МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико – математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
____________Бобилєв Д.Є.
«___»____________2023 р.

Реєстраційний №_________
«____»___________2023 р.

Розвиток логічного мислення учнів гімназій та ліцеїв у процесі розв'язування текстових задач

Кваліфікаційна робота
студентки групи МІм-22
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності: 014.04 Середня освіта (Математика)
Клішиної Юлії Олексіївни
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Віхрова Олена Вікторівна
Оцінка:
Національна шкала ___________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Клішина Юлія Олексіївна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми

Пошук ефективних шляхів розвитку логічного мислення учнів був і залишається однією із головних цілей шкільної математичної освіти. На етапі реформування системи освіти, побудови нової української школи, яка спрямована, передусім, на гармонійний розвиток особистості, це завдання набуває нової актуальності. Сформоване логічне мислення, як важлива особистісна якість, виступає необхідною передумовою адаптації учнів до соціального, професійного, культурного життя в суспільстві.

Державним стандартом освітньої галузі «Математика» визначено, що «метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості учня через формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті» [10]. Отже, належний рівень сформованості логічного мислення учнів гімназій та ліцеїв виступає і як мета математичної освіти, і як основа, на якій опанування ними математичних знань проходить значно ефективніше.

Існує пряма залежність між розвитком мисленнєвої діяльності учнів та змістом і організацією навчання математиці. Саме в умовах навчання стверджується можливість підвищення ефективності засвоєння дітьми математичних знань.

Розвитку логічного мислення сприяє розв'язування в процесі вивчення курсу математики текстових задач, зокрема задач з логічним навантаженням.

Шкільна математика – основа всієї математики. Завдання, які на перший погляд виявляються простими, можуть зажадати дотепності, кмітливості при їх рішенні. Мета кожного уроку математики – це розвиток уміння міркувати й робити правильні висновки. Розв’язання складного, нестандартного завдання приносить радість перемоги. При розв’язуванні логічних завдань учні мають можливість подумати над нестандартною умовою. Це викликає й зберігає інтерес до математики. Обмірковуючи розв’язок завдання, учень робить спроби сконструювати його логічно та обґрунтувати правильність його розв’язання – а це дає змогу розкрити творчі здібності учнів [12, с. 50].

Особливо важливо навчити учнів мислити логічно, тобто мислити послідовно. Насамперед, це важливо для їхнього подальшого успішного навчання та життя.

У процесі навчання в школі удосконалюється і здатність школярів формулювати думки і робити висновки. Уміння міркувати, обґрунтовувати, доводити те або те твердження впевнено і правильно також формується поступово і в результаті спеціально організованої навчальної діяльності. Розвиток мислення, вдосконалення розумових операцій, здібностей міркувати залежить від методів навчання [12, с. 74].

Пріоритетним завданням шкільної освіти є виховання відповідальної особистості – яка здатна до самоосвіти і розвитку, вміє використовувати набуті знання та вміння для творчого вирішення проблем, критично мислити, опрацьовувати різноманітну інформацію, прагне змінити на краще своє життя і життя своєї країни. Перед сучасною освітою першочергово виступає завдання інтелектуального розвитку здобувачів освіти. Для реалізації даної мети особистість повинна мати достатній рівень розвитку всіх видів пам'яті, уваги, уяви, мислення та мовлення, а також здібність до аналізу та синтезу, абстрагування й узагальнення, вміння приймати рішення, доводити твердження і спростовувати їх. Отже, проблема формування логічного мислення, як умови успішного навчання учнів школи, є актуальною.

Мета магістерської роботи полягає в тому, щоб розробити та теоретично обґрунтувати методику розвитку логічного мислення учнів гімназій та ліцеїв у процесі розв'язування текстових задач.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів гімназій та ліцеїв розв'язування текстових задач.

Предмет дослідження – методика розвитку логічного мислення учнів у процесі навчання розв'язуванню текстових задач.

Для досягнення мети розв'язувались такі завдання:

— розкрити поняття «логічне мислення учнів» та особливості його розвитку на основі аналізу психолого-педагогічної, методичної літератури;

— визначити роль та місце текстових задач у процесі розвитку логічного мислення учнів;

— розкрити види текстових задач у шкільному курсі математики та методи їх розв'язування;

— розкрити методичні особливості навчання учнів гімназій та ліцеїв розв'язування текстових задач на рух та спільну роботу;

— вдосконалити методику вивчення задач на відсотки у 5-6 класах як засобу розвитку логічного мислення учнів;

— розробити систему задач з логічним навантаженням для розвитку логічного мислення учнів гімназій та ліцеїв .

Основні методи дослідження: аналіз наукової, психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження, аналіз шкільних програм, підручників і навчальних посібників, вивчення і узагальнення педагогічного досвіду роботи вчителів математики; анкетування учнів та вчителів.

Практичне значення дослідження:

– складено систему текстових задач, методичні рекомендації вчителям щодо її використання; розроблено пам'ятку для учнів «Як розв'язувати текстові задачі».

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

1.1. Логічне мислення учнів та психолого-педагогічні особливості його розвитку

Реальні речі та явища мають властивості та зв'язки, які можна пізнати безпосередньо через органи чуття та сприйняття (кольори, звуки, форми, положення та рух тіла у видимому просторі), а також властивості та зв'язки, які можна пізнати лише опосередковано, через узагальнення, тобто за допомогою мислення.

Мислення – це вид психічної діяльності, що полягає в опосередкованому й узагальненому відображенні дійсності та пізнанні сутності речей і явищ, закономірних зв'язків і відношень між ними.

У процесі пізнання мислення здійснює перехід від явищ до їх сутності [4, с.121] і, на відміну від процесу чуттєвого відображення (відчуття,сприйняття), відображає дійсність опосередковано. Тому в процесі мислення людина виходить за межі чуттєвого сприйняття і розкриває явища, які не можуть бути безпосередньо сприйняті органами чуття, виявляє взаємозв'язки між предметами, подіями і явищами, з'ясовує причини і наслідки цієї взаємодії.

У процесі мислення суб'єкт оперує знаннями, які він має, відкриває невідоме у відомому і таким чином здобуває нове знання. Об'єкт мислення існує поза людиною і є продуктом її мислення.

Мислення - це психічний процес пошуку і відкриття чогось нового, істинного і глибокого в результаті аналізу і синтезу навколишньої дійсності. У процесі мислення ми пізнаємо світ узагальнено й опосередковано (через мову). При цьому велике значення для нас мають зв'язки між предметами і явищами.

Людське мислення, в якій би формі воно не відбувалося, тісно пов'язане з мовою і мовленням. Вона існує в матеріальній, словесній оболонці, що є однією з фундаментальних відмінностей людської психіки від психіки тварин. Кожна думка народжується і розвивається в мові, а вдало підібрані слова уточнюють і прояснюють думку.

Мовлення - це спосіб, засіб вираження думки, форма її буття. Внутрішнє мовлення відіграє особливу роль у процесі взаємодії думки і мовлення. Воно обслуговує думку, сприяє її виникненню і готує до вираження в зовнішньому мовленні.

Перехід від зовнішньої дії до внутрішньої (від дійсності до мови) є дуже напруженим і вимагає ретельної роботи на кожному етапі. Час затримки на тому чи іншому рівні залежить від складності навчального матеріалу та ступеня його новизни для учня. Якщо недостатньо засвоєна поведінка переноситься у внутрішній план, вона буде виконуватися повільно, нераціонально і зі значною кількістю помилок. Тому в кожному конкретному випадку вчителю необхідно визначити,чи готова дитина перейти на вищий щабель розуміння нового матеріалу [40, с. 124].

Отже, мислення - це соціально обумовлений психічний процес самостійного розглядунового, тобто процес узагальненого опосередкованого відображення дійсності в процесі аналізу та інтеграції дійсності, який виникає на основі практичної діяльності чуттєвого пізнання і може виходити далеко за її межі.

В основі процесу мислення лежить аналітико-синтетична робота всієї кори головного мозку. Сутність людського мислення полягає у розгляді фундаментальної природи предметів і явищ та зв'язків між ними [20, с. 77]; за Павловим І., мислення є не що інше, як асоціація. В основі мислення лежить зв'язок між первинним і вторинним сигналами, причому останній є домінуючим. Саме другий сигнал, "сигнал сигналів", призводить до вищого рівня мислення, властивого людині. З іншого боку, мова, завдяки своїй здатності засвоювати й узагальнювати істотне у властивостях предметів, явищ і подій, може абстрактно відображати те, що є окремим від дійсності і глибинним в об'єктах буття [21, с. 147].

Різноманітність мисленнєвих завдань зумовлює різноманітність механізмів і методів, а також різноманітність видів мислення. У психології прийнято поділяти види мислення за змістом: наочні дії, наочно-образне мислення, абстрактне мислення; за характером завдання: емпіричне і теоретичне мислення; за ступенем новизни та оригінальності: репродуктивне і генеративне мислення.

Одним з найбільш ранніх видів генетично сформованого мислення є наочно-дієве мислення, в якому першочергове значення має дія з предметами. Таким чином, коли діти мають можливість сприймати і маніпулювати об'єктом в даний момент, вони проявляють здатність до аналізу і синтезу в ранньому віці.

За наочно-дієвим мисленням слідує наочно-графічне мислення. Цей тип мислення ґрунтується на уявних образах і перетворює ситуації в образні плани.

Найвищим етапом розвитку мислення є абстрактне мислення. Його характерною особливістю є те, що воно виникає у формі понять, міркувань і суджень без використання емпіричних даних і за допомогою логіки.

Теоретичне мислення – це знання законів і правил. Воно відображає сутність на рівні закономірностей і тенденцій у явищах, предметах і зв'язках між ними. Теоретичне мислення іноді порівнюють з емпіричним мисленням. Вони відрізняються за характером узагальнень. Теоретичне мислення передбачає теоретичні узагальнення, тобто узагальнення абстрактних понять, тоді як емпіричне мислення передбачає узагальнення емпіричних і чуттєвих даних, визначених шляхом порівняння. Основним завданням практичного мислення є фізичне перетворення дійсності. Воно може бути складнішим, ніж теоретичне мислення, оскільки часто здійснюється в екстремальних ситуаціях або в умовах, несприятливих для перевірки гіпотез.

Генеративне і репродуктивне мислення відрізняються за ступенем новизни продукту, отриманого суб'єктом, що сприймає. Мислення як процес узагальнення та опосередкованого відображення дійсності завжди продуктивне. Однак у його діалектичній єдності переплітаються генеративні та репродуктивні елементи. Репродуктивне мислення пропонує вирішення проблем на основі відтворення вже відомих людству способів. Нові проблеми пов'язуються з уже відомими рішеннями. Однак репродуктивне мислення завжди вимагає певного ступеня самостійності. Генеративне мислення максимізує інтелектуальні здібності та творчий потенціал людини. Творчі здібності проявляються у швидкості засвоєння знань, широті переходу до нових умов і самостійного використання.

Рубінштейн С. стверджував, що мислення є об'єктивно системним і багатовимірним явищем. Загалом, у взаємодії суб'єкта з дійсністю мислення виникає і формується як безперервний процес (аналіз, інтеграція, узагальнення, конкретизація), що збагачує свідомість знаннями, досвідом розв'язання проблем і процесами комунікації [20, с. 49-50].

Логічне мислення розуміється як здатність і вміння самостійно виконувати прості логічні операції (аналіз, синтез, порівняння, узагальнення тощо) і складні логічні операції (індуктивна або дедуктивна побудова заперечень, доведень і спростувань як структур міркувань з використанням різних логічних схем).

Логічне мислення – це здатність мислити правильно і послідовно, без суперечностей у міркуваннях та виявляти логічні помилки [20].

Працюючи над розвитком і формуванням логічного мислення, вчителі використовують практичні, наочні, словесні, ігрові, проблемні та дослідницькі методи навчання.

Аналіз досліджуваного матеріалу показує, що при виборі методів навчання також слід враховувати низку чинників:

- Завдання, які необхідно вирішити на даному етапі.
- Вікові та особистісні особливості дітей.
- Підбір необхідного навчального обладнання.

Велику увагу потрібно приділяти вибору методів і прийомів та їх раціональному використанню в усіх ситуаціях [20].

На думку вчених, розвиток навичок логічного мислення учнів відбувається в контексті навчання на задачах. Адже будь-яка задача дає найкращу можливість для розвитку логічного мислення. З нашого досвіду, одним з найефективніших способів розвитку мисленняв старших класах є розв'язування учнями нестандартних задач.

Термін "нестандартні завдання" використовується багатьма методистами. Нестандартні логічні задачі є гарним інструментом для розвитку та формування логічного мислення учнів. Так і завдання вимагають вміння аналізувати, робити логічні висновки та використовувати вже існуючі алгоритми, а також самостійно знаходити нові шляхи вирішення проблем. Нижче наведено приклади нестандартних логічних завдань для старшокласників [21].

1. На поверхні невеликого ставка плаває один листок латаття, він постійно ділиться і займає все більшу площу. Таким чином, кожен день площа, яку займають ці водорості, збільшується в два рази. Через місяць вкритою виявляється вся поверхня ставка. За скільки часу покриється лататтям вся поверхню ставка, якщо спочатку на поверхні плаватимуть два листи латаття?

2. У качки є дві лапки. У качки, яка підігнула одну лапку, видно тільки одну лапку. У сидячої качки не видно жодної лапки. Коли Роман прийшов на берег озера, там було 33 качки. Він порахував усі лапки, які було видно. У нього вийшло 32 лапки. Скільки було качок, з підігнутою однією лапкою, якщо сидячих качок було вдвічі менше кількості «одно» і «двоногих» качок, узятих разом?

3. З 61 монети за 4 зважування відокремити фальшиву (вона важить більше, ніж інші).

4. Плитка шоколаду складається з 35 квадратиків (7×5). Шоколадку ламають по прямих, які ділять квадратики до тих пір, поки не одержать окремі 35 квадратиків. Скільки разів потрібно поділити шоколадку?

5. Серед трьох монет одна фальшива (вона легше, ніж дві інші однакової ваги). За допомогою одного зважування на терезах знайти фальшиву монету.

6. Вчитель перевірив роботи трьох учнів – Олексієва, Василенка і Сергієнка, але не приніс у клас. Учням він сказав: «Один із вас отримав «3», другий – «4», а третій – «5». У Сергієнка не «5», у Василенка не «4», а у Олексієва, здається, «4». Коли принесли зошити, то виявилось, що вчитель тільки одному учневі сказав правильну оцінку, двом іншим – неправильну. Які оцінки отримали учні?

На основі аналізу теорії та практики використання нестандартних задач у навчанні математики визначено загальну та специфічну роль нестандартних задач. Отже, нестандартні задачі:

- вчать учнів самостійно знаходити нові шляхи розв'язування задач, а не просто використовувати готові алгоритми;
- Впливають на розвиток творчих здібностей учнів. Усувають хибні зв'язки між знаннями та вміннями учнів і залучає їх до пошуку нових зв'язків між знаннями, перенесення знань у нові ситуації та оволодіння різними способами розумової діяльності, а не до засвоєння алгоритмічних прийомів;
- підвищує міцність і глибину знань учнів та створює сприятливі умови для свідомого засвоєння математичних понять.

Для того, щоб успішно навчати учнів розв'язувати нестандартні задачі, вчителю необхідно виконати декілька умов:

- систематично розв'язувати комплексні задачі на уроках математики;
- позакласне навчання математики;
- організація всіх етапів математичних та інтуїтивних конкурсів;
- систематична та змістовна підготовча робота перед олімпіадою [2,14].

Неварто забувати, що такі заходи також є ефективним інструментом підвищення рівня професійної компетентності вчителів.

Під час навчального процесу також розвивається вміння учнів генерувати ідеї та робити висновки. Цьому сприяє систематичне розв'язування різних типів письмових задач на уроках математики. У процесі розв'язування задач учні набувають навичок математичного моделювання, розвивають вміння використовувати математику для аналізу та дослідження моделей, вчаться доводити або спростовувати гіпотези та припущення.

Розвиток логічного мислення також готує учнів до майбутньої професійної діяльності. Якою б професією не мріяв оволодіти учень, йому необхідно мислити точно і швидко, бути організованим, враховувати ситуацію і наявні ресурси. Саме вміння мислити самостійно, логічно і творчо робить це можливим.

Таким чином, навчальний процес, орієнтований на формування логічного мислення при розв'язуванні текстових задач, сприяє формуванню та розвитку розумової діяльності учнів.

1.2. Роль та місце текстових задач у процесі розвитку логічного мислення учнів

Процес вивчення математики нерозривно пов'язаний з розв'язуванням задач, а задачі відіграють особливу роль. З одного боку, вони являють собою певну частину навчальної програми, яку повинен засвоїти учень, а з іншого - є дидактичним інструментом для навчання, тренування та розвитку учня. Таким чином, задачі з математики є одночасно і об'єктами вивчення, і засобами навчання.

Задачі відіграють важливу роль у навчанні математики. Історія свідчить, що математика як наука народилася з задач і розвивалася насамперед для їх розв'язування. Найдавніші єгипетські математичні папіруси - це книги задач. Вони не містять загальних правил, а лише розв'язки окремих задач з математики. Задачі не тільки сприяли виникненню математичних наук, але й їх подальшому розвитку. Перш за все, задачі з життя змушували вчених розробляти нові алгоритми, виявляти нові закономірності та створювати нові методи дослідження. Наприклад, проблеми дослідження різних процесів і знаходження площі кривих фігур свого часу породили математику, а проблеми, пов'язані з азартними іграми, привели Паскаля Б. і Ферма П. до теорії ймовірностей. Сьогодні математика продовжує розвиватися через розв'язування задач.

Уміння розв'язувати задачі вимагає знання конкретних життєвих обставин, залежностей (зв'язків) між величинами, розуміння суті арифметичних дій, володіння обчислювальними прийомами, загальними правилами встановлення причинно-наслідкових зв'язків, а також знання суті та структури задач.

Розв'язати математичну задачу означає встановити залежності між величинами, заданими в умові, і шуканими величинами, сформулювати ці залежності для отримання шуканого числового значення, сформулювати і описати ці залежності в математичних термінах за допомогою арифметичних дій, виконати послідовність цих дій. Основне завдання вчителя полягає у виконанні наступних завдань. Основне завдання вчителя - навчити учнів знаходити залежності між величинами та вибирати послідовність дій для визначення невідомого числового значення [3].

У психолого-педагогічній літературі немає єдиного тлумачення поняття "задача". Трактування цього поняття різними авторами визначає їхній підхід до взаємозв'язку суб'єкта і задачі. У кібернетиці, дидактиці та методиці навчання математики задача розглядається як зовнішній стан діяльності, запропонований окремо від суб'єкта діяльності. Таким чином, задача зазвичай представляється як вимога, наприклад, виконання обчислення, перетворення або побудови, доведення або дослідження чогось, пов'язаного з просторовою формою або кількісними відношеннями, або питання, що відповідає такій вимозі. У психології задача розглядається як мета, поставлена за певних умов, особлива характеристика діяльності суб'єкта. Тут завдання трактуються як суб'єктивне психологічне відображення зовнішніх умов, у яких розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта [2]. У шкільній практиці під завданнями прийнято розуміти не лише текстові чи розповідні завдання, а й будь-які вправи чи приклади.

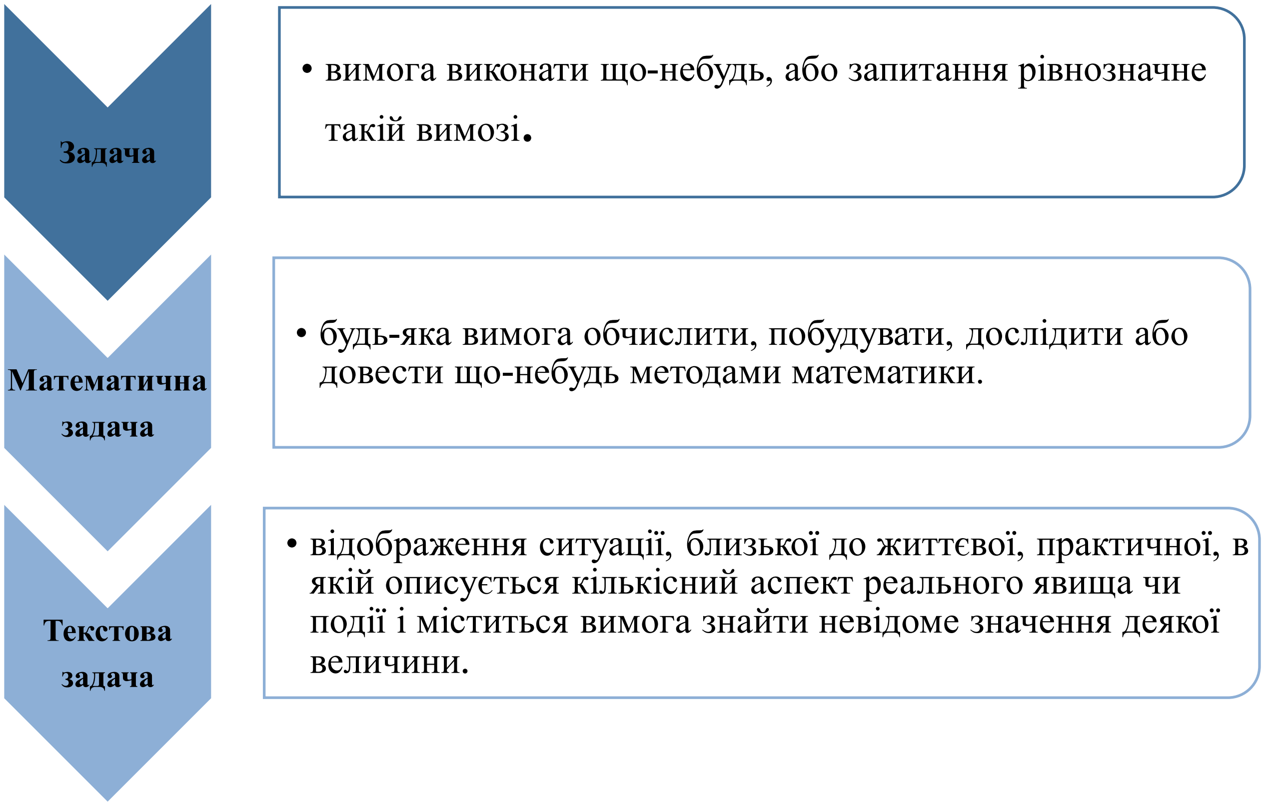
Задача - це проблемна ситуація з чітко визначеними цілями, яких необхідно досягти шляхом параметризації граничних умов або стану. У вужчому розумінні задача - це та сама параметризована мета, задана в граничних умовах проблемної ситуації, тобто те, що потрібно зробити.

Бевз Г. лаконічно визначає зміст поняття "математична задача" наступним чином: "Математична задача - це вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, пов'язане з просторовими формами або кількісними відношеннями, або задача, еквівалентна такій вимозі" [2]; Слєпкань З. [36, с. 123]. Схоже тлумачення терміну "задача" можна знайти тут.

«Текстова задача — відображення ситуації, близької до життєвої, практичної, в якій описується кількісний аспект реального явища чи події і міститься вимога знайти невідоме значення певної величини» [31].

Текстові математичні задачі займають центральне місце в навчальній програмі з математики, що використовується в навчальних закладах. Вони передбачають застосування знань, отриманих на уроках математики, до різноманітних життєвих ситуацій та встановлення міжпредметних зв'язків. Замість терміну "письмові задачі" часто використовують термін "текстові задачі". Це математична задача, яка описує кількісні аспекти певної життєвої історії, тобто реального життєвого процесу, явища чи ситуації, і включає вимогу використовувати величини, подані в задачі, та зв'язки між ними для знаходження шуканих значень. Вони слугують не лише для навчання та розвитку учнів, а й є дидактичним інструментом для викладання. Однією з основних складових дидактичного аспекту навчання є психоосвіта [34].

На основі аналізу математичної та методичної літератури можна зробити узагальнення:



У навчальному процесі текстові задачі виконують різні функції (Таб.1.1.).

Таблиця 1.1.

Основні функції текстових задач

Функція	**Мета**
Навчальна	Формування у школярів системи математичних знань, навичок і умінь на різних етапах навчання.
Контрольна	Встановлення рівня навченості, здатності до самостійного вивчення математики тощо.
Виховна	Формування в учнів наукового світогляду, сприяє економічному, екологічному й естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості, навички самостійної роботи.

Продовження табл.1.1.

Інформативна	Ознайомлення з різноманітними галузями застосування математики, із історією виникнення математичних ідей тощо.
Інтегруюча	Проявляється, наприклад, під час розв’язування текстових задач, які реалізують міжпредметні зв’язки.
Евристична	Використання та засвоєння різного роду евристик, евристичних прийомів, застосування їх у різних конкретних ситуаціях.

Сьогодні існують різні підходи до класифікації текстових завдань. По-перше, шкільні завдання відрізняються за характером своєї тематики:

- практичні (реальні) — хоча б один об’єкт є реальним предметом;
- математичні.

За Слєпкань З., залежно від вимог задачі розрізняють задачі на обчислення, доведення, складання та дослідження [36].

Обчислювальні задачі передбачають знаходження числа (або множини чисел) за заданими даними та умовами і зв'язування його з невідомою величиною. Сюди відносяться різні приклади та задачі на пояснення.

Задачі на доведення - це задачі, в яких за певними умовами потрібно довести ці умови.

Задачі на побудову - це геометричні задачі на побудову фігури, яка задовольняє умову задачі, або на побудову графіка перерізу, фігури чи функції твердого тіла, наприклад, многогранника [36].

Як і в роботі Шаповал І., для кожного типу текстових задач можна сформулювати узагальнений підхід до процесу розв'язування. Зокрема, задачі на планування та задачі на співпрацю є одними з основних типів текстових задач і посідають важливе місце в дослідженнях методистів [42]. Основними компонентами таких текстових задач є:

- робота, що виконується в задачі (A);
- час, який потрібний на виконання зазначеної роботи (t);
- продуктивність праці (S), яка визначає роботу, яку можливо виконувати за одиницю часу.

Між описаними компонентами задачі існує залежність, яка виражається формулою:

$$S = \frac{A}{t}.$$

У роботі Лева А. запропонована така типізація текстових задач (проілюструємо кожний тип відповідним прикладом задачі) [17]:

– задачі на спільну роботу

Приклад. Двоє робітників за зміну виготовляють 68 деталей. Після підвищення продуктивності праці першого робітника на 20%, а другого — на 15 %, за зміну разом вони стали виготовляти 92 деталі. Яку кількість деталей виготовлятиме за зміну кожен робітник після підвищення продуктивності праці?

– задачі алгебраїчного змісту;

Приклад. Деяке двоцифрове число помножили на суму його цифр. В результаті отримали число 405. Потім число, яке записали тими ж цифрами у зворотному порядку, помножили на суму його цифр і отримали 486. Знайти дане двоцифрове число.

– задачі фізичного змісту;

Приклад. Пасажирський поїзд за годину проїжджає 60 км, а товарний — 40 км. Якою є відстань між двома містами, якщо пасажирський долає її на 2 год 15 хв швидше, ніж товарний.

– задачі геометричного змісту;

Приклад. Периметр прямокутника дорівнює 38 см. На суміжних сторонах прямокутника побудовано квадрати. Сума площ цих квадратів становить 128 см2 . Обчислити сторони прямокутника.

– задачі з параметрами.

Приклад. По колу заданого радіуса R рівномірно і в одному напрямі рухаються дві точки. Перша точка проходить повний оберт на t с швидше, ніж друга. Між двома послідовними зустрічами точок проходить T с. Обчислити швидкість руку кожної точки [41].

Навчальною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5—9 класи (затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804) регламентоване застосування текстових задач у процесі вивчення дисципліни. Їх розв’язування супроводжує вивчення всіх тем, які передбачені чинною програмою [25].

Слід зазначити, що в сучасній шкільній математичній освіті використання алгебраїчного інструментарію для розв'язування письмових задач активно застосовується в навчанні математики з такими цілями

1) сформувати в учнів загальний підхід, навички та вміння розв'язувати будь-які задачі;

2) уможливити глибше усвідомлення та засвоєння понять, що вивчаються в математиці, та загальнонаукових понять;

3) розвивати здатність студентів до математичного моделювання реальних процесів;

4) розвивати мислення, майстерність і творчі здібності учнів. Метою розв'язування задач є не лише отримання відповідей, а й набуття навичок пошуку відповідей.

Методисти наголошують, що особливу увагу слід приділяти завершальному етапу розв'язування задач: аналізу, дослідженню та розумінню розв'язку. Задачі широко використовуються для створення проблемних ситуацій на уроках під час вивчення нових математичних понять і методів.

Для розвитку навичок розв'язування задач важливо актуалізувати набуті знання під час розв'язування нових задач. Це передбачає вибір необхідних знань і методів з минулого досвіду та використання їх у нових ситуаціях. Однак цей процес не є автоматичним і учнів потрібно навчати прийомам математичної діяльності при розв'язуванні задач. Підручники є допоміжним інструментом, який допомагає учням реалізувати цю діяльність. Підручники містять детальні пояснення та приклади розв'язування задач.

Математичні задачі на основі підручника є важливою частиною шкільної програми з математики. Такі задачі спрямовані на застосування набутих математичних знань на практиці, особливо в різних життєвих ситуаціях. Програма з математики підкреслює, що розв'язування письмових задач відіграє допоміжну роль у вивченні всіх тем курсу.

1.3. Види текстових задач у шкільному курсі математики та методи їх розв'язування.

Загалом, система запитань у шкільній математиці, особливо письмових, дуже різноманітна. Існують різні типи завдань, залежно від того, на що вони в основному поділяються. Використовуючи ту чи іншу задачу в навчальному процесі, вчителю необхідно враховувати низку аспектів ступінь складності, методичні цілі, характер вимог, кількість вхідних даних, характер зв'язків між ними і т.д. Викладачі повинні добре знати всі ці характеристики завдання як мети і як засобу навчання. Тільки тоді вони зможуть правильно оцінити кожну задачу, визначити її місце в навчальному процесі та максимально ефективно її використати.

Іншими словами, вміння розв'язувати письмові завдання залежить від низки факторів. Перш за все, необхідно вміти розрізняти основні типи завдань і вміти вирішувати найпростіші з них. Ми поділяємо думку тих методистів, які виділяють такі основні типи текстових математичних задач (рис. 1.1.):

Рис. 1.1. Основні типи текстових задач

Розглянемо методичні особливості текстових задач та методів їх розв'язування, проілюструвавши відповідними прикладами задач [30,42].

І. Задачі на рух

Задача на рух-це задача, пов'язана з рухом об'єкта. Основними компонентами такої задачі є шлях, яким рухається об'єкт (S), швидкість руху об'єкта (V) і час руху (t).

Основною формулою, що лежить в основі розв'язання всіх задач руху, є наступне рівняння: S= Vt .

Розрізняють такі види задач на рух (рис. 1.2.):

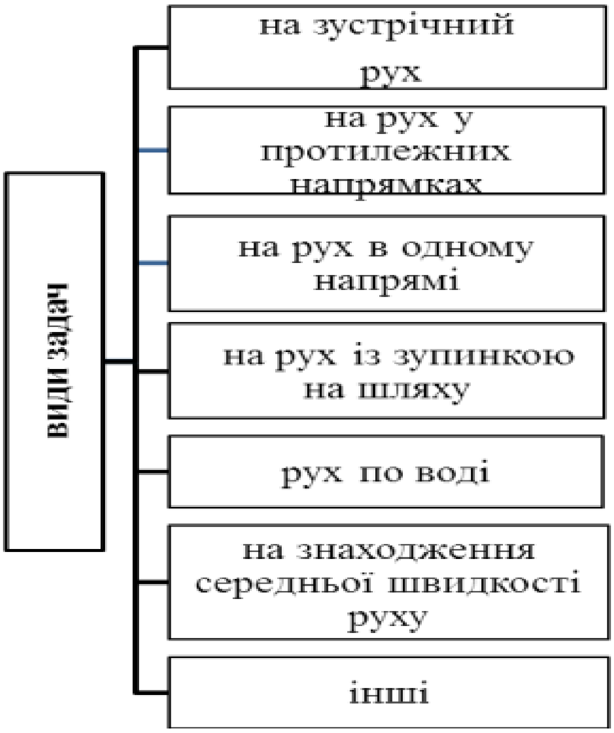


Рис.1.2. Види задач на рух

Зустрічний рух (рух назустріч)

1. Два тіла, рухаючись з двох пунктів А і В назустріч одне одному, до момента зустрічі разом долають усю відстань між цими пунктами.

2. Швидкість, з якою відбувається зближення цих тіл (швидкість зближення) дорівнює сумі їх швидкостей.

3. Якщо тіла, розпочали рухатися одночасно, то час їх руху до моменту зустрічі буде однаковим, він визначається формулою: $t = S/(V_1+V_2)$.

4. Якщо тіла розпочинають рухатися в різний час, то до моменту зустрічі більшим буде час руху того тіла, яке стартувало раніше.

Рух у протилежних напрямках.

Якщо два тіла рухаються з одного пункту у протилежних напрямках, то за одиницю часу вони віддалятимуться одне від одного на відстань, що дорівнює сумі їх швидкостей (швидкість віддалення).

Рух в одному напрямі

1. Тіло, що рухається, може наздогнати інше лише в тому випадку, коли швидкість його первищує швидкість того тіла, що рухається попереду.

2. Якщо два тіла, які знаходяться на певній відстані, рухаються в одному напрямку, то ця відстань із кожною миттю зменшується і перетворюється на нуль, коли тіло з більшою швидкістю наздоганяє тіло, швидкість якого менша. Зменшення відстані між тілами за одиницю часу визначається різницею швидкостей цих тіл.

3. При одночасному старті тіл з неоднаковою швидкістю із одного і того самого відправного пункту й русі їх в одному напрямку, відстань між тілами з кожною годиною (хвилиною, секундою) збільшується. Збільшення відстані між такими тілами за одиницю часу досягається за рахунок різниці їх швидкостей (швидкість віддалення дорівнює різниці швидкості тіл, які рухаються).

4. У випадку, коли швидкість першого тіла більша, то воно наздожене інше за час $t = S/(V_1 – V_2)$ [42].

Рух по воді.

Тут розрізняють рух за течією *(Vза т)* та рух проти течії *(V пр т);* виділяють власну швидкість *(Vвл)* катера (човна тощо), її ще називають швидкістю у стоячій воді (озері), та швидкість течії річки *(Vт).*

Швидкість течії річки вважається постійною. Швидкість плота вважається такою, що дорівнює швидкості течіі річки.

Швидкість переміщення тіла V по воді виражається:

1. *Vза т = Vвл + Vт* при русі тіла за течією річки;

2. *V пр т= Vвл – Vт* при русі тіла проти течії річки.

Звідки *Vза т – V пр т = 2т* – різниця швидкостей за течією і проти течії річки дорівнює подвоєній швидкості течії.

ІІ. Задачі на спільну роботу і планування.

Кооперативна робота характеризується наступним формулюванням: завдання (наприклад, написання рукопису, заповнення складу, збирання врожаю на полі) виконується кількома людьми або механізмами, які працюють однаково (тобто таким чином, що їхня власна ефективність є постійною), хоча кількість не може бути вказана або визначена.

Виділяють такі основні види задач на спільну роботу:

- на обчислення невідомого часу роботи;
- на знаходження продуктивності праці;
- задачі на «басейн».

У задачах на спільну роботу часто обсяг усієї роботи, яку потрібно виконати, умовно приймається за одиницю.

Час t, який необхідний для виконання всієї роботи та v – продуктивність праці (швидкість виконання роботи), тобто кількість роботи, виконаної за одиницю часу, пов’язані співвідношенням $v = 1/t$.

ІІІ. Задачі на відсотки.

Вміння розв'язувати задачі на відсотки має велике практичне значення. Це пов'язано з тим, що відсотки зараз широко використовуються в різних галузях науки та в повсякденному житті.

Сьогодні відсотки широко використовуються в статистиці, інженерії, соціології, економіці, хімії та фізиці, а також у метеорології, сільському господарстві, медицині та виробництві. Наприклад, для позначення різних допусків при виготовленні виробів, ККД механізмів, втрат енергії, експлуатаційних витрат, витрат на утримання, амортизацію, темпів виконання робіт і т.д., для позначення частки різних верств населення в суспільстві, вологості вітру, схожості насіння, вмісту металів в рудах, вмісту жиру в продуктах харчування, вмісту цукру, вмісту вітамінів у фруктах і овочах і т.д. Відсоткові задачі можна класифікувати (рис. 1.3).

Рис.1.3. Класифікація задач на відсотки

Знаходження відсотків від даного числа.

Для того, щоб знайти $p\%$ від числа а, потрібно:

1) записати відсоток у вигляді звичайного чи десяткового дробу;

2) домножити число на цей дріб, тобто $P/100\ a$.

Знаходження числа за його відсотками.

Знайдіть невідоме число а, і якщо р% дорівнює b, виразіть відсотки в десятковому вигляді та поділіть на десятковий дріб, тобто $a = b \cdot 100/p$.

Знаходження відсоткового відношеннях двох чисел.

Для того, щоб знайти який відсоток число a становить від числа b, потрібно a поділити на b, одержаний результат помножити на 100, тобто $p\% = a/b \cdot 100\%$.

IV. Задачі на залежність між компонентами арифметичних операцій.

Вивчення та засвоєння арифметичних дій є невід'ємною частиною математичної освіти. Знання арифметичних дій, їх властивостей та компонентів складають основу всієї шкільної програми.

Методи розв'язування таких задач випливають безпосередньо з умов задачі. Серед таких задач виділяють:

- задачі, в яких потрібно знайти суму доданків, кожне з яких складає певну частину шуканої суми;
- задачі, в яких використовується формула двозначного числа;
- задачі, де використовується пропорційне ділення;
- задачі, де вказується співвідношення між чисельником, знаменником дробу;
- задачі, де невідомі є членами прогресії.

V. Задачі на використання геометричних співвідношень.

Багато задач з геометрії пов'язані з обчисленнями, а їх розв'язування вимагає знання геометричних співвідношень, використання властивостей і характеристик фігур та вміння виконувати алгебраїчні перетворення.

На відміну від інших геометричних задач, під час розв'язування цих задач зазвичай не потрібно малювати фігури. Однак схеми аж ніяк не є зайвими. Вони корисні, наприклад, для того, щоб коротко записати умову.

Алгебраїчні задачі на письмо з використанням геометричних співвідношень переважно ілюструють зв'язок між алгеброю та геометрією у шкільній програмі. Використання таких завдань у процесі викладання математики надає практичної спрямованості шкільним урокам.

Задачі на речення відіграють дуже важливу роль на шкільних уроках математики і є ефективним інструментом для розвитку навичок логічного мислення учнів. Крім того, задачний підхід визнаний одним з найефективніших методичних засобів для розвитку загальних навичок розв'язування будь-яких задач, засвоєння і поглиблення вивчених математичних понять, а також формування загальнонаукових понять і загального світогляду на життя. Розв'язування задач допомагає учням розвивати навички мислення та практичного застосування математики. Розв'язування задач сприяє розвитку наполегливості, відповідальності, уважності, систематичності та послідовності у подоланні труднощів. Аналіз наукових джерел надав можливість виокремити наступні методи розв’язання логічних задач [31]:

- дискурсивно-логічний або спосіб прямих, безпосередніх міркувань;
- табличний або матричний;
- метод блок-схем;
- метод графів;
- графічний (зокрема, «дерево логічних умов», метод кіл Ейлера)

Розглянемо кожен з цих методів більш детально, разом з прикладами вирішення конкретних завдань.

Метод міркувань.

Основна ідея цього методу полягає в тому,щоб,використовуючи всі умови задачі,зробити послідовні умовиводиі зробитивисновки,якідаютьвідповідьна поставлену задачу. Цей метод часто використовується для вирішення простих логічних задач.

Табличний метод розв'язування

Основним методом розв'язання текстових логічних задач є складання таблиць. Таблиці не тільки візуалізують стан задачі та її відповідь, але й допомагають зробити правильний логічний висновок у процесі розв'язання задачі. Метод передбачає оформлення результатів логічних міркувань у вигляді таблиці. Переваги методу:

- наочність;
- можливість контролювати процес міркувань;
- можливість формалізувати деякі логічні міркування.

У такий спосіб можна розв’язати, відому багатьом загадку Ейнштейна.

Метод блок-схем

Цей метод в основному використовується в задачах, де потрібно виміряти певну кількість рідини за допомогою ємності відомого об'єму або в задачах, що включають операції зважування на вагах. Найпростіший спосіб розв'язання таких задач - перебір можливих розв'язків. Зрозуміло, що цей метод не зовсім вдалий і важко визначити загальний підхід до розв'язання інших подібних задач.

Більш системним підходом до вирішення проблеми карстових воронок є використання блок-схеми. Суть цього підходу полягає в наступному. Спочатку визначаються операції для точного вимірювання флюїду. Ці операції називаються командами. Потім визначається порядок виконання вибраних команд. Це називається блок-схемою і широко використовується в програмуванні. Блок-схема - це програма, виконання якої призводить до вирішення проблеми. Для цього достатньо показати, скільки рідин утворюється під час роботи зібраної програми. При цьому зазвичай заповнюється окрема таблиця, куди вноситься кількість рідини в кожній ємності.

Ідея цього методу полягає в тому, щоб описати серію операцій, визначити порядок їх виконання і зафіксувати їх стан.

Метод графів

Граф - це множина точок, намальованих на площині (папері або дошці), деякі пари яких з'єднані відрізками прямих. Точки називаються вершинами графа, а відрізки - ребрами. Графи, на відміну від словесних міркувань, дають наочне уявлення про досліджувані факти, підкреслюючи суттєве, тобто об'єкти та зв'язки між ними. Приклади використання графів для вирішення логічних задач вражають своєю наочністю і простотою, виключаючи непотрібні умовиводи і, в багатьох випадках, зменшуючи тягар умовиводів. Використання графів дозволяє, з одного боку, простежити всі логічні можливості, пов'язані з досліджуваною ситуацією, а з іншого боку, їх наочність допомагає класифікувати логічні можливості в процесі вирішення проблеми і виключити непотрібні випадки без необхідності розглядати всі випадки.

Основна ідея цього методу полягає у виявленні логічних можливостей, що надаються умовами задачі, та їх почерговому виключенні.

Метод кіл Ейлера

Кола Ейлера можна використовувати для представлення множини елементів з певними властивостями, які допомагають спростити розв'язання багатьох логічних задач. Ейлерове коло - це геометрична діаграма, яку можна використовувати для візуального представлення відношень між підмножинами.

Типи задач Метод кола Ейлера можна використовувати для графічного розв'язування математичних задач, що базуються на застосуванні теорії множин.

Формальний спосіб вирішення подібних завдань:

1. Виділити у тексті завдання аналізовані властивості об'єктів.

2. Заповнити кола Ейлера-Венна, проаналізувавши відповідність об'єктів та властивих їм властивостей.

3. Вибрати розв’язання – набір значень простих висловлювань, у якому відповідність об'єктів і властивостей є істинним.

4. Перевірити, чи задовольняє отриманий розв’язок умові завдання. Переваги та недоліки даного способу:

Таблиця 1.2.

Переваги	Недоліки
Необов'язково знати формули та закони алгебри логіки	Не підходить для вирішення складних задач
Простота міркувань	Не має універсальності, тобто. призначений для певного класу задач
Наочність способу	

У процесі розв’язання логічних задач, ми користувались наступним алгоритмом розв’язання логічних задач:

1) зрозуміти умови завдання;

2) запровадити систему позначень для логічних висловлювань;

3) сконструювати логічну формулу, що опише логічні зв’язки між усіма висловлюваннями умови задачі;

4) визначити значення істинності цієї логічної формули;

5) з отриманих значень істинності формули визначити значення істинності введених логічних висловлювань, на підставі яких робиться висновок про розв’язання.

Висновки до розділу І

Використання текстових задач у навчанні математики формує в учнів усвідомлення необхідності набуття математичних знань та сприяє свідомому й активному засвоєнню матеріалу. У результаті математичної освіти в учнів формуються вміння аналізувати умову письмової задачі, визначати основні типи письмових задач, розуміти залежності між величинами, зображати невідомі величини за допомогою відомих величин, розуміти, що дві однакові величини можна зобразити по-різному, логічно обґрунтовувати математичні твердження, застосовувати математичні методи в процесі розв'язування математичних письмових задач; вміння використовувати математичні знання та вміння під час розв'язування письмових задач міжпредметного змісту; вміння працювати з підручниками; вміння критично оцінювати.

Формування математичних компетентностей учнів старшої школи у процесі навчання розв'язування текстових задач має враховувати такі аспекти: розв'язування текстових задач викликає певні труднощі в учнів і не всі учні можуть швидко знаходити способи і методи розв'язування цих задач; для учнів старшої школи певним чином змінюється її функція: окрім традиційних педагогічної, розвивальної та виховної, на перший план виходить функція узагальнення і систематизації матеріалу та розвитку дослідницьких навичок учнів. Необхідно розробити форми, методи та засоби навчання письмового розв'язування задач у старшій школі.

Провідне місце повинні зайняти проблемні та дослідницькі методи, які стимулюють пізнавальну активність учнів. Необхідно значно збільшити частку самостійної роботи студентів з використанням різних освітніх ресурсів. Змінюються прийоми і методи розв'язання письмових завдань. Якщо в початковій школі основна частина письмових робіт зводиться до складання і розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, то в процесі навчання старшокласників пріоритет має надаватися узагальненим прийомам і способам розв'язування. Однак кількість письмових завдань у підручниках для старшої школи зменшується, а навчальна програма майже не передбачає вивчення письмових завдань у старших класах.

Процес навчання математики, спрямований на формування в учнів навичок розв'язування текстових задач, повинен враховувати їх життєвий досвід у таких напрямах: своєчасне виявлення помилок у міркуваннях; навчання учнів виявляти помилки, самостійно їх виправляти та запобігати їх повторенню; врахування специфіки задачі та рівня попередньої підготовки учнів; а також важливо вносити корективи.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА РОЗВИТКУ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

2.1. Методичні особливості навчання учнів гімназій та ліцеїв розв'язування текстових задач на рух та спільну роботу

Задачі на спільну роботу є унікальними з точки зору їх розв'язування і зустрічаються на уроках математики з 6 по 9 клас. Найпростіші задачі такого типу починають з'являтися після маніпуляцій зі звичайними дробами на уроці математики в 6 класі; у 7 класі подібні задачі можна знайти в повторювальних завданнях; у 8 класі простежується динаміка ускладнення задач на сумісну роботу, пов'язаних з квадратними рівняннями; на уроці алгебри в 9 класі розв'язуються подібні задачі.

У таких задачах прийнято вважати, що кількість роботи, яку потрібно виконати, дорівнює одиниці. Час t, необхідний для виконання всієї роботи, і v - продуктивність (швидкість) праці, тобто кількість роботи, виконаної за одиницю часу, виражається наступним співвідношенням $v = \frac{1}{t}$.

При розв'язуванні таких задач іноді бажано записувати умови в наступному вигляді таблиці 2.1.:

Таблиця 2.1.

	$t_{окремий}$	$v_{окрема}$	$v_{сумісна}$	$t_{сумісний}$
I	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x} \pm \frac{1}{y} = \frac{x \pm y}{xy}$	$\frac{xy}{x \pm y}$
II	y	$\frac{1}{y}$		

У виконанні певної роботи беруть участь два об'єкти: І-й та ІІ-й. Якщо І-й об'єкт виконує всю роботу за x годин (хвилин, секунд тощо) то за 1 годину він виконає $\frac{1}{x}$ роботи – це є швидкість роботи (продуктивність) І-го об'єкта.

Аналогічно, якщо II-й виконує всю роботу за y годин, то його швидкість - $\frac{1}{y}$ роб/год. Для знаходження сумісної швидкості роботи двох об'єктів слід:

-додати їхні окремі швидкості, якщо об'єкти допомагають один одному виконувати роботу;

-відняти, якщо заважають.

Для знаходження часу, за який два об'єкти впораються з роботою разом ($t_{сумісний}$) необхідно об'єм виконаної роботи V поділити на їхню сумісну швидкість $v_{сумісна}$. Якщо $V = 1$, то $1:\frac{x \pm y}{xy} = \frac{xy}{x \pm y}$.

Наведемо систему задач, яку доцільно пропонувати учням для формування умінь розв'язувати задачі на спільну роботу [42].

Задача 1. Перший оператор може набрати весь текст за 6 днів, а другий – за 12 днів. За який час оператори наберуть увесь текст, працюючи разом?

Таблиця 2.2.

	$t_{окремий}$	$v_{окрема}$	$v_{сумісна}$	$t_{сумісний}$
I	6 днів	$1)*\frac{1}{6}$ т/день	$3)\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2+1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ (т/день)	$4)1:\frac{1}{4}=4$ (дні)
II	12днів	$2)\frac{1}{12}$ т/день		

Задача 2. Два трактори зорали поле за 6 годин спільної роботи. Перший з них міг би, працюючи окремо, виконати цю роботу за 10 годин. За скільки годин другий тракторист може зорати все поле, працюючи окремо?

Таблиця 2.3.

	$t_{окремий}$	$v_{окрема}$	$v_{сумісна}$	$t_{сумісний}$
I	10 год	$2)\frac{1}{10}$ п/год	1) $1:6=\frac{1}{6}$	6 год
II	$4)1:\frac{1}{15}=15$ год	$3)\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$		

Задача 3. Через I трубу порожній басейн заповнюється за 10 годин, через II трубу повний басейн спустошується за 15 годин. Чи буде заповнений порожній басейн, якщо відкрити разом обидва отвори? За скільки годин?

Басейн дійсно повільно заповнюватиметься водою при одночасній роботі обох труб, оскільки продуктивність роботи першої труби, що працює на наповнення, більша за продуктивність роботи другої, яка працює на виливання. В цьому випадку друга труба «заважатиме» першій наповнювати басейн. Тому їх сумісна продуктивність роботи $v_{сум} = v_1 - v_2$.

$v_{сум} = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$, тоді час, за який заповниться басейн $t_{сум} = 30$ годин.

Відповідь: 30 годин [42].

Задача 4. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле кожна бригада, працюючи самостійно, якщо другій бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж першій? [42]

Таблиця 2.4.

	$t_{окремий}$	$v_{окрема}$	$v_{сумісна}$	$t_{сумісний}$
I	*x год*	$\frac{1}{x}$ п/год	$\frac{1}{x+12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$ п/год	8 год
II	*x+12 год*	$\frac{1}{x+12}$ п/год		

$\frac{1}{x+12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$; $\frac{2x+12}{x^2+12x} = \frac{1}{8}$; $x^2 - 4x - 96 = 0$;

$x_1 = -8 < 0$ - не задовольняє умову задачі; $x_2 = 12$.

Отже, $t_1 = 12$ годин, $t_2 = 24$ години.

Відповідь: 12 год; 24 год.

Задача 5. Через одну трубу можна наповнити басейн на 9 годин швидше, ніж через другу опорожнити цей басейн. Якщо одночасно відкрити обидві труби, то басейн наповниться за 40 год. За скільки годин перша труба може наповнити, а друга – опорожнити басейн? [42]

Таблиця 2.5.

	$t_{окремий}$	$v_{окрема}$	$v_{сумісна}$	$t_{сумісний}$
I	*x год*	$\frac{1}{x}$ бас/год	$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{40}$ бас/год	40 год
II	*x+9год*	$\frac{1}{x+9}$ бас/год		

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{40}$;

$x^2+9x-360=0$;

$x_1=15$, $x_2=-24<0$ -не задовольняє умову задачі;

$t_1=15$ годин, $t_2=24$ години.

Відповідь: 15 год, 24 год.

Наведемо приклади задач на спільну роботу, які пропонувалися на ЗНО 2017 року [30].

Задача 6. Басейн наповнюється через першу трубу за 4 години, а через другу – за 6 годин. Яку частину басейну залишиться наповнити після спільної роботи обох труб протягом 2 годин?

Таблиця 2.6.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{10}$

Розв'язання

1/4 - частина басейну, яку заповнить I труба за 1год;

1/6 - частина басейну, яку заповнить II труба за 1год;

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$ - частина басейну, яку наповнять обидві труби за 1 год, працюючи разом.

$\frac{5}{12}\cdot 2=\frac{5}{2\cdot 6}\cdot\frac{2}{1}=\frac{5}{6}$ - частина басейну, яку наповнять обидві труби за 2 год, працюючи разом.

$1-\frac{5}{6}=\frac{6-5}{6}=\frac{1}{6}$ - частину басейну залишиться заповнити.

Відповідь: $\frac{1}{6}$

Задача 7. Басейн заповнюють водою через першу трубу за a годин, а через другу – за b годин. Через скільки годин можна заповнити басейн при використанні обох труб разом.

Таблиця 2.7.

А	Б	В	Г	Д
$a+b$	$a-b$	ab	$\frac{ab}{a+b}$	$\frac{a+b}{ab}$

Розв'язання

Нехай *1/a* - частина басейну, яку заповнить I труба за 1год; *1/b* - частина басейну, яку заповнить II труба за 1год; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ - частина басейну, яку наповнять обидві труби за 1 год, працюючи разом.

$1:\frac{a+b}{ab}=1\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$ год – це час, за який можна заповнити басейн при використанні обох труб разом.

Відповідь: $\frac{ab}{a+b}$

Задача 8. Майстер виготовляє одну деталь за 5 хв, а його учень таку ж деталь – за 9 хв. Працюючи разом вони виготовили 42 деталі. Скільки деталей виготовив майстер?

Таблиця 2.8.

А	Б	В	Г	Д
28	32	30	27	25

Розв'язання

Визначимо, швидкість майстрів за хвилину.

За умовою *1/5* - частина деталі, що виготовляє майстер за 1 хв;

1/9 - частина деталі виготовляє учень за 1хв;

$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{9+5}{45}=\frac{14}{45}$ - частина деталей, яку виготовлять майстер та учень за 1 хв, працюючи разом.

$42:\frac{14}{45}=\frac{42}{1}\cdot\frac{45}{14}=\frac{3\cdot2\cdot7}{1}\cdot\frac{45}{2\cdot7}=135$ хв – час роботи майстра та учня.

135:5=27 дет. – виготовив майстер

Відповідь: 27 деталей.

Приклад конспекту уроку з теми: «Розв’язування задач на спільну роботу» з деталізацією навчальної діяльності учителя та учнів наведено у додатках (Додаток А).

Задачі на рух

У 5 класі учні розв'язують два типи задач на рух: про зустрічний та односторонній рух. Вчитель організовує навчальну діяльність, щоб учні зрозуміли, що при розв'язуванні задачі на зустрічний рух, якщо потрібно визначити час, коли об'єкти, що рухаються, зустрінуться, потрібно скласти їх швидкості і розділити відстань між точками початку руху на сумарну швидкість.

У задачах на рух, де об'єкти рухаються з однієї точки в іншу в одному напрямку, а відстань між об'єктами потрібно визначити через певний час, більш розумним рішенням буде знайти різницю між швидкостями об'єктів і помножити її на заданий час.

Увагу учнів звертають на те, що під час розв'язування задач на рух можна робити такі припущення.

1. Швидкість вважається величиною додатною.

2. Всі переходи на новий режим руху, на новий напрям руху вважаються такими, що здійснюється миттєво (тобто, якщо сказано, що автомобіль доїхав до пункту В, а потім поїхав назад у пункт А, то час розвороту не враховується).

3. Якщо тіло має власну швидкість Х і рухається по річці, швидкість течії якої дорівнює У, то швидкість тіла за течією вважається рівною Х+У, а швидкість тіла проти течії - Х-У.

4. За невідоме слід приймати швидкість, а рівняння складати по рівності шляхів або рівності часу.

У будь яких задачах на рух фігурують 3 величини:

- S - пройдений тілом шлях;
- V- швидкість руху тіла;
- t - час руху тіла.

Усі три величини пов'язані між собою формулою

$$S = v \times t$$

Звідси $t = \frac{S}{v}$

Розв'язуючи задачі на рух, запропонуйте учням записати прості умови і знайти рівняння в таблиці зв'язків між величинами (відстань, швидкість, час), що характеризують рівномірний рух. Ця таблиця допомагає учням візуально зрозуміти умову задачі, взаємозв'язок між основними величинами в задачі та ефективно знаходити рівняння. Приклади наведені нижче [41].

Задача 9. З пунктів А і С до пункту В виїхали одночасно два вершники і, незважаючи на те, що пункт С був на 20 км далі від пункту В ніж пункт А, вершники прибули в пункт В одночасно. Знайти відстань від пункту С до В, якщо вершник, який виїхав з С, проїжджав кожний кілометр на 1 хв 15 с швидше, ніж вершник, який виїжав з пункту А. Вершник з пункту А прибув у пункт В через 5год.

Таблиця 2.9.

	S, км	V, км /год	t, год
Рух вершника з А в В	X	$\frac{x}{5}$	5
	1	$\frac{x}{5}$	$\frac{x}{5}$
Рух вершника з С в В	x + 20	$\frac{x+20}{5}$	5
	1	$\frac{x+20}{5}$	$\frac{x+20}{5}$

Якщо задачу розв'язують колективно в класі, то заповнення таблиці може відбуватися в процесі такого діалогу вчителя з учнями:

- ✓ Про що йдеться в умові задачі?- Про рух вершників.

- ✓ Про які величини йдеться?- Шлях, швидкість, час.
- ✓ На скільки шлях з С до В довший ніж з *А* до *В ?*- На 20 км.
- ✓ Скільки часу кожен з вершників був у дорозі?- 5 годин.
- ✓ Що позначимо за х ?- Відстань між пунктами *А і В.*
- ✓ Тоді яка відстань між С і В?- Відстань між С і *В* (х + 20) км.
- ✓ Як знайти швидкість вершника, що рухався з А до В ? - Щоб знайти швидкість вершника, що рухався з *А* до *В,* треба х км поділити на час руху, тоото 5 годин, отримаємо: $\frac{x}{5}$ км/год.
- ✓ Яка швидкість вершника, що рухався з С до В?- Швидкість вершника, що рухався з С до В $\frac{x+20}{5}$ км/год.
- ✓ За який час вершник, що рухався *з А до В,* проїжджав 1 км?- Вершник, що рухався з А до В, проїжджав 1 км за: $1 \div \frac{x}{5} = \frac{5}{x}$ год.
- ✓ За який час вершник, що рухався з С до В, проїжджав 1 км? – Вершник, що рухався з С до В, проїжджав 1 км за: $1 \div \frac{x+20}{5} = \frac{5}{x+20}$ год.
- ✓ Запишіть за допомогою рівності співвідношення між величинами $\frac{5}{x}$ і $\frac{5}{x+20}$, виходячи з умови задачі.
- ✓ Оскільки, за умовою задачі, час, записаний виразом $\frac{5}{x}$, на 1 хв 15 с, що дорівнює $\frac{1}{48}$ години, більший, ніж час, записаний виразом $\frac{5}{x+20}$, то це можна записати у вигляді рівняння $\frac{5}{x} - \frac{5}{x+20} = \frac{1}{48}$.

Таблицю варто застосовувати не тільки розв'язуючи задачі на рух. Взагалі таблиця у багатьох випадках систематизує та візуалізує умову задачі, пошук її рівняння і цим оптимізує розв'язування задачі.

Приклад конспекту уроку з теми «Розв'язування задач на рух» наведений в Додатку Б.

Вивчення задач на спільну роботу та на рух доцільно організувати за загальною програмою:

1. Задачі на спільну роботу, в яких дано продуктивність кожного виконавця.

2. Задачі на спільну роботу (не дано продуктивність кожного виконавця), в яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця.
3. Задачі на спільну роботу (не дано продуктивність кожного виконавця), в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців.
4. Задачі на одночасний рух в різних напрямках.
5. Співставлення задач на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця, та задач на одночасний рух в різних напрямках. Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв’язання.
6. Задачі на рух в одному напрямку.
7. Співставлення задач на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців, та задач на одночасний рух в одному напрямку. Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв’язання.
8. Задачі на одночасний рух в протилежних напрямках з двох різних пунктів. Задачі на одночасний рух назустріч, в яких зустріч не відбувається, тому що тіла припинять власний рух до моменту зустрічі.
9. Задачі на неодночасний рух.

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв’язування цих типів задач є всебічний аналіз і дослідження задачі за наступними рівнями:

- ✓ за зміною ситуації задачі
- ✓ за зміною числових даних;
- ✓ за зміною шуканої величини.

2.2. Методика вивчення текстових задач на відсотки у 5-6 класах як засіб формування логічного мислення учнів

Знання математики загалом і вивчення відсотків зокрема важливе в усіх сферах людської діяльності. Фахівці повинні вміти обчислювати відсоток виконаної роботи, якість продукту чи процесу, а також будувати графіки, порівнюючи певні компоненти, виражені у відсотках. Це стосується не лише відсотків, а й усіх важливих понять і тем математики.

Згідно з навчальною програмою [25], відсотки вивчаються у 5 класі, і першою темою, яку вивчають у 5 класі, є "Натуральні числа та операції з ними". За нею слідує тема "Дроби та операції з ними", яка також включає тему відсотків. Після вивчення цієї теми учні зможуть розуміти поняття відношення, формулювати його означення та знаходити відношення числа і числа за даним відношенням. Також важливо, щоб учні вміли використовувати реальні дані для розв'язування наративних задач, таких як обчислення бюджету домогосподарства та ймовірності здійснення великих покупок. Тому вивчення відсотків є частиною змісту розділу "Числа і дії". На всю тему "Дроби і дії з ними" відведено 60 годин, і вчитель ділить цей час на підтеми. Темі відношень у підручнику присвячено три параграфи.

У 6 класі в розділі "Відношення і пропорції" (24 години) розглядаються теми "Пропорція як відношення двох чисел" і "Обчислення відношень". Результати навчання полягають у розумінні пропорційних зв'язків, мір та відношень двох чисел. Очікується, що учні розв'язуватимуть вправи на знаходження відношень чисел і величин, записуватимуть відсотки у вигляді звичайних дробів і десяткових знаків, аналізуватимуть стовпчасті та кругові діаграми. Також демонструється вміння розв'язувати базові задачі на відношення.

Циклічність навчання, характерна для всіх предметів, простежується і при вивченні математики. Вивчення дробових співвідношень є прелюдією до вивчення відсотків. Вивчення відсотків є прелюдією до вивчення послідовностей, ймовірності та статистики. Вивчення цієї теми продовжується в курсі алгебри 9 класу. Формула складних відсотків розглядається в розділі "Послідовності чисел" і вивчається протягом 10 годин. Темі відношень тут приділяється дуже мало уваги. Вважається, що це є недоліком чинної програми. За цією програмою тема відсотків вивчається у 5, 6 та 9 класах. Багатьом учням досить складно розв'язувати задачі на відсотки. Це пов'язано з тим, що багато задач на відсотки в підручниках - це задачі, з якими учні ще не стикалися в реальному житті, наприклад, розрахунки в банку або знижки на товари.

Крім того, у 9 класі деякі учні настільки перевантажені іншими предметами, іншими темами з математики та розділенням алгебри і геометрії, що забувають правила та алгоритми обчислення відношень. У цьому випадку вчитель зобов'язаний повторити тему, яка вже два роки не вивчається в школі. Враховуючи безпосереднє практичне значення теми "Відношення", вчителям необхідно регулярно повертатися до розв'язування таких задач. Це є досить складним завданням в умовах скорочення навчальних годин та дистанційного навчання, що не сприяє підвищенню якості навчання для більшості дітей.

До основних задач на процентні розрахунки, як було зазначено у першому розділі роботи, відносять наступні:

- ✓ **знаходження проценту від числа**: *щоб знайти p відсотків від числа a, треба a розділити на* 100 *і домножити на p, тобто*

$$b = \frac{a}{100} \times p$$

- ✓ **знаходження числа за даним числом його процентів:** *щоб знайти число за відомою частиною* b *і числом відповідних відсотків p, треба* b *розділити на p і домножити на* 100, тобто

$$a = \frac{b}{p} \times 100$$

- ✓ **знаходження процентного відношення двох чисел:** *щоб знайти скільки відсотків становить число a від числа b, треба a розділити на b і домножити на* 100, тобто$p = \frac{a}{b} \times 100.$

Перші два типи задач – задачі на *знаходження відсотку від числа* та *знаходження числа за відсотком* вивчається *у п'ятому класі*. Задачі на *знаходження процентного відношення двох чисел* розглядаються у *шостому* *класі*.

Тепер пояснимо на прикладах типи задач на проценти та основні методи їх розв'язання на прикладах.

Задача 10. Учні 6 класу домовились за два дні зібрати 220кг макулатури. Першого дня вони зібрали 88кг. Який процент завдання виконано упродовж першого дня?

Розв'язання.

Маємо задачу на знаходження % відношення двох чисел.

I спосіб (за формулою).

Відомо, що число *a* від даного числа *b*. Отже, 88/220×100%=40%.

II спосіб (зведення до одиниці).

На 1% припадає 220:100=2,2кг. Тому 88кг становлять 88:2,2=40%.

III спосіб (зведення до дробів).

Знайдемо відношення даних чисел (дріб) і запишемо його у процентах: 88/220=0,4=40%.

IV спосіб (спосіб пропорцій). 220кг становлять 100% 88кг становлять x %.

Отже, $\frac{220}{88} = \frac{100}{x}$, звідки $x = \frac{88\times100}{220} = 40\%$

V спосіб (за допомогою рівнянь).

Нехай в перший день завдання виконано на *x*%. Оскільки 1% запланованої кількості макулатури становить 220/100 кг, що за умовою дорівнює 88кг, то маємо рівняння 2,2*x*=88, *x*=88/2,2=40%.

Розв'язання задач на проценти (як і інших математичних задач) корисно вибудовувати за принципом «від простого до складного». Зокрема, при першому знайомстві з процентами важливо сформувати в учнів уміння переводити проценти у десяткові дроби і навпаки. Наприклад,

0,25=25%

0,17=17%

0,05=5%

0,6=0,60=60%

Після цього слід розглянути ситуації, коли після коми три і більше знаків:

0,258=25,8%

0,1335=13,35%

Далі розглянути числа з цілою частиною:

2=2,00=200%

8,2=8,20=820%.

Тут доцільно періодично повторювати правило знаходження проценту від числа. У підручниках 2018 року з математики пропонуються спочатку вправи на знаходження проценту числа [13;23;39]. Так, наприклад у [39, с.239] перші вправи – це не задачі, а саме вправи на обчислення:

Знайдіть

а) 1% від числа 800

б) 1% від числа 4

в) 12% від числа 45

Наступним етапом є розв’язання текстових задач.

Задача 11. Суходіл займає 29% площі Землі, а Світовий океан –решту. Скільки відсотків площі поверхні Землі займає Світовий океан?

Учень має зорієнтуватися, що всю площу Землі приймають за 100%, тоді Світовий океан займає 100-29=71%.

Тут формується визначення показника, який сприймається за 100% Корисними і наочними є задачі такі [39, с.240]:

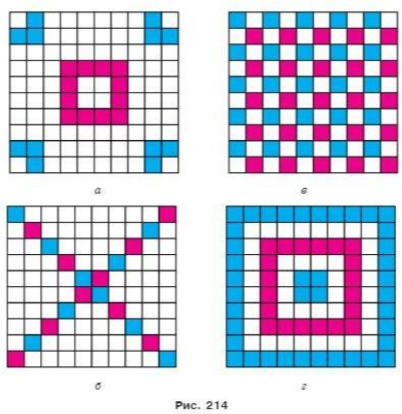


Рис.2.1

Задача 12. Скільки відсотків площі квадрата становить зафарбована частина.

Ця задача корисна з точки зору повторення. учень згадує площу квадрату ($S=a^2$);

1. має обчислити сторону, порахувавши клітинки (a=10);
2. знаходить площу (S=100);
3. знаходить кількість зафарбованих клітинок (24);
4. обчислює скільки відсотків становить кількість зафарбованих клітинок від усієї площі квадрата

   100:100=1 клітинка є 1%

   24 клітинки становить 24%

Найскладнішими для розуміння є задачі на сплави. Розглянемо одну з них.

Задача 13. Сплав містить 8% міді. Скільки кілограмів міді міститься в 360 кг сплаву?

Дана задача корисна ще тим, що формує у учнів уміння відволікатися від змісту задачі. Це перші спроби формалізації задачі. Після з'ясування що є відомим, і що треба знайти, найчастіше учні забувають про сплав, а виконують алгоритм розв'язування таких задач.

360:100=3,6 (кг) міститься в 1 %

3,6×8=28,8 (кг) міді міститься у сплаві.

Також важливо навчити учнів розв'язувати і такі задачі, де потрібно визначити кількість відсотків, які потрібно обчислити.

Задача 14. До магазину завезли 200 банок варення. 24% від цієї кількості становили банки з полуничним варенням, 32% з малиновим, а решту з вишневим. Скільки банок з вишневим варенням завезли до магазину? [23]

Розв'язання.

1. 32+24=56 (%) – всього відсотків банок з малиновим та полуничним варенням;
2. 100-56=44(%) – становлять банки з вишневим варенням;

3. 200:100=2 банки – становить 1 %;
4. 44*2=88(банок) – завезли з вишневим варенням.

У підручнику [23] наводиться таке *правило знаходження числа за його відсотком*: «щоб знайти число за його відсотком, треба дане число поділити на кількість відсотків і результат помножити на 100». Задачі також подаються поступово. Розглянемо декілька з них, з вказаного підручника [23].

Задача 15. Знайдіть 1%, якщо 5% це 25.

Розв'язання.

За вказаним правилом: 25:5=5 – це і буде 1%

Задача 16. Знайдіть число, якщо його 3% це число 18 [23].

Розв'язання:

18:3×100=600 – шукане число

Задача 17. Шкільна команда з шахів набрала на міському турнірі 72 очки, що становить 80% з усіх можливих [23].

Яку максимальну кількість очок можна було набрати на турнірі?

Розв'язання:

72:80×100=0,9×100=90

Задача 18. У дідуся в садочку достигли яблука: антонівка, малинівка та айдаред. Якби би антонівки було втричі більше, то сумарна кількість яблук зросла б на 70%. Якщо б було втричі більше малинівки, то сумарна кількість яблук зросла б на 50%. З'ясуйте, на скільки відсотків зміниться сумарна кількість яблук, якщо було б втричі більше айдареду? Відповідь обґрунтуйте [48].

Розв'язання.

I спосіб. Якби кожного сорту яблук було втричі більше, то сумарна кількість яблук зросла б на 200%. Із них 70% складає збільшення за рахунок антонівки, 50% – збільшення за рахунок малинівки. Отже, збільшення за рахунок айдареда складає 200% – 70% – 50% = 80%.

II спосіб. Оскільки додавання подвоєної кількості антонівки дає 70%, то антонівка складає 0,35 від всіх яблук. Аналогічно, малинівка складає 0,25 від всіх яблук. Отже, доля айдареда – 0,4. Якщо до числа двічі додати по 0,4, то число зросте на 80%.

*Відповідь:*збільшилось на 80%.

У 6 класі починається вивчення пропорції. Це відбувається після вивчення пропорції, а отже, безпосередньо застосовує та закріплює вивчене.

Учням складніше визначити тип задачі після того, як вони вивчили, як знайти число, як знайти відношення і як знайти відношення числа до відношення. І в більшості випадків учні будуть використовувати більш підходящий варіант. У більшості випадків це буде розв'язання за допомогою відношень.

Важливим кроком є перевірка розв'язання. Учні знайомі з цим при розв'язуванні рівнянь, але не звертають уваги на хоча б побіжну перевірку в задачах. Якщо учень запитує: "Якщо привезли 50 кг помідорів, а загальна вага огірків і помідорів становить 200 кг, який відсоток становить вага огірків і помідорів відповідно? Відповіді: 40% і 70%. Чи варто вчити їх перевіряти, чи дорівнює загальна вага 100 відсоткам? Тоді, можливо, буде зрозуміло, що в підрахунку є помилка. Це набагато корисніше, ніж звірятися з відповіддю з підручника. Тому що в житті доводиться розв'язувати задачі, на які не знаєш відповіді.

Корисно розв'язувати задачі на пропорції усно. Це розвиває повторення простих чотирьох арифметичних дій, навички усного рахунку та вміння запам'ятовувати кілька даних одночасно.

Тема "Пропорції" є частиною курсу логічної та циклічної математики. Вона є важливою складовою всього процесу математичної освіти та формування в учнів важливих компетентностей.

Зупинимося на кількох загальних моментах щодо того, як навчити учнів розв'язувати математичні задачі, особливо ті, які їх цікавлять.

По-перше, важливо, щоб учні повністю розуміли сенс задачі. Вчителі, які не очікують, що учні зрозуміють умови задачі, методологічно помиляються. Вчителі оцінюють з собою, тобто зі своїм досвідом, з людьми, які вирішили багато подібних проблем. При розв'язуванні більш складних задач важливими є умови, щоб знайти релевантність. Якщо учні розуміють зміст проблеми, то схожий зміст викликає асоціації і полегшує процес пошуку рішення.

Учень знаходить рішення і представляє його для оцінювання. Важливим тут є те, чи може учень обґрунтувати своє рішення. Якщо кроки не можуть бути обґрунтовані, вважається, що учень не зрозумів процес розв'язання. Часто причиною правильної відповіді є здогадка. Це не дуже добре для дитини. Таким чином, вона покладається на свою здатність вгадувати і не намагається впоратися із завданням.

Обґрунтування також важливе з точки зору підготовки до оцінювання зовнішньої третьої сторони. Завдання з обґрунтуванням викликає труднощі саме тому, що потрібно пояснити кожен крок. Завдання може бути не настільки складним, щоб залякати учнів. Щоб подолати цю проблему, необхідно навчити учнів пояснювати кроки спочатку при розв'язуванні простих задач, а потім при розв'язуванні більш складних задач. Саме тут можуть бути дуже корисними задачі на відсотки.

2.3. Система задач з логічним навантаженням для розвитку логічного мислення учнів гімназій та ліцеїв

Сучасна школа має переосмислити процеси навчання і розвитку, застосовувати передові технології та створювати умови для самонавчання, саморозвитку і самореалізації учнів. Велике значення має розвиток творчого потенціалу дитини, розкриття її індивідуальних і творчих здібностей.

Важливим засобом інтелектуального розвитку учнів є використання на уроках математики логічних задач. До таких завдань відносяться завдання, в яких зв'язок між даними і шуканим результатом виражений нечітко. Тому в ході дослідження необхідно уточнити і встановити існуючі зв'язки. Успішне виконання цих завдань залежить від логічного та творчого мислення учня, його здібностей, цілеспрямованого дослідження планів та вміння робити складні судження, тобто зі сполучниками (і, або, якщо... то). Зміст кожного логічно навантаженого завдання вимагає від учнів пошуку рішень, включаючи інтелектуальні міркування та рефлексію; цілісно та всебічно уявляти; в результаті глибоко досліджувати ситуацію; планувати дії на три-чотири кроки вперед; прогнозувати наслідки та, виходячи з цих міркувань, досягати очікуваного результату найшвидшим та найекономнішим способом. Він дозволяє вибрати серію дій, які приведуть до очікуваного результату в найшвидший і найекономніший спосіб.

Процес розв'язування логічних задач включає наступні етапи:

- ✓ Підготовка - вміння аналізувати структуру задачі та порівнювати її з відомими задачами.
- ✓ Визрівання нових ідей, формулювання гіпотез (передбачень) - вміння знаходити приховані зв'язки між даними та невідомими елементами.
- ✓ Перевірка гіпотез - вміння аналізувати гіпотези про можливі шляхи вирішення проблеми.
- ✓ Розвиток ідей - вміння логічно опрацьовувати варіанти вирішення проблеми.

Провідною метою використання завдань з логічним навантаженням на уроках математики є інтелектуальний розвиток кожного учня, який включає:

1. Оволодіння загальними розумовими діями і прийомами розумової діяльності: аналізом, порівнянням, узагальненням, аналогією.
2. Розвиток пізнавальних інтересів: пам’яті, уваги, уяви й, особливо, діалектичного мислення, що досягається поступово шляхом підведення учнів до більш складних узагальнень.
3. Мовний розвиток учнів, який здійснюється у процесі проблемно-пошукового діалогу між учителем та учнями через пояснення власної точки зору, зіставлення різних поглядів, висування припущень, їх аргументація, висловлення оцінних суджень.

Оскільки логічні запитання не пов'язані безпосередньо з будь-яким матеріалом, їх можна використовувати в будь-якій темі курсу математики для розвитку в учнів навичок аргументованого міркування.

Наприклад. *Вовк і лисиця змагалися з бігу. Хто яке місце зайняв, якщо відомо, що Вовк був одним із перших, а Лисиця була передостанньою.* Відповідь: Лисиця – перша Вовк – другий. Тут учні мають усвідомити, що за умовою задачі є тільки двоє звірів, і Лисиця прибігла передостанньою, тобто першою.

Розв'язування задач з логічним навантаженням - це чудова можливість для учнів проявити свою ініціативу та самостійність, а також розвинути свій творчий потенціал. Розв'язування цікавих задач також приносить величезне задоволення.

Розвиток навичок розв'язування задач, безумовно, сприяє розвитку рівня інтелекту і є дуже ефективним тренінгом у вільний час. Основна цінність цих завдань полягає в тому, що діти стають більш впевненими у вирішенні як цікавих головоломок, так і своїх особистих проблем. Зрештою, ці два види діяльності мають багато спільного, наприклад, методи вирішення проблем. В обох випадках можна досягти значного прогресу завдяки навчанню. Коли учні читають задачу, вони мобілізують всю свою спостережливість і концентрацію, щоб відібрати факти, необхідні для вирішення проблеми.

Логічні задачі важко розв'язувати, але є багато способів зрозуміти умови та отримати відповідь якомога швидше. Розв'язування логічних задач допомагає розвинути навички міркування та побудови логічних ланцюжків. Як правило, завдання на логічне мислення вимагають вміння застосовувати знання, а не великого обсягу знань.

Метод міркувань

Задача 19. Вадим, Сергій та Михайло вивчають різні іноземні мови: китайську, японську та арабську. На питання, яку мову вивчає кожен із них, один відповів: "Вадим вивчає китайську, Сергій не вивчає китайську, а 42

Михайло не вивчає арабську". Згодом з'ясувалося, що у цій відповіді лише одне твердження вірне, а два інших хибні. Яку мову вивчає кожен із молодих людей?

Розв'язання: Є три твердження. Якщо правильне перше твердження, то вірно і друге, оскільки юнаки вивчають різні мови. Це суперечить умові завдання, тому перше твердження хибне. Якщо вірне друге твердження, то перше і третє мають бути хибними. При цьому виходить, що ніхто не вивчає китайську. Це суперечить умові, тому друге твердження теж хибне. Залишається вважати вірним третє твердження, а перше і друге хибними. Отже, Вадим не вивчає китайську, китайську вивчає Сергій. Відповідь: Сергій вивчає китайську мову, Михайло – японську, Вадим – арабську.

Метод таблиць

Задача 20. 5 різних осіб у 5 різних будинках різного кольору, курять 5 різних марок цигарок, вирощують 5 різних видів тварин, п'ють 5 різних видів напоїв.

1) Норвежець живе у першому будинку.

2) Англієць живе в червоному будинку.

3) Зелений будинок знаходиться безпосередньо ліворуч від білого.

4) Датчанин п'є чай.

5) Той, хто палить Rothmans, живе поруч із тим, хто вирощує кішок.

6) Той, хто живе у жовтому будинку, палить Dunhill.

7)Німець палить Marlboro.

8) Той, хто живе у центрі, п'є молоко.

9) Сусід того, хто палить Rothmans, п'є воду.

10) Той, хто палить Pall Mall, вирощує птахів.

11) Швед вирощує собак.

12) Норвежець живе поруч із синім будинком.

13) Той, хто вирощує коней, живе у синьому будинку.

14) Той, хто палить Philip Morris, п'є пиво.

15) У зеленому будинку п'ють каву. Запитання: Хто вирощує рибок?

Таблиця 2.10.

	1	3	4	5	6
Колір дому	жовтий	синій	червоний	зелений	білий
Напій	вода	чай	молоко	кава	пиво
Тварина	коти	коні	птахи	риби	собаки
Сигарети	Dunhill	Rothmans	Pall Mall	Marlboro	PhilipMorris
Національність	норвежець	датчанин	анлієць	німець	швед

Метод блок-схем

Задача 21. Є дві посудини - трилітрова і п'ятилітрова. Потрібно, користуючись цими посудинами, отримати 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 та 8 літрів води. У нашому розпорядженні водопровідний кран та раковина, куди можна виливати воду.

Розв'язання. Перерахуємо всі можливі операції, які можуть бути використані нами, та введемо для них наступні скорочені позначення: НБ - наповнити більшу посудину водою з-під крана; НМ - наповнити меншу посудину водою з-під крана; СБП - спорожнити більшу посудину, виливши воду в раковину; ОМ - випорожнити меншу посудину, виливши воду в раковину; Б→М — перелити з більшого до меншого, доки більша посудина не спорожніє або менша посудина не наповниться; М→Б — перелити з меншого до більшого, доки менша посудина не спорожніє або більша посудина не наповниться. Виділимо серед перерахованих команд лише три: НБ, Б→М, ОМ. Крім цих трьох команд розглянемо ще дві допоміжні команди: Б = 0? — подивитися, чи більша посудина; М = 3? — подивитися, чи наповнена мала посудина.

Залежно від результатів цього огляду ми переходимо до виконання наступної команди за одним із двох ключів - "так" чи "ні". Такі команди у програмуванні прийнято називати командами " умовного переходу " і зображати в блок-схемах як ромбика з двома ключами-виходами. Домовимося тепер про послідовність виконання виділених команд. Після Б→М будемо виконувати ОМ щоразу, як менша посудина виявляється наповненою, і НБ щоразу, як більша посудина буде випорожнена. Послідовність команд зобразимо як блок-схеми.

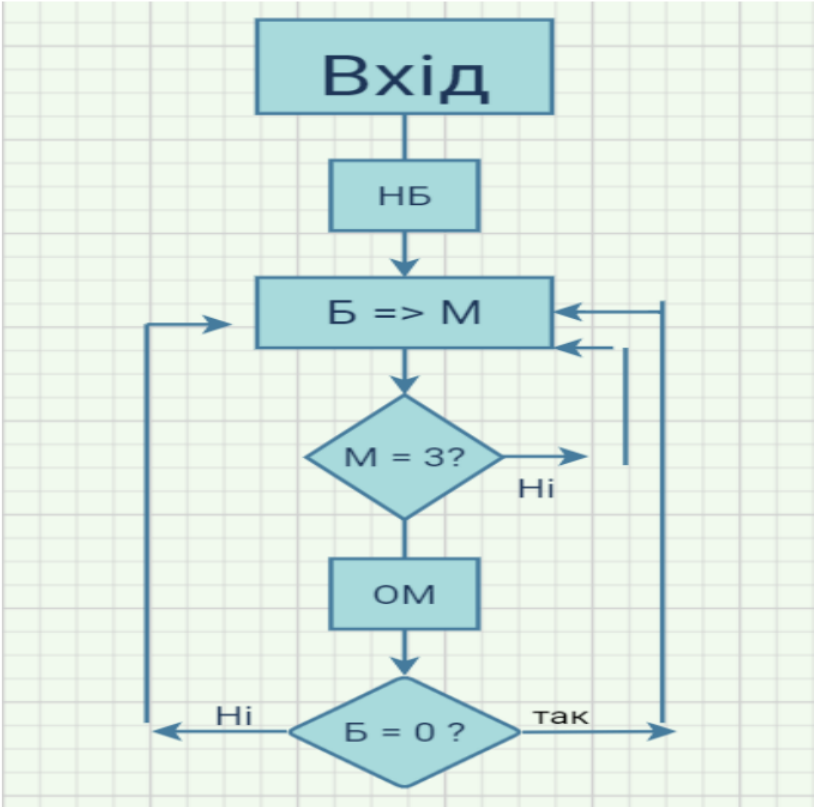


Рис. 2.2.

Почнемо виконання програми. Фіксуватимемо, як змінюється кількість води в судинах, якщо діяти за наведеною схемою. Результати оформимо вигляді таблиці.

Таблиця 2.11.

Б	0	5	2	2	0	5	4	4	1	1	0	5	3	3	0	0
М	0	0	3	0	2	2	3	0	3	0	1	1	3	0	3	0

Далі ця послідовність повністю повторюватиметься. З таблиці бачимо, що кількість води в обох посудинах утворює разом наступну послідовність: 0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, 0 і т.д. Таким чином, діючи за наведеною схемою, можна відміряти будь-яку кількість літрів від 1 до 7. Щоб відміряти ще й 8 літрів, треба наповнити обидві посудини.

Метод графів

Задача 22. Три учениці — Аня, Віка та Катя — на святі були: одна у коричневій, інша у білій, третя у синій сукні. У висловлюванні: Аня була в 47 коричневій сукні, Віка не в коричневій, Катя не в синій — одна частина істинна, а дві хибні. В якій сукні була кожна учениця?

Розв'язання: Виходитимемо з двох можливостей: Аня була в коричневій сукні (Ак) і Аня була не в коричневій (тобто в білому або синьому) і зобразимо ці можливості: першу ребром Ак, а другу двома ребрами Ас і Аб, що виходять з однієї точки. Якщо Аня була в коричневій сукні, то в синьому могла бути Віка або Катя. Тому до ребра Ак приєднаємо 2 ребра Вб і Кс. Шлях АкВс закінчимо Кб, а шлях АкКс закінчимо Вб. Але з двох шляхів, що вийшли, умові задачі жоден не задовольняє.

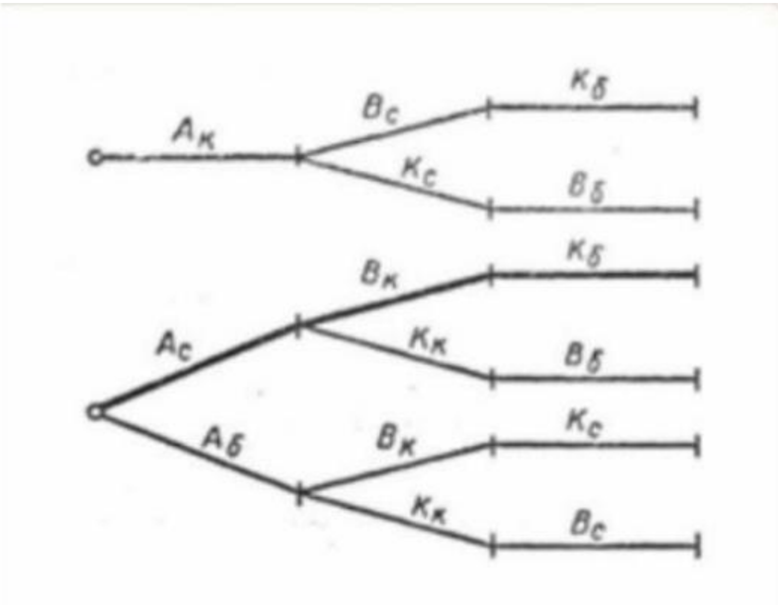


Рис.2.3.

Звернемося до другої можливості. До ребра Ас приєднаємо два ребра Вк і Кк, оскільки у коричневій сукні у разі могла бути Віка чи Катя. Такі самі два ребра приєднаємо до Аб. Закінчити кожен із шляхів, що вийшли, дуже просто: потрібно приєднати послідовно ребра Кб, Вб, Кс і Вс. Маємо чотири логічні можливості, але умові завдання задовольняє лише шлях АсВкКб, інші три шляхи — не задовольняють. Значить, Аня була у синій сукні, Віка — у коричневій, а Катя — у білій.

Метод кіл Ейлера

Задача 23. Кожен із 35 шестикласників є читачем принаймні однієї з двох бібліотек: шкільної та районної. З них 25 осіб беруть книги у шкільній бібліотеці, 20 – у районній.

Скільки шестикласників:

1. Є читачами обох бібліотек;
2. Чи не є читачами районної бібліотеки;
3. Чи не є читачами шкільної бібліотеки
4. Є читачами лише районної бібліотеки;
5. Чи є читачами лише шкільної бібліотеки?

Розв'язання: Зауважимо, що перше питання є ключовим для розуміння та вирішення цього завдання. Адже не відразу зрозумієш, як виходить 20 + 25 = 45 із 35. У першому питанні звучить підказка до розуміння умови: є учні, які відвідують обидві бібліотеки. А якщо умову завдання зобразити на схемі, то відповідь на перше питання стає очевидною.

Рис.2.4.

1. 20 + 25 - 35 = 10 (л) - є читачами обох бібліотек. На схемі це загальна частина кіл. Ми визначили єдину невідому нам величину. Тепер, дивлячись на схему, легко даємо відповіді на ці запитання.

2. 35 – 20 = 15 (л) – є читачами районної бібліотеки. (На схемі ліва частина лівого кола)

3. 35 – 25 = 10 (л) – є читачами шкільної бібліотеки. (На схемі права частина правого кола)

4. 35 – 25 = 10 (л) – є читачами лише районної бібліотеки. (На схемі права частина правого кола).

5. 35 – 20 = 15 (л) – є читачами лише шкільної бібліотеки. (на схемі ліва частина лівого кола).

Очевидно, що 2 та 5, а також 3 та 4 – рівнозначні та відповіді на них збігаються.

5 клас

Задача 24. Велосипедист проїжджає 1 км за вітром за 3 хв, а проти вітру - за 5 хв. За скільки хвилин він проїде 1 км, коли не буде вітру?

Відповідь: 1/3 км за хвилину швидкість руху за вітром, 1/5 км швидкість руху проти вітру. Тоді різниця цих швидкостей є подвоєнною швидкістю вітру, тобто 1/3 - 1/5 = 2/15 км за хвилин, а швидкість вітру становить 1/15 км за хвилину. Різниця швидкості велосипедиста за вітром та швидкості самого вітру це 1/3 -1/15 = 4/15 км за хвилину власна швидкість. Обернений дріб до 4/15 означає час руху велосипедиста, за який він подолає 1 км. Це дріб 15/4 = 3 хвилини 45 секунд.

Задача 25. У класі 25 учнів. Відомо, що серед довільних трьох учнів є двоє друзів. Доведіть, що є учень, у якого не менше ніж 12 друзів.

Вказівка. Припустимо, що немає учня, у якого рівно 12 друзів. Тоді, розподілимо усіх учнів по кімнатам. У кімнату під номером 0 помістимо учнів, у яких немає друзів. У кімнату під номером 1 помістимо учнів, у яких тільки один друг У кімнату під номером 2 помістимо учнів, у яких тільки двоє друзів. І так далі, у кімнату під номером 11 помістимо учнів, у яких тільки 11 друзів.

Якщо у кожній кімнаті по два чоловіки, то усіх учнів у класі 24, це протиріччя вказує на неправильне припущення.

Задача 26. Дід сам випиває діжечку квасу за 14 днів, а разом з бабою випиває таку ж діжечку квасу за 10 днів. За скільки днів одна баба вип'є таку ж діжечку квасу?

Відповідь. За 70 днів один дід вип'є 70:14=5 діжечок квасу, а дід і баба разом вип'ють 70:10=7 діжечок квасу. Отже, одна баба за 70 днів вип'є 7-5=2 діжечки квасу. А одну діжечку квасу баба вип'є за 70:2=35 днів.

6 клас

Задача 27. Кілька хлопчиків збирали гриби. Один знайшов 6 грибів, а всі інші по 13. Другого дня кількість хлопчиків була іншою. Один з них знайшов 5 грибів, а решта - по 10. Скільки хлопчиків було кожного разу, якщо в обох випадках вони назбирали однакову кількість грибів, причому відомо, що $100 < К < 200$?

Відповідь: першого разу було 14 хлопчиків, а другого - 18 хлопчиків.

Задача 28. Знайти всі трицифрові числа, для яких різниця між числом і потроєною сумою його цифр дорівнює 107.

Відповідь: 122 та 149.

Задача 29. Знайти всі двоцифрові числа, кожне з яких на 9 більше від суми квадратів його цифр.

Відповідь: 10, 11, 34, 74, 90, 91.

Задача 30. Знайти всі пари натуральних чисел, добуток яких у p разів більший за їх суму, де p - просте число.

Відповідь: якщо $к = 1$, то $x = p + 1$, $y = p + p2$; якщо $к = p$, то $x = 2p$, $y = 2p$; якщо $к = p$, то $x = p2+p$, $y = 1+p$.

Задача 31. Із 5 монет, які на зовнішній вигляд однакові, є 3 справжні та 2 фальшиві монети. При цьому, справжні монети важать однаково, а щодо фальшивих – одна з них легша за справжню, а інша – важча. З’ясуйте, чи вдасться за 2 зважування на шалькових вагах без гирьок визначити принаймні одну фальшиву монету? Відповідь обґрунтуйте**.**

Розв'язання. Спочатку зважимо дві довільні монети, наприклад 1 та 2. Якщо вони у рівновазі, то вони справжні. Далі просто порівнюємо 1 та 3. Якщо вони в рівновазі, то монети 4 та 5 – фальшиві. Якщо ні, то монета 3 фальшива. Нехай, наприклад, 1 важча за 2. Тоді 1 – В (більш важка фальшива), тоді 2 – С (справжня) чи Л (більш легка фальшива), або 1 – С та 2 – Л. Зважимо тепер 1 та 2 на одних шальках та 3 та 4 на інших. Якщо 1 та 2 переважили або у рівновазі 3 та 3, то там не може бути пари С+Л, бо вона не в змозі переважити будь-яку іншу пару а також бути з нею в рівновазі. Тому 1 – фальшива. Якщо 1 та 2 виявилися більш легкими за 3 а 4, то це може статися лише за умов що 2–Л, тобто фальшива.

Відповідь: так [16].

Задача 32. Натуральні числа від 1 до 2020 написані на дошці. Петрик підкреслив усі числа, що діляться 2, Василь підкреслив нижче усі числа, що діляться на 3, а далі Оксанка – усі числа, що кратні 4. З'ясуйте, скільки чисел підкреслено рівно два рази?

Розв'язання: Чисел, що кратні 4, усього 505/4=2020. Усі вони підкреслені щонайменше 2 рази. Але кожне третє з цих чисел кратне ще й 3 , тобто їх треба викреслити з цієї кількості: 4 , 8 , 12, 16 , 20 , 24 , …, тобто з подільності з остачею 505 = 3·168 +1 таких чисел 168 , тобто чисел такого типу 505 −168 = 337 . Тепер ще двічі підкреслені усі числа, що кратні 2 та 3 , але не кратні 4 . Їх можна порахувати таким чином, чисел, що кратні 2 але не кратні 4 – так само 505 . З них кратні 3 кожне третє: 2 , 6, 10 , 14, 18 , 22 , …, тобто їх так само 168 . Тобто усього цих чисел 337 +168 = 505 . Відповідь: 505 [15].

Задача 33. Оля, Таня, Оксана й Катя вміють грати на різних музичних інструментах: бандурі, арфі, акордеоні та скрипці, але кожна тільки на одному. Вони також знають іноземні мови: англійську, французьку, німецьку, іспанську, проте кожна лише одну. Відомо, що дівчина, яка грає на акордеоні, говорить іспанською. Таня не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає англійської мови. Оля не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає ні німецької, ні англійської мови. Дівчина, котра говорить німецькою, грає на бандурі. Оксана знає французьку мову, але не грає на скрипці. З'ясуйте, хто на якому інструменті грає та якою мовою розмовляє? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: Оля – акордеон, іспанська; Таня – бандура, німецька; Оксана – арфа, французька; Катя – скрипка, англійська [16].

7 клас

Задача 34. Чи можна розфарбувати всі 12 частин рис. 3 у три кольори так, щоб жодні дві частини, пофарбовані однаково, не мали спільної межі?

Розв'язання. Спробуємо розфарбувати рисунок у червоний, зелений та синій кольори. Центральний круг можна зафарбувати у довільний із трьох кольорів. Пофарбуймо його червоним. Усі 11 секторів мають спільну межу із центральним кругом, а отже жоден із них фарбувати у червоний колір після цього не можна.

Розглянемо перший сектор. Його слід фарбувати або в зелений, або в синій колір. Пофарбуймо його зеленим. Тоді другий сектор не може бути ні зеленим, ні червоним, тобто маємо зробити його синім. Тепер третій сектор не може бути синім і не може бути червоним, отже фарбуємо його зеленим і т. д. Вийде так, що 11-й сектор ми пофарбуємо зеленим кольором. Але тоді сусідні 1-й та 11-й сектори матимуть однакові кольори. Отже, розфарбувати рисунок потрібним чином не вдасться.

Відповідь: не можна.

Задача 35. Сторони чотирикутника *ABCD* мають такі довжини: $AB=9$, $BC=2$, $CD=14$, $DA=5$. Знайдіть довжину діагоналі *AC*, якщо відомо, що вона є цілим числом.

Розв'язання. Застосуймо нерівність трикутника до ΔABC та до ΔACD: для першого матимемо, що $AB+BC>AC$, тобто що $AC<AB+BC=11$, а для другого трикутника — що $DA+AC>CD$, тобто $AC>CD-DA=9$. Таким чином, $9<AC<11$, звідки $AC=10$.

Зауважимо, що чотирикутник, описаний в умові задачі, нескладно сконструювати. З допомогою тригонометрії можна показати, що він є опуклим.

Відповідь: $AC=10$.

Задача 36. Леся написала на дошці кілька попарно різних натуральних чисел. Андрійко не зміг вибрати серед цих чисел трьох, сума яких ділилася б на 3. Яку найбільшу кількість чисел могла виписати Леся?

Розв'язання. Леся могла написати на дошці, приміром, такі чотири числа: 3, 4, 6, 7. Те, що сума жодних трьох із них не ділиться на 3, легко перевірити безпосереднім перебором.

Відповідь: 4 числа.

Задача 37. Є 9 гир вагою 1 г, 2 г, ..., 9 г. Антон та Олена по черзі беруть гирі та кладуть їх на ваги зі стрілкою, не знімаючи попередні. Якщо після чергової гирі стрілка покаже вагу більше 25 г, то той, хто поклав цю гирю, програв. З'ясуйте, хто може перемогти в цій грі, якщо кожний намагається перемогти та перший хід робить Антон? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: Першим ходом Антон кладе гирю вагою 5 г. А далі просто якщо Олена вибирає гирю вагою n г, то він вибирає гирю, вагою 10 – n г. Так після його третього ходу на шальках буде рівно 25 г і Олена програє наступним ходом [16].

Задача 38. У класі 30 учнів. З'ясуйте, чи може так статися, що 9 з них мають по 5 друзів, 11 учнів мають по 6 друзів, а 10 учнів по 3 друга? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Припустимо,що таке може статися. Усіх учнів цього класу ми можемо розглядати як вершини графу. Тоді ребрами цього графу будуть відповідно дружні стосунки між учнями. У даному графі ми отримаємо, що 9 вершин мають степінь 5, 11 вершин мають степінь 6, і 10 вершин мають степінь 3. Отримали, що в даному Рис. 1 графі є 19 вершин непарної степені. Але кількість вершин непарної степені повинна бути парною. Прийшли до суперечності.

Відповідь: Тому цього не може бути [16].

Задача 39. На дошці записані числа 1, 2, 3, …, 2020. Миколка підкреслив усі числа, які діляться на 2, потім – усі числа, які діляться на 3, і, нарешті, – усі числа, які діляться на 5. З’ясуйте, скільки чисел він підкреслив двічі? Відповідь обґрунтуйте.

Розв’язання: Двічі ним підкреслені числа, які діляться на 6, на 10 та на 15, але не діляться на 30. Останні будуть підкреслені Миколкою тричі. Отже, їх потрібно вилучити як зі списку підкреслених чисел, які діляться на 6, так і зі списків підкреслених чисел, кратних 10 та 15. Усього отримуємо:

$$\frac{2016}{6}+\frac{2020}{10}+\frac{2010}{15}-3\cdot\frac{2010}{30}=336+202+134-201=471$$

У чисельниках дробів записані найбільші натуральні числа, які не перевищують 2020 і діляться націло на 6, 10, 15 та 30 відповідно. Можна було міркувати ще й так. Серед кожних 30 послідовних натуральних чисел підкресленими двічі будуть 7 чисел, які при діленні на 30 дають остачі 6, 10, 12, 15, 18, 20 та 24. Від 1 до 2010 таких груп по 30 чисел є 67. Крім них, двічі будуть підкреслені ще й числа 2016 та 2020. Разом: 7· 67 +2 =471.

Відповідь: 471 число [22].

8 клас

Задача 40. Чи існують цілі числа *x*, *y*, *z*, які задовольняють рівність:

$$(x+y)(y+z)(z+x)=2011\,?$$

Розв’язання. Якби такі три числа *x*, *y* та *z* існували, принаймні два з них мали би однакову парність. Припустимо, це пара чисел *x* та *y*. Тоді сума $x+y$ — парна, а отже парним мав би бути й добуток $(x+y)(y+z)(z+x)$. Число ж 2011, якому цей добуток повинен дорівнювати, — непарне. Одержана суперечність показує, що цілих чисел, які задовольняють умову, не існує.

Відповідь: таких чисел не існує.

Задача 41. У першій коробці кілька жовтих кульок, а у другій — кілька блакитних. Андрій перекладає декілька кульок із першої коробки в другу, після чого перемішує вміст другої коробки. Далі Леся перекладає таку ж саму кількість кульок із другої коробки в першу. Яких кульок тепер більше: жовтих у другій коробці чи блакитних у першій?

Розв'язання. Нехай діти перекладали з коробки в коробку по n кульок, причому серед n кульок, які переклала Леся, жовтих було m, а блакитних — $n-m$. Тоді жовтих кульок у другій коробці після Андрієвого перекладання було n, а після Лесиного стало $n-m$. Блакитних же кульок у першій коробці після Андрієвого перекладання не було взагалі, а після Лесиного стало $n-m$ — стільки ж, скільки й жовтих кульок у другій коробці.

Відповідь: їх однакова кількість.

Задача 42. Знайдіть усі такі прості числа p та q, для яких число $2^2+p^2+q^2$ також є простим.

Розв'язання. Якщо числа p та q непарні, то число $2^2+p^2+q^2$ парне і, очевидно, більше за 2, а тому не може бути простим. Отже, серед простих чисел p та q є парне, яке дорівнює 2. Припустимо, що таким є число p. Лишається знайти всі прості q, для яких простим є число q^2+8.

Помітимо, що коли число не ділиться на 3, себто дає при діленні на 3 остачу 1 або 2, квадрат цього числа дає від ділення на 3 остачу 1, а тому якщо $q \not\vdots 3$, то $q^2+8 \equiv 9 \pmod 3$, тобто число $q^2+8>3$ ділиться на 3 і не є простим. Таким чином, $q \vdots 3$, звідки $q=3$. Аналогічно, якщо $q=2$, то $p=3$. Залишається підставити пари (2, 3) і (3, 2) у початковий вираз і пересвідчитися, що обидві справді дають просте число 17.

Відповідь: $p=2, q=3$ або $p=3, q=2$.

Задача 43. A й B — точки перетину кіл S_1 та S_2 таких, що центр кола S_1 лежить на колі S_2, а центр кола S_2 лежить на колі S_1. Точку C, відмінну від точки B, вибрано на колі S_1 так, що $AC=AB$. Знайдіть кути трикутника ABC.

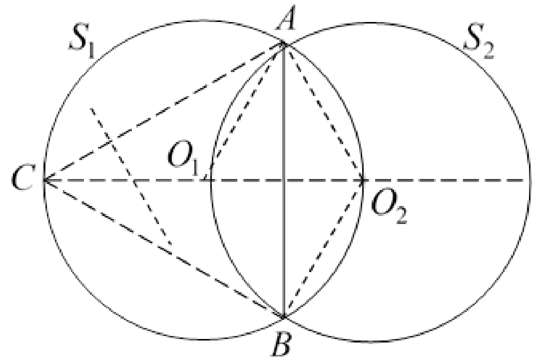


Рис. 2.5.

Відповідь: усі кути дорівнюють по $60°$.

Задача 44. Маємо 5 гир, на яких написано, що вони важать 1 г, 2 г, 3 г, ..., 9 г відповідно. Відомо, що рівно одна з гир важить легше, ніж на ній зазначено. З'ясуйте, чи можна на терезах з двома шальками без додаткових гир визначити хибну гирю не більше ніж за 2 зважування? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Покладемо на шальки при першому зважуванні гирі $1+4+9$ на ліву та $2+5+7$ на праву. Якщо маємо рівність $1+4+9=2+5+7$, то фальшива гиря серед інших трьох.

Тоді покладемо на шальки, наприклад, такі комбінації: $3+4$ та $1+6$.

Якщо $3+4=1+6$, то ці гирі – справжні, тому фальшива 8.

Якщо $3+4<1+6$, то фальшива 3, бо фальшива – більш легка і там її треба шукати. З урахуванням першого зважування нею є 3.

Аналогічно, при $3+4>1+6$ фальшивою є 6.

Аналогічно, якщо при початковому зважуванні вийшла нерівність, то фальшива там, де менша вага. Решта шість гир справжні. Залишається покласти на різні шальки по одній потенційно фальшивій і врівноважити їх справжніми. Наприклад, $1+5$ та $4+2$. Далі все аналогічно, фальшива на більш легкій шальці терезів, при рівновазі – та, що не покладена.

Відповідь: так, можна.

Задача 45. У прямокутнику 5×6 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна обрати квадрат 2×2, у якому зафарбовано не менше трьох клітинок.

Розріжемо даний прямокутник 5×6 на шість однакових фігур, як показано на рисунку

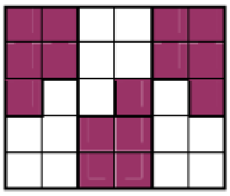


Рис.2.6.

Тоді за принципом Діріхлє, існує принаймні одна (з 6-ти таких 5-клітинкових фігур) фігура F1, в якій розфарбовано щонайменше 4 клітинки (бо 19=6 × 3+ 1);

3) При довільному розфарбуванні 4 клітинок у середині фігури F1 «пунктирний» квадрат 2×2 містить щонайменше 3 зафарбовані клітинки (рис.2) [16].

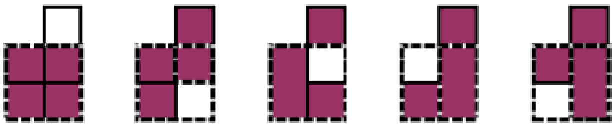


Рис.2.7.

9 клас

Задача 46. На дошці записано числа 1, 2, 3, ..., 101. Андрійко може вибрати серед записаних чисел довільні два a, b та записати замість них число $|a-b|$. Після 100-ї такої операції на дошці залишиться єдине число. Яке найбільше значення воно може мати?

Розв'язання. Оскільки всі числа на дошці залишатимуться невід'ємними на кожному кроці, а для невід'ємних чисел a та b завжди $|a-b| \le \max\{a, b\}$, можемо стверджувати, що числá, більшого за 101, на дошці опинитися на може. Число 101, з іншого боку, справді може залишитись останнім. Для цього Андрійку достатньо зробити так: спершу провести операції з парами чисел

(1, 2), (3, 4), …, (99, 100) — записати замість кожної з цих пар одиницю. Далі він розіб'є отримані 50 одиниць на 25 пар і проведе операції з ними, внаслідок чого дістане 25 нулів, записаних на дошці разом із числом 101, яке Андрійко не чіпав. Далі хлопець по одному прибиратиме нулі, ставлячи їх у пари із числом 101.

Отже, найбільшим числом, яке може лишитися після 100 операцій, є число 101.

Відповідь: 101.

Задача 47. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких обидва числа $9n+28$ та $n+5$ є точними квадратами.

Розв'язання. Нехай деяке число n задовольняє умови задачі, причому $9n+28=x^2$ та $n+5=y^2$, де x та y — цілі і, без втрати загальності, додатні числа. Тоді маємо:

$$(3y+x)(3y-x)=9y^2-x^2=9(n+5)-(9n+28)=45-28=17.$$

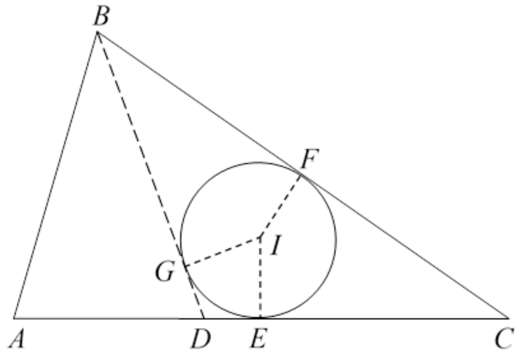
Оскільки $3y+x>1$, а 17 — просте число, повинна справджуватися система:

$$\begin{cases} 3y+x=17, \\ 3y-x=1. \end{cases}$$

Звідси відразу знаходимо, що $y=3$, а $n=y^2-5=4$. Перевіркою переконуємось, що значення $n=4$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $n=4$.

Задача 48. У трикутнику *ABC* проведено бісектрису *BD*. Відомо, що центр описаного навколо ΔABC кола збігається із центром кола, що вписане у ΔBCD. Знайдіть кути ΔABC.



.

Рис. 2.8

Розв'язання. Позначмо спільний центр кіл через I, а точки дотику вписаного у ΔBCD кола до сторін CD, BC і BD через E, F, G відповідно (рис. 5). Відрізки IE та IF — серединні перпендикуляри до сторін AC й BC відповідно, а тому $AE = CE$ та $BF = CF$. Із властивостей дотичних до кола $BG = BF$, $CF = CE$ і $DG = DE$, тому

$$BD = BG + DG = BF + DG = CF + DE = CE + DE = CD.$$

Також маємо, що

$$BC = 2CF = 2CE = AC.$$

Отже, трикутники BDC та ACB рівнобедрені. Звідси маємо, що

$$\angle BAC = \angle ABC = 2\angle DBC = 2\angle BCA \Rightarrow$$

$$180° = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 5\angle BCA \Rightarrow$$

$$\angle BCA = 36°,\ \angle BAC = \angle ABC = 2\angle BCA = 72°.$$

Відповідь: $\angle A = \angle B = 72°,\ \angle C = 36°.$

Задача 49. Серед 2020 однакових на вигляд монет одна монета фальшива, вона легша за інші. Марійка збирається виявити фальшиву монету, порівнюючи при кожному зважуванні маси двох купок з однаковою кількістю монет. З'ясуйте, як їй гарантовано вдасться в такий спосіб виявити фальшиву монету за 7 зважувань? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Спочатку розіб'ємо всі монети на 3 купки по 673, 673 та 674 монети і порівняємо маси перших двох купок. Якщо одна з них легша, то фальшива монета знаходиться саме в ній. Інакше – фальшива монета в третій купці. Вибираємо купку з фальшивою монетою і для зручності наступних міркувань доповнюємо кількість монет у ній до 729 справжніми монетами з інших купок. Ділимо цю купку на 3 рівні частини по 243 монети. Порівнявши маси двох із таких частин, аналогічно як при першому зважуванні знайдемо ту частину, яка містить фальшиву монету. Здійснюємо її поділ на 3 купки по 81 монеті і так само третім зважуванням визначаємо купку з фальшивою монетою. Четверте зважування зведеться до порівняння мас двох купок по 27 монет, п’яте – двох купок по 9 монет, шосте – двох купок по 3. І, нарешті, порівнюючи з трьох монет, які залишилися, дві, або зразу сьомим зважуванням виявимо фальшиву, або ж такою буде монета, яка не брала участі в останньому зважуванні [16].

Задача 50. Петрик та Василь грають у гру з записаними числами на дошці. За один хід, розпочинає Петрик, гравець вибирає два взаємно прості числа, що записані на дошці, витирає їх, і записує замість них їхню суму. Той, хто не може зробити ходу – програє. З’ясуйте, хто переможе при правильній грі, якщо з самого початку на дошці записані 2020 цифр 1? Відповідь обгрунтуйте

Розв’язання. Першим ходом Петрик витирає два числа 1 і записує число 2. Василь робить число 3 . Якщо в певний момент на дошці записані деяке непарне число n , а також 2019 – n чисел 1, то Петрик може або записати замість двох чисел 1 число 2, на що Василь замінює числа n та 2 на число n + 2, або замість числа n та однієї 1 записати n +1, на що Василь своїм ходом запише знову замість n +1 та однієї 1 число n + 2, і переможе.

Перед останнім ходом Петрика на дошці записані чотири числа 2017, 1, 1 та 1. Якщо Петрик робить набір таких трьох чисел 2018, 1 та 1, тоді Василь робить набір 2018 та 2 і Петрик не може зробити ходу. Якщо Петрик робить набір таких трьох чисел 2017 , 2 та 1, тоді Василь робить знову набір 2018 та 2 і Петрик не може зробити ходу

Відповідь: перемагає Василь [26].

10 клас

Задача 51. Начальник цеха запросив на нараду декілька чоловік. Кожний член наради, входячи в кабінет, потиснув руку кожному з присутніх. Скільки було членів наради, якщо було зафіксовано 78 рукостискань.

За яких значень параметра a рівняння $(x^2-3x+2)(\sqrt{x}-a)=0$ має рівно три різних дійсних корені?

Розв'язання. Рівняння можна переписати як $(x-1)(x-2)(\sqrt{x}-a)=0$, тому число x буде коренем цього рівняння тоді й лише тоді, коли $x=1$, $x=2$ або $\sqrt{x}=a$ — тобто $a\geq 0$ і $x=a^2$. Таким чином, рівняння матиме три різні корені тоді й тільки тоді, коли $a\geq 0$, причому $a^2\neq 1$ і $a^2\neq 2$, тобто $a\neq 1$ і $a\neq\sqrt{2}$.

Відповідь: $a\geq 0,\ a\neq 1,\ a\neq\sqrt{2}$.

Задача 52. Нескінченна спадна геометрична прогресія має перший член m, знаменник $q=\frac{1}{n}$, а сума її членів дорівнює 3. Знайдіть усі можливі пари (m,q) за умови, що m та n — натуральні числа.

Розв'язання. Оскільки сума членів геометричної прогресії, описаної в умові задачі, дорівнює $\frac{m}{1-q}=\frac{m}{1-\frac{1}{n}}=\frac{mn}{n-1}$, нам необхідно знайти всі натуральні m та n $(n>1)$ такі, що $\frac{mn}{n-1}=3$. Можемо записати:

$$\frac{mn}{n-1}=3\Leftrightarrow mn=3n-3\Leftrightarrow n(3-m)=3.$$

Звідси, оскільки n — натуральне і не дорівнює 1, $n=3$, а $m=2$.

Відповідь: $m=2,\ q=\frac{1}{3}$.

Задача 53. У скільки способів можна розфарбувати всі 13 частин рис. 6 у три кольори так, щоб жодні дві частини, пофарбовані однаково, не мали спільної межі? Два розфарбування вважаються різними, якщо хоча б одна з 13 частин пофарбована по-різному.

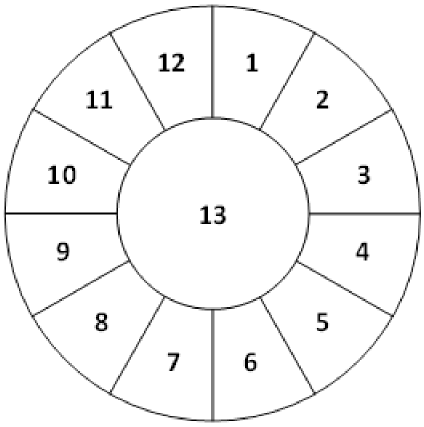


Рис.2.9.

Розв'язання. Центральну частину можна пофарбувати в один із трьох кольорів. Тоді всі 12 секторів доведеться фарбувати в інші два кольори, адже кожен із секторів має спільну межу із центральною частиною. Сектор 1 можна пофарбувати у довільний із двох кольорів, а кольори решти секторів встановлюються після цього автоматично: сектор 2 має бути пофарбовано в колір, відмінний від кольору центральної частини і сектора 1; сектор 3 повинен бути пофарбований у колір, відмінний від кольору центральної частини й сектора 2 і т. д. Легко бачити, що таке розфарбування справді задовольнятиме умову задачі, адже пара секторів 12 і 1 також буде розфарбована по-різному.

Отже, маємо $3\cdot 2=6$ варіантів розфарбування.

Відповідь: 6.

Задача 54. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел (x,y) справджується нерівність:

$$|x+y|+|1-x|+|1-y|\ge 2.$$

Розв'язання. Щоб довести нерівність, можна розглянути випадки: всі можливі комбінації знаків виразів $x+y$, $1-x$ та $1-y$. Утім, можна зробити простіше — скористатися нерівністю $|a|\ge a$, яка справджується для довільного дійсного числа a:

$$|x+y|+|1-x|+|1-y|\ge (x+y)+(1-x)+(1-y)=2.$$

Задача 55. У чотирикутнику *ABCD*, що вписаний у коло, діагональ *AC* є бісектрисою кута *DAB*. На промені *AD* за точкою *D* вибрано точку *E*. Доведіть, що $CE = CA$ тоді й тільки тоді, коли $DE = AB$.

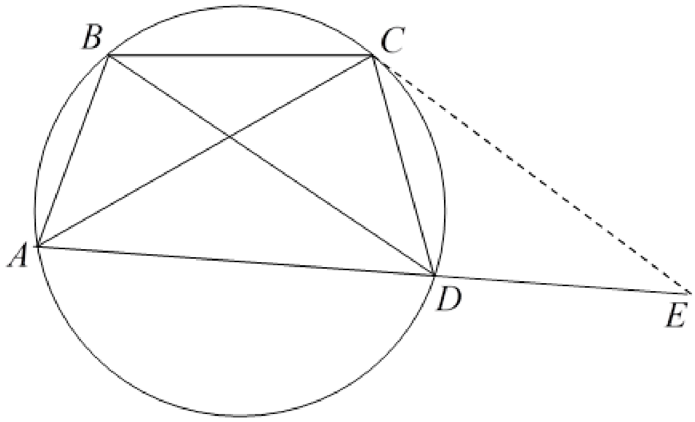


Рис.2.10.

Розв'язання. AC — бісектриса, тому, як відомо, $BC = DC$. Крім того, $\angle EDC = 180° - \angle ADC = \angle ABC$.

Якщо $AB = ED$, то $\Delta ABC = \Delta EDC$ (за двома сторонами та кутом між ними), звідки $CA = CE$.

Навпаки, якщо $CA = CE$, то $\angle CED = \angle CAD = \angle CAB$, звідки $\Delta ABC = \Delta EDC$ (за рівними кутами та парою сторін $CA = CE$) $\Rightarrow AB = ED$.

Задача 56. В одній із вершин куба сидить комаха. З'ясуйте, чи може вона проповзти по всім ребрам рівно по 1 разу та повернутися в початкову вершину? Відповідь обгрунтуйте.

Розв'язання. Вважаємо вершини куба вершинами графа, а його ребра – ребрами графа. Нам потрібно дізнатися, чи існує Ейлерів цикл або Ейлерів ланцюг у графі. Ейлерів цикл існує, якщо в графі є 0 або 2 вершини непарної степені. Але в куба 8 вершин і всі вони степені 3, тому Ейлерового циклу в ньому не буде. тже, комаха не зможе вона проповзти по всім ребрам рівно по 1 разу та повернутися в початкову вершину [26].

11 клас

Задача 57. Знайти всі розв'язки рівняння $2011^x - 2010^x = 1$.

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді $\left(\frac{2011}{2010}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{2010}\right)^x$.

Функція в лівій частині рівняння зростає, а в правій частині спадає. Тому рівняння має не більше одного кореня.

Помічаємо, що $x = 1$ є коренем рівняння.

Відповідь. 1.

Задача 58. Знайдіть усі значення $x \in [-90°, 90°]$, що задовольняють рівняння:

$$2\cos 10° + \sin 100° + \sin 1000° = 2\sin x.$$

Розв'язання. Зі співвідношення

$$2\cos 10° + \sin 100° + \sin 1000° = 2\cos 10° + \sin 80° - \sin 80° = 2\sin 80°$$

дістаємо рівність $\sin x = \sin 80°$, з якої, враховуючи, що $x \in [-90°, 90°]$, маємо, що $x = 80°$.

Відповідь: $x = 80°$.

Задача 59. Позначимо через $P(n)$ та $S(n)$ відповідно добуток та суму цифр натурального числа n. Наприклад, $P(133) = 9$, $S(133) = 7$. Знайдіть усі двоцифрові числа n, для яких справджується рівність: $n = P(n) + S(n)$.

Розв'язання. Нехай шукане двоцифрове число $n = \overline{ab} = 10a + b$, $a \neq 0$. Рівняння з умови набуває такого вигляду:

$$10a + b = ab + a + b \;\Leftrightarrow\; 10a = a(b+1) \;\Leftrightarrow\; 10 = b + 1 \;\Leftrightarrow\; b = 9.$$

Отже, умову задовольняють усі двоцифрові числа, що закінчуються на 9, і лише вони.

Відповідь: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Задача 60. У трикутнику ABC відрізок AD — бісектриса $\angle BAC$. Виявилося, що $CD = 36$, $BD = 64$, а ΔADC — рівнобедрений з вершиною D. Знайдіть довжини сторін ΔABC.

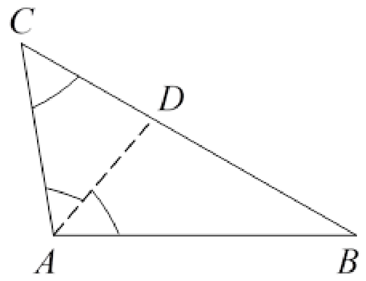


Рис.2.11.

Розв'язання. Зрозуміло, що $BC = BD + CD = 100$ (рис. 8). Із рівності кутів $\angle BAD = \angle CAD = \angle BCA$ випливає, що $\Delta BAD \sim \Delta BCA$, що дає співвідношення:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}.$$

Звідси $AB = \sqrt{BC \cdot BD} = 80$, $AC = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{AB \cdot CD}{BD} = 45$.

Зауважимо, що трикутник зі сторонами $BC = 100$, $AB = 80$, $AC = 45$ справді задовольняє умову задачі: бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\frac{45}{80} = \frac{36}{64}$ і дорівнює, після застосування теореми косинусів до трикутників ACB й ACD, 36.

Відповідь: $BC = 100$, $AB = 80$, $AC = 45$.

Задача 61. У кожній клітинці квадратної таблиці 4×4 міститься число 0 або число 1. Поряд із таблицею записали 10 чисел: суми значень у кожному з 4 рядків, суми значень у кожному з 4 стовпчиків і суми чисел на кожній із 2 великих діагоналей (тих діагоналей, що містять по чотири клітинки). Доведіть, що серед одержаних десяти чисел є принаймні три однакових.

Розв'язання. У кожному рядку, стовпчику та на кожній діагоналі містяться чотири числа, кожне з яких дорівнює 0 або 1, тому кожна записана сума може бути одним із п'яти чисел: 0, 1, 2, 3, 4. Якби серед 10 сум не було трьох однакових, це означало би, що кожне з п'яти можливих значень трапляється серед сум рівно двічі. Нехай це справді так. Розгляньмо одну з двох ліній, сума чисел на якій дорівнює 4; така лінія складається виключно з одиниць. Це не може бути діагональ, адже тоді в кожному рядку й у кожному стовпчику містилася би принаймні одна одиниця, тобто кількість ліній із сумою 0 була б меншою за дві. Хай тоді, без втрати загальності, лінія із сумою 4 — рядок. Це означає, що в кожному стовпчику й на кожній діагоналі є принаймні одна одиниця. Тоді дві лінії із сумою чисел 0 — теж рядки. Але в такому випадку друга лінія із сумою 4 теж не може бути ані стовпчиком, ані діагоналлю, тобто є рядком. Отже, маємо по два рядки із сумами 0 та 4, що означає, що сума чисел у кожному з чотирьох стовпчиків дорівнює 2, а це суперечить припущенню, що кожне значення від 0 до 4 трапляється серед сум рівно двічі. Одержана суперечність і завершує доведення.

Задача 62. Квадратний аркуш паперу прокололи в 2023 точках. Серед точок-проколів та вершин квадрата ніякі три не лежать на одній прямій.

Потім зробили певну кількість прямолінійних розрізів, що не перетинаються між собою, кожен з яких починався і закінчувався тільки в проколотих точках або вершинах квадрата.

Виявилось, що аркуш розрізано на трикутники, усередині яких проколів немає. Скільки було зроблено розрізів і скільки утворилось трикутників?

Розв'язання:

Нехай кількість отриманих трикутників дорівнює n. З одного боку, сума кутів усіх цих трикутників дорівнює $180°\times n$. З іншого боку, вона дорівнює $360° + 360° \times 2023$ (сума кутів квадрата та сума кутів 360° при 2023 вершинах). Отже, маємо рівняння:

$$180°\times n = 360° + 360° \times 2023, \text{ звідки}$$

$$180° \times n = 360° \times 2024,$$

$$n = 4048.$$

Нехай число проведених розрізів дорівнює m. З одного боку, кількість сторін отриманих трикутників дорівнює 3n. З іншого боку, вона дорівнює $4 + 2m$ (кожна сторона квадрата враховується один раз, а кожен розріз – двічі). Отже, маємо рівняння:

$$3n = 4 + 2m,$$

$$3 \times 4048 = 4 + 2m,$$

$m = (3 \times 4048 - 4) : 2;$

$m = 6070.$

Відповідь: 4048 трикутників; 6070 розрізів [26].

При розв'язуванні логічних задач відбувається активізація пізнавальної діяльності учнів, формування та подальший розвиток уміння співставляти, порівнювати, розмірковувати тощо. Це сприяє формуванню уміння приймати рішення, як сплановані, так і незаплановані.

Висновки до розділу 2

У розділі ми розглянули методичні особливості розв'язування текстових задач на рух та спільну роботу, задачі на відсотки, навели систему текстових задач з логічним навантаженням для розвитку логічного мислення учнів гімназій та ліцеїв.

Задачі на спільну роботу та задачі на одночасний рух мають однакові математичні структури та аналогічні способи розв'язання, що надає можливість об'єднати їх в одну групу і розробити методику навчання школярів розв'язування цих задач у порівнянні, з метою узагальнення їх математичних структур та способів розв'язання.

Вивчення задач на спільну роботу та на рух відбувається за загальною програмою:

1. Задачі на спільну роботу, в яких дано продуктивність кожного виконавця.
2. Задачі на спільну роботу (не дано продуктивність кожного виконавця), в яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця.
3. Задачі на спільну роботу (не дано продуктивність кожного виконавця), в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців.
4. Задачі на одночасний рух в різних напрямках.
5. Співставлення задач на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця, та задач на одночасний

рух в різних напрямках. Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв’язання.

6. Задачі на рух в одному напрямку.
7. Співставлення задач на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців, та задач на одночасний рух в одному напрямку. Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв’язання.
8. Задачі на одночасний рух в протилежних напрямках з двох різних пунктів. Задачі на одночасний рух назустріч, в яких зустріч не відбувається, тому що тіла припинять власний рух до моменту зустрічі.
9. Задачі на неодночасний рух.

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв’язування цих типів задач є всебічний аналіз і дослідження задачі за наступними рівнями:

- за зміною ситуації задачі
- за зміною числових даних;
- за зміною шуканої величини;.

Під час вивчення відсотків можна вдосконалити розуміння учнями поняття числа з теоретичної точки зору і довести до певного рівня їх практичні обчислювальні уміння, тобто сприяти набуттю учнями процедурної та логічної компетентностей. Розв’язування задач на відсотки має велике практичне значення, оскільки поняття відсотка широко використовується в різних сферах діяльності людей.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі було досліджено та проаналізовано процес розвитку логічного мислення учнів при вирішенні текстових задач. Текстова математична задача посідає чільне місце у навчальних програмах курсу математики. Такі задачі спрямовані на застосування набутих математичних знань на практиці, зокрема у різноманітних життєвих ситуаціях. Навчальні програми з математики підтверджують той факт, що розв’язування текстових задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою.

Вивчення різних методик і педагогічних прийомів підтвердило, що систематична робота над розв'язуванням текстових задач сприяє активному розвитку логічного мислення учнів.

У результаті проведених досліджень було виявлено, що використання інтерактивних методів та ігрових елементів в процесі навчання може значно поліпшити рівень логічного мислення учнів. Також важливо враховувати індивідуальні особливості кожного учня та створювати різноманітні завдання, які сприяють розвитку креативності та аналітичних здібностей.

Приділялася увага використанню основних методів при розв’язані ткстових задач, що підвищує інтерес учнів до вивчення математики та забезпечує їхню більш ефективну підготовку до розв'язування складних задач.

Зазначений досвід та висновки дозволяють рекомендувати вчителям та педагогам включати системну роботу над текстовими задачами у навчальний процес для сприяння розвитку логічного мислення учнів. Це сприятиме формуванню висококваліфікованих майбутніх фахівців, здатних аналізувати та розв'язувати реальні життєві ситуації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз В.Г., Васильєва Д.В. Збірник завдань з математики ДПА 2020. Харків: «Освіта», 2020. 80 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник / Г. П. Бевз. – Київ : Вища школа, 1989. – 367 с.
3. Богданович М.В., Козак М.В., Король Я.А. Методика викладання математики: Навч. пос. Тернопіль: Навчальна книга -Богдан, 2008. 336 с.
4. Великий тлумачний словник сучасної української мови / Уклад. і гол. ред. В.Т. Бусел. – К.: Ірпінь: ВТФ «Перун», 2003. – 1440 с.
5. Вінник Л. Міжпредметні зв'язки як умова підвищення ефективності навчально-виховного процесу// Професійно-технічна освіта. – 2003. – 43с.
6. Возняк Г.М. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі навчання математики. Посібник для вчителя/ Г.М. Возняк, К.П. Маланюк. – К.:Рад. Шк., 1989. – 122 с.
7. Возняк Г.М. Прикладні задачі: від теорії до практики / Г.М.Возняк, О.Г. Возняк. – Тернопіль: Мандрівець, 2003. – 136 с.
8. Возняк Г.М., Маланюк К.П. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. – К.: Радянська школа, 1984 – 80с.
9. Волошина Л. Інтеграція змісту загальноосвітньої та професійної підготовки // Професійно-технічна освіта. – 2008. – 21с.
10. Державний стандарт базової середньої освіти [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/gromadske-obgovorennya/2023/10/30/HO-proyekt.Derzhstandartu.profilnoyi.serednoyi.osvity-30.10.2023.pdf
11. Євтушенко О. Професійне спрямування вивчення математики // Професійно-технічна освіта. – 2008. – 30с.
12. Жеребкін В. Є.; Логіка: Підручник. – 4-те вид., випр. – К.: Т-во "Знання", КОО, 2001. –255с.

13. Істер О.С. Математика. 5 клас: підручник для закладів загальної середньої освіти. К., Генеза. 2018. 288 с.

14. Карамишева Н. В. Логіка. Пізнання. Евристика: Посібник для студентів та аспірантів. — Львів: Астролябія, 2002. — 356 с.

15. Климчук С. Фінансові головоломки на уроках математики.: Шкільний світ, 2011. – 96с.

16. Королюк О. М. Практикум із розв’язування задач шкільного курсу математики. Текстові задачі : навчально-методичний посібник / О. М. Королюк. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. – 68 с.

17. Лев А. Я. Повторення курсу алгебри. Підготовка до ЗНО (розв’язування текстових задач). Львів: Управління освіти департаменту гуманітарної політики, 2013. 62 с.

18. Лов’янова І.В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: Теоретичний аспект: Монографія/ І.В.Лов’янова – Черкаси: видавець Чабаненко Ю.А.; 2014. -354 с.

19. Лях С. Економіка в задачах з математики/ С.Лях –К.:Шк. світ, 2007. – 128 с.

20. Максименко С.Д., Соловієнко В.О. Загальна психологія: навчальний посібник. К.: МАУП, 2000.-256 с.

21. Матяш О. І. Задачі методичної діяльності вчителя у навчанні учнів геометрії / О. І. Матяш // Наукові записки Малої академії наук України: Зб. наук. пр. – Вип. 3. Серія: педагогічні науки. – Київ: ТОВ «СІТІПРІНТ». – 2013. – С. 224–232.

22. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць. – Вип. 26.– Київ-Вінниця, 2010. – С. 39–44.

23. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 5клас. Х., Гімназія. 2022. 272 с.

24. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. [Електронний ресурс] /Режим доступу: http://osvita.ua/doc/files/news/309/30993/40.pdf

25. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. [Електронний ресурс]. Режим доступу:

https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas

26. Національний мультипредметний тест ЗНО онлайн 2022 року [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zno.osvita.ua/multitest/507/

27. Пометун О. Як оцінити діяльність учнів на інтерактивному уроці // Доба. 2012. С.2-6.

28. Побірченко Н., Коберник Г. Інтерактивне навчання в системі нових освітніх технологій // Початкова школа. – 2014. С. 8-10.

29. Пометун О., Пироженко Л. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Науково-методичний посібник. – К.: Видавництво А.С, 2014. – 192 с.;

30. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики для осіб, які бажають здобувати вищу освіту на основі повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс] /Режим доступу: http://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/Matem_2015.pdf

31. Романишин І.Я. Математика. Методика роботи над текстовими задачами. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2002. 152 с.

32. Ситник Г. Технології превентивного виховання школярів: Практичний посібник. – Рівне: Юлат, 2019. с.29 – 30.

33. Симоненко Н.Є. Інтерактивні методи в гуманітарній освіті //Управління школою. – 2015. С. 18-21.

34. Сиротенко Г. Шляхи оновлення освіти: Науково-методичний аспект. Інформаційно-методичний збірник. – Х.: Видав. гр. "Основа", 2013. – 96 с..

35. Скворцова С. О. Підготовка майбутніх учителів початкових класів до навчання школярів розвязувати сюжетні математичні задачі: монографія. Харків : Ранок-НТ, 2013. 332 с.

36. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. К. : Вища шк., 2006. 582 с.

37. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Науково-методичний посібник / О.І.Пометун, Л.В. Пироженко; За ред. О.І. Пометун. – К.: А.С.К., 2013. с.19 – 24 .

38. Сучасні шкільні технології. У 2-х частинах. Частина 1 / Упорядники І. Рожнятовська, В. Зоц. – К., 2014. – С. 5-30.

39. Тарасенкова Н.А., Богатирьова О.П. та ін. Математика. 5 клас: підручник для закладів загальної середньої освіти. К., Видавничий дім освіта. 2018. 240 с.

40. Хайрулліна Т.Г. Активні методи навчання та виховання // Відкритий урок. 2021. С.64-76.

41. Черненко Н. Математика+.Інтегровані уроки/ Наталія Черненко. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 120 с.

42. Шаповал І., Королюк О. М. Текстові задачі на сумісну роботу і планування в шкільному курсі математики. Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів. 2014. С. 59-62.

43. Швець В.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: /Василь Швець, Алла Прус // Математика в школі 2009. – с. 17-24.

44. Швець В.О. Теорія та практика спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник/ В.О.Швець, А.В.Прус.– Житомир: Видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2007. – 156 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

План–конспект уроку з математики в 6 класі за темою: «Розв’язування задач на сумісну роботу».

Мета:*навчальна:* ознайомити учнів з найпростішими задачами на сумісну роботу, способом їх розв’язання;

розвиваюча: розвивати логічне мислення та уявлення учнів щодо процесів сумісної праці;

виховна: виховувати загальну культуру розв’язування текстових задач.

Тип уроку: комбінований.

Обладнання: картки із завданнями для самостійної роботи, мультимедійна презентація, необхідна апаратура для демонстрації презентації.

Хід уроку

I. Організаційний момент

II.Перевірка домашнього завдання (№208, 213,212)

Учитель вибірково збирає зошити на перевірку (5-8 зошитів), поки учні пишуть самостійну роботу.

III. Самостійна робота (10 хв)

Варіант – 1.	Варіант – 2.
1) $6\frac{5}{12}+9\frac{7}{18}$; 3) $7-1\frac{5}{8}$; 2) $\frac{2}{17}+\frac{8}{9}+\frac{15}{17}+\frac{5}{9}$; 4) $9\frac{11}{24}-7\frac{19}{36}$.	1) $7\frac{8}{15}+8\frac{17}{20}$; 3) $6-1\frac{2}{9}$; 2) $\frac{4}{15}+\frac{3}{7}+\frac{11}{15}+\frac{6}{7}$; 4) $4\frac{17}{27}-2\frac{13}{18}$.

IV.Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

1)Задача № 228 стор.45.

(***Задача-жарт***.) Карлсон з'їдає банку варення за 3 хв, а Малюк таку ж банку за 6 хв. За скільки хвилин разом з'їдять банку варення?

Пропонується учням прочитати умову та висловити власні думки щодо розв'язання задачі. Як правило, виникає хибна думка: якщо «разом», то додати 3+6=9.

Учитель: Коли треба менше часу: при окремому поїдання варення, чи коли Малюк і Карлсон їдять разом?

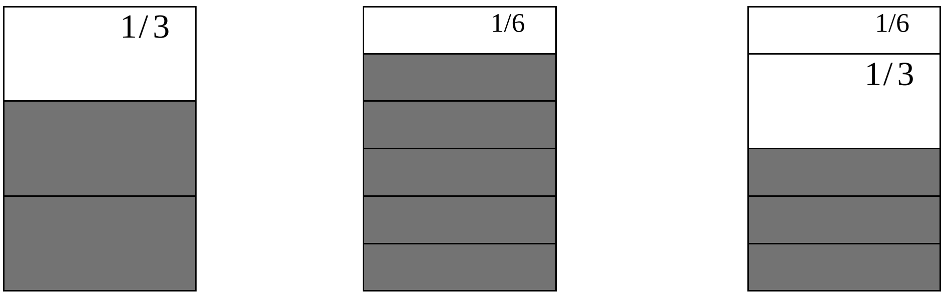
Учні мають дійти висновку, що менше часу витрачається при сумісному поїданні варення.

Можна інсценувати експеримент з окремого та сумісного поїдання желе чи йогурту, учнями, переодягненими у костюми Малюка та Карлсона.

Учитель починає записувати на дошці умову (або слайд презентації) у вигляді таблиці:

	t	v
Карлсон	3 хв	$\frac{1}{3}$ б/хв
Малюк	6 хв	$\frac{1}{6}$ б/хв

Перш, ніж заповнити останній стовпчик, учитель задає питання класу, супроводжуючи його малюнком (слайдом):



Якщо всю банку Карлсон з'їдає за 3 хв, то яку частину банки він опорожнить за 1 хв? (Учні: $\frac{1}{3}$ банки). Отже $\frac{1}{3}$ банки за хвилину – це *швидкість* поїдання варення Карлсоном.

Якщо всю банку Малюк з’їдає за 6 хв, то яку частину банки він опорожнить за 1 хв? (Учні: $\frac{1}{6}$ банки). $\frac{1}{6}$б/хв. – *швидкість* Малюка.

Якщо вони їдять варення разом, то за 1 хв Малюк з’їсть свою $\frac{1}{6}$ частину банки, в Карлсон – свою $\frac{1}{3}$ банки. Що треба зробити з цими частинами, щоб дізнатись, яку частину банки вони опустошать разом за 1 хв? (Учні: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$)

Отже, за скільки хвилин вони разом з’їдять всю банку? (Учні: за 2 хв).

Відповідь учні отримують, не виконуючи дій, а шляхом логічних міркувань, оскільки на цьому етапі ще не вміють ділити звичайні дроби.

2)*Задача* № 229 стор.46.

Один кран наповнює ванну за 15хв, а другий – за 12 хв. Яку частину ванни наповнять крани за 1 хв спільної роботи?

Зазначимо, що на цьому етапі відпрацьовуємо розуміння і заповнення учнями тільки першої половини таблиці 1, що стосується окремої роботи двох об’єктів.

Проводиться евристична бесіда з учнями щодо процесу, описаному в задачі, в ході якої учні мають дійти висновку, що крани допомагають один одному заповнити ванну, тому швидкості роботи обох кранів додаються (аналог швидкості зближенні при зустрічному русі двох об’єктів.)

	t	v
I	15 хв	$\frac{1}{15}$ в/хв
II	12 хв	$\frac{1}{12}$ в/хв

$\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{4}{60}+\frac{5}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$(ванни) – наповнять крани за 1 хв спільної роботи.

Учитель акцентує увагу, що знайдена величина $\frac{3}{20}$ ванни/хв – сумісна швидкість двох кранів.

3)Закріплюємо вивчене на задачі:

Один кран заповнює бак за 24 хв, в інший – за 36 хв. Чи заповнять крани за 1 хв спільної роботи більше, ніж $\frac{1}{12}$ частини бака?

До розв'язання задачі вже можна залучити учня.

	t	v
	24 хв	$\frac{1}{24}$ б/хв
I	36 хв	$\frac{1}{36}$ б/хв

$\frac{1}{24}+\frac{1}{36}=\frac{3}{72}+\frac{2}{72}=\frac{5}{72}$ (бака) – наповнять крани за 1 хв спільної роботи.

Тепер цю частину слід порівняти з $\frac{1}{12}$ бака. $\frac{1}{12}=\frac{6}{72}$. Оскільки $\frac{6}{72}>\frac{5}{72}$, то за 1 хв спільної роботи крани заповнять менше, ніж $\frac{1}{12}$ бака.

Рефлексія

- ✓ Який тип задач ми розглядали на уроці?
- ✓ Що спільного було у розв'язаних задачах?
- ✓ Як знайти сумісну швидкість роботи, коли об'єкти допомагають її виконувати один одному?

V. Домашнє завдання

1) № 230, стор.46.

2)Проаналізувати, що буде відбуватися з рівнем води в розв'язаних задачах № 229 (2), якщо І-й кран працюватиме на вливання, а ІІ-й на виливання.

VI. Підсумки уроку

ДОДАТОК Б

План-конспект уроку з алгебри в 7 класі за темою: "Розв'язування текстових задач на рух за допомогою складання лінійних рівнянь із однією змінною

Мета: *навчальна:* формування знань, умінь та навичок учнів розв'язувати тестові задачі за допомогою складання рівнянь;

розвиваюча: розвивати вміння працювати в групі;

виховна: виховувати інтерес до знань, старанність, відповідальність перед товаришами.

Тип уроку: засвоєння навичок і вмінь.

Обладнання: роздавальний матеріал-завдання для груп, правила проведення інтерактивної вправи «Акваріум» (пам'ятка), плакати з опорними схемами для розв'язування задач.

План уроку

	Назва етапу уроку	**Час, хв.**	**Методи та прийоми**
	Перевірка домашнього завдання	3	Робота консультантів
	Актуалізація опорних знань	7	«Теоретичний тест»
	Мотивація навчальної діяльності	2	Інтерв'ю
	Розв'язування задач за допомогою опорних схем	8	Робота біля дошки
	Розв'язування задач на рух	20	«Акваріум»
	Підсумок	4	Рефлексія
	Домашнє завдання	1	

ХІД УРОКУ

І. Організаційний момент

ІІ. Перевірка домашнього завдання

На попередньому уроці учні отримали на домашнє завдання три задачі, з яких вони вибирали і розв'язували одну, що відповідала рівню їх підготовки. Відповідно до рівня складності підготовленої вдома задачі, учні об'єднуються в групи. Один учень із групи робить аналіз і повідомляє класу, як інші впоралися з поставленим завданням, яких помилок припустилися та який спосіб розв'язування обрали. Сильніші учні відповідають на запитання, що виникали в найслабших учнів у процесі підготовки домашнього завдання.

ІІІ. Актуалізація опорних знань

1. Написання «Теоретичного тексту»

Учитель роздає кожному учневі текст для перевірки ступеня засвоєння обов'язкового теоретичного матеріалу. У тексті пропущені слова, які учні повинні вставити. Перевірка організовується у формі «взаємоперевірки» із зачитуванням правильних відповідей.

На попередньому уроці ми вивчали... багато текстових задач відображають деяку життєву ситуацію і використовують нематематичні поняття, такі задачі називаються... Щоб скласти математичну модель задачі, треба спочатку вибране основне..., а потім скласти відповідне... Відповідь необхідно перевірити за змістом..., а не... Після того як ми склали рівняння до задачі і щоб розв'язати його, рівняння необхідно звести до... Для цього потрібно пам'ятати такий алгоритм дій:

1) позбуваємося...;

2) розкриваємо...;

3) переносимо члени зі змінними в ... частину рівняння, а ... – у праву, змінюючи знаки на ...;

4) зводимо... доданки.

Я вважаю, що вміння розв'язувати текстові задачі, потрібно для того, щоб…

IV. Мотивація навчальної діяльності

Інтерв'ю

Я хочу, щоб кожний з вас пояснив, чому вважає за потрібне вміти розв'язувати текстові задачі.

Повідомлення теми і мети уроку.

V. Розв'язування текстових задач за допомогою опорних схем

Колективне розв'язування задачі на історичну тематику.

Історія зберегла нам мало фактів біографії стародавнього математика Діофанта. Все, що відомо про нього, взято з напису на його гробниці, складеного у формі математичної задачі. Ми наведемо цей напис:

Учні заповнюють опорну таблицю.

Рідною мовою	**Мовою алгебри**
Подорожній! Тут прах похований Діофанта. І числа розповісти можуть, о диво, як довго життя тривало	x
Частина шоста його промайнула прекрасним дитинством	x/6
Дванадцята частина життя ще пройшла – покрилось пушком тоді підборіддя	x/12
Сьому в бездітному шлюбі провів Діофант	x/7
Пройшло п'ятиріччя: він був щасливий народженням прекрасного первістка - сина	5
Якому доля лише половину життя чудового і світлого дала порівняно з батьком	x/2
І в горі глибокім старець земного життя кінець прийняв, проживши лиш років чотири з тих пір, як без сина зостався	4
Скажи, скільки років життя досягнувши, смерть прийняв Діофант?	x=x/6+x/12+5+x/2 +4

Розв’язавши рівняння і знайшовши, що x=84, дізнаємося такі епізоди біографії Діофант: він одружився у 21 рік, став батьком у 38 років, втратив сина у 80 років.

IV. Формування вмінь розв’язування задачі на рух за допомогою складання лінійних рівнянь з однією змінною

Повторення формул $s = vt; v = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{v}$. Аналіз фізичних понять, позначених буквами S, v, t.

Інтерактивна вправа «Акваріум»

Учитель об’єднує учнів в групи по 5 – 6 осіб і пропонує їм ознайомитись із завданням. Одна з груп сідає в центр класу. Ця група спочатку читає вголос завдання, а потім обговорює його і за 3 – 5 хв. має дійти спільного розв’язування . Учні, які знаходяться в зовнішньому колі, слухають, не втручаючись у хід обговорення. Але після дискусії клас має підтримати чи відкинути ідею, запропонованою центральною групою. Після розв’язування задачі 1 місце в «акваріумі» займає інша група і обговорює наступну задачу.

Катер пройшов відстань між пристанями за течією річки за 4 год, а проти течії – за 6 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії 1,5 км/год.

Зразок запису

Нехай власна швидкість катера x км/год. Коли катер рухався за течією річки, то його швидкість була (x+1,5) км/год і за 4 год він пройшов шлях 4(x-1,5) км. Якщо ж катер рухався проти течії річки, то тоді його швидкість була (x–1,5) км/год, і за 6 год він проплив 6(x–1,5) км. За умовою задачі катер пройшов за течією і проти течії однаковий шлях, тому

4(x+1,5)=6(x–1,5).

Розв'яжемо це рівняння:

4(x+1,5)=6(x–1,5), 4x+6=6x–9,4x=-9–6, -2x=15, x =7,5.

Отже, власна швидкість катера 7,5 км/год.

Відповідь. 7,5 км/год.

Бомбардувальник за 4 год пролетів таку відстань, як винищувач за 3 год. Знайдіть швидкість винищувача, якщо відомо, що швидкість бомбардувальника на 400 км/год менша, ніж швидкість винищувача.

Задача підвищеного рівня складності

Михайлик і Віталик вийшли назустріч один одному із двох сіл, відстань між якими 20 км. Швидкість Михайлика 6 км/год, а Віталика – 4 км/год. Одночасно з Михайликом назустріч Віталику Вилетіла муха. Долетівши до хлопчика, вона розвернулась і полетіла до Михайлика, і так літала між ними, доки вони не зустрілися. Скільки кілометрів налітала муха, якщо її швидкість 11 км/год.

Звичайно, розв'язуючи цю задачу, можна вдатися до підрахунку відстаней, які щоразу пролітала муха. Проте є більш зручний спосіб розв'язування, адже насправді муха літала стільки часу, скільки витратили наші персонажі, щоб зустрітися, тобто 20:(6+4)=2 години. Знаючи, що швидкість мухи становила 11 км/год, легко підрахувати, що відстань, яку вона пролетіла, дорівнює 2·11=22 км.

VII. Підсумок уроку

Рефлексія

Використовуючи прийом «Рефлексія», вчитель ставить учням запитання, що стосуються не лише вивченого матеріалу, а й такі, що підводять їх до рефлексії: Що на уроці було головним? Цікавим? Чого ви навчилися? Чим поповнили свої знання?

VIII. Домашнє завдання

Розв'яжіть задачі.

Середній рівень

За 9 годин теплохід проходить за течією річки такий самий шлях, як за 11 годин проти течії. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

Достатній рівень

По шосе їдуть два автомобілі з однаковою швидкістю. Якщо перший збільшить швидкість на 10 км/год., а другий зменшить на 10 км/год., то перший за 2 год. пройде стільки ж, скільки другий за 3 год. З якою швидкість їдуть автомобілі?

Високий рівень

З A до B зі швидкістю 60 км/год виїхав мотоцикліст. Через півгодини назустріч йому з B виїхав інший мотоцикліст, швидкість якого 50 км/год. Скільки часу їхав другий мотоцикліст до зустрічі з першим, якщо відстань AB дорівнює 162 км?

IX. Виставлення оцінок за урок

ДОДАТОК В

План-конспект уроку з алгебри в 8 класі за темою: «Задачі на сумісну роботу»

Мета заняття: *навчальна:* узагальнити та систематизувати знання, уміння й навички розв'язування задач на сумісну роботу*;*

розвиваюча: розвивати логічне мислення та уявлення учнів щодо процесів сумісної праці;

виховна: виховувати загальну культуру розв'язування текстових задач.

Тип уроку: комбінований.

Хід заняття

I. Актуалізація опорних знань

У формі евристичної бесіди викладач та учні пригадують типове формулювання задач на сумісну роботу та відомі підходи щодо їх розв'язання.

II. Розв'язування задач

Слід розпочинати з найпростіших задач.

<u>Задача 1</u>. Через першу трубу басейн заповнюється за 10 годин, через другу – за 15 годин. За скільки годин буде заповнений басейн, якщо відкрити разом обидва отвори?

	t	v
I труба	10	$\frac{1}{10}$
II труба	15	$\frac{1}{15}$

При сумісній роботі продуктивності праці додаються (якщо обидві труби працюють на наповнення басейну) : $v = v_1 + v_{2.}$; $v = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$ басейна за годину заповнюють дві труби, працюючи разом.

Тоді весь басейн вони заповнять за $t = \frac{1}{v} = 6$ годин.

Відповідь: за 6 годин.

<u>Задача 2.</u> Через І трубу порожній басейн заповнюється за 10 годин, через ІІ трубу повний басейн спустошується за 15 годин. Чи буде заповнений порожній басейн, якщо відкрити разом обидва отвори? За скільки годин?

Басейн дійсно повільно заповнюватиметься водою при одночасній роботі обох труб, оскільки продуктивність роботи першої труби, що працює на наповнення, більша за продуктивність роботи другої, яка працює на виливання. В цьому випадку друга труба «заважатиме» першій наповнювати басейн. Тому їх сумісна продуктивність роботи $v_{сум} = v_1 - v_2$.

$v_{сум} = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$, тоді час, за який заповниться басейн $t_{сум} = 30$ годин.

Відповідь: 30 годин.

<u>Задача 3.</u> Через першу трубу басейн наповнюється, а через другу – спорожнюється. При сумісній роботі обох труб басейн наповнюється за 60 годин. За скільки годин перша труба наповнить басейн, якщо відомо, що перша труба наповнює басейн на 3 години швидше, ніж друга його спустошує?

	$t_{ок}$ ремий	$v_о$ крема	$v_{сумісна}$	$t_{сумісний}$
І	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}$	$\frac{x(x+3)}{3} = 6$
ІІ	x +3	$\frac{1}{x+}$		

$x^2 + 3x – 180 = 0$; $x_1 = 12$, $x_2 = - 15$ – не задовольняє умову задачі.

Відповідь: за 12 годин.

<u>Задача 4.</u> Два робітника, працюючи разом, закінчили роботу за 2 дні. За скільки днів закінчить цю ж роботу кожен з них, працюючи окремо, при умови, що якби перший пропрацював 2 дні, а другий - 1 день, то разом вони зробили би $\frac{5}{6}$ усієї роботи

	$t_{ок}$ ремий	$v_{о}$ крема	$v_{сумісна}$	$t_{су}$ місний
I	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	2
II	y	$\frac{1}{y}$		

За два дні обидва робітники, працюючи разом, виконують об’єм роботи $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, тобто всю роботу. Отримаємо перше рівняння $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$. Перший робітник за два дні та другий за один день разом виконали $\frac{5}{6}$ роботи. Друге рівняння: $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$. Таким чином, одержали систему з двох рівнянь, розв'язком якої є пара чисел $x = 3$, $y = 6$, які задовольняють умову задачі.

Відповідь: перший робітник виконає роботу за 3 дні, другий – за 6 днів.

<u>Задача 5</u>. Першому трактору, щоб зорати поле, необхідно на 2 години менше, ніж третьому і на 1 годину більше, ніж другому. При сумісній роботі першого та третього тракторів поле може бути зоране за 1год 12 хв. Скільки часу треба, щоб зорати поле, якщо працюватимуть разом всі три трактори?

	$t_{ок}$ ремий	$v_{о}$ крема	$v_{сумісна}$	$t_{су}$ місний
I	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+$	?
II	y	$\frac{1}{y}$		
III	z	$\frac{1}{z}$		

За умовою $z - x = 2, \quad x - y = 1.$

$v = v_1 + v_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $\quad t = 1 год 12 хв = 1\frac{1}{5} год$; $\quad v \cdot t = 1$; $\quad 1\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

$$\begin{cases} z - x = 2; \\ x - y = 1; \\ \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{6}$;

$6(x - 1 + x) = 5x(x - 1)$;

$5x^2 - 17x + 6 = 0$; $\quad x_1 = 3, x_2 = 0,4$

$x_1 = 3; y_1 = 2; z_1 = 5$

$x_2 = 0,4; y_2 = -0,6; z_2 = 2,4$ - не задовольняє умову.

Отже, продуктивність праці кожного трактора: $v_1 = \frac{1}{3}$; $v_2 = \frac{1}{2}$; $v_3 = \frac{1}{5}$.

$v = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$; $\quad t = \frac{1}{v} = \frac{30}{31}$ (год)

Відповідь: за $\frac{30}{31}$ години зорять все поле разом три трактори.

<u>Задача 6</u>. Дві бригади працювали разом 15 днів, а потім до них приєдналася третя бригада і через 5 днів після цього роботу було виконано. Відомо, що друга бригада напрацьовує за день на 20% більше першої. Друга і третя разом можуть виконати всю роботу за 9/10 того часу, який необхідний для виконання всієї роботи першою та третьою бригадами при їх сумісній роботі. За який час можуть виконати всю роботу три бригади разом?

Для зручності розв'язання позначимо продуктивності праці кожної з трьох бригад відповідно *а, в, с.* Тоді перше речення умови пов'язує ці невідомі рівнянням: $(a + в) \cdot 15 + (a + в + c) \cdot 5 = 1$. З другого речення отримаємо рівність: $в = 1,2a$. Третє речення дає третє рівняння системи: $(в + c) = \frac{10}{9}(a + c)$. Розв'язуємо отриману систему методом підстановки і одержуємо розв'язок: $a = \frac{1}{48}$; $в = \frac{1}{40}$; $c = \frac{1}{60}$. Звідки $v_{сум} = \frac{1}{48} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = \frac{15}{240} = \frac{1}{16}$. Тоді $t_{сум} = 16$ годин.

Відповідь: 16 годин.

III. Підсумок уроку

Рефлексія

Використовуючи прийом «Рефлексія», вчитель ставить учням запитання: Що на уроці було головним? Цікавим? Чого ви навчилися? Чим поповнили свої знання?

IV. Домашнє завдання

Розв’яжіть задачі.

Середній рівень.

Два насоси різної потужності, працюючи разом, заповнюють басейн за 4 години. Для заповнення половини басейну першому насосу потрібно часу на 4 години більше, ніж другому для заповнення ¾ басейну. За який час може заповнити басейн кожен насос окремо?

Достатній рівень.

Двоє робітників виконали разом деяку роботу за 12 годин. Якщо б спочатку перший зробив половину цієї роботи, а потім другий закінчив те, що залишилося, то всю роботу було б виконано за 25 годин. За який час міг би кожен робітник виконати всю роботу окремо?

Високий рівень.

Резервуар може наповнюватись водою з двох кранів. Якщо перший кран відкрити на 10 хвилин, а другий – на 20 хвилин, то резервуар буде наповнено. Якщо перший кран відкрити на 5 хвилин, а другий – на 15 хвилин, то заповниться 3/5 резервуара. За який час кожен кран окремо може наповнити резервуар водою?

V. Виставлення оцінок за урок