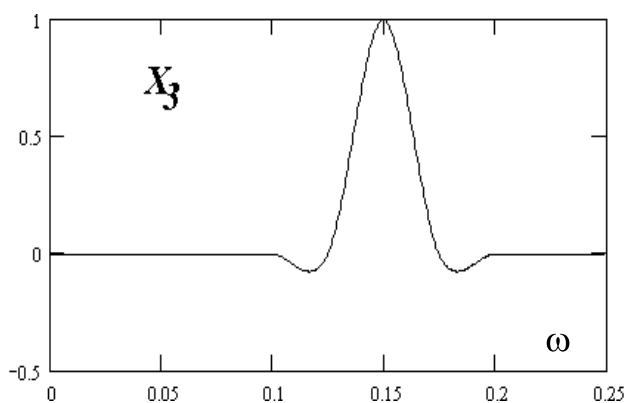


Рисунок 4.4. Базис в част.області

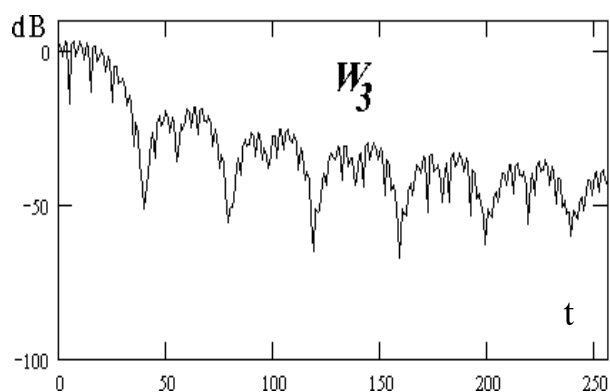


Рисунок 4.5. Амплітуда базису в часі

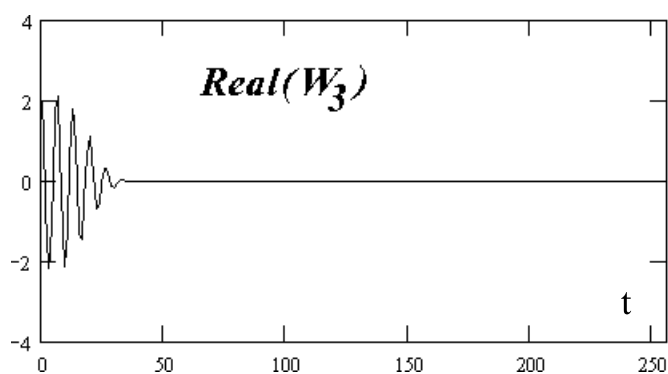


Рисунок 4.6. Дійсна частина базису в часі (лінійний масшт.)

Отримана модель лінійно залежить від вектора параметрів, тому для статистичної оцінки параметрів скористаємося МНК, котрий забезпечує

$$(Y - WA)'(Y - WA) \rightarrow \min . \quad (4.12)$$

Тобто знайдемо вектор, котрий мінімізує квадратичну нев'язку між відліками часової послідовності та відповідними відліками зворотного перетворення Фур'є сплайн-моделі спектру.

Розв'язуємо систему нормальних рівнянь:

$$A = (W'W)^{-1}W'Y , \quad (4.13)$$

$$\text{або } A = C^{-1}B . \quad (4.14)$$

Матриця  $C^{-1}$  є коваріаційною матрицею похибок МНК. Тому можна отримати й оцінки точності моделі, проте потрібно мати на увазі комплексний характер числових значень. Отже довірча область буде еліпсом в комплексній площині.

Розглянемо деякі аспекти побудови обчислювальних процедур оцінки сплайну в спектральній області. В загальному вигляді викладене вище дозволяє застосовувати метод для довільних сіток даних і вузлів в часовій та спектральній областях. Проте використання рівномірної сітки даних (та відліків сплайна в спектральній області) значно підвищує швидкість розрахунків за рахунок використання методів швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Слід підкреслити, що нерівномірність сітки вузлів сплайнів не перешкоджає застосуванню ШПФ. Система рівнянь (4.13) матиме модифікації в залежності від конкретного варіанту ШПФ. Слід враховувати відмінності між ШПФ для комплексних та дійсних даних, а також основу ШПФ (як правило це умова рівності числа даних степені двійки).

Інша особливість розрахунків стосується крайових умов. За умови рівномірності сітки вузлів і дійсного характеру даних природнім є періодичне продовження фрагментами однакової ширини. У випадку нерівномірності сітки вузлів і дійсного характеру даних слід виходити з симетричності частотної характеристики відносно нульової частоти і частоти 0.5 періоду даних (0.5/T). Для довільної сітки вузлів і комплексних даних природною є умова симетричності

відносно частоти  $0.5/T$ .

Вибір сітки вузлів сплайна в частотній області є фактором, що суттєво впливає на результат. Від кількості вузлів залежить ефективність оцінок. Очевидно, що зі збільшенням числа оцінюваних параметрів зменшується число ступенів вільності і погіршуються оцінки. При числі вузлів рівному числу даних (або половині) отримаємо звичайну періодограму. Мала кількість вузлів робить спектр надто гладким, знижує роздільну здатність методу. Сплайн дозволяє досягти певного компромісу між цими протиріччями. В області спектру де потрібна хороша роздільна здатність, сітку вузлів потрібно згустити, в інших максимально розширити. Це дозволяє обійтись мінімальною кількістю оцінюваних параметрів. Загалом питання розстановки вузлів є складним і успіх залежить від суб'єктивного досвіду оператора. Певний систематичний підхід до цього питання буде розглянуто в підрозділі 4.4.

Знайшовши оцінки параметрів сплайна в частотній області легко розрахувати значення спектру в довільній точці шляхом інтерполяції. Для ілюстрації запропонованого методу оцінки спектру скористаємося тестовим прикладом 64 комплексних чисел з [190]. Це дозволить порівняти результати з оцінками отриманими з допомогою класичних методів. На рис.4.7 показано: 1-оцінку відносної спектральної щільності потужності (СЩП) отриману з допомогою корелограмного методу Бартлета (16 значень автокореляції, вікно Хемінга); 2-оцінки сплайнової моделі побудованої на рівномірній сітці даних з восьми вузлів. Число вузлів мале і сплайн-функція спектру є надто згладженою, хоч і передає основну тенденцію спектра даних. Тестовий приклад спектру є сумою окремих синусоїдальних складових і білого шуму пропущеного через фільтри ковзкого середнього. Отже спектр не є гладкою функцією. В [190] цей тест застосовується для якісного порівняння різних методів оцінки спектра. На рис.4.8 показано сплайн, побудований на рівномірній сітці з 16 вузлів. Для порівняння показано спектр отриманий корелограмним методом. Сплайн досить виразно передає більш тонкі структури спектру. Покращання результатів можна отримати переміщенням



вузлових точок по осі частот.

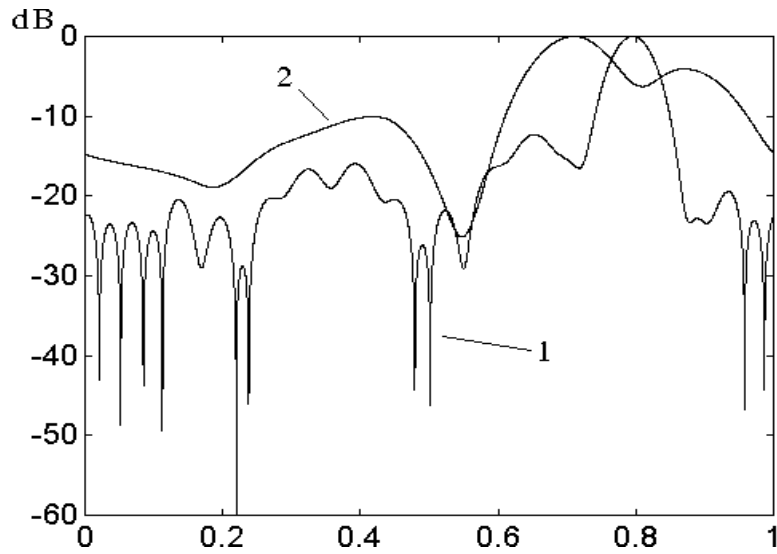


Рисунок 4.7. Спектральна щільність потужності: 2-сплайн на рівномірній сітці з 8 вузлів; 1- корелограмний метод з 16 значеннями автокореляції та вікном Хемінга.

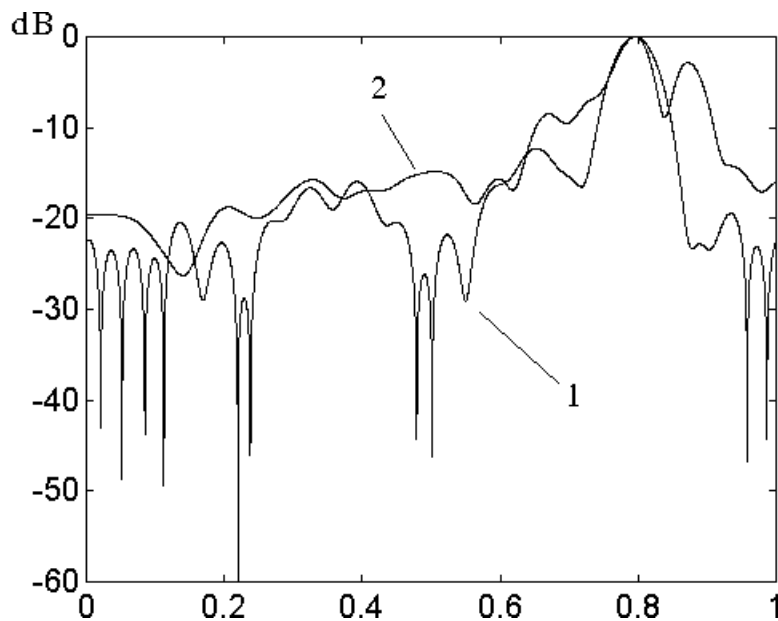


Рисунок 4.8. Спектральна щільність потужності: 2-сплайн на рівномірній сітці з 16 вузлів; 1- корелограмний метод з 16 значеннями автокореляції та вікном Хемінга.

На рис.4.9 показано тестову послідовність дійсних даних, що містять явно виражену періодичну складову [106].

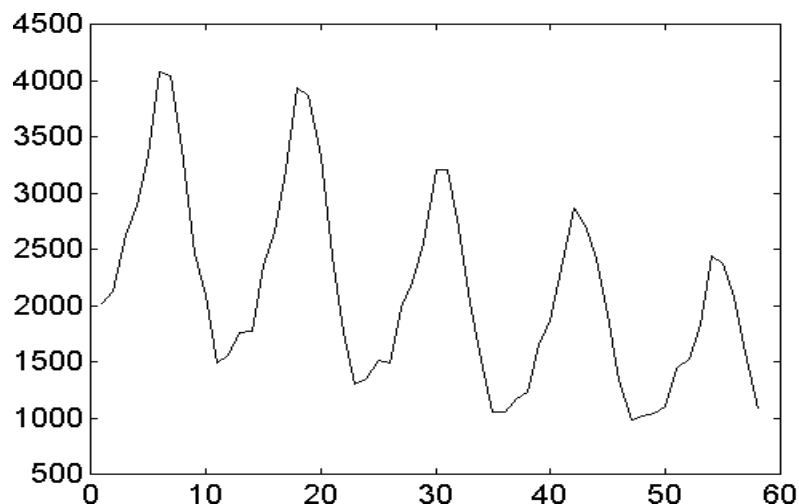


Рисунок 4.9. Дійсні дані з періодичною складовою

На рис.4.10 показана: 1-оцінка спектральної щільності потужності, отримана з допомогою корелограмного методу Бартлета з кореляційною функцією довжиною 32 відліки, зваженою з допомогою вікна Хемінга; 2- оцінка отримана з допомогою сплайна, побудованого на рівномірній сітці з 10 вузлів.

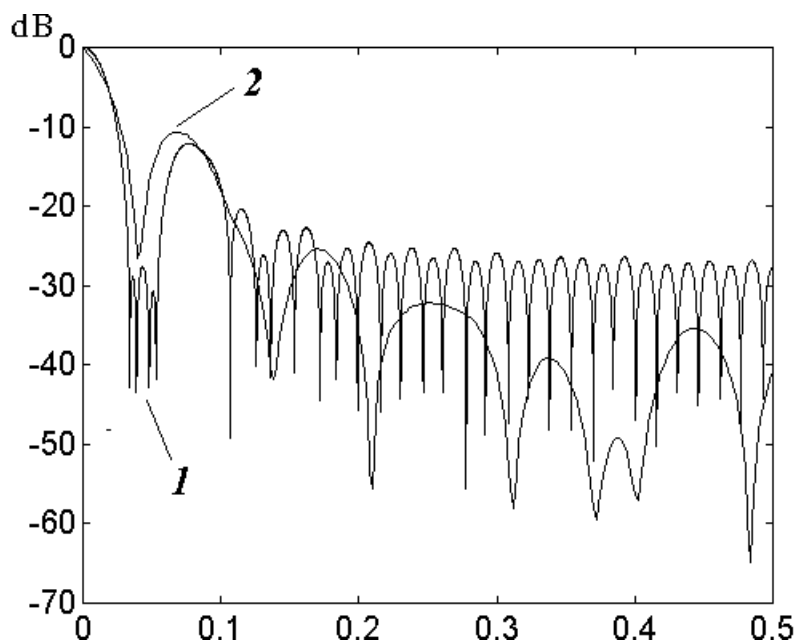


Рисунок 4.10. Оцінки СЩП: 1- корелограмний метод; сплайн на рівномірній сітці з 10 вузлів.

На рис.4.11 зображено інтерпольовані значення сплайна в комплексних площинах, що ілюструє комплексний сплайн як неперервну криву в просторі.

Спостерігається близькість оцінок отриманих обома методами в низькочастотній області. Слід відмітити, що сплайновий метод успішно виявив періодичну складову

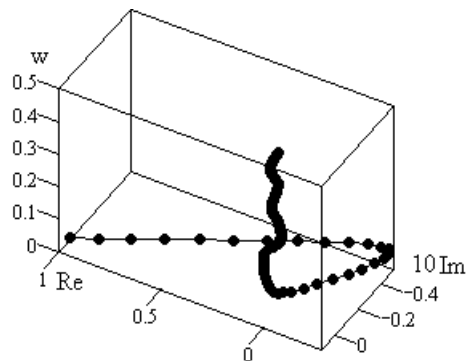


Рисунок 4.11. Оцінка спектра: сплайн-функція в комплексних площинах в даних. Дослідження та розробка алгоритмів застосування методу до виявлення доплерівських сигналів в радіолокації викладені в роботах [195,272,276]. В подібних задачах використовується апріорна інформація про очікуване положення доплерівського сигналу відносно зондуючого, що дозволяє точніше локалізувати максимум спектру, відповідно вибираючи сітку вузлів.

### 4.3 Віконні та рекурентні алгоритми ідентифікації спектрів сигналів

Зі структури часових образів В-сплайнів в частотній області слідує їх локальний характер рис.4.1-4.6 (наближено). Причому, якщо в частотній області локальні базисні функції рознесені по осі частот, то в часовій всі вони зосереджені з початку фрагменту даних. Вузькій базисній функції в частотній області відповідає широка часова функція в часовій, що відображає протиріччя між роздільною здатністю в частотній і часовій областях, детально описане у вейвлет методах [133]. Наближено часові образи базисних сплайнів  $W_j(t)$  можна вважати дуже подібними до вейвлет функцій. Розглянемо результати апроксимації часової послідовності сплайном побудованим на сітці з 10 рівномірних вузлів рис.4.12.

Наслідком локальності  $W_j(t)$  є локальний характер апроксимації даних. Для побудови оцінок спектру практично використано лише частину наявних даних.

Можна вважати, що в методі неявно використано часове вікно виду  $W_0(t)$ . Тому, щоб використати всю наявну послідовність даних є зміст аналізувати дані сегментами. Причому сегменти можуть перекриватися з різною величиною перекриття. Процедура сегментації подібна тій, що застосовується в періодограмному методі Бартлета, проте явно вікно не використовуємо. Нехай ширина сегмента рівняється  $n$ , цю величину називають також розкриттям вікна. Розкриття має бути не меншим за число оцінюваних параметрів - вузлів сплайна. Практично доцільно прийняти його щонайменше вдвічі більшим за число вузлів сплайна в частотній області.

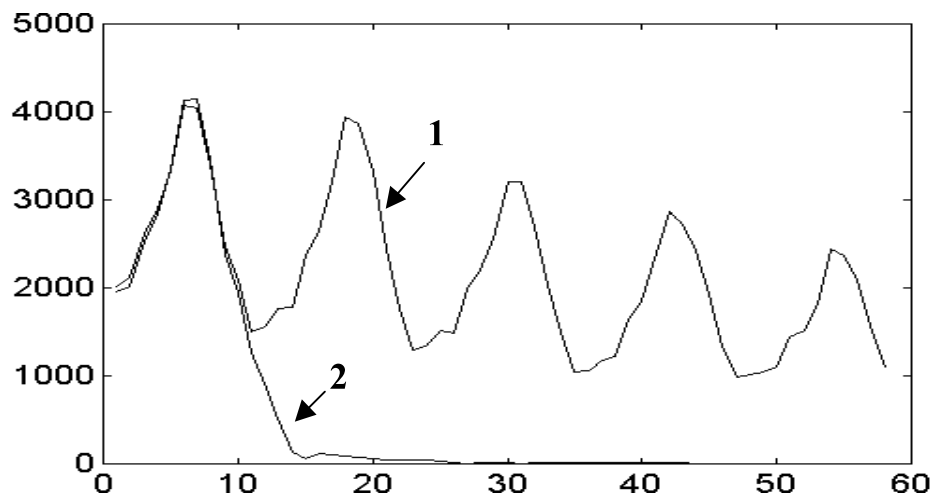


Рисунок 4.12. Наближення в часовій області. 1-вхідні дані. 2-часовий образ оцінки спектра.

Зміщення початку наступного сегмента відносно попереднього позначимо  $s$ . Зміщення може приймати значення від 1 (мінімальне зміщення) до  $n$ . Приймати зміщення більшим за розкриття вікна немає змісту, оскільки при цьому втрачатимемо дані. Таким чином при обсягові даних  $N$  число сегментів приблизно рівняється  $K \approx (N-n)/s$ . Позначимо вектор даних з  $n$  елементів утворений  $i$ -м сегментом  $Y_i$ . Отже маємо систему інтерполяційних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_k \\ \dots \\ Y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ \dots \\ W \\ \dots \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_R \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

де  $W = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \dots & w_{n,R} \end{bmatrix}$  матриця планування, однакова для всіх сегментів.

Тоді матриці С і В з системи нормальних рівнянь мають вигляд:

$$C = KC_n, \quad C^{-1} = \frac{C_n^{-1}}{K}, \quad C_n = W^*W, \quad B = \sum_{k=1}^K W Y_k. \quad (4.16)$$

Розглянемо результати оцінювання спектру періодичної послідовності з використанням сегментації. Розглянемо вплив величини зміщення сегменту на оцінку спектра. Прийmemo розкриття вікна 30, сітка з 10 вузлів (рівномірна), зміщення змінюватимемо від 1 до 30. Результати показано на рис.4.13-4.15.

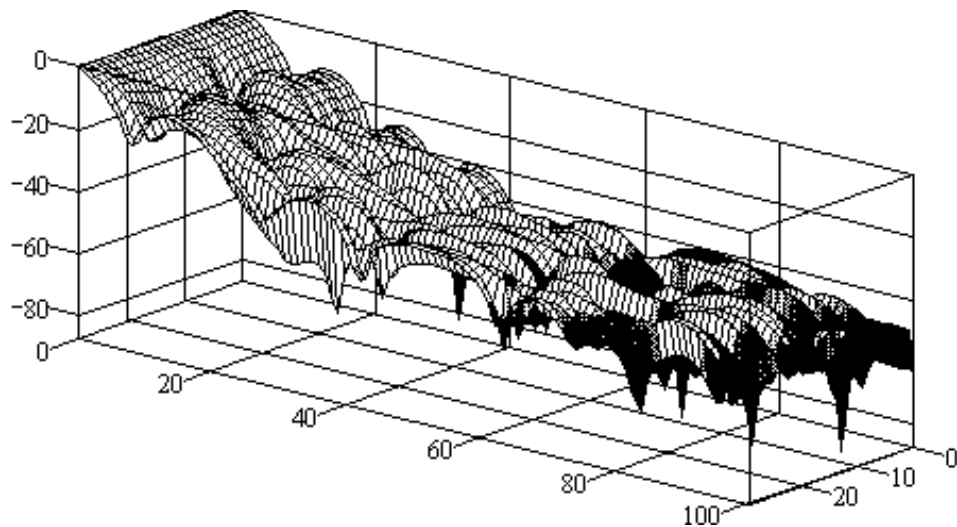


Рисунок 4.13. Оцінки СЩП для зміщення сегментів від 1 до 30 при розкритті вікна 30.

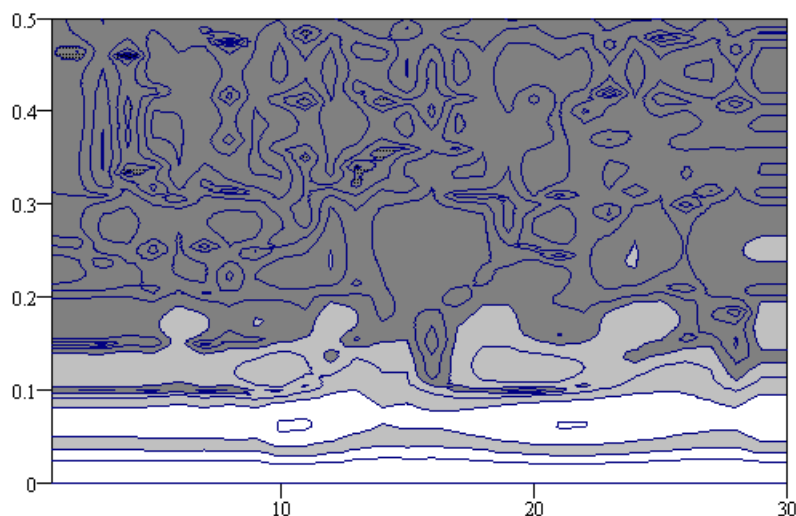


Рисунок 4.14. Лінії рівня оцінок СЩП для зміщення сегментів від 1 до 30 при розкриві вікна 30

При зростанні зміщення (приблизно починаючи з 5) спостерігається зростання дисперсії оцінок, що проявляється у вигляді нестійкості картини спектру в області середніх та верхніх частот. Картина в нижніх частотах залишається достатньо стабільною у всьому діапазоні зміщення.

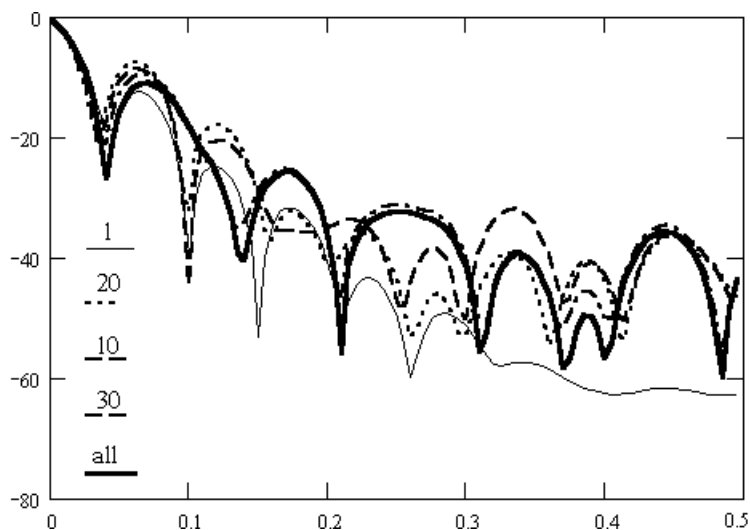


Рисунок 4.15. Оцінки СЩП для різного зміщення сегментів при розкриві вікна 30 та оцінка СЩП повної послідовності.

В порівнянні з оцінками по повній послідовності даних для мінімального зміщення маємо більш гладкий спектр в області високих частот. Оцінки нижніх

частот відрізняються мало. Результати аналогічних розрахунків для розкриву 20 показані на рис.4.16-4.18.

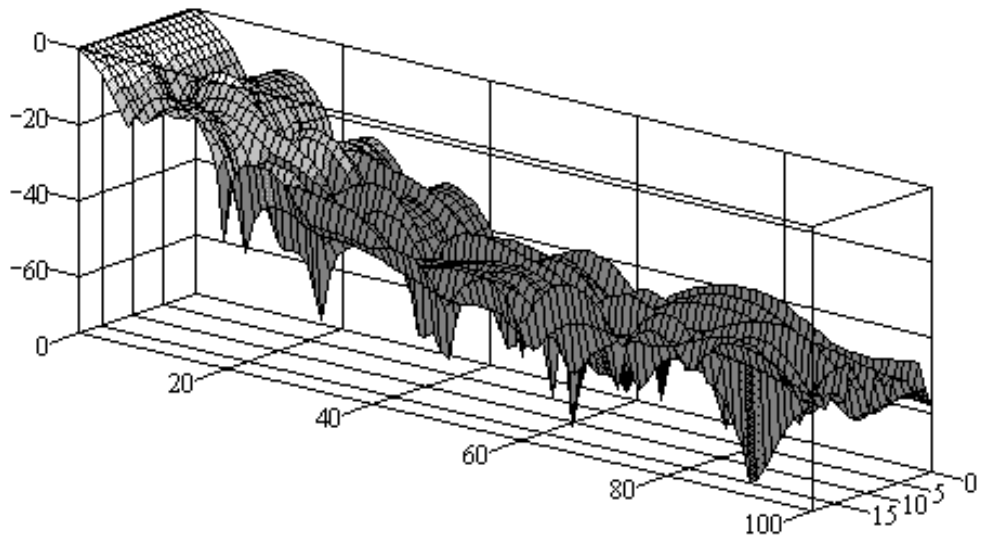


Рисунок 4.16 .Оцінки СЩП для зміщення сегментів від 1 до 20 при розкриві вікна 20.

Погіршення оцінок спостерігається при зміщенні більше 8-10. Гладкість спектра в області верхніх частот спостерігається при малих значеннях зміщення.

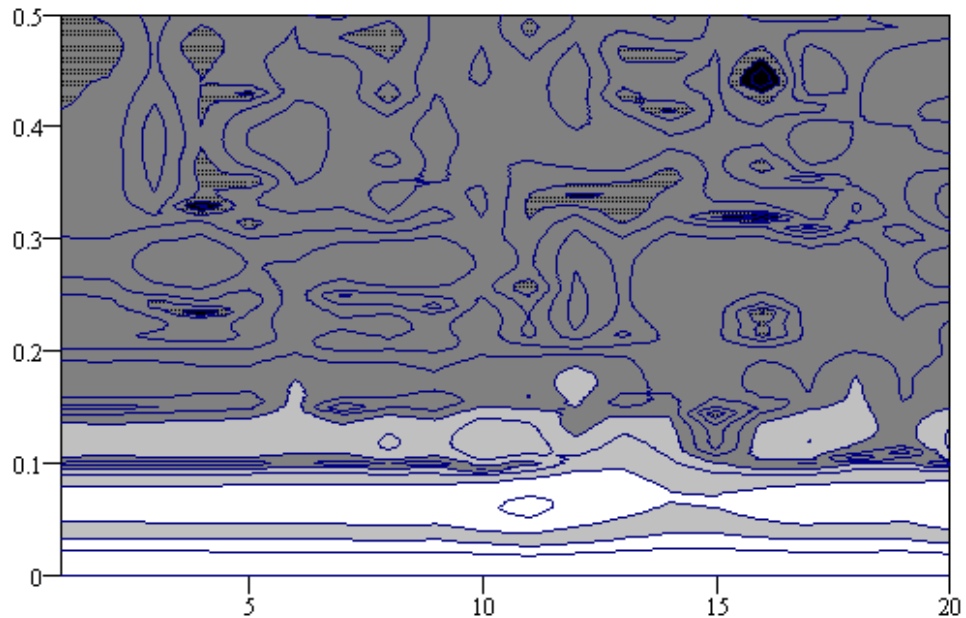


Рисунок 4.17. Лінії рівня оцінок СЩП для зміщення сегментів від 1 до 20 при розкриві вікна 20

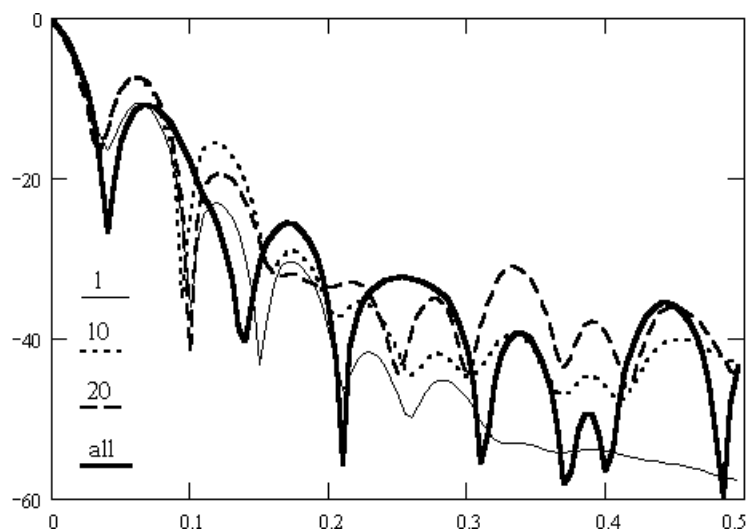


Рисунок 4.18. Оцінки СЩП для різного зміщення сегментів при розкритті вікна 20 та оцінка СЩП повної послідовності

Оцінки спектру при зміні величини розкриття вікна з 20 до 40 при мінімальному зміщенні показано на рис.4.19. Характерним є незначне коливання отриманих оцінок і майже незмінна якісна картина. Отже найбільш значимо на статистичні оцінки спектра впливає величина зміщення.

Для пояснення отриманих ефектів необхідно розглянути вплив розглянутих факторів на дисперсію оцінки. Найбільш очевидним є вплив величини зміщення. Кількість сегментів обернено пропорційно залежить від зміщення. Фактично відбувається осереднення оцінок по всіх сегментах. Отже дисперсія оцінок обернено пропорційна числу сегментів, аналогічно відомим виразам для періодограмних методів [190]. Проте такий висновок буде достатньо точним лише для досить великих значень зміщення. Отриманню точних кількісних оцінок дисперсії заважає статистична залежність даних в сегментах при малих значеннях зміщення. Це призводить до погіршення оцінок в порівнянні з очікуваним.



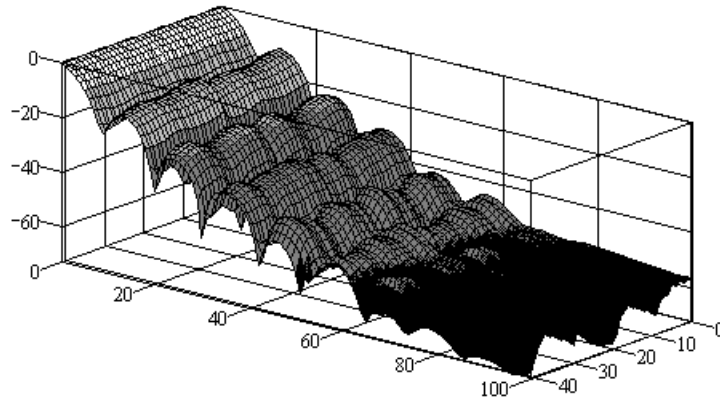


Рисунок 4.19. Оцінки СЦП для розкриття вікна від 20 до 40 при мінімальному зміщенні ( $s=1$ )

Слабка залежність оцінок від розкриття вікна пояснюється двома причинами. Мінімальні значення ширини вікна близькі до ширини базисних функцій в часовій області, тому подальший розкриття вікна не дає покращання оцінок. Розкриття вікна дещо скорочує число сегментів і з цієї точки зору повинен призвести до зростання дисперсії. Однак це одночасно призводить до покращання оцінок в самому вікні за рахунок зростання ступенів вільності оцінок МНК. Кількісний аналіз цих взаємозв'язаних факторів у загальному випадку ускладнено необхідністю оцінки коваріаційної матриці МНК. Для конкретних схем обробки даних їх легко отримати чисельно з рівнянь (4.13).

На відміну від періодограмних методів в розглянутому роздільна здатність не залежить від ширини розкриття, оскільки визначається схемою розміщення вузлів сплайна в частотній області. Вузькому В-сплайну в частотній області відповідає широкий базис в часовій області і відповідно вища роздільна здатність в області локалізації В-сплайна. Звичайно, за умови, що розкриття не менше ширини відповідного базису в часовій області.

В цілому оцінки сплайна з допомогою сегментації та за всією сукупністю даних відрізняються мало, що дає підстави вибирати той чи інший спосіб оцінювання виходячи з технологічної зручності обробки даних та інших конкретних характеристик певної задачі. Метод сегментного оцінювання легко

реалізувати у вигляді рекурентного МНК алгоритму [261]. Оцінювання спектру почнемо по надходженню першого сегмента даних з  $n$  відліків ( $N=n$ ,  $n \geq R$ ) з розв'язку системи рівнянь.

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad W_n = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \vdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \vdots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \vdots & w_{n,R} \end{bmatrix}, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_R \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Перші оцінки будуються описаним вище способом. З надходженням другого сегмента система рівнянь (4.2) матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_R \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

або в загальному вигляді

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ Y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_R \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Тоді система нормальних рівнянь запишеться:

$$\begin{bmatrix} W_i^* & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i^* & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Враховуючи структуру матриць розв'язок з надходженням  $i+1$  сегмента знайдемо за рекурентними виразами:

$$A_{i+1} = \frac{i}{i+1} C_i^{-1} (B_i + W^* Y_{i+1}), \quad (4.21)$$

$$\text{або } A_{i+1} = \frac{i}{i+1} (A_i + C_i^{-1} W^* Y_{i+1}). \quad (4.22)$$

Інверсна матриця для наступного кроку розраховується за формулою :

$$C_{i+1}^{-1} = \frac{i}{i+1} C_i^{-1}. \quad (4.23)$$

Для оцінювання спектру з сегментами, що перекриваються, зміниться лише

спосіб формування матриці  $Y_{i+1}$ . В останню будуть входити відліки з попереднього сегмента.

Перевагою рекурентного алгоритму є можливість отримати оцінки з мінімальною затримкою, не чекаючи отримання повної сукупності. Алгоритм дозволяє аналізувати послідовності не визначеного наперед обсягу та зупиняти процедуру оцінювання при наявності стійкої спектральної картини.

Розглянемо ще один алгоритм рекурентної побудови оцінок спектру. В даному випадку оцінюватимемо спектр за однією послідовністю, але оцінки отримуватимемо з надходженням кожного нового відліку, рекурентно.

Задамося  $N$  - граничним значенням числа відліків часової послідовності. Поточне значення числа значимих відліків на певному кроці позначимо  $n$ . До максимальної кількості  $N$  відліки доповнятимемо справа нулями:  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots, 0\}$ . Отже система рівнянь (4.8) матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \vdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \vdots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \vdots & w_{n,R} \\ w_{n+1,1} & w_{n+1,2} & \vdots & w_{n+1,R} \\ w_{n+2,1} & w_{n+2,2} & \vdots & w_{n+2,R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N,1} & w_{N,2} & \vdots & w_{N,R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_R \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

При оцінюванні інтерполяційні рівняння, які відповідають нульовим доповненням вхідної послідовності, можемо не враховувати. Відкидання ряду рівнянь при оцінюванні спектру за методом найменших квадратів впливатиме на загальну нев'язку між вхідними даними та рівнянням моделі. Однак доповнення вхідної послідовності нулями є найпростішою її екстраполяцією. Зворотне перетворення Фур'є сплайн-моделі також екстраполює часову послідовність. Отже нев'язка даних з відкинутих рівнянь є нев'язкою між різними моделями екстраполяції і не несуть значимої інформації про вхідний процес. Формально можна придати їм нульову вагу, що рівносильне їх вилученню. Фактично для оцінювання використовуємо узагальнений метод найменших квадратів з системою

нормальних рівнянь у вигляді :

$$W^* Z W A = W^* Z Y, \quad (4.25)$$

де  $Z$  - квадратна діагональна матриця розмірності  $N \times N$  з елементами

$$\begin{cases} z_{j,j} = 1, & j = \overline{1, N} \\ z_{j,k} = 0, & j \neq k \end{cases} .$$

Процес оцінювання спектра можна почати з числа вхідних відліків не меншого від кількості вузлів сплайна, які є оцінками спектра ( $n_i=R$ ). По мірі надходження часових відліків в систему нормальних рівнянь додаватимемо рівняння. Така модифікація матриць є малоранговою, тому можлива ефективна реалізація рекурентного алгоритму МНК. Звичайно, доповнення даних змінюватиме матрицю  $Z$ , що вплине на масштаб оцінок. Проте для випадків коли абсолютне значення оцінок не є важливим, зміни масштабу не враховуватимемо.

Отже, якщо на  $n$ -му крокові маємо матриці

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad W_n = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \vdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \vdots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \vdots & w_{n,R} \end{bmatrix}, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_R \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

то з надходженням наступного відліку отримаємо

$$Y_{n+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad W_{n+1} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \vdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \vdots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \vdots & w_{n,R} \\ w_{n+1,1} & w_{n+1,2} & \vdots & w_{n+1,R} \end{bmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_R \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Тоді

$$C_{n+1} = [W_n^* W_n + V_{n+1} V_{n+1}^*], \quad B_{n+1} = [W_n^* Y_n + V_{n+1} y_{n+1}], \quad (4.28)$$

$$\text{де } V = \begin{bmatrix} w_{n+1,1} \\ w_{n+1,2} \\ \vdots \\ w_{n+1,R} \end{bmatrix}.$$

Отже оцінки спектру визначатимуться з допомогою відомих виразів для

рекурентного МНК [187].

$$A_{n+1} = A_n + pC_n^{-1}V_{n+1}h, \quad C_{n+1} = [C_n^{-1} - C_n^{-1}V_{n+1}pV_{n+1}^*C_n^{-1}], \quad (4.29)$$

$$\text{де } p = [1 + V_{n+1}^*C_n^{-1}V_{n+1}]^{-1}, \quad h = y_{n+1} - V_{n+1}^*A_n.$$

Рекурентний алгоритм дозволяє розглянути як змінюються оцінки спектру при зростанні вибірки даних. Оцінювання починаємо з інтерполяційної задачі, коли число даних рівнятиметься числу вузлів сплайна в частотній області.

Результати побудови на рівномірній сітці даних показані на рис.4.20. Оцінки

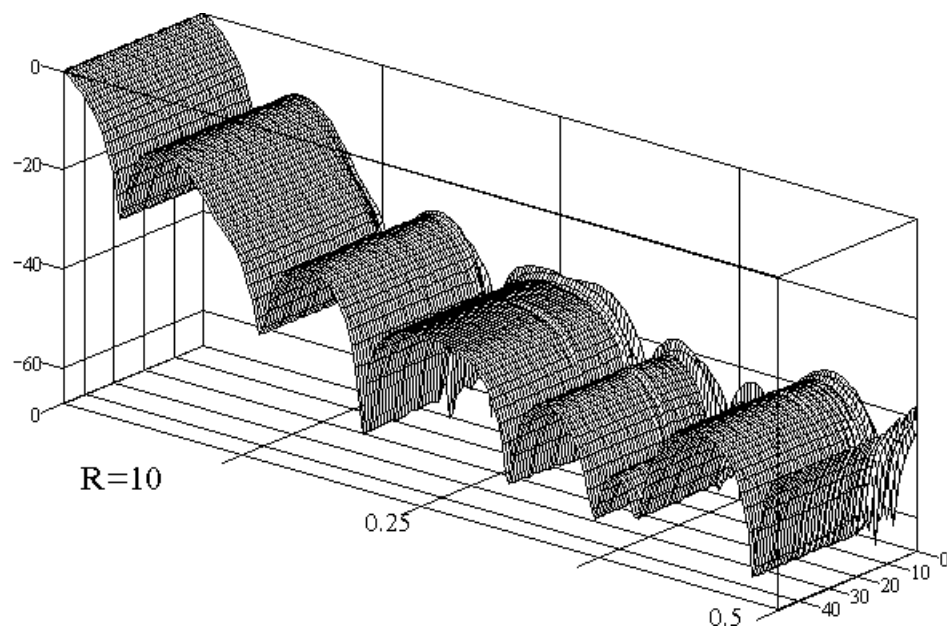


Рисунок 4.20. Уточнення спектру при надходженні даних (рівном.сітка)

починаючи з 20-25 (числа 10-15) відліків залишаються практично незмінними. Причину легко зрозуміти розглянувши наближення в часовій області рис.4.12. Внаслідок локальності базису в часовій області подальші дані не можуть бути наближені і практично не враховуються. Змінимо сітку вузлів, локалізавши її в області періодичності даних. Картина наближення в часовій області для сітки вузлів  $\{0, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50\}$  показано на рис.4.21.

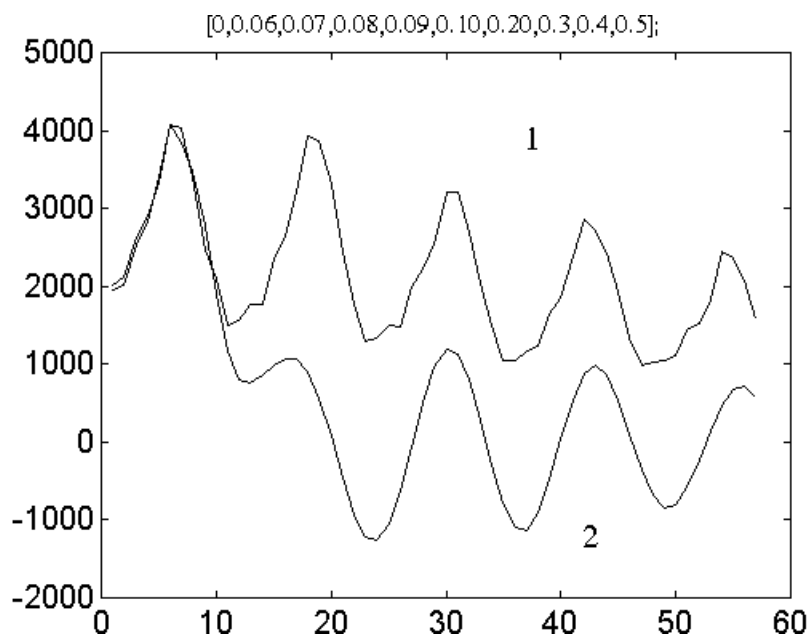


Рисунок 4.21. Наближення в часі на локально згущеній сітці. 1-вхідні дані. 2- часовий образ оцінки спектра

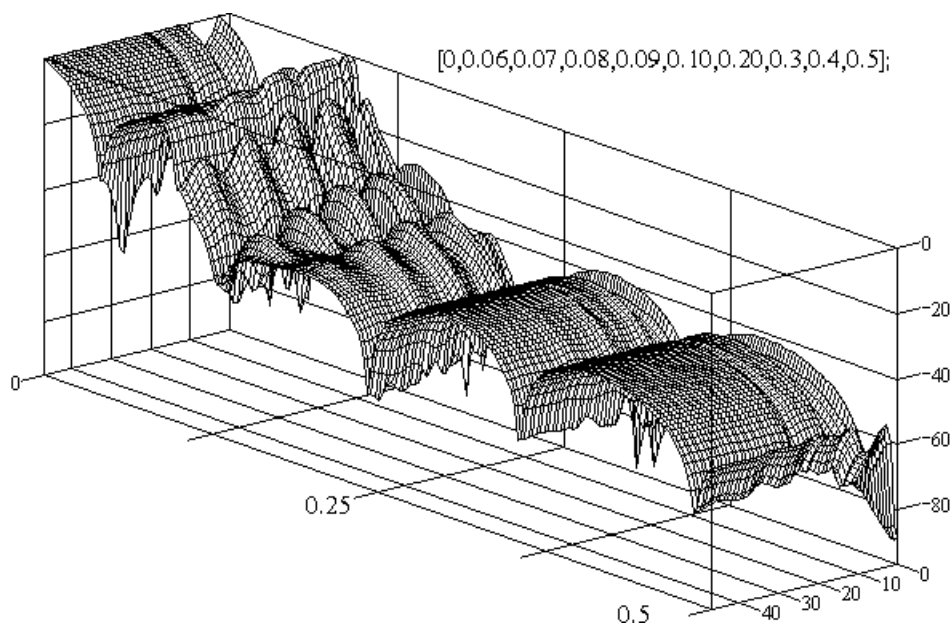


Рисунок 4.22. Уточнення спектру при локально згущеній сітці вузлів

За рахунок скорочення базисних функцій у вибраній частотній області 0.06-0.10 відповідні базисні функції в часовій області розширились і включають всю вибірку даних. Відповідно, з надходженням даних спостерігається уточнення оцінок спектра у вибраній області локалізації рис.4.22-4.23.

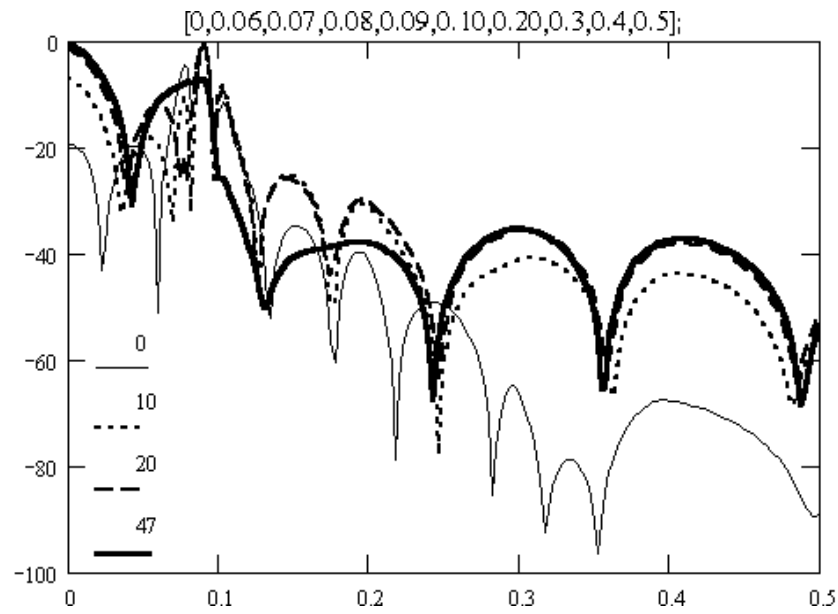


Рисунок 4.23. Уточнення спектру в частотній області (зрізи з рис.4.22) при кількості даних 10,20,30,57 (числа на рис. показують приріст від початку).

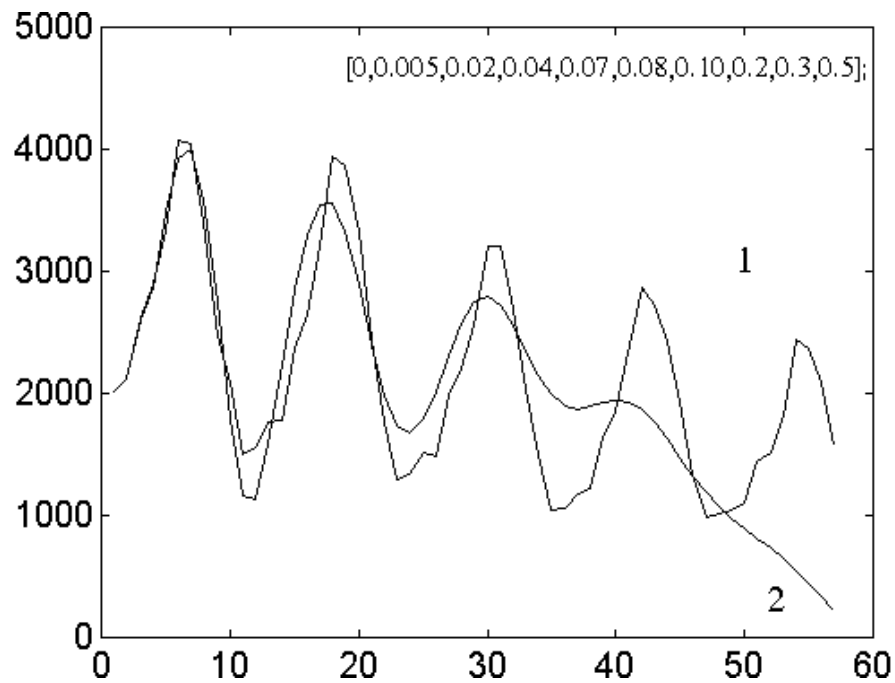


Рисунок 4.24. Наближення в часовій області (уточнена сітка вузлів).

1-вхідні дані, 2-часовий образ оцінки спектра.

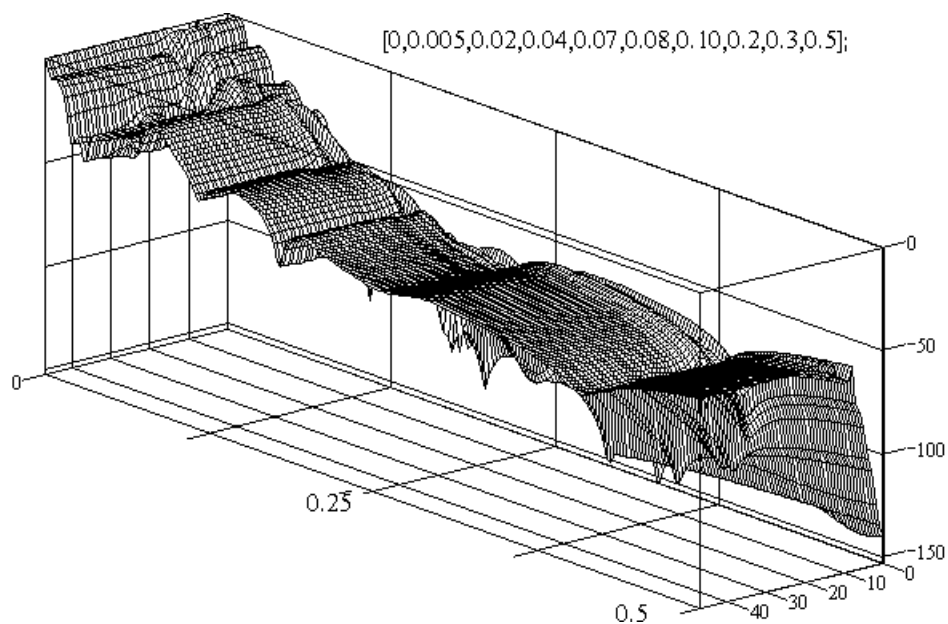


Рисунок 4.25. Процес уточнення спектру для уточненої сітки вузлів

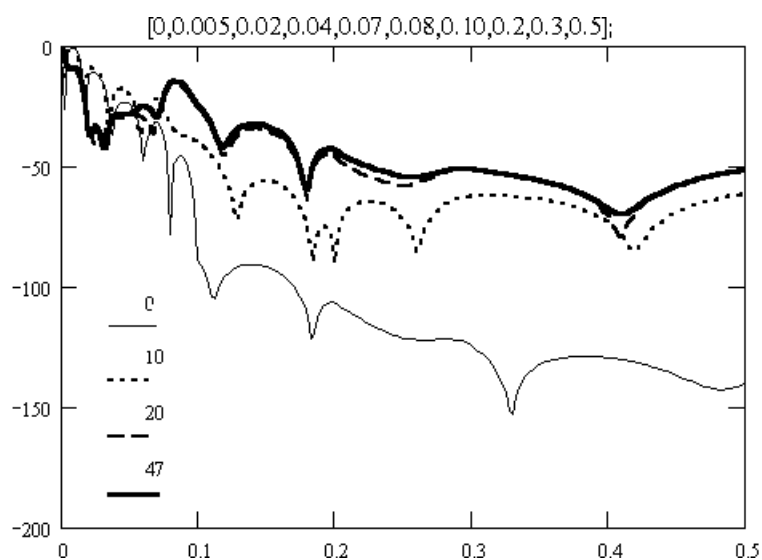


Рисунок 4.26. Уточнення спектру (зрізи з рис.4.25) для 10,20,30,57 даних

Проаналізувавши характер наближення в часовій області можна зробити припущення про те, що розбіжність даних є наслідком надто короткої базисної функції в області низьких частот. В той же час характер періодичної складової передано досить точно. Тому спробуємо покращити наближення уточнивши



область нижніх частот (задавши достатньо короткий фрагмент в низькочастотній області). Задамо сітку вузлів в частотній області:  $\{0, 0.005, 0.02, 0.04, 0.07, 0.08, 0.10, 0.20, 0.30, 0.50\}$ . В результаті отримано значне покращання наближення в часовій області рис.4.24. В уточненні низькочастотної області спектра задіяна практично вся вибірка. Процес уточнення оцінок спектра показано на рис.4.25-4.26. Уточнення низькочастотної частини спектра позитивно вплинуло на визначення області періодичності. Оцінка періоду даних за положенням максимуму дає значення рівне 0.085, що близьке до  $1/12$  (в даних присутня сезонна компонента, котра впливає з природи даних).

З розглянутого робимо висновки:

якість оцінки спектра суттєвим чином залежить від схеми розміщення вузлів сплайна в частотній області;

про якість наближення в частотній області можна судити виходячи з точності наближення даних в часовій області часовим образом спектра;

при розміщенні вузлів сплайна в частотній області можна керуватися характером наближення даних в часовій області частотним образом спектра.

#### **4.4 Алгоритми оптимізації розміщення вузлів у сплайнових моделях**

З попереднього очевидно є важливість задачі оптимізації розміщення вузлів сплайна. У випадку рівномірної сітки вузлів задача зводиться до вибору ширини фрагмента сплайна. При цьому слід керуватися частотними співвідношеннями між В-сплайном, з котрого утворено базис та даними. Інший підхід полягає у використанні виразів для нев'язки інтерполяції та апріорної інформації про диференційні властивості вхідних даних. Обидва випадки є тривіальними. В даному підрозділі розглянемо більш складне питання вибору оптимальної сітки вузлів сплайна в довільному випадку.

Задача зводиться до двох питань:

вибір оптимальної кількості вузлів (число вузлів має бути мінімальним для зменшення обсягу розрахунків та збільшення ступенів вільності);

вибір оптимального розміщення заданого числа вузлів.

При розв'язку вказаних оптимізаційних задач необхідно враховувати ряд обмежень: значення абсцис сітки вузлів повинні бути зростаючими;

повинна забезпечуватись невинродженість розв'язку системи нормальних рівнянь (не повинно бути більше двох фрагментів без вхідних даних).

Стосовно критерія оптимізації, то його вибирають виходячи з конкретних потреб задачі. Найбільш вживаними є наступні критерії [228]:

мінімум квадратів відхилення; мінімум модуля відхилень;

мінімум довірчого інтервалу в точці прогнозу.

Таким чином, при заданому числі вузлів маємо класичну задачу нелінійної оптимізації з обмеженнями. Вибір конкретного методу знаходження мінімуму диктується умовами застосування, що до складності алгоритму та обсягу розрахунків.

Розглянемо побудову алгоритму оптимізації для пошуку оптимальної сітки вузлів оцінки спектра періодичної послідовності рис.4.9. З точки зору простоти алгоритму та мінімальної кількості параметрів настройки виберемо метод покоординатного спуску [123]. Метод дозволяє дуже просто врахувати вказані вище обмеження. Алгоритм реалізовано в середовищі MATLAB, де для оптимізації вздовж координати використано функцію пошуку мінімуму функції однієї змінної на вказаному інтервалі: `fmin` [225]. Програма циклічно виконує оптимізацію положення вузлів з другого до передостаннього:

$$\min_{tu_j \in [tu_{j-1}+h, tu_{j+1}-h]} \Psi(tu_j, \{tu_1, \dots, tu_{j-1}, tu_{j+1}, \dots, tu_R\}), \quad j = \overline{2, R-1}, \quad (4.30)$$

де  $\Psi()$  - цільова функція (в нашому випадку сума квадратів відхилення між моделлю та даними в часі);  $h$  - максимальний проміжок між даними в частотній області.

Обмеження області пошуку відрізком  $[tu_{j-1} + h, tu_{j+1} - h]$  враховує обмеження відносно впорядкованості сітки вузлів та наявності даних на кожному відрізку. Точність визначення положення екстремуму обмежена величиною  $h/10$ , з метою скорочення обсягів розрахунків. Результати оптимізації для періодичних даних (рис.4.9) показано на рис.4.27-4.31. Для порівняння показано результати

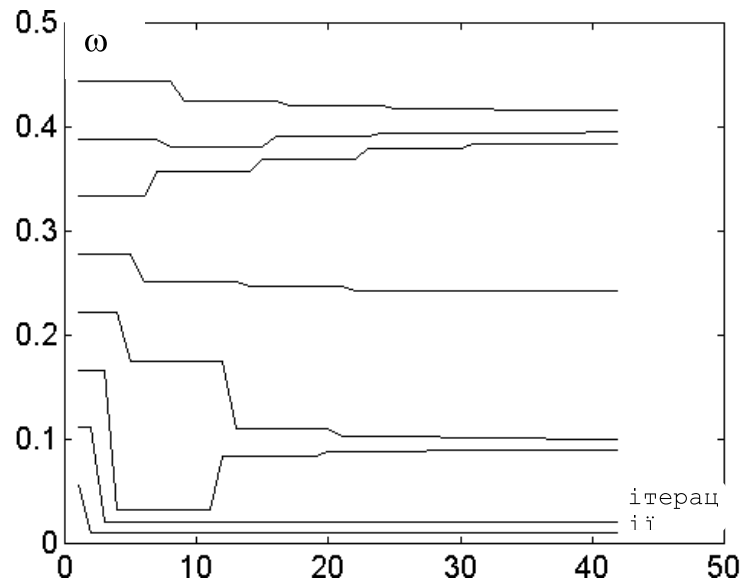


Рисунок 4.27. Рух вузлів при оптимізації рівномірної сітки з 10 вузлів

оптимізації рівномірних сіток з 10 та 16 вузлів і довільної сітки з 10 вузлів. На рисунках зображено положення вузлів після кожної оптимізації окремого вузла.

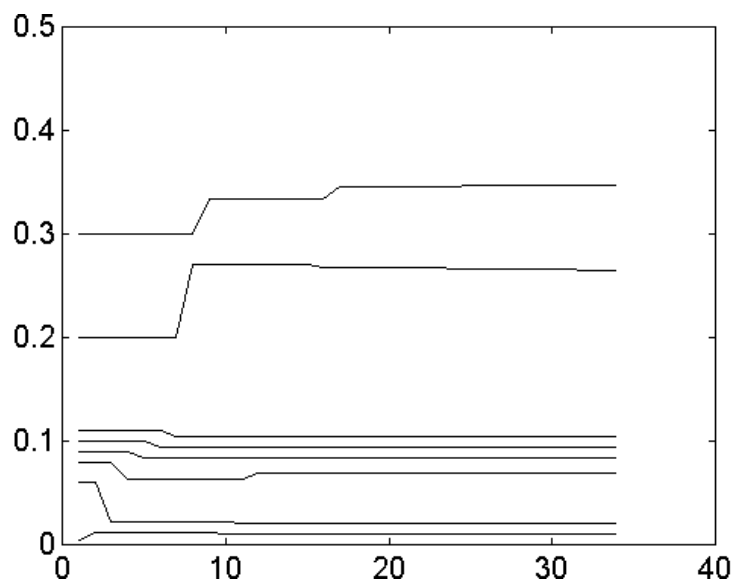


Рисунок 4.28. Рух вузлів при оптимізації заданої сітки з 10 вузлів

Процедура оптимізації для різних варіантів початкової сітки дає подібні результати.

Численні експерименти з оптимізацією вузлів сплайнів показали, що не зважаючи на існуючий зворотній зв'язок через систему обмежень процедура має досить стійкий характер. Оптимізація виявляє тенденцію вузлів до згущення в областях з особливостями (більш швидкими змінами процесу та розривами).

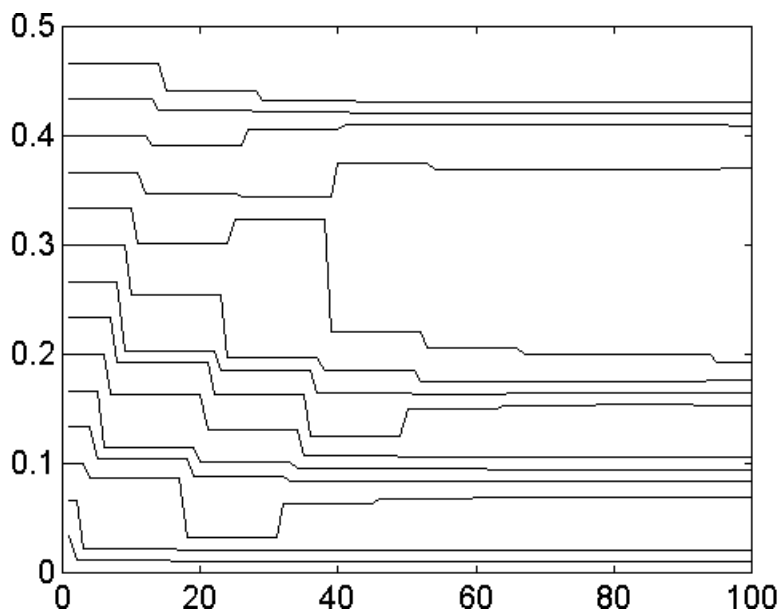


Рисунок 4.29. Рух вузлів при оптимізації рівномірної сітки з 16 вузлів

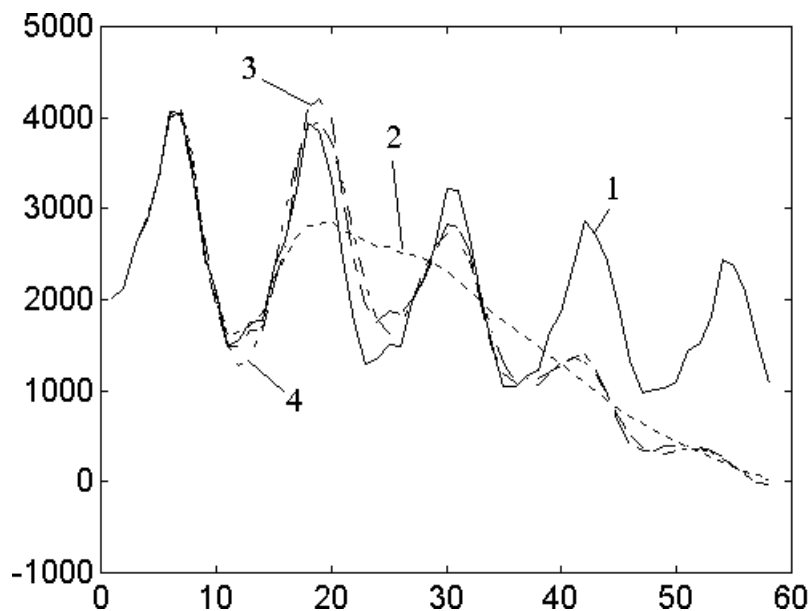


Рисунок 4.30. Результати оптимізації наближення в часовій області: 1-вхідні дані, 2-оптимізація рис.27, 3-оптимізація рис.28, 4-оптимізація рис.29.

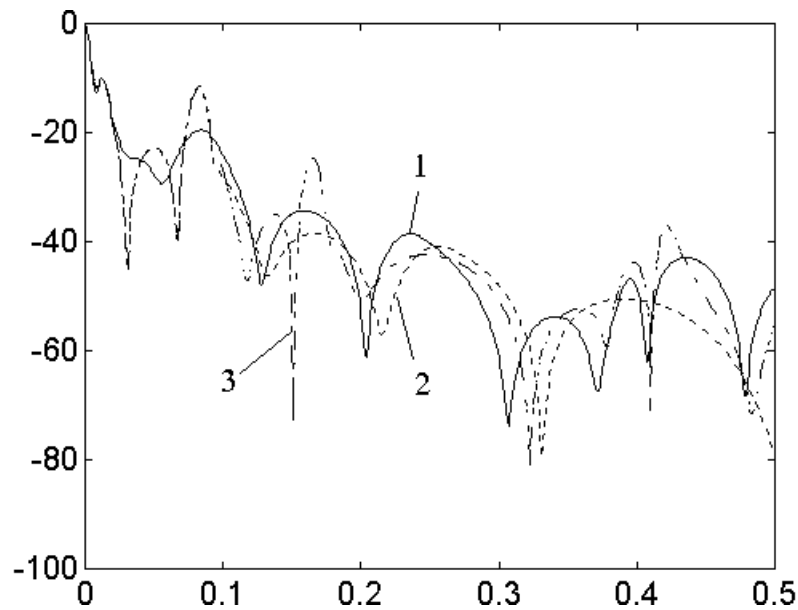


Рисунок 4.31. Результати оптимізації наближення в частотній області:  
2-оптимізація рис.27, 3-оптимізація рис.28, 4-оптимізація рис.29.

Оптимізація сітки вузлів з допомогою методів нелінійної оптимізації хоч і дає задовільні результати але має ряд суттєвих недоліків:

- можливість роботи лише в пакетному режимі, по повній вибірці;
- значний обсяг розрахунків;
- робота з фіксованою кількістю вузлів;
- методи не враховують наявності випадкової складової.

Розглянемо дещо інший підхід, що ґрунтується на статистичній оцінці якості моделі. При наявності значної випадкової складової в даних аналіз якості моделі пов'язаний з аналізом залишків:

$$e_i = y_i - S(t_i, A), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.31)$$

За умови некорельованості випадкової складової (умови теореми Гауса-Маркова) залишки якісної моделі також мають бути некорельованими. Якісна модель мусить адекватно наближати лише детерміновану складову даних. Розділити дані на детерміновану (низькочастотну) та випадкову (високочастотну) складові можна керуючись гладкістю сплайнової моделі, котра залежить від ширини фрагментів. Задачу можна сформулювати наступним чином: *необхідно*

знайти таку сітку вузлів сплайна, котра при мінімальному числі вузлів забезпечує відсутність в залишках детермінованої складової. Відсутність детермінованої складової в залишках слід розуміти в статистичному сенсі. Тобто має гарантуватися заданий рівень помилки першого роду при перевірці нульової гіпотези про випадковий характер залишків. Відомі статистичні критерії для перевірки випадкового характеру даних (або стаціонарності випадкового процесу за математичним сподіванням). Найбільш прийнятними, з погляду автора, є непараметричні критерії серій та інверсій [119,252]. Ці критерії потребують мінімуму апріорної інформації і допускають ефективну реалізацію. Зупинимося на простішому в реалізації критерії інверсій. Перевага критерію інверсій надана також у зв'язку з тим, що він більш потужний в порівнянні з критерієм серій при виявленні монотонного тренда. Критерій розраховують у відповідності з наступним виразом [119]:

$$I = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \eta_{i,j}, \quad \eta_{i,j} = \begin{cases} 1, & y_i > y_j; \\ 0, & y_i \leq y_j. \end{cases} \quad (4.32)$$

За умови стаціонарності і випадковості даних критерій має приблизно нормальний закон розподілу з математичним сподіванням:

$$M[I] = \frac{N(N-1)}{4}, \quad (4.33)$$

і дисперсією:

$$D[I] = \frac{N(2N+5)(N-1)}{72}. \quad (4.34)$$

Тоді для заданої послідовності з  $N$  даних розраховуємо значення критерію  $I$ . Для заданого рівня помилки першого роду  $\alpha$  і обсягу даних  $N$  знаходимо відповідні квантили нормального закону, що обмежують область прийняття гіпотези про відсутність детермінованої складової:

$$I_{N,1-\alpha/2} \leq I \leq I_{N,\alpha/2}. \quad (4.35)$$

Описаний вище підхід дозволяє здійснювати послідовну побудову сплайна. На початку побудови достатньо мати не менше чотирьох значень даних, для побудови одного фрагмента сплайна. Фрагмент сплайна має включати ці три точки і мати мінімальну довжину. По надходженню наступного відліку даних права межа фрагмента переміщується таким чином, щоб нова точка спостереження належала сплайнові. При необхідності довжина фрагмента може враховувати і прогнозний інтервал. Після розрахунку сплайна за МНК розраховується критерій інверсій і порівнюється з критичними значеннями. При відсутності детермінованої складової процес нарощування інтервалу продовжується. Якщо виявиться наявність детермінованої складової, останній вузол повертається в попереднє положення і додається новий вузол і новий фрагмент сплайна, котрий включає нову точку даних. Для зменшення обсягу розрахунків кількість відліків по котрим розраховується критерій обмежуємо числом 20-40 (за умови достатньої кількості даних). Слід відмітити, що доповнення фрагментів впливає на оцінки найближчих трьох - чотирьох вузлів. Якщо зміни призводять до появи детермінованої складової в залишках, то вони компенсуються в процесі побудови наступних фрагментів за рахунок скорочення фрагментів сплайна. Цей процес може призводити до утворення цілого ряду (3-8) вузлів і фрагментів з лише одним відліком. Такий процес здатний утворити надмірну кількість вузлів і зменшує ступені вільності в статистичних оцінках. Щоб запобігти вказаному явищу в алгоритм вводимо два обмеження: критерій розраховується лише на останньому фрагменті, при надходженні більше чотирьох відліків. Звичайно, таке обмеження погіршує статистичні якості критерія, зокрема зростає ймовірність помилок другого роду. Дроблення фрагментів значною мірою залежить від специфіки даних і рівня помилки першого роду. Якщо прикладна задача має характерні дані, для котрих не властиве дроблення сплайна то можна враховувати 3-4 останніх фрагменти. Можливість такого розширення встановлюється емпіричним шляхом на типових даних. Однозначно можна лише дати рекомендацію відносно способу, як уникнути

дроблення. Стосовно встановлення рівня помилки першого роду на підставі емпіричного досвіду сформулюємо наступні рекомендації.

Надто низьке значення (менше 0.1-0.05) призводить до розширення області прийняття гіпотези про випадковість залишків, що проявляється в очевидно зашироких фрагментах сплайна. Зрозуміло, що при цьому є великою ймовірність помилки другого роду (пропуск детермінованої складової). Тобто у випадках коли будується сплайн з 1-3 фрагментів і його явної неадекватності потрібно збільшити рівень помилки першого роду. Про заниження помилки першого роду свідчить також значно менше значення ймовірності, отриманої як квантиль критерія по повній вибірці в порівнянні з заданою помилкою першого роду.

Надто велике значення (більше 0.6) призводить до надмірного дроблення сітки вузлів, появи серій близько розміщених вузлів.

Питання правильного вибору параметрів алгоритму потребує вибору певного критерію якості моделі регресії. В класичних методах користуються коефіцієнтом детермінації та виправленим коефіцієнтом детермінації [106]. Недоліки коефіцієнта детермінації загальновідомі і його застосування скоріше традиція ніж необхідність, оскільки він формально показує співвідношення між дисперсією вхідних даних і залишків, реальне значення котрого апріорно невідоме. Дещо кращим є тест Дарбіна-Вотсона на наявність в залишках автокореляції першого порядку [106]. Основним недоліком тесту є наявність області невизначеності і дещо громіздкі для апаратної реалізації розрахунки.

З погляду автора, хорошою альтернативою вказаним критеріям є ймовірність  $p$ , визначена по повній вибірці (умовно її можна назвати ймовірністю випадковості залишків).

Такий критерій є зручним в силу наступних причин.

Застосування критерію до вхідних даних дає можливість до обробки визначити доцільність подальшого аналізу (лише якщо дані є не випадковими).

При надмірному зростанні числа оцінюваних параметрів (наближенні до інтерполяції) критерій показує погіршення моделі.



Критерій відноситься до непараметричних і потребує мінімуму апріорної інформації.

Критерій простий в розрахунках і у визначенні критичних значень.

Критерій виявив хорошу кореляцію з тестом Дарбіна-Вотсона.

Таким чином критерієм, що дозволяє встановити оптимальні параметри алгоритму побудови оптимальної сітки вузлів є критерій інверсій по повній вибірці даних. Значення критерію повинне бути близьким до математичного очікування числа інверсій (4.33).

В процесі нарощування фрагментів сплайна збільшується кількість оцінюваних параметрів і обсяг розрахунків. Для швидких розрахунків необхідно будувати рекурентні, віконні та комбіновані алгоритми. Питання побудови швидких алгоритмів буде розглянуто в наступному розділі. Загальний алгоритм побудови сплайнів на оптимальній сітці вузлів є таким:

1. Задати рівень значимості гіпотези про відсутність в залишках тренда  $\alpha = 0.05$  (значення  $\alpha$  вказане для прикладу);
2. Задати мінімальну довжину фрагмента сплайна, щоб він містив не менше чотирьох точок даних;
3. Розрахувати початковий сплайн з одного фрагменту мінімальної довжини. Нехай довжина останнього фрагмента дорівнює  $h$ ;
4. Отримати наступний відлік даних  $y(t_i)$ ;
5. Якщо  $y(t_i)$  належить до останнього фрагмента виконати пункт 7;
6. Перенести останній вузол сплайна в точку  $t_i$ ;
7. Розрахувати сплайн за методом найменших квадратів;
8. Розрахувати залишки  $y(t_i) - S(t_i)$  для останніх фрагментів сплайна;
9. З допомогою критерію інверсій перевірити наявність тренда в залишках;
10. Якщо гіпотеза про наявність тренда відкидається, то виконати пункт 4;

11. Зафіксувавши останній вузол сплайна в  $t_{i-1}$ , додати наступний фрагмент сплайна з останнім вузлом в точці  $t_{i-1} + h$  ( $h$  вибираємо так, щоб остання точка належала сплайну);

12. Якщо є дані виконати пункт 4, інакше завершити роботу.

Для ілюстрації характерних особливостей алгоритму розглянемо послідовну побудову сплайна для модельних даних. Детермінованою основою моделі є відрізок синусоїди на котрий накладено випадкові нормальні некорельовані відліки. Моделювання здійснювалось в середовищі MatLab 4. Стартове число генератора випадкових чисел 2000.

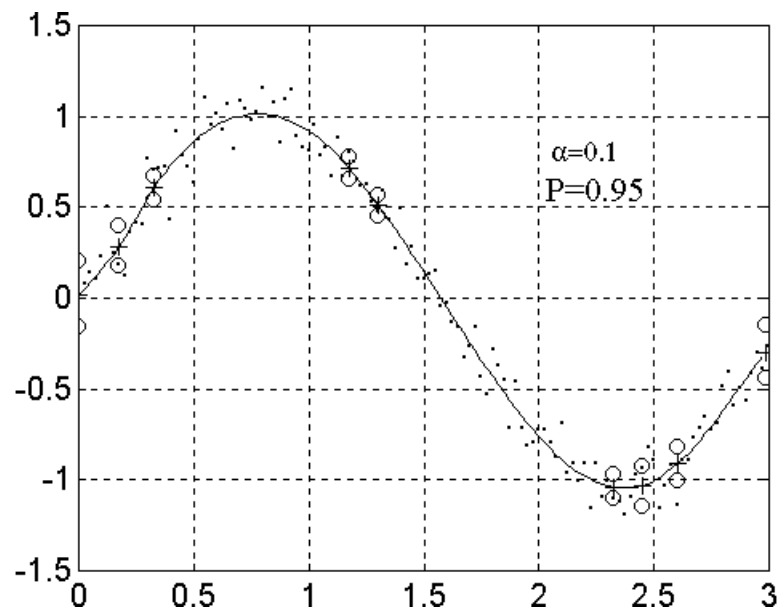


Рисунок 4.32. Результат розміщення вузлів при  $\alpha=0.1$ . + -вузли сплайна, o – границі довірчого інтервалу оцінок вузлів.

Результати для різних рівнів значимості критерію показано на рис.32-35. Рівень 0.1 дає непоганий результат з ймовірністю випадковості залишків 0.95 (рис.4.32). Варто відмітити, що рівень довірчої ймовірності при котрому можна відкинути гіпотезу про випадковість залишків є близьким до заданого при побудові сплайнів. Зрозумілою причиною відмінності є обмеження на обсяг вибірки при побудові сплайна. Зменшення значимості до 0.01 призводить до зменшення числа

фрагментів сплайна і більш грубого наближення до детермінованої основи даних (рис.4.33).

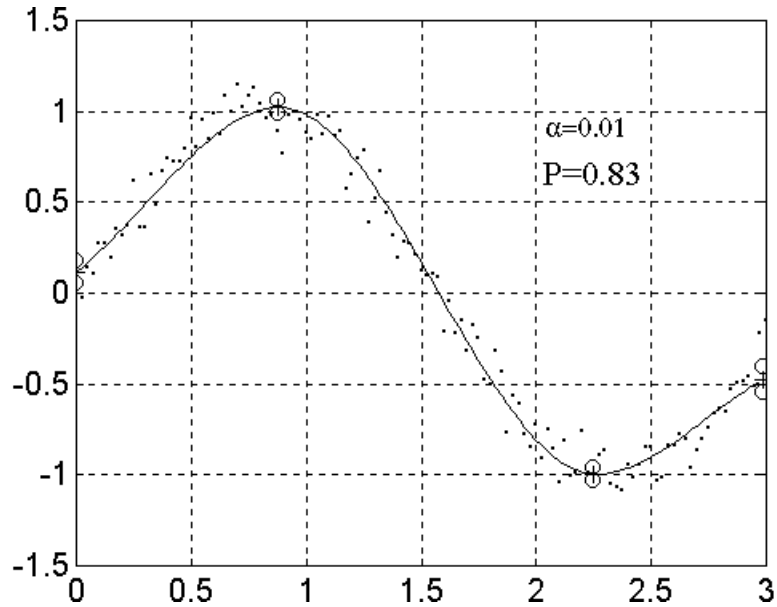


Рисунок 4.33. Надто рідка сітка вузлів (низька помилка I-го роду)

Свідченням цього є зменшення ймовірності випадковості залишків (0.83) та велика різниця між його отриманим та очікуваним значенням (0.99). Причиною є збільшення помилки другого роду і відповідно більш частого прийняття гіпотези про випадковість залишків.

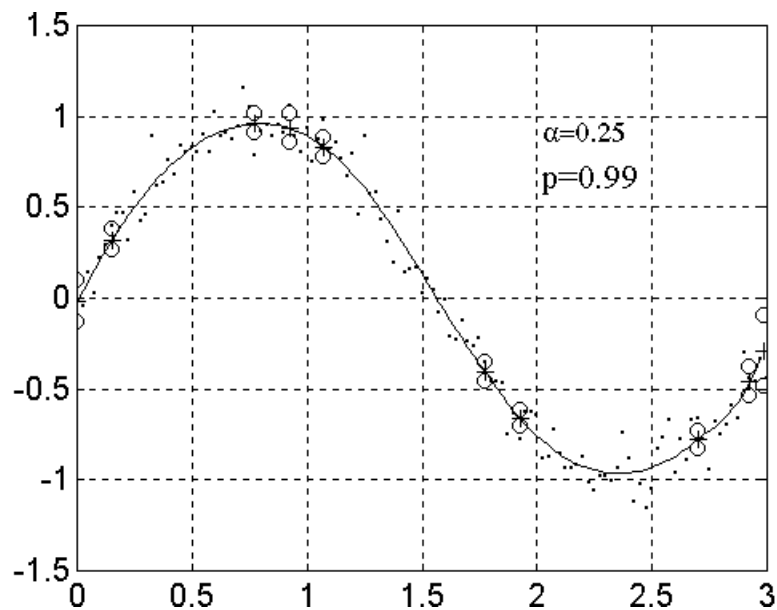


Рисунок 4.34. Близька до оптимуму сітка вузлів

Збільшення рівня значимості до 0.25 дає наближення близьке до оптимального. Ймовірність випадкового характеру залишків становить 0.99. Проте значна розбіжність між очікуваним значенням (0.75) та отриманим дозволяє зробити припущення про випадковість отриманого покращання. Подальше збільшення рівня значимості призводить до зростання числа фрагментів сплайна і наближення до випадкової складової (рис.4.35). Ймовірність випадковості залишків падає до 0.73 при рівні довірчої ймовірності 0.50.

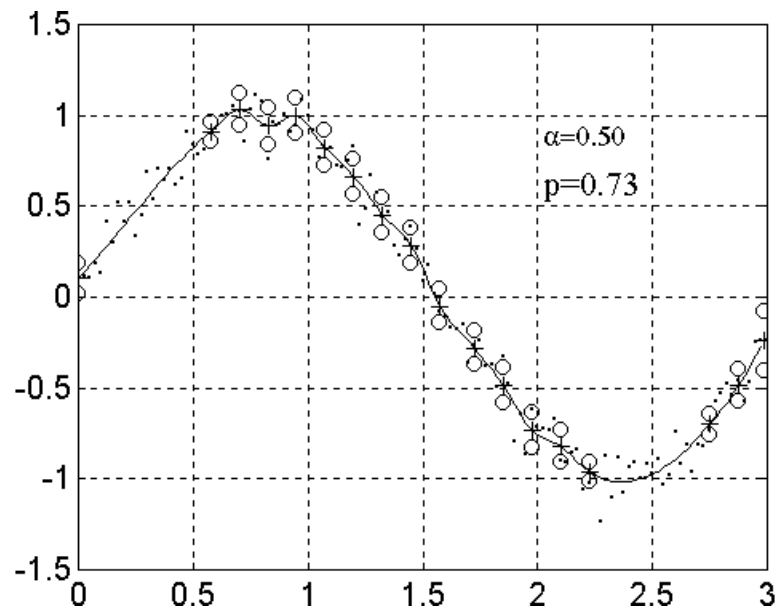


Рисунок 4.35. Надмірно густа сітка вузлів (велика помилка I-го роду)

Таким чином запропонований критерій якості реагує як на недостатню так і надмірну гладкість сплайнової моделі в порівнянні з гладкістю детермінованої основи даних.

Розглянутий підхід дозволяє будувати сплайн на сітках близьких до оптимальних і в пакетному режимі за повною вибіркою. При цьому можливі два варіанти побудови оптимальної сітки.

З заданим числом вузлів, розміщення котрих забезпечує значення критерію інверсій близьке до математичного сподівання.

Побудова сітки з мінімальним числом вузлів котре забезпечує заданий рівень ймовірності помилки першого роду при перевірці гіпотези про випадковий характер залишків.

Розглянемо особливості реалізації таких алгоритмів. Процедура побудови оптимальної сітки полягає в оптимальному розміщенні нового вузла всередині окремого фрагмента сплайна. Оптимізація починається з поділу одного фрагмента. Знаходження оптимального положення нового вузла можна виконати відомими методами одномірної оптимізації, або перебором з певним кроком (вимоги до точності розміщення невисокі).

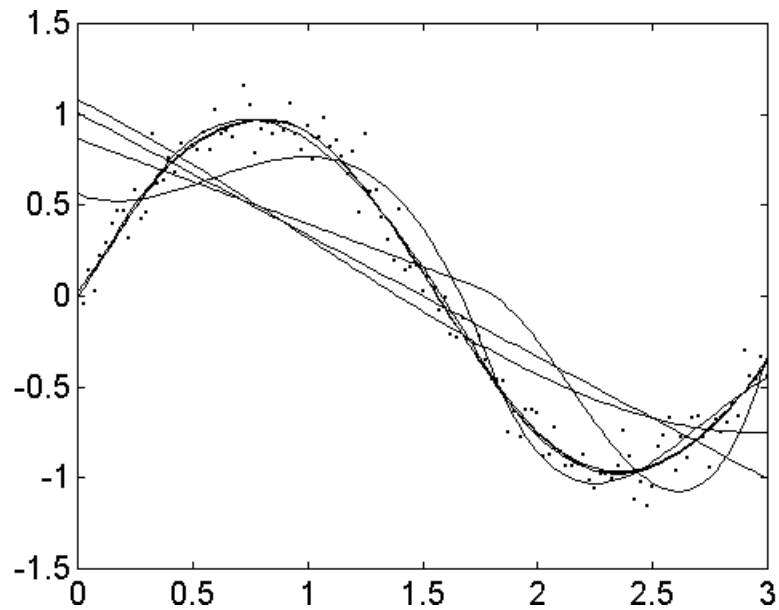


Рисунок 4.36. Зміна вигляду сплайна в процесі дроблення фрагментів

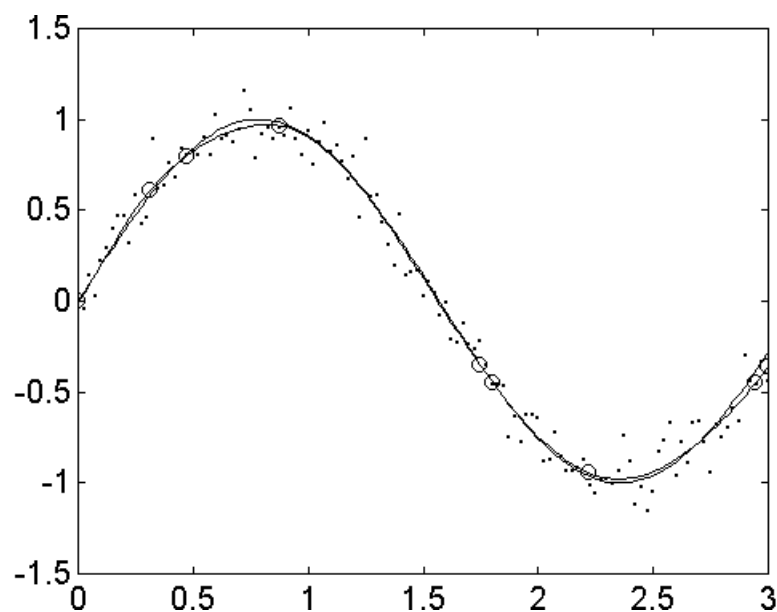


Рисунок 4.37. Результат оптимізації вузлів алгоритмом дроблення

Метод перебору дозволяє значно спростити процедуру побудови, особливо при невеликій кількості даних. В якості критерію в алгоритмі застосовуємо квадрат різниці між очікуваним числом інверсій і отриманим на фрагменті. Такий критерій має ряд переваг перед ймовірністю випадковості залишків на окремому фрагменті. Оскільки поділу підлягає фрагмент, що має максимальне значення критерію, то ймовірність поділу більших фрагментів є більшою, ніж коротких. Таким чином природнім чином надається перевага в поділі фрагментам з більш значимими вибірками. З іншого боку саме поділ фрагмента з великою довжиною дозволяє знизити нев'язку наближення до детермінованої основи даних. Дроблення сплайна на фрагменти припиняється за умови досягнення заданої ймовірності випадковості залишків, або (і) досягнення заданої кількості вузлів. На рис.4.36 показано послідовність побудови сплайна на попередньому модельному прикладі. Через вісім поділів досягнуто ймовірність випадковості залишків 0.9964. В процесі дроблення фрагментів ця ймовірність змінювалась наступним чином: 0.6477, 0.4046, 0.8507, 0.4174, 0.8367, 0.8297, 0.8648, 0.9964. Очевидним є значний вплив випадковостей на значення критерію. Результат показано на рис.4.37 в порівнянні з модельним фрагментом синусоїди. Алгоритм дроблення по повній вибірці потребує від оператора певного рівня уваги, для запобігання явно невдалим результатам, обумовленими випадковим характером критерію. Так на третій ітерації маємо досить велике значення ймовірності випадковості залишків (0.85), проте очевидно, що результат невдалий. В порівнянні з алгоритмом послідовної побудови сплайна алгоритм дроблення менш стабільний, оскільки додавання фрагмента значно впливає на найближчі 3-4 фрагменти ліворуч та праворуч.

Взагалі, можливі різноманітні варіації описаних алгоритмів. Отримані сітки є оптимальними лише приблизно, а вдалий результат отримуємо не гарантовано, а лише у ймовірністному розумінні. Проте в переважній більшості експериментів та розрахунків алгоритми дають хороші результати, цілком прийнятні для практичних потреб. Представлені алгоритми є найбільш випробуваними на практиці, та такі, що показали хороші результати.

#### 4.5 Сплайн-ідентифікація законів розподілу випадкових величин

При побудові довірчих інтервалів для статистичних оцінок параметрів сплайнових і інших моделей виникає серйозна проблема стосовно закону розподілу випадкової складової. У випадку підтвердження гіпотези про нормальність залишків вдається побудувати точні довірчі інтервали, інакше лише приблизні. Одним із способів побудови довірчих інтервалів для випадкової складової з довільним законом розподілу є статистичне моделювання (бутстреп метод) [140].

В зв'язку з цим маємо дві проблеми. Ідентифікації закону розподілу за вибіркою та моделювання даних з заданим законом розподілу. Теоретичні закони розподілу (нормальний, експоненційний і т.д.) є зручним інструментом теоретичних побудов. Реальні дані в переважній більшості випадків приймають значення з обмеженого діапазону  $[a,b]$ , а більшість законів розподілу передбачають відсутність таких обмежень. Тому розбіжність між теоретичними та емпіричними законами є особливо суттєвою в хвостах розподілів. Більшість теоретичних законів розподілу важко назвати зручними в розрахунках. Для практичних розрахунків користуються їх апроксимаціями [252].

В ряді випадків виявляється можливим знайти адекватні аналітичні моделі для даних з обмеженим діапазоном, скориставшись математичним апаратом базисних сплайнів. Розглянемо ситуацію типову для статистичного моделювання. В основі генерації випадкових (точніше псевдовипадкових) чисел  $X$  є генератор з рівномірним законом розподілу дискретних цілих чисел в діапазоні  $0 \dots T$ , або в діапазоні  $0-1$ .

Інші закони отримують шляхом функціональних перетворень рівномірних даних. Так в результаті логарифмування  $X$  отримують числа  $Y = \ln(X)$  з законом близьким до експоненційного. Типовим методом генерації даних близьких до

нормальних є додавання 12 рівномірно розподілених чисел  $y_i = \sum_{j=1}^{12} x_j$ . Отримані

випадкові числа  $Y$  також приймають обмежений зверху та знизу діапазон значень  $[0,12]$ .

Розглянемо детальніше процедуру формування нормальних даних.

Якщо  $x_j$  розподілені за рівномірним законом  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$ , то сума

$y_i = \sum_{j=1}^2 x_j$  розподілена за законом, що є згорткою двох рівномірних (трикутний

закон, або закон Симпсона)  $f(y) = \begin{cases} y, & y \in ]0,1] \\ 2-y, & y \in ]1,2] \end{cases}$ . Сума чотирьох чисел розподілена

за законом, що є згорткою двох трикутних законів. Процес можна продовжити для

довільної суми  $y_i = \sum_{j=1}^N x_j$ . В силу центральної граничної теореми при  $N \rightarrow \infty$

отримаємо нормальний закон розподілу. Проте вже при  $N=12$  закон є достатньо близьким до нормального.

Поглянемо на описану процедуру з іншого боку. З допомогою згортки

локальних функцій  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$  утворюються алгебраїчні В-сплайни.

Розподіл суми двох випадкових чисел має функцію щільності розподілу

$$f_1(y) = \begin{cases} y, & y \in ]0,1] \\ 2-y, & y \in ]1,2] \end{cases}, \quad (4.36)$$

що є лінійним В-сплайном.

Сума  $y_i = \sum_{j=1}^4 x_j$  розподілена за законом кубічного В-сплайна, котрий

складається з чотирьох фрагментів - кубічних поліномів:

Довільний алгебраїчний В-сплайн можна розрахувати з допомогою рекурентних виразів [142]:

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x), \quad (4.37)$$



$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in ]t_i, t_{i+1}] \\ 0, & x \notin ]t_i, t_{i+1}] \end{cases}. \quad (4.38)$$

Для регулярної сітки вузлів з одиничною довжиною фрагментів та  $t_0 = 0$  отримаємо дещо простіші вирази:

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-i}{k-1} B_{i,k-1}(x) + \frac{i+k-x}{k-1} B_{i+1,k-1}(x), \quad (4.39)$$

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in ]i, i+1] \\ 0, & x \notin ]i, i+1] \end{cases}. \quad (4.40)$$

Для регулярної сітки нас цікавитиме довільне значення індексу  $i$ , оскільки базисні функції з іншими індексами легко отримати відповідним зміщенням координат. Зміну кроку сітки вузлів легко врахувати відповідною зміною масштабу.

Зауважимо, що алгебраїчні базисні сплайни легко диференціювати та інтегрувати [142].

Повернемося до формування нормальних даних. Для суми з  $N=12$  рівномірно розподілених чисел законом розподілу буде В-сплайн 12 порядку, що складається з 12 фрагментів - алгебраїчних поліномів 12-ї степені. Вигляд В-сплайна та кривої

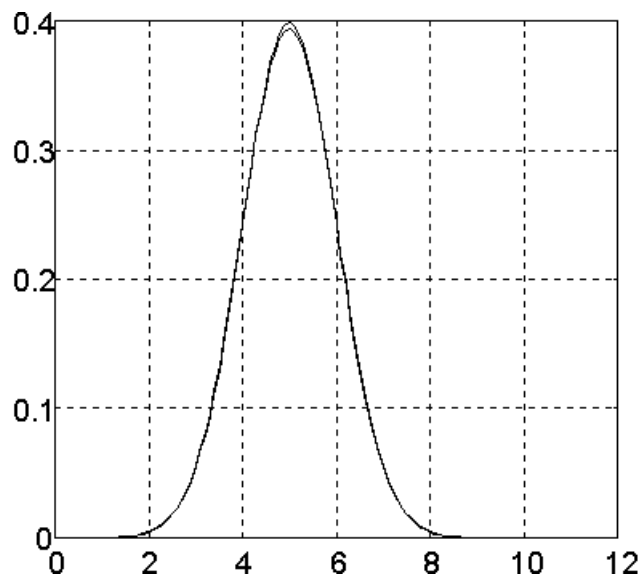


Рисунок 4.38. В-сплайн 12 порядку та крива Гауса

відповідного нормального закону показано на рис.4.38.

Закон розподілу суми 12 рівномірно розподілених чисел, що є В-сплайном дуже близький до відповідної нормальної кривої. Тобто В-сплайнами варто користуватися для апроксимації нормальної кривої. Але потрібно особливо відмітити, що в даному прикладі мова йде саме про дані розподілені за законом алгебраїчного В-сплайна, а нормальний закон є лише близькою до нього моделлю. Ідея та приклад використання сплайнів для згладжування емпіричних законів розподілу випадкових величин є в К.Де Бора [142]. Питання наближення емпіричних та теоретичних законів сплайнами досліджені у [229]. Проте мова йшла якраз про наближення не сплайнових за своєю природою законів розподілу. Звертаючи увагу на природу утворення сплайнових законів, в результаті складання випадкових даних обмеженого діапазону значень, слід очікувати їх значної поширеності в практичних сферах. При цьому В-сплайни не обмежуються алгебраїчними. Відмінним від рівномірного законам складових відповідатимуть не алгебраїчні В-сплайни.

Інше застосування сплайнів стосується ідентифікації закону розподілу за вибіркою. При чому під ідентифікацією розумітимемо не віднесення даних до одного з відомих теоретичних законів розподілу, а встановлення функції розподілу, або щільності розподілу, котрі відповідають даній вибірці. Для моделювання даних законом розподілу, аналогічним вибірці важливо отримати оцінку інверсної функції розподілу. На даному підході ґрунтується також цілий ряд непараметричних методів статистики, що виявляють відмінності в даних [177,182,257]. Вказана задача є задачею згладжування, завдання котрого у виділенні не випадкової складової в емпіричній функції розподілу. Тому природним є застосування розглянутих в попередніх підрозділах алгоритмів послідовної побудови сплайна та алгоритму дроблення. На рис.4.39 показано результат ідентифікації вибірки з 64 чисел розподілених за експоненційним законом. З допомогою алгоритму послідовної побудови згладжено емпіричну функцію розподілу та інверсну до емпіричної функції розподілу. Рівень значимості при побудові сплайна 0.1. Для прямої та

інверсної функції отримані близькі значення, включаючи й положення вузлових точок сплайна. Аналогічні результати отримано і для вибірки з нормального закону розподілу рис.4.40.

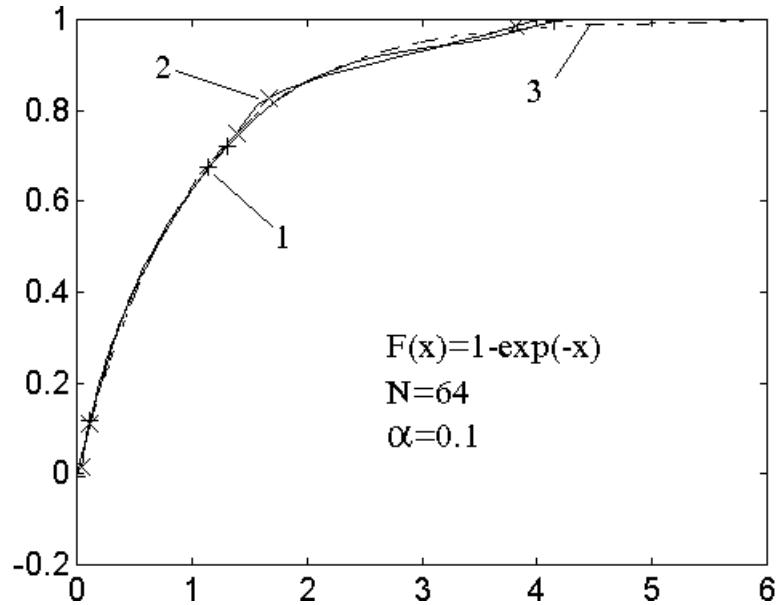


Рисунок 4.39. Ідентифікація експоненційного закону за вибіркою з  $N$  даних. 1- оцінка інтегральної функції, 2-оцінка інверсної функції (графік повернуто), 3-теоретична функція розподілу.

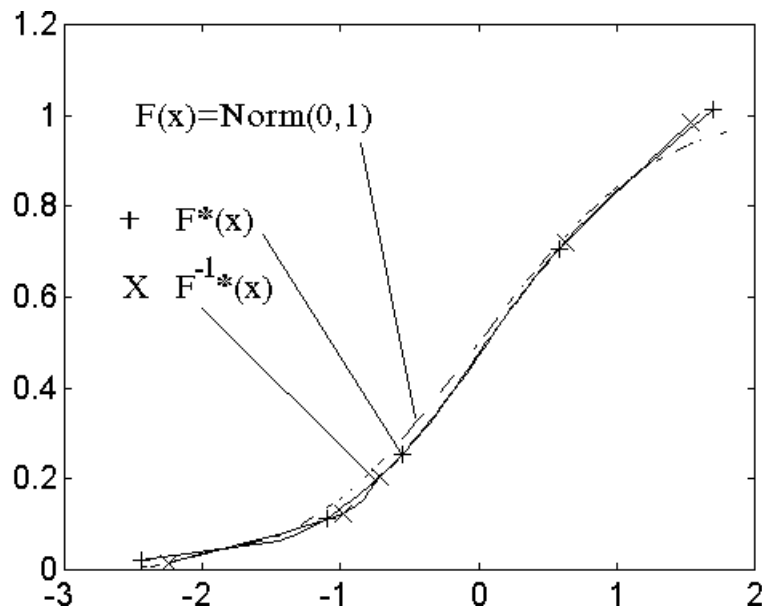


Рисунок 4.40. Ідентифікація нормального закону за вибіркою з 64 чисел.

Для побудови сплайнів використовувався алгоритм загального вигляду, котрий не враховує особливостей функцій розподілу. Однак сплайн за рахунок хороших наближаючих властивостей вдало передає неспадаючий характер залежності.

Врахування неспадаючого характеру функцій розподілу не можна здійснити вибором неспадаючих базисних функцій, оскільки сплайновий базис є локальним, неперервним і на краях приймає нульові значення. Отже сплайновий базис містить точку екстремуму і похідна змінює свій знак. Тому врахувати невід'ємність першої похідної можна застосувавши метод найменших квадратів з обмеженнями-нерівностями [187]. Це призводить до невиправданого зростання обсягів розрахунків. Точність більшості інженерних застосувань цілком допускає незначні порушення умови про неспадаючий характер сплайна.

#### 4.6 Висновки

1. Отримані розрахункові вирази і розроблено алгоритм оцінки спектру, шляхом апроксимації спектру сплайном і мінімізації нев'язки між даними та інверсним перетворенням спектру в часовій області за методом найменших квадратів.

2. Розроблено рекурентний та віконний алгоритми сплайн-ідентифікації спектрів, та рекомендації стосовно вибору параметрів цих алгоритмів.

3. Встановлено, що основною перевагою сплайн-ідентифікації спектрів в порівнянні з класичними є можливість локальної деталізації спектра. Якість оцінки суттєво залежить від схеми розміщення вузлів сплайна в частотній області.

4. Створено алгоритм оптимізації сітки вузлів сплайна методом координатного спуску з обмеженнями та апробовано його для методу сплайн-ідентифікації спектрів.

5. Синтезовано алгоритм послідовної побудови сплайна з послідовним розміщенням вузлів за схемою близькою до оптимальної.

6. Запропоновано використати, як критерій якості моделі ймовірність випадкового характеру залишків, що розраховується з допомогою критерію інверсій. На прикладах оптимізації сітки вузлів сплайнів продемонстровано характерні особливості та переваги критерію. Основною перевагою критерію в порівнянні з коефіцієнтом детермінації є відсутність безумовного покращання значення зі зменшенням гладкості моделі.

7. Розроблено та апробовано алгоритм дроблення фрагментів (вузлів) сплайна з метою отримання сітки вузлів, близької до оптимальної.

8. Показано, що в ряді практичних випадків закони розподілу випадкових величин є сплайнами.

9. Отримано алгоритми ідентифікації законів розподілу із використанням розроблених методів послідовної побудови сплайнів та дроблення. Показано, що сплайн вдало передає характер закону та його особливості.

## 5. АЛГОРИТМИ ТА ЗАСОБИ СПЛАЙН-ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

### 5.1. Постановка задачі

Основною метою розділу є розробка прикладних алгоритмів та структурних схем пристроїв для швидких розрахунків.

Розглянуті в попередніх розділах сплайн-методи є досить загальними для того, щоб їх можна було використати для обробки сигналів у реальному часі чи реалізувати апаратно. Користуючись термінологією R.Vlahut [122] можна сказати, що в попередніх розділах задані алгоритми, котрі встановлюють співвідношення між входом та виходом. Ці алгоритми, описані математичними виразами і розраховуються у відповідності з ними. Таку реалізацію називатимемо прямою. Пряма реалізація більше відповідає математичній сутності процедури обробки сигналів, ніж ефективній реалізації розрахунків. Під швидким алгоритмом розумітимемо детальний опис процедури розрахунку, що не є очевидною і в котрій досягнуто зростання швидкості обчислень. Як правило, у швидких алгоритмах концептуальна ясність розрахунків приноситься в жертву ефективності. Завданням даного розділу є створення на підставі загальних методів та алгоритмів швидких, тобто таких, котрі здатні працювати в реальному часі та допускають апаратну реалізацію. Слід відмітити, що більшість швидких алгоритмів можна представити через операції з матрицями специфічної, діагональної структури [124,215]. Сплайн-методи якраз і оперують із такими матрицями, котрі для сплайнів є природними і відображають внутрішню структуру сплайнів. Отже, цим пояснюється обчислювальна ефективність сплайнів і відкривається потенційна перспектива дальшого удосконалення ефективності.

У другому підрозділі розглянемо схеми швидкої сплайн-інтерполяції та методу побудови таких систем. Основний обсяг розрахунків при сплайн-

інтерполяції у загальному вигляді доводиться виконувати, розв'язуючи систему інтерполяційних рівнянь. Можливі три шляхи вирішення цієї проблеми.

Застосовувати сплайнові базиси в лагранжівій формі. Тоді для ермітових сплайнів втрачаємо неперервність другої похідної, інакше маємо ускладнення розрахунків за рахунок розширення базису.

Уникнути розв'язку системи інтерполяційних рівнянь, використавши базис, узгоджений за спектральними характеристиками з даними.

Внести попередню корекцію у вхідні дані з метою узгодження частотних характеристик даних та базису. Даний підхід для кубічних В-сплайнів розглянуто в [48], де корекцію виконує рекурсивний фільтр низьких частот. Однак, таке поєднання є малопродуктивним, оскільки в такій парі втрачаються переваги обох фільтрів: рекурсивного й нерекурсивного. Тому в даній роботі розроблено варіант корекції з допомогою нерекурсивного фільтра.

Інший спосіб підвищення ефективності розрахунків полягає у виборі спеціальних схем вузлів сплайна та сітки даних. Найпростіше рішення - вибір сітки вузлів та даних з однаковим кроком та фіксація сітки вузлів та даних. Розрахункові вирази при цьому значно спрощуються [296,300].

У третьому підрозділі розглянуто реалізацію оцінок за МНК у реальному часі у вигляді нерекурсивних цифрових фільтрів. Пряма реалізація МНК оцінки полягає у використанні проєкційних матриць, із допомогою котрих можна отримати МНК оцінку й нев'язку (аналоги фільтрів Савицького-Голея). Проте особливості сплайнових моделей дозволяють реалізувати процедуру оцінки більш компактно. Аналогічно випадку інтерполяції для цього вводяться обмеження на сітку вузлів сплайна та даних. Оскільки мова йде про статистичне оцінювання, за наявності випадкової складової, таких спектральних характеристик базису, як нерівномірність АЧХ при виборі базису недостатньо. Враховуючи наявність у структурі МНК узгодженого фільтра необхідно будувати базис з урахуванням енергетичних характеристик спектру даних. Алгоритми базуватимуться на результатах, викладених в третьому та четвертому розділах [281,284].

В четвертому підрозділі розглянемо реалізації МНК оцінок із врахуванням особливостей структури МНК для сплайнів. Зокрема розглядаючи МНК алгоритм, як оптимальну фільтрацію з використанням узгоджених із сигналом фільтрів (імпульсні характеристики котрих є базисними сплайнами) [295].

В п'ятому підрозділі розглянемо рекурсивні схеми МНК оцінок для сплайнових моделей [277,290]. Особливістю рекурентної побудови сплайна є нарощування фрагментів і відповідне зростання числа оцінюваних параметрів. Необхідно отримати відповідні вирази для побудови обчислювальних алгоритмів. Локальність сплайнових базисів дозволяє ефективно організувати обчислювальну процедуру. Нарощування фрагментів сплайна призводить до значного зростання обсягів розрахунків. В той же час локальність базису обмежує вплив наступних відліків на раніше отримані оцінки. Тому рекурсивну процедуру слід обмежити певним вікном. З іншого боку, є сенс використати рекурсивну процедуру для отримання оцінок в алгоритмах обробки даних у вікні.

Шостий підрозділ містить основні висновки.

## **5.2. Швидкі алгоритми сплайн-інтерполяції**

Розглянемо сплайн-інтерполяцію з точки зору максимальної ефективності розрахунків. Пряма реалізація інтерполятора у вигляді цифрового поліфазного фільтра [263] показана на рис.5.1. Побудова можлива за умови, що фрагменти сплайна мають однакову ширину і на кожному з фрагментів розміщено  $n$  точок інтерполяції. Фільтр складається з  $n$  гілок, в кожній з котрих розміщений цифровий фільтр 4-го порядку з коефіцієнтами, що є відліками з чотирьох фрагментів базисної функції. Фільтри в гілках працюють на частоті вхідних відліків. Схеми затримки, котрі працюють на вихідній частоті можна замінити комутаційною схемою.



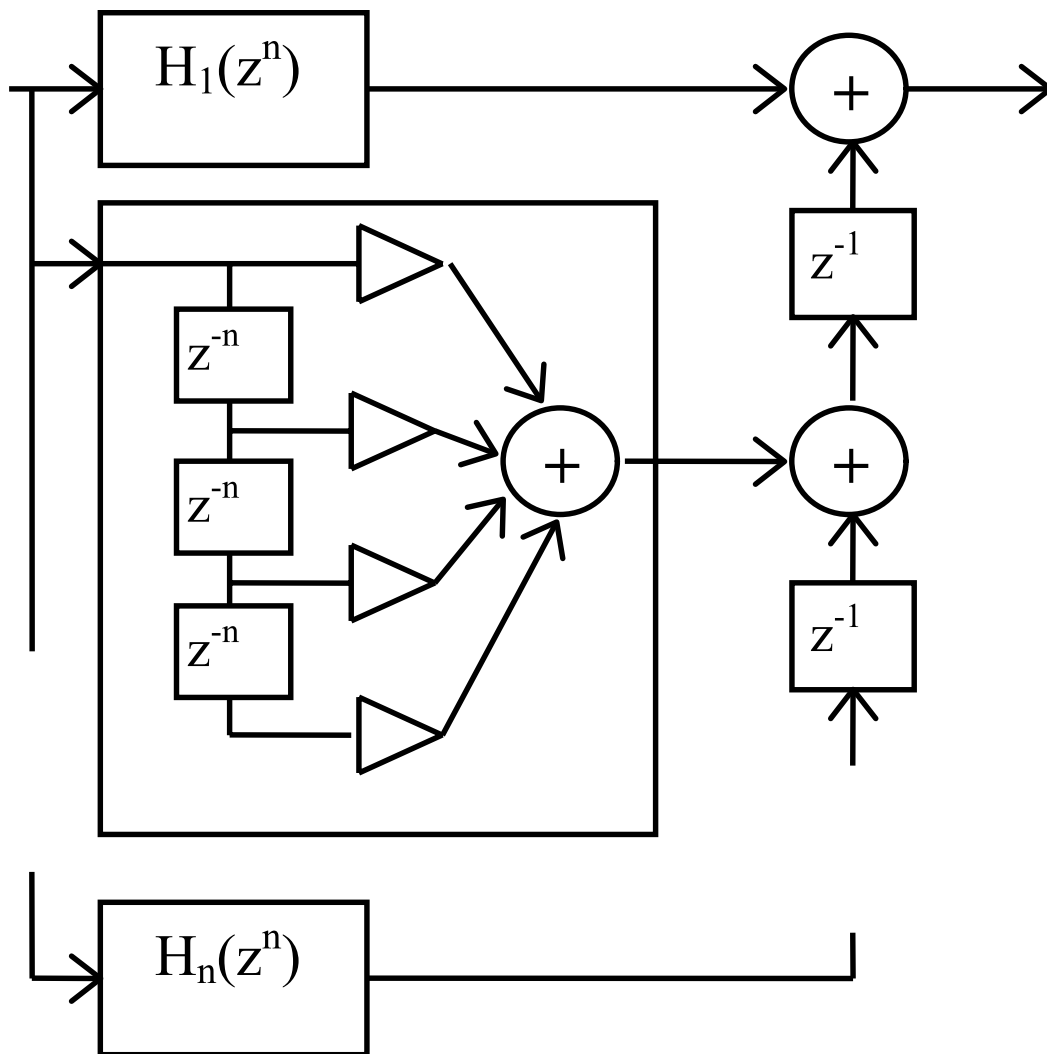


Рисунок 5.1. Реалізація сплайн-інтерполятора у вигляді поліфазного цифрового фільтра

Така схема реалізації сплайн-інтерполятора є найбільш швидкою і концептуально ясною з точки зору цифрової обробки даних. Зміна базису відбувається шляхом заміни коефіцієнтів у фільтрах, котрі розміщені в гілках. Похибку інтерполяції легко охарактеризувати нерівномірністю амплітудно-частотної характеристики базисного сплайна, що є імпульсною характеристикою фільтра (розділ 3.6). На рис.5.2 показані приклади ермітових сплайнових базисів - імпульсних характеристик, а на рис.5.3 їх АЧХ.

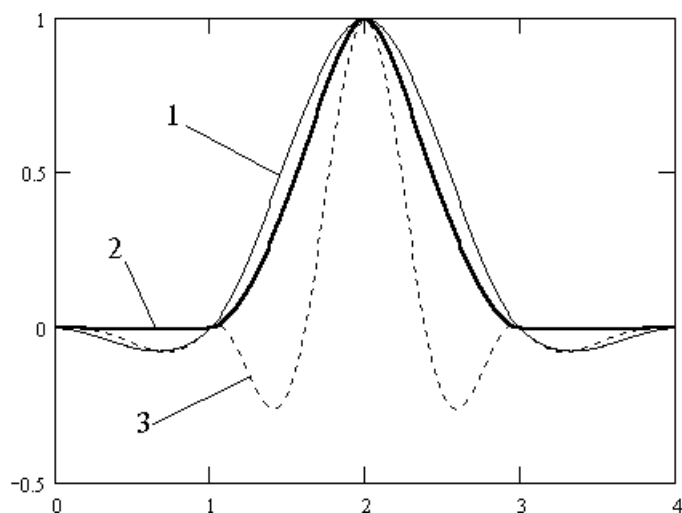


Рисунок 5.2. Ермітові базисні сплайни. 1-кубічний, 2-експоненційний, 3-синусоподібний.

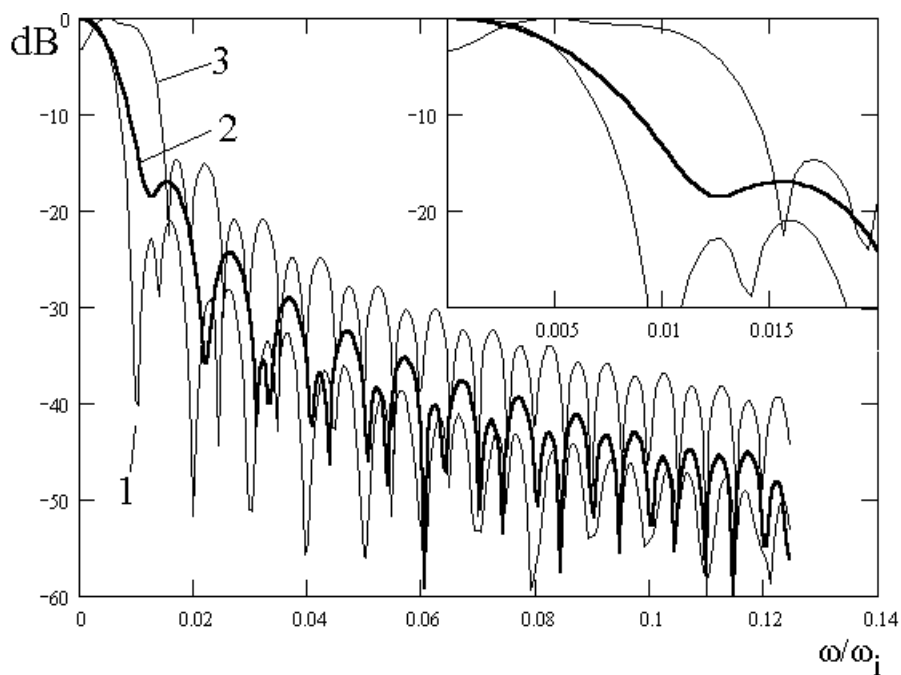


Рисунок 5.3. Нормовані амплітудні характеристики ермітових базисних сплайнів із рис.5.2 ( $\omega_1$  частота інтерпольованих даних)

Найбільш простий у розрахунках базисних функцій є кубічний ермітів сплайн (рис.5.2,5.3 -1), алгоритм розрахунку котрого наведено в підрозділі 2.2. Базис утворюється згорткою двох рівносторонніх трикутників і відповідним приведенням до ермітової форми. АЧХ відповідає низькочастотному фільтру.

Можливості змінювати частотні властивості обмежені співвідношенням між частотою вхідних даних та частотою інтерпольованих відліків.

Наступний базис - експоненційний, утворений згорткою фрагментів експонент. Породжуюча функція має вигляд

$$f(x) = (e^{ax} - 1)e^{-a}, \quad (5.1)$$

де  $a \geq 1$  числовий параметр, що в даному прикладі рівний трьом.

Вирази для розрахунку фрагментів базису досить складні. Простіше отримати відліки чисельним розрахунком інтегралу згортки. Частотні властивості при  $a = 1$  близькі до алгебраїчного базису. Зі зростанням значення параметра  $a$  область пропускання розширюється. Таким чином є додаткова можливість керувати частотними властивостями базису. Базис, зручний для інтерполяції даних із широким амплітудним діапазоном.

Третій представлений на рис.5.2,5.3 базис породжений згорткою відрізків синусоїди

$$f(x) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right). \quad (5.2)$$

Базис має широку смугу пропускання, що за характером наближається до віконного фільтра. Базиси, побудовані таким чином дозволяють виконувати інтерполяцію не лише низькочастотних сигналів і мають широкі можливості для керування частотними властивостями.

Розглянуту поліфазну структуру інтерполятора можна спростити, зменшивши число елементів схеми. Звичайно, це призведе до певного ускладнення елементів управління схемою. Розглянемо це на прикладі кубічного ермітового базису. Рівномірна дискретизація дозволяє користуватися регулярними сітками як вузлів, так і значень інтерполяції. Якраз у цьому випадку яскраво виявляються обчислювальні переваги сплайнів і значно спрощується загальний алгоритм із розділу 2.3. Враховуючи властивості функції форми, отримуємо наступний алгоритм розрахунку для інтерполяційного сплайна.

Позначимо:

$N$  - кількість точок інтерполяції на фрагменті сплайна;

$tu_1 = 0$  ,  $tu_2 = 1$  ,  $tu_3 = 2$  ,  $tu_4 = 3$  - ординати вузлових точок сплайна ;

$A_1 = f_{j-2}$  ,  $A_2 = f_{j-1}$  ,  $A_3 = f_j$  ,  $A_4 = f_{j+1}$  - абсциси вузлових точок сплайна.

Значення сплайна в точці  $i$ , яка належить  $j$ -му фрагменту, розраховується за спрощеним алгоритмом :

Усі фрагменти сплайна мають однакову довжину:

$h_n = 1$  , (довжина фрагмента, якому належить точка інтерполяції )

$h_r = 1$  , (довжина фрагмента ліворуч)

$h_b = 1$  . (довжина фрагмента праворуч)

Отже

$p_1 = 1$ ,  $p_4 = 1/2$ ,  $p_2 = 1/2$ ,  $p_3 = 1$  .

Крайові умови не враховуватимемо, прийнявши до уваги необмежену кількість вузлів.

Значення  $a = i/N$ ,  $b = (N-i)/N$ ,  $c = i^*(N-i)^2 / N^3$ ,  $d = i^2*(N-i)/N^3$  ,  $i=0, N-1$  .

Складові функції форми

$$x_1 = - i^*(N-i)^2,$$

$$x_2 = 2*i^*(N-i)^2 - i^2*(N-i) + 2*(N-i)^3 N^2,$$

$$x_3 = - i^*(N-i)^2 + 2* i^2*(N-i) + 2*i^3 N^2,$$

$$x_4 = - i^2*(N-i).$$

$$S_{ij} = ( A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 ) / (2*N^3).$$

Таке спрощення алгоритму дозволяє ефективно реалізувати його, як комп'ютерну програму або апаратно. При цьому можна досягнути максимальної швидкості роботи, попередньо розрахувавши та записавши в пам'ять значення складових функції форми. Процедура інтерполяції зведеться до вибірки 4-х коефіцієнтів, 4-х перемножень із значеннями у вузлах і трьох-чотирьох додавань. Ділення на  $2N^3$  можна в більшості випадків опустити. Схематично процедура розрахунків показана на рис.5.4. Така схема є вірною для довільного базису, що складається з чотирьох фрагментів.

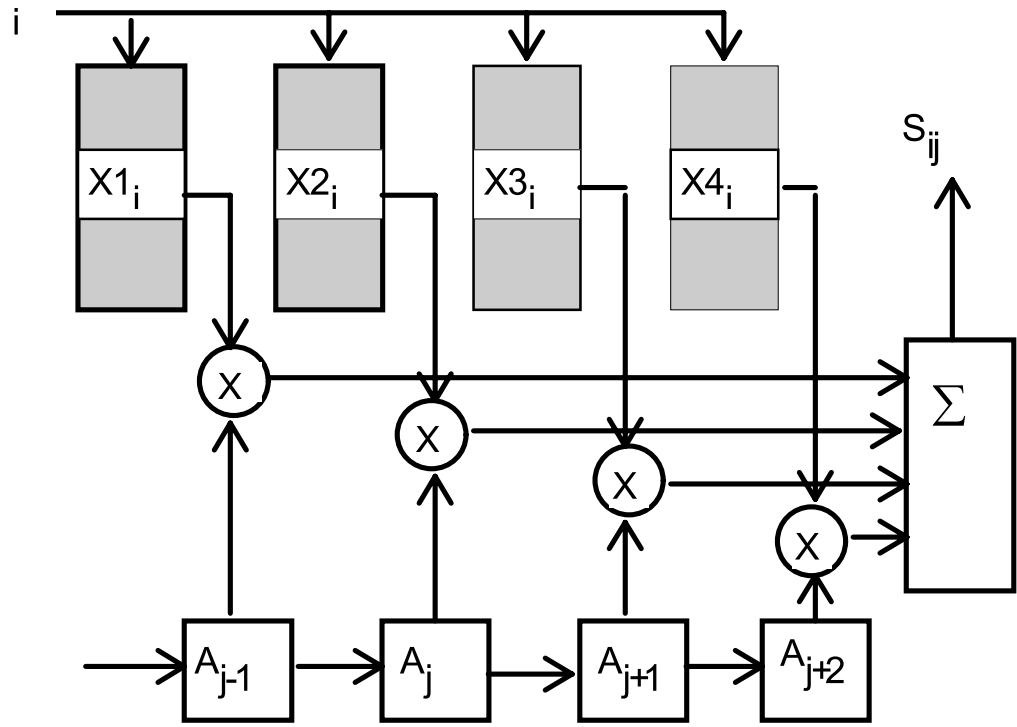


Рисунок 5.4. Сплайн-інтерполятор із розрахованими коефіцієнтами

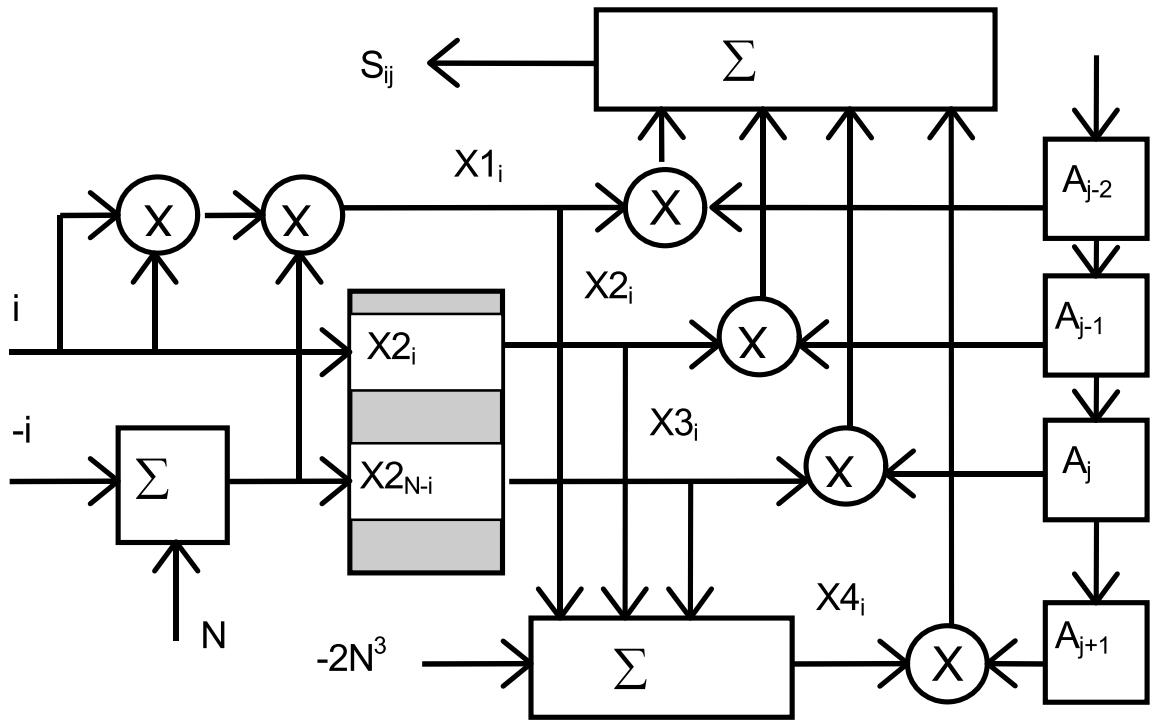


Рисунок 5.5. Сплайн-інтерполятор із частковим розрахунком коефіцієнтів

Якщо важливо економити пам'ять, то значення коефіцієнтів необхідно розраховувати. Це дещо ускладнює апаратну реалізацію. Компромісним є варіант, у якому лише частина значень розраховується попередньо і записується в пам'ять, а інші розраховуються в процесі роботи.

Зокрема використавши властивості симетричності та розкладення одиниці (для кубічного ермітового сплайна), із таблиці значень двох коефіцієнтів легко отримати два інші. Схема розрахунків показана на рис 5.5.

Найбільш загальним пристроєм є сплайн-інтерполятор, структурна схема котрого показана на рис.5.6.

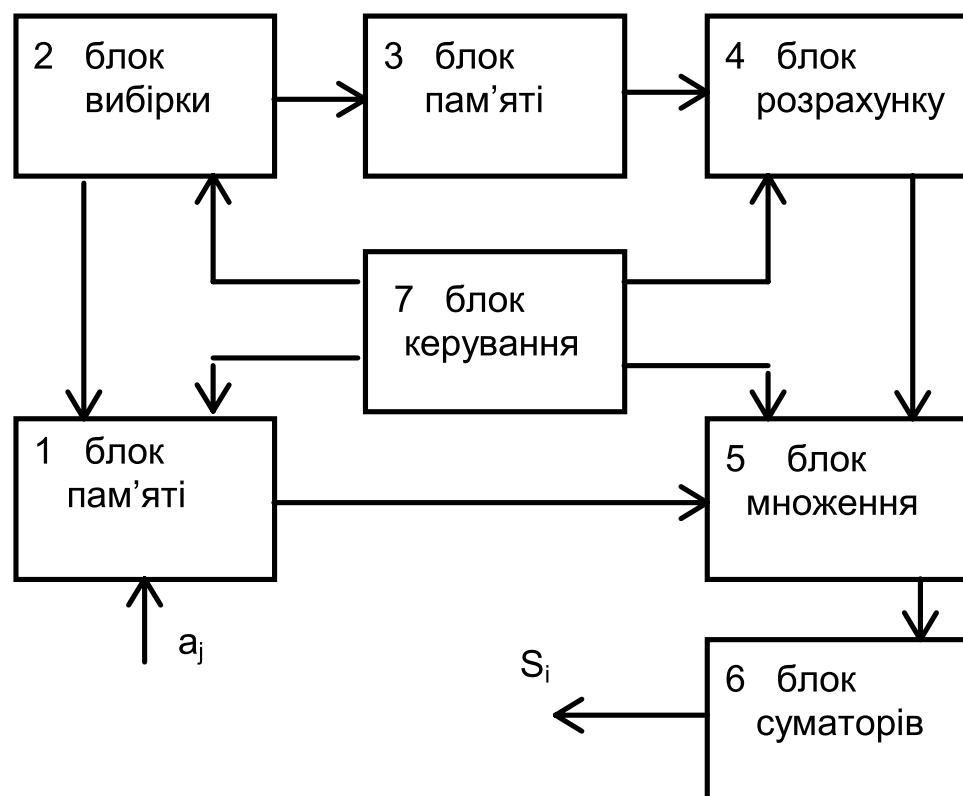


Рисунок 5.6. Узагальнена структурна схема сплайн-інтерполятора

Пристрій складається з блока пам'яті - 3 із коефіцієнтами функції форми; блока розрахунку функцій форми  $X_{1_i}, \dots, X_{4_i}$  - 4; блока пам'яті для вузлів інтерполяції  $a_j$  - 1; блока вибірки - 2, що керує вибіркою значень  $a_j$  та

коефіцієнтів функції форми ; блока перемножень - 5 ; блока суматорів - 6 та блока керування - 7.

Працює інтерполятор наступним чином. У блок пам'яті 1 записуються значення  $a_j$  інтерпольованої функції. За командами блока вибірки 2 із блоків пам'яті 1 та 3 вибираються відповідні значення. На виході блока розрахунків функцій форми 4 маємо значення  $X_{1_i}, \dots, X_{4_i}$ , котрі у блоці множення 5 перемножуються зі значеннями  $a_{j-1}, \dots, a_{j+2}$ . Сформовані добутки складаються у блоці суматорів 6 і на виході пристрою матимемо потрібне значення сплайна  $S_i$ .

Процедуру розв'язку інтерполяційних рівнянь можна звести до попередньої фільтрації вхідних даних. Система інтерполяційних рівнянь для В-сплайнів має дуже специфічну тридіагональну форму, із двома ненульовими значеннями:  $C_0=0.6667$  (головна діагональ),  $C_1=0.1667$  (бокові діагоналі). Числа наведені для кубічного В-сплайна. Завдяки цьому можна наближено отримати значення значимих елементів інверсної матриці. Приймаючи, що інверсна матриця семидіагональна, із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} c_0 & 2c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

отримаємо наступні вирази для значимих елементів:

$$d_0 = c_0(c_0^2 - 2c_1^2) / q, \quad d_1 = -c_1(c_0^2 - c_1^2) / q, \quad d_2 = c_0c_1^2 / q, \quad d_3 = -c_1^3 / q, \\ q = c_0^4 - 4c_1^2c_0^2 + 2c_1^4.$$

Для кубічного В-сплайна  $d_0=1.732$  (діагональ),  $d_1=-0.464$ ,  $d_2=0.124$ ,  $d_3=-0.031$ . Похибка, внаслідок наближеного розрахунку, становитиме не більше  $2Mc_1d_3$  ( $0.01M$ ), де  $M$ - максимальне вхідне значення.

Тоді розв'язок інтерполяційної системи рівнянь полягає у попередній фільтрації вхідних відліків (вузлів інтерполяції) з допомогою фільтра (корегуючого префільтра) з імпульсною характеристикою  $\{d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3\}$ , що є фільтром

верхніх частот з АЧХ зображеною на рис.5.7.

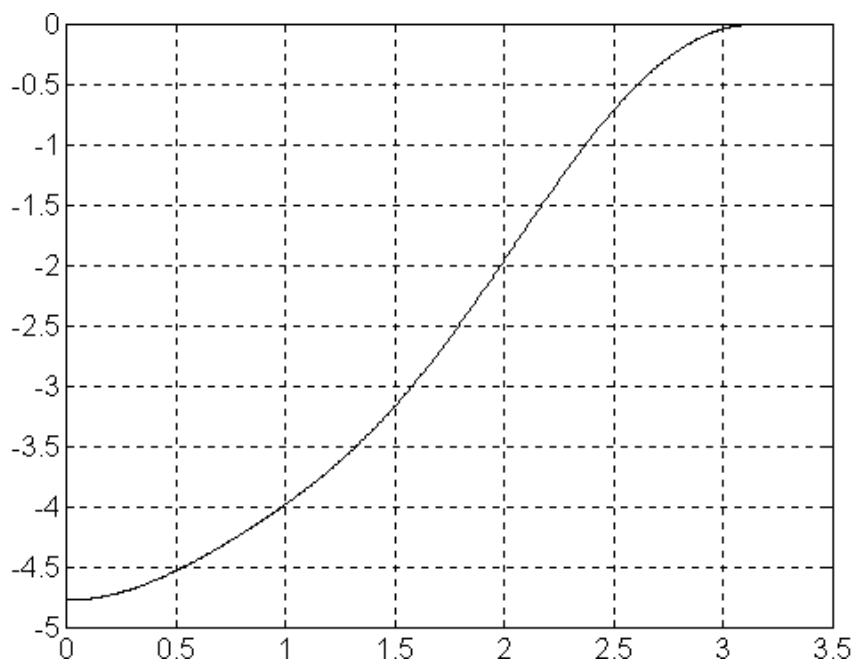


Рисунок 5.7. Нормована АЧХ корегуючого префільтра

Аналогічну побудову можна виконати не лише для алгебраїчного В-сплайна, а й для широкого класу інших, побудованих із різноманітних породжуючих функцій.

Розглянемо інші можливості оптимізації сплайн-інтерполяції. Очевидно, що основні резерви прискорення розрахунків слід шукати в особливостях побудови сплайнів.

Характерною особливістю є кусковий характер сплайн-функцій. З означення сплайна, та розглянутих раніше алгоритмів зрозуміло, що для розрахунку значення інтерполяційного сплайна в конкретній точці слід визначити номер фрагмента, котрому належить задана точка. Якщо сітка довільна і точки інтерполяції задають випадковим чином, то пошук фрагмента займає значний час, або потребує складного схемного рішення. Прискорити процес пошуку можна наступним чином:

скориставшись оптимальними алгоритмами пошуку (дихотомія, золотий перетин);

врахувавши характер надходження точок інтерполяції (послідовно, за певним законом).



### 5.3. Швидкі алгоритми оцінювання параметрів сплайн-моделі за МНК

Апроксимація даних за МНК нас цікавить в основному у статистичному контексті. Тобто, як деяка процедура, що дозволяє зменшити вхідну дисперсію, згладивши дані. В якості лінійної моделі використаємо сплайни виду (3.10), де оцінюваними параметрами є деякі числові коефіцієнти при базисних сплайнах. У випадку ермітових сплайнів оцінюваними параметрами є значення сплайна в точках стикування. Цей вибір значно спрощує оцінку ефективності статистичних оцінок та інтерпретацію результатів. Методи реалізації МНК процедур для поліноміальних моделей до 3-ї степені детально викладені в [178], вони ґрунтуються на особливостях розрахунку алгебраїчних поліномів. Розглянемо більш загальний підхід до реалізації МНК розрахунків як процедури цифрової фільтрації нерекурсивним фільтром. Розглянемо вектор прогнозних значень сплайнової моделі:

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y} \quad (5.3)$$

Кожне прогнозне значення, отримане згорткою рядка проекційної матриці  $\mathbf{L} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$  з вектором даних. З точки зору цифрової обробки даних рядки матриці  $\mathbf{L}$  є імпульсними характеристиками нерекурсивних цифрових фільтрів. Проекційна матриця для сплайнових моделей має ряд характерних особливостей, котрі ми розглянемо на прикладі двох характерних базисів: кубічного ермітового та синусоподібного ермітового. У принципі, використавши довільний рядок проекційної матриці як імпульсну характеристику нерекурсивного фільтра можна застосовувати довільні схеми розміщення вузлів сплайна та даних. Проте в довільному випадку можливий лише прямий аналіз властивостей отриманого фільтра через стандартні процедури побудови частотних характеристик [232]. Вибір оптимальних схем вузлів, як показано у попередньому розділі, тісно пов'язаний з конкретним набором даних і має характер пакетної обробки. Тому

розглянемо сплайн, що складається з досить великої або й необмеженої кількості вузлів. На кожному з фрагментів однакової довжини однаковим чином розміщено  $n$  точок вхідних даних. Точки на фрагменті можуть розміщуватись довільно, проте в реальних ситуаціях їхній крок однаковий. Для простоти розглянемо саме таку схему. Методи розрахунку для сплайнів із необмеженим числом фрагментів викладено у 3 розділі. Тому розрахувати проєкційні матриці для зазначених вище сплайнів не важко. Очевидно, що наслідком локальності базисів буде наявність лише обмеженого діапазону відмінних від нуля елементів проєкційних матриць. На рис.5.8 та 5.10 показано фрагменти довільного рядка проєкційних матриць, що з достатньою точністю відмінні від нуля.

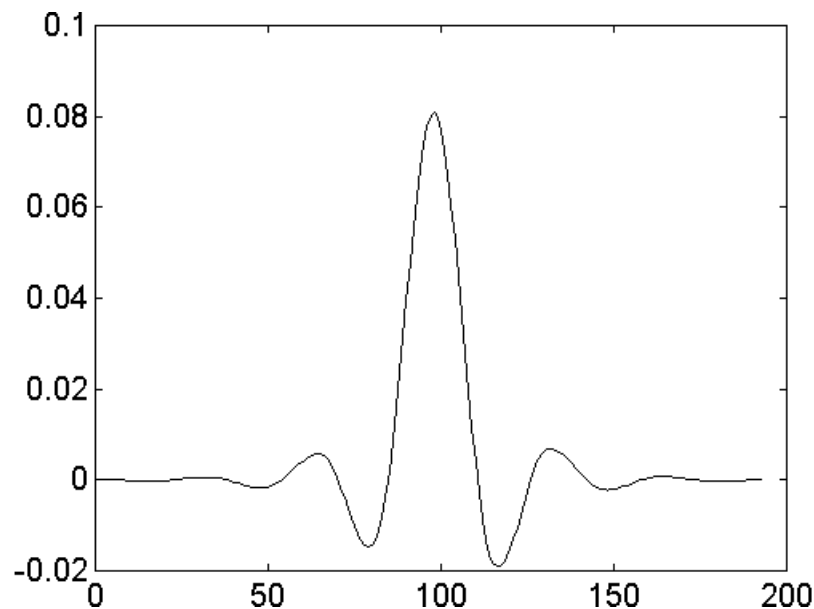


Рисунок 5.8. Фрагмент рядка проєкційної матриці МНК для кубічного ермітового базису

На рис.5.9 та 5.11 показано АЧХ цифрових фільтрів з імпульсними характеристиками - рядками проєкційних матриць із рис.5.8 та 5.10. Для порівняння показано АЧХ відповідних сплайнових базисів (позначені 1). Амплітуда показана в децибелах, частота відносна. Відмітимо, що МНК фільтри мають АЧХ дуже подібні до АЧХ базисних функцій відповідних інтерполяторів. Але на відміну від них нерівномірність в області пропускання має дещо інший характер.

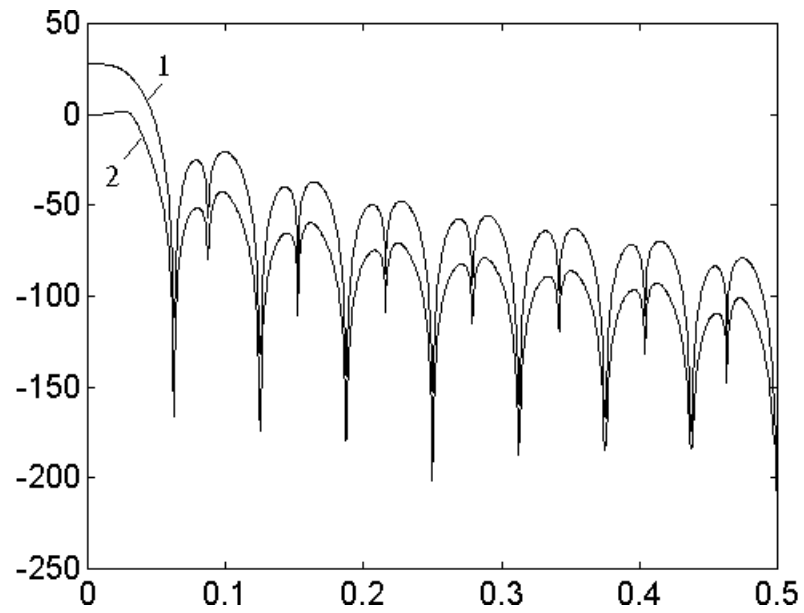


Рисунок 5.9. АЧХ кубічного ермітового базису інтерполяційного фільтра -1 та рядка проекційної матриці МНК з аналогічним базисом -2.

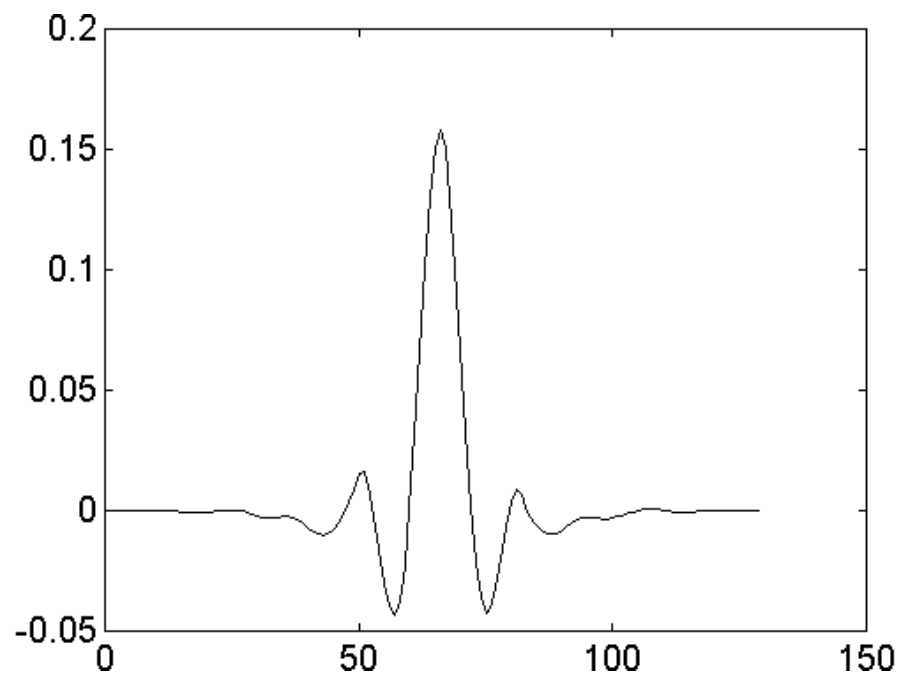


Рисунок 5.10. Фрагмент рядка проекційної матриці МНК для синусоподібного сплайнового базису.

Проте ми взяли рядок досить довільно. Розглянемо ряд рядків проекційної матриці, що включатиме декілька інтервалів. Результати показано на рис.5.12 та 5.13.

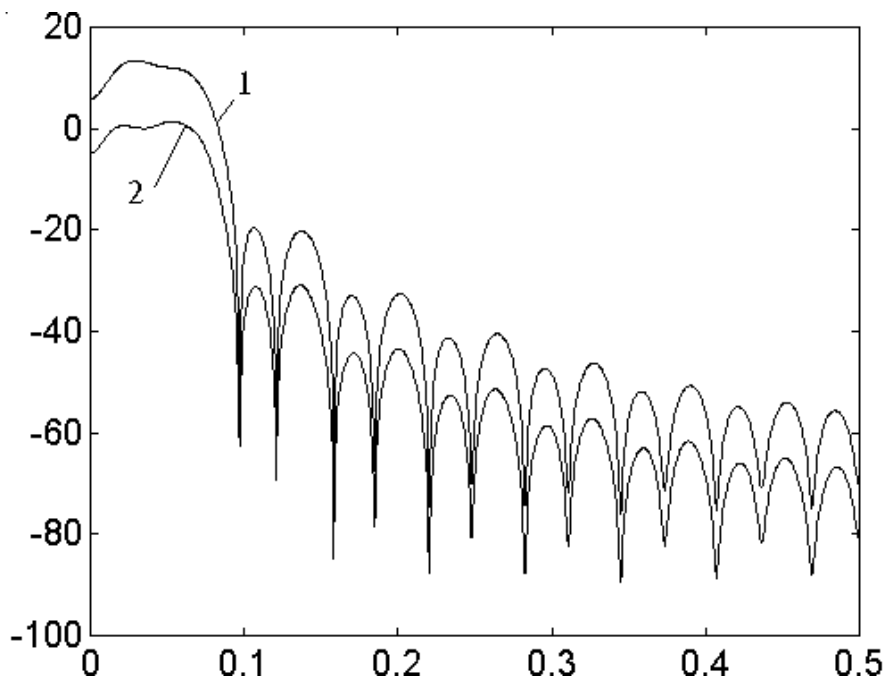


Рисунок 5.11. АЧХ синусоподібного ермітового базису інтерполяційного фільтра -1 та рядка проекційної матриці МНК з аналогічним базисом -2.

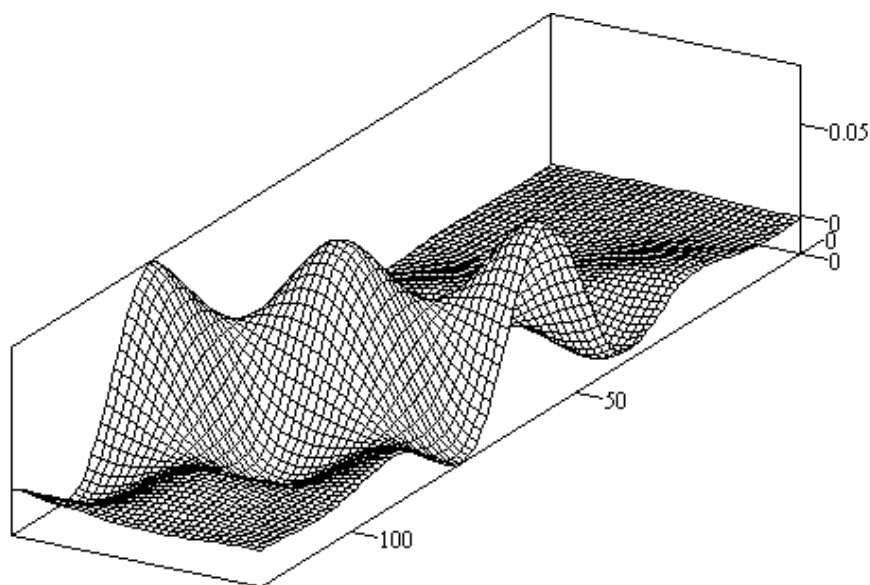


Рисунок 5.12. Зображення фрагмента проекційної матриці МНК для кубічного ермітового сплайна ( $n=16$ )

Як бачимо характер імпульсної характеристики суттєво змінюється в залежності від положення точки на фрагменті сплайна. Детальніше цю залежність можна проаналізувати на графіках в ізолініях рис.5.14 та 5.15. Пікові значення спостерігаються в точках (рядках), що співпадають із вузлами сплайна.

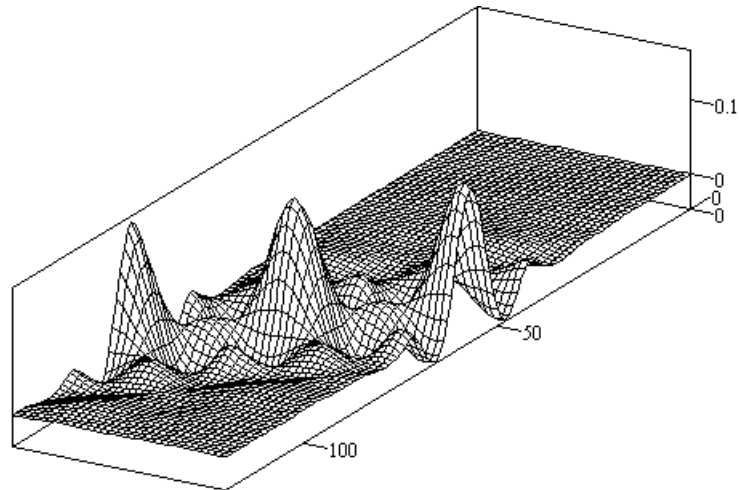


Рисунок 5.13. Зображення фрагмента проекційної матриці МНК для синусоподібного ермітового сплайна ( $n=16$ )

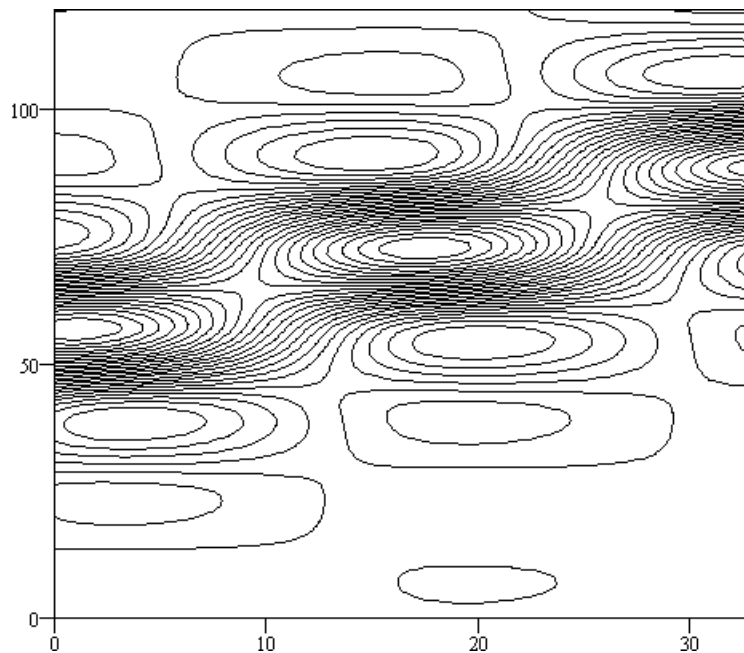


Рисунок 5.14. Зображення в ізолініях фрагмента проекційної матриці МНК для кубічного ермітового сплайна ( $n=16$ )

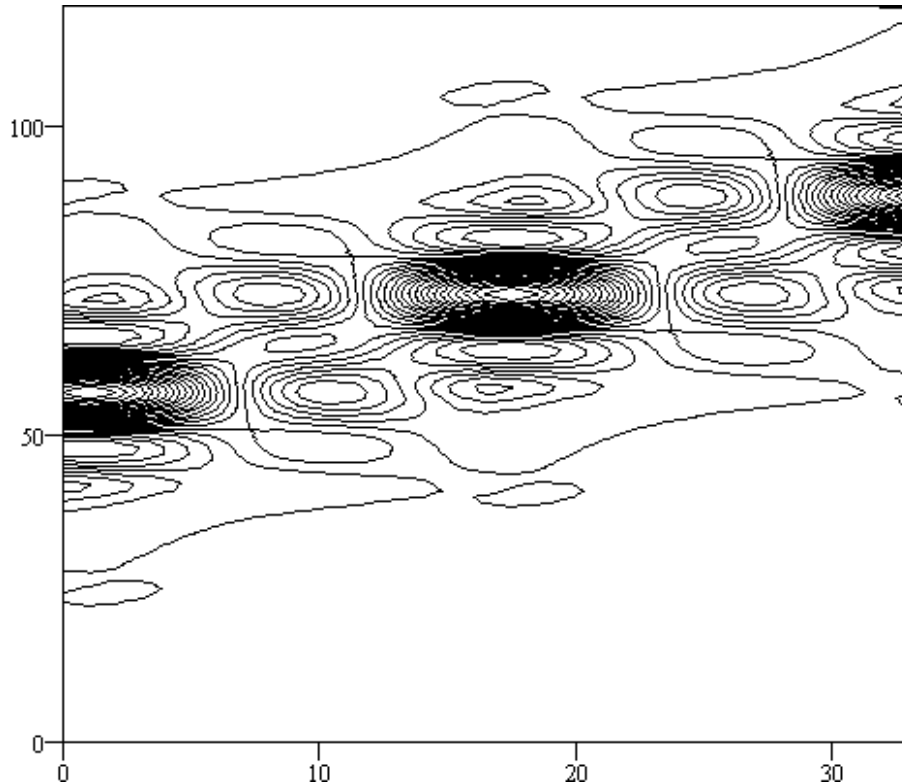


Рисунок 5.15. Зображення в ізолініях фрагмента проекційної матриці МНК для синусоподібного ермітового сплайна ( $n=16$ )

Симетрія спостерігається в точках, котрі співпадають із положенням вузлів, або знаходяться на середині фрагментів. На рис.5.16-5.17 показано характер цих змін із віддаленням від вузла (на графіках ліворуч від вузла). Очевидно, що рядки проекційної матриці з точки зору цифрової фільтрації далеко не рівнозначні. Отже, які з них є найбільш придатними для цифрової реалізації. Першою хорошою ознакою є симетричність імпульсної характеристики, що гарантує лінійність фазової характеристики. Таким чином кандидатами є рядки, що відповідають положенню вузлів на середині інтервалів. Розглянемо АЧХ характеристик зображених на рис.5.16-5.17 див. рис.5.18-5.19. Очевидно, що рядки близькі до вузлів мають АЧХ близькі до АЧХ базисних функцій, що спрощує синтез фільтрів.

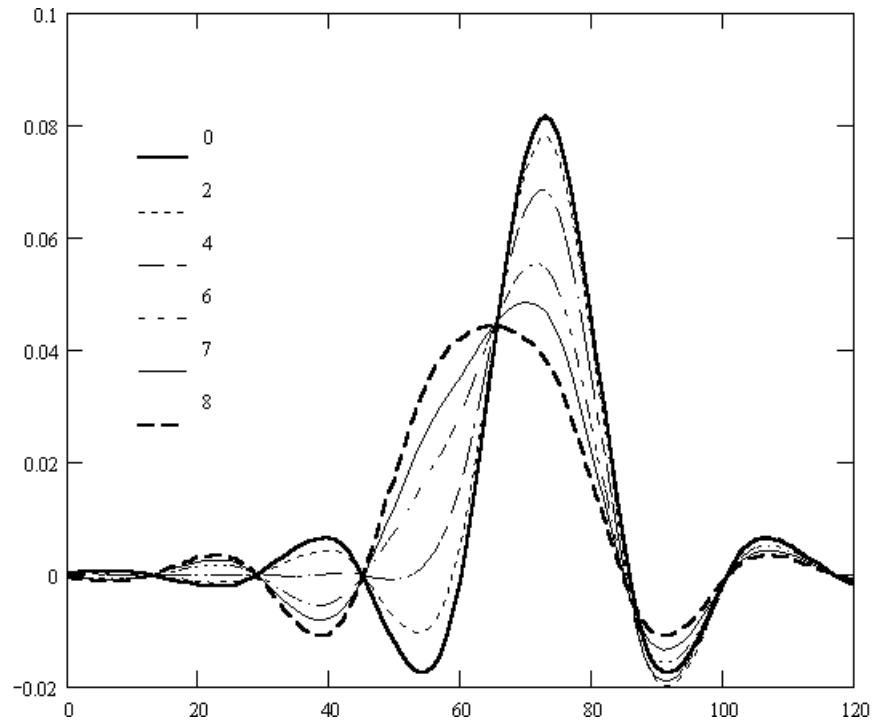


Рисунок 5.16. Рядки проекційної матриці МНК із кубічним ермітовим базисом зміщені відносно вузлового рядка (числа)

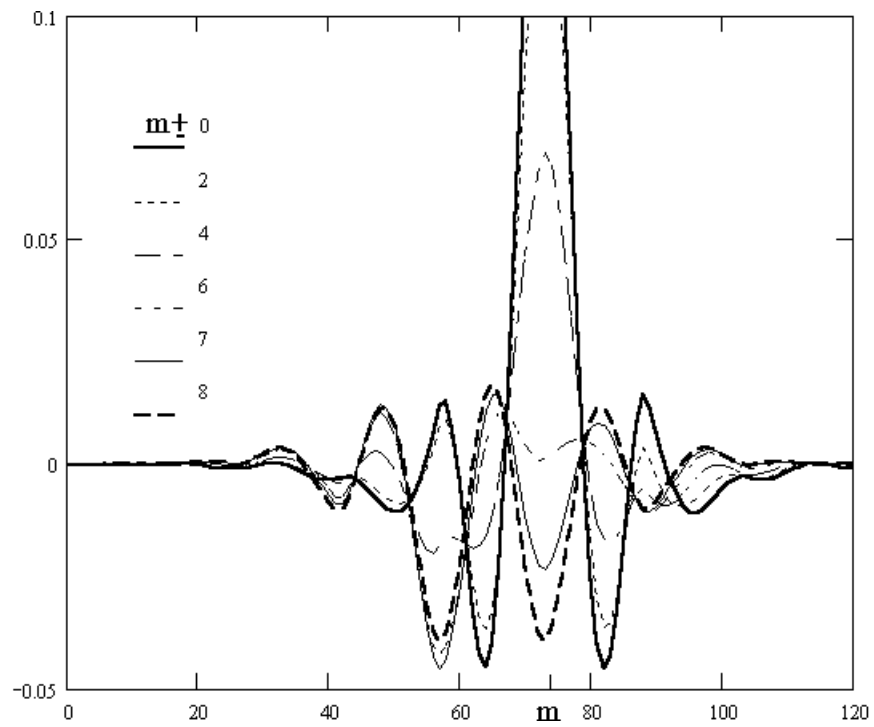


Рисунок 5.17. Рядки проекційної матриці МНК із синусоподібним ермітовим базисом, зміщені відносно вузлового рядка (числа)

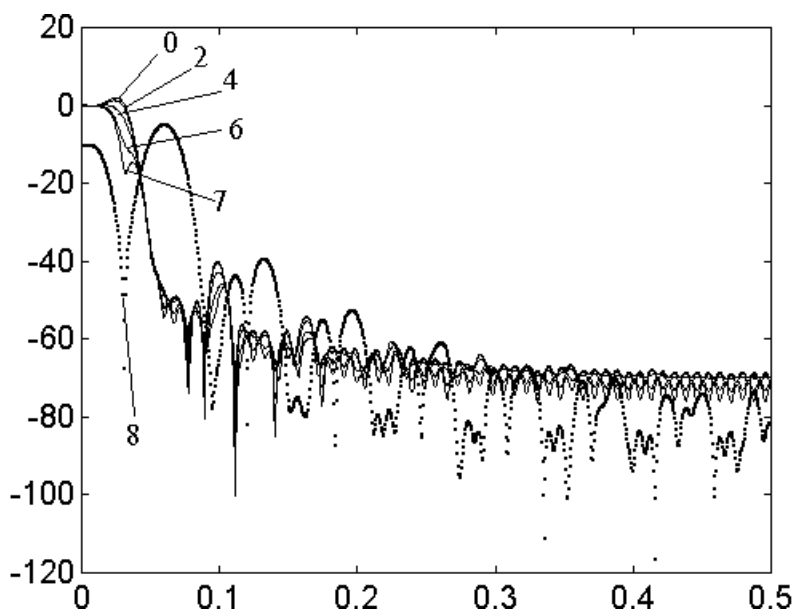


Рисунок 5.18. АЧХ функцій, що є імпульсними характеристиками цифрових фільтрів із рис.5.16

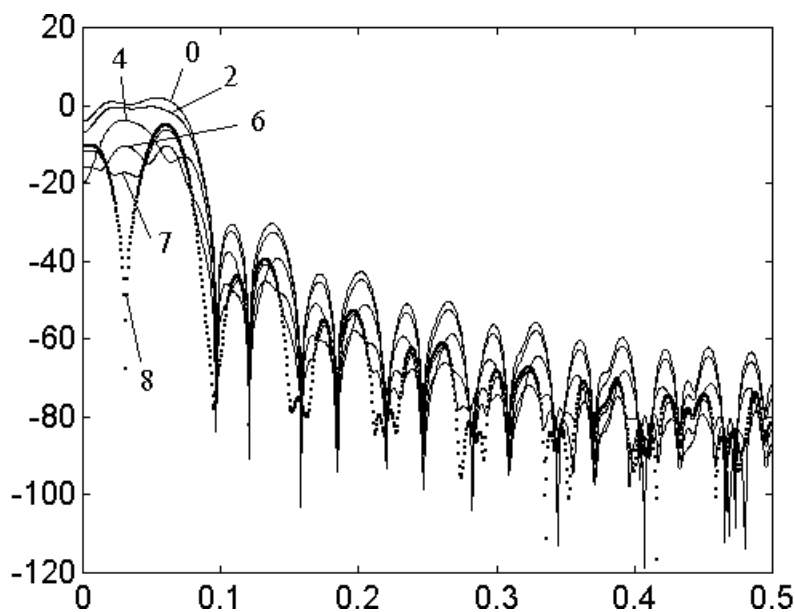


Рисунок 5.19. АЧХ функцій, що є імпульсними характеристиками цифрових фільтрів із рис.5.17

Отже рекомендуємо для реалізації МНК фільтра використовувати рядки проекційної матриці, що відповідають положенню вузлів сплайна. Окрім зазначених переваг отримані значення мають змістовну інтерпретацію. Це значення сплайна у вузлі, що за змістом аналогічне змісту вхідних даних. Легко також



оцінити ефективність такого фільтра. Ефективність фільтрації визначатимемо, як величину зменшення дисперсії вхідних даних. Для оцінюваних параметрів, що є значеннями сплайна в точках стику, зменшення дисперсії показують діагональні елементи коваріаційної матриці. На рис.5.20 показано, як зменшується дисперсія вихідних даних із зростанням числа точок на інтервалі сплайна.

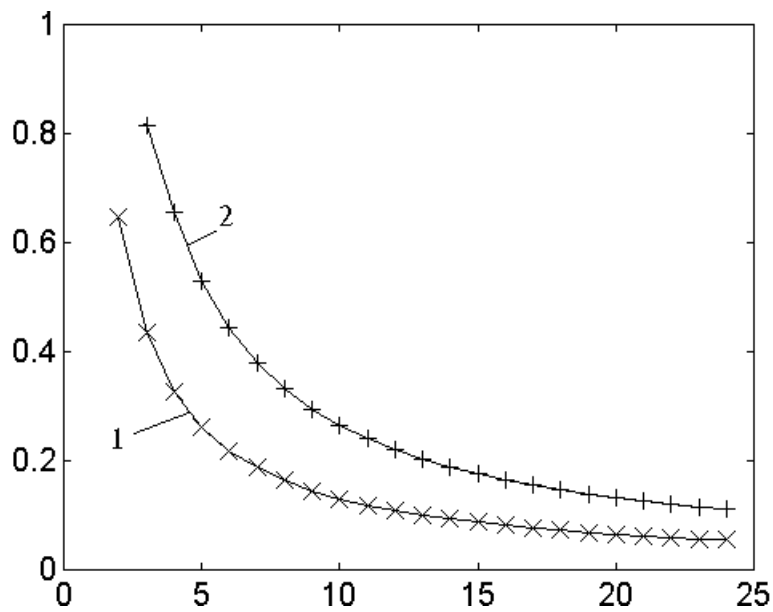


Рисунок 5.20. Ефективність МНК оцінок у вузлах у залежності від числа даних на фрагменті сплайна. 1 кубічний ермітів сплайн, 2 синусоподібний ермітів сплайн.

Для 16 точок маємо 0.0818 для кубічного ермітового сплайна і 0.6631 для синусоподібного ермітового сплайна. Фільтр з ермітовим кубічним сплайном є ефективнішим і може виникнути думка, про доцільність використання саме таких фільтрів. Однак потенційна ефективність досягається у припущенні, що модельна функція МНК фільтра достатньо точно описує детерміновану основу вхідного процесу. Звернувшись до частотної області можна стверджувати, що в цьому випадку маємо близькість спектрів базису та детермінованої складової вхідних даних. Якщо спектр базису ширший за спектр даних, то потенційна точність не буде досягнута, оскільки фільтр буде пропускати шуми в області пропускання за відсутності вхідного сигналу. В часовій області це проявиться наближенням не лише детермінованої, але і випадкової складової. З іншого боку, базис із спектром

вужчим ніж у сигналу спотворить вхідний сигнал. Похибка наближення сплайном буде значною, а оцінка зміщеною. Таким чином спектри базису та вхідних даних мають бути узгоджені, як мінімум за шириною області пропускання.

Залишки (різницю між вхідними й вихідними даними фільтра)  $e = Y - S$  можна отримати з допомогою матриці  $M = I - L$  - оператора ортогонального проектування. Рядки матриці  $M$  також можна розглядати, як коефіцієнти нерекурсивного фільтра верхніх частот, ортогонального до попереднього. Сума сигналів цих двох фільтрів утворює вхідний процес. В контексті виділення детермінованої складової з вхідних даних останній фільтр практичного значення немає. Проте він відіграє певну роль у системах стиснення даних з утратами та у вейвлет аналізі. Це прикладне питання буде детально розглянуте в наступному розділі.

#### 5.4. Реалізація децимуючих МНК сплайн-фільтрів

Реалізація МНК сплайн-фільтрів розглянута в попередньому підрозділі є концептуально дуже простою, але вимагає максимальних схемних затрат. Врахувавши структуру розрахунків можна побудувати більш економні рішення. Розглянемо оцінку параметрів сплайна в дещо іншому порядку  $S = X\hat{A} = X(X'X)^{-1}X'Y = XGB$ .

Звернемо увагу на добуток  $B = X'Y$ . Врахувавши, що стовпці матриці планування є базисними функціями можна стверджувати, що отриманий вектор-стовпець складається з елементів, що є згорткою базисних функцій і вхідних даних. Для нелокальних базисів розрахунок потребує значних затрат, але для локальних базисних сплайнів ситуація зовсім інша. Обсяг розрахунків на кожний елемент матриці  $B$  не більше  $4n$  операцій множення і  $4n-1$  додавання. З точки зору теорії фільтрації ці операції відповідають фільтрації узгодженими фільтрами, що налаштовані на сигнал-базисну функцію.

В результаті перемноження коваріаційної матриці і **B** отримаємо вектор оцінюваних параметрів. Як показано у розділі 3, коваріаційна матриця є симетричною діагональною матрицею. Якщо прийняти фрагменти сплайна однаковими, то коваріаційна матриця визначатиметься ненульовими елементами довільного рядка. Практично, для розглянутих базисів матрицю визначатимуть 4-8 значущих елементів. Відповідно для отримання елемента вектора оцінок необхідно 4-8 операцій множення. Множення на матрицю планування можна не враховувати, якщо прийняти для оцінки точку, що співпадає з вузлом сплайна (для ермітових базисів). Для підрахунку загальної кількості операцій необхідно врахувати множення в кореляторах, що становитиме  $4n [2(d-1)+1]$ , де  $d=4\div 8$ . Зрозуміло, що отримані значення є більшими ніж для реалізації з попереднього підрозділу. Схема розрахунків показана на рис.5.21. Схема є ілюстративною з точки зору цифрової обробки даних і показує яке місце у МНК займають корелятори (узгоджені фільтри). Представивши МНК у вигляді комбінації фільтрів з імпульсними характеристиками - базисними ермітовими сплайнами можна обґрунтувати вибір певних базисів. А саме можна розглядати фільтри як оптимальні. Наприклад узгоджені з відомим сигналом. Звичайно, мова йде про формальну аналогію, оскільки узгоджені фільтри застосовують в задачах виявлення сигналів. Зрозуміло, що такий сигнал мусить бути сплайном, або достатньо точно наближатися сплайном. Оптимальним фільтр буде у випадку, якщо вузли базисних функцій та сигналу-сплайна співпадуть. В інших випадках можна говорити про квазіоптимальність. При довільній схемі розміщення вузлів, спробувавши аналізувати ефективність фільтрації, отримаємо комбінаторну задачу. Отже, для загальних умов можна говорити лише про середні характеристики. Якщо прийняти, що базисні функції сигналу й фільтра однакові, вхідний сплайн-сигнал має фрагменти рівної довжини, що співпадають із довжиною фрагментів базису, то можна оцінити можливі максимальні втрати оптимальності.

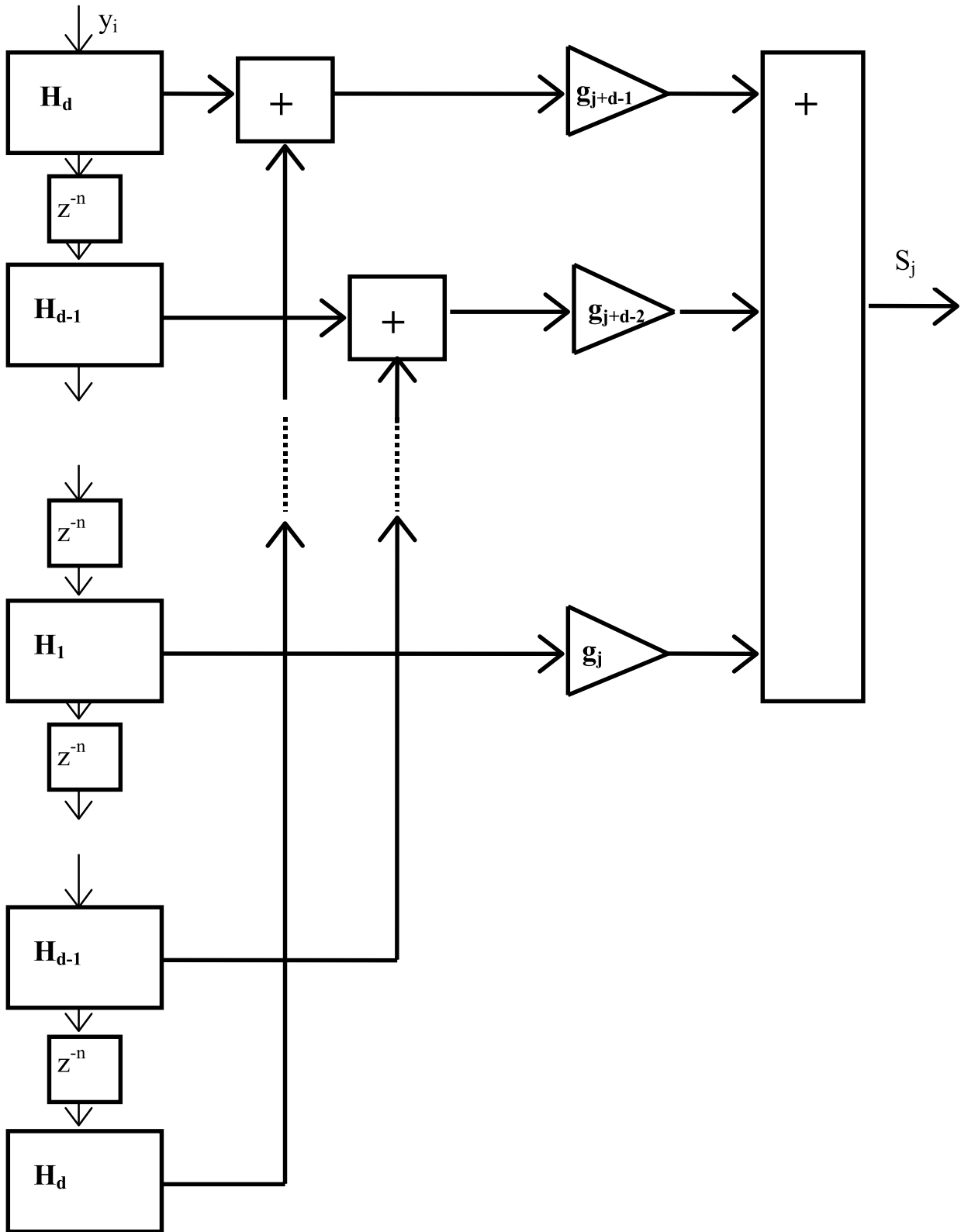


Рисунок 5.21. Схема МНК сплайн-фільтра

Вони становитимуть мінімум функції згортки базисних функцій на проміжку від нуля до половини довжини фрагмента сплайна. За найбільш песимістичних умов максимум мінімального сигналу на виході фільтрів становитиме 69%, 63%, 21% від максимуму, відповідно для алгебраїчного, експоненційного та синусоподібного базисів, котрі розглянуто раніше. Проте вказані вище умови є практично мало реалістичними.

Результат усереднення з вагою  $g_j$  елементів кореляційної матриці легко проаналізувати, якщо вважати, що дисперсія на виході оптимальних фільтрів однакова й рівна  $\sigma^2$ . Тоді очевидно, що результуюча дисперсія рівна

$$\sigma^2 \left( g^2_j + 2 \sum_{i=1}^{d-1} g^2_{j+i} \right), |g_{j+1}| \leq 1, i = \overline{0, d-1}. \quad (5.4)$$

Це дозволяє порівнювати загальну ефективність системи з ефективністю окремого фільтра. Якщо потрібна лише загальна оцінка ефективності, краще скористатися стандартним підходом МНК, через коваріаційну матрицю. Зокрема для кубічного ермітового сплайна наближену оцінку ефективності за умов однаковості фрагментів сплайна можна отримати аналітично.

Вузли сплайна розміщені на регулярній сітці  $t_{j+1} = t_j + h$ . Спостереження також утворюють регулярну сітку, кратну сітці вузлів  $t_1 = t_j$ ,  $t_{i+1} = t_i + q$ ,  $q = h/N$ . Значення сплайна в  $i$ -й точці на відрізку сплайна розраховується як

$$S(x_i) = A_{j-1} \varphi_{j-1}(x_i) + A_j \varphi_j(x_i) + A_{j+1} \varphi_{j+1}(x_i) + A_{j+2} \varphi_{j+2}(x_i), \quad (5.5)$$

де  $A_j$  - значення сплайна в  $j$ -му вузлі;  $\varphi_i$  - локальна функція форми.

З врахуванням характеру функції форми запишемо:

$$S_i = A_{j-1} h1_i + A_j h2_i + A_{j+1} h3_i + A_{j+2} h4_i, \quad (5.6)$$

В точках  $t_i$  спостерігаємо значення вхідного процесу  $y_i$ . Оцінюватимемо по цими даним параметри сплайн-моделі за методом найменших квадратів. Задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь  $\mathbf{A} = (\mathbf{P}'\mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}'\mathbf{Y}$ .

Матриця планування  $\mathbf{P}$  є блочно - діагональною з однаковими блоками розмірності  $4 \times N$ . Елементи матриці рівні:

$$h1_i = -\frac{1}{2N^3}(i^3 - (2N + 3)i^2 + (N^2 + 4N + 3)i - N^2 - 2N - 1), \quad (5.7)$$

$$h2_i = \frac{1}{2N^3}(3i^3 - (5N + 9)i^2 + (10N + 9)i - 2N^2 - 5N - 3),$$

$$h4_i = \frac{1}{2N^3}(i^3 - (N + 3)i^2 + (2N + 3)i - N - 1),$$

$$h3_i = 1 - h1_i - h2_i - h4_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & h1_N & h2_N & h3_N & h4_N & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h1_1 & h2_1 & h3_1 & h4_1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h1_2 & h2_2 & h3_2 & h4_2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h1_N & h2_N & h3_N & h4_N & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & h1_1 & h2_1 & h3_1 & h4_1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & h1_2 & h2_2 & h3_2 & h4_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Матриця  $\mathbf{C}=\mathbf{P}'\mathbf{P}$  симетрична, семидіагональна, що повністю визначається 4-ма елементами. Врахувавши [126]

$$\sum_{k=1}^N k^N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N C_{N+1}^k (n+1)^{N+1-k} B_k, \quad (5.9)$$

де  $B_k$  - числа Бернуллі,

отримаємо:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{171N^6 + 14N^2 + 25}{210N^5}, \\ c_1 &= \frac{71N^6 - 21N^2 - 50}{560N^5}, \\ c_2 &= -\frac{N^6 - 1}{28N^5}, \\ c_3 &= \frac{3N^6 + 7N^2 - 10}{1680N^5}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Обернена матриця  $C^{-1}$  є кореляційною матрицею похибок оцінки параметрів моделі при дисперсії вхідних даних рівній одиниці.  $C^{-1}$  симетрична матриця, діагональні елементи якої є дисперсією оцінок у відповідних вузлах, а інші елементи характеризують попарну кореляцію похибок в оцінках. Оскільки сплайн є локальною функцією, то значна кореляція спостерігатиметься між чотирма найближчими вузлами. Тоді матрицю з достатньою для технічних застосувань точністю вважатимемо семидіагональною. Позначимо симетричну семи діагональну матрицю  $G \approx C^{-1}$

$$G = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Елементи матриці рівні: (5.12)

$$\begin{aligned} g_0 &= 3360 * N^5 (192850731 * N^{18} + 55913802 * N^{14} + 115162185 * N^{12} + \\ & 3878203 * N^{10} + 14380030 * N^8 + 12237164 * N^6 + 243285 * N^4 + 338100 * N^2 + 132500) / Q; \\ g_1 &= -(5880 * (19420479 * N^{18} - 2218407 * N^{14} - 8370390 * N^{12} - 936523 * N^{10} - \\ & 3897820 * N^8 - 3646849 * N^6 - 118790 * N^4 - 166700 * N^2 - 65000)) / Q; \\ g_2 &= (94080 * (516906 * N^{18} - 34383 * N^{14} - 480300 * N^{12} + 7448 * N^{10} - 100 * N^8 - \\ & 23671 * N^6 + 4900 * N^4 + 6700 * N^2 + 2500)) / Q; \\ g_3 &= - (6720 * (2083527 * N^{18} - 109221 * N^{14} - 3790200 * N^{12} + 158711 * N^{10} + \\ & 730100 * N^8 + 1005733 * N^6 - 29400 * N^4 - 36750 * N^2 - 12500)) / Q; \\ Q &= 495160052859 * N^{24} + 208167799644 * N^{20} + 432054656280 * N^{18} + \\ & 23505750114 * N^{16} + 87252201960 * N^{14} + 73245219604 * N^{12} + 2902503240 * N^{10} + \\ & 3923029579 * N^8 + 1433754520 * N^6 + 7438200 * N^4 + 4004000 * N^2 + 550000. \end{aligned}$$

Отже,  $g_0(N)$  характеризує ефективність методу при заданій кількості спостережень на одному фрагменті сплайна. Залежність показана на рис.5.22. Порівняйте з рис.5.20.

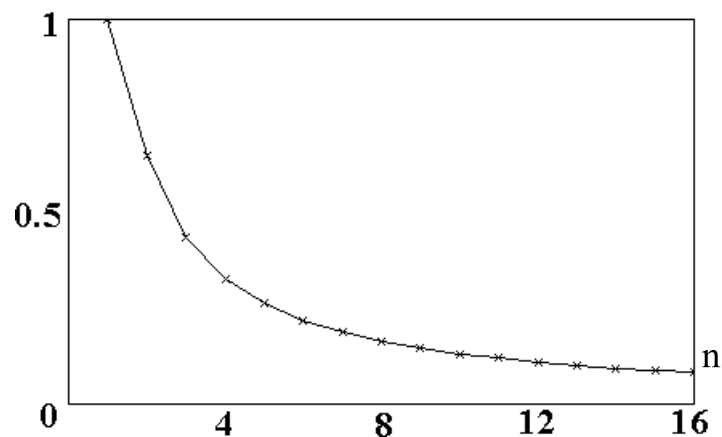


Рисунок 5.22. Ефективність кубічного ермітового МНК сплайн-фільтра

При заданій ширині ненульових елементів кореляційної матриці (7 діагоналей) для оцінки у вузлі використовуються вхідні дані з 6 фрагментів сплайна. Отже загальна кількість даних, що враховуються при розрахунку оцінки становитиме  $6 \cdot N$ . При оцінюванні загальної ефективності потрібно брати до уваги не лише зменшення дисперсії стохастичної складової у вхідних даних, але й динамічну похибку. Нев'язка інтерполяції кубічним ермітовим сплайном становить

$$\frac{\max |f^{(4)}(t)|}{384} h^4,$$

де  $f$  - детермінована основа вхідного процесу.

Отже в порівнянні з оцінюванням із використанням одного фрагмента кубічного полінома отримаємо в 16 разів меншу динамічну похибку для рівної кількості спостережень.

Надмірність схемної реалізації обчислень зображених на рис.5.21 можна значно зменшити, якщо немає необхідності в отриманні нової оцінки з кожним надходженням нового відліку. Указана ситуація є типовою для систем із пониженням частоти дискретизації (децимація). Природним є зниження частоти дискретизації у  $n$  раз (число відліків на фрагменті сплайна). Наступне підвищення



частоти дискретизації легко виконати з допомогою сплайн-інтерполятора з аналогічними базисами.

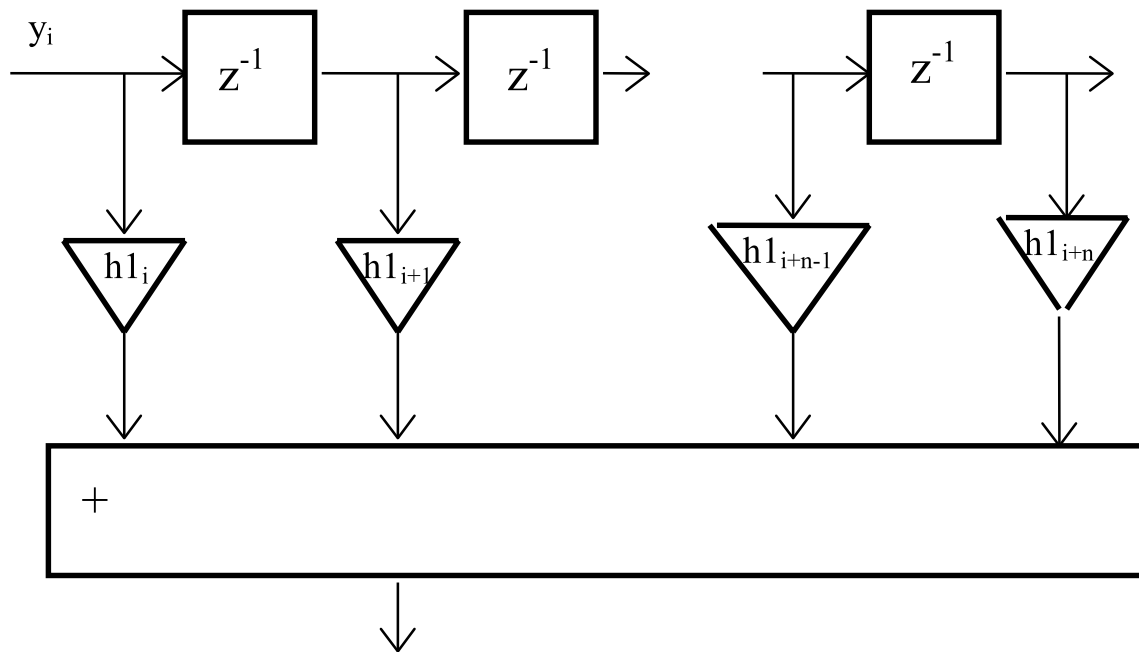


Рисунок 5.23. Один з фрагментів корелятора ( $h1$ )

Оскільки всі корелятори мають однакові імпульсні характеристики, можна обійтися лише одним. Корелятор ділиться на чотири фрагменти відповідно до числа фрагментів базису. Схема фрагмента показана на рис.5.23, а повна схема розрахунків на рис.5.24.

Представлена схема містить мінімальну кількість елементів і її можна легко реалізувати програмно або апаратно. Перехідний процес у такій схемі є аналогічний попереднім схемам. Платою за скорочення елементів є отримання вихідних даних лише на кожний  $n$ -й відлік. Тобто фільтр є децимуючим із пониженням частоти дискретизації в число відліків на фрагменті сплайна. При відсутності або досить низькому рівні шумів, якість фільтра слід оцінювати за методикою саме для децимуючих фільтрів [263]. Особливу увагу слід звернути на глибину ослаблення сигналу, щоб мінімізувати явище накладення частот (елайзінг) [255].

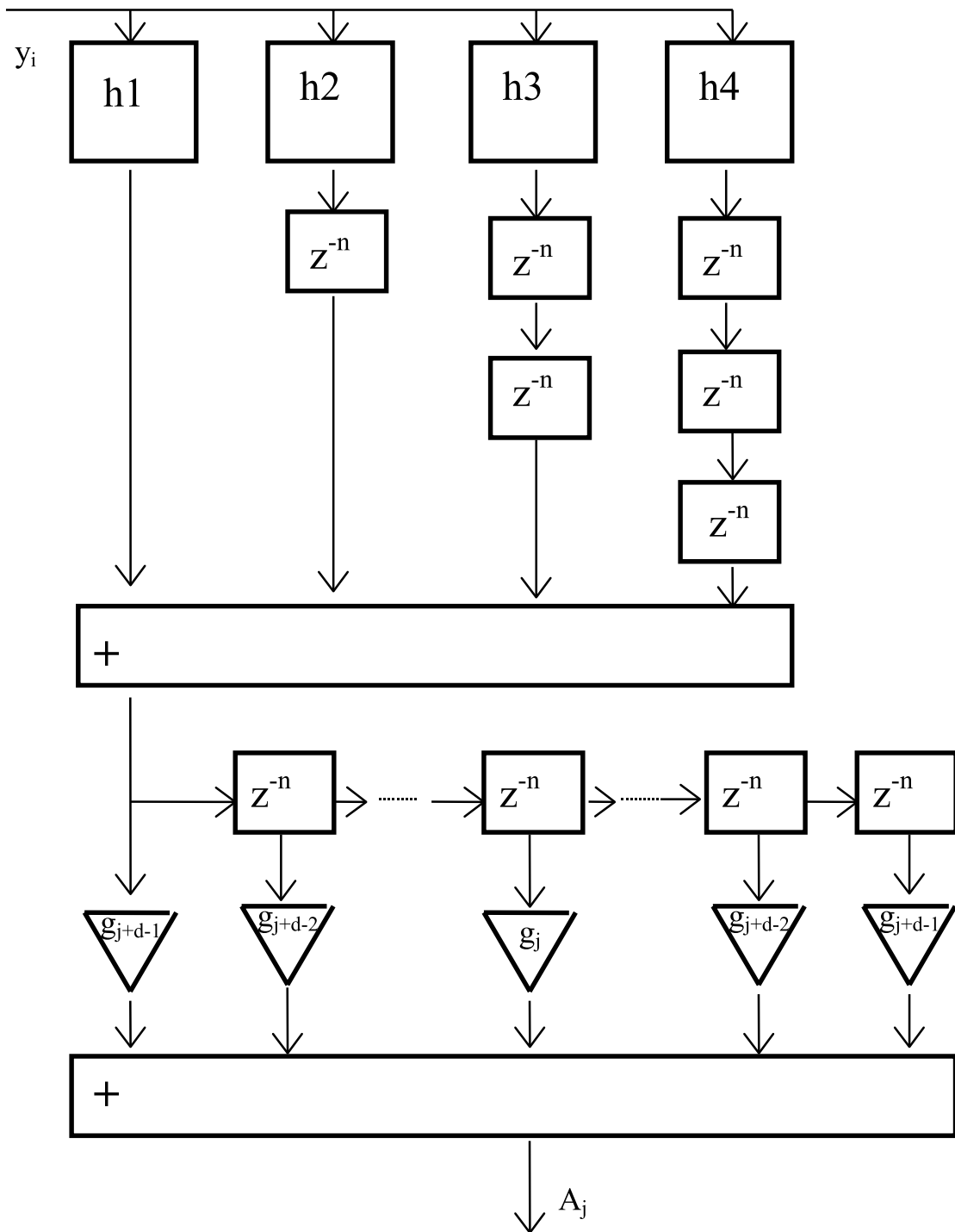


Рисунок 5.24. Сплайн-фільтр зі стисненням даних в  $n$  разів

При необхідності отримання вхідної частоти її відновлюють з допомогою сплайн-інтерполятора. Алгоритмічна реалізація МНК сплайн-фільтрів показана в додатку Е.

### 5.5. Рекурентні алгоритми та засоби отримання МНК оцінок

Розглянемо іншу групу алгоритмів, що дозволяють скоротити обсяги розрахунків. Це рекурентні схеми. Рекурентний МНК (РМНК) алгоритм є загальновідомим [188]. Проте, як і в попередніх випадках, використання сплайнової моделі вносить суттєві особливості в загальну схему розрахунків.

Реалізація класичного РМНК можлива за умови наперед заданої й фіксованої схеми вузлів сплайна. Це диктується фіксованим числом оцінюваних параметрів у класичному РМНК. Умовою початку розрахунків є наявність щонайменше одного відліку на кожному фрагменті сплайна, так щоб число даних було не менше кількості оцінюваних параметрів. Ці умови є досить жорсткими для реалізації у реальному часі, де дані, як правило, надходять послідовно. Однак навіть за цих умов ефективність розрахунків для локальної сплайнової моделі буде вищою, ніж для класичних поліноміальних.

Нехай задані абсциси сітки вузлів сплайна

$$tu_1 < tu_2 < \dots < tu_r.$$

На деякому  $n$ -му етапі (маємо  $n$  відліків даних) розрахунків маємо матриці МНК

$X_n$  - матриця планування ;

$$C_n = X_n^* X_n ; B_n = X_n^* Y_n ; \quad (5.13)$$

$G_n = C_n^{-1}$  - коваріаційна матриця;

$A_n = C_n^{-1} B_n$  - вектор оцінок.

Доцільно розрахунок починати з матриць ( $n=r$ ):

$$X_r = C_r = G_r = I_r, B_r = Y_r, A_r = Y_r, \quad (5.14)$$

що відповідає точкам даних, абсциси котрих співпадають з абсцисами вузлів сплайна.

Тоді при надходженні наступного відліку даних, уточнені МНК оцінки рівнятимуться

$$A_{n+1} = A_n + sG_n T_{n+1} e \quad (5.15)$$

де

$$e = y_{n+1} - T_{n+1}^* A_n \text{ похибка екстраполяції,} \quad (5.16)$$

$$s = [1 + T_{n+1}^* G_n T_{n+1}]^{-1} \text{ спільний коефіцієнт пропорційності,} \quad (5.17)$$

$$G_{n+1} = G_n - G_n T_{n+1} s T_{n+1}^* G_n, \quad (5.18)$$

$$B_{n+1} = B_n + T_{n+1} y_{n+1}, \quad (5.19)$$

$T_{n+1}^*$  новий рядок матриці планування.

Наслідком локальності базису буде скорочення розрахунків указаних вище матриць. Якщо відлік належить  $j$ -му фрагменту сплайна, то розрахунки зведуться до наступного.

$$e = y_{n+1} - \left( x1_{j-1,n+1} a_{j-1} + x2_{j,n+1} a_j + x3_{j+1,n+1} a_{j+1} + x4_{j+2,n+1} a_{j+2} \right), \quad (5.20)$$

$$s = \frac{1}{(1+u)}, \quad (5.22)$$

де

$$\begin{aligned} u = & x1_{j-1} \left( x1_{j-1} g_{j-1,j-1} + x2_j g_{j-1,j} + x3_{j+1} g_{j-1,j+1} + x4_{j+2} g_{j-1,j+2} \right) + \\ & + x2_j \left( x1_{j-1} g_{j,j-1} + x2_j g_{j,j} + x3_{j+1} g_{j,j+1} + x4_{j+2} g_{j,j+2} \right) + \\ & + x3_{j+1} \left( x1_{j-1} g_{j+1,j-1} + x2_j g_{j+1,j} + x3_{j+1} g_{j+1,j+1} + x4_{j+2} g_{j+1,j+2} \right) + \\ & + x4_{j+2} \left( x1_{j-1} g_{j+2,j-1} + x2_j g_{j+2,j} + x3_{j+1} g_{j+2,j+1} + x4_{j+2} g_{j+2,j+2} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

В останньому виразі і далі опущено індекс  $n+1$  біля складових функцій форми. У векторі оцінок корективи вносяться лише в чотири елементи

$$a_{j-1} = a_{j-1} + s \cdot e \cdot x1_{j-1} \sum_{i=1}^r g_{j-1,i}, \quad (5.24)$$

$$a_j = a_j + s \cdot e \cdot x 2_j \sum_{i=1}^r g_{j,i},$$

$$a_{j+1} = a_{j+1} + s \cdot e \cdot x 3_{j+1} \sum_{i=1}^r g_{j+1,i},$$

$$a_{j+2} = a_{j+2} + s \cdot e \cdot x 4_{j+2} \sum_{i=1}^r g_{j+2,i}.$$

Обсяг зазначених розрахунків можна зменшити, якщо коваріаційну матрицю наближено вважати діагональною (зменшення складових у сумах).

Розглянемо оновлення коваріаційної матриці. Позначимо

$W = G_n T_{n+1}$  матриця - стовпець із чотирма ненульовими елементами,

тоді

$$W^* = T_{n+1}^* G_n, \quad (5.25)$$

$$w_{j-1} = (x 1_{j-1} g_{j-1,j-1} + x 2_j g_{j-1,j} + x 3_{j+1} g_{j-1,j+1} + x 4_{j+2} g_{j-1,j+2}),$$

$$w_j = (x 1_{j-1} g_{j,j-1} + x 2_j g_{j,j} + x 3_{j+1} g_{j,j+1} + x 4_{j+2} g_{j,j+2}),$$

$$w_{j+1} = (x 1_{j-1} g_{j+1,j-1} + x 2_j g_{j+1,j} + x 3_{j+1} g_{j+1,j+1} + x 4_{j+2} g_{j+1,j+2}),$$

$$w_{j+2} = (x 1_{j-1} g_{j+2,j-1} + x 2_j g_{j+2,j} + x 3_{j+1} g_{j+2,j+1} + x 4_{j+2} g_{j+2,j+2}).$$

$$g_{i,k} = \overline{g_{i,k}} - s \cdot w_i \cdot w_k, \quad i = \overline{j-1, j+2}, \quad k = \overline{j-1, j+2}. \quad (5.26)$$

В наведених виразах не враховано відсутність елементів для першого та останнього фрагментів. В зазначених випадках відсутні елементи просто відкидаються (вважаємо їх нульовими).

Звернемо увагу на той факт, що зі значенням відліку безпосередньо зв'язане лише значення похибки екстраполяції. Це дає можливість для фіксованої схеми надходження даних та фіксованої сітки вузлів користуватися попередньо розрахованими значеннями, окрім  $e$ . У цьому випадку загальна схема розрахунків матиме вигляд, показаний на рис.5.25. В регістрах зберігаються значення оцінюваних параметрів сплайна, ці значення використовуються в інтерполяторі

SplInt для розрахунку екстрапольованого значення сплайна. У блок пам'яті Мемо записані значення  $s$  та сум із виразів (5.24). Їх значення вибираються за значенням, або номером відліку.

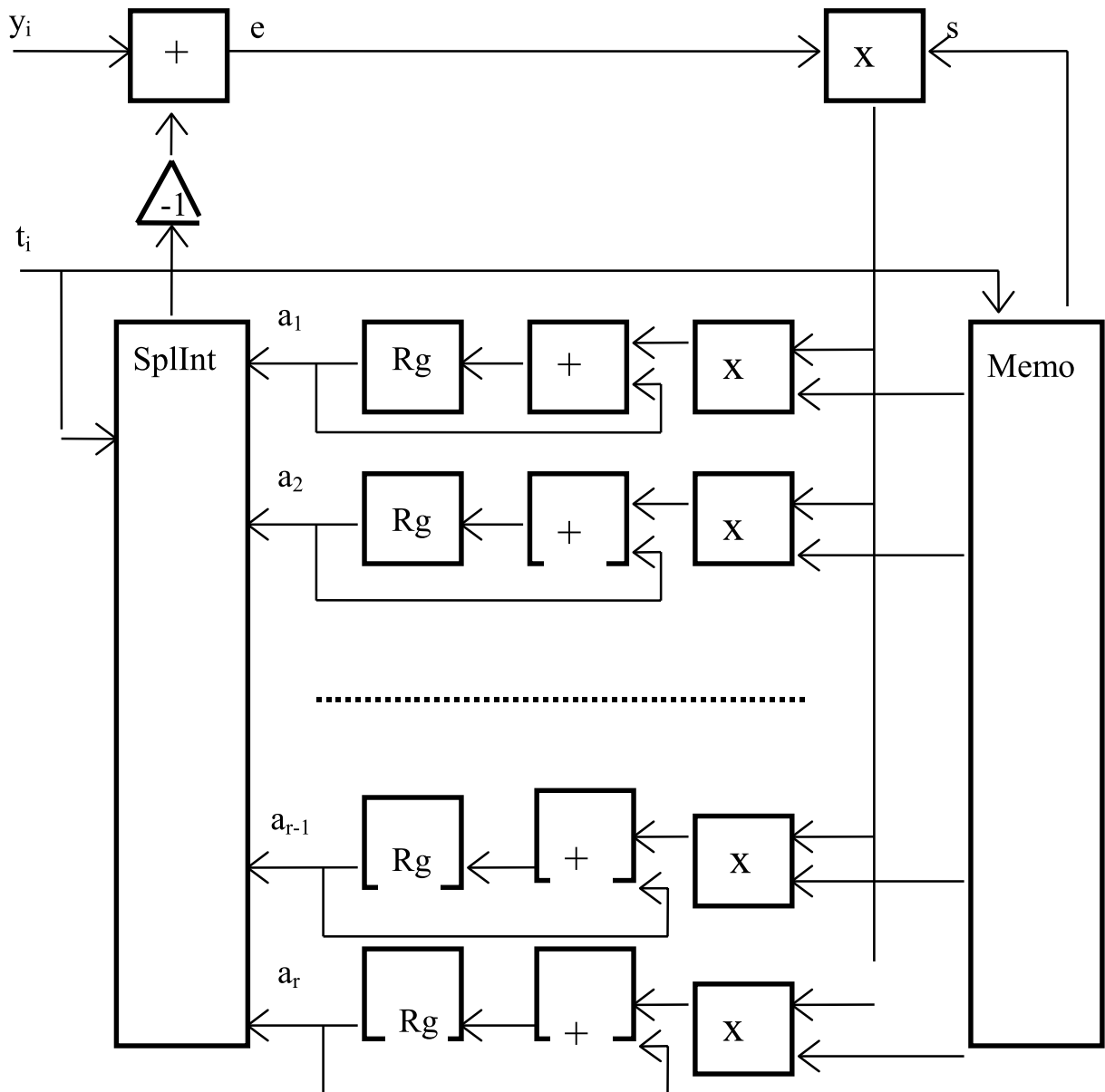


Рисунок 5.25. Схема отримання рекурентних МНК оцінок

Модифікуємо класичний РМНК із врахуванням збільшення числа оцінюваних параметрів у процесі роботи. Розглянемо схему розміщення вузлів та

даних при котрій останній фрагмент є інтервалом екстраполяції і не містить даних. Якщо надходить відлік, що належить останньому фрагменту до сплайна праворуч (або ліворуч) додаватимемо новий фрагмент і відповідно оцінюваний параметр. При додаванні чергового параметра - вузла сплайна матриця планування доповнюється не лише черговим рядком, але і стовпцем так, що має місце

$$X_{n+1} \tilde{A}_{n+1} \approx Y_{n+1}, \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} X_n & Z \\ T_{n+1}^* & p_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ a_{r+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} Y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

де

$\tilde{A}_{n+1}$  розширений (із більшою на 1 розмірністю) вектор параметрів (далі з хвилиною позначимо й інші відповідні матриці);

$T_{n+1}^*$  останній рядок матриці планування без останнього елемента (шириною  $r$ );

$Z$  нульовий стовпець відповідної розмірності ( $n$ );

$p_{n+1}$  останній (правий) елемент матриці планування.

Оскільки базис є локальним, то можна економно реалізувати малорангову модифікацію коваріаційної матриці МНК.

Для

$$C_{n+1} = X_{n+1}^* X_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* X_n + T_{n+1}^* T_{n+1} & T_{n+1}^* p_{n+1} \\ T_{n+1}^* p_{n+1} & p_{n+1} p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & V^* \\ V & m \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

маємо

$$G_{n+1} = C_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & V^* \\ V & m \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} G_{n+1} d + G_{n+1} V^* V G_{n+1} & -G_{n+1} V^* \\ -V G_{n+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

де

$$d = m - V G_{n+1} V^*. \quad (5.31)$$

Розглянемо матрицю - стовпець

$$B_{n+1} = X_{n+1}^* Y_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* Y_n + T_{n+1} y_{n+1} \\ p_{n+1} y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ b_{r+1} \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Тоді

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{G}_{n+1} B_{n+1} = \begin{bmatrix} G_{n+1} B_{n+1} + G_{n+1} V^* V G_{n+1} B_{n+1} d^{-1} - V^* G_{n+1} p_{n+1} y_{n+1} d^{-1} \\ p_{n+1} y_{n+1} d^{-1} - V G_{n+1} B_{n+1} d^{-1} \end{bmatrix},$$

або

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{n+1} d - p_{n+1}^2 y_{n+1} G_{n+1} T_{n+1} + p_{n+1}^2 G_{n+1} T_{n+1} T_n^* A_{n+1} \\ p_{n+1} (y_{n+1} - T_{n+1}^* A_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

інакше

$$\tilde{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} A_{n+1} - p_{n+1} G_{n+1} T_{n+1} \frac{p_{n+1}}{d} (y_{n+1} - T_n^* A_{n+1}) \\ \frac{p_{n+1}}{d} (y_{n+1} - T_{n+1}^* A_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n+1} - L a_{r+1} \\ a_{r+1} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Розкриємо детальніше розрахунки в наведених вище виразах.

$$L = p_{n+1} G_{n+1} T_{n+1} \quad (5.35)$$

$$l_r = x4_{n+1} x3_{n+1} \sum_{j=1}^r g_{r,j}$$

$$l_{r-1} = x4_{n+1} x2_{n+1} \sum_{j=1}^r g_{r-1,j}$$

$$l_{r-2} = x4_{n+1} x3_{n+1} \sum_{j=1}^r g_{r-2,j}$$

$$l_{r-k} = 0, \quad k = \overline{3, r-1}.$$

$$d = x4_{n+1}^2 - x4_{n+1} (x1_{n+1} l_{r-2} + x2_{n+1} l_{r-1} + x3_{n+1} l_r). \quad (5.36)$$

$$a_{r+1} = \frac{x4_{n+1}}{d} [x3_{n+1} a_{r(n+1)} + x2_{n+1} a_{r-1(n+1)} + x1_{n+1} a_{r-2(n+1)}]. \quad (5.37)$$



$$\tilde{G}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} G_{n+1}d + LL^* & -L \\ -L^* & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Стосовно розрахунку матриць  $G_{n+1}, A_{n+1}$  останні розраховуються за виразами (5.15, 5.18), прийнявши  $x_{n+1} = 0$ .

В розглянутому варіанті інтервал екстраполяції необхідний для того, щоб уникнути врахування крайових умов (інакше вектор  $Z$  буде не нульовим). В деяких застосуваннях таке обмеження є прийнятним. Тим більше, що обмеження на ширину останнього фрагмента не накладаються.

Однак існує й інша ефективна схема, котру доцільно застосовувати у схемах з однаковою шириною фрагментів. В даному випадку необхідно, щоб відлік, котрий розпочинає наступний фрагмент потрапив в останній вузол сплайна (у лівий вузол останнього фрагменту). Тоді маємо

$$X_{n+1} \tilde{A}_{n+1} \approx Y_{n+1},$$

$$\begin{bmatrix} X_n & W \\ T_{n+1}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ a_{r+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} Y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

де

$\tilde{A}_{n+1}$  розширений (із більшою на 1 розмірністю) вектор параметрів;

$T_{n+1}^*$  останній рядок матриці планування, елементи котрого рівні 0 окрім  $r-1$  го, що рівний 1;

$W$  стовпець, що містить  $k$  останніх ненульових елементів за числом відліків на останньому фрагменті;

Отже

$$\tilde{C}_{n+1} = X_{n+1}^* X_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* X_n + T_{n+1}^* T_{n+1} & X_n^* W \\ W^* X_n & W^* W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & Q^* \\ Q & h \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$\tilde{G}_{n+1} = \tilde{C}_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & Q^* \\ Q & h \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} G_{n+1}d + G_{n+1}Q^*QG_{n+1} & -G_{n+1}Q^* \\ -QG_{n+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

де

$$d = h - QG_{n+1}Q^*. \quad (5.42)$$

Розглянемо матрицю - стовпець

$$B_{n+1} = X_{n+1}^* Y_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* Y_n + T_{n+1} y_{n+1} \\ W^* Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ b_{r+1} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{G}_{n+1} B_{n+1} = \begin{bmatrix} G_{n+1}B_{n+1} + G_{n+1}Q^*QG_{n+1}B_{n+1}d^{-1} - G_{n+1}Q^*W^*Y_n d^{-1} \\ -QG_{n+1}B_{n+1}d^{-1} + W^*Y_n d^{-1} \end{bmatrix},$$

або

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{n+1}d + G_{n+1}Q^*QA_{n+1} - G_{n+1}Q^*W^*Y_n \\ W^*Y_n - QA_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Враховуючи особливості структури матриць розрахунки зводяться до наступного.

$$q_j = 0, \quad j = \overline{1, r-3}, \quad (5.44)$$

$$q_{r-2} = \sum_k x4_k x3_k,$$

$$q_{r-1} = \sum_k x4_k x2_k,$$

$$q_r = \sum_k x4_k x1_k,$$

$$h = \sum_k x4_k^2. \quad (5.45)$$

Тут підсумок по  $k$  відноситься до точок, котрі належать останньому фрагменту ( $r$ ).

Позначимо матрицю - стовпець

$M = G_{n+1}Q^*$ , її елементи рівняються

$$m_j = q_{r-2}g_{r-2,j} + q_{r-1}g_{r-1,j} + q_r g_{r,j}, \quad j = \overline{1,r}. \quad (5.46)$$

Розрахуємо числові значення

$$u = W^*Y = \sum_k x_k y_k, \quad (5.47)$$

$$v = QA_{n+1} = q_{r-2}a_{r-2} + q_{r-1}a_{r-1} + q_r a_r, \quad (5.48)$$

$$d = h - QM = h - q_{r-2}m_{r-2} - q_{r-1}m_{r-1} - q_r m_r. \quad (5.49)$$

Тоді оцінки при додаванні відліку, що співпадає з останнім вузлом рівні

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{n+1}d + M(v - u) \\ u - v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n+1} - M a_{r+1} \\ a_{r+1} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Розглянемо вирази за котрими розраховуються матриці без врахування розширення розмірності

$$s = [1 + g_{r,r}]^{-1}, \quad (5.51)$$

$$e = y_{n+1} - a_r, \quad (5.52)$$

$$a_{j(n+1)} = \frac{(y_{n+1} - a_{r(n)})g_{r,j}}{1 - g_{r,r}}, \quad j = \overline{1,r}, \quad (5.53)$$

$$g_{i,j(n+1)} = g_{i,j(n)} - \frac{g_{i,r}g_{r,j}}{1 - g_{r,r}}, \quad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,r}. \quad (5.54)$$

Тут індекси в дужках означають (n) попереднє значення, (n+1) наступне значення.

Більш загальний варіант довільного розміщення спостереження на новому фрагменті є очевидним, проте ефективність розрахунків буде нижчою.

Основною проблемою РМНК із нарощуванням числа фрагментів сплайна є зростання у процесі роботи розмірності матриць. Взагалі для подібних алгоритмів існує проблема адекватності моделі при збільшенні числа даних, оскільки це пов'язано з розширенням інтервалу наближення. Тому користуються рекурентними алгоритмами з обмеженою пам'яттю, котрі враховують лише обмежену кількість останніх відліків. Для сплайнових моделей ця проблема не є актуальною, проте приходиться рахуватися зі зростанням обсягів розрахунків. Однак локальність сплайнових базисів дозволяє вирішити цю проблему досить природнім чином. З аналізу розрахункових виразів та спостережень за модифікацією вектора оцінюваних параметрів та коваріаційної матриці слідує, що нові відліки значимо впливають лише на 6-8 останніх параметрів та відповідний правий нижній блок коваріаційної матриці. Тому починаючи з певного числа оцінюваних параметрів (8-10) рядки та стовпці матриць угорі та ліворуч відкидаються, а інші зміщуються. Таким чином рекурентний метод при додаванні вузла працюватиме, як віконний. Комбінований метод частково поєднує переваги віконного й рекурентного методів. Перехідний процес для вікна зменшується до двох відліків (для отримання оцінки у двох вузлах), значення оцінок уточнюються з кожним новим відліком, сітка вузлів може бути довільною. Проте зауважимо, що віконно-рекурентний алгоритм не еквівалентний прямій реалізації з використанням проекційної матриці. Основна відмінність у тому, що у віконній реалізації коваріаційна матриця є незмінною й відповідні оцінки однаково ефективні. В рекурентній схемі коваріаційна матриця й ефективність оцінок дещо змінюється. Фактично для чисто віконної схеми з надходженням кожного відліку зміщується фіксована сітка вузлів, для рекурентної при надходженні відліків усередині фрагмента сітка є фіксованою. Комбінований алгоритм є дещо складнішим у реалізації ніж окремі методи. Однак окремі випадки реалізації також є достатньо ефективними. Так, якщо сітка вузлів і даних є рівномірною, то коваріаційна матриця міститиме однакові рядки і стовпці за винятком нижнього краю праворуч.

В наслідок цього відпадає необхідність у переміщенні елементів коваріаційної матриці.

Узагалі кінцева ефективність реалізації визначатиметься конкретними умовами застосування, котрі визначатимуть вагу таких характеристик як швидкість, обсяг пам'яті, вартість. Розглянуті вище алгоритми є основою, котра відкриває потенційну можливість для ефективного інженерного рішення конкретних задач обробки сигналів.

## 5.6. Висновки

1. Використання ермітових сплайнів дозволяє уникнути проблем з розв'язком інтерполяційних рівнянь для неортогональних базисів. Тому ермітові сплайни найбільше підходять для швидких алгоритмів сплайн-інтерполяції.

2. Сплайн-інтерполятор можна представити у вигляді цифрового фільтра поліфазної структури з імпульсною характеристикою, що є базисним сплайном. З цієї аналогії слідує можливість описувати властивості базисних сплайнів в термінах частотних властивостей цифрових фільтрів.

3. Швидкі алгоритми сплайн-інтерполяції, котрі можна реалізувати апаратно, працюють з рівномірними сітками даних та вузлів сплайна, де інтерполяція зводиться до 4 множень і 3 додавань на точку інтерполяції, що можуть виконуватись паралельно.

4. Процедуру МНК оцінки параметрів сплайна можна розглядати, як лінійне відображення простору даних в простір параметрів з допомогою проекційної матриці, котра є ідемпотентною.

5. Оцінку за МНК сплайнової моделі можна реалізувати у вигляді нерекурсивного цифрового фільтра з імпульсною характеристикою, що є рядком проекційної матриці порядку  $n*m$  ( $n$ -число даних на фрагменті,  $m$ -число значимих елементів в рядку коваріаційної матриці МНК).

6. Щоб зберегти лінійність фазочастотної характеристики МНК сплайн-фільтра доцільно користуватися рядками проекційної матриці, котрі відповідають вузловим точкам сплайна. Такі фільтри мають частотні характеристики близькі до частотних характеристик відповідних сплайнових базисів.

7. Процедуру оцінювання за МНК можна розглядати, як лінійну комбінацію узгоджених з сигналом нерекурсивних фільтрів. Для оптимальної фільтрації сигнал має розкладатися за сплайновими базисами. З цього слідує, що сплайнові базиси слід вибирати з врахуванням вимог оптимальної фільтрації, спираючись на частотні характеристики вхідного сигналу.

8. МНК фільтр можна ефективно реалізувати у вигляді віконного алгоритму за умови, що сітки даних і вузлів сплайна рівномірні і кратні. Такий фільтр виконує стиснення даних в число відліків на фрагменті сплайна.

9. Для МНК оцінок кубічного ермітового сплайна у вікні отримані наближені аналітичні оцінки ефективності, що добре узгоджуються з емпіричними даними.

10. Рекурентний МНК для сплайнової моделі дозволяє отримати ефективні розрахункові вирази, і може бути реалізований апаратно. Однак у класичному вигляді він потребує апріорно заданої сітки вузлів сплайна, що обмежує його застосування.

11. Для сплайнової моделі розроблено рекурентний МНК з нарощуванням фрагментів сплайна в процесі надходження даних, що не потребує апріорного задавання сітки вузлів. Розглянуто два основних варіанти його реалізації. З останнім інтервалом (екстраполяції), що не містить даних, та варіант в котрому абсциса першої точки нового фрагменту співпадає з абсцисою останнього вузла. Отримані вирази свідчать про високу ефективність обчислень.

12. Особливістю рекурентного МНК з нарощуванням фрагментів сплайна є зростання числа оцінюваних параметрів і розмірностей матриць. Цього недоліку можна позбутись врахувавши локальний характер оцінок. Отриманий алгоритм є віконно-рекурентним і поєднує переваги обох підходів.

13. Перевагою локальних сплайнових базисів перед подібними не сплайновими віконними алгоритмами є природне встановлення вікна у часовій області, що випливає з локальних властивостей базисних сплайнів.

## **6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ СПЛАЙН-ТЕХНОЛОГІЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ**

### **6.1. Постановка задачі**

Основним завданням заключного розділу є опис реалізації сплайн-технології та приклади її застосування для обробки конкретних сигналів, а також порівняння результатів з отриманими wavelet методами.

В другому підрозділі описано засоби та технологія сплайн-обробки цифрових сигналів. Вказано структуру та особливості реалізацій розроблених методів та алгоритмів, та послідовність їх застосування.

В третьому підрозділі ставиться завдання створити модельні сигнали з заданими спектральними властивостями і на цих даних практично продемонструвати особливості застосування сплайнових базисів та алгоритмів фільтрації та стиснення даних [293]. Тестову послідовність утворюємо фільтрацією гаусового білого шуму та додаванням некорельованих випадкових даних з гаусовим законом розподілу. Оскільки в даному випадку відома дисперсія випадкової складової, то якість фільтрації характеризуватиме дисперсія залишків, котра повинна бути близькою до заданої. Відома також і детермінована складова. Якість наближення до неї характеризуватиме максимальна нев'язка. Якість відновлення детермінованої складової оцінюватимемо і візуально.

В четвертому підрозділі розглянемо приклад реалізації сплайнових методів фільтрації та стиснення в медичній функціональній діагностиці [281]. Тут особливу увагу звернемо на особливості алгоритмічної реалізації в контексті певного програмного та апаратного середовища.

В п'ятому підрозділі розглянемо застосування рекурентних та адаптивних алгоритмів в задачах обробки даних геологічних та геофізичних вимірювань.



Особливістю вказаних задач є необхідність не лише фільтрації, але й виявлення зональних відмінностей (стратиграфічних меж) [277].

В шостому підрозділі розглянемо обробку доплерівських сигналів метеорологічного радіолокатора. Метою обробки є отримання оцінки спектрів та порівняння результатів отриманими класичним шляхом.

В сьомому підрозділі розглянемо застосування розроблених методів в задачах стиснення цифрових зображень. Мова йтиме про стиснення з певним рівнем втрат. Тому запропонований підхід порівняємо з відомими wavelets методами та JPEG алгоритмом. Для тестування використаємо широко прийняте в подібних роботах зображення "Lena".

Восьмий підрозділ містить основні висновки до розділу.

## **6.2. Інформаційна сплайн-технологія обробки сигналів**

Сплайнова технологія обробки сигналів є сукупністю способів, знань та відомостей про послідовність операцій в процесі ідентифікації та фільтрації цифрових сигналів. Її особливістю є застосування математичного апарату сплайн-функцій, адаптованого до специфічних вимог цифрової обробки сигналів.

Основним середовищем в котрому реалізовано ключові алгоритми технології та концептуальні положення є MatLab та MathCad. Частина програм виконана в алгоритмічній мові "C", та в середовищі Excel на VBA. Відмітимо, що реалізація алгоритмів на мові пакету MatLab є майже ідентичним реалізації на мовах "C", "C++", "Fortran", "Ada" принаймні в трьох реалізаціях компіляторів. Останнє обумовлено наявністю транслятора кодів пакету у вказані мови. Іншою перевагою такої реалізації є наявність в пакетах інших засобів обробки цифрових сигналів (синтез цифрових фільтрів, оптимізація, частотний аналіз, статистичні функції). Структурно комплекс програм розміщено у наступних розділах (каталогах).

BASES - призначений для синтезу сплайнових базисів із заданими частотними характеристиками на рівномірних сітках. Реалізований в середовищі

MatCad і включає приклади синтезу алгебраїчних, тригонометричних, експоненційних, логарифмічних базисів та їх приведення до лагранжівної форми. Включає приклади інтерполяції та апроксимації за МНК. Ілюстрації другого та третього розділів отримані за допомогою реалізованих в ньому можливостей.

**BFSPL** - призначений для синтезу інтерполяційних та МНК сплайн-фільтрів (в тому числі зі стисненням). Реалізований у вигляді \*.m файлів. Функції описані у п'ятому розділі, а отримані з їх допомогою результати представлено в підрозділі 6.3.

**CDF** - призначений для ідентифікації законів розподілу і включає функції побудови сплайна на сітках близьких до оптимальних. Реалізований у вигляді \*.m файлів. Функції описано в підрозділах 4.4, 4.5. Ілюстрації цих підрозділів отримано з їх допомогою.

**COMPRESS** - призначений для ілюстрації та дослідження сплайнових алгоритмів стиснення зображень. Реалізований у вигляді \*.m файлів та окремого exe модуля для проведення експериментів зі стисненням зображень. Опис методу та результати показано в підрозділі 6.7.

**GEOLOG** - приклад застосування технології для ідентифікації геологічних та геофізичних даних. Реалізований у вигляді \*.m файлів.

**MODEL** - приклад застосування результатів ідентифікації вольт-амперної характеристики тунельного діода для моделювання роботи релаксаційного генератора. Реалізований у вигляді \*.m файлів.

**SFFIR** - генератор текстів програм на "C", що реалізують фільтрацію одномірних даних за МНК зі стисненням в задане число раз. Застосовані кубічні ермітові сплайни. В основі реалізації матеріал викладений в підрозділах 3.3, 3.4, 5.2, 5.3.

**SPL** - бібліотека функцій обробки сигналів та демонстраційні програми, що стосуються сплайн-методів. Реалізовано у вигляді \*.m файлів.

**SPLL** - бібліотека функцій на "C" для реалізації сплайн методів інтерполяції та згладжування.

SSPCTR - призначений для ідентифікації спектрів, включаючи методи пошуку оптимального розміщення вузлів. Реалізований у вигляді \*.m файлів. В основі функцій методи описані в 4.2, 4.3.

POLIGR - приклад реалізації технічної системи обробки цифрових сигналів в медичній діагностиці. Сплайни використані для фільтрації - стиснення - інтерполяції. Реалізований у вигляді програми, написаної на "С" та асемблері.

EXCEL - прикладний пакет в середовищі Excel, реалізований на "VBA". Включає задачі інтерполяції та згладжування, в тому числі з пошуком сітки вузлів близької до оптимальної.

Технологія призначена для роботи із гладкими, неперервними сигналами складної форми, відліки яких можуть включати адитивний некорельований шум. В рамках технології вирішуються питання синтезу алгоритмів та засобів (цифрових фільтрів) для інтерполяції, фільтрації, згладжування, оцінювання параметрів сигналів.

Інформаційна сплайн-технологія описана в стандарті IDEF3 [34,59,60,61,62,63], що призначений для моделювання технологічних процесів. Діаграма опису послідовності етапів верхнього рівня показана на рис.6.1.

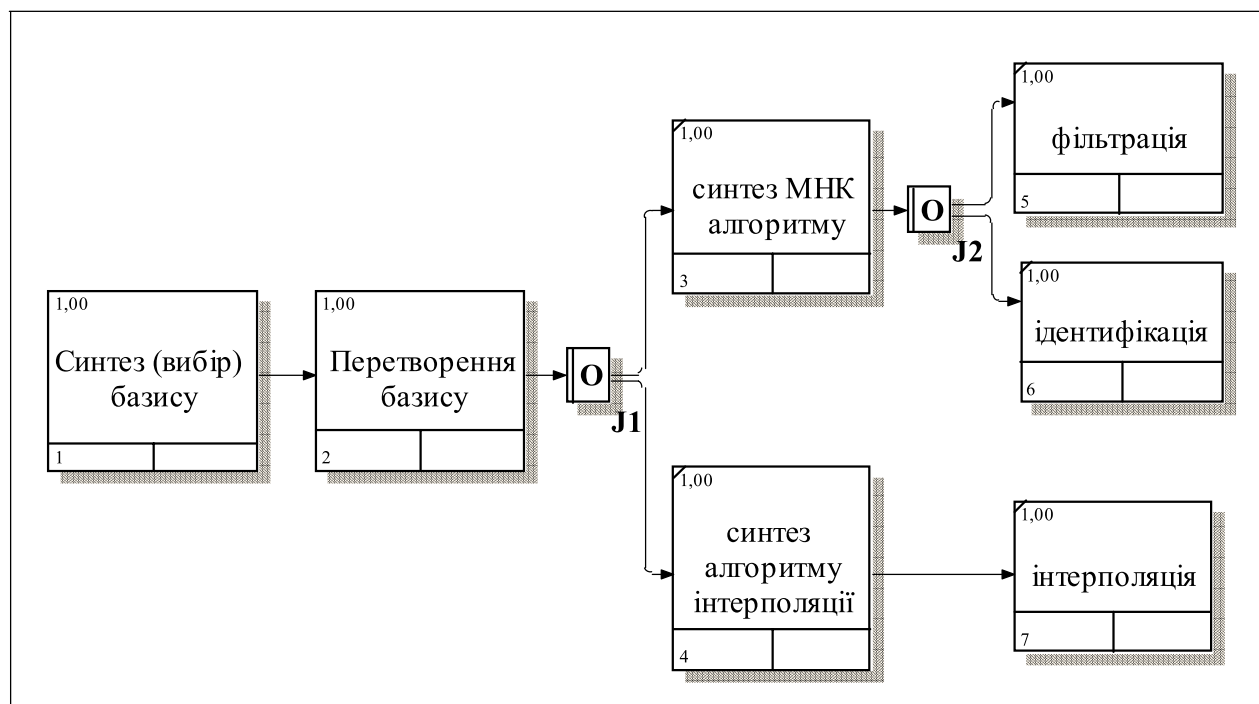


Рис.6.1. PFDD діаграма інформаційної сплайн-технології

Маємо наступний технологічний цикл (в дужках позначатимемо номери блоків на діаграмах). Синтез (або вибір) базисного сплайна (1). Декомпозиція етапу показано на рис.6.2. Необхідно виконати детальний аналіз апріорної інформації про сигнал (9). Це інформація про частотні властивості корисної складової та характер шумової складової. Важливою також є інформація про форму корисної складової та її мінливість. Так у випадку реографічних та кардіографічних сигналів досить точно відома форма у нормальному випадку та її зміни при певних патологіях. Отже можна врахувати особливості сигналу в часовій області. У інших випадках корисна складова носить переважно випадковий характер (електроенцефалографічні сигнали, фонографія, геофізичні сигнали) і не має певної апріорно відомої форми. В даному випадку краще скористатися частотними властивостями амплітудного чи енергетичного спектрів. Вибір базисного сплайна визначається також конкретними

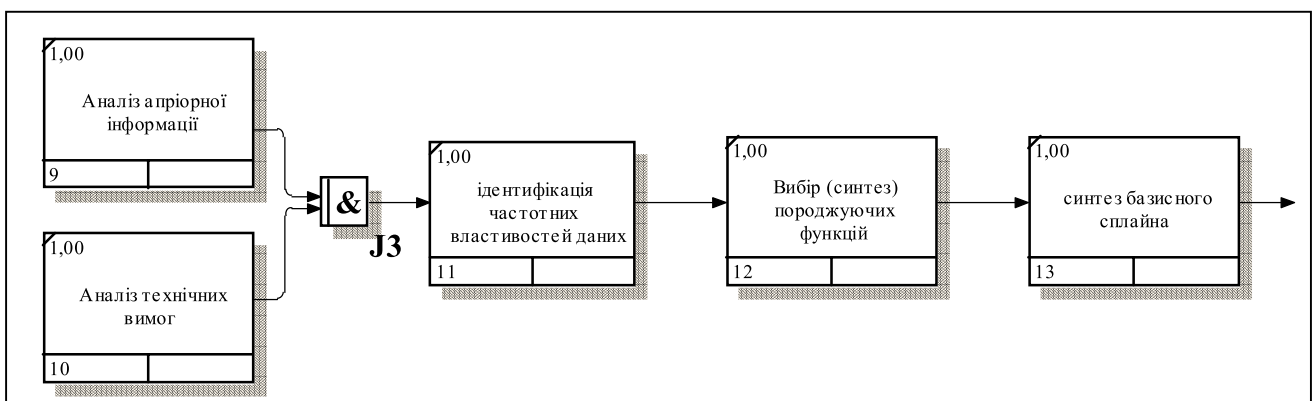


Рис.6.2. Декомпозиція UOV блоку синтезу базису

технічними вимогами до системи обробки даних (10). Вимоги стосуються як власне частини обробки даних так і вимог до підсистеми збору даних. Зокрема важливою є можливість зміни частоти дискретизації. Основною метою етапів 9,10 є формулювання характеристик якості алгоритмів обробки (підрозділ 2.6) та виявлення суттєвої апіорної інформації про сигнал. Якщо наявної апіорної інформації про частотні властивості сигналу не достатньо, слід виконати ідентифікацію сигналу за наявними вибірками (11) [272,279,287,295]. При цьому можна застосувати алгоритми описані в розділі 3. Для синтезу базисного сплайна необхідно вибрати породжуючі функції (12) у відповідності з характером сигналу

(експоненційний, гармонійний, логарифмічний) та або за відповідністю спектральних характеристик. В останньому випадку задача може зводиться до синтезу імпульсних характеристик відповідних фільтрів. Розрахунок базисного сплайна (13) виконується в аналітичному вигляді (якщо розрахункові вирази досить прості) або чисельно, згідно виразів викладених в другому розділі [273,274,275].

Наступним етапом є перетворення базису (2) [274,278,290]. Цей етап є важливим для задач інтерполяції та у випадках, коли оцінки МНК мають мати той самий зміст що і вхідні дані. В результаті отримуємо ермітів або лагранжів базис за алгоритмами підрозділів 2.6 та 2.7. Для отриманих базисів будемо МНК алгоритм з врахуванням обмежень реалізації (3) [275,281,293,294,297,299,300]. Можливі варіанти вибору: віконний по типу Савицького-Голея, віконний зі стисненням, рекурентний, віконно-рекурентний. Паралельно розробляється алгоритм інтерполяції (4) з аналогічними базисами. Отримані алгоритми застосовуються для обробки даних. Блоки (5-7) включають оцінку характеристик сконструйованих алгоритмів та засобів їх реалізації за важливими для конкретної задачі параметрами на типових вибірках даних. Процес створення алгоритмів та засобів для конкретного практичного застосування може вимагати декількох ітерацій з поверненням до попередніх етапів для задоволення технічних вимог.

Останні кроки є в принципі не залежними і їх набір диктується завданнями обробки сигналів. Типовими є наступні задачі.

Фільтрація сигналів. Мова йде про виділення детермінованої складової з адитивної суміші [281,282,292,296,297,299,300]. Відліки надходять з постійним кроком і є необмеженими по кількості. Паралельно може вирішуватись задача стиснення даних та перетворення вхідної частоти з допомогою інтерполяції.

Ідентифікація сигналів. Основним завданням є встановлення конкретного вигляду детермінованої складової. Тобто отримання оцінок параметрів сплайн-моделі детермінованої складової [277,280,284,285,286,289,291]. Ключове значення для даних задач мають алгоритми побудови сплайна на сітках близьких до оптимальних.

Близькою до попередньої є задача ідентифікації законів розподілу випадкових величин [298,282,283]. В контексті попереднього це може бути встановлення закону розподілу залишків наближення з попередньої задачі, або закон розподілу може мати окремий інтерес. Встановлений закон розподілу застосовується для оцінки достовірності сплайнових моделей (з допомогою бутстреп методу) чи перевірки статистичних гіпотез, що стосуються законів розподілу.

Задача інтерполяції є допоміжною і в тому чи іншому вигляді присутня у всіх попередніх задачах. Спосіб реалізації залежить від вимог прикладної задачі. У вигляді цифрового фільтра чи алгоритмічна, у загальному вигляді.

Технологія побудови системи обробки сигналів є ітераційним процесом, де задоволення вимог конкретного застосування може досягатися за декілька циклів, або не повним циклом. Основною перевагою технології перед традиційною є обґрунтованість вибору базису, що дозволяє формалізувати і автоматизувати цей процес. На всіх етапах обробки застосовується єдиний математичний апарат сплайн-функцій. Особливістю сплайнових алгоритмів є їх швидкісні характеристики та оптимальність сітки вузлів. Нижче показані приклади реалізації технології.

### **6.3. Експериментальне дослідження алгоритмів фільтрації сигналів**

Для дослідження алгоритмів фільтрації формуватимемо тестові сигнали, що є сумою корисного сигналу та випадкової складової. Моделювання [199] виконаємо в середовищі Matlab. Для моделювання корисної складової псевдовипадкові дані  $\xi_i$ , розподілені за нормальним законом (нульове математичне сподівання, одинична дисперсія) фільтруватимемо нерекурсивним фільтром з імпульсною характеристикою  $h_f$ , що є базисним сплайном в В-формі. В результаті отримаємо корельовану послідовність даних  $f_i$  із амплітудним спектром, близьким до спектру

відповідного базисного сплайна. Тестову послідовність  $y_i$  отримаємо додавши до корельованих даних некорельовані дані  $\zeta_i$  з нормальним законом розподілу та нульовим математичним сподіванням і заданою дисперсією  $\sigma^2$ :  $y_i = f_i + \zeta_i$ . Отриману послідовність фільтруємо сплайн-фільтрами і отримуємо вихідну послідовність сплайнових оцінок  $s_i$ .

Для оцінки якості фільтрації аналізуватимемо залишки фільтрації  $e_i = y_i - s_i$ . Якісний фільтр має виділити лише корисну складову  $f_i$ , а залишки міститимуть лише випадкову складову  $\zeta_i$ . Оскільки  $\sigma^2$  відома, то залишки якісної фільтрації матимуть близьке до  $\sigma^2$  значення дисперсії.

Більш тонким показником якості відновлення детермінованого сигналу за наявності шуму є максимальне значення модуля нев'язки наближення  $d = \max_i |f_i - s_i|$ . Звичайно, користуватися вказаними показниками можна лише в умовах моделювання даних, коли відома корисна складова і статистичні характеристики шуму.

Для дослідження візьмемо експоненційний, кубічний, синусоподібний базиси. Експоненційний і кубічний мають близькі частотні характеристики (рис.5.3,5.10). Синусоподібний базис має не характерний для класичних сплайнових базисів вигляд і його частотна характеристика є в області вищих частот (рис.5.3,5.12). Модельний сплайн складатиметься з фрагментів однакової довжини з 32 даними на фрагменті. Досліджуватимемо експоненційний і синусоподібний базиси в класичній В-формі і ермітовій формі. Кубічний розглянемо лише в ермітовій формі. Застосуємо два алгоритми фільтрації. Прямий, з імпульсною характеристикою - рядком проекційної матриці і алгоритм зі стисненням в 32 рази і наступною інтерполяцією. Сформуємо детерміновану складову з амплітудним спектром, ідентичним спектру експоненційного В-сплайна. На рис.6.3-6.12 показані

результати фільтрації однієї з реалізацій різними фільтрами. На рисунках показані детермінована складова  $f_i$  (точки) і відновлена функція  $s_i$  (неперервна лінія).

На рис.6.3-6.7 результати фільтрації нерекурсивним цифровим фільтром з імпульсною характеристикою, що є рядком проекційної МНК матриці (5.3). На рис.6.3 використана В-форма експоненційного базису, на рис.6.4 ермітова форма. Різниця в наближенні візуально практично не помітна. Це є наслідком близькості амплітудно-частотних характеристик. На рис.6.5 результат застосування кубічного ермітового базису. Результат близький до попередніх, що зрозуміло з форми АЧХ (рис.5.3). Відмінним від попередніх є результат використання синусоподібного базису, для якого існує суттєва невідповідність між АЧХ сигналу та базису (рис.5.4).

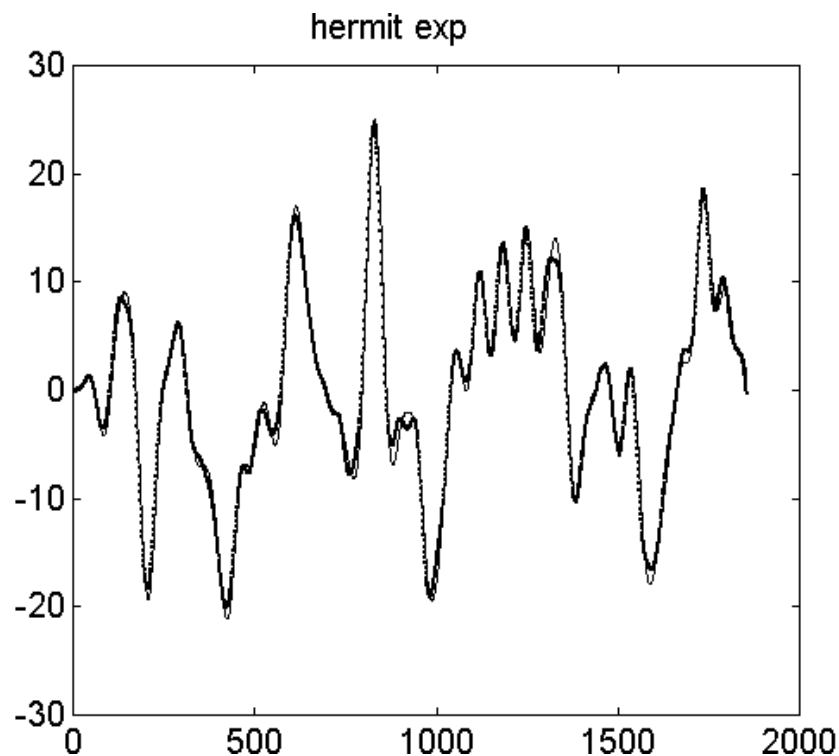


Рисунок 6.3. Ермітів експон. сплайн, експоненційний сигнал



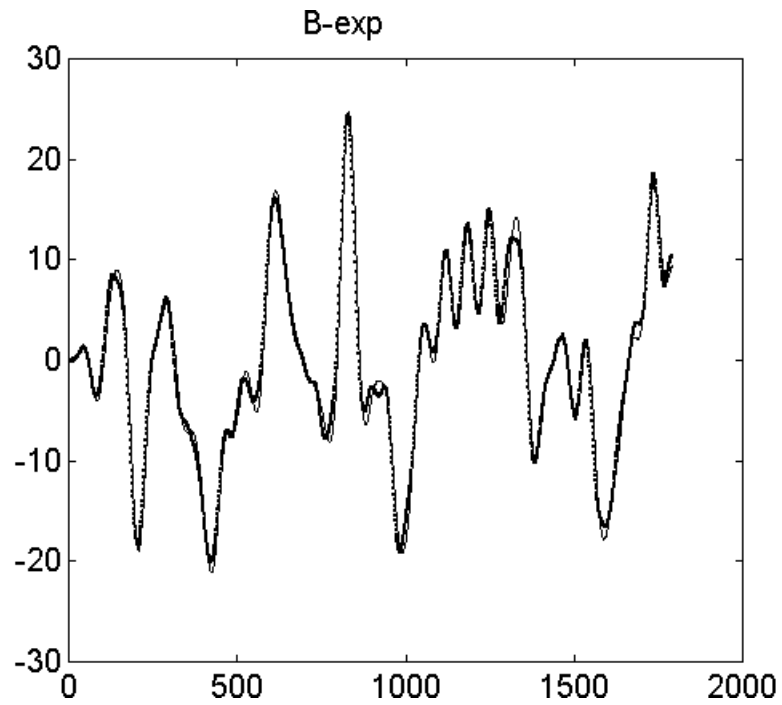


Рисунок 6.4. Експоненційний сплайн, експоненційний сигнал

Результат фільтрації рис.6.7 є явно не задовільним, що є наслідком зазначеної невідповідності характеру даних та моделі - В-форми синусоподібного сплайна.

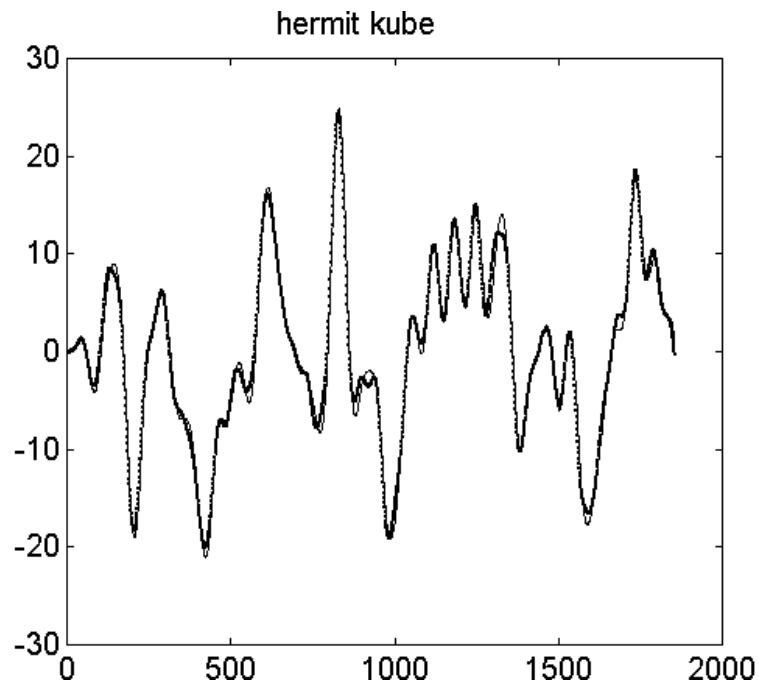


Рисунок 6.5. Ермітів кубічний сплайн, експоненц.сигнал

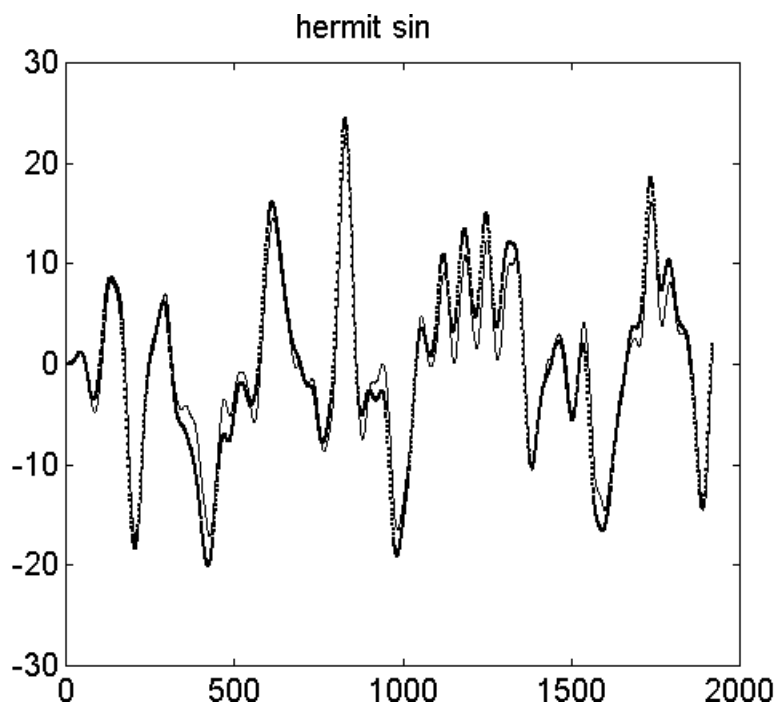


Рисунок 6.6. Ермітів синусоподібний сплайн експон.сигнал

Застосування ермітової форми дає більш прийнятний результат. Це є наслідком розширення спектру в низькочастотну область (рис.5.3). Результати фільтрації показані на рис.6.3-6.7, це МНК оцінки, отримані в припущенні про сплайновий характер даних.

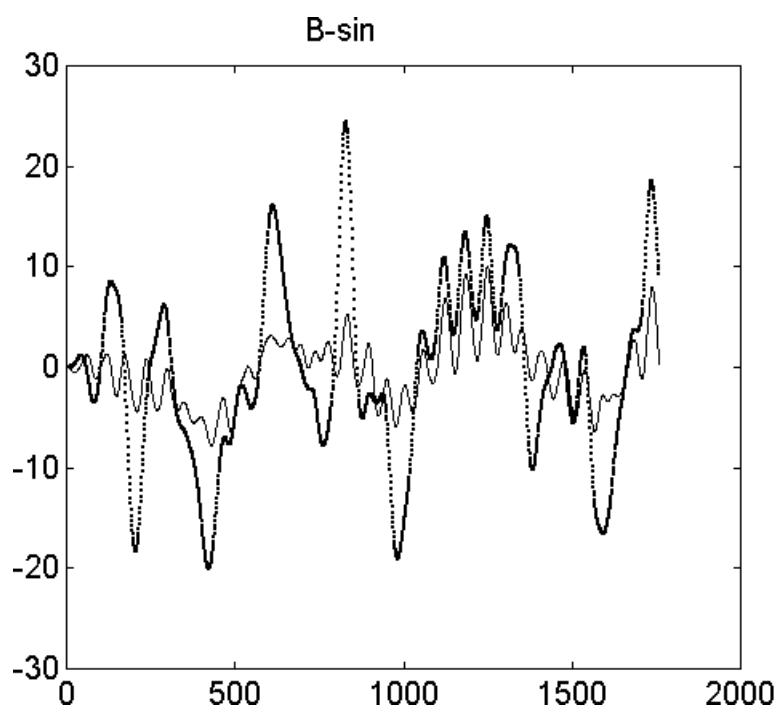


Рисунок 6.7. Синусоподібний сплайн, експоненційний сигнал

На рис.6.8-6.12 показані результати фільтрації іншою групою алгоритмів, що використовують стиснення та наступну інтерполяції 31 відліку. Результатом фільтрації є сплайн-функції, отримані з допомогою МНК оцінок. Тобто результатом фільтрації є оцінки вузлів сплайна в кожному 32-му відліку, а проміжні 31 значення між вузлами отримуємо сплайн-інтерполяцією.

Як бачимо, застосування експоненційного (рис.6.8,6.9) та кубічного (рис.6.10) базисів дають результати близькі між собою та до результатів отриманих з допомогою проекційної матриці (рис.6.3,6.4 та рис.6.5). Зовсім інша ситуація з синусоподібним базисом. Як для ермітової, так і для В-форми результати є неприйнятними (рис 6.11,6.12). Хоча для ермітової форми (рис.6.11) оцінки у вузлах є близькими до отриманих з допомогою проекційної матриці (рис.6.6), але подальша інтерполяція призводить до високочастотного заповнення між вузлами. Отже алгоритм є відносно прийнятним, якщо користуватися лише оцінками у вузлах. Застосування В-форми дає однозначно неприйнятну якість відновлення сигналу.

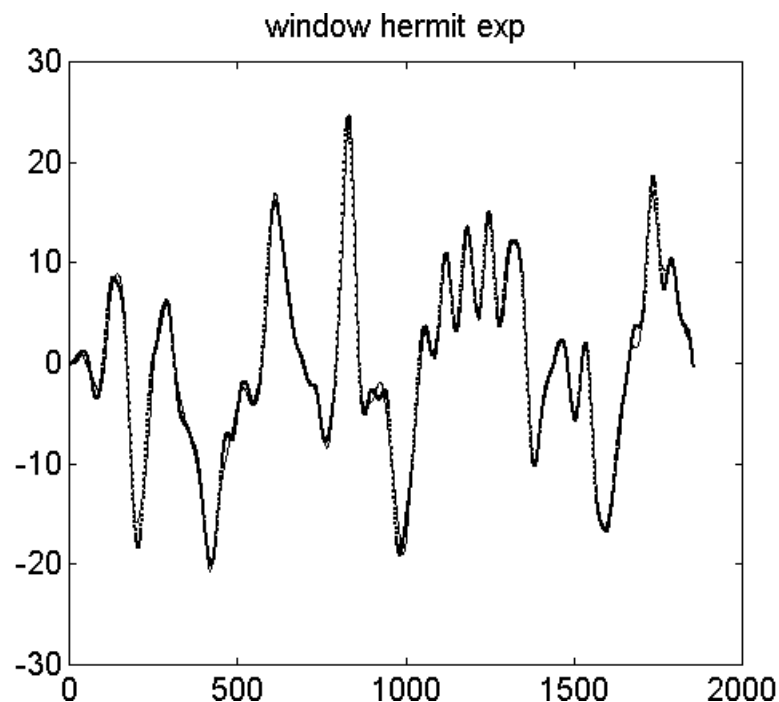


Рисунок 6.8. Ермітів експоненційний сплайн (стиснення), експ.сигнал

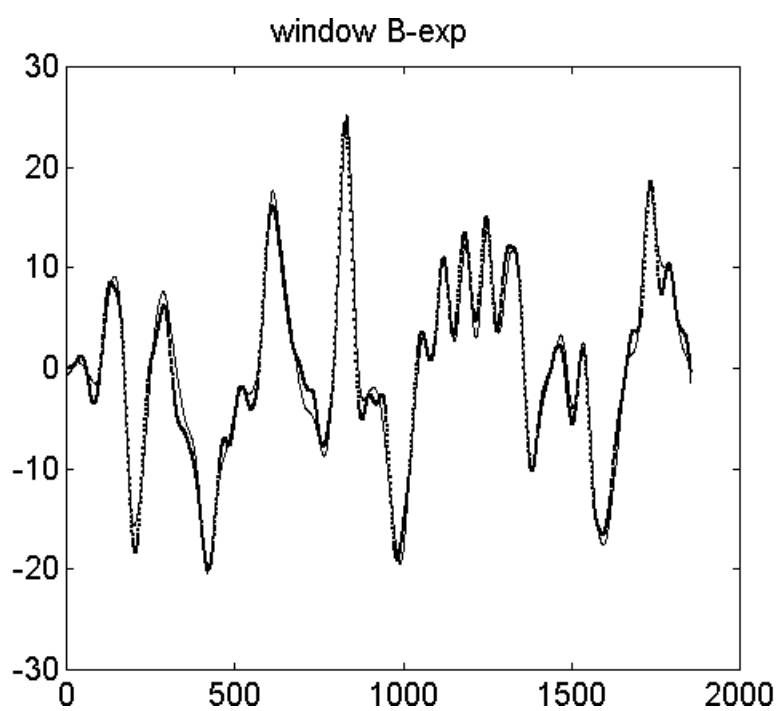


Рисунок 6.9. Експоненційний сплайн (стиснення), експ.сигнал

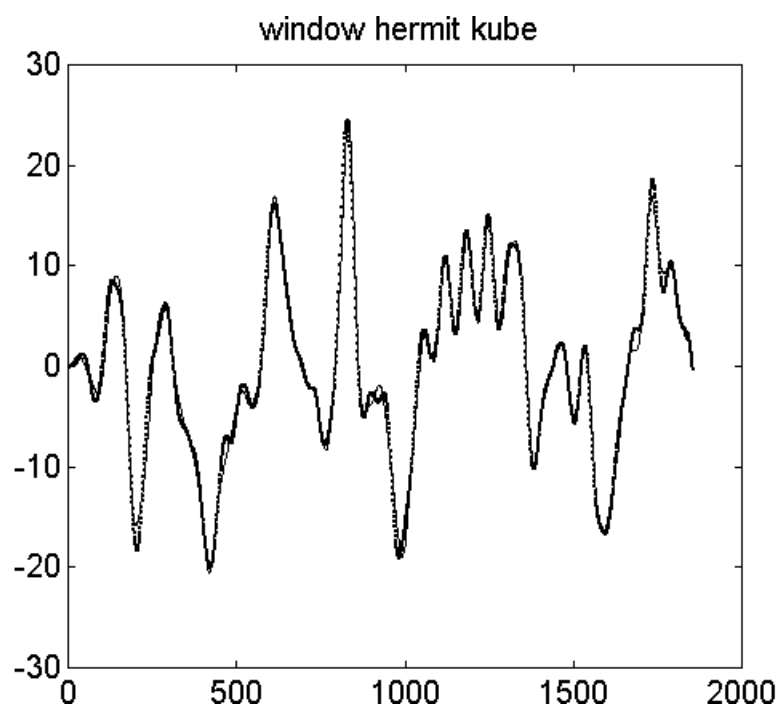


Рисунок 6.10. Ермітів кубічний сплайн (стиснення), експ.сигнал

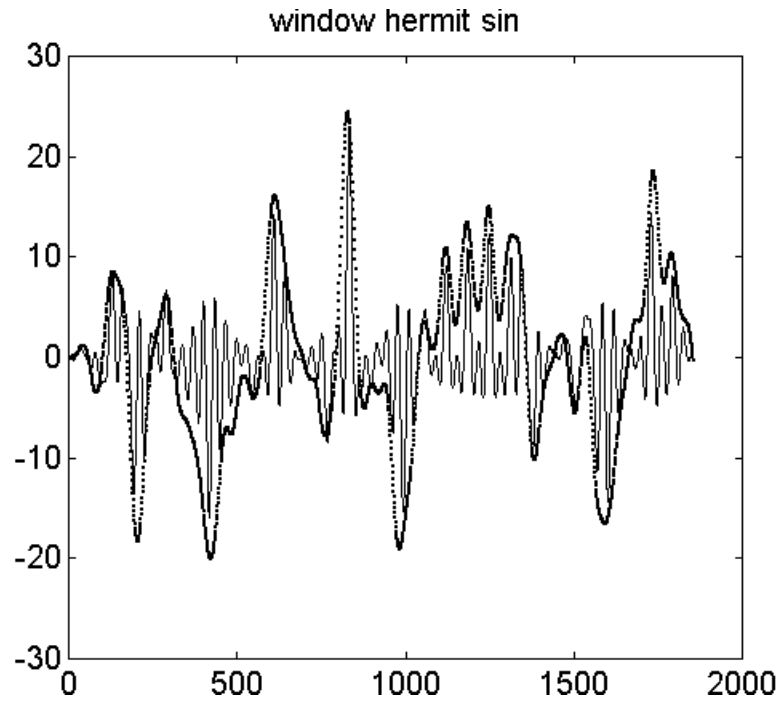


Рисунок 6.11 Ермітів синусоподібний сплайн (стиснення), експ.сигнал

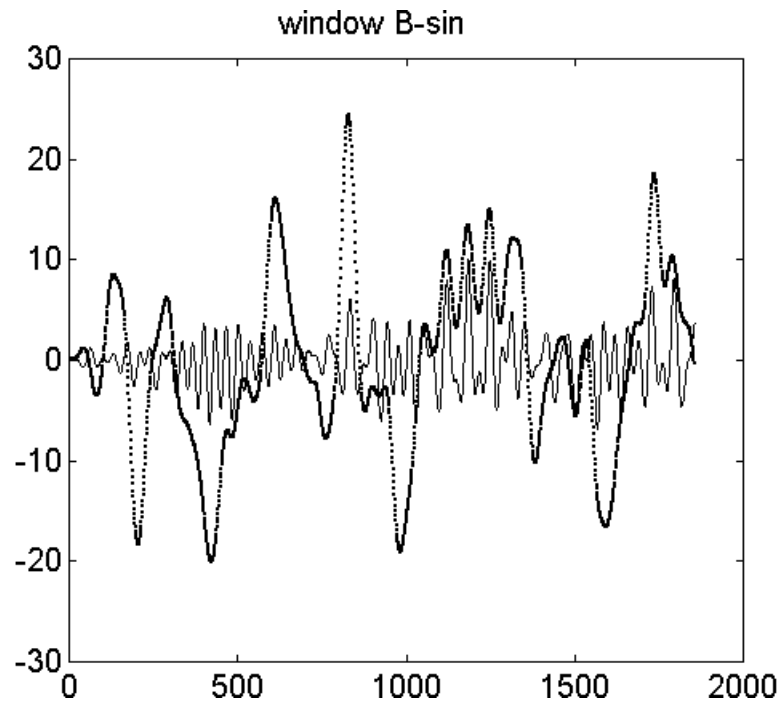


Рисунок 6.12. Синусоподібний сплайн (стиснення), експ.сигнал

Сформуємо іншу корисну складову, з амплітудним спектром, ідентичним спектру синусоподібного В-сплайна. Детермінована основа в цьому випадку є не характерною для класичних сплайнів, сигнал є швидко осцилюючим,

полігармонійним, подібним до звукових сигналів. За таких умов класичні сплайни з низькочастотним спектром неспроможні відновити сигнал. Типовими для кубічних та ермітових сплайнів є результати показані на рис.6.13 та 6.17 (інші є аналогічними, тому демонструвати їх немає змісту).

Зовсім інші результати застосування синусоподібних сплайнів. Алгоритми з застосуванням проекційної матриці дають хороші результати для ермітової (рис.6.15) та В-форми (рис.6.14). Віконний алгоритм зі стисненням і наступною інтерполяцією дає непоганий результат для В-форми (рис.6.18), і дещо гірший для ермітової форми (рис.6.17).

В цілому чітко спостерігається якісна залежність результатів фільтрації від відповідності спектрів детермінованого сигналу та сплайнового базису. Слід особливо відмітити, що в жодному випадку мова не йде про точну відповідність між амплітудно-частотними характеристиками детермінованого сигналу та алгоритму обробки в термінах вхід-вихід, а лише про якісну.

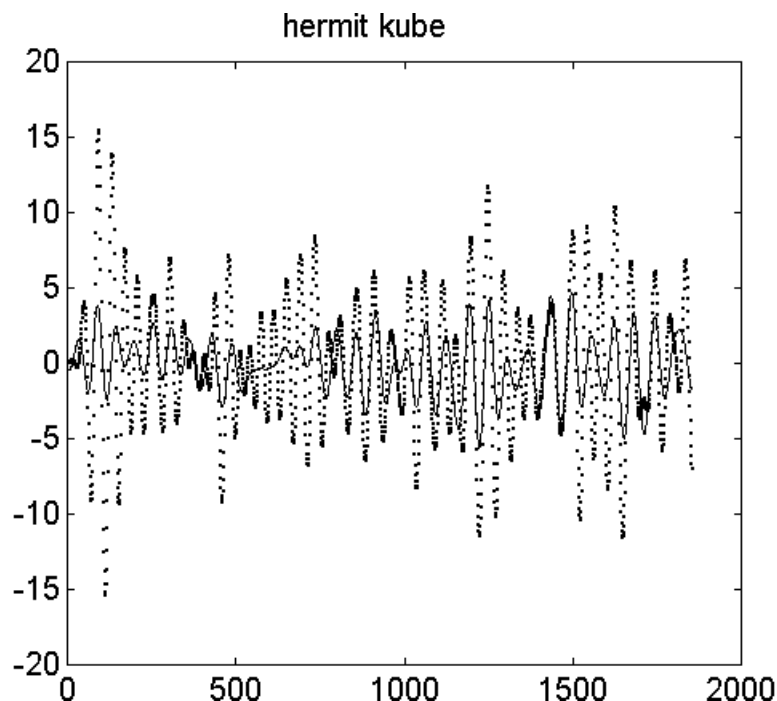


Рисунок 6.13. Ермітів кубічний сплайн, синусоподібний сигнал

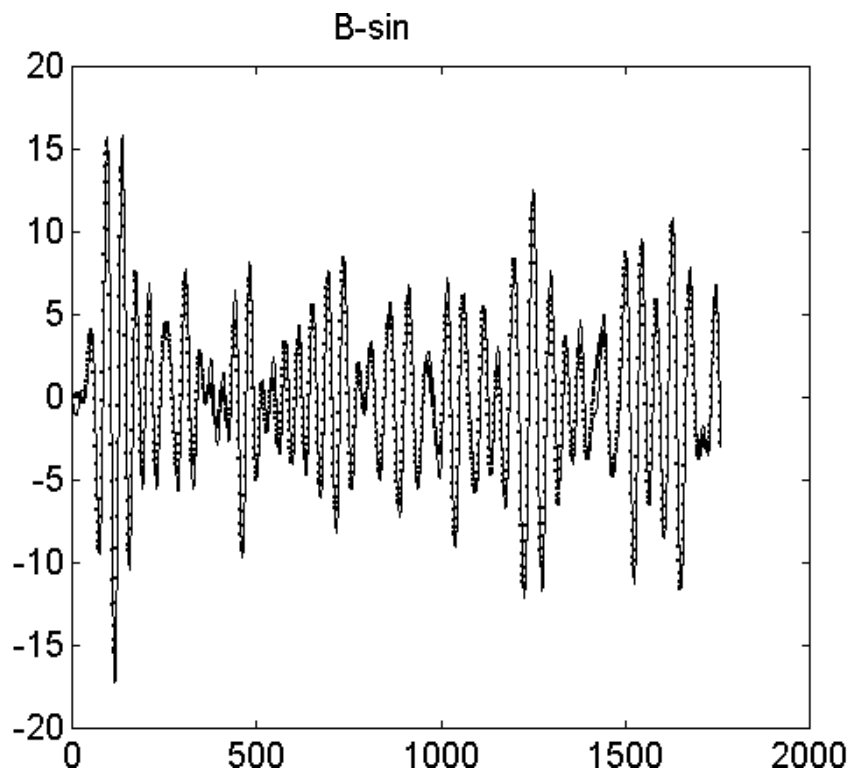


Рисунок 6.14. Синусоподібний сплайн, синусоподібний сигнал

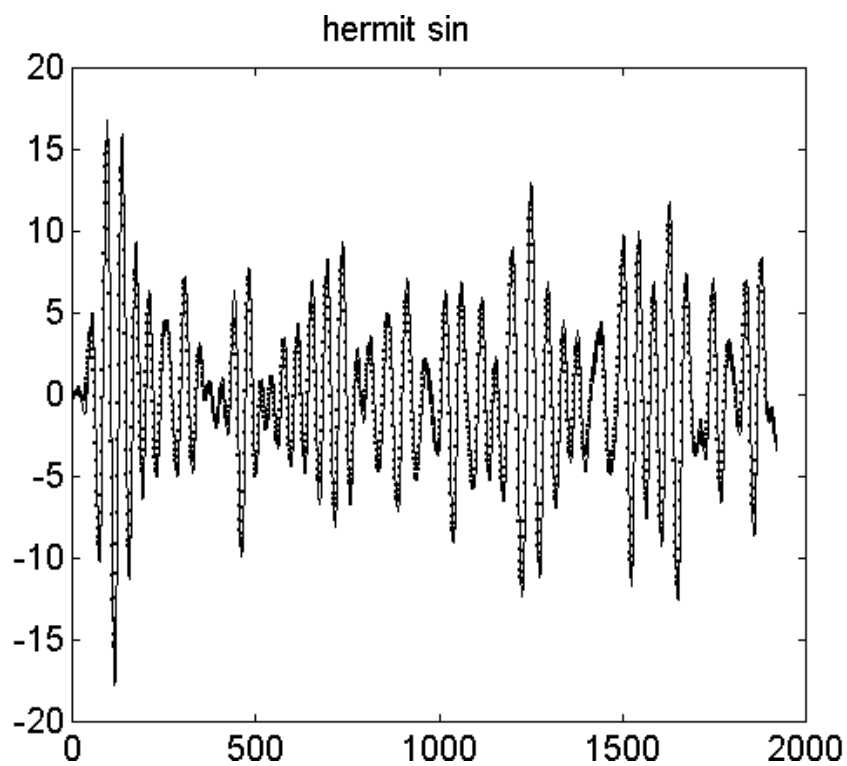


Рисунок 6.15. Ермітів синусоподібний сплайн, синусоподібний сигнал

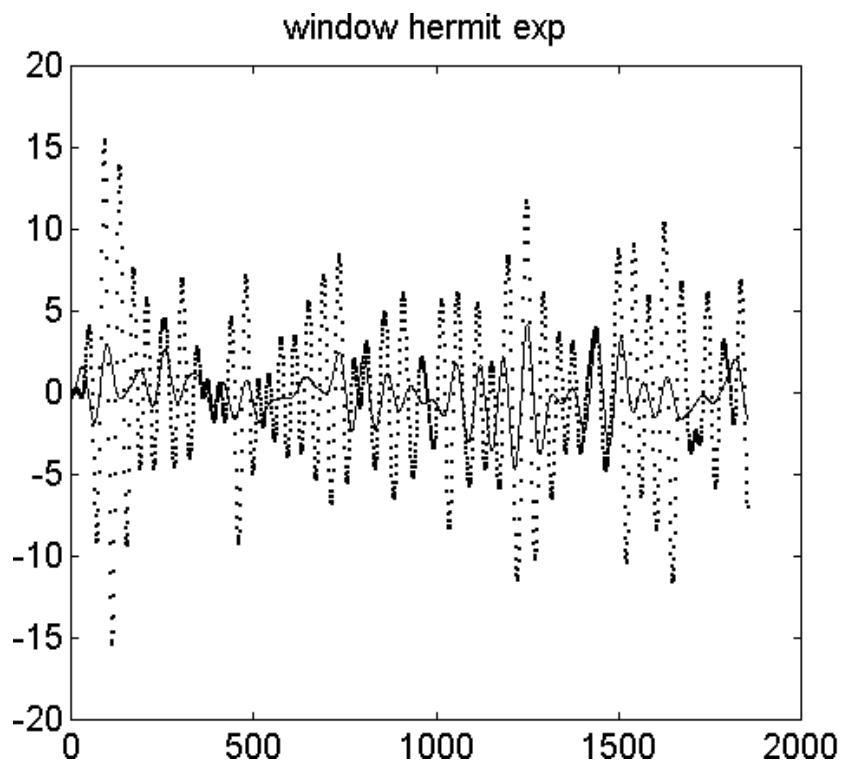


Рисунок 6.16. Ермітів експон.сплайн (стиснення), синусоп. сигнал

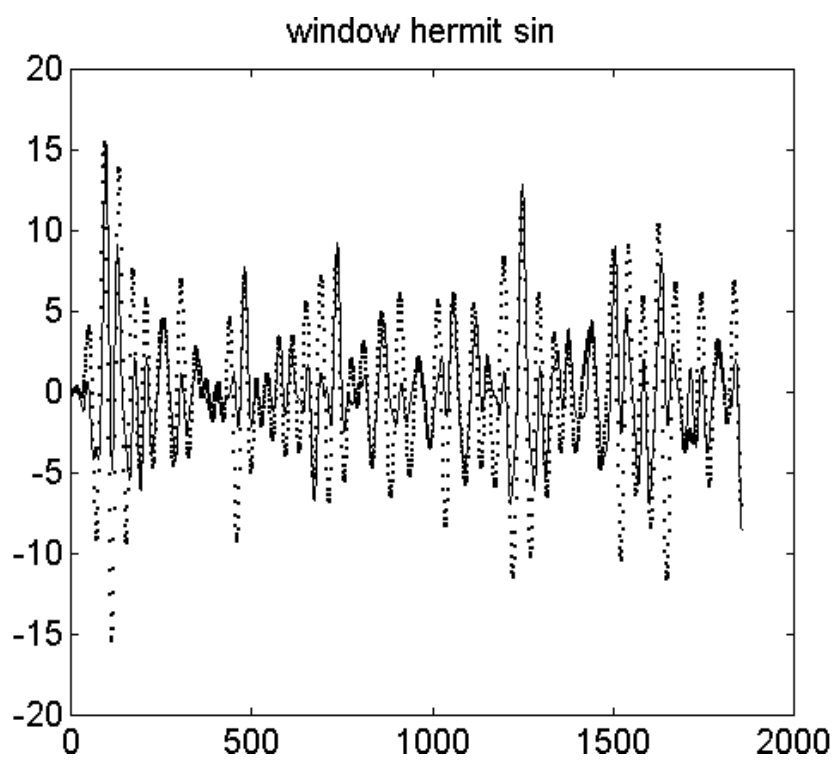


Рисунок 6.17. Ермітів синусоп.сплайн (стиснення), синусоп.сигнал



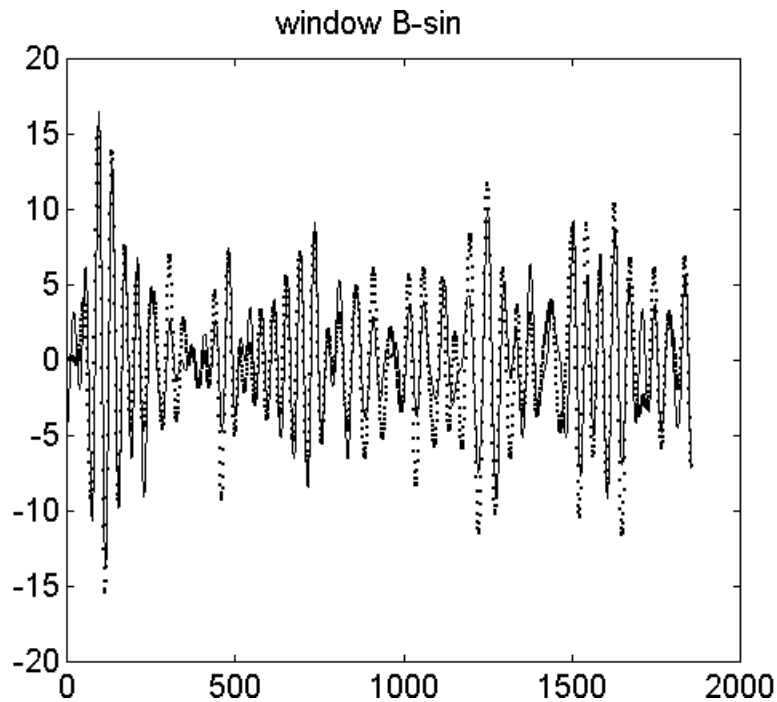


Рисунок 6.18. Синусопод. сплайн, синусоподібний сигнал

В попередніх ілюстраціях показано якісний характер результатів фільтрації на прикладі двох реалізацій. Для більш тонкого, чисельного аналізу виконаємо серію експериментів з різними значеннями СКВ випадкової складової. Кількість експериментів в серії 20 для експоненційної детермінованої складової і 15 для синусоподібної. Випадкова некорельована складова в серіях приймала значення СКВ 1,2,3,4, (число пар рядків таблиць 4) закон розподілу нормальний з нульовим математичним сподіванням. Для чисельної оцінки якості фільтрації розраховувались оцінки значення СКВ в залишках та максимального відхилення від детермінованого сигналу. При розрахунках враховувались зміщення між вхідним та вихідним сигналами. Результати зведені в таблиці 6.3-6.6. В таблицях також показано оцінку СКВ модельної випадкової складової (підкреслено) та СКВ цієї оцінки. Біля номерів стовпців вказано номер ілюстративного рисунка. В таблицях жирним шрифтом виділено випадки незадовільних результатів фільтрації, а курсивом прийнятні. В таблицях зі значеннями СКВ результат вважався якісним,

якщо значення оцінки СКВ залишків мало відрізнялось від оцінки СКВ випадкової складової.

Таблиця 6.1. Оцінка СКВ залишків фільтрації ( $h_f$  - експон. сплайновий базис)

Алгор.→		Проекційна матриця				
Базис →		Експонента		куб	Синус	
Форма →		В	ерміта	ерміта	В	Ерміта
(рис.) →	вип.складова↓	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)	(6.7)
$M[\sigma_e^*]$	<u>0.9955</u>	1.4007	1.1529	1.1289	<b>5.9586</b>	1.8103
$\sigma_M^*$	0.0128	0.0279	0.0364	0.0345	0.5612	0.2351
$M[\sigma_e^*]$	<u>1.9963</u>	1.9609	1.9819	1.9689	<b>5.8074</b>	2.3984
$\sigma_M^*$	0.0328	0.0369	0.0362	0.0358	0.6349	0.1903
$M[\sigma_e^*]$	<u>2.9777</u>	2.8225	2.8621	2.8529	<b>6.5026</b>	3.1713
$\sigma_M^*$	0.0438	0.0469	0.0472	0.0466	0.5260	0.1088
$M[\sigma_e^*]$	<u>3.9929</u>	3.7327	3.7905	3.7829	<b>6.9643</b>	4.0206
$\sigma_M^*$	0.0629	0.0608	0.0578	0.0574	0.5820	0.1150

Продовження таблиці 6.1.

алгор.→	Віконний алгоритм зі стисненням-відновл.				
базис →	експонента		куб	синус	
форма →	В-форма	ермітів	Ермітів	В-форма	ермітів
(рис.) →	(6.9)	(6.8)	(6.10)	(6.12)	(6.11)
$M[\sigma_e^*]$	1.5219	1.7048	1.5081	<b>6.5242</b>	<b>7.4890</b>
$\sigma_M^*$	0.1138	0.1105	0.1126	0.7032	0.7420
$M[\sigma_e^*]$	2.2446	2.3574	2.2354	<b>6.5066</b>	<b>7.3947</b>

$\sigma_M^*$	0.0895	0.0993	0.0886	0.7728	0.8476
$M[\sigma_e^*]$	3.0225	3.1238	3.0158	<b>7.0669</b>	<b>8.0061</b>
$\sigma_M^*$	0.0699	0.0736	0.0688	0.5605	0.5980
$M[\sigma_e^*]$	3.9483	4.0215	3.9421	<b>7.4829</b>	<b>8.4016</b>
$\sigma_M^*$	0.0812	0.0816	0.0806	0.7328	0.8078

Це означає, що алгоритм виконав виділення тренда з випадкової складової близько до заданої моделі В таблицях з оцінками максимального відхилення результат порівнювався з мінімальними значеннями максимального відхилення для всіх алгоритмів представлених в таблиці. Зауважимо, що останній показник не є узгоджений з критерієм оптимальності МНК.

Таблиця 6.2. Оцінка СКВ залишків фільтрації ( $h_f$  - синусоподібний базис)

алгор. →		Проекційна матриця				
базис →		Експонента		Куб	синус	
форма →		В	ерміта	Ерміта	В	Ерміта
(рис.) →	вип.скл.↓	-	-	(6.13)	(6.14)	(6.15)
$M[\sigma_e^*]$	<u>0.9979</u>	<b>3.8062</b>	<b>3.6797</b>	<b>3.7011</b>	1.3628	1.3015
$\sigma_M^*$	0.0159	0.4140	0.3966	0.4004	0.0572	0.0695
$M[\sigma_e^*]$	<u>1.9963</u>	<b>4.1295</b>	<b>4.0294</b>	<b>4.0491</b>	2.0658	2.0716
$\sigma_M^*$	0.0328	0.3880	0.3744	0.3788	0.0500	0.0539
$M[\sigma_e^*]$	<u>2.9777</u>	<b>4.5080</b>	<b>4.4560</b>	<b>4.4729</b>	2.8769	2.9118
$\sigma_M^*$	0.0438	0.4450	0.4068	0.4109	0.0492	0.0532
$M[\sigma_e^*]$	<u>3.9929</u>	<b>5.2519</b>	<b>5.2004</b>	<b>5.2170</b>	3.7553	3.8235
$\sigma_M^*$	0.0629	0.2232	0.2115	0.2141	0.0624	0.0612

Таблиця 6.2 продовження

алгор. →	Віконний алгоритм зі стисненням-відновленням				
базис →	експонента		куб	синус	
форма →	В-форма	ермітів	ермітів	В-форма	ермітів
(рис.) →	-	(6.16)	-	(6.18)	(6.17)
$M[\sigma_e^*]$	<b>4.3616</b>	<b>4.3994</b>	<b>4.3661</b>	<b>3.3601</b>	2.4386
$\sigma_M^*$	0.4467	0.4512	0.4474	0.3091	0.1831
$M[\sigma_e^*]$	<b>4.6703</b>	<b>4.7055</b>	<b>4.6745</b>	<b>3.7413</b>	2.8949
$\sigma_M^*$	0.3891	0.3878	0.3892	0.2716	0.1640
$M[\sigma_e^*]$	<b>4.9826</b>	<b>5.0135</b>	<b>4.9862</b>	<b>4.1832</b>	3.5328
$\sigma_M^*$	0.4694	0.4732	0.4699	0.3029	0.1471
$M[\sigma_e^*]$	<b>5.7169</b>	<b>5.7442</b>	<b>5.7202</b>	4.9773	4.4018
$\sigma_M^*$	0.2518	0.2579	0.2527	0.1508	0.1054

Таблиця 6.3. Оцінка максимуму нев'язки ( $h_f$  - експоненційний базис)

алгор. →	Проекційна матриця				
базис →	експонента		куб	Синус	
форма →	В	ерміта	ерміта	В	Ерміта
(рис.) →	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)	(6.7)
$d^*$	-	2.3053	2.2069	<b>16.5576</b>	4.4978
$\sigma_d^*$	-	0.3216	0.3038	2.6165	0.8580
$d^*$	2.5412	2.5600	2.5011	<b>15.9445</b>	4.7247
$\sigma_d^*$	0.3868	0.3897	0.4019	2.5458	0.9654
$d^*$	2.8037	2.7238	2.6677	<b>17.0270</b>	5.5113
$\sigma_d^*$	0.3763	0.3385	0.2864	2.2326	0.6875
$d^*$	3.1769	3.2345	3.1195	<b>18.2075</b>	6.0245
$\sigma_d^*$	0.4122	0.5132	0.5445	2.4034	0.9164

Продовження таблиці 6.3.

алгор. →	Віконний алгоритм зі стисненням-відновленням				
базис →	експонента		куб	Синус	
форма →	В-форма	ермітів	ермітів	В-форма	Ермітів
(рис.) →	(6.9)	(6.8)	(6.10)	(6.12)	(6.11)
$d^*$	4.0307	4.5349	3.9201	<b>25.7583</b>	<b>23.0963</b>
$\sigma_d^*$	0.5832	0.5617	0.5581	4.3247	3.8252
$d^*$	4.2734	4.7042	4.1597	<b>24.1233</b>	<b>21.7303</b>
$\sigma_d^*$	0.5611	0.6297	0.5461	4.9724	4.4812
$d^*$	4.0210	4.7373	3.9638	<b>26.7219</b>	<b>23.9926</b>
$\sigma_d^*$	0.5818	0.5663	0.5885	2.7630	2.4420
$d^*$	4.7501	5.1135	4.6891	<b>28.1210</b>	<b>25.0467</b>
$\sigma_d^*$	0.5969	0.5116	0.5937	3.9045	3.4041

Таблиця 6.4. Оцінка максимуму нев'язки ( $h_f$  - синусоподібний базис)

алгор. →	Проекційна матриця				
базис →	експонента		куб	Синус	
форма →	В	ерміта	ерміта	В	Ерміта
(рис.) →	-	-	(6.13)	(6.14)	(6.15)
$d^*$	<b>11.7111</b>	<b>11.0755</b>	<b>11.1418</b>	3.3971	2.9361
$\sigma_d^*$	1.6793	1.5761	1.5235	0.3850	0.3575
$d^*$	<b>11.8755</b>	<b>11.2540</b>	<b>11.2116</b>	3.7150	3.5273
$\sigma_d^*$	1.7043	1.7119	1.7437	0.4904	0.5038
$d^*$	<b>11.3576</b>	<b>10.9994</b>	<b>11.0421</b>	3.9589	3.8784
$\sigma_d^*$	1.6211	1.6545	1.6389	0.4481	0.5451
$d^*$	<b>12.1315</b>	<b>11.5615</b>	<b>11.6535</b>	4.2232	4.5938
$\sigma_d^*$	1.7533	1.6500	1.6174	0.4092	0.5350

Продовження таблиці 6.4.

алгор.→	Віконний алгоритм зі стисненням-відновленням				
базис →	експонента		куб	Синус	
форма →	В-форма	ермітів	ермітів	В-форма	Ермітів
(рис.) →	-	(6.16)	-	(6.18)	(6.7)
$d^*$	<b>14.0083</b>	<b>13.8603</b>	<b>13.9779</b>	<b>10.9820</b>	7.1017
$\sigma_d^*$	2.0115	1.9910	2.0084	1.6959	0.9406
$d^*$	<b>13.6101</b>	<b>13.5731</b>	<b>13.5777</b>	<b>11.1605</b>	7.2258
$\sigma_d^*$	1.5531	1.5540	1.5513	1.2778	1.0401
$d^*$	<b>13.7201</b>	<b>13.6328</b>	<b>13.7048</b>	<b>10.7937</b>	7.2517
$\sigma_d^*$	1.7271	1.6658	1.7168	1.2470	0.9586
$d^*$	<b>14.0230</b>	<b>13.8922</b>	<b>13.9963</b>	<b>11.1644</b>	7.4625
$\sigma_d^*$	1.9859	1.9787	1.9846	1.6329	0.8403

Отримані результати показують, що при фільтрації даних з метою відновлення детермінованої складової важливе значення має відповідність АЧХ детермінованої складової та сплайнового базису навіть на якісному рівні.

Як і очікувалось, результати фільтрації у вікні зі стисненням-відновленням вхідної частоти дещо гірші ніж у фільтрів реалізованих з допомогою проекційної матриці. Це пояснюється зростанням дисперсії при інтерполяції з використанням оцінених за МНК значень.

Сплайни можна успішно застосовувати для фільтрації та стиснення не лише низькочастотних (з малим числом осциляцій) функцій, але й для полігармонійних сигналів.

#### 6.4. Система фільтрації та стиснення сигналів у реографічних дослідженнях

Одним з методів функціональної діагностики в медицині є реографічні дослідження кровоносної системи [155]. Суть методу в тому, що вимірюється імпеданс певних фрагментів тіла, що змінюється в залежності від кровонаповнення. Імпеданс вимірюється тетраполярним методом двома каналами з частотами 40 та 70 кілогерц. У вимірюваннях застосовувались реограф та поліграфи П4Ч-02 та П6Ч-02. Реосигнал має складну форму, тонкі деталі якої є інформативними. Умови вимірювання характеризуються наявністю значної кількості перешкод (наведення від електричних приладів, фізіологічні особливості тіла і т.п.) [245]. Для аналізу необхідно отримати похідну від реосигналу, та виявити характерні точки екстремумів та перегину. Паралельно з реосигналом вимірюється електрокардіографічна крива. Завдання полягало в перетворенні даних електронних приладів в цифрову форму та подальшу автоматизацію вимірювання та аналізу з допомогою комп'ютера.

Для занесення даних в комп'ютер використано 10 розрядний 12 каналний АЦП (з аналоговим мультиплексором на вході) з часом перетворення до 40 мікросекунд. Вхідний діапазон перетворення  $-1.25 - +1.25$  вольт. Враховуючи особливості відображення та друку, а також частотний діапазон сигналів частота дискретизації встановлена рівною 1088 Гц. Частотний діапазон корисного сигналу не перевищує 60Гц.

Для зберігання та оперативного відображення даних виділено буфер з 32000 відліків на канал (2 байти на відлік). Таким чином загальний обсяг даних з 4-х каналів становить 256К.

В процесі розробки виявилось три основні проблеми.

1. Необхідність високоякісного згладжування даних з незначними спотвореннями корисного сигналу;

2. Потреба у достатньо зручній та адекватній моделі корисного сигналу для подальшої обробки (диференціювання та аналізу);

3. Необхідність стиснення даних для подальшого зберігання.

Спроби вирішити ці проблеми в рамках класичних підходів виявились безуспішними.

Використання рекурсивних цифрових фільтрів виключалось через спотворення форми корисного сигналу. Нерекурсивні фільтри для задовільного згладжування потребували високих порядків і відповідно значних обчислень.

Вибір прийнятної моделі для апроксимації реограми окрім складної форми ускладнювався значними обсягами даних та мінливістю форми. Безпосереднє диференціювання даних не вдавалося через наявність шумів. Використання аналогового диференціатора з комплекту поліграфа значно знижувало потенційну точність вимірювань.

Застосування для стиснення стандартних архіваторів не дало значимих результатів.

Перерахований комплекс проблем було вирішено із застосування сплайн-функцій. Для фільтрації, апроксимації та стиснення даних був використаний віконний алгоритм описаний в розділі 5.3.

Проведені експерименти із фільтрації та стиснення даних виявили прийнятний коефіцієнт стиснення. Критерій якості в даному випадку був суб'єктивним - враховувалась думка фахівців з аналізу реограм. Стиснення (із відповідною фільтрацією) в 8 разів є недостатнім (рис.6.19), стиснення в 64 рази згладжує важливі для аналізу деталі (рис.6.19). Прийнятними є значення 16-32 рази (рис.6.20). В представленій системі використане стиснення в 16 разів. При цьому враховувалось згладжування також кардіосигналу.

При програмній реалізації алгоритму стиснення довелося враховувати певні технічні особливості розрахунків. Зокрема обмежену розрядність цілих типів даних та виконання алгоритму в цілочисельній арифметиці.



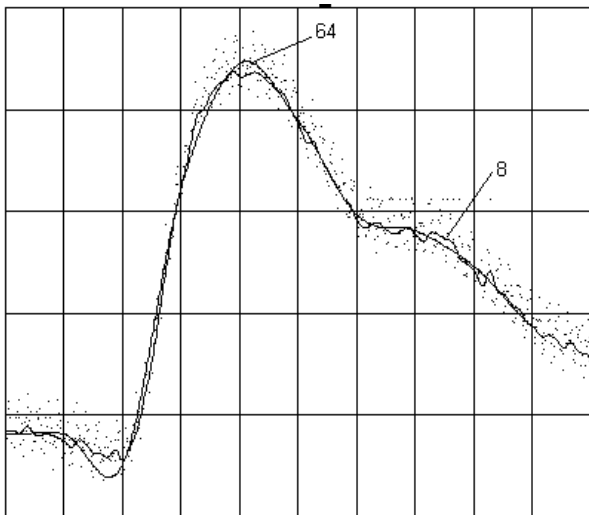


Рисунок 6.19. Реосигнал

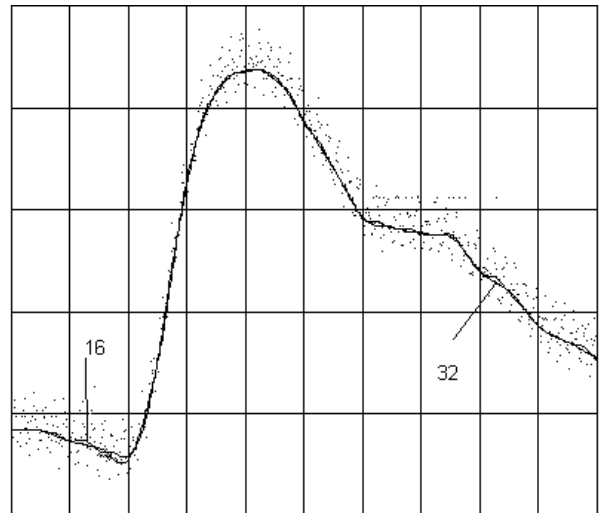


Рисунок 6.20. Реосигнал

В процесі розробки програмного забезпечення вказаної задачі розроблена програма, що генерує текст програми на “С” для фільтрації та стиснення даних в задане число раз з допомогою ермітових кубічних сплайнів. Програма легко модифікується до довільних сплайнових базисів, що складаються з чотирьох фрагментів. Вибір базису відповідно до спектру даних не застосовувався, оскільки сигнал є низькочастотним і застосування ермітового кубічного базису дає хороші результати, прийнятні для практичних цілей.

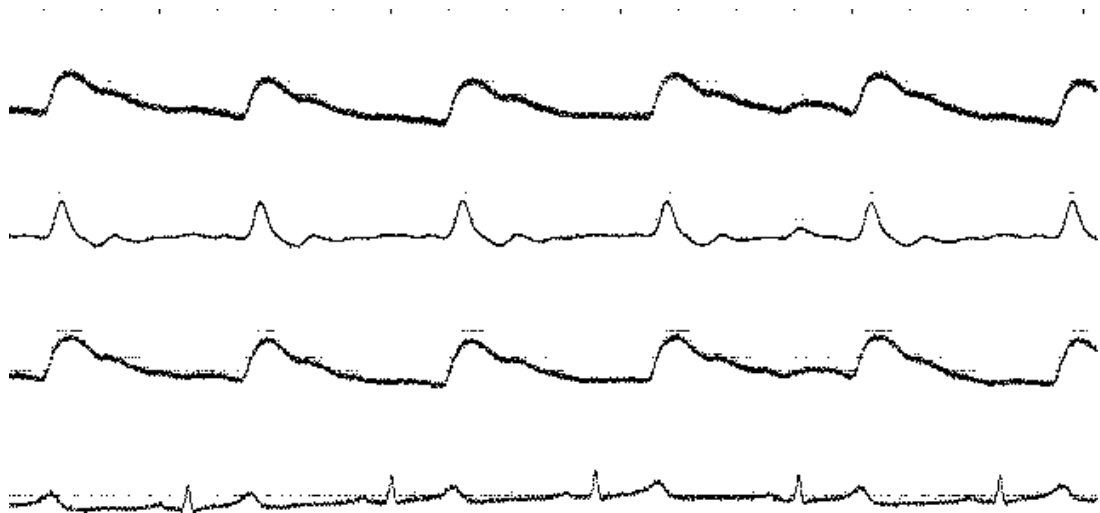


Рисунок 6.21. Вхідні, зашумлені рео та кардіо сигнали

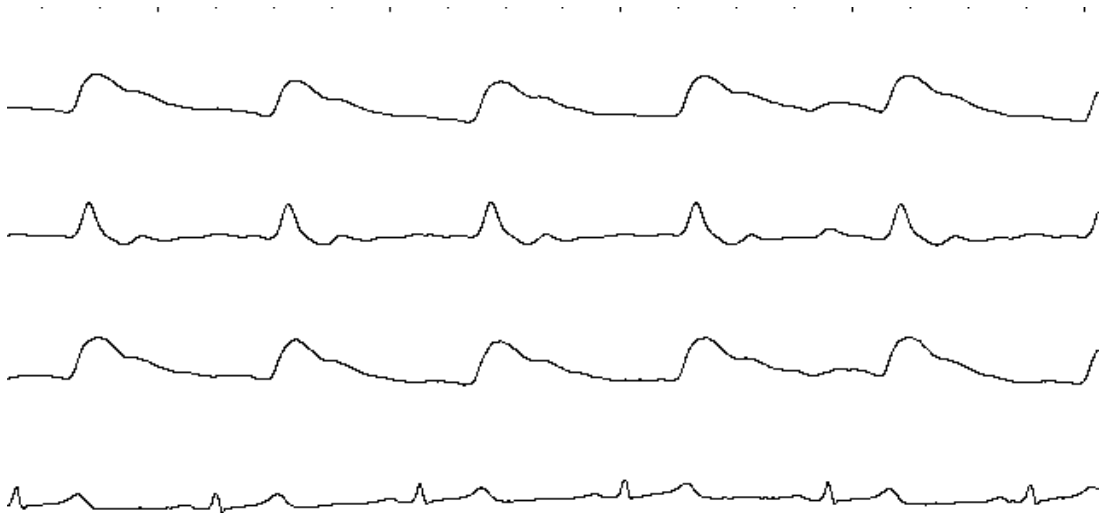


Рисунок 6.22. Відфільтровані сигнали з рис.6.21

Особливістю системи є наявність високого рівня імпульсних перешкод (рис.6.21). Тому перед сплайн-фільтрацією застосовувалась медіанна фільтрація по трьох точках. Результати обробки типової вхідної послідовності (рис.6.21) показано на рис.6.22.

На рис.6.22 показано дані з відновленою частотою дискретизації. Відновлення здійснювалося одночасно з фільтрацією. Для зберігання даних з повної послідовності вибирається кожен 16-й відлік, що є вузлом сплайна. Тоді обсяг файла скорочується в 16 разів і становить 64К (повний 256К). При зчитуванні стиснутих даних відбувається відновлення повного обсягу шляхом сплайн-інтерполяції. Операції фільтрації, інтерполяції займають декілька секунд на РС286 з тактовою частотою 16МГц. Текст програми стиснення наведено в додатку. Для порівняння ефективності сплайнових МНК фільтрів виконаємо стиснення і фільтрацію з допомогою wavelet пірамідальної технології (багатомасштабний аналіз). Для обробки сигналів використано пакет програм в середовищі MatLab з [info.msc.anl.gov](http://info.msc.anl.gov) (pub/W-transform: wtransf1.ps, wtransf2.ps, wtransf.tar.z).

Вхідний реосигнал показано на рис.6.23. Очевидна наявність значної шумової складової. Для вейвлет перетворення застосовано базис з квадратних В-сплайнів (QS-wavelet). Суть обробки полягає у поділі вхідної послідовності на парні і непарні відліки. Непарні відліки складають низькочастотну складову вхідного сигналу  $H_1$ .

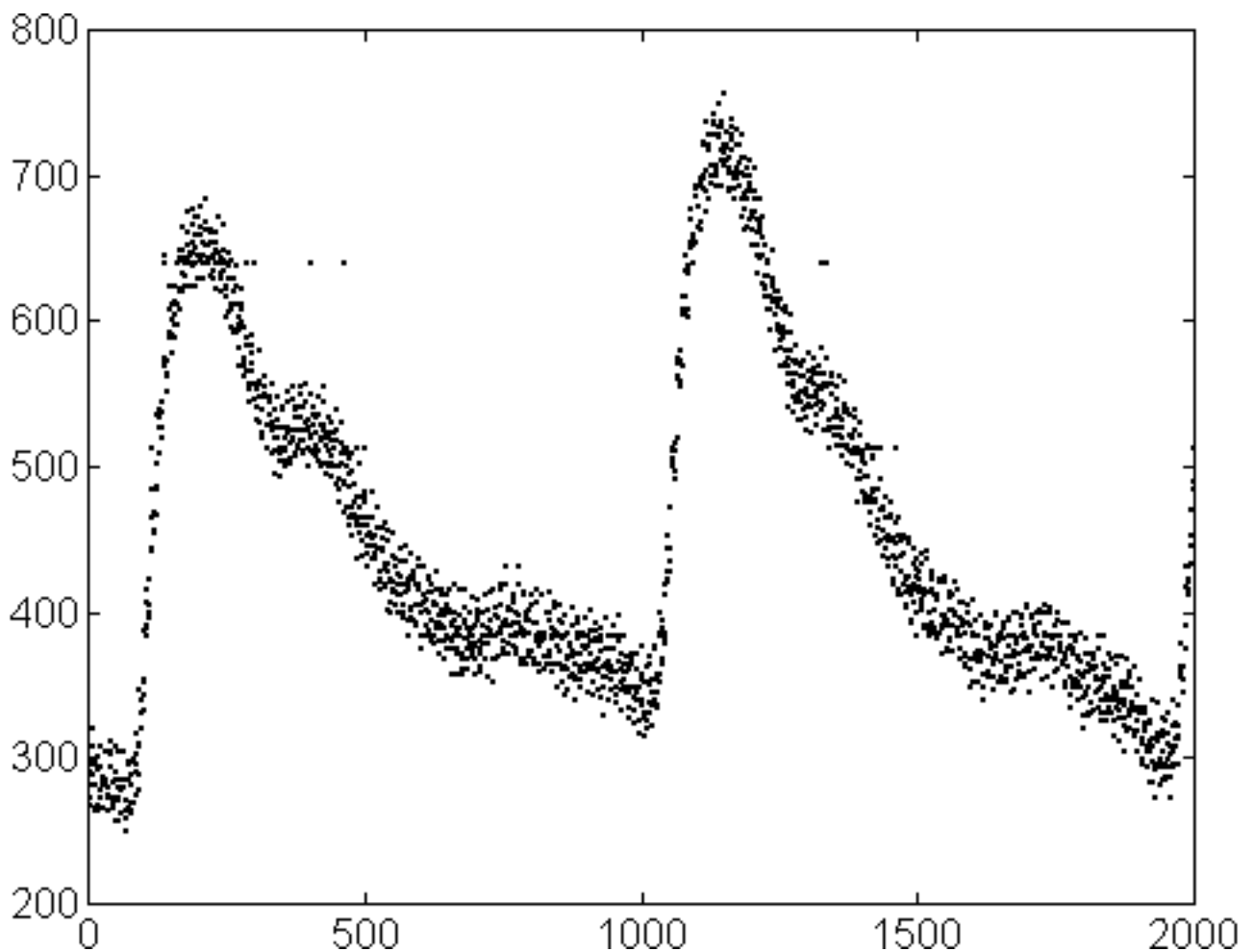


Рисунок 6.13. Вхідний реографічний сигнал

Парні замінюються різницею між оригінальним значенням і інтерпольованим. Таким чином отримуємо вектор  $G_1$  з високочастотною складовою сигналу, що фактично є нев'язкою інтерполяції. Процедуру повторюємо відносно  $H_1$  і отримуємо вектори  $H_2$  і  $G_2$ . Аналогічно  $H_3$  і  $G_3$  та  $H_4$  і  $G_4$ . Вектори  $H_4, G_4, G_3, G_2, G_1$  є результатом декомпозиції рис.6.25 .

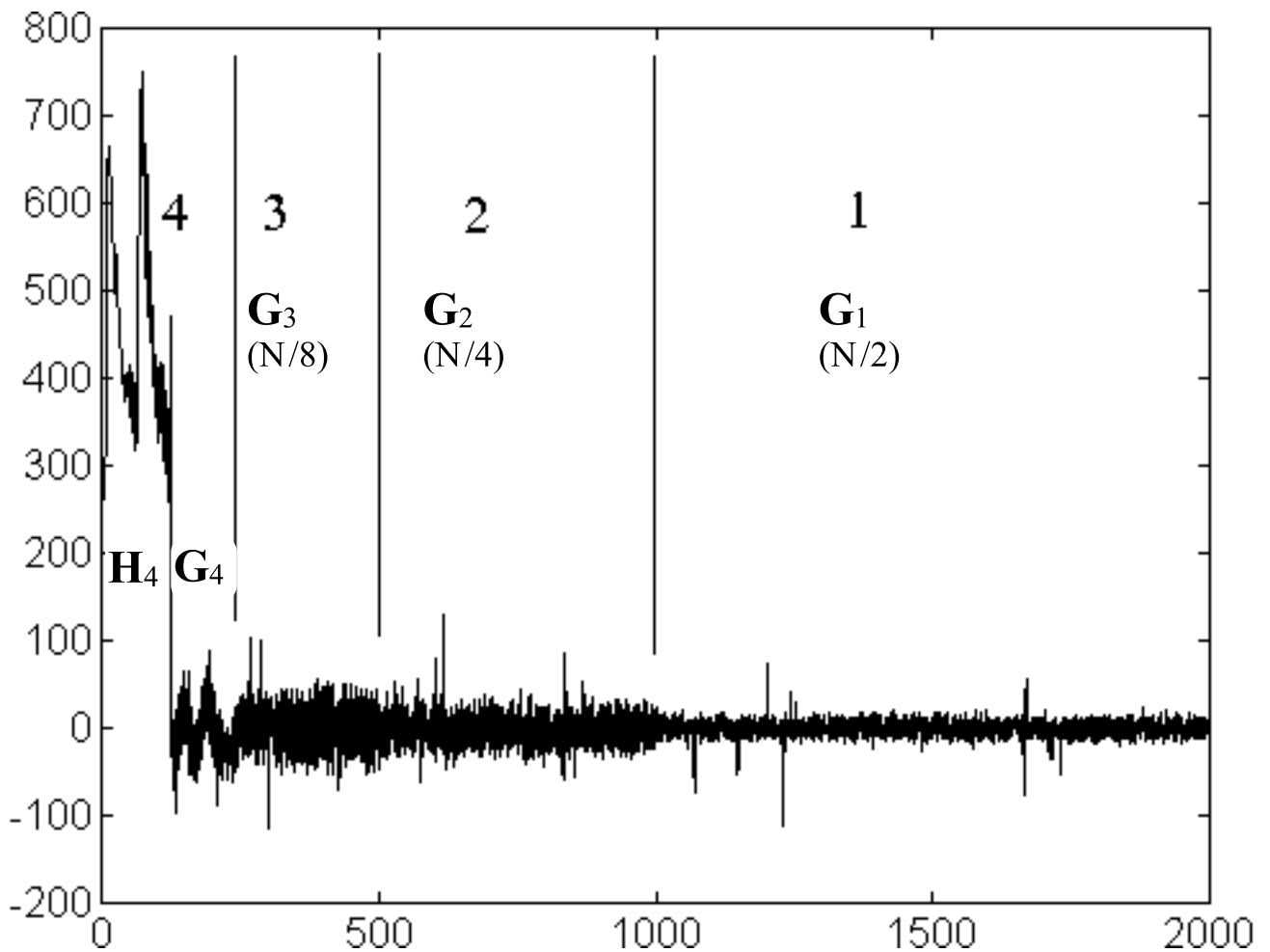


Рисунок 6.24. Wavelet декомпозиція реосигналу

На рис.6.24 показано розмірність векторів декомпозиції. Загальний розмір відповідає вхідному. Ефект стиснення досягається, якщо високочастотні складові містять багато близьких до нуля значень, а отже їх можна стиснути методами кодування. Наявність значного високочастотного шуму сильно знижує ефективність стиснення. В даній задачі високочастотний шум не є інформативною складовою реосигналу. Тому значення у векторах  $G_4, G_3, G_2, G_1$  замінюємо нулями. Таким чином отримуємо стиснутий у 16 разів реосигнал з відфільтрованою високочастотною складовою. В принципі результат тривіальний - результуючий вектор  $H_4$  містить кожен 16-й відлік вхідних даних. Реконструкція отримується послідовною двократною інтерполяцією даних вектора  $H_4$ . Результат реконструкції показано на рис.6.25.

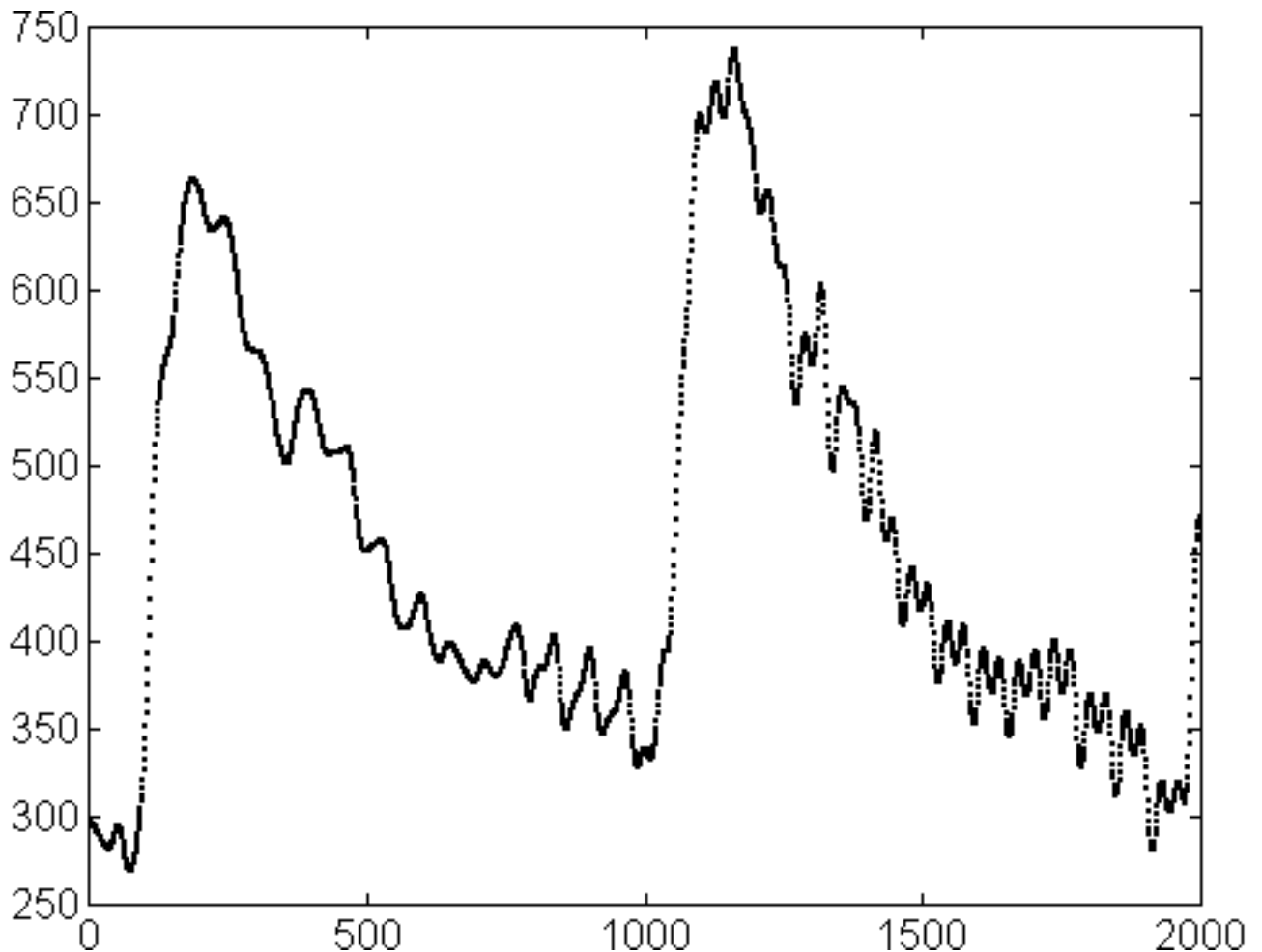


Рисунок 6.25. Реконструкція реограми (QS Wavelet)

Як бачимо, результат є незадовільний. Шуми залишаються надто значними. Диференціювання такого сигналу дасть абсолютно неприйнятний результат. Врахування високочастотних складових при реконструкції збільшує рівень шумів. Стиснутий і реконструйований сигнали не мають аналітичного представлення, що ускладнює подальший аналіз.

Таким чином алгоритми фільтрації та стиснення сплайнами за МНК мають значну перевагу перед вейвлет алгоритмами, що ґрунтуються на інтерполяційних схемах. Ця перевага особливо вагома при наявності значної шумової складової. Результуюча дисперсія оцінок сплайна (дисперсія у стиснутому сигналі) становить 0.082 вхідної дисперсії (рис.5.22). Алгоритмічна реалізація запропонованого алгоритму значно простіша за реалізацію вейвлет методу, що використовувалась.

Якщо навіть врахувати ліфтову реалізацію вейвлет перетворень, реалізація МНК фільтрів не є складнішою.

### **6.5. Фільтрація та ідентифікація геологічних та геофізичних даних**

Одними з поширених типових задач обробки результатів геологічних проб чи геофізичних вимірювань є виділення детермінованої складової в даних, та виявлення меж між областями з різними характеристиками [242,251,252].

В даній галузі традиційним є використання у вказаних задачах поліномів, та інших функцій з характерним виглядом. В ряді випадків користуються геометричними методами. Це обумовлює індивідуальний підхід до кожного набору даних, та значну залежність якості результатів від досвіду і ознайомленості з додатковою апріорною інформацією оператора.

Використання для розв'язку вказаних задач сплайнів дає досить універсальний підхід, що мало залежить від суб'єктивних факторів. Вимоги до оперативності обробки даних є невисокими, тому найбільш придатними є алгоритми з послідовною побудовою вузлів та контролем випадковості залишків описані в розділі 4.

В результаті співпраці з кафедрою мінералогії Криворізького технічного університету створено програмне забезпечення для обробки даних в середовищі електронної таблиці "EXCEL".

Результати роботи програми представлено на рисунках 6.26-6.29. Здійснювалась обробка компонент з типової свердловини. На рисунках показано знаками "+" результати хімічних налізів, "o"- статистичні оцінки вузлів сплайна, включаючи довірчі інтервали з рівнем довірчої ймовірності 0.90.

По осі абсцис вказано глибину свердловини, а по осі ординат процентний вміст компонент. Графіки містять дві пари подібних за характером поведінки компонент. Схожі залежності вмісту заліза та магнітного заліза, алюмінію та  $\text{CO}_2$ . Характерним для чотирьох графіків є наявність двох близьких вузлових точок на відмітці 90. Це свідчить про наявність в даній області межі між різнорідними областями, що підтверджується іншими методами аналізу. З огляду на значну дисперсію випадкової складової візуально помітити на графіку таку відмінність практично неможливо.

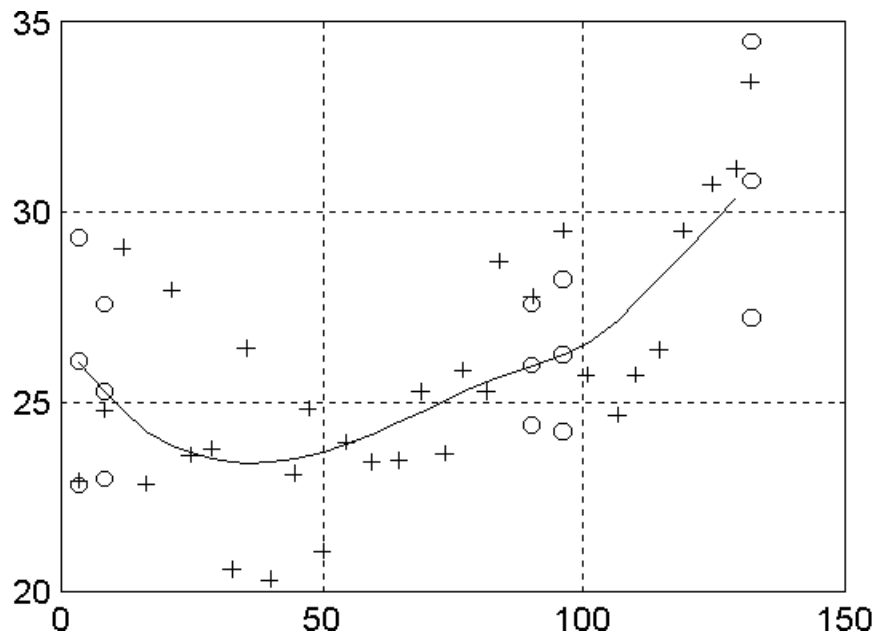


Рисунок 6.26. Вміст магнітного Fe

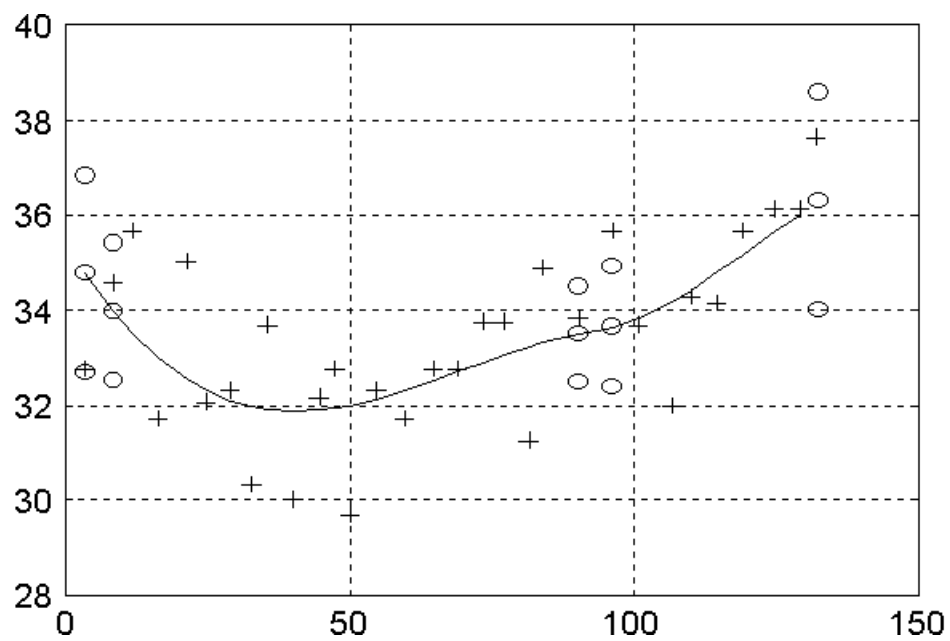


Рисунок 6.27. Вміст Fe

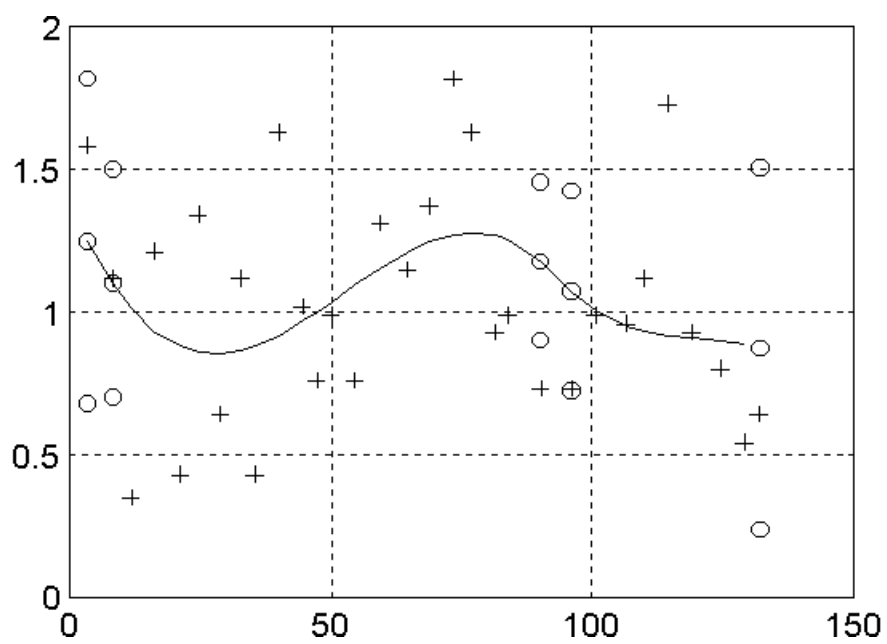
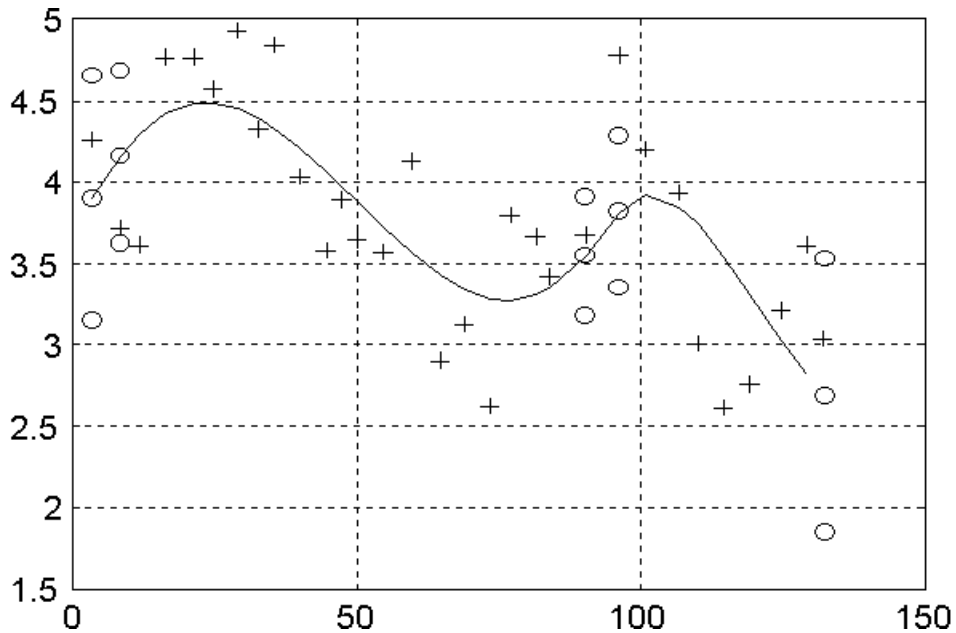


Рисунок 6.28. Вміст AL2O3



Рисунок 6.29. Вміст CO<sub>2</sub>

Для обробки даних використано кубічний ермітів сплайн. Такий вибір є прийнятним з огляду на низькочастотний характер процесів, що аналізуються, довільне розміщення вузлів сплайна та простоту обчислень алгебраїчного полінома. З погляду фахівців розроблене програмне забезпечення є зручним, концептуально зрозумілим і дає хороші результати. Об'єктивних характеристик для порівняння ефективності класичних та сплайнових підходів не отримано, оскільки це потребує значних коштів.

Отримана сплайнова модель дає можливість робити розрахунки стосовно вмісту певних компонент в досліджуваній області та оцінювати достовірність таких розрахунків.

## 6.6. Обробка доплерівських сигналів від метеорологічних об'єктів

Однією з актуальних задач в авіації є виявлення небезпечних метеорологічних явищ [102,103,125,148,271]. Такі явища супроводжуються значними збуреннями атмосфери та опадами. Вимірювання виконувались на спеціалізованій РЛС, що розташована непорушно на землі і має наступні характеристики:

Частота зондуючого сигналу 3000 МГц ( $\lambda=9-10$  см);

Максимальна відстань = 9525 м;

Роздільна здатність по дальності  $\Delta R= 88.89$  м;

Число елементів дальності = 108;

Максимальна доплерівська швидкість =  $\pm 6$  м/с;

Роздільна здатність по доплерівській швидкості = 0.047 м/с;

Число елементів швидкості  $n=256$ ;

Середній час вимірювання  $T_M= 19.2$  с (20 реалізацій);

Період між вимірюваннями реалізацій  $T_R= 1.25$  ms;

Період між вимірюваннями серій з трьох реалізацій = 0.96 с (Shh, Shv, SvV ідуть послідовно через  $T_R= 1.25$  ms).

В нашому розпорядженні є доплерівські сигнали когерентних радіолокаційних відбитків від дощу. Всього 108 елементів дальності. Роздільна здатність по дальності 90 м. Зондування здійснювалось під кутом 30 градусів від горизонту. По кожному елементу дальності представлено 256 відліків комплексних чисел, всього 512 чисел. Відліки є спектром биття між випроміненим і відбитим сигналами надвисокої частоти. Все це виконано при трьох комбінаціях лінійних поляризацій сигналів. Shh(V), SvV(V) та Shv(V). Тут V - доплерівська швидкість, пропорційна доплерівській частоті. Роздільна здатність по швидкості 0.047 м/с. Індекси означають горизонтальну або вертикальну поляризацію. При цьому перший індекс означає поляризацію сигналу передавача, а другий - поляризацію, на яку

настроений приймач. Тобто три поляризаційні комбінації (дві основні та одна перехресна) дають  $512 \times 3$  числа для кожного з 108 елементів дальності. Всі виміри проведені 20 разів.

Інформаційною складовою доплерівського сигналу в даному випадку є вигляд доплерівського спектру відбитого сигналу. Значення має його тонка структура. Так небезпечні метеоявища мають широкий діапазон доплерівських швидкостей. Інформативними також є локальні максимуми та відношення спектрів при різних поляризаціях.

Проблема полягає в тому, що прийнятий сигнал є сильно зашумленим, а осереднення призводить до втрати роздільної здатності. Розглянемо оцінку спектру методом викладеним у четвертому розділі. З допомогою інверсного перетворення Фур'є отримуємо часову послідовність (комплексну). Виконаємо оцінку спектру з оптимізацією розміщення вузлів. Зауважимо, що процедура пошуку оптимального розміщення вузлів показала стійку тенденцію до згущення вузлів в областях з особливостями і здійснювалась за 4-6 циклів послідовного переміщення вузлів. На рис.6.30-6.32 показані отримані оцінки амплітудних спектрів для 20-го елемента дальності по першій реалізації в трьох поляризаціях. На цій дальності спостерігаються дощові опади.

На рисунках “.” показана амплітуда відліків перетворення Фурє доплерівського сигналу, “+” амплітуда сплайна у вузлах, “-“ амплітуда сплайнової оцінки спектру. Спектр періодичний, тому завдяки особливості ШПФ вісь швидкості поділена на дві половини  $6-0$  м/с і  $-6-0$  м/с.

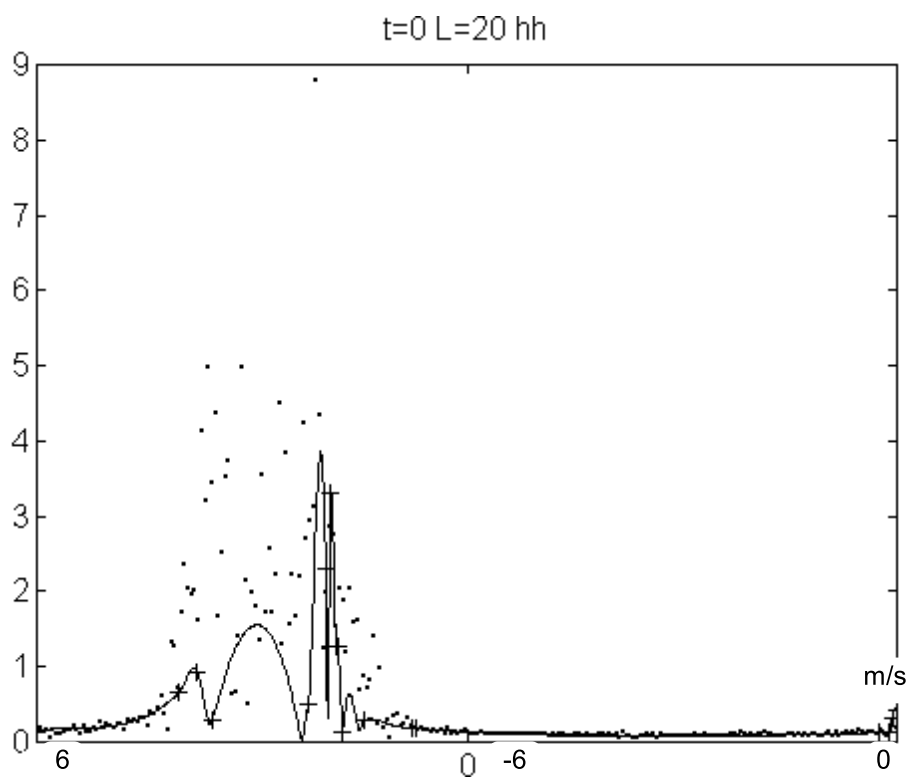


Рисунок 6.30. Амплітудний спектр 20-го елемента дальності (дощові опади), горизонтально-горизонтальна поляризація

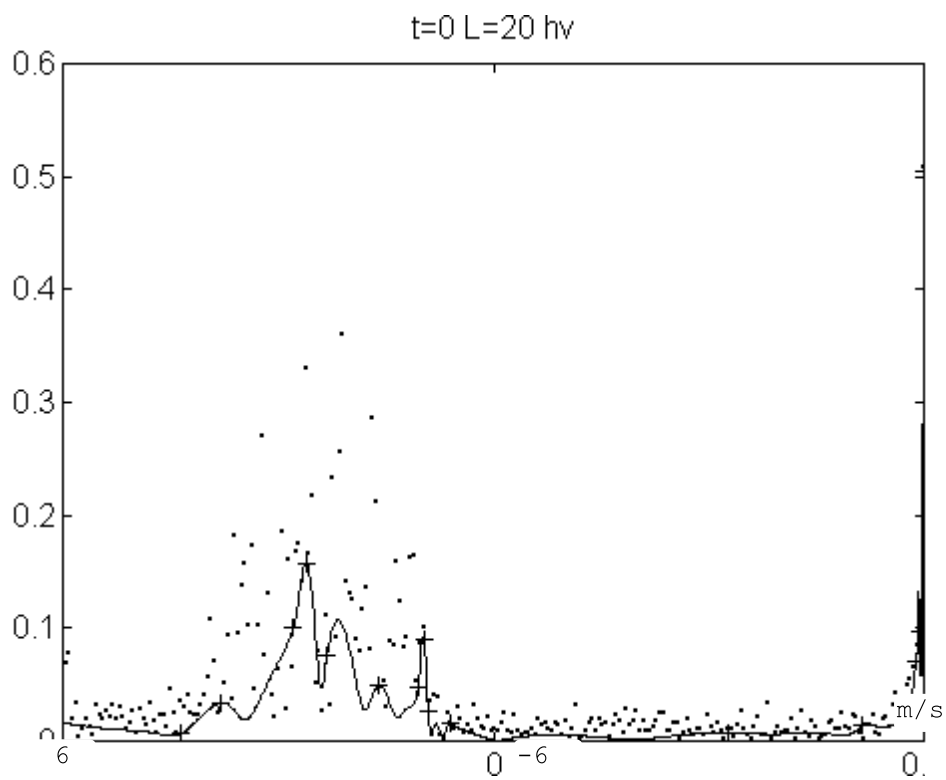
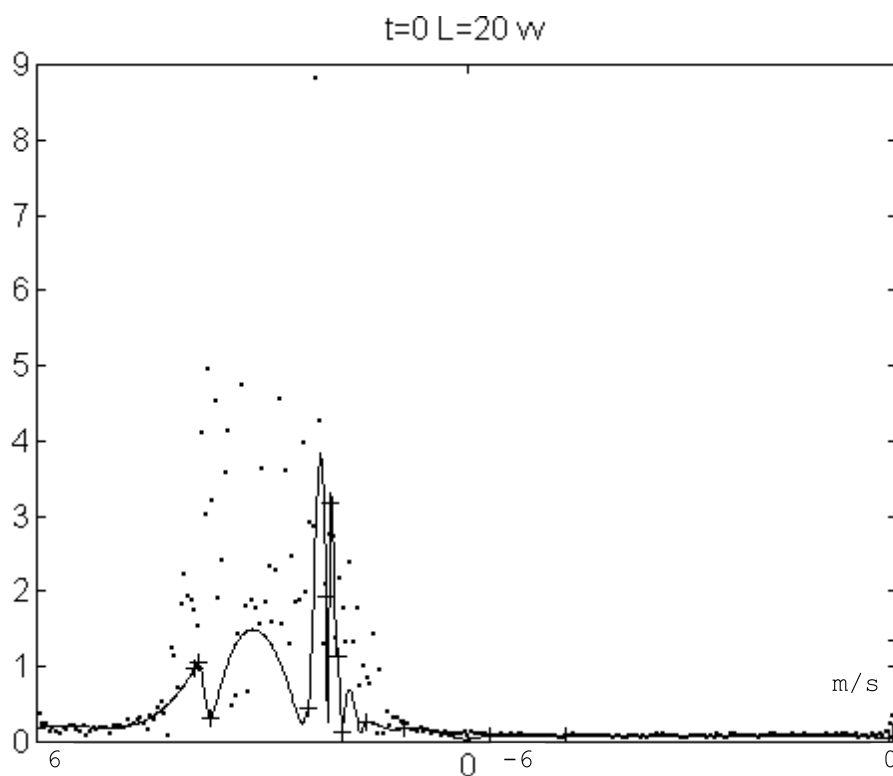


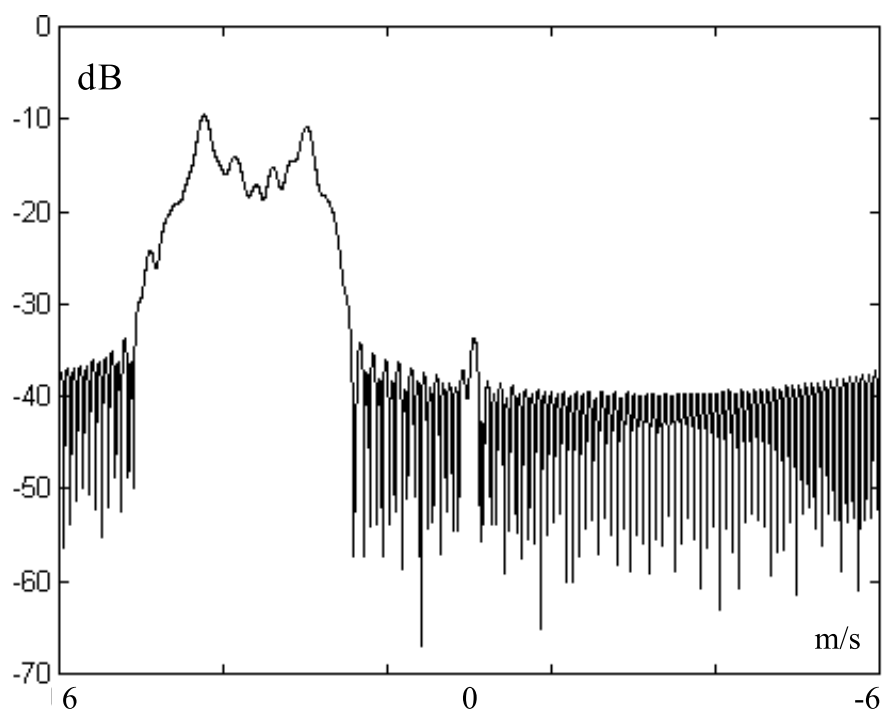
Рисунок 6.31. Амплітудний спектр 20-го елем.дальності (дощові опади),  
горизонтально-вертикальна поляризація

Видно, що запропонований алгоритм виявляє тонкі структури спектру. Обробка сигналів при трьох комбінаціях поляризацій виконувалась незалежно. Реалізації при трьох комбінаціях поляризацій відрізняються амплітудними значеннями. Пошук оптимального розміщення вузлів починався у всіх випадках з рівномірної сітки з 16 вузлів (15 фрагментів). Зміна кількості вузлів (10, 20) також дає подібну картину на якій чітко виділяється три екстремуми. Два вузьких і один широкий. Звичайно, фізична інтерпретація потребує подальших експериментів з метою встановлення відповідності між наявністю певних екстремумів і характером фізичного явища.

Перевагу запропонованого методу видно, якщо порівняти результати з рис.6.30 та отримані класичними методами для тих самих даних. На рис.6.33 показано оцінку енергетичного спектру отриману корелограмним методом (64 лаги). Хоча області сильного сигналу і співпадають, але на рис.6.33 не видно тонкої структури спектру. Зокрема важко виділити три екстремуми, та оцінити їх ширину.



**Рисунок 6.32.** Амплітудний спектр 20-го елем.дальності (дошові опади),  
вертикально-вертикальна поляризація



**Рисунок 6.33.** Корелограмна оцінка СЦП 20-го елемента

В енергетичному спектрі втрачено інформацію про фазові характеристики сигналу. На рис.6.34 показано фазово-частотну (швидкісну) характеристику сплайн-оцінки доплерівського сигналу. Очевидно, що область екстремумів характеризується швидкою зміною фази.

На рис.6.35 показано амплітудну характеристику доплерівського спектру, отриману осередненням по 20 реалізаціях. Також чітко виділяється область значимого сигналу, але деталі спектру так само важко розрізнити.

На рис.6.36 показана амплітудна характеристика 40-го елемента дальності в котрому опади відсутні (Shh). Відповідно відсутня область значимого сигналу віддалена від нульової частоти (і нульової швидкості). Алгоритм розміщення вузлів відповідним чином відреагував на факт відсутності опадів. На рис.6.37 показано фазову характеристику 40-го елемента. Відповідно маємо малі коливання фази напри віддаленні від нульової частоти.

В процесі обробки аналізувались і інші елементи дальності. Узгодженість між апіорною інформацією про наявність опадів вздовж лінії зондування та спектральною картиною свідчить про стійкий характер алгоритму пошуку оптимальної сітки вузлів, а також про здатність описувати деталі спектра в локальних областях.

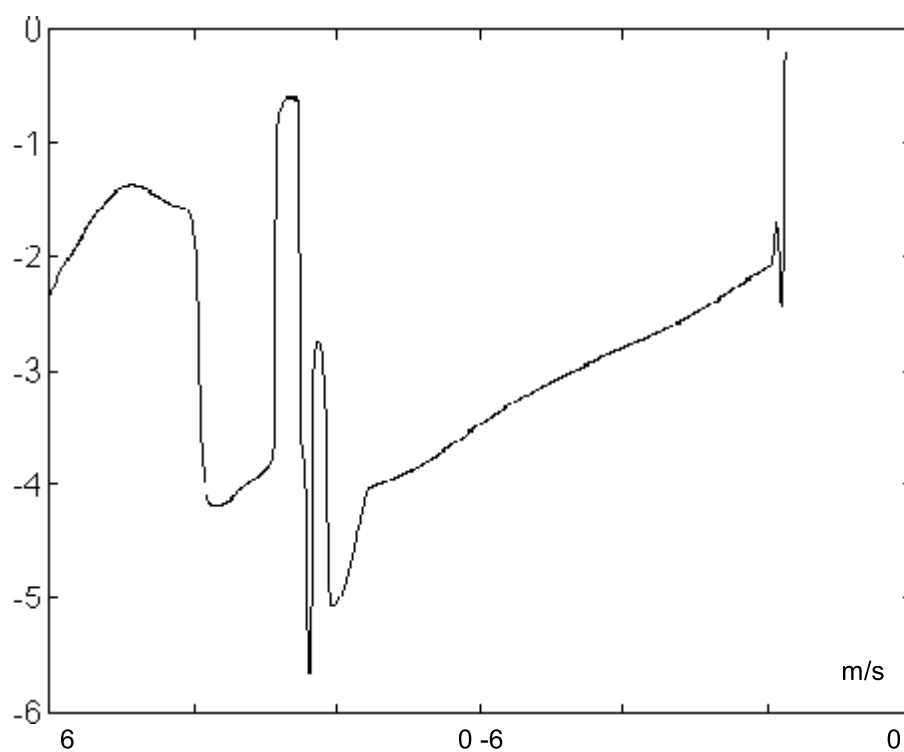


Рисунок 6.34. Фазова х-ка сигналу з 20-го елемента дальності (Shh)

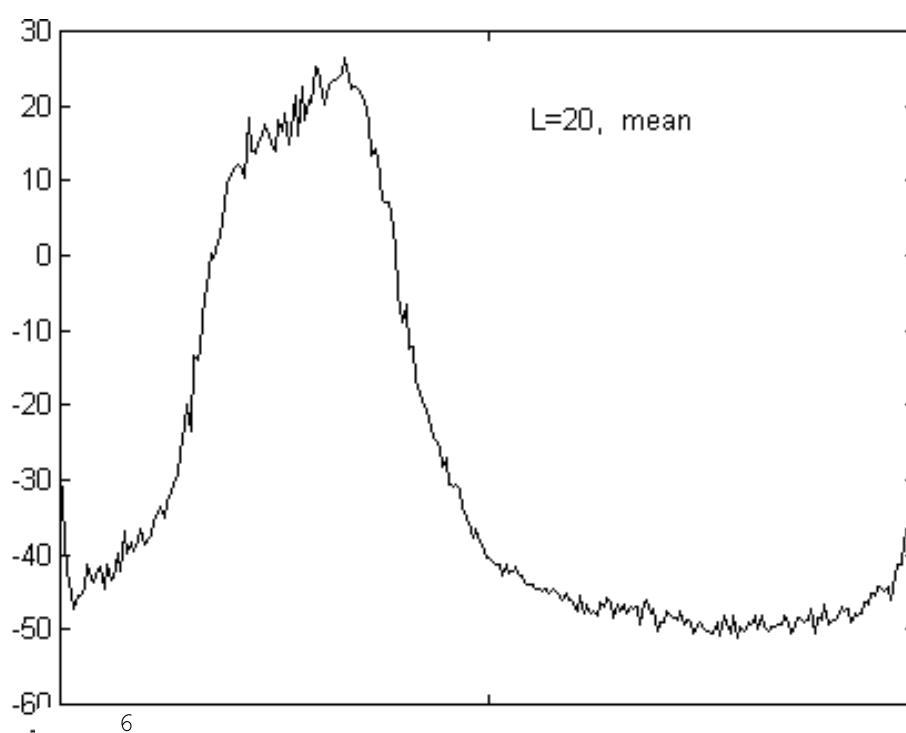


Рисунок 6.35. Амплітудна х-ка 20-го елем. осереднена по 20 реалізаціях



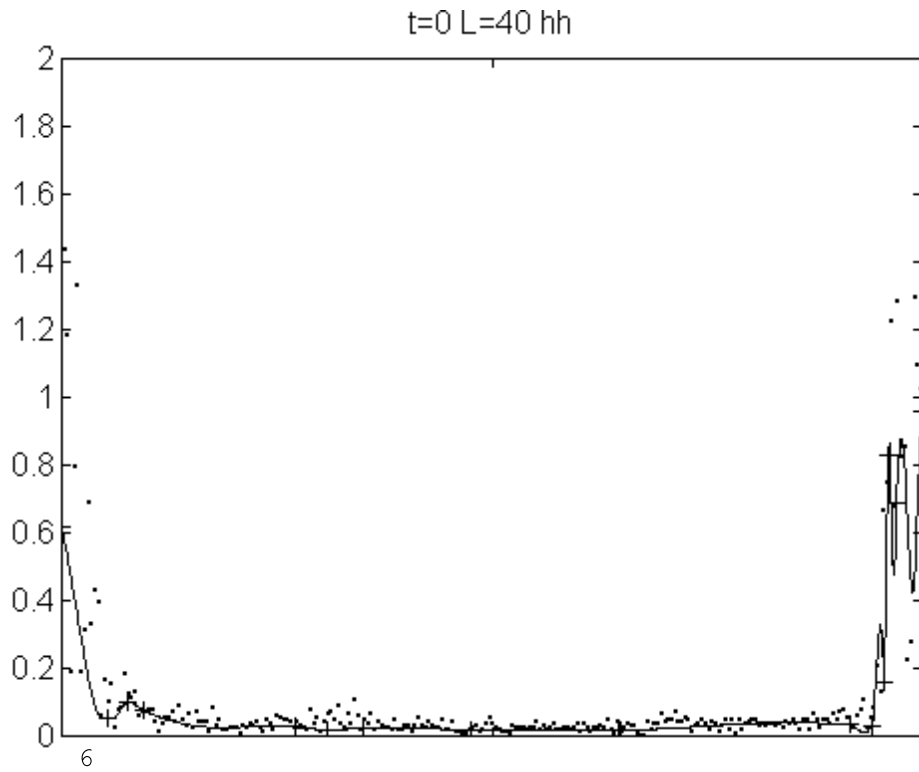


Рисунок 6.36. Амплітудний спектр 40-го елем.дальності (без опадів),  
горизонтально-горизонтальна поляризація

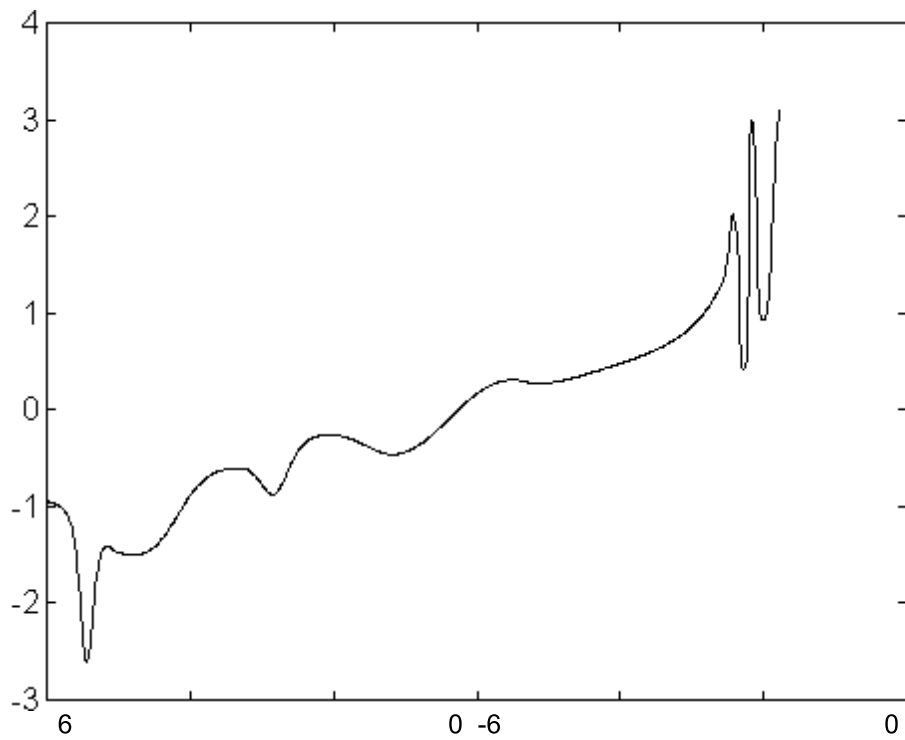


Рисунок 6.37. Фазовий спектр 40-го елем.дальності (без опадів),  
горизонтально-горизонтальна поляризація

Таким чином запропонований метод є перспективним стосовно описаних сигналів. Подальші дослідження полягатимуть у створенні певної бази даних (альбому спектрів) метеоявищ, яка може слугувати навчальною вибіркою для вирішення задач класифікації та виявлення небезпечних метеоявищ.

### **6.7. Фільтрація та стиснення цифрових растрових зображень**

Стиснення даних є надзвичайно важливою і актуальною практичною задачею, в зв'язку із інтенсивним розвитком комп'ютерних засобів комунікацій. Найбільш вражаючими є успіх в технології стиснення цифрових зображень. Принципово зберігання та передача цифрових зображень майже нероздільна з задачами стиснення. Методи стиснення можна розділити на дві основні великі групи [203]:

стиснення з точним відновленням інформації;

стиснення з певним рівнем втрат (lossy).

Стиснення в першій групі ґрунтується на оптимальних способах кодування, зокрема груповому кодуванні (RLE), словниковий метод Лампела-Зіва-Велча (LZW), кодування Хафмена (CCITT). Типовими представниками є формати TIFF, GIF, PCX. При цьому досягається коефіцієнт стиснення в 1.5-4 рази.

Друга група методів з'явилася дещо пізніше і ґрунтується на методах апроксимації даних, адаптивній дискретизації та певних фізіологічних особливостях сприйняття зображень людиною. Стиснення сягає 10-20 раз з прийнятною якістю зображень. Нас цікавитиме якраз остання група. В ній можна в свою чергу виділити два основні напрями:

wavelets методи, що мають прекрасне теоретичне обґрунтування, масу ілюстративних прикладів і майже не мають практичних програмних реалізацій ;

евристичні методи, що практично не мають теоретичного обґрунтування, спираються на фізіологічні особливості людського сприйняття і фактично стали алгоритмічним стандартом (JPEG алгоритм).

Розглянемо основи роботи зазначених алгоритмів.

Wavelets методи ґрунтуються на інтерполяції локальними функціями. Принцип стиснення легко зрозуміти розглянувши рис.6.38 [98]. Повний вхідний сигнал (a) розділяється на парні та непарні (b) відліки. Непарні відліки (b) залишаються і становлять низькочастотну частину вхідних даних, їх число вдвічі менше початкового. Парні відліки замінюються інтерпольованими (c), де роль вузлів інтерполяції виконують непарні відліки. Проте інтерес являють не самі інтерпольовані значення, а нев'язка інтерпольованих і оригінальних парних відліків (d).

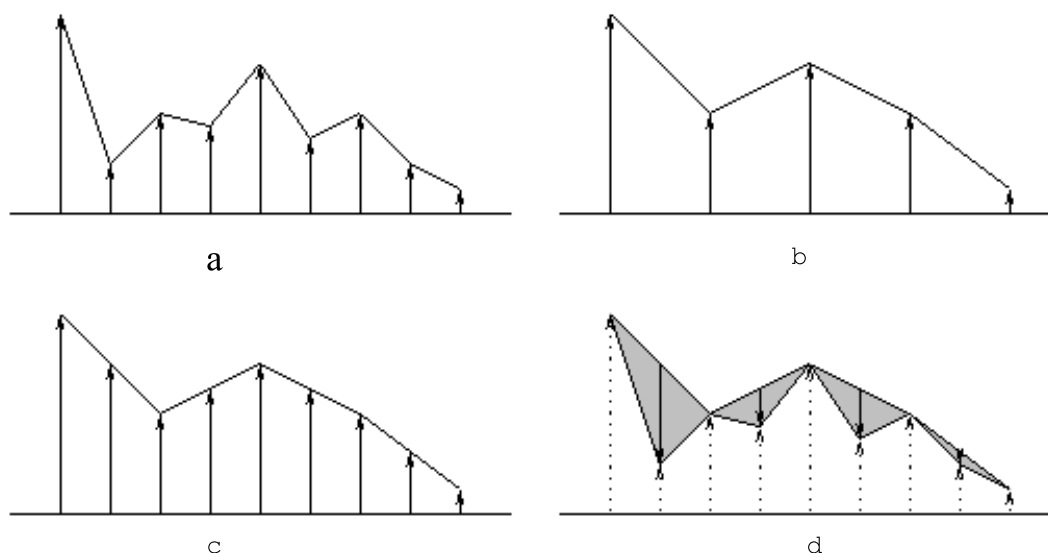


Рисунок 6.38. Wavelet стиснення даних

Нев'язка є фактично іншою, високочастотною складовою вхідних даних. Маючи непарні відліки (низькочастотна частина) та нев'язку для парних відліків (високочастотна частина) можна точно відновити вхідні дані. За умови відсутності втрат точності - стиснення відсутнє. Проте за певних умов високочастотна складова містить значну кількість нульових, або малозначимих чисел, котрі можна замінити нулями. Останню послідовність можна суттєво стиснути методом оптимального кодування. Послідовно застосовуючи цю схему, можна добитися значного стиснення, це так звана ліфтова схема (lifting scheme). Добрі ілюстрації цього підходу містяться в розділі Wavelet Toolbox пакету MatLab [224]. Зображення

стискають, застосовуючи вказану процедуру до рядків та стовпців зображення (пірамідальна схема) рис.6.39 [48].

Ефективність процесу суттєво залежить від співвідношення спектрів сигналу та базисних функцій інтерполяції. Від цього залежить кількість малозначимих відліків нев'язки.

Wavelet методи застосовують в системах апаратного стиснення з відносно низькими вимогами до якості зображень ([www.analog.com](http://www.analog.com)). Авторів не вдалося знайти реалізацій wavelet алгоритмів в графічних стандартах та пакетах, так само як і пояснень з цього приводу (хоча сам факт безумовно відмічають [99]).

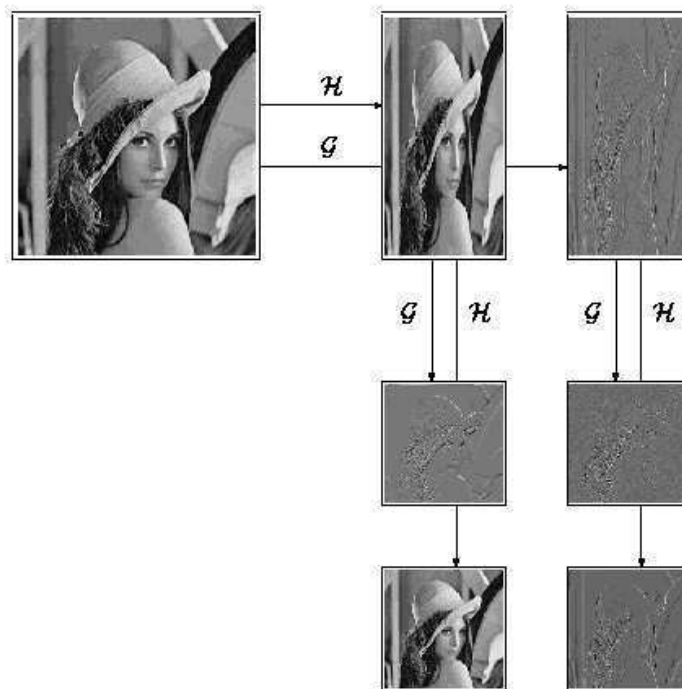


Рисунок 6.39. Пірамідальна wavelet декомпозиція зображень

Ідея JPEG алгоритмів полягає в тому, що людський зір більш чутливий до змін в яскравості ніж змін кольору, а також менше чутливий до змін у мілких (високочастотних) деталях зображення. Ідея стиснення полягає в спектральному розподілі зображення і застосуванні різних рівнів дискретизації для різних

гармонік. Загальна схема практичної реалізації алгоритму для кольорового зображення показана на рис.6.40 [203].

Процес починається з перетворень стандартів кольорових зображень, зниження числа пікселів для кольорових складових, поділу зображення на клітини 8x8 пікселів та дискретного косинус перетворення. Отримані гармоніки дискретизують за певною схемою з різними рівнями і отримані дані стискають методом Хофмана. Декодування відбувається в зворотному порядку.

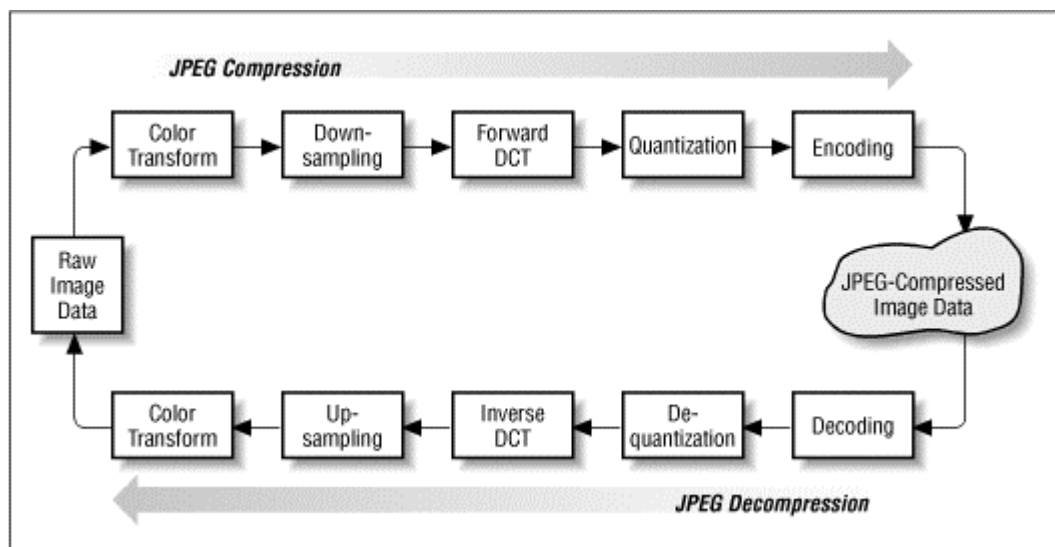


Рисунок 6.40. JPEG технологія стиснення зображень

JPEG алгоритм на сьогоднішній час є абсолютно домінуючим серед програмних реалізацій, очевидно завдяки досить універсальному характерові (слабкій залежності від характеру зображень), хоча розрахунки є досить складними з застосуванням арифметики з плаваючою точкою.

В даній роботі пропонується для стиснення зображень використати розроблені в попередніх розділах алгоритми. Очевидно, що ідея стиснення та сам підхід близький до wavelet методів, однак є ряд суттєвих відмінностей.

Однократна інтерполяція при компресії замінюється апроксимацією за МНК. Це дозволяє збільшити стиснення низькочастотної складової на окремому етапі не в 2 рази, а значно більше (8-32). Практично відпадає необхідність в поетапному стисненні. МНК забезпечує мінімум середніх квадратів високочастотної складової

для заданого базису, що робить максимальним число малозначимих відліків. МНК забезпечує оптимальність з точки зору статистичних характеристик, що дозволяє алгоритму працювати при наявності шумів.

Розглянемо процес стиснення зображення. Тестовим об'єктом стиснення буде типове зображення “Lena” розмірності 512x512 пікселів з 256 градаціями сірого (рис.6.41).

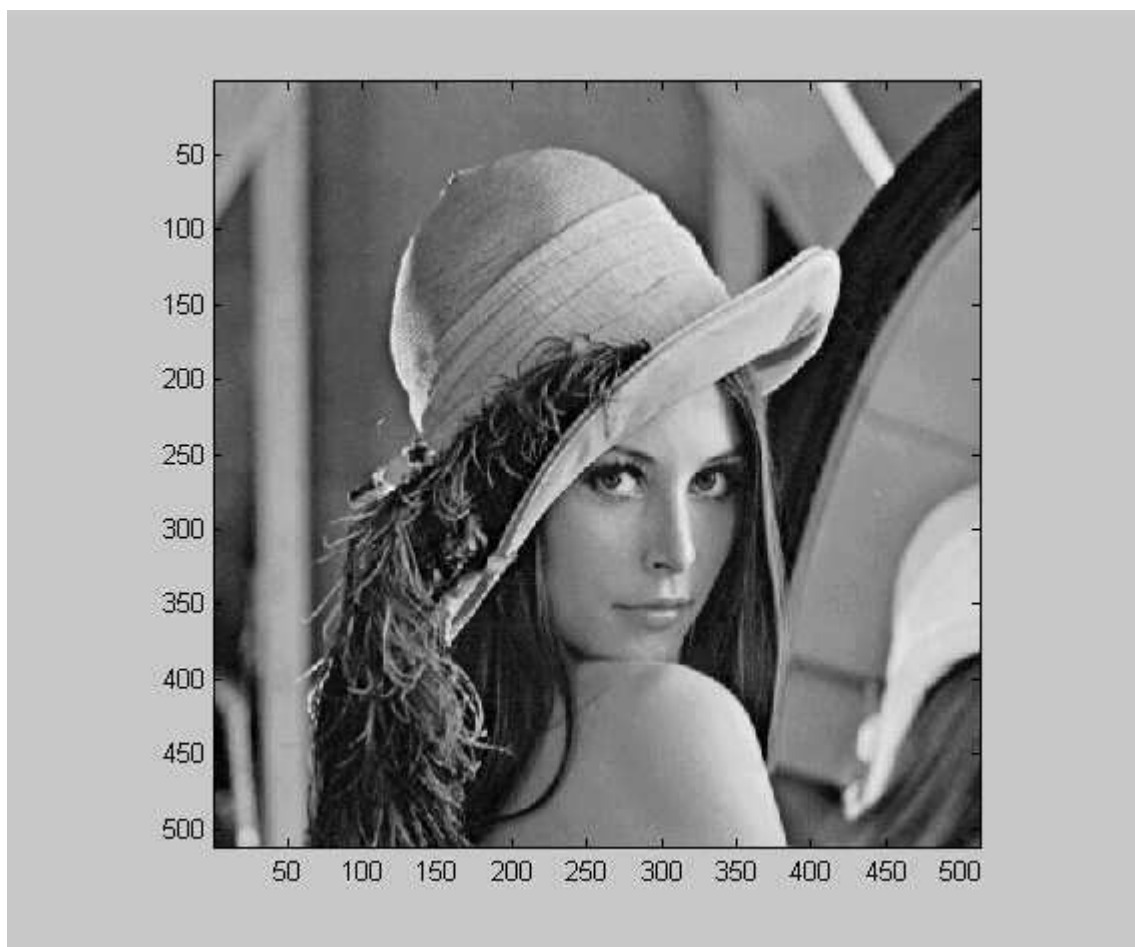


Рисунок 6.41. Тестове зображення “Lena”

Для стиснення використаємо алгоритми з розділу 5 (віконний алгоритм зі стисненням). Зображення стискуватимемо послідовно по рядках та стовпцях зображення. Якщо стиснення по рядках становитиме  $n$  ( $n$  відліків на фрагменті сплайна) і по стовпцях  $m$ , то загальне стиснення високочастотної частини зображення становитиме  $n \cdot m$ . Високочастотна частина зображення (різниця між оригіналом та низькочастотною частиною) міститиме значну кількість

малозначимих чисел, котрі можна замінити нулями. Заміна нулями значень, менших певного порога  $\lambda$ , обумовлює втрати якості відновленого зображення. Оскільки високочастотна частина має розмірність оригіналу, то її також потрібно стиснути. Наявність значної кількості нульових значень дозволяє ефективно здійснити цю процедуру.

Для тестового зображення на рис.6.42 схематично показано процедуру стиснення (хід відновлення є очевидним).

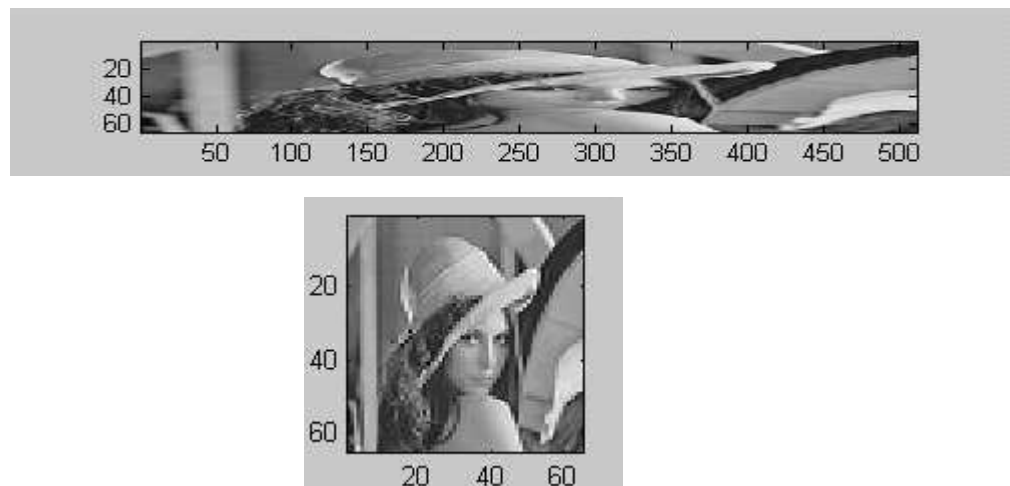


Рисунок 6.42. Стиснення зображення по вертикалі та горизонталі

Величина стиснення та якість зображення залежать від  $n$  та  $m$  і порога  $\lambda$ . На рис.6.43 показано гістограми залишків при  $n=m=8$  і  $n=m=16$ , відповідно.

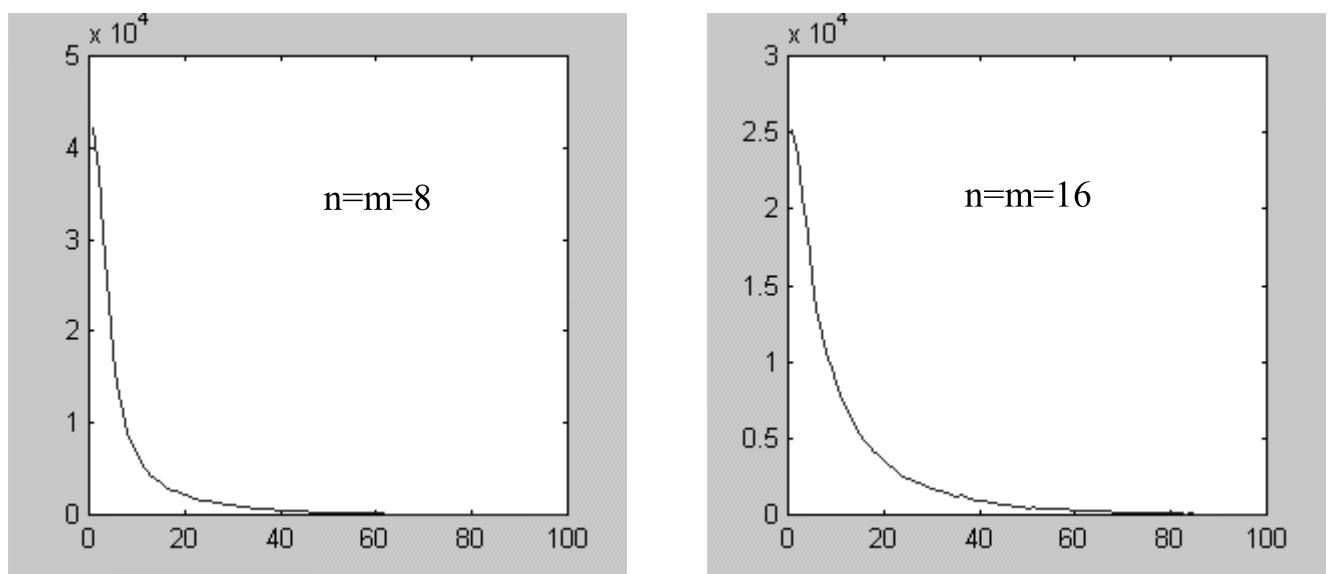


Рисунок 6.43. Гістограми значень залишків

На рис.6.44, 6.45 показані відновлені зображення з порогами  $\lambda=8$  і  $\lambda=32$ , відповідно ( $n=m=8$ ). Інший спосіб стиснення полягає у зменшенні рівнів дискретизації залишкового сигналу. Експерименти із застосуванням різних схем дискретизації показали, що число нульових елементів у залишках наближається до отриманого з допомогою вейвлет методів. В експериментах застосовувалось програмне забезпечення з 6.5. Однак у вейвлетах на кожному етапі застосовувалась окрема схема дискретизації, а сам алгоритм стиснення є результатом тривалих досліджень в цій області. Запропонований МНК алгоритм має багато можливостей по удосконаленню обчислювальних схем і параметрів. Це вибір відповідних базисів, поетапне стиснення, адаптивне стиснення із врахуванням характеру окремих областей, застосування двомірних сплайнових базисів, тощо. Такі детальні дослідження і розробка конкретних програмних реалізацій виходять за рамки даної роботи, поза як потребують окремої уваги, значного обсягу досліджень та витрат.

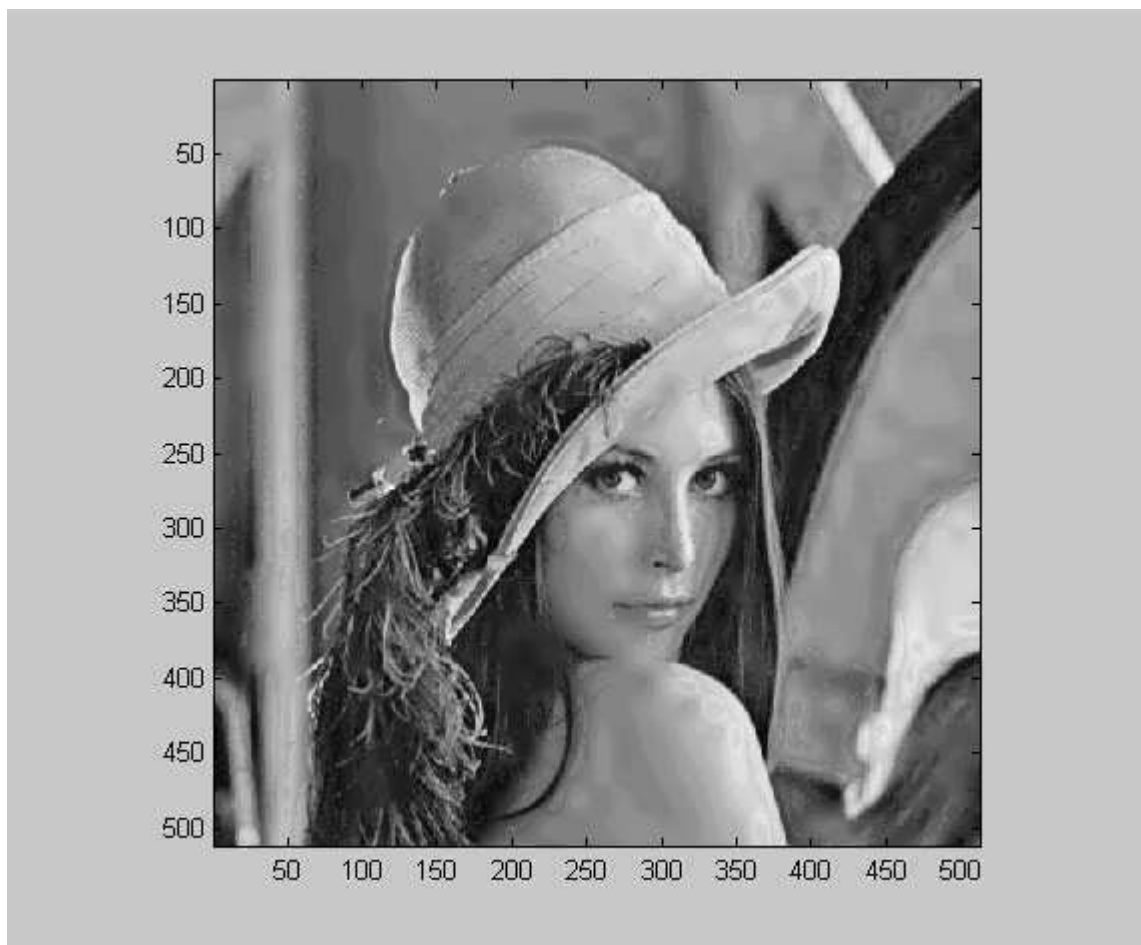


Рисунок 6.44. Відновлене з порогом 8 зображення ( $n=m=8$ )



Автор мав на меті лише розробку основного принципу застосування створених в цій роботі алгоритмів і підходів до розв'язку зазначеної практичної задачі та виявлення потенційних можливостей підходу. Суттєвою перевагою запропонованого методу є обробка і стиснення зображень при наявності шумів. За таких умов вейвлет алгоритми суттєво втрачають як в ефективності стиснення так і в якості реконструйованого зображення. Такі зображення є типовими в радіолокаторах із синетезованою апертурою (SAR - synthetic aperture radar). Вейвлет алгоритми для роботи з такими сигналами розглянуті в роботах [30,65]. Як уже відмічалось раніше, вейвлети певним чином відфільтровують шуми, оскільки розкладають сигнал на низькочастотну і високочастотну складові. Але ефективність такої фільтрації для нормального некорельованого шуму є невисокою. Наявність в запропонованому алгоритмі МНК, якраз гарантує ефективність отриманих оцінок.

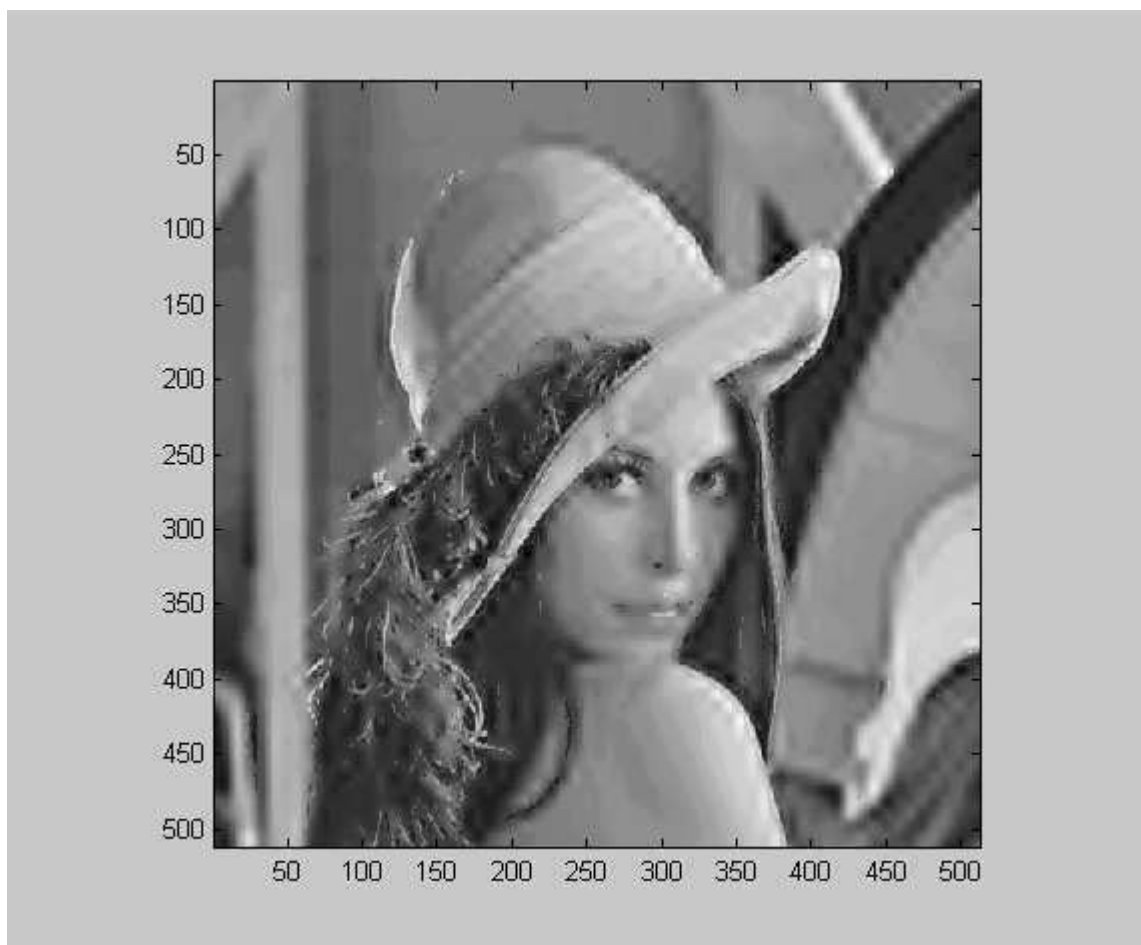


Рисунок 6.45. Відновлене з порогом 32 зображення ( $n=m=8$ )



Рисунок 6.46. Зашумлене тестове зображення



Рисунок 6.47. Реконструйоване з допомогою wavelet методу зображення

Продемонструємо це на нашому тестовому прикладі. Для цього додамо до зображення на рис.6.41 нормальний шум з нульовим математичним сподіванням і СКВ 16. Результат показано на рис.6.46.

Стиснуте і реконструйоване вейвлет методом зображення показано на рис.6.47. Використано квадратні сплайнові вейвлети (QS) з двома етапами стиснення. Високочастотні складові при реконструкції відкинуті.

На рис.6.48 показано реконструйоване з допомогою запропонованого МНК алгоритму зображення, що було стиснуте до аналогічного попередньому розміру. Очевидно, що запропонований метод дає значно кращий результат. Тут також при реконструкції не враховувались високочастотні залишки.



Рисунок 6.48. Реконструйоване сплайн-МНК методом зображення

Чисельно результати оцінювалися за СКВ різниці між оригінальним, незашумленим зображенням і реконструйованим. Для вейвлет отримано СКВ 13.3, для МНК 9.2. При цьому слід врахувати, що різниця містить не лише випадкову похибку але і динамічну. Очікуване значення СКВ для МНК (чотири

спостереження на фрагменті) має складати щонайбільше  $8.8 (\sqrt{0.3} * 16)$ , що не надто сильно відрізняється від отриманого.

Стосовно вейвлет методу, знову слід зауважити, що стиснуте зображення є його низькочастотною частиною, що складається з одного відліку з квадрату  $4 \times 4$ . Тому інтерполяція при реконструкції лише “розмазує” вхідний шум. Якщо частково врахувати високочастотну складову, то це лише підвищить рівень шумової складової.

Відмітимо основні особливості, відмінності та переваги запропонованого підходу.

Значною перевагою є можливість реалізації в цілочисельній арифметиці, що дозволяє виконувати операції апаратно. Метод є більш стійким відносно шумів ніж інтерполяційні схеми і може застосовуватись для обробки синтезованих зображень в радіо та гідролокації, тощо.

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати процедуру стиснення змінюючи основні параметри:

- число даних на фрагменті сплайна  $(n, m)$ ;
- рівень нуля у високочастотній частині  $(\lambda)$ ;
- вид сплайнового базису.

Оптимізація останнього параметра потребує спектрального аналізу зображення, включаючи й методи розроблені в розділі 4, й дозволяє враховувати специфічний характер зображення.

Низькочастотна частина зображення є по суті повноцінним зменшеним зображенням, що полегшує попередній перегляд зображення.

Оскільки процедура відновлення зображення є інтерполяцією, то легко виконувати зміни масштабу зображення.

Як недолік, що може обмежити застосування, слід відмітити несиметричність алгоритму. Процедура стиснення потребує більших затрат ніж відновлення. Проте

затрати на відновлення практично не залежать від складності чи попередніх затрат на етапі стиснення.

## 6.8. Висновки

1. Розроблено технологію обробки сигналів, що ґрунтується на МНК зі сплайновими моделями, що відрізняються від класичних моделей універсальністю, та ефективністю розрахунків.

2. Ефективність фільтрації та стиснення суттєво залежить від співвідношення спектрів даних та сплайнового базису. При відповідному узгодженні спектрів сплайни можна застосовувати для обробки не лише низькочастотних (гладких) сигналів, але й осцилюючих, полігармонійних.

3. При узгодженні спектрів (як мінімум за смугою пропускання сигналу та базису) алгоритми, що ґрунтуються на використанні проекційної матриці та зі стисненням дають близькі результати.

4. Застосування ермітових кубічних сплайнів для фільтрації та стиснення біометричних даних дозволило розв'язати проблеми з фільтрацією, стисненням та подальшим аналізом, котрі не вдавалося подолати з допомогою класичних підходів та вейвлетів.

5. Застосування алгоритмів адаптивної побудови сплайну з контролем залишків для аналізу геологічних та геофізичних даних показали хороші результати, зокрема дозволили виявляти межі стаціонарних областей за даними вимірювань вмісту різних хімічних елементів.

6. Метод оцінки спектру доплерівських сигналів від метеорологічних об'єктів дозволив отримати інформативну деталізацію спектру в області значимих сигналів.

7. Запропоновано метод стиснення зображень, що базується на розроблених МНК сплайн алгоритмах і має ряд переваг. Зокрема це простота алгоритму, що зводиться до цілочисельних операцій, стійкість до шумів, широкі можливості що до оптимізації стиснення.

Проблемні питання та перспективи подальших досліджень, що слідують з виконаних досліджень, на думку автора, полягають в наступному:

1. Створення математичної теорії сплайн-фільтрації, котра встановлює кількісні співвідношення між якістю сплайнових фільтрів і спектрами даних та сплайнових базисів, з урахуванням наявності випадкових складових. Практичне значення має розробка методів, котрі за спектральними оцінками вхідних даних дозволяють б точно синтезувати відповідні базисні сплайни. Таким чином можна реалізувати цілий ряд алгоритмів адаптивної фільтрації нестационарних даних.

2. Розробка методів отримання оцінок сплайнових моделей за умови наявності в даних корельованого та не нормального шуму. Зокрема це застосування Калманівської фільтрації зі сплайновими моделями, та методу максимальної вірогідності.

3. Дослідження та розвиток методів стиснення даних з допомогою сплайн-апроксимації для відеоданих та аудіоданих, включаючи застосування двох та трьох вимірних сплайнів.

4. Розробка придатних для ефективного застосування на практиці методів та алгоритмів обробки даних, що ґрунтуються на двох та трьох вимірних сплайнах. Такі моделі в багатьох випадках є більш адекватними природі процесів, котрі породжують дані, що підлягають аналізу (наприклад в геології, метеорології, відеографії).

Вказані напрями далеко не вичерпують всіх актуальних задач, зміст яких є близьким до виконаних в роботі досліджень. Автор обмежився лише тими, котрі є предметом подальших досліджень, або дослідження з яких в деяких обсягах уже виконані, як самим автором так і його колегами.

## Список джерел

1. A Semi-implicit Semi-Lagrangian Finite-Element Shallow-Water Ocean Model. D.Roux, C.Lin, A.Staniforth. Monthly weater review, 1384-1401,vol.128, may 2000.
2. A. Aldroubi, A.F. Laine, M.A. Unser, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, Proceedings of SPIE 4119, 2000.
3. A. Aldroubi, M.A. Unser, Eds., Wavelets in Medicine and Biology, CRC Press, 1996.
4. A. Aldroubi, P. Abry, M. Unser, "Construction of Biorthogonal Wavelets Starting from Any Two Multiresolutions," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 4, pp. 1130-1133, April 1998.
5. A. Cohen, Biorthogonal wavelets, Wavelets -- A Tutorial in Theory and Applications (C. K. Chui, ed.) Academic Press, Boston, 1992, 123-152.
6. A. Cohen, Ondelettes, Analyses Multir'esolutions et Traitement Num'erique du Signal, Doctoral Thesis, Univ. Paris-Dauphine, 1990. 20.
7. A. Muñoz Barrutia, T. Blu, M. Unser, "[Least-Squares Image Resizing Using Finite Differences](#)," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10, no. 9, pp. 1365-1378, September 2001.
8. A.F. Laine, M.A. Unser, A. Aldroubi, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VI, Proceedings of SPIE 3458, 1998.
9. A.F. Laine, M.A. Unser, A. Aldroubi, Eds., [Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX](#), Proceedings of SPIE 4478, 2001.
10. A.F. Laine, M.A. Unser, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing II, Proceedings of SPIE 2303, 1994.
11. A.F. Laine, M.A. Unser, M.V. Wickerhauser, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing III, Proceedings of SPIE 2569, 1995.
12. B. Vidakovic, P. Mueller. Wavelets for kids: a Tutorial Introduction. Duke University, 1991.
13. C. K. Chui and J. Z. Wang, A cardinal spline approach to wavelets, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), 785-793.



- 14.C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston, 1992.
- 15.C. Lee, M. Eden, M. Unser, "High-Quality Image Resizing Using Oblique Projection Operators," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, no. 5, pp. 679-692, May 1998.
- 16.C. Lee, S. Huh, T.A. Ketter, M. Unser, "Automated Segmentation of the Corpus Callosum in Midsagittal Brain Magnetic Resonance Images," *Optical Engineering*, vol. 39, no. 4, pp. 924-935, April 2000.
- 17.C. Lee, S. Huh, T.A. Ketter, M. Unser, "Unsupervised Connectivity-Based Thresholding Segmentation of Midsagittal Brain MR Images," *Computers in Biology and Medicine*, vol. 28, no. 3, pp. 309-338, May 1998.
- 18.Chui, Charles K.; Wang, Jian-Zhong An analysis of cardinal spline-wavelets. *J. Approx. Theory* 72 (1993), no. 1, 54--68.
- 19.De Boor C. *Box splines*/ De Boor C., Hollig K., Riemenschneider S.. -New York et al.: Springer, 1993. -XVII,200 p.: ill.Applied mathematical sciences;Vol.98.
- 20.Debao Chen, *Cardinal Spline Wavelets*, Doctoral Thesis, the University of Texas at austin, 1994.
- 21.Debao Chen, *Extended families of cardinal spline wavelets*, *Appl. Comp. Harmonic Anal.* 1 (1994), 194-208.
- 22.Dubeau, Francois; Savoie, Jean *Histospline projections on a uniform partition*. *J. Approx. Theory* 55 (1988), no. 1, 18--26.
- 23.F. M ller, P. Brigger, K. Illgner, M. Unser, "Multiresolution Approximation Using Shifted Splines," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 9, pp. 2555-2558, September 1998.
- 24.Felix J. Yanovsky, *Model of the relationship between Doppler and polarization parameters of the radar signal from precipitation*. Report IRCTR-S-002-98. TU-Delft, The Netherlands, 1998, 108 pp.
- 25.G. Battle, *Cardinal spline interpolation and block spin construction of wavelets*, *Wavelets -- A Tutorial in Theory and Applications* (C. K. Chui, ed.), Academic Press, Boston, 1992, 73-90.

26. G<sup>1</sup> Continuous Conditions of Bicubic B-spline Surfaces, X. Shi and Y. Zhao (China) CAGD/Computational Geometry The 4th Asian Symposium on Computer Mathematics Chiang Mai, Thailand, December 17-21, 2000.
27. GARDNER, L.R.T., GARDNER, G.A. & ABDULLAH, M.F. Simulations of Boussinesq solitons. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 08, 1997.
28. GARDNER, L.R.T., GARDNER, G.A., AYOUB, F.A. & AMEIN, N.K. Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite elements. The Arabian Journal for Science and Engineering 22 (1997) 183-193.
29. Grimshaw R., Pelinovsky E., Tian X. Interaction of a solitary wave with an external force //Physica D. 1994. V. 77. P. 405-413.
30. Guo H., Odegard J.E., Lang M., Gopinath R.A., Selesnick I., and Burus C.S. Speckle reduction via wavelet soft-thresholding with application to SAR based ATD/R. In SPIE, vol. 2303, San Diego, CA, 1994.
31. I. Daubechies, Ten lectures on wavelets. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
32. I.J. Schoenberg, Cardinal spline interpolation. Philadelphia, PA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1973.
33. I. Schoenberg, Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Quart. Appl. Math., 4 (1946), pp. 45–99 and 112–141.
34. IDEF Users Group. (1990). *IDEF: framework, draft report* (IDEF-U.S.-0001). Dayton, OH: IDEF Users Group.
35. J. Kybic, P. Thřvenaz, A. Nirkko, M. Unser, "Unwarping of Unidirectionally Distorted EPI Images," IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 19, no. 2, pp. 80-93, February 2000.
36. L.-E. Andersson: Constrained Spline Approximation, Second Annual Meeting of SIAM NORDIC SECTION, Espoo, Finland, August 28--29 1989.
37. L.L. Schumaker, Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981.

38. Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation. Idris Dag *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 182 (2000) 205-215.
39. Lee, Daniel A simple approach to cardinal Lagrange and periodic Lagrange splines. *J. Approx. Theory* 47 (1986), no. 2, 93—100
40. Lu, Chien Ke Error analysis for interpolating complex cubic splines with deficiency 2. *J. Approx. Theory* 36 (1982), no. 3, 183—196.
41. M. Jacob, T. Blu, M. Unser, "[An Exact Method for Computing the Area Moments of Wavelet and Spline Curves](#)," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 23, no. 6, pp. 633-642, June 2001.
42. M. Unser and T. Blu, "Fractional splines and wavelets," *SIAM Review*, in press. Vol.42, No.1, pp.43 –67 March 2000.
43. M. Unser, "A Practical Guide to the Implementation of the Wavelet Transform," *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Aldroubi, M.A. Unser, Eds., CRC Press, Boca Raton FL, USA, pp. 37-73, 1996.
44. M. Unser, "[Sampling: Beyond the Myth of a Perfect Reconstruction](#)," Plenary talk, Fourth International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA'01), Orlando FL, USA, May 13-17, 2001, pp. 15.
45. M. Unser, "Sampling--50 Years After Shannon," *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 4, pp. 569-587, April 2000.
46. M. Unser, "[Splines and Wavelets for Biomedical Imaging](#)," Series of Invited Lectures, Workshop on Fractals and Wavelets in Medical Imaging, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal QC, Canada, February 23-24, 2001.
47. M. Unser, "Splines and Wavelets for Medical Imaging," *Proceedings of the Fourth IEEE EMBS Berder International Summer School on Biomedical Imaging*, June 17-24, 2000, Ile de Berder, France.
48. M. Unser, "Splines: a perfect fit for signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.

- 49.M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, "B-spline signal processing: Part II—efficient design and applications," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, no. 2, pp. 834-848, 1993.
- 50.M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, "B-spline signal processing: Part I—theory," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, no. 2, pp. 821-833, 1993.
- 51.M. Unser, J. Zerubia, "A Generalized Sampling Theory Without Band-Limiting Constraints," IEEE Transactions on Circuits and Systems--II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 45, no. 8, pp. 959-969, August 1998.
- 52.M. Unser, P. Thřvenaz, A. Aldroubi, "Shift-Orthogonal Wavelet Bases," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 7, pp. 1827-1836, July 1998.
- 53.M. Unser, T. Blu, "[Fractional Splines and Wavelets: From Theory to Applications](#)," Joint IDR-IMA Workshop: Ideal Data Representation, Minneapolis MN, USA, April 9-13, 2001.
- 54.M. Unser. Sampling—50 years after shannon. Proceedings of the IEEE, vol. 88, no. 4, pp. 569-587, April 2000.
- 55.M.A. Unser, A. Aldroubi, A.F. Laine, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VII, Proceedings of SPIE 3813, 1999.
- 56.M.A. Unser, A. Aldroubi, A.F. Laine, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing IV, Proceedings of SPIE 2825, Part I and II, 1996.
- 57.M.J. Vrhel, M. Unser, "Multichannel Restoration with Limited A Priori Information," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 8, no. 4, pp. 527-536, April 1999.
- 58.Madych, W. R.; Nelson, S. A. Polyharmonic cardinal splines: a minimization property. J. Approx. Theory 63 (1990), no. 3, 303--320.
- 59.Mayer, R. J. (Ed.). (1990). *IDEFIII function modeling: A reconstruction of the original Air Force report*. College Station, TX: Knowledge Based Systems, Inc.
- 60.Mayer, R. J., Menzel, C. P, & Mayer, P. S. (1991). *IDEF3: A methodology for process description*, WPAFB, OH: AL/HRGA.

61. Mayer, R. J., Menzel, C. P., & deWitte, P. S. (1991). *IDEF3 technical report*. WPAFB, OH: AL/HRGA.
62. Menzel, C. P., & Mayer, R. J. (1990). *IDEF3 formalization report*. WPAFB, OH: AL/HRGA.
63. Menzel, C., Mayer, R. J., & Edwards, D. (1994). IDEF3 process descriptions and their semantics. In A. Kuziak, & C. Dagli (Eds.), *Intelligent systems in design and manufacturing*. New York: ASME Press.
64. Neuman, E. Quadratic splines and histospline projections. *J. Approx. Theory* 29 (1980), no. 4, 297--304.
65. Odegard J.E., Lang M., Guo H., Gopinath R.A., Burus C.S. Nonlinear wavelet processing for enhancement of images, Submitted to: IEEE SP, 1994. Odegard@rice.edu.
66. P. Blanc, T. Blu, T. Ranchin, L. Wald, R. Aloisi, "Using Iterated Rational Filter Banks Within the ARSIS Concept for Producing 10 m Landsat Multispectral Images," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 19, no. 12, pp. 2331-2343, August 1998.
67. P. Brigger, F. Müller, K. Illgner, M. Unser, "Centered Pyramids," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 9, pp. 1254-1264, September 1999.
68. P. Brigger, J. Hoeg, M. Unser, "B-Spline Snakes: A Flexible Tool for Parametric Contour Detection," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 9, pp. 1484-1496, September 2000.
69. P. Brigger, S.L. Bacharach, G. Srinivasan, K.A. Nour, J.A. Carson, V. Dilsizian, A. Aldroubi, M. Unser, "Segmentation of Gated TI-SPECT Images and Computation of Ejection Fraction: A Different Approach," *Journal of Nuclear Cardiology*, vol. 6, no. 3, pp. 286-297, May-June 1999.
70. P. Thävenaz, M. Unser, "Geometric Aspects in 3D Biomedical Image Processing," *Association suisse de microtechnique (schweizerische Gesellschaft für Mikrotechnik), Bulletin ASMT/SGMT no. 22, Microvision et capteurs optiques, Journées de microtechnique, Lausanne, Switzerland, October 1-2, 1998, pp. 5-10.*

- 71.P. Th̃venaz, M. Unser, "Optimization of Mutual Information for Multiresolution Image Registration," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 9, no. 12, pp. 2083-2099, December 2000.
- 72.P. Th̃venaz, T. Blu and M. Unser, "Image interpolation and resampling," Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis, I.N. Bankman, Ed., Academic Press, San Diego Ca, USA, pp. 393-420, 2000.
- 73.P. Th̃venaz, T. Blu, M. Unser, "Interpolation Revisited," IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 19, no. 7, pp. 739-758, July 2000.
- 74.P. Th̃venaz, U.E. Ruttimann, M. Unser, "A Pyramid Approach to Subpixel Registration Based on Intensity," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, no. 1, pp. 27-41, January 1998.
- 75.Pelinovsky E., Choi H. A mathematical model for nonlinear waves due to moving disturbances in a basin of variable depth //J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn. 1993. V. 5. P. 191-197.
- 76.Rice, John; Rosenblatt, Murray Integrated mean squared error of a smoothing spline. J. Approx. Theory 33 (1981), no. 4, 353—369
- 77.Robust Regularized Learning Using Distributed Approximating Functional Networks. Z.Shi, D.S.Zhang, D.J.Kouri, D.K.Hoffman. University of Houston, 1999, zshi@bayou.uh.edu p.4 .
- 78.Russchenberg, H.J.W., Bimodal Doppler spectra from clouds and precipitation. IEEE Trans. Geoscience and remote sensing, v. 35, No. 4, May 1997.
- 79.Ruttimann, M. Unser, P. Th̃venaz, C. Lee, D. Rio, D.W. Hommer, "Statistical Analysis of Image Differences by Wavelet Decomposition," Wavelets in Medicine and Biology, A. Aldroubi, M.A. Unser, Eds., CRC Press, Boca Raton FL, USA, pp. 115-144, 1996.
- 80.Rutuparna Panda, B.N. Chatterji. B-spline signal processing using harmonic basis function. Signal Processing 72(1999) 147-166.
- 81.S. G. Mallat, Multiresolution approximations and orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ , Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69-87.

82. S. M. Gomes and E. Cortina and I. M. Moroz (1995), 'Characterisation of Biorthogonal spline wavelets by means of derivatives and primitives'. In 'Approx. Theory VIII no. 2: Wavelets and Multilevel Approximation', eds. C.K. Chui and L.L. Schumaker.
83. S. Mallat, A wavelet tour of signal processing. San Diego: Academic Press, 1998.
84. Sablonniere, Paul Positive spline operators and orthogonal splines. J. Approx. Theory 52 (1988), no. 1, 28--42.
85. Schempp, Walter Cardinal logarithmic splines and Mellin transform. J. Approx. Theory 31 (1981), no. 3, 279--287.
86. Schempp, Walter On cardinal exponential splines of higher order. J. Approx. Theory 31 (1981), no. 3, 288--297.
87. Schumaker, Larry L. On hyperbolic splines. J. Approx. Theory 38 (1983), no. 2, 144--166.
88. Silitary Waves in the Critical Surface Tension Model. Yi.A.Li, B.Nguyen,P.J.Olver., 1998. <http://www.math.umn.edu/~olver>.
89. T. Blu and M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques: Part I—interpolators and projectors," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 10, pp. 2783-2795, 1999.
90. T. Blu and M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques: Part II—wavelets," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 10, pp. 2796-2806, 1999.
91. T. Blu, "A New Design Algorithm for Two-Band Orthonormal Rational Filter Banks and Orthonormal Rational Wavelets," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 6, pp. 1494-1504, June 1998.
92. T. Blu, M. Unser, "Approximation Error for Quasi-Interpolators and (Multi-) Wavelet Expansions," Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 6, no. 2, pp. 219-251, March 1999.
93. T. Blu, P. Thévenaz, M. Unser, "[MOMS: Maximal-Order Interpolation of Minimal Support](#)," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10, no. 7, pp. 1069-1080, July 2001.

94. Talipova T., Pelinovsky E., Kit E. Numerical simulation of wind waves in the coastal zone //Int. Conf. "Coastal Dynamics'95". Gdansk (Poland), 1995. P. 211-212.
95. Thomas Fuch. (1999). Optimal Smoothing Splines. [Http://www.applied-spectroscopy.com/spline.html](http://www.applied-spectroscopy.com/spline.html).
96. U.E. Ruttimann, M. Unser, R.R. Rawlings, D. Rio, N.F. Ramsey, V.S. Mattay, D.W. Hommer, J.A. Frank, D.R. Weinberger, "Statistical Analysis of Functional MRI Data in the Wavelet Domain," IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 17, no. 2, pp. 142-154, April 1998.
97. V.R. Zschorlich, "Digital filtering of EMG-signals", Electromyogr. Clin. Neurophysiol., Vol.29, pp. 81-86, 1986.
98. W.Sweldens, P.Schroder, Building Your Own Wavelets at Home. <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/index.html>.
99. W.Sweldens. Wavelets: What Next? <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/index.html>
100. Xuming He, Pin Ng. Quantile splines with several covariates. Journal of Statistical Planning and Inference 75(1999) 343-352.
101. Yanovski F.J., Ligthart L.P., Russchenberg H.W.J., Fomochoy V.S., "Comparison of Modeled and Measured Doppler-Polarimetric Parameters of Radar Signal Reflected from Rain", (invited), Proc. 2000 International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP2000) vol 3, pp 951-955, ISBN 4-88552-171-8 C3055, Fukuoka, Japan, 2000
102. Yanovsky F.J., Russchenberg H.W.J., Ligthart L.P. Doppler and polarization parameters of radar signal from rain IEEE Trans. on GRS, 2001 (in publication)
103. Yanovsky, F.J., H.W.J. Russchenberg, L.P. Ligthart and V.S. Fomichev, Microwave Doppler-Polarimetric Technique for Study of Turbulence in Precipitation. IEEE 2000 International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Hilton Hawaiian Village Honolulu, Hawaii, 24-28 July 2000, Volume V, pp. 2296-2298.



104. Z. Shi, Z. Bao, L.C. Jiao, "Nonlinear ECG filtering by group normalized wavelet packets", IEEE International Symposium on Information Theory, Ulm, Germany, 1997.
105. Адаптивные системы сбора и передачи аналоговой информации. Основы теории /А.Н.Дядюнов, Ю.А.Онищенко, А.И.Сенин.- М.:Машиностроение, 1988. - 288 с.
106. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. -М.:ЮНИТИ, 1998. -1022 с.
107. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.:Мир, 1972. - 316с.
108. Алгоритмизация в АСУ / Г. А. Козлик. — Киев : о-во "Знание" УССР, 1980. — 23с.
109. Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. - Киев : Наук. думка, 1982. - 250 с.
110. Апроксимація функцій дискретного аргументу: Автореф. дис... канд. фіз.- мат. наук: 01.01.01 / Ю.В. Великіна / НАН України. Ін-т математики. — К., 1999. — 15 с.
111. Атлас Д. Успехи радарной метеорологии.- Л.: Гидрометеиздат, 1967.- 198 с.
112. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.- М.: Мир, 1979. - 536 с.
113. Бабак В. П., Хандецький В. С., Шрюфер Е. Обробка сигналів — К.:Либідь, 1999. — 496с.
114. Бабич М.Д., Задірака В.К.. Питання оптимізації обчислень (1969-2001) (симпозіуми, конференції, школи, семінари) : Наук.-метод. та навч.-організаційні матеріали / НАН України; Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова; Наукова рада НАН України з проблеми "Кібернетика". — К., 2001. — 107с.
115. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана.- М.: Мир, 1988. - 168 с.
116. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. -М.:Высш.шк., 1988 -488с.

117. Безуглов Д.А., Скляр А.В. Алгоритм восстановления волнового фронта на базе двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов // журнал "Оптика атмосферы и океана", том 13, 2000г., № 08, стр.770-774
118. Беляевский Л.С., Новиков В.С., Олянюк П.В. Обработка и отображение радионавигационной информации.- М.: Радио и связь, 1990. - 232 с.
119. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. - 540с.
120. Березовский А.И., Кондратенко О.С. О выявлении и уточнении априорной информации. УСиМ, №6, Киев, 1997. - С.17-22.
121. Березовский А.И., Кондратенко О.С. До побудови  $\varepsilon$ -наближень функцій однієї змінної. //Теорія обчислень. Зб.наук.праць. –Київ:ІК НАНУ, 1999. С.325-329.
122. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. - 448 с.
123. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. М.:Высш.школа, 1990. - 544 с.
124. Борович З.И. Определители и матрицы.- М.: Наука, 1988. 184 с.
125. Бортовые метеонавигационные радиолокаторы // Ф. И. Яновский; Киев. ин-т гражд. авиации им. 60-летия СССР. - Киев : КИИГА, 1987. - 71 с.
126. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. -М.: Наука, 1986. -544 с.
127. В а й с м а н М. В., П р и л у ц к и й Д. А., С е л и щ е в С. В. "Алгоритм синтеза имитационных электрокардиосигналов для испытания цифровых электрокардиографов" Московский Институт Электронной Техники, Москва, Зеленоград 2000 год <http://www.ecg.ru>
128. В а й с м а н М. В., П р и л у ц к и й Д. А., С е л и щ е в С. В. "Программируемый имитатор электрокардиосигналов". Московский Институт Электронной Техники, Москва, Зеленоград 2000 г. <http://www.ecg.ru>

129. В.Ю. Новокшенов."Математические модели в естествознании. Введение в теорию солитонов" Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, 1999 г.
130. Валях Е. Последовательно-паралельные вычисления.- М.: Мир, 1985. - 456с.
131. Вариабельность сердечного ритма. Стандарты измерения, физиологической интерпретации и клинического использования. Рекомендации. Русский перевод.  
<http://www.ecg.ru>
132. Василенко В.А. Сплайн-функции:теория, алгоритмы, программы.- Новосибирск: Наука, 1983. - 212 с.
133. Введение в вейвлет преобразование. Robi Polikar, Iowa State University  
/Перевод ГРИБУНИН В.Г. [www.autex.spb.ru](http://www.autex.spb.ru)
134. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Физматгиз, 1962. - 564 с.
135. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев: Наукова думка, 1986. - 543 с.
136. Волков Е.А. Численные методы.- М.: Наука, 1987. - 248 с.
137. Вопросы когнитивно-информационной поддержки постановки и решения новых научных проблем : Сб. науч. тр. / НАН Украины; Институт кибернетики им. В.М.Глушкова / А.В. Палагин (отв.ред.). - К., 1995. - 170с.
138. Вычисление функций на ЭВМ : Справочник / Б. А. Попов, Г. С. Теслер. - Киев : Наук. думка, 1984. - 599 с.
139. Горбань И.И. Справочник по теории случайных функций и математической статистике для научных работников и инженеров / НАН Украины; Институт проблем математических машин и систем. - К. : Изд-во Ин-та кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1998. - 149с.
140. Гримшоу Р., Пелиновский Е. Н. Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с бегущими возмущениями //ДАН. 1995. Т. 344. С. 394-396.
141. Данильченко Л.С., Задирака В.К., Кондратенко О.С., Людвиченко В.А., Мельникова С.С. Пакет программ решения задач цифровой обработки сигналов (ЦОС-1) //Кибернетика. – 1992. -№2. С.128-131.

142. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.
143. Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. Применение сплайн функций в задачах статистического анализа информационных сигналов.- Киев: Знание, 1981. - 20 с.
144. Денисюк В.П., Марченко Б.Г. Сплаины и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов / Национальный технический ун-т Украины "Киевский политехнический ин-т". — К., 1995. — 245с.
145. Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. Применение эрмитовых сплайнов для восстановления информационных сигналов по дискретным наблюдениям.- Киев: Знание, 1983. - 24 с.
146. Дж Ортега. Введение в паралельные и векторные методы решения линейных систем.- М.:Мир, 1991. - 367 с.
147. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.:РХД, 2001.
148. Довиак Р., Зрнич Д. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения. Л.: Гидрометеиздат, 1988, 512 с.
149. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. - М.:Финансы и статистика, 1998. - 352 с.
150. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. –СПб.:Питер, 2002. –608с.
151. Завялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.П. Методы сплайн функций.- М.: Наука, 1980. - 352 с.
152. Завялов Ю.С., Леус В.А. Сплаины в инженерной геометрии.- М.:Машиностроение, 1985. - 224 с.
153. Задирака В. К., Иванов В. В. Вопросы оптимизации вычислений : (Числен. интегрирование и дифференцирование). - Киев : о-во "Знание" УССР, 1979. - 29, [5] с.; 20 см. - (Кибернетика / О-во "Злание" УССР).

154. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. –Киев. Наукова думка. –1983. –215с.
155. Зенков Л.Р., Ронкин М.А. Функциональная диагностика нервных болезней. - М.:Медицина -1991, 640 с.
156. И в а н о в Г.Г. "Электрокардиография высокого разрешения" , Москва, 1999 год. <http://www.ecg.ru/books/index.html>
157. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов.- М.: Радио и связь, 1991. - 280 с.
158. Игнатов В.А., Маньшин Г.Г., Трайнев В.А. Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем.- М.:Энергия, 1974. - 264 с.
159. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений.- М.:Наука, 1988. - 160 с.
160. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем.- М.: Наука, 1988. - 160 с.
161. Ильин В.А., Позняк Э.Г.. Основы математического анализа. Часть 2. М.:Наука, 1973. - 448 с.
162. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения.- М.: Наука, 1985. - 208 с.
163. Интерполяция и аппроксимация сплайнами: Сб.науч.тр/ Науч.ред.:Ю.С.Завьялов,В.Л.Мирошниченко. -Новосибирск, 1992. -102 с.
164. Исследование динамики социально- экономических систем : Сб. науч. тр. / НАН Украины; Институт кибернетики им. В.М.Глушкова / Н.И. Костина (ред.), Г.А. Козлик (ред.). — К., 1995. — 70с.
165. Казанский К.В., Обобщенный метод расчета емкости усреднительного штабеля. Сборник “Обогащение руд черных металлов”, вып.3. -М.:Недра, 1975, - с.146-156.
166. Каленанпур Г. Стохастическая теория фильтрации.- М.: Наука, 1987. - 320с.
167. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике. Харьков: Из-во Харьковского университета, 1972. - 412 с.

168. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.- М.: Наука, 1976. - 568 с.
169. Кобелев В.Ю. - [Адаптивное вейвлет-преобразование сигналов](#). Доклады 3-й Международной Конференции (DSPА-2000). Санкт-Петербург, 2000.  
[//www.autex.spb.ru](#) -5с.
170. Кобелев В.Ю., Ласточкин А.В. Выбор оптимальных вейвлетов для обработки сигналов и изображений. // докл. 2-й международной конф. и выставки “Цифровая обработка сигналов и ее применения” (DSPА’99). Москва, 1999. Т.2. с.514-518.
171. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.:Высшая школа, 1973. - 368 с.
172. Колобов А.Г. Метод сплайн-коллокации для решения уравнения вихря в динамике океана: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук:01.01.07. -Новосибирск, 1991. -12 с
173. Колтун В.М., Трусков Ю.С. Портативный прибор для измерения характеристик электрокардиографов. Медицинская техника, №4, 1989.-М:Медицина, ст.55-58.
174. Компьютерные методы в задачах прикладной математики и механики: Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова / Ред.: В.И. Моссаковский. — К., 1998. — 126 с. — рус.
175. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1973. - 832 с.
176. Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения.- М.: Наука, 1984. - 352с.
177. Корнильев Э.А., Прокопенко И.Г. Устойчивые алгоритмы обработки сигналов в информационных системах.- Киев: Техніка, 1989. - 224 с.
178. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации.- М.: Сов.радио, 1974. - 432 с.
179. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация, введение в теорию. -Киев: и-во “ВВіЦ”, 2000. -426 с.
180. Кульбак С. Теория информации и статистика.- М.: Наука, 1967. - 408 с.

181. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем.- М.: Мир, 1989. - 376 с.
182. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая.- М.: Сов.радио, 1974. - 552 с.
183. Лившиц К.И. Сглаживание экспериментальных данных сплайнами/ Лившиц К.И.; Под ред.А.Ф.Терпугова. -Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. -180с.
184. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. — К., 1997. - 358с.
185. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.- М.: Физматгиз, 1962. - 352 с.
186. Логинов В.М. Солитоны и диагностика случайных шумовом // журнал "Оптика атмосферы и океана", том 8, 1995 год Институт Оптики Атмосферы СО РАН, стр.484.
187. Лоуссон, Хенсон. Численное решение задач метода наименьших квадратов.- М.:Мир, 1988. - 225 с.
188. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.:Наука, 1991. - 432 с.
189. Маликов В.Т, Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ.- Киев: Вища школа, 1989. - 213 с.
190. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.:Мир,1990. -584 с.
191. Математика и САПР / Жермен-Лакур П., и др.- М.: Мир, 1989 264 с.
192. Математичне моделювання ходи людини на основі оптимізації керування процесів біодинамічних систем / В.Є. Бербюк, Б.А. Литвин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. — 41, N 3. — С. 153-161. — укр.
193. Метод фрактальной классификации сложных сигналов. Ю.Н.Кликушин. // "Журнал радиоэлектроники" № 4 , 2000.
194. Методи розв'язку рівнянь теорії нелінійних коливань /В.І.Зінченко /Дніпродзерж. держ. техн. ун-т. — К., 1999. — 123 с.

195. Методи та алгоритми виявлення-вимірювання інформаційних сигналів із застосуванням сплайн-перетворень: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.06 /В.М. Шутко / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1998. — 20 с. — укр.
196. Методы и алгоритмы оптимизации программного и технического обеспечения АСУ промышленного назначения : Сб. науч. тр. / Киев. ин-т автоматики; Под ред. Г. А. Козлика. — Киев : КИА, 1990. — 156 с.
197. Методы и средства повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем управления воздушным движением: Автореф. дис. докт. техн. наук: 05.22.14 / Н.А.Шутко / Киевский институт инженеров гражданской авиации — К.,1991. — 30 с.
198. Методы сплайн-функций,сибирская конф.(2001;Новосибирск). Сибирская конференция "Методы сплайн-функций", посвященная памяти Ю.С.Завьялова (1931-1998): Тез. докл., Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. -80 с.: ил..
199. Моделирование на цифровых, аналоговых и гибридных ЭВМ. Ажогин В.В., Згуровский М.З. –Киев: Вища школа, 1983. –280с.
200. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.- М.: Наука, 1987. - 240 с.
201. Мохамад Абдулбаки Ибрагим Применение сплайн-функции при реконструкции автомобильных дорог в условиях САР: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.техн.наук:05.23.11. -М., 1994. -20 с.
202. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль.- Томск: МП"Раско", 1991.- 272 с.
203. Мюррей Д., У.ван Райнер. Энциклопедия форматов графических файлов. - К.:ВНУ,1997. -678 с.
204. Натуральные сплайны многих переменных/ Игнатов М.И., Певный А.Б.; Отв.ред.В.Н.Прохоров. -Л.: Наука, 1991. -125 с.: ил..
205. Начала математического моделирования: Спец. курс "Стационар. и нестационар. задачи теории колебаний" для студ. техн. вузов. Ч. 2 / Т.В. Крылова. — К.: Вища школа, 1998. — 177 с. — Библиогр.: 98 назв. — рус.



206. Некорректные задачи естествознания / под ред. А.Н.Тихонова, А.В.Гончарского.- М.: Из-во Московского университета, 1987. 299 с.
207. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений.- Л.:Энергоатомиздат, 1991. - 304 с.
208. Ньюэлл А. Солитоны в физике и математике -М.:Мир 1987.
209. О реализации сглаживающих полиномиальных сплайнов методом матричной прогонки/ Смелов В.В., Кучинский К.И.. -Новосибирск, 1996. -14с.
210. Одинец Г.С. Алгоритм автоматизированной обработки реосигналов. Медицинская техника, №2, 1988.-М:Медицина, ст.29-32.
211. Оптимизация обработки информации в системах управления / Г. А. Козлик, Ю. В. Бондарь, И. А. Кириллов. — Киев : Тэхника, 1989. — 156
212. Основные конструкции всплесков. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Фундаментальная и прикладная математика. 1997. 3.4. с.999-1028.
213. Основы теории всплесков. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. - Успехи математических наук, 1996. 87с.
214. Плотников В. А., Прилуцкий Д. А., Селищев С. В. "Стандарт SCP-ECG в программных системах для электрокардиографии". Московский Институт Электронной Техники, Москва, Зеленоград, 1999 г. <http://www.ecg.ru>
215. Паралельные вычисления / под ред. Г.Родрига. М.: Наука, 1986. - 376 с.
216. Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г., Степанянц Ю. А. Моделирование распространения нелинейной внутренней волны в горизонтально неоднородном океане //Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. С. 79-85.
217. Петренко П. А., Теслер Г. С. Обработка данных в вычислительных системах и сетях. - Киев : Техніка, 1980. - 232 с.
218. Плотников А.В. Волновое преобразование (wavelet) в электрокардиографии. Секция 9. Компьютерные системы сбора и математической обработки ЭКГ информации. Международный симпозиум КОМПЬЮТЕРНАЯ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИЯ НА РУБЕЖЕ СТОЛЕТИЙ, Россия, Москва 27 - 30 апреля 1999 г. <http://www.ecg.ru>

219. Плотников А.В., Прилуцкий Д.А., Селищев С.В. Стандарт DICOM в компьютерных медицинских технологиях./ Москва: "Медицинская техника", 1997, №2, с.18–24.
220. Побудова кусково-гладких приближених розв'язків жорсткої задачі Коші / В.С.Абрамчук, І.В.Абрамчук // Вісн. Вінниц. політехн. ін-ту. — 1998. — N 3. — С. 69-72. — укр.
221. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами.- Киев:Наук.думка, 1989. - 372 с.
222. Попов Я. Б. Математичне моделювання первинних перетворювачів фізичних величин на основі апроксимаційних методів : Автореф. дис. канд. техн. наук (01.05.02) / Державний ун-т "Львівська політехніка". - Л., 1998. - 18с.
223. Построение автоматизированных систем обработки экспериментальных данных : [Сб. статей] / АН УССР, Науч. совет по пробл. "Кибернетика", Ин-т кибернетики; [Редкол.: Г. С. Теслер (отв. ред.) и др.]. - Киев : ИК, 1981. - 73 с.
224. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: - В 2-х т. Том 1. -М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999 - 366 с.
225. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: - В 2-х т. Том 2. -М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999 - 304 с.
226. Представлення функцій у системах керування / Б.О. Попов // Косм. наука і технологія. — 1998. — 4, N 4. — С. 151-155. — укр.
227. Приближение функций для технических приложений / Б. А. Попов, Г. С. Теслер. - Киев : Наук. думка, 1980. - 350 с.
228. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: С.А.Айвазян и др.- М.: Финансы и статистика, 1989. - 607 с.
229. Приставка А.Ф., Райко О.В. Гистосплайны. -Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. -136 с.
230. Про побудову і застосування тензорних ермітових сплайнів у теорії пружності твердих тіл / О.І. Хвищун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. N4. — С. 150-154. — укр.

231. Пронин А.И. Применение динамического программирования и решение уравнения Беллмана с помощью сплайнов полуограниченной кривизны: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.11. - М., 1993. - 11 с
232. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978. - 848 с.
233. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М.: Мир, 1984. - 264 с.
234. Розв'язування крайової задачі для нелінійних диференціальних рівнянь нейтрального типу методом сплайн-функцій / І.М. Черевко, Н.П. Настасьєва // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — 1998. — Вип.3. - С. 156-165. — укр.
235. Розробка інформаційних технологій оперативного аналізу і прогнозування параметрів моніторингу складних систем: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.06 / Б.Є. Неділько / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1999. — 18 с. — укр.
236. Розробка інформаційної технології нелінійної робастної сплайн-обробки даних в системі моніторингу: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.06 / В.М. Остропицький / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1999. — 17 с. — укр.
237. Роль векторкардиографии в ранней диагностике гипертрофии левого желудочка у больных гипертонической болезнью Маколкин В.И., Подзолков В.И., Самойленко В.В., Хасбулатова С.Р., Буфарах М.С. Московская медицинская Академия им. И.М. Сеченова. Кафедра внутренних болезней №1 лечебного факультета, Москва. [http://www.ecg.ru/conf/simp\\_xxi/text/s2t04.htm](http://www.ecg.ru/conf/simp_xxi/text/s2t04.htm)
238. Рудаков П.И., Сафонов И.В., Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. - 416 с.
239. Русаков С.В. Разностные сплайн-схемы и их приложения: Автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук: 01.01.07. - М., 1992. - 32 с.: ил. - В надзаг.: МГУ им. М.В. Ломоносова.

240. Рыбалка С.А. Математическое и программное обеспечение генерирования векторных сплайн-изображений с оценкой качества в метрике Хаусдорфа: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. науки: 05.13.11. -Томск, 1997. -22 с.. - Библиогр.:с. 22(7 назв.)
241. Сабоннадьер Ж.К. Кулон Ж.Л. Метод конечных элементов и САПР.- М.:Мир, 1989. - 190 с.
242. Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике / под ред. Г.Нолета.- М.:Мир, 1990. - 416 с.
243. Слепов Н. Солитонные сети // “СЕТИ” №03, 1999 И-во “Открытые системы”.
244. Современные методы усреднения железнорудного сырья и его влияние на эффективность доменной плавки. Некрасов З.И., Ободан Я.М., Миршавка В.П., Товаровский И.Г. В сб. “Обогащение руд черных металлов”, вып.1. - М.:Металлургия, 1972, с.164-172.
245. Соколова И.В. Система автоматизированной диагностической оценки функционального состояния сосудов головного мозга по реоэнцефалограмме. Медицинская техника, №2, 1986.-М:Медицина, ст.9-13.
246. Сплайн-аппроксимация бианалитических функций равномерно внутри квазикруга / Е.Ю. Орфиняк // Доп. НАН України. — 1999. — N 1. — С. 40-43. — рус.
247. Сплайн-идентификация в обратных задачах теплопроводности / Е.Н. Бут // Электрон. моделирование. — 1999. — 21, N 2. — С. 86-95. — рус.
248. Сплайн-інтерполяція загальними експоненціальними функціями багатьох змінних / І.В. Абрамчук // Вісн. Вінниц. політехн. ін-ту. — 1998. — N 4. — С.96-100. — укр.
249. Сплайн-обробка вимірювальної інформації та її застосування в задачах ідентифікації технічних систем: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.06 /В.В.Турчак / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1998. — 20 с. — укр.
250. Сплайн-функции и их приложения: Сб. науч.тр./ Науч.ред.:Ю.С.Завьялов, В.Л.Мирошниченко. -Новосибирск, 1997. -228 с.

251. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т1./ под ред. Э.Ллойда и др.- М.:Финансы и статистика, 1989. - 510 с.
252. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т2./ под ред. Э.Ллойда и др.- М.:Финансы и статистика, 1989. - 526 с.
253. Степаненко В.Д. Радиолокация в метеорологии. Л.: Гидрометеоздат, 1973, 344 с.
254. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.- М.:Наука, 1976. - 248 с.
255. Теория и практика вейвлет-преобразования. ВОРОБЬЕВ В.И., ГРИБУНИН В.Г. ВУС, Типография ВУС, СПб.,1999. С.204.
256. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1990. 232 с.
257. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника.- М.:Радио и связь, 1982. - 624с.
258. Ткачева О.Е. Разработка и исследование свойств метода обработки экспериментальных данных усреднением аппроксимирующих сплайнов: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.техн.наук: 05.13.16. -Л., 1991. -16 с. - В надзаг.: Ленингр.электротехн.ин-т им.В.И.Ульянова(Ленина).
259. Фабриков А.В., Алдошина О.И., Мамаева А.В. Оценивание времен запаздывания сигналов методом адаптивной фильтрации с применением сглаживающих сплайнов// журнал "Оптика атмосферы и океана" том 8, 1995г., № 08, стр.1213
260. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. - М.:Наука, 1972. - 400с.
261. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.- М.:Мир, 1989. 655 с.
262. Храісат Я.С.Х., Яновський Ф.Й. Зв'язок інтервалу кореляції обвідної ехо-сигналу з інтенсивністю турбулентності у відбивному об'ємі. Проблеми інформації і управління. Збірник наукових праць, вип. 3, Київ: КМУЦА, 1998, с. 296-299.

263. Цифровая обработка сигналов: Справочник / Гольденберг Л.М. и др.- М.:Радио и связь, 1985. - 312с.
264. Цифровая обработка сигналов. Задирака В.К., Мельникова С.С. Киев:Наукова думка, 1993. С.294
265. Чжоу Гуйхуа Применение методов интерполяции и сплайн-аппроксимации для синтеза субоптимальных стратегий стабилизации движения летательных аппаратов: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук:01.01.11. -М., 1994. -18 с.: ил. - В надзаг.: Моск.гос.авиационн-т (техн.ун-т),МАИ.
266. Численные методы. Н.Н.Калиткин. -М.:Наука, 1978. 512 с.
267. Чуи Ч. Введение в вэйлеты. М.:Мир, 2001. С.412.
268. Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления.- М.:Энергоатомиздат, 1987. -80с.
269. Эффективные алгоритмы и программы решения некоторых задач цифровой обработки сигналов для микроЭВМ / В. К. Задирака, Н. А. Маслова. - Киев : ИК, 1990. - 27 с.
270. Эффективные алгоритмы и программы решения некоторых задач цифровой обработки сигналов для микроЭВМ / В. К. Задирака, Н. А. Маслова. — Киев : ИК, 1990. — 27 с.
271. Яновский Ф.И. Моделирование процессов взаимодействия радиолокационного сигнала с турбулизированным метеорологическим объектом. Вісник КМУЦА, вип.1,1998, с. 125-136.
- \* \* \*
272. Белецкий А.Я., Шелевицкий И.В., Шутко В.Н.. Спектральный анализ сверхмалых выборок наблюдений. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1998.
273. Білецький А.Я., Матіборський В.В., Сенін А.О., Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Побудова квазіортогональних сплайнових базисів з неперервною першою

похідною. Вісник центрального наукового центру транспортної Академії України. Вип.2, травень 1999, Київ.

274. Білецький А.Я., Матіборський В.В., Шелевицький І.В., Шутко В.М. побудова ермітових сплайнових базисів у лагранжівій формі. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. Том 2. - Дніпропетровськ. -“Навчальна книга”,1999
275. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Наближення залежностей за допомогою дискретних сплайнових базисів. Вісник КМУЦА (№1, 1999), Київ. с.85-89.
276. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Рекурентний сплайн-метод спектрального оцінювання. Вісник КМУЦА (№2, 1999), Київ. с.138-141.
277. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М., Юрко Ю.В. Адаптивна обробка геохімічних аналізів з допомогою сплайнової моделі. Вісник КМУЦА (№1-2, 2000), Київ. с.89-93.
278. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Приведення сплайнових базисів до лагранжівіої форми. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. Том 4. - Дніпропетровськ. - “Навчальна книга”, 2000.
279. Бойко И.Ф., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В. Статистическая идентификация линейных динамических систем с помощью сплайнов // Повышение эффективности функционирования радиоэлектронных систем: Сб.научн.тр.- Киев: КИИГА, 1992. - с.93-
280. Бойко И.Ф., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В. Параметрическая идентификация радиоэлектронных систем с помощью сплайн-функций // Проблемы совершенствования радиоэлектронных комплексов и систем обеспечения полетов: Сб.научн.тр.- Киев: КИИГА, 1990. С.100-107.
281. Бойко И.Ф., Шутко В.Н., Шелевицкий И.В., Турчак В.В.. Метод и алгоритм оптимальной фильтрации потока измерительной информации в реальном

времени. Проблемы моделирования и цифровой обработки сигналов: Сборник научных трудов.-Киев:КМУГА, 1996. (стр.125-136).

282. Доровской В.А., Миначева А.В., Сенин А.А., Шелевицкий И.В. Анализ данных в экспертных системах антикризисного управления // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. - Том 3. - Дніпропетровськ. - “Навчальна книга”, 2000.- С.45-54.
283. Доровской В.А., Шелевицкий И.В. Моделирование дихотомических тестов. Придніпровський науковий вісник. (№131, 1998), Дніпропетровськ. с.14-24.
284. Доровской В.А., Шелевицкий И.В. Оперативный сплайн прогноз валютных курсов. Придніпровський науковий вісник. (№129, 1998), Дніпропетровськ. с.2-9.
285. Доровской В.А., Шелевицкий И.В. Прогнозирование кризисного состояния эргатических систем. Придніпровський науковий вісник. (№123, 1998), Дніпропетровськ. с.72-83.
286. Марченко Б.Г., Шутко Н.А., Шелевицкий И.В., Яппаров А.Н. Прогнозирование параметров радиоэлектронной аппаратуры с помощью сплайнов // Вопросы оптимального обслуживания и ремонта аэронавигационных судов ГА:Межвуз.сб.научн.тр.- Киев: КИИГА, 1985. с.67-73.
287. Сенін А.О., Сольонов В.І., Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Рекуррентний сегментний сплайн-метод спектрального оцінювання. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1999.
288. Сенін А.О., Сольонов В.І., Шелевицький І.В., Юрко Ю.В. Сплайнова модель релаксаційного генератора. Вісник центрального наукового центру транспортної Академії України. Вип.2, травень 1999, Київ.
289. Турчак В.В., Шелевицкий И.В., Шутко Н.А.. Приближение функции двух переменных с помощью двумерных кубических сплайнов. Проблеми авіоніки. Збірник наукових праць. КМУЦА, Київ, 1997.(ст.131-135).
290. Турчак В.В., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Необмежені сплайни в задачах фільтрації та стиснення даних Вісник КМУЦА (№1, 1998), Київ. С.275-279.



291. Шелевицкий И.В., Шутко Н.А. Способ обработки и моделирования траекторной информации // Статистические методы обработки сигналов в авиационном радиоэлектронном оборудовании: Сб.научн.тр.- Киев: КИИГА, 1992. - с.88-91.
292. Шелевицкий И.В. Метод адаптивного сжатия данных с помощью сплайнов. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1998.
293. Шелевицкий И.В.. Рекуррентный алгоритм построения сплайнов методом наименьших квадратов. Статистические методы обработки сигналов в авиационных радиоэлектронных системах: Сборник научных трудов. - Киев:КМУГА, 1995.
294. Шелевицький І.В. Ефективність оцінок методу найменших квадратів для сплайнової моделі. // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. - Том 1. - Дніпропетровськ. - “Навчальна книга”, 1999.- С.129-135
295. Шелевицький І.В., Шутко В.М. Вибір сплайнових базисів у задачах оптимальної лінійної фільтрації. Захист інформації. (№2, 2000), Київ. с.40-44.
296. Шелевицький І.В. Побудова цифрового сплайн-інтерполяційного фільтра. // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. - Том 5. - Дніпропетровськ. - “Видавництво ДНУ”, 2001.- С.24-30.
297. Шелевицький І.В., Шутко В.М., Ткаченко Є.В. Сплайнові базиси в задачах стиснення числових даних. Вісник КМУЦА (№7, 2000), Київ. (ст.119-124).
298. Шелевицький І.В., Шутко В.М., Юрко Ю.В. Базисні сплайни та їх зв'язок із законами розподілу. Захист інформації. (№1, 2000), Київ. с.28-32.
299. Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Швидкий алгоритм оптимальної сплайн-фільтрації даних. Проблеми авіоніки. Збірник наукових праць. КМУЦА, Київ, 1997.(ст.136-143).
300. Шелевицький І.В.. Сплайновий характер інтерполяційних фільтрів. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1999.

І.В.Шелевицький

Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. –  
Кривий Ріг: Європейський університет, 2002 р. - 304 с.,іл.

ISBN 966-7942-56-2

Книга присвячена методам та засобам сплайн-технології обробки сигналів складної форми. Розглянуто питання адаптації сплайнів до частотних властивостей сигналів, алгоритми інтерполяції, фільтрації, ідентифікації, стиснення сигналів.

Книга призначена для інженерно-технічних працівників, студентів та аспірантів, що займаються питаннями цифрової обробки сигналів системах підтримки прийняття рішень та управління.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Шелевицький Ігор Володимирович

**Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів  
складної форми**

(українською мовою)

під редакцією д.т.н., проф. Шутка М.О.

Головний редактор: І.В.Шелевицький

Оператор: І.В.Шелевицький

Розробка та дизайн обкладинки: К.І.Шелевицька

