Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць

Випуск IX

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2011

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

П. І. Ульшин, О. М. Ігнатченко
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

У шкільному курсі геометрії часто розглядаються задачі на знаходження максимального або мінімального значення, пов'язані з властивостями фігур. Вони ще називаються екстремальними. Приведені назви задач мають своє походження від латинських слів: *maximum* – найбільше, *minimum* – найменше, *extremum* – крайнє.

У більшості своїй такі задачі мають практичне застосування. Добре відомий вислів Леонарда Ейлера: «У світі не відбувається нічого, у чому б не було видно змісту якого-небудь максимуму або мінімуму».
З давніх-давен виникали задачі на знаходження найкоротшої відстані між населеними пунктами, на виготовлення потрібних виробів з найменшою затратою матеріалу, на побудову фігури, вписаної в дану фігуру, з найбільшою площею і т.д.

Довгий час при розв'язуванні екстремальних задач не було єдиного підходу. Їх розв'язували методом прикладання площ, або методом вичерпування, або використанням геометричних нерівностей, які спочатку доводили, а потім відшукували умови, при яких вони переходили у рівності.

Є і такі задачі, які розв'язуються за допомогою принципу «крайнього». Цей принцип полягає в тому, що інколи в задачі буває корисно розглянути певний «крайній» елемент, на якому деяка величина приймає найбільше або найменше значення. Такими елементами можуть бути: сторона трикутника, кут, відстань, площа, многокутник – на яких досліджується їх найбільше або найменше значення.

Серед екстремальних задач Давньої Греції, які мають теоретичний і практичний інтерес, можна відмітити наступні.

Задача Евкліда (ІІІ ст. до н.е.): «В даний трикутник ABC вписати паралелограм ADEF ($EF \parallel AB$, $DE \parallel AC$) найбільшої площі».При розв'язуванні її використовується метод прикладання площ і встановлюється, що точки D, E і F – лежать на серединах сторін трикутника.

Задача Архімеда (ІІ ст. до н.е.): «Знайти кульовий сегмент, що містить найбільший об'єм серед всіх сегментів, які мають задану площу сферичної поверхні». Розв'язування цієї задачі базується на використанні нестрогих нерівностей і встановлюється, що серед всіх сферичних сегментів, обмежених рівними поверхнями, найбільший буде – півкулею.

Задача Герона (I ст.): «Дано дві точки A і B по одну сторону прямої l. Потрібно знайти на l таку точку D, щоб сума відстаней AD+DB була найменшою». При розв'язуванні задачі використовуються властивості осьової симетрії і сторін трикутника.

В середині XVII ст. видатними вченими П. Ферма, Г. Лейбніцем, І. Ньютоном й ін. Було встановлено загальний підхід до розв'язування екстремальних задач. Спочатку процес, який розглядається в задачі визначається у вигляді неперервної функції $y = f(x)$. Далі вивчаються властивості цієї функції за допомогою похідної. Якщо функція неперервна в точці x_0 і похідна її змінює знак на протилежний при переході через цю точку, то x_0 – точка екстремуму функції. При цьому:

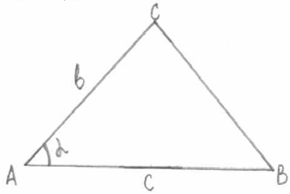
1) якщо при $x < x_0$ похідна $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ маємо $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимуму;

2) якщо $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, а $f'(x) > 0$ при $x > x$,то x_0 – точка мінімуму. Значення функції в цих точках відповідно є максимальним або мінімальним.

Задачі на екстремум у геометрії з використанням похідної розглядаються в старших класах загальноосвітньої школи, а в молодших класах при розв'язуванні екстремальних задач використовуються певні властивості геометричних фігур. Розглянемо приклади розв'язування таких задач з використанням різних методів.

Задача 1.

Серед усіх трикутників із даними сторонами AB = c і AC = b знайдіть той, у якого більша площа.

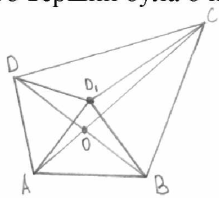


Розв'язання:

Відомо, що площу трикутника можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, де $\alpha = \angle$ BAC. Кут α може змінюватися від 0° до 180°, а sin α при цьому приймає найбільше значення при $\alpha = 90^{\circ}$: $\sin 90^{\circ} = 1$. Отже, найбільшу площу має прямокутний трикутник, тобто $S = \frac{1}{2}bc$.

Задача 2.

У внутрішній частині випуклого чотирикутника знайдіть точку, сума відстаней від якої до його вершин була б найменшою.



Розв'язання:

Побудуємо діагоналі AC і BD випуклого чотирикутника ABCD. Нехай O = $AC \cap BD$.

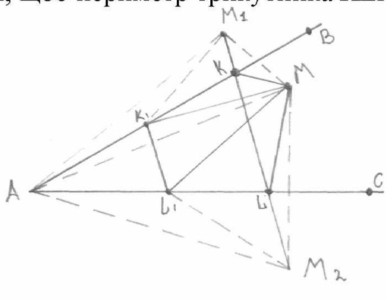
Візьмемо будь-яку точку O_1, яка належить внутрішній частині чотирикутника і з'єднаємо її з вершинами його. Запишемо нерівності:

$$AO_1 + O_1C \geq AC = AO + OC \text{ і } BO_1 + O_1D \geq BD = BO + OD.$$

Якщо з одержаних нерівностей хоч одна строга, то це означає, що точка $O_1 \equiv O$, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

Задача 3.

Всередині гострого кута BAC дано точку M. Знайти на сторонах BA і AC точки K і L такі, щоб периметр трикутника KLM був найменшим.



Розв'язання:

Побудуємо точки M_1 і M_2, симетричні до точки M відносно прямих (AB) і (AC), відповідно у точках K і L. Побудуємо трикутник KLM.

Доведемо, що ΔKLM має найменший периметр серед периметрів інших трикутників із вершинами в точці M і точках, які лежать на прямих (AB) і (AC). Будемо доводити методом від супротивного. Припустимо, що існують точки $K_1 \in (AB)$ і $L_1 \in (AB)$, відмінні від точок K і L, для яких ΔK_1L_1M має менший периметр ніж периметр трикутника KLM. Побудуємо відрізок K_1M_1 і L_1M_2. Оскільки ΔK_1M_1M і ΔL_1M_2M – рівнобедрені за побудовою, то периметр ΔK_1L_1M дорівнює довжині ламаної $M_1K_1L_1M_2$.З другого боку периметр ΔKLM дорівнює довжині відрізка M_1M_2, бо KM = KM_1 і LM = LM_2. Маємо многокутник $M_1M_2L_1K_1$. Оскільки в будь-якому многокутнику довжина однієї сторони менша від суми довжин усіх інших його сторін, то $M_1M_2<M_1K_1+L_1M_2$. Звідси випливає, що припущення було невірним, і залишається вірним твердження, що периметр ΔKLM є найменшим.

Задача 4.

Потрібно виготовити відкритий жерстяний бак з квадратним дном і об'ємом V_0. При яких розмірах такого баку буде затрачено найменше матеріалу?

Розв'язання:

Бак має форму прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Позначимо сторону основи $AB=x$ і висоту $AA_1=y$.

Площа поверхні баку запишеться так $S=x^2+4xy$. Оскільки об'єм баку $V_0=x^2y$, то $y=\dfrac{V_0}{x^2}$. Тому площу поверхні можна представити у вигляді функції одного змінного: $S=x^2+\dfrac{4V_0}{x}$.

Дослідимо цю функцію на екстремум: $S'=2x-\dfrac{4V_0}{x^2}=0$. Звідси маємо $x_0=\sqrt[3]{2V_0}$.

Оскільки мають місце нерівності: $\sqrt[3]{V_0}<\sqrt[3]{2V_0}<\sqrt[3]{3V_0}$ і похідна S' при переході через точку x_0 зліва направо змінює знак з «–» на «+», то $x_0=\sqrt[3]{2V_0}$ – є точкою мінімуму, а значення функції S в цій точці є мінімальним. Точці x_0 відповідає і значення $y_0=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{4}}$. Легко підрахувати, що $\dfrac{x_0}{y_0}=\dfrac{\sqrt[3]{2V_0}}{\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{4}}}=2$, звідки $x_0=2y_0$.

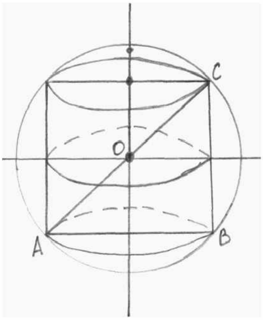
Відповідь: $x_0=\sqrt[3]{2V_0}$, $y_0=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{4}}$, $x_0=2y_0$.

Задача 5.

В кулю радіуса R вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.

Розв'язання:

Площа бічної поверхні вписаного циліндра визначається за формулою $S=2\pi xH$, де x = AO – радіус основи, H = BC – висота циліндра. Із ΔABC ($\angle B=90^\circ$), за теоремою Піфагора $4R^2=4x^2+H^2$, звідки $H=2\sqrt{R^2-x^2}$.



Площу бічної поверхні вписаного циліндра тепер можна записати у вигляді функції від змінної x: $S = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$. Дослідимо цю функцію на екстремум: $S' = 4\pi x \frac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$. Критична точка: $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Запишемо нерівності $\frac{R}{2} < \frac{R}{\sqrt{2}} < R$ і знаходимо: $S'\left(\frac{R}{2}\right) > 0$, $S'(R) > 0$.

Оскільки знак похідної при переході через критичну точку зліва направо змінюється з «+» на «–», то $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$ – є точкою максимуму, а функція S в цій точці приймає найбільше (максимальне) значення $S=2\pi R^2$.

Відповідь: $x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $H = \sqrt{2}R$ і $S=2\pi R^2$.

Екстремальні задачі виникали з практичної діяльності людей і завжди вимагали застосування ефективних методів їх розв'язування. В зв'язку з цим у навчальному процесі їм приділяється важливе значення. Вони сприяють розвитку розумової діяльності учнів, розширюють кругозір та збагачують їх знання новими методами.

Література

1. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов) / Демидович Б. П. – 13-е изд., испр. – М. : Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, 1997. – 624 с.

2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть 2 / Прасолов В. В. – М. : Наука, 1991. – 240 с.