Міністерство освіти і науки України
Криворізький державний педагогічний університет
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Добірка індивідуальних завдань для студентів III курсу фізико-математичного факультету спеціальності «Математика» за вимогами кредитно-модульної системи

Кривий Ріг
2010

УДК
ББК

Звичайні диференціальні рівняння
Добірка індивідуальних завдань для студентів III курсу фізико-математичного факультету спеціальності «Математика» за вимогами кредитно-модульної системи. – Криворізький державний педагогічний університет, 2010. – 53 с.

Укладач: Лов'янова Ірина Василівна,
кандидат пед. наук,
доцент кафедри математики.

Рецензенти: кафедра вищої математики
Криворізького технічного університету.
Корольський В.В., к.т.н., професор,
Серебреніков В.М., к.т.н., доцент.

Затверджено на засіданні кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету.
Протокол № 7 від 14 січня 2010 р.

ББК

ПЕРЕДМОВА

Даний методичний посібник адресовано студентам III курсу фізико-математичного факультету спеціальності «Математика», що вивчають дисципліну «Диференціальні рівняння» за вимогами кредитно-модульної системи, з метою якісної організації самостійної роботи та підготовки до контролю знань.

Посібник містить індивідуальне домашнє завдання з теми «ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ», розраховане на 30 варіантів, у кожному варіанті шість завдань, максимальна кількість балів за індивідуальне домашнє завдання – 12 балів, а також індивідуальне завдання на тему «ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ», яке містить у собі задачі з усіх тем двох змістових модулів «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку» та «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», максимальна кількість балів за виконане індивідуальне завдання – 28 балів. Кожен вид завдання супроводжується зразком виконання завдання.

Бали за виконані завдання нараховуються так:

2 бали – за вірно виконану задачу,

1 бал – за наявність помилок у задачі, які впливають на правильність кінцевого результату,

0 балів – за невірно виконане завдання.

Якісне виконання індивідуальних завдань забезпечує студентові протягом семестру накопичення 40 балів.

Диференціальні рівняння

Студент повинен **знати** :

- поняття диференціального рівняння;
- найпростіші типи рівнянь I порядку та способи їх розв’язання;
- спосіб розв’язання однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами;
- задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння.

уміти :

- визначити тип диференціального рівняння;
- користуватися способами розв’язання рівнянь різних типів.

Основні теоретичні відомості

Диференціальні рівняння

(differential equation)]

Рівняння, в якому невідомою є функція, називається *функціональним*.

Функціональні рівняння, що містять похідні шуканої функції, звуться *диференціальними*. Порядок найбільшої похідної шуканої функції, що входить в рівняння, називається *порядком* диференціального рівняння (*order of the differential equation*). Функція, що задовольняє диференціальному рівнянню, називається *частинним розв’язком* (*particular solution*). Графік частинного розв’язку називається *інтегральною кривою.*

Диференціальні рівняння першого порядку *(d. e. of the first order)*

Означення. Нехай x позначає незалежну змінну, а y – шукану функцію. Рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$ називається *диференціальним рівнянням* *першого порядку.* Якщо рівнянню надати вигляд $\frac{dy}{dx}$ = f (x, y), то рівняння називається *розв'язаним відносно похідної*. Зокрема, рівняння вигляду $\frac{dy}{dx}$ = f (y) називається *автономним (autonomous).*

Задача Коші (Cauchy problem)

Взагалі функція, що задовольняє диференціальному рівнянню, не є єдиною. Нехай задано точку (x_0, y_0) з області визначення диференціального рівняння. Задача про пошук розв'язку диференціального рівняння, що проходить через цю точку $y_0=y(x_0)$, називається *задачею Коші*.

Теорема існування Пеано (Peano G.). Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}$ = f(x, y), $y(x_0) = y_0$. Нехай функція f (x, y) неперервна в прямокутнику П = [x_0 – a ; x_0 + a] × [y_0 – b ; y_0 + b], a,b > 0. Позначимо через M=мах | f (x; y)| . Тоді існує принаймні один розв'язок задачі Коші на проміжку

(x;y)Є П

[x_0–h; x_0 + h] , де h = min {a, $\frac{b}{M}$}.

Теорема існування і єдності Пікара (Picard C.E.). Якщо функція f (x; y) неперервна в прямокутнику П, і задовольняє *умові Ліпшица (Lipschitz condition)* по *y* рівномірно відносно *x*, тобто для всіх x∈[x_0 – a ; x_0 + a] і всіх y_1, y_2 ∈[y_0 – b ; y_0 + b] справджується нерівність | f (x; y_1)| | f (x; y_2)| ≤ L | y_1 - y_2 |, то існує єдиний розв'язок задачі Коші на проміжку [x_0 – h ; x_0 + h] , де h = min {a, $\frac{b}{M}$}, M = мах | f (x; y)|.

(x;y)Є П

Точки площини, в яких не виконується хоча б одна умова існування і єдності розв'язку, називаються *особливими*. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого не виконується умова єдності розв'язку, називається *особливим розв'язком* (*singular solution*). Множина всіх частинних розв'язків диференціального рівняння, за виключенням особливих розв'язків, називається *загальним розв'язком (general solution)* цього рівняння (ці три визначення діють для диференціальних рівнянь будь-якого порядку).

Через кожну точку (x_0, y_0) області визначення диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}$ = f(x,y) проведемо пряму П(x_0, y_0) , кутовий коефіцієнт якої дорівнює f(x_0; y_0). Ця множина прямих називається *полем напрямів* диференціального рівняння. Крива, що складається з множини точок поля напрямів, в яких поле напрямів нахилене під однаковими кутами до осі абсцис (f (x, y) = tg α), називається *ізокліною (isocline).*

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

(*d. e. with separable variables*)

Рівняння виду $\frac{dy}{dx}$ = f(x)g(y) називається диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними.* Загальний розв'язок отримується інтегруванням $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Однорідні диференціальні рівняння (*homogeneous d. e.*)

Означення. Функція f(x, y) називається *однорідною степеня n,* якщо для кожного t > 0 і будь-якої пари (x, y) з області визначення функції справджується рівність $f(tx,ty) = t^n f(x, y)$.

Рівняння $\frac{dy}{dx}$ = f(x,y) називається *однорідним диференціальним рівнянням*, якщо f(x,y) – однорідна функція степеня нуль. Заміною $u = \frac{y}{x}$ ($y' = u + xu'$) однорідне рівняння зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння вигляду $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a1x + b1y + c1}{a2x + b2y + c2}\right)$ у випадку $\frac{a1}{a2} \neq \frac{b1}{b2}$ зводиться до однорідного заміною x = u + α; y = u + β. Константи α і β визначаються з умов $a_1\alpha+b_1\beta+c_1=a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$. У випадку $\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}$ до рівняння з відокремлюваними змінними приводить заміна $z = a_1x + b_1y$.

Лінійні диференціальні рівняння (*linear d. e.*)

Рівняння виду $\frac{dy}{dx}=$ p(x)y= q(x) називається *лінійним диференціальним рівнянням*. Розв'язок шукається у вигляді y=uυ, тоді (u′+ p(x) u)υ+uυ′ = q(x). Функція *u* шукається як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними u′+p(x)u=0, а функція υ – з рівняння uυ′=q(x). До лінійних диференціальних рівнянь зводиться рівняння : $f'(y)\frac{dy}{dx}+p(x)f(y)=q(x)$ – заміною z = f(x); $\frac{dy}{dx}+p(x)=q(x)\,e^{ay}$ – заміною $z=e^{-ay}$; рівняння *Бернуллі і (Bernoulli)* $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{n}$ – заміною $z=y^{1-n}$. Рівняння *Ріккаті (Riccati)* $\frac{dy}{dx}+a(x)y+b(x)y^{2}=c(x)$, взагалі кажучи, не розв'язується в квадратах. Проте, якщо відомий один з його частинних розв'язків $y_{÷}$, тоді заміною $y= z + y_{÷}$ воно зводиться до рівняння Бернуллі.

Рівняння в повних диференціалах (*exact d. e.*)

Нехай F(x; y) – деяка диференційована функція двох змінних. Диференціальне рівняння вигляду $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$ називається диференціальним рівнянням в *повних диференціалах.* Його розв'язком буде функція, що задана у неявній формі рівністю F(x; y) = C.

Рівняння M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0 буде рівнянням в повних диференціалах, якщо $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Якщо (x_0, y_0) – деяка точка з області визначення рівняння, то його розв'язок може бути отриманий у вигляді F(x; y) = $\int_{x0}^{x} M(x;y)dx$ + $\int_{y0}^{y} N(x0;y)dy$ = C.

Диференціальні рівняння вищих порядків

(d. e. of nth order)

Означення. Нехай *x* – незалежна змінна, а *y* – шукана функція. Диференціальне рівняння вигляду

$$F(x,y,y', y'',\ldots, y^{(n)}) = 0$$

(1) називається *диференціальним рівнянням n-го порядку.*

Якщо рівняння (1) має вигляд $y^{(n)} = f(x,y,y', y'',\ldots, y^{(n-1)})$,

(2)

тоді рівняння називається *розв'язаним відносно старшої похідної.*

Задача Коші *(Cauchy problem)*. **Крайова задача**

Як і в рівняннях першого порядку, функція, що задовольняє диференціальному рівнянню, не є єдиною. Тому можна ставити задачі про відшукання розв'язків, що задовольняють деяким додатковим умовам. *Задачею Коші* для диференціального рівняння (1) або (2) називається задача про пошук розв'язків рівняння, який задовольняє умові :

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y'_0,\ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

(3)

де $y_0,\ldots,y_0^{(n-1)}$ – фіксовані числа. Умови (3) інколи називаються *початковими умовами (initial condition).* Задачі, в умовах яких використовуються значення шуканої функції та її похідних в декількох точках, звуться *крайовими задачами (boundary-value problem)* (задача Штурма-Ліувілля (*Sturm-Liouville problem*)).

Умова Ліпшица *(Lipschitz condition)*

Функція багатьох змінних $f(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)$ називається *ліпшицевою на множині* $D \subset R^n$, якщо знайдеться така стала $L \geq 0$, що для будь-яких точок $(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$, $(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n) \in D$ справджується нерівність $\left| f(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) - f(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n) \right| \leq L \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k|$.

Функція багатьох змінних може задовольняти умові Ліпшица по деяким зі змінних. При цьому величина константи L в нерівності буде залежати від інших змінних, що не приймають участі в нерівностях. Якщо константа L не залежить від *x*, то кажуть, що умова Ліпшица виконується рівномірно відносно *x*.

Якщо для функції $f(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)$ умова Ліпшица виконується по кожній змінній окремо, тоді вона виконується по всім змінним у сукупності, і навпаки.

Функція, яка задовольняє умовам Ліпшица в області, є неперервною в цій області. Але, неперервна функція не обов'язково ліпшицева. Якщо функція диференційована в області, то вона ліпшицева в цій області, але ліпшицева функція необов'язково диференційована.

Теорема існування і єдності локальна. Нехай в рівнянні $y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$ функція f неперервна в паралелепіпеді $П = [x_0 - a; x_0 + a] \times [y_0 - b; y_0 + b] \times [y'_0 - b; y'_0 + b] \times\ldots\times [y_0^{(n-1)} - b; y_0^{(n-1)} + b]$, і задовольняє рівномірно відносно *x* умові Ліпшица по змінним $y, y', y'',\ldots, y^{(n-1)}$, це означає, що для всіх $x \in [x_0 - a; x_0 + a]$, з умови $(x, y_1,\ldots, y_1^{(n-1)}), (x, y_2,\ldots, y_2^{(n-1)}) \in П$ випливає нерівність:

$$\left| f(x, y_1,\ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2,\ldots, y_2^{(n-1)}) \right| \leq L \sum_{k=0}^{n-1} \left| y1^{(k)} - y2^{(k)} \right|.$$

Тоді на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ існує єдиний розв'язок рівняння (2), що задовольняє умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Величина h визначається із співвідношення $h \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$, де

$$M=\max\{\left| f(x,y,y',y'',\ldots, y^{(n-1)}) \right|, \left| y'0 \pm b \right|, \left| y''0 \pm b \right|,\ldots, \left| y0^{(n-1)} \pm b \right|\}.$$

$(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \in \Pi$

Теорема існування і єдності Пікара (Picard C. E.). Нехай в області $D \subset R^{n+1}$ права частина рівняння (2) неперервна і ліпшицева відносно змінних $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Тоді для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ знайдеться єдиний розв’язок рівняння (2), який задовольняє початковим умовам (3).

Розв’язок $y = f(x)$ рівняння (2), називається тим, що проходить через точку області D, якщо знайдеться таке x_0, що $(x_0, f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)) \in D$.

Наслідок. Множина всіх розв’язків рівняння (2), що проходить через точки області D, є *n* – параметричною, тобто такою, що залежить тільки від n дійсних параметрів.

Представлення усіх розв’язків рівняння(2), які проходять через точки області D, у вигляді $y = f(x; C_1; C_2; \ldots; C_n)$, називається *загальним розв’язком* області D. Розв’язок рівняння (2), який отримано з загального розв’язку при конкретних значеннях всіх параметрів $C_1; C_2; \ldots; C_n$, називається *частинним розв’язком.* Графік частинного розв’язку називається *інтегральною кривою.*

Якщо кожний елемент множини всіх розв’язків в області D визначається неявною функцією $\Phi(x; y; C_1; C_2; \ldots; C_n) = 0$, то вона називається *загальним інтегралом* рівняння (2) в області D.

Диференціальні рівняння вищих порядків, що дозволяють знизити їх порядок.

1. *Рівняння* $y^{(n)} = f(x)$. Загальний розв’язок отримується *n*- кратним інтегруванням правої частини.

2. *Рівняння, що не містить шуканої функції та її похідних* до порядку (k-1) включно, $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, заміною $y^{(k)} = p(x)$ зводиться до рівняння (*n-k)*-го порядку $F(x, p, p', \ldots, y^{(n-k)}) = 0$.

3. *Рівняння, що не містить незалежну змінну,* $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, підстановкою $y' = p(y)$ зводиться до рівняння, порядок якого на одиницю нижчий. За правилом диференціювання складних функцій отримаємо: $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$= p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$, $y''' = \frac{d}{dx}(p'\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dy}(p'\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx} = p^2 p'' + p(p')^2$

і т.д.

4. *Рівняння однорідне відносно змінних* $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) \equiv t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ дозволяє знизити його порядок на одиницю підстановкою $y = e^{Szdx}$, де $z(x)$ – нова невідома функція.

5. Рівняння $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ називається *узагальнено однорідним,* якщо існують такі числа k і m, що $F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \ldots, e^{(k-n)t} y^{(n)}) = 0 = e^{mt} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$. Заміна $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, де t – нова змінна, u – нова невідома функція, приводить до рівняння, що не містить змінної x, отже дозволяє знизити порядок на одиницю.

6. *Рівняння в точних похідних.* Якщо в рівнянні (1) функція F є точною похідною від деякої функції $\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$, то після інтегрування обох частин рівняння по x, отримаємо перший інтеграл вихідного рівняння $\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C$, який в свою чергу є рівнянням порядку, на одиницю нижчого за вихідний.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

(linear d. e. of nth order)

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x) y = f(x), \qquad (1)$$

де $y(x)$ – шукана функція, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ – відомі функції. Якщо права частина $f(x)$ нуль, то рівняння (1) називається *неоднорідним* (*nonhomogeneous equation*). Рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \qquad (2)$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*, яке відповідає рівнянню (1) (*homogeneous equation*).

Теорема (існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння). Нехай функції $a_1(x),...,a_n(x), f(x)$ неперервні на проміжку (a; b). Тоді для кожного $x_0 \in (a;b)$ і будь-яких чисел $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in R$ існує єдиний розв'язок y(x) рівняння (1), який задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$,

$$y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Лінійна залежність функцій

Функція вигляду $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$ називається *лінійною комбінацією функцій* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Якщо з рівності $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + +C_ny_n(x) \equiv 0$ при $x \in (a;b)$ випливає, що всі числа $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$, то функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ – називаються *лінійно незалежними на інтервалі (a; b) (linearly independent)*. Інакше ці функції називаються *лінійно залежними на (a; b) (linearly dependent)*. Нехай функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ (n-1) разів диференційовні на інтервалі*(a; b)*. Визначник

$$W(x): = W(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)): = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots\ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots\ldots & y_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

називається *визначником Вронського або вронскіаном (Wronskian)*. Вронскіан лінійно залежної на (a; b) системи функцій дорівнює тотожньо нулю на цьому інтервалі. Підкреслимо, що тотожня рівність нулю вронскіана деякої множини функцій не є достатньою умовою для лінійної залежності цих функцій.

Проте визначник Вронського системи розв'язків лінійного диференціального рівняння, для якого справджуються умови існування і єдиності розв'язків на інтервалі (a; b), або тотожньо рівний нулю, або не рівний нулю в жодній точці інтервалу (a; b).

Структура розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння

Якщо $y_1(x),..., y_k(x)$ – зв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, тоді кожна їх лінійна комбінація також є розв'язком цього рівняння (*принцип суперпозиції розв'язків*).

Лінійне однорідне диференціальне рівняння порядку *n*, що задовольняє умовам існування і єдиності розв'язків, має систему з *n* лінійно незалежних розв'язків. Кожна система з *n* лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння (2) називається *фундаментальною системою розв'язків (fundamental set of solution).* В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) +...+ +C_n y_n(x)$, тобто для кожного розв'язку $y(x)$ рівняння (2) знайдуться такі сталі $C_1,..., C_n$, що

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) +...+ C_n y_n(x). \qquad (3)$$

Якщо лінійне однорідне диференціальне рівняння *n*-го порядку задовольняє умовам існування і єдиності розв'язків, то його розв'язки $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ є лінійно незалежними на інтервалі (a; b) тоді і тільки тоді, коли їх вронскіан $W(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x))$ не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу (a;b). Якщо вронскіан розв'язків дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу (a; b), то розв'язки є лінійно залежними.
Для вронскіана розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (2), яке задовольняє умовам існування і єдиності, справджується формула *Ліувілля-Остроградського:* $W(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_o}^{x} a_1(t)dt}$

Структура розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння *n*-го порядку (1), яке задовольняє умовам існування і єдиності розв'язків, має вигляд $y = y_{зро} + y_{чрно}$, де $y_{зро}$ – *загальний розв'язок однорідного* *рівняння* (2), яке є *відповідним однорідному* (1) (*complementary function*), $y_{чрно}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) (*particular integral*).

Принцип суперпозиції розв'язків. Нехай для кожної функції $f_l(x)$, $l = \overline{1,k}$ рівняння $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_l(x)$ має розв'язок y_l. Тоді сума розв'язків $y_1(x) + ... + y_к(x)$ буде розв'язком рівняння $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + +a_n(x)y = f_l(x) + ... + f_k(x)$.

Метод варіації невизначених коефіцієнтів (*variation of parameters*)

Нехай треба знайти розв'язок неоднорідного рівняння (1). Припустимо, що знайдено загальний розв'язок однорідного рівняння (2) $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукається у вигляді:

$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$, де функції $C_1(x),..., C_n(x)$ – визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1{}'(x) + C_2'(x)y_2{}'(x) + ... + C_n'(x)y_n{}'(x) = 0, \\ .... \\ C_1'(x)y_1{}^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2{}^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n{}^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Система є лінійною відносно невідомих $C'_1(x),..., C'_n(x)$. Її головний визначиик - вронскіан фундаментальної системи розв'язків, отже $W(x) \neq 0$ і вихідна система має єдиний розв'язок. Розв'язуючи систему, інтегруючи отримані розв'язки і підставляючи іх у вихідний вираз, отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

(*linear d. e. with constant coefficients*)

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння, що має вигляд

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad (1)$$

де $y(x)$ – шукана функція, $a_1,...,a_n \in R$ – відомі числа.

На всій числовій осі для рівняння (1) виконуються умови теореми існування і єдиності розв’язків.Користуючись відповідністю $y^{(k)}\to\lambda^k$, складемо алгебраїчне рівняння:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (2)$$

де $a_1,...,a_n$ – коефіцієнти вихідного диференціального рівняння (1). Рівняння (2) називається *характеристичним рівнянням* (*characteristic equation*) диференціального рівняння (1), а многочлен в лівій частині характеристичного рівняння – *характеристичним многочленом*.

Якщо $\lambda_1,...,\lambda_l$ корені характеристичного рівняння кратностей $m_1,...,m_l$ відповідно, то функції $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},..., x^{m-1}e^{\lambda_1 x}; ... ; e^{\lambda_l x}, xe^{\lambda_l x},..., x^{m_l-1}e^{\lambda_l x}$ (3)

утворюють фундаментальну систему лінійного однорідного диференціального рівняння (1). При цьому серед коренів характеристичного рівняння можуть з’явитися й комплексні корені, а отже, серед фундаментальних розв’язків – комплекснозначні функції.

Кожна комплекснозначна функція, що є розв’язком рівняння (1), має вигляд $u(x)+iv(x)$. В силу лінійності диференціального рівняння (1) дійсна частина $u(x)$ і уявна частина $v(x)$, кожна окремо, будуть розв’язками рівняння (1). Отже, парі комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння $\lambda = \alpha \pm i\beta$, відповідає пара лінійно незалежних комплекснозначних функцій $ee^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i\sin \beta x)$ і $e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i\sin \beta x)$, яким відповідає пара дійсних лінійно незалежних функцій $e^{\alpha x}\cos \beta x$, $e^{\alpha x}\sin \beta x$. Якщо пара коренів має кратність μ, то їй відповідає система з 2μ лінійно незалежних функцій

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,...., x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,...., x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases} \qquad (4)$$

Щоб розв’язати лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами необхідно: скласти характеристичне рівняння; розв’язати його з урахуванням кратності коренів; побудувати систему фундаментальних розв’язків; їх лінійна комбінація буде загальним розв’язком (1). При цьому дійсним коренем, з урахуванням їх кратності, відповідають розв’язки вигляду (3), а комплексним – розв’язки вигляду (4). Звідси, лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в елементарних функціях, при чому інтегрування зводиться до розв’язання алгебраїчних задач.

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (5)$$

де y(x) — шукана функція, $a_1,...,a_n \in R$ – задані числа.

Загальний розв’язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сумою $y = y_{зро} + y_{чрно}$, де $y_{зро}$ – загальний розв’язок рівняння, що відповідає неоднорідному (*complementary function*), $y_{чрно}$ – деякий частинний розв’язок неоднорідного рівняння (*particular integral*).

Оскільки фундаментальна система розв’язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди може бути знайдена, то задача інтегрування лінійного неоднорідного рівняння (5) зводиться до пошуку частинного розв’язку рівняння (5).

Якщо функція f(x) – неперервна, то частинний розв’язок завжди можна знайти *методом варіації невизначених коефіцієнтів*.

Якщо права частина неоднорідного рівняння має вигляд $P_n(x)e^{\alpha x}\sin \beta x$ або $P_n(x)e^{\alpha x}\cos \beta x$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня *n*, тоді частинний розв’язок неоднорідного рівняння можна підібрати у вигляді

$$x^r e^{\alpha x}(Q_n(x) \cos \beta x + H_n(x) \sin \beta x), \quad (6)$$

де r = 0, якщо комплекне число $(\alpha + i\beta)$ не є коренем характеристичного рівняння, і, якщо $(\alpha + i\beta)$ є коренем характеристичного рівняння, тоді r дорівнює кратності цього кореня, $Q_n(x)$, $H_n(x)$ - многочлени степеня n, коефіцієнти яких підбираються методом невизначених коефіцієнтів.

Застосовуючи *принцип суперпозиції розв'язків* можна підібрати частинні розв'язки для досить широкого кола правих частин. При цьому інтегрування диференціального рівняння зведеться до рівняння систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Рівняння, які зводяться до лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$, де $a_k, k = \overline{1,n}$ – деякі константи, називається *рівнянням Ейлера*. Заміною незалежної змінної $x = e^t$ при $x > 0$ або $x = - e^t$ при $x < 0$ зводиться до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння $(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(ax - b)y' + a_n y = f(x)$, де $a, b, a_k \in R$, називається *рівнянням Лагранжа.* Підстановкою $ax + b = e^t$ або $ax + b = - e^t$ зводиться до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Чебишева $(1 - x^2)y'' - xy' + ay = 0$, де a – константа, є частинним випадком *гіпергеометричного рівняння*. Заміни незалежної змінної $x = \cos t$ при $|x| < 1$ і $x = \operatorname{ch} t$ при $|x| > 1$ приводять це рівняння до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Теорема (Єругіна М.П.) Якщо рівняння $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0$, зводиться до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної, то це можливо лише заміною вигляду $t = c\int \sqrt[n]{a_n(x)dx}$.

«ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»

Індивідуальне домашнє завдання

Зразок виконання завдання.

Завдання №1.

а) $\int \frac{ctg^4 x+1}{\sin^2 x}dx = -\int (ctg^4 x+1)d(ctgx) = -\frac{ctg^5 x}{5} - ctgx + c$

б) $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^4 x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^5 x}{5} + c$

в) $\int 2^{tgx} \sec^2 x dx = \int 2^{tgx} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int 2^{tgx} d(tgx) = \frac{2^{tgx}}{\ln 2} + c$

Завдання №2. Розкласти даний дріб на елементарні дроби.

а) $\frac{x+2}{(x-2)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} =$
$= \frac{A(x-2)(x^2+3) + B(x^2+3) + Cx + D(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+3)}$

$$x+2 = A(x^3-2x^2+3x-6) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x^2-4x+4)$$
$$x+2 = A(x^3-2x^2+3x-6) + B(x^2+3) + C(x^3-4x^2+4x) + D(x^2-4x+4)$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0 \\ x^2 & -2A+B-4C+D=0 \\ x^1 & 3A+4C-4D=1 \\ x^0 & -6A+3B+4D=2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=-C \\ -2C+B+D=0 \\ C-4D=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=-C \\ -2+8D+B+D=0 \\ C=1+4D \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=-1-4D \\ B=7D+2 \end{array}$$

-6(-1-4D)+3(7D+2)+4B=2

6+24D+21D+6+4D=2

$49D=-10 \quad D=\frac{-10}{49}$

$B=\frac{-10}{7}+2=\frac{4}{7}$

$A=-1-4\left(-\frac{10}{49}\right)=-\frac{9}{49}$

$C=\frac{9}{49}$

$$\frac{x+2}{(x-2)^2(x^3+3)}=-\frac{9}{49}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{\frac{9}{49}x-\frac{10}{49}}{x^2+3}=$$

$$=-\frac{9}{49}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{49}\cdot\frac{9x-10}{x^2+3}$$

$$\frac{2x^3+x-4}{(x^2-3x+8)^3(x-4)^2}=\frac{A_1x+B_1}{x^2-3x+8}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2-3x+8)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2-3x+8)^3}+\frac{C_1}{x-4}+\frac{C_2}{(x-4)^2}=$$

б) $$=\frac{(A_1x+B_1)(x^2-3x+8)^2(x-4)^2+(A_2x+B_2)(x^2-3x+8)(x-4)^2+(A_3x+B_3)(x-4)^2}{(x^2-3x+8)^3(x-4)^2}+$$

$$+\frac{C_1(x-4)(x^2-3x+8)^3+C_2(x^2-3x+8)^3}{(x^2-3x+8)^3(x-4)^2}$$

x=4

$$2\cdot4^3+4-4=C_2(4^2-3\cdot4+8)^3$$
$$128=C_2(16-12+8)^3$$
$$128=C_2 12\cdot144$$
$$C_2=\frac{16\cdot2}{12\cdot144}=\frac{64}{6\cdot144}=\frac{32}{3\cdot144}=\frac{2\cdot4}{3\cdot3\cdot4\cdot3\cdot4}=\frac{2}{27}$$

$$2x^3+x-4=(A_1x+B_1)(x^4+9x^2+64-6x^3-48x+16x^2)(x^2-8x+16)+$$
$$+(A_2x+B_2)(x^2-3x+8)(x^2-8x+16)+(A_3x+B_3)(x^2-8x+16)+$$
$$+C_1(x-4)(x^4+9x^2+64-6x^3-48x+16x^2)(x^2-3x+8)+$$
$$+\frac{2}{27}(x^4+25x^2+64-6x^3-48x)(x^2-3x+8);$$

$$2x^3+x-4=(A_1x+B_1)(x^6-14x^5+89x^4-364x^3+848x^2-1280x+1024)+$$
$$+(A_2x+B_2)(x^4-11x^3+48x^2-112x+128)+(A_3x+B_3)(x^2-8x+16)+$$
$$+C_1(x^7-13x^6+87x^5-327x^4+1044x^3-2208x^2+2816x+2048)+$$
$$+\frac{2}{27}(x^6-9x^5+51x^4-171x^3+408x^2-576x+512);$$

$$(1)\ x^7\left|A_1+C_1=0\right.$$

$$(2)\ x^6\left|-14A_1+B_1-13C_1+\frac{2}{27}=0\right.$$

$$(3)\ x^5\left|89A_1-14B_1+A_2+87C_1-\frac{2}{3}=0\right.$$

$$(4)\ x^4\left|-364A_1+89B_1-11A_2+B_2-327C_1+\frac{34}{9}=0\right.$$

$$(5)\ x^3\left|848A_1-364B_1+48A_2-11B_2+A_3+1044C_1-\frac{38}{3}=2\right.$$

$$(6)\ x^2\left|-1280A_1+848B_1-112A_2+48B_2-8A_3+B_3-2208C_1+\frac{272}{9}=0\right.$$

$$(7)\ x^1\left|1024A_1-1280B_1+128A_2-112B_2+16A_3-8B_3+2816C_1-\frac{128}{3}=1\right.$$

$$(8)\ x^0\left|1024B_1+128B_2+16B_3-2048C_1+\frac{1024}{27}=-4\right.$$

(1) $A_1+C_1=0 \qquad A_1=-C_1$

З урахуванням (1) перетворимо рівність (2)

$$-13(A_1+C_1)-A_1+B_1+\frac{2}{27}=0$$

$$-(A_1-B_1)=-\frac{2}{27}$$

$$A_1-B_1=\frac{2}{27} \qquad B_1=A_1-\frac{2}{27}=C_1-\frac{2}{27}$$

отриманий результат підставимо в (3)

$$14(A_1-B_1)+75(A_1+C_1)+12C_1+A_2-\frac{2}{3}=0$$

$$14\cdot\frac{2}{27}+0+12C_1+A_2-\frac{2}{3}=0 \qquad A_2=-\frac{10}{27}-12C_1$$

Знайдемо значення A_1, B_1, A_2 підставимо в (4) і отримаємо:

$$-327(A_1+C_1)-37(C_1)+89(-C_1-\frac{2}{27})-11\left(-\frac{10}{27}-12C_1\right)+B_2+\frac{34}{9}=0$$

$$37C_1-89C_1+132C_1-\frac{89\cdot 2}{27}+\frac{110}{27}+\frac{34\cdot 3}{27}+B_2=0$$

$$80C_1+\frac{34}{27}=0-B_2 \qquad B_2=80C_1-\frac{34}{27}$$

Знайдені значення A_1, B_1, A_2, B_2 підставимо в (5):

$$-848C_1-364\left(-C_1-\frac{2}{27}\right)+48\left(-\frac{10}{27}-12C_1\right)-11\left(-80C_1-\frac{34}{27}\right)+A_3+1044C_1-$$

$$-\frac{38}{3}=2-848C_1+364C_1+\frac{728}{27}-\frac{480}{27}-576C_1+880C_1+\frac{374}{27}+A_3+1044C_1-$$

$$-\frac{342}{27}=2$$

$$C_1(-848+364-576+880+1044)+\frac{728-480+374-342}{27}-2=-A_3$$

$$864C_1+\frac{226}{27}=-A_3 \qquad\qquad A_3=-864C_1-\frac{226}{27}$$

Знайдені значення A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 підставимо в (6):

$$-1280(-C_1)+848\left(-C_1-\frac{2}{27}\right)-112\left(-\frac{10}{27}-12C_1\right)+48\left(-80C_1-\frac{34}{27}\right)-$$

$$-8\left(-864C_1-\frac{226}{27}\right)+B_3-2208C_1+\frac{272}{9}=0$$

$$1280C_1-848C_1+\frac{1120}{27}+1344C_1-3840C_1-\frac{1632}{27}+6912C_1+\frac{1808}{27}+B_3-$$

$$-2208C_1+\frac{816}{27}=0$$

$$2640C_1+\frac{2112}{27}+B_3=0 \qquad\qquad B_3=-2640C_1-\frac{704}{9}$$

Знайдені значення B_1, B_2, B_3 підставимо у формулу (8) і отримаємо значення C_1

$$1024\left(-C_1-\frac{2}{27}\right)+128\left(-80C_1-\frac{34}{27}\right)+16\left(-2640C_1-\frac{2112}{27}\right)-2048C_1+\frac{1024}{27}=-4$$

$$C_1(-1024-10240-42240-2048)-\frac{1024+4352+33792}{27}=-4$$

$$-55552C_1-\frac{39168}{27}=-4$$

$$55552C_1+\frac{39168}{27}=4$$

$$55552C_1=-\frac{39060}{27}$$

$$C_1=-\frac{39060}{27\cdot 55552}=-\frac{4340}{3\cdot 55552}$$

$$C_1 = -\frac{2170}{3\cdot 27776} = -\frac{1085}{3\cdot 13888} = -\frac{1085}{41664}$$

Знаючи C_1 можна обчислити всі інші коефіцієнти. Отже задача розв'язана.

Завдання №3.

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+3)(x-3)}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+3}dx + \int \frac{Cdx}{x-3}$$

$$\frac{5x-3}{(x^2+3)(x-3)} = \frac{^{x-3/}Ax+B}{x^2+3} + \frac{^{x^2+3/}C}{x-3}$$

$$5x-3 = Ax^2 + Bx - 3Ax - 3B + Cx^2 + 3C$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-3A=5 \\ 3C-3B=-3 \end{cases} \begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=5A \\ C-B=-1 \end{cases} \frac{\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+C=4 \end{cases}}{4A=-4} \; A=-1 \;\; C=1 \;\; B=2$$

$$\int \frac{-x+2}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x-3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} + 2\int \frac{1}{x^2+3}dx + \ln|x-3| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln|x-3| + C = \ln\frac{|x-3|}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Варіанти завдань

Завдання №1. Обчислити інтеграл методом внесення змінної під знак диференціалу.

1. а) $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+7}dx$ б) $\int \frac{\ln^3 xdx}{x}$ в) $\int \frac{e^x dx}{3+e^x}$

2. а) $\int \frac{3x+1}{x^2+x+4}dx$ б) $\int \frac{arctg^2 xdx}{1+x^2}$ в) $\int \frac{\ln^3 x \; dx}{x}$

3. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+4}}dx$ б) $\int \frac{\arcsin^4 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$

4. а) $\int \frac{x-1}{x^2+5x+10}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ в) $\int \frac{\ln^3 xdx}{x}$

5. а) $\int \frac{3x+1}{x^2+7x+8}dx$ б) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos^2 x}}$ в) $\int \frac{\arcsin^3 4xdx}{\sqrt{1-16x^2}}$

6. а) $\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2+3x+4}}$ б) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ в) $\int \frac{\arccos^6 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. а) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+5x+8}$ б) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$ в) $\int \frac{\ln^3 xdx}{x}$

8. а) $\int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx$ б) $\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx$ в) $\int \frac{(\ln x-1)^2 dx}{x}$

9. а) $\int \frac{arctg^2 2xdx}{1+4x^2}$ б) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2+3x+2}$ в) $\int \frac{arctg^4 5xdx}{1+25x^2}$

10.а) $\int e^{\sin 3x}\cos 3xdx$ б) $\int \frac{(x^3-2)dx}{x^2+5x+6}$ в) $\int \frac{\arcsin 3xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$

11.а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-4x^4}}$ б) $\int \frac{(x^3-5)dx}{x^2-6x+5}$ в) $\int \frac{\sin 3xdx}{\cos^3 3x}$

12.а) $\int \frac{\ln(x+3)dx}{x+3}$ б) $\int \frac{(x^3-4)dx}{x^2-x-6}$ в) $\int \frac{\cos 4xdx}{\sin^3 4x}$

13.а) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$ б) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^5 x}$ в) $\int \frac{\sqrt[5]{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$

14.а) $\int e^{-4x^4}x^3dx$ б) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ в) $\int \frac{\arcsin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

15.а) $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$ в) $\int \frac{arctg^4 xdx}{1+x^2}$

16.а) $\int \sqrt[5]{4-5\sin 2x}\cos 2xdx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ в) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^3 2x}$

17.а) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ б) $\int \frac{\arcsin^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$

18.а) $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$ в) $\int \frac{e^{ctg 2x}dx}{\sin^2 2x}$

19.а) $\int \sqrt[3]{2-3\cos 5x}\sin 5xdx$ б) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x-6}}$ в) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x-1}$

20.а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ б) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$ в) $\int \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$

21.а) $\int \frac{4x^3+\cos xdx}{x^4+\sin x}$ б) $\int \sin x\cos 7xdx$ в) $\int \frac{3x+2}{5x^2+7}dx$

22.а) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ б) $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int \sin 3x\cos xdx$

23.а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{16x-8+x^2}}$ в) $\int \frac{\cos xdx}{5+\sin^2 x}$

24.а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$ б) $\int \frac{\sin xdx}{1+2\cos^2 x}$ в) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

25.а) $\int \frac{e^{2x}dx}{(1+e^{2x})^2}$ б) $\int \frac{4ax^3dx}{\sqrt[4]{(1+ax^4)^3}}$ в) $\int \frac{x^2dx}{x^3-1}$

Завдання №2. Розкласти даний дріб на елементарні дроби.

1. а) $\frac{x^2+4x+3}{x^5(x^2+9)}$ б) $\frac{4x^2-12}{(x^2+2x+3)^3(x+1)^3}$

2. а) $\frac{2x^2+3x+5}{x^3(x^2-4)}$ б) $\frac{3x^3+8}{(x^2+5x+12)^2(x-8)^3}$

3. а) $\frac{3x^2-x+3}{x^2(x^2+8)}$ б) $\frac{2x^3-1}{(x^2-5x+12)^2(x-1)^4}$

4. а) $\frac{x^3+4x-1}{x^2(x^2+5)}$ б) $\frac{x^2+8}{(x^2-x+4)^2(x-3)^3}$

5. а) $\frac{x^3+8x-1}{x^4(x^2+5)}$ б) $\frac{3x^2+1}{(x^2-x+4)\ (x-4)^3}$

6. а) $\frac{x-8}{x^3(x^2+3)}$ б) $\frac{x^3-x+1}{(x^2+x+4)\ (x-2)^2}$

7. а) $\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}$ б) $\frac{x^2+x-1}{(x^2+3x+4)^2(x-1)^3}$

8. а) $\frac{x-2}{(x+1)^2(x^2+3)}$ б) $\frac{x^3-1}{(x^2+5x+16)^3(x-4)^2}$

9. а) $\frac{x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}$ б) $\frac{x^3+2x+1}{(x^2-5x+16)^3(x^2+1)}$

10.а) $\frac{x-2}{(x+2)^2(x^2+3)}$ б) $\frac{2x^3-x+4}{(x^2+3x+8)^3(x-4)^2}$

11.а) $\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}$ б) $\frac{2x^4+4x^3+1}{(x^2-3x+12)^2(x-1)^2}$

12. а) $\frac{x+2}{(x^2+2)(x-1)^3}$ б) $\frac{x}{(x^2+4x+5)^3(x-1)^2}$

13. а) $\frac{x^2+2x-3}{x^3(x^2+7)}$ б) $\frac{x^3+1}{(x^2-x+4)^2(x-1)^3}$

14. а) $\frac{x-1}{x^2(x^3+1)}$ б) $\frac{4x^3+x-1}{(x^2-x+5)^4(x-1)^2}$

15. а) $\frac{x+8}{(x-1)^3(x^2-4)}$ б) $\frac{2x^3+8}{(x^2+5x+7)^3(x^2+9)}$

16. а) $\frac{2x-4}{(x-1)^3(x^2+3)}$ б) $\frac{3x^3+x-1}{(x^2+5x+8)^2(x^2-1)}$

17. а) $\frac{x^3+1}{x^4(x^2+3)}$ б) $\frac{4x^2+8}{(x^2+x+1)^3(x-1)^2}$

18. а) $\frac{x+8}{(x-1)^3(x^2-4)}$ б) $\frac{2x^3+8}{(x^2+5x+7)^3(x^2+9)}$

19. а) $\frac{2x-3}{(x^2+3x+5)^3x^3}$ б) $\frac{x+8}{(x-1)^3(x^2+4)}$

20. а) $\frac{3x+1}{x^3(x^2+9)}$ б) $\frac{4x^2+1}{(x^2-2x+3)^3(x-1)^2}$

21.а) $\frac{2x^2-3x-5}{x^3(x^2+4)}$ б) $\frac{3x^3-8}{(x^2-5x+12)^2(x-8)^2}$

22. а) $\frac{3x^2+x-3}{x^2(x^2-8)}$ б) $\frac{2x^3+1}{(x^2+5x+9)^2(x+1)^4}$

23. а) $\frac{x^2-8}{(x^2-x+4)^2(x+3)^3}$ б) $\frac{3x^2}{(x-1)^3(x^2+5)}$

24. а) $\frac{x^2+1}{(x-4)^3(x+1)}$ б) $\frac{2x}{(x^2+8)(x+3)}$

25. а) $\frac{x+8}{x^3(x^2-3)}$ б) $\frac{x^3+x+1}{(x^2+x+4)^2(x-2)^2}$

Завдання №3. Обчислити інтеграл.

1. $\int\frac{(4x-2)dx}{(x-1)(x^2+1)}$ 10. $\int\frac{(x+2)dx}{(x-3)(x^2-3)}$ 19. $\int\frac{(x+3)dx}{(x+1)(x^2+1)}$

2. $\int\frac{(4x+3)dx}{(x-4)(x^2+3)}$ 11. $\int\frac{(5x-3)dx}{(x^2+3)(x-3)}$ 20. $\int\frac{(x-4)dx}{(x+4)(x^2+4)}$

3. $\int\frac{(2x-4)dx}{(x+2)(x^2+4)}$ 12. $\int\frac{(6x+4)dx}{(x+4)(x^2+4)}$ 21. $\int\frac{(5x+3)dx}{(x+4)(x^2+1)}$

4. $\int \frac{(6x-5)dx}{(x-4)(x^2+3)}$

5. $\int \frac{(3x-7)dx}{(x+4)(x^2+3)}$

6. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-3)(x^2+4)}$

7. $\int \frac{(2x+6)dx}{(x-3)(x^2+3)}$

8. $\int \frac{(4x-2)dx}{(x-2)^2(x^2+2)}$

9. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x-1)^2(x+3)}$

13. $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+1)}$

14. $\int \frac{(x+8)dx}{(x+2)(x^2+2)}$

15. $\int \frac{12dx}{(x+4)(x^2-4)}$

16. $\int \frac{6dx}{(x-1)(x^2+2)}$

17. $\int \frac{(x-4)dx}{(x+1)(x^2+4)}$

18. $\int \frac{12dx}{(x+4)(x^2-4)}$

22. $\int \frac{(2x+7)dx}{(x-3)(x^2+4)}$

23. $\int \frac{(10x+8)dx}{(x+8)(x^2+4)}$

24. $\int \frac{(x^2+x+6)dx}{x(x+3)(x-2)}$

25. $\int \frac{(x-4)dx}{(x+4)(x^2+4)}$

«ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Індивідуальне завдання

Зразок виконання нульового варіанту

№1. Знайти загальний розв'язок рівняння.

а) $e^{x+2y}dy = xdx$ - рівняння з відокремлюваними змінними.

$$e^x \cdot e^{2y}dy = xdx$$

$$e^{2y}dy = e^{-x}xdx$$

$$\int e^{2y}dy = \frac{1}{2}e^{2y}$$

$$\int e^{-x}xdx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$y = \frac{1}{2}\ln\left|-2xe^{-x} - 2e^{-x} + c\right|$ - відповідь.

б) $y - xy' = 2(1 + x^2y')$

$$-xy' - 2x^2y' = 2 - y$$

$y'(x + 2x^2) = y - 2$ - рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x(2x+1)}$$

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{2x+1} \qquad \begin{aligned} &1 = A(2x+1) + Bx \\ &2A + B = 0, A = 1, B = -2 \end{aligned}$$

$$\ln|y-2| = \ln|x| - 2\frac{1}{2}\ln|2x+1| + \ln|c|$$

$$\ln|y-2| = \ln\left|\frac{Cx}{2x+1}\right|$$

$y = \frac{Cx}{2x+1} + 2$ - відповідь.

в) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$- однорідне рівняння.

$$y = xt$$

$$dy = xdt + tdx$$

$$(x^2t^2 - 2x^2t)dx + x^3dt + x^2tdx = 0$$

$(t^2-2t)dx+xdt+tdx=0$

$(t^2-t)dx=-xdt$

$-\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dt}{t(t-1)}$

$-\int\dfrac{dx}{x}=\int\dfrac{Adt}{t}+\int\dfrac{Bdt}{t-1}$ $\qquad$ $1=At-A+Bt$, $\quad A+B=0, A=-1, B=1$

$-\int\dfrac{dx}{x}=-\int\dfrac{dt}{t}+\int\dfrac{dt}{t-1}$

$-\ln|x|=-\ln|t|+\ln|t-1|+\ln|c|$

$\ln\left|\dfrac{1}{x}\right|=\ln\left|\dfrac{c(t-1)}{t}\right|$

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{c(t-1)}{t}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{c\cdot(\frac{y}{x}-1)}{\frac{y}{x}}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{c(y-x)}{y}$ - відповідь.

г) $x^3y'\sin y=xy'-2y$

$y'(x^3\sin y-x)=-2y$

$y'=-\dfrac{2y}{x^3\sin y-x}$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2y}{x^3\sin y-x}$

$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{x^3\sin y}{2y}+\dfrac{x}{2y}$ - рівняння Бернуллі відносно x'

$x'-\dfrac{1}{2y}x=-\dfrac{\sin y}{2y}x^3$ (поділимо почленно на x^3)

$\dfrac{x'}{x^3}-\dfrac{1}{2y}\cdot\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{\sin y}{2y}$ (зробимо заміну $\dfrac{1}{x^2}=z$, тоді $z'=-\dfrac{x'}{x^3}$)

$-z'-\dfrac{1}{2y}z=-\dfrac{\sin y}{2y}$

$z'+\dfrac{1}{2y}z=\dfrac{\sin y}{2y}$

$$z=e^{\int\frac{dy}{2y}}(C+\int\frac{\sin y}{2y}\cdot e^{\int\frac{dy}{2y}}dy)=e^{-\frac{1}{2}\ln|y|}(C+\int\frac{\sin y}{2y}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln|y|}dy)=$$

$$y^{\frac{1}{2}}(C+\int\frac{\sin y}{2y}\cdot\sqrt{y}dy)=\frac{1}{\sqrt{y}}(C+\int\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy)=$$

$$z'+\frac{1}{2}z=0$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-z}{2y}\qquad -\frac{dz}{z}=\frac{dy}{2y}\qquad -\ln|z|=\frac{1}{2}\ln|Cy|\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{C\sqrt{y}}\qquad z=C\sqrt{y}$$

$$z=C(y)\sqrt{y}$$

$$z'=C'(y)\sqrt{y}+C(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$C'(y)\cdot\sqrt{y}+C(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2y}\cdot C(y)\sqrt{y}=\frac{\sin y}{2y}$$

$$C'(y)\cdot\sqrt{y}+C(y)\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{\sin y}{2y}$$

$$C'(y)+C(y)\cdot\frac{1}{y}=\frac{\sin y}{2y\sqrt{y}}$$

Задача знайти інтеграл $\int\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy$ - способом розкладання $\sin y$ в ряд.

$$x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$$

$$x(2x^2+y^2)dx+y(x^2+2y^2)dy=0$$

$$M(x,y)=x(2x^2+y^2)\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=2xy$$

$$N(x,y)=y\left(x^2+2y^2\right)\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy$$

$$x_0=0\qquad y_0=1$$

$$\int_0^x(2x^3+xy^2)dx+\int_1^y 2y^3dy=C$$

$$\left(\frac{2x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}\right)\Bigg|_0^x+\frac{2y^4}{4}\Bigg|_1^y=C$$

$$\frac{x^4}{2}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{2}-\frac{1}{2}=C$$

$x^4+x^2y^2+y^4=C$ - відповідь.

д) $y'' = y' + x$

Введемо заміну $y' = z \quad y'' = z'$

$z' - z = x$

$a(x) = -1 \qquad b(x) = x$

$$z = e^{-\int -dx}(C + \int xe^{\int -dx}dx) = e^{x}(C + \int xe^{-x}dx) = e^{x}(C + \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix}) =$$
$$= e^{x}(C + (-xe^{-x} + \int e^{-x}dx)) = e^{x}(C - xe^{-x} - e^{-x}) = Ce^{x} - x - 1$$

$y' = Ce^{x} - x - 1 \qquad dy = (Ce^{x} - x - 1)dx$

$y = \int (Ce^{x} - x - 1)dx = C_1 e^{x} - \frac{x^2}{2} - x + C_2$ - відповідь.

$y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$

$a = 0 \qquad m = 4$

$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$

D=64-48=16

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 6$

$\lambda_{1,2} \neq a$

$\bar{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$\bar{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$

$\bar{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C - 8(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D) + 12(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) =$$
$$= 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$$

x^4	36	12A	A=3
x^3	-96	12B-32A	B=0
x^2	24	12C-24B+12A	C=-1
x^1	16	12D-16C+6B	D=0
x^0	-2	12E-8D+2C	E=0

$\bar{y} = 3x^4 - x^2$

$y = 3x^4 - x^2 + C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}$ - відповідь.

№2. Знайти розв'язок, який задовольняє початковим умовам.

а) $y = x(y' - x\cos x) \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}, y = 0$

$xy' - x^2 \cos x - y = 0$

$y' - \frac{1}{x} y = x\cos x \qquad a(x) = -\frac{1}{x} \qquad b(x) = x\cos x$

$$y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}(C + \int x\cos x e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx) = x(C + \int x\cos x \frac{1}{x} dx) = x(C + \int \cos x dx) =$$

$= x(C + \sin x) -$ *загальний розв'язок*

$0 = \frac{\pi}{2}(C + \sin\frac{\pi}{2}) \qquad C + 1 = 0 \qquad C = -1$

$y = x(\sin x - 1)$ - розв'язок задачі Коші.

б) $y''(1+y) = 5(y')^2 \; y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

$\left.\begin{matrix} y' = z \\ y'' = z\frac{dz}{dy} \end{matrix}\right\}$ - зробимо підстановку

$z\frac{dz}{dy}(1+y) = 5z^2$

$dz(1+y)5zdy$

$\frac{dz}{z} = \frac{5dy}{1+y}$

$\ln|z| = 5\ln|(1+y)C_1|$

$z = C_1(1+y)^5$

$y' = C_1(1+y)^5 \qquad dy = C_1(1+y)^5\,dx$

$\dfrac{dy}{(1+y)^5} = C_1 dx$

$-\dfrac{1}{4(1+y)^4} = C_1 x + C_2$ - загальний розв’язок

Для знаходження C_1 і C_2 при заданих початкових умовах розв’яжемо систему

$$\begin{cases} y' = C_1(1+y)^5 \\ -\dfrac{1}{4(1+y)^4} = C_1 x + C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = C_1(1+0)^5 \\ -\dfrac{1}{4} = C_1 \cdot 0 + C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$-\dfrac{1}{4(1+y)^4} = x - \dfrac{1}{4} \qquad x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4(1+y)^4}$ - відповідь.

в) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

$a = 5, m = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

$(\lambda - 5)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 5$

$\lambda_i = a$ - двічі

отже $\overline{y} = e^{5x} \cdot x^2 \cdot A$

$\overline{y}' = 5e^{5x} Ax^2 + e^{5x} 2Ax = e^{5x}(5Ax^2 + 2Ax)$

$\overline{y}'' = 5e^{5x}(5Ax^2 + 2Ax) + e^{5x}(10Ax + 2A) = e^{5x}(25Ax^2 + 10Ax + 10Ax + 2A)$

$e^{5x}(25Ax^2 + 20Ax + 2A - 50Ax^2 - 20Ax + 25Ax^2) = e^{5x}$

$2A = 1, A = \dfrac{1}{x}$

$y = e^{5x}(C_1 + C_2 x) + \dfrac{1}{2}x^2 e^{5x} = e^{5x}(\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_1)$

$y' = 5e^{5x}(\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_1) + e^{5x}(x + C_2) = e^{5x}(\dfrac{5}{2}x^2 + 5C_2 x + 5C_1 + x + C_2)$

$1 = e^0(0 + 0 + C_1) \quad C_1 = 1$

$0 = e^0(0 + 0 + 5 + 0 + C_2) \quad C_2 = -5$

$y = e^{5x}(\frac{x^2}{2} - 5x + 1)$ - розв’язок задачі Коші.

№3. Розв’язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda^2 = \pm 2i$$

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

перевіримо на лінійну незалежність

$$y_1 = \cos 2x \qquad y_2 = -\sin 2x$$

$$y_1' = -2\sin 2x \qquad y_2' = 2\cos 2x$$

$$\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2 \neq 0$$

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

$$y' = C_1(x)(-2\sin 2x) + \underbrace{C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x}_{=0} + C_2(x) 2\cos 2x$$

додаткова умова

$$y'' = C_1(x)(-2\sin 2x) + C_1(x)(-4\cos 2x) + C_2'(x)2\cos 2x + C_2(x)(-4\sin 2x)$$

$$-2\sin 2x \cdot C_1'(x) + 2\cos 2xC_2'(x) - 4\cos 2xC_1(x) - 4\sin 2xC_2(x) + 4\sin 2xC_2(x) + 4\cos 2xC_1(x) =$$

$$= \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\begin{cases} -2\sin 2xC_1'(x) + 2\cos 2xC_2'(x) = \dfrac{1}{\sin 2x} \\ C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)tg2x$$

$$\begin{cases} -2\sin 2x\cos 2xC_1'(x) + 2\cos^2 2xC_2'(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \\ 2\sin 2x\cos 2xC_1'(x) + 2\sin^2 2xC_2'(x) = 0 \end{cases}$$

$$C_2'(x)\cdot 2 = ctg2x$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}ctg2x$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx = \frac{1}{2\cdot 2}\int\frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C_2$$

$$C_1'(x)\cos 2x + \frac{1}{2}ctg2x\sin 2x = 0$$

$$C_1'(x)\cos 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}$$

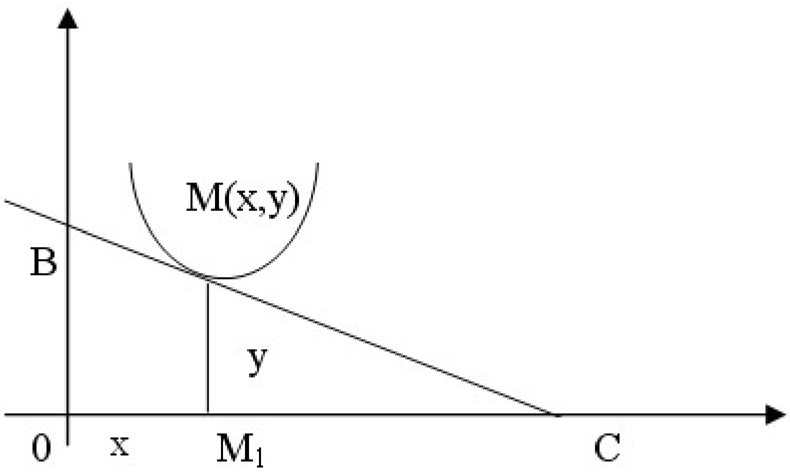
$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}x + C_1$$

$y = -(\frac{1}{2}x + C_1)\cos 2x(\frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + C_2)\sin 2x$ - відповідь.

№4. Розв’язати задачу:

а) Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична до кривої на вісі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику. A(9;-4).

Розв’язання.



$$\angle OCB = 180^0 - \varphi$$

$$tg\angle OCB = tg(180^0 - \varphi) = -tg\varphi = -y'$$

$$\frac{y}{M_1C} = -y'$$

$$M_1C = -\frac{y}{y'}$$

$$\frac{OB}{OC} = -y'$$

$$OB = \frac{x+y}{2} \qquad OC = x - \frac{y}{y'} = \frac{xy'-y}{x}$$

$$\frac{\frac{x+y}{2}}{\frac{xy'-y}{y'}} = -y' \qquad \frac{x+y}{2(xy'-y)} = -1 \qquad x+y = -2(xy'-y)$$

$$x+y = 2y - 2xy'$$
$$2xy' - y = -x$$

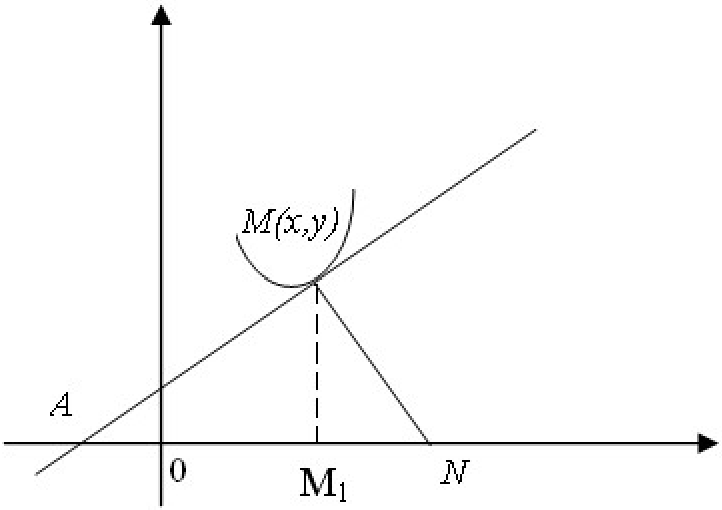
$y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2}$ - лінійне рівняння.

$$y = e^{-\int -\frac{1}{2x}dx}(C + \int -\frac{1}{2}e^{\int -\frac{1}{2}xdx}dx) = e^{\frac{1}{2}\ln|x|}(C - \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}\ln|x|}dx) = \sqrt{x}(C - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx) =$$
$$= \sqrt{x}(C - \sqrt{x}) = C\sqrt{x} - x$$

A(9;-4) $\qquad -4 = C\sqrt{9} - 9 \qquad$ *5=3C* $\qquad C = \frac{3}{5} \qquad y = \frac{5}{3}\sqrt{x} - x$

б) Записати рівняння кривих, для яких довжина відрізку, що відтинається нормаллю в т. M(x,y) на вісі OX, дорівнює $\frac{Y^2}{X}$.

Розв'язання.



$ON = \dfrac{Y^2}{X}$ $\quad\dfrac{MM_1}{AM_1} = y'$ $\quad\dfrac{Y}{X + AO} = y'$ $\quad X + AO = \dfrac{Y}{y'}$ $\quad AO = \dfrac{Y}{y'} - X$

$MM_1{}^2 = AM_1 \cdot M_1N$

$MM_1 = y$ $\quad AM_1 = AO + x = \dfrac{y}{y'} - x + x = \dfrac{y}{y'}$ $\quad M_1N = ON - x = \dfrac{y}{y'} - x = \dfrac{y^2 - x^2}{x}$

$y^2 = \dfrac{y^2 - x^2}{xy'}$ $\quad y^2 - x^2 = xyy'$ $\quad y = xt$

$$y' = t + xt'$$

$x^2t^2 - x^2 = x^2t(t + xt')$

$t^2 - 1 = t^2 + xt \cdot t'$

$xt \cdot t' = -1$ $\quad tdt = -\dfrac{dx}{x}$ $\quad \dfrac{t^2}{2} = -\ln|Cx|$

$$\frac{t^2}{2} = \ln\left|\frac{1}{Cx}\right|$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln\left|\frac{1}{Cx}\right|$$

$$y^2 = 2x^2 \ln\left|\frac{1}{Cx}\right|$$ - відповідь.

№5. Застосовуючи метод ламаних Ейлера, знайти на відрізку [0;1] наближений розв'язок рівняння $y' = 2x - y$, який задовольняє початковій умові $y(0) = -1$. Відрізок [0;1] поділити на 10 рівних частин.

Розв'язання

Значення ординат $y_к$ точок $M_к(x_к,y_к)$ обчислюємо за формулою

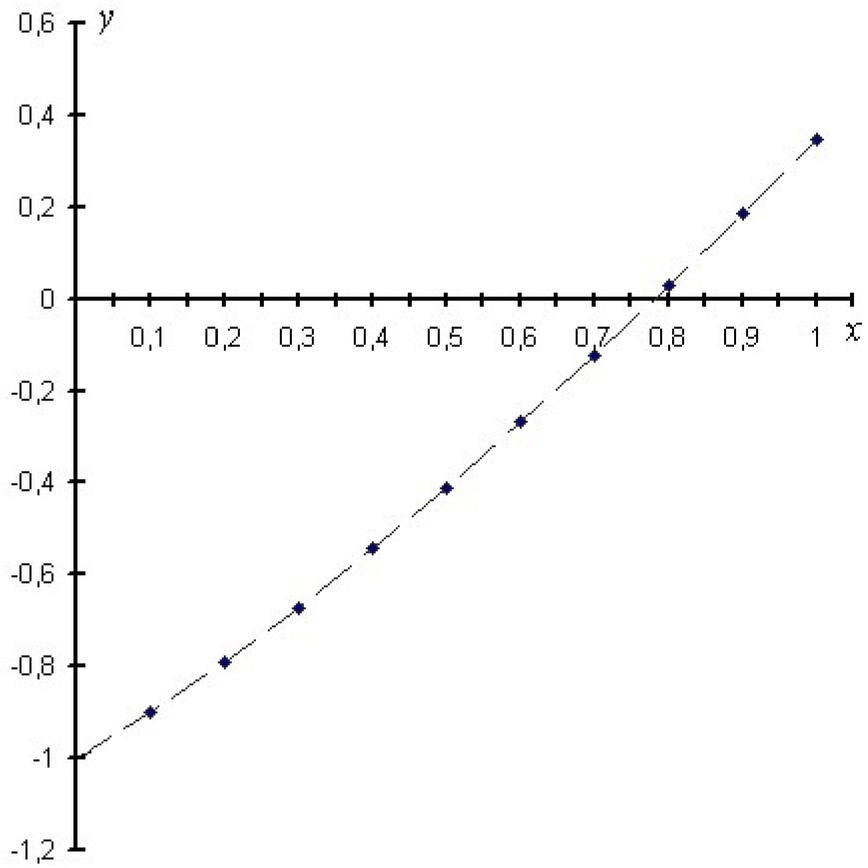
$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$
$$k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

В даному прикладі $f(x_{k-1}, y_{k-1}) = 2x_{k-1} - y_{k-1}$, $x - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{10} - x_9 = h = 0{,}1$,

а значить $y_k = y_{k-1} + (2x_{k-1} - y_{k-1}) \cdot 0{,}1, \;\; де \;\; k = 1,2,\ldots,10$.

Всі підрахунки зведемо в таблицю

k	$\mathbf{x_k}$	$\mathbf{2x_k}$	$\mathbf{y_k}$	$\mathbf{2x_k - y_k}$	$\mathbf{(2x_k - y_k)0,1}$	$\mathbf{y_{k+1}}$
0	0	0	-1	1	0,1	-0,9
1	0,1	0,2	-0,9	1,1	0,11	-0,79
2	0,2	0,4	-0,79	1,19	0,119	-0,671
3	0,3	0,6	-0,671	1,271	0,1271	-0,5439
4	0,4	0,8	-0,5439	1,3439	0,13439	-0,4095
5	0,5	1	-0,4095	1,4095	0,14095	-0,2686
6	0,6	1,2	-0,2686	1,4686	0,14686	-0,1217
7	0,7	1,4	-0,1217	1,5217	0,15217	0,03047
8	0,8	1,6	0,03047	1,5695	0,15695	0,1874
9	0,9	1,8	0,1874	1,6126	0,16126	0,3486
10	1	2	0,3486			



Варіанти завдань

Варіант № 1.

№1. Розв’язати рівняння:

а) $e^{x+2y}\,dy = x\,dx$,

б) $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2$

в) $y - xy' = x \sec\dfrac{y}{x}$,

г) $(x^2 + 1)\,y' + 4xy = 3$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,

д) $y' + y = x\sqrt{y}$,

є) $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0$.

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = 2xy + xe^{-y}$, $y(0) = -1$.

№3. Розв’язати рівняння:

а) $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$, б) $y'' + y' = 2x - 1$.

№4. Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $\begin{cases} y'' = y'e^y \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

№5. Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

№6. Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує цю точку з початком координат. A(2;5), n=8.

№7. Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2x - z. \end{cases}$$

Варіант № 2.

№1.Розв’язати рівняння

а) $y'\sin x = y \ln y$

б) $\frac{y'}{7^{y-x}} = 3$

в) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$

г) $y' + y\,tgx = \sec x$

д) $y\,dx + 2x\,dx = 2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy$

є) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = 2y - \frac{x^2}{1+y}$, $y(0) = 3$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ б) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $(y')^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$$

№6. Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує цю точку з початком координат. A(3;-1), $n=\frac{3}{2}$

№7. Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$$

Варіант № 3.

№1.Розв'язати рівняння

а) $y' = (2x - 1)\,\mathrm{ctg}\, y$

б) $y - x y' = 2(1 + x^2 y')$

в) $(x + 2y)dx - x\,dy = 0$

г) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

д) $y' + 2y = y^2 e^x$

є) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = y^3 \ln(x+3)$, $y(0) = -1$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ б) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $yy'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y|0| = 1$, $y'(0) = 4$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з'єднує цю точку з початком координат. A(-6;4), n=9

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x + y \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases}$$

Варіант № 4.

№1.Розв'язати рівняння

а) $\sec^2 x \, tgy \, dy + \sec^2 x \, tgx \, dx = 0$

б) $y - x y' = 1 - x^2 y'$

в) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

г) $xy' - 2y = 2x^4$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

д) $y' = y^4 \cos x + y \, tgx$

є) $x\,dx + y\,dy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \dfrac{xy}{x^2 - 4}$, $y(0) = 1$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' + y' tgx = \sin 2x$ б) $y'' + 12y' + 36y = 14e^{6x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{1}{3}$

б) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з'єднує цю точку з початком координат. A(-6;-2), n=3

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 5.

№1.Розв'язати рівняня

а) $(1 - e^x)\, y\, dy - e^y\, dx = 0$

б) $(x + 4)dy - xy\, dx = 0$

в) $(y^2 - 2xy)dx + x^2\, dy = 0$

г) $y' = 2x(x^2 + y)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

д) $xy\, dy = (y^2 + x)dx$

є) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{1 + 2x + y^2}$, $y(0) = 5$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' x \ln x = y'$ б) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' tgy = 2(y')^2$, $y(1) = \dfrac{\Pi}{2}$, $y'(1) = 2$

б) $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що довжина відрізку, який відтинається на вісі ординат нормаллю, проведений в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат. A(0;4)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 6.

№1.Розв’язати рівняння

а) $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x}\, y\, dy = 0$

б) $y' + y + y^2 = 0$

в) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

г) $y' - y = e^x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$

є) $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на10 частин , якщо $y' = 2y - x^5y^3$, $y(0) = -3$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $xy'' - y' = x^2e^x$ б) $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $2yy'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' + 6y' = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що довжина відрізку, який відтинається на вісі ординат нормаллю, проведений в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат. A(0;-8)

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

Варіант № 7.

№1. Розв'язати рівняння

а) siny cosx dy = cosy sinx dx

б) y^2 lnx dx – (y – 1) = 0

в) x y' – y = x tg$\frac{y}{x}$

г) x y' + y + xe^{-x^2} =0 , x_0 = 1 , y_0 = $\frac{1}{2e}$

д) y'x^2 siny = xy' – 2y

є) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо y' = xy + e^x, y(0) = –2.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y''x\ln x = 2y'$ б) $y'' + y = 2cjsx - (4x+4)\sin x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $yy'' - (y')^2 = y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що довжина відрізку, який відтинається на вісі ординат нормаллю, проведений в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат. A(1;1)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

Варіант № 8 .

№1.Розв'язати рівняння

а) $y' = (2y + 1)\,\mathrm{tg}x$

б) $(x + xy^2)\,dy + y\,dx - y^2\,dx = 0$

в) $x\,y' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

г) $\cos y\,dx = (x + 2\cos y)\sin y\,dy$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$

д) $(2x^2 y \ln y - x)\,y' = y$

є) $(1 - e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \sqrt{4x + 2y + 1}$, $y(0) = 2$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $x^2 y'' - xy' = 1$ б) $y'' - 6y' + 10y = 74e^{3x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' = -\frac{1}{2y^3}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$

б) $y'' - 2y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що довжина відрізку, який відтинається на вісі ординат нормаллю, проведений в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат. A(0;-3)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Варіант № 9.

№1.Розв'язати рівняння

а) $(\sin(x + y) + \sin(x - y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$

б) $y' + 2y - y^2 = 0$

в) $x y' - y = (x + y) \ln\left|\frac{x+y}{x}\right|$

г) $x^2 y' + xy = -1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

д) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

є) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2+2y^2)y' = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = 3\sqrt[3]{y^2} + x$, $y(0) = - 3$

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' = -\frac{x}{y'}$ б) $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $\begin{array}{l} y'' = 1 - (y')^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}$ б) $\begin{array}{l} y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{array}$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} ctgx$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0) і має властивості: довжина перпендикуляру, опущеного з початку координат на дотичну до кривої дорівнює абсцисі точки дотику. A(2;3)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases}$$

Варіант № 10.

№1.Розв'язати рівняння

а) $(1 + e^x)yy' = e^x$

б) $(x^2 + x)y\,dx + (y^2 + 1)dy = 0$

в) $x\,y' = y\cos \ln\left|\frac{y}{x}\right|$

г) $yx' + x = 4y^3+3y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

д) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

є) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = y + \sqrt[3]{y + x}$, $y(0) = -1$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $xy'' = y'$ б) $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $(y'')^2 = y'$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0) і має властивості: довжина перпендикуляру, опущеного з початку координат на дотичну до кривої дорівнює абсцисі точки дотику. A(-4;1)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$$

Варіант № 11.

№1. Розв'язати рівняння

а) $\sin x \, \mathrm{tg} y - \frac{dy}{\sin x} = 0$

б) $(xy^3+x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$

в) $(y + \sqrt{xy})\,dx = xdy$

г) $(2x + y)dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $xyy' = x^2 + y^2$

є) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \sqrt[3]{3x - y + 4}$, $y(0) = 0$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' = y' + x$ б) $y'' + 5y' = 72e^{2x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $2yy'' - (y')^2 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

б) $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0) і має властивості: довжина перпендикуляру, опущеного з початку координат на дотичну до кривої дорівнює абсцисі точки дотику. A(1;-2)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases}$$

Варіант № 12 .

№1.Розв'язати рівняння

а) $3e^x \sin y\, dx + (1 - e^x)\cos y\, dy = 0$

б) $(xy^3 + x)dx - (y + yx^2)dy = 0$

в) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

г) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $(x + 1)(y' + y^2) = -y$

є) $(3x^2 tgy - \dfrac{2y^3}{x^2})dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2})dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = 4 + \sqrt{x^2 + y^4} + 1$, $y(0) = 3$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y''x = y' + x$ б) $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $\begin{array}{l} y'' = 2 - y \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{array}$ б) $\begin{array}{l} y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{array}$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + y = tgx$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0) і має властивості: довжина перпендикуляру, опущеного з початку координат на дотичну до кривої дорівнює абсцисі точки дотику. A(-2;2)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 13 .

№1.Розв'язати рівняння

а) $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$

б) $y' = 2xy + x$

в) $y = x(y' - \sqrt[x]{e^{y}})$

г) $(1 - 2xy)\,y' = y(y - 1)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $y'x + y = -xy^2$

є) $\left(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right)dx = \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2}dy$

№2.Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] ,розбивши його на10 частин , якщо $y' = \dfrac{3x - 7y^2 + 3}{3x - 7y + 7}$, $y(0) = 1$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $xy'' = y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$ б) $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' = \dfrac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

б) $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x - 36x\cos 3x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = ctg 2x$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0) і має властивості: довжина перпендикуляру, опущеного з початку координат на дотичну до кривої дорівнює абсцисі точки дотику. A(4;-3)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 14.

№1.Розв'язати рівняння

а) $3^{x^2+y}dy + xdx = o$

б) $y - xy' = 3(1 + x^2y')$

в) $y' = \frac{y}{x} - 1$

г) $x(y' - 1) = e^x$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

д) $y' - xy = - y^3 e^{-x^2}$

є) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \frac{x^2 + y^2 - 0,5}{1,5x + y^2 + 1}$, $y(0)=1$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $xy'' + y' = \ln x$ б) $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $yy'' - 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

б) $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + y = ctgx$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0) і має властивості: довжина перпендикуляру, опущеного з початку координат на дотичну до кривої дорівнює абсцисі точки дотику A(5;0)

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

Варіант № 15.

№1.Розв'язати рівняння

а) $(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))y' = \sec x$

б) $2xyy' = 1 - x^2$

в) $y'x + x + y = 0$

г) $y = x(y' - x\cos x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$

д) $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$

є) $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на10 частин , якщо $y' = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$,$y(0) = 2$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' tgx = y' + 1$ б) $y'' + 9y' + 20y = 126e^{-2x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' = y' + (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

б) $y^2 + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$ і має таку властивість: відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на вісі OY, дорівнює квадрату абсциси точки дотику. A(4;1)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

Варіант № 16.

№1.Розв'язати рівняння

а) $y' = e^{x^2}\left(1+y^2\right)$

б) $(x^2 - 1)\, y' - xy = 0$

в) $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

г) $(xy' - 1) \ln x = 3y$, $x_0 = e$, $y_0 = 0$

д) $y' + xy = x^3y^3$

є) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{xdy + ydx}{x^2} = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 0{,}5}{1 + x + y^2}$, $y(0) = 4$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' + 2x(y')^2 = 0$ б) $y'' + 36y' = 36 + 66x - 36x^3$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$ і має таку властивість: відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на вісі OY, дорівнює квадрату абсциси точки дотику. A(-2;5)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Варіант № 17.

№1.Розв'язати рівняння

а) ctgx $\cos^2 y\, dx + \sin^2 x\, tgy\, dy = 0$

б) $(y^2x + y^2)dy + x\, dx +0$

в) $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

г) $(2e^y - x)\, y' = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

д) $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y$

є) $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = x(1+\sqrt{x^2 + y})$, $y(0) = 4$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ б) $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y''(1+y) = 5(y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

б) $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$ і має таку властивість: відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на вісі OY, дорівнює квадрату абсциси точки дотику. A(3;-2)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases}$$

Варіант № 18.

№1.Розв'язати рівняння

а) $\sin x\, y' = y \cos x + 2 \cos x$

б) $(1 + x^3)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0$

в) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2+3xy +x^2)dy = 0$

г) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

д) $yx' + x = - yx^2$

є) $y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 - y^2 - a^2)dx = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на10частин , якщо $y' = \sqrt[3]{1 - xy^2 + y}$,$y(0) = 1$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$ б) $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

б) $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$ і має таку властивість: відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на вісі OY, дорівнює квадрату абсциси точки дотику. A(-2;-4)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$$

Варіант № 19.

№1.Розв'язати рівняння

а) $1 + (1 + y')e^y = 0$

б) $xy' - y = y^2$

в) $(x - y)y\,dx - x^2\,dy = 0$

г) $(x + y^2)dy = y\,dx$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $x(x - 1)y' + y^3 = xy$

є) $(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 0{,}5}{1 + y^2} \quad , \quad y(0) = -7 .$$

№3.Розв'язати рівняння

а) $y''' + y''tgx = \sec x$ б) $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $4(y'')^2 = 1 + (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

б) $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$ і має таку властивість: відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на вісі OY, дорівнює квадрату абсциси точки дотику. A(3;0)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases}$$

Варіант № 20.

№1.Розв'язати рівняння

а) $y' \, ctgx + y = 2$

б) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$

в) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

г) $(\sin^2 y + x \, ctgy)y' = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$

д) $2x^3 y \, y' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$

є) $\frac{y + \sin x \cos^2 yx}{\cos^2 yx} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 yx} - \sin y \right) dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 1{,}5}{1 + 2x + y^2} \quad , \quad y(0) = 4 \, .$$

№3.Розв'язати рівняння

а) $y'' - 2y' ctgx = \sin^3 x$ б) $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105 \sin 3x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $2(y')^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

б) $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = tg2x$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$ і має таку властивість: відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на вісі OY, дорівнює квадрату абсциси точки дотику. A(2;8)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 21.

№1. Розв'язати рівняння

а) $e^x \sin y\, dx + tgy\, dy = 0$

б) $y' - xy^2 = 2xy$

в) $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$

г) $(x + 1)\, y' + y = x^3 + x^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

д) $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2y\right)dy$

є) $(3x^2 - y \cos xy + y)dx + (x - x \cos xy)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо $y' = \frac{3x^2 + y^2}{1 + y^2}$, $y(0) = 10$

№3.Розв’язати рівняння

а) $y'' + 4y' = 2x^2$ б) $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $1 + (y')^2 = yy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

б) $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 14$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична до кривої на вісі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику. A(9;-4)

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 22.

№1.Розв'язати рівняння

а) $(1 + e^{3y})x\,dx = e^{3y}\,dy$

б) $2x^2 y y' + y^2 = 2$

в) $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$

г) $xy' - 2y + x^2 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

д) $y' + 3\sqrt[3]{y} = 3y$

є) $(12x^3 - e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y})dx + (16y + \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}})dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$y' = \cos(y - x)$, $y(0) = 0$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $xy'' - y' = 2x^2 e^x$ б) $y'' - 4y' + 5y = \left(24\sin x + 8\cos x\right)e^{-2x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' + y\left(y'\right)^3 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

б) $y'' + 12y' + 36y = 72x^{3-18}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична до кривої на вісі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику. A(4;10)

№7. Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

Варіант № 23.

№1.Розв'язати рівняння

а) $(\sin(2x + y) - \sin(2x - y))dx = \frac{dy}{\sin y}$

б) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

в) $xy' + y(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0$

г) $xy' + y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{2}{\pi}$

д) $xy' + y = y^2 \ln x$

є) $\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy\sin x^2 y + 4\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2 \sin x^2 y\right)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$y' = y^2 - 2ye^x + e^{2x}$, $y(0) = 0$.

№3.Розв'язати рівняння

а) $x(y'' + 1) + y' = 0$ б) $y'' + 16y = 8\cos 4x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $yy'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

б) $y'' + 3y' = (10x + 58)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична до кривої на вісі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику. A(18;-2)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

Варіант № 24.

№1.Розв'язати рівняння

а) cosy dx = $2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$

б) y' $\sqrt{1+y^2} = \dfrac{x^2}{y}$

в) $(x^2 + y^2)dx + 2xy\ dy = 0$

г) $(x^2 - 1)\ y' - xy = x^3 - x$, $x_0 =$, $y_0 = 0$

д) x dx = $\left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$

є) $y3^{xy}\ln 3\ dx + (x3^{xy}\ \ln 3 -- 3)dy = 0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв'язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо y' = $3^x + 2^y$, y(0) = 0 .

№3.Розв'язати рівняння

а) $x^2y'' = (y')^2$ б) $y'' + 9y = 9x^4 - 12x^2 - 27$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $yy'' - (y')^2 = y^2\ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + y = -ctg^2 x$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична до кривої на вісі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику. A(1;-7)

№7.Розв'язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Варіант № 25.

№1.Розв’язати рівняння

а) $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$

б) $(y+1)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}+xy$

в) $(y^2-2xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

г) $(1-x^2)y' + xy = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

д) $y' + 2xy = 2x^3y^3$

є) $\left(\dfrac{1}{x-y}+3x^2y^7\right)dx+\left(7x^2y^6-\dfrac{1}{x-y}\right)dy=0$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$y' = \sqrt{x^2-y}-x$, $y(0) = 3$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $2xy''y' = (y')^2-4$ б) $y''-12y'+40y=2e^{6x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

б) $y''+8y'=18+60x^2-32x^3$, $y(0)=5$, $y'(0)=2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y''-y'=e^{2x}\cos(e^x)$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична до кривої на вісі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику. A(16;3)

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x+2z-y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x+2z \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = y-2x-z \end{cases}$$

Варіант № 26.

№1.Розв’язати рівняння

а) $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$

б) $y' = y^4\cos x + y\,tgx$

в) $ye^{2x}\,dx - (1 - e^{2x})dy = 0$

г) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

д) $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$

є) $2x\,y' - y = xy^3$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$y' = x^2 + 2x + y$, $y(0) = 4$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $y''x\ln x = y'$ б) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y''tgy = 2(y')^2$, $y(1) = \frac{\Pi}{2}$, $y'(1) = 2$

б) $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x0,y0), якщо відомо, що довжина відрізку, який відтинається на вісі ординат нормаллю, проведений в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат. A(0;4)

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$$

Варіант № 27.

№1. Розв’язати рівняння

а) $2^x tgy\, dx + (1 + 2^x)\sec^2 y\, dy = 0$

б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

в) $xy' + y' – e^x = 0$

г) $y' + 2y = y^2 e^x$

д) $x^2 y' + \cos 3y = 1$

є) $y' + 3xy^2 = 4xy$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$y' = \sqrt{1+y^4} + e^{2x}$, $y(0) = 1$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $y'' + y'tgx = \sin 2x$ б) $y'' + 12y' + 36y = 14e^{6x}$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{3}$

б) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує цю точку з початком координат.A(-6;-2), n=3

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases}$$

Варіант № 28.

№1.Розв’язати рівняння

а) $3x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$

б) $(y^2 + 2xy)dx - x^2\,dy = 0$

в) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos 3x$

г) $y' - 2xy = y^2 e^{-x^2}$

д) $y' + y\,ctg2x = \cos 2x$

є) $y' + \frac{y}{x+3} = 4y^2 (x+3)^2$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$$y' = 4 + \sqrt{x^2 + y^4} + 1, \quad y(0) = 3 .$$

№3.Розв’язати рівняння

а) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ б) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $yy'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y|0| = 1$, $y'(0) = 4$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. A(x_0,y_0), якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує цю точку з початком координат.A(-6;4), n=9

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 29.

№1.Розв’язати рівняння

а) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y\, y' = 0$

б) $5x^3 y' = y^2(2x - y)$

в) $y' + 3y\,\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$

г) $(xy' - y^2)\ln x = 2y$

д) $x^2 y' \cos y + 1 = 0$

є) $\left(y' + \dfrac{y}{x}\right)\cos\dfrac{y}{x} = 1$

№2. Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1{,}5}{1 + 0{,}5x + y^2}$ с, $y(0) = -4$.

№3.Розв’язати рівняння

а) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ б) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$

№4.Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $(y')^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

№5.Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує цю точку з початком координат. A(3;-1), $n=\dfrac{3}{2}$

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Варіант № 30.

№1.Розв’язати рівняння

а) $y\sin^2 x\, dx + \cos x \ln y\, dy = 0$

б) $xy' + x e^{-\frac{y}{x}} = y$

в) $xy' - 2y = x^3 + 1$

г) $y' - \frac{x}{x^2+1} y = y^2$

д) $y' - 3y\, \mathrm{ctg} 3x = \frac{1}{\sin 3x}$

є) $y' - \frac{y}{x-1} = y^2 (x-1)$

№2.Використовуючи метод Ейлера знайти наближений розв’язок рівняння на відрізоку [0;1] , розбивши його на 10 частин , якщо

$$y' = \frac{1{,}1(1-y^2)}{3x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 4$$

№3. Розв’язати рівняння

а) $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ б) $y'' + y' = 2x - 1$

№4. Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам

а) $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

б) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$

№5. Розв'язати методом варіації довільної сталої $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

№6.Записати рівняння кривої, що проходить через т. $A(x_0,y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в *n* раз більше за кутовий коефіцієнт прямої, що з’єднує цю точку з початком координат.A(2;5), n=8

№7.Розв’язати систему методом Ейлера

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

ЗМІСТ