МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_________ Д.Є. Бобилєв
«____»________________2022 р.

Реєстраційний №_______
«____»________________2022 р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В ЕЛЕКТИВНОМУ КУРСІ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-17
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика)
Слюсаренко Анастасії Андріївни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Бобилєв Дмитро Євгенович

Оцінка:
Національна шкала ________________
Шкала ECTS ____ Кількість балів ____
Голова ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Життя людини дуже передбачуване і дуже часто ми стикаємось із ситуаціями, коли нам потрібно вибрати лише один варіант з певної сукупності можливих. Це може бути прийняття рішень або вибір варіантів своєї поведінки. Необхідність такого вибору корінням уходить в давнину. Люди, впродовж століть, розмірковували над ухваленням рішень, аналізуючи можливі наслідки своїх дій, таким чином, вони шукали шляхи розв'язання спрямовані на досягнення найкращого результату. Раніше міркування проводились на підставі досвіду та здорового глузду, який також використовують і досі. Але з часом людство прийшло до нового способу - математичного аналізу.

З виникненням нових технологій виникає необхідність винайдення наукового способу аналізу складних цілеспрямованих процесів. Пошук оптимального розв'язання має на меті побудову математичної моделі та використання для її аналізу певного математичного апарату. З цією метою застосовують спеціальні наукові методи, що об'єднані спільною назвою «дослідження операцій».

Пізніше методи дослідження операцій застосовувались під час планування науково-дослідних робіт, проєктування різних об'єктів, управління виробничими та технологічними процесами, прогнозування розвитку промисловості.

Дослідження операцій – комплексна наукова дисципліна, що застосовує наукові принципи, математичні, кількісні методи для обґрунтування «рішень у всіх областях цілеспрямованої людської діяльності». Основним завданням цієї науки є «пошук кращих або хоча б задовільних шляхів досягнення поставленої мети». Системний аналіз цілеспрямованих дій і об'єктивне порівняльне оцінювання можливих результатів цих дій і є головним методом дослідження операцій. Таким чином, суть задач дослідження операцій полягає у пошуку шляхів раціонального використання операцій для реалізації поставленої мети.

Методи дослідження операцій знайшли своє математичне застосування під час розв'язання багатьох завдань у будь-якій сфері людської діяльності.

Профільна школа повинна забезпечити доступність для кожного старшокласника побачити себе у якості майбутніх управлінців та надати можливість вивчити принципи і методи оптимізації, методи розв'язання задач на знаходження оптимального розв'язку. Таким чином, розробка міжпредметного елективного курсу з математики і інформатики в профільному навчанні «Розв'язування задач дослідження операцій» набуває особливого значення.

Мета магістерської роботи – теоретично обґрунтувати та розробити елективний курс «Розв'язування задач дослідження операцій» для учнів 10 класу з використанням програмного забезпечення Microsoft Office Excel та методику формування математичної та інформаційно-цифрової компетентностей учнів профільної школи під час вивчення запропонованого курсу.

Мета роботи передбачає виконання таких **завдань:**

1. Проаналізувати науково-популярну літературу з теми дослідження. Виокремити поняття «екстремуму». Провести логіко-дидактичний аналіз теми «Лінійне програмування». З'ясувати як формуються математичні компетентності засобами дослідження операцій.
2. Дослідити, які методичні особливості факультативного курсу «Розв'язування задач дослідження операцій».
3. Виокремити переваги використання Microsoft Office Excel як засобу формування математичних та інформаційно-цифрових компетентностей.
4. Виокремити математичні компетентності, які можна набути завдяки використанню MS Excel, та визначити показники і рівні їх сформованості в учнів профільної школи.

5. Виокремити інформаційно-цифрові компетентності, які можна набути завдяки використанню MS Excel, та визначити показники і рівні їх сформованості в учнів профільної школи.
6. Розробити елективний курс «Розв'язування задач дослідження операцій» для 10 класу за допомогою використання програмного забезпечення Microsoft Office Excel як засобу формування математичних компетентностей учнів профільної школи.

Об'єктом дослідження є процес формування математичної компетентності учнів профільної школи, як ключової, та інформаційно-цифрової, як предметної.

Предметом дослідження є методика використання програмного забезпечення Microsoft Office Excel як засобу формування математичних та інформаційно-цифрових компетентностей учнів профільного навчання.

Методи дослідження, які використовуються у роботі: аналіз джерел з теми дослідження операцій, аналіз шкільних програм, підручників і навчальних посібників, вивчення і узагальнення педагогічного досвіду роботи вчителів математики.

Практичне значення дослідження: матеріал, представлений у роботі, може бути використаний вчителями або студентами-практикантами для проведення позакласної роботи з математики.

Структура роботи. Це дослідження складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 21 пункт, та додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1. Вивчення поняття екстремуму в профільній школі

Входження української освіти в європейський освітній простір потребує реформування всіх її ланок, насамперед загальної середньої школи. Нові підходи до організації навчання в старшій школі закладено в Національній доктрині розвитку освіти (2002), Законі України «Про загальну середню освіту» [1], Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа) та Концепції профільного навчання в старшій школі, у якій ідея профільності старшої школи була теоретично обґрунтована групою науковців Інституту педагогіки АПН України [2].

У названих документах закладено нові підходи до організації освіти в старшій школі, Вона має функціонувати як профільна. Це створюватиме сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів. для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності [3, с. 15-17]. Профільна школа найповніше реалізує принцип особистісно орієнтованого навчання, що значно розширює можливості учня у виборі власної освітньої траєкторії.

Мета профільного навчання – забезпечити рівний доступ учнівської молоді до здобуття загальноосвітньої профільної та початкової допрофесійної підготовки, неперервної освіти протягом усього життя, виховання особистості, здатної до самореалізації, професійного зростання й мобільності в умовах реформування сучасного суспільства [4, с. 4-5]. Профільне навчання спрямоване на набуття старшокласниками навичок самостійної науково-практичної, дослідницько - пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти.

Основними завданнями профільного навчання є:

- створення умов для врахування й розвитку навчально – пізнавальних і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів старшої школи в процесі їхньої загальноосвітньої підготовки;
- виховання в учнів любові до праці, забезпечення умов для їхнього життєвого і професійного самовизначення, формування готовності до свідомого вибору і оволодіння майбутньою професією;
- формування соціальної, комунікативної, інформаційної, технічної компетенцій учнів на допрофесійному рівні, спрямування молоді щодо майбутньої професійної діяльності;
- забезпечення поступово-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю [4, с. 14-16].

Основним завданням навчання математики в середньому закладі освіти є забезпечення рівня математичної культури, необхідного для повноцінної участі в повсякденному житті, продовження освіти та трудової діяльності [4, с.7-8]. У процесі поглибленого навчання математики в профільних класах основні завдання суттєво доповнюються. Це обумовлено необхідністю виявлення та розвитку в учнів математичних здібностей, формування в них стійких інтересів до математики та професійної діяльності, підготовки учнів до навчання у вищому навчальному закладі освіти.

Основу математичної підготовки у 10-11 класах складають курси геометрії (розділ «Стереометрія») та алгебри і початків аналізу, які відрізняються від загальноосвітніх не стільки обсягом і переліком тем, скільки спрямованістю на реалізацію головного принципу. Повніше реалізувати принцип моделювання професійної діяльності дозволяють курси за вибором та індивідуальні завдання.

Курс «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня розрахована на 420 годин навчального часу. Програма складається з таких п'яти тем:

1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності
2. Степенева функція
3. Тригонометричні функції
4. Тригонометричні рівняння і нерівності
5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування

Тема «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» включає в себе такий зміст навчального матеріалу:

- Границя функції в точці.
- Основні теореми про границі функції в точці.
- Неперервність функції в точці і на проміжку.
- Задачі, які приводять до поняття похідної.
- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій. Складена функція. Похідна складеної функції.
- Похідні степеневої та тригонометричних функцій.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.
- Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.
- Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків. Асимптоти графіка функції.
- Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Вивчення теми «Точки екстремуму функції» передбачає формування таких компетентностей:

- предметна компетентність: сформувати поняття околу точки, точок екстремуму, екстремумів функції; домогтися засвоєння необхідної і достатньої умови екстремуму, правила знаходження екстремумів функції; сформувати вміння розв'язувати задачі, які передбачають використання цих понять, умов і правил;
- ключові компетентності: спілкування державною мовою – доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію; уміння вчитися впродовж життя – визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети; інформаційно-цифрова компетентність – структурувати дані, складати алгоритм та діяти за ним [5].

Ознайомимось з вивченням поняття екстремуму та зробимо порівняльний аналіз формулювань основних відомостей вищої математики з курсом профільної школи.

Точка екстремуму функції - це точка області визначення функції, в якій значення функції приймає мінімальне або максимальне значення. [6, с. 213]

Значення функції в цих точках називаються локальними екстремумами (мінімумом і максимумом) функції. Слово «локальний» для стислості часто опускають і кажуть просто про максимуми і мінімуми функції.

Інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, тобто множина точок x таких, що $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, називається δ-околом точки x_0.

Розглянемо як це ж саме означення подано учням у підручниках алгебри 10 класу профільного рівня, а саме авторів:

- Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова;
- А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір;
- О.С. Істер, О.В. Єргіна.

Вони надають таке означення: «Околом точки x_0 називають будь-який проміжок $(a; b)$, що містить цю точку».

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому δ-околі точки x_0, де $\delta > 0$.

Кажуть, що функція $f(x)$ має локальний максимум в точці x_0, якщо для всіх точок $x \neq x_0$, що належать околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

У вище зазначених підручниках це твердження подається у вигляді означення, формулювання якого є таким: «Точку x_0 називають точкою максимуму функції $y = f(x)$, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується рівність $f(x_0) \geq f(x)$».

Якщо для всіх точок $x \neq x_0$ з деякого околу точки x_0 виконується строга нерівність $f(x) < f(x_0)$, то точка x_0 є точкою строгого локального максимуму[6, с. 211].

Кажуть, що функція $f(x)$ має локальний мінімум в точці x_0, якщо для всіх точок $x \neq x_0$, що належать околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.

Авторські колективи Бевз, Мерзляк та Істер це твердження подають у вигляді означення, формулювання якого є таким: «Точку x_0 називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується рівність $f(x_0) \leq f(x)$».

Якщо для всіх точок $x \neq x_0$ з деякого околу точки x_0 виконується строга нерівність $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 є точкою строгого локального мінімуму[6].

Алгебра 10 класу профільного рівня передбачає розглядання таких понять як точка строгого локального максимуму та точка локального мінімуму.

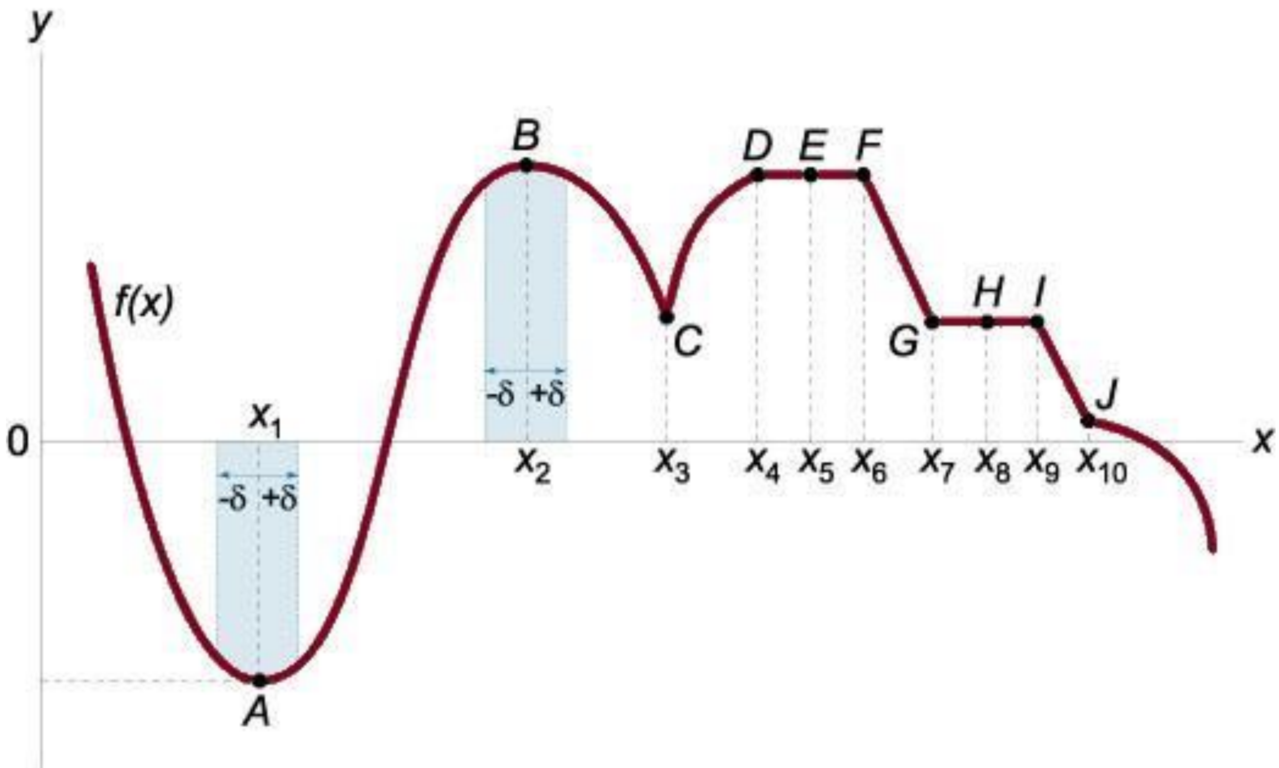


Рисунок 1. Точки екстремумів функції

На рис. 1 схематично показані різноманітні точки екстремуму. Точка $A(x_1)$ є точкою строгого локального мінімуму, оскільки для неї існує δ-окіл $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, в якому справедлива нерівність $f(x) > f(x_1)\ \forall\ x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. $[7, \text{с.}\ 18]$

Аналогічно, точка $B(x_2)$ є точкою строгого локального максимуму. В цій точці виконується нерівність $f(x) > f(x_2)\ \forall\ x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$. $[7, \text{с.}\ 18]$

При чому число δ в кожній точці може бути зовсім різним.

Наступні точки класифікуються наступним чином:

- точка $C(x_3)$ – строгий мінімум;
- точка $D(x_4)$ – нестрогий максимум;
- точка $E(x_5)$ – нестрогий максимум або мінімум;
- точка $F(x_6)$ – нестрогий максимум;
- точка $G(x_7)$ – нестрогий мінімум;
- точка $H(x_8)$ – нестрогий максимум або мінімум;

- точка $I(x_9)$ – нестрогий максимум;
- точка $J(x_{10})$ – екстремуму немає.

Введемо ще деякі означення:

- Точки, в яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю, називаються стаціонарними точками.
- Точки, в яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками даної функції. Отже, стаціонарні точки – підмножина множини критичних точок.

Означення стаціонарних точок та підмножини множини критичних точок не використовують у курсі алгебри 10 класу профільного рівня. Але вводять поняття критичних точок.

«Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.»

Розглянемо також ще деякі теореми.

Теорема Ферма:

Якщо функція $f(x)$ в деякому δ-околі точки x_0, приймає в цій точці найбільше (найменше) значення і має скінчену або певного знаку нескінчену похідну, то ця похідна дорівнює 0, тобто $f'(x_0) = 0$. [7, с. 19]

Цю теорему у 10 класі не розглядають, але використовують при розв'язуванні завдань.

Теорема Лагранжа (про середнє значення):

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[x; x_0]$ і диференційована на інтервалі $(x; x_0)$, то в цьому інтервалі існує хоча б одна точка $x = c$ така, що $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$[6, с. 215].

Необхідна умова екстремуму

Теорема (необхідна умова екстремуму):

Якщо точка x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$, то в цій точці або похідна дорівнює нулю, або не існує. Іншими словами, екстремуми функції містяться серед її критичних точок. [7, с. 20-21]

Доведення:

За умовою точка x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$ => по теоремі Ферма похідна $f'(x_0) = 0$ => точка x_0 – критична. ■

В підручниках з алгебри цю теорему розглядають без доведення, а формулювання теореми не змінено.

Відмітимо, що виконання необхідної умови ще не гарантує існування екстремуму.

Екстремуми диференційованих функцій існують при виконанні достатніх умов. Ці умови основані на використанні похідної першого, другого, вищих порядків. Відповідно розглядаються три достатні умови екстремуму. Перейдемо до їх формулювання та доведення.

Перша достатня умова екстремуму

Нехай функція $f(x)$ диференційована в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, в якій, однак, функція неперервна. Тоді:

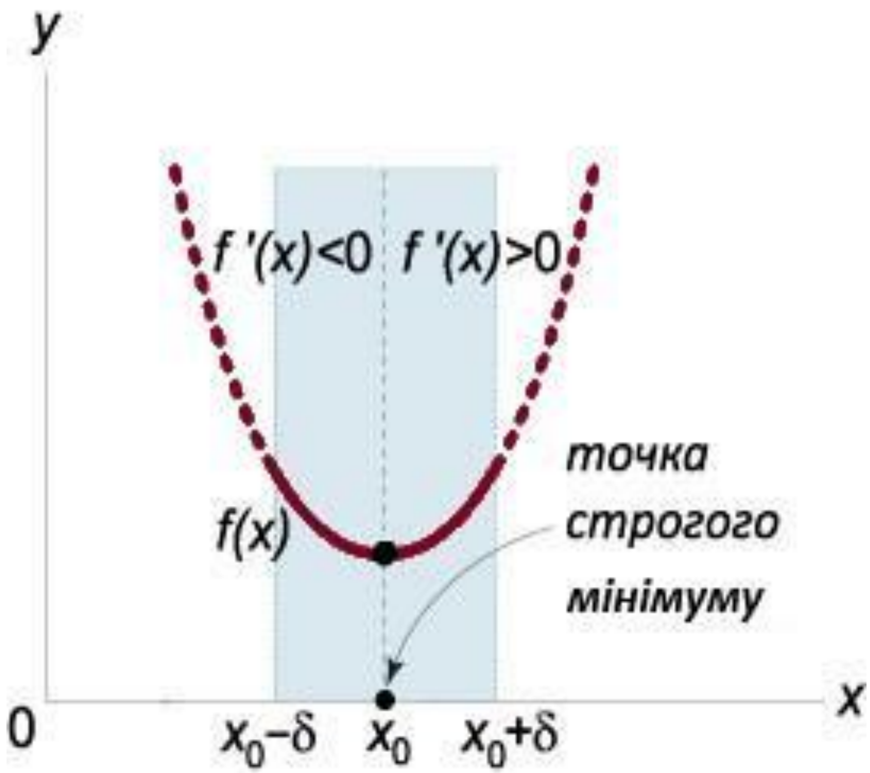


Рисунок 2. Точка строгого мінімуму

- Якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс при переході через точку x_0 (зліва направо), то точка x_0 – точка строгого мінімуму (рис. 2). Іншими словами, в цьому випадку існує число $\delta > 0$ таке, що

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0,$$

$$\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

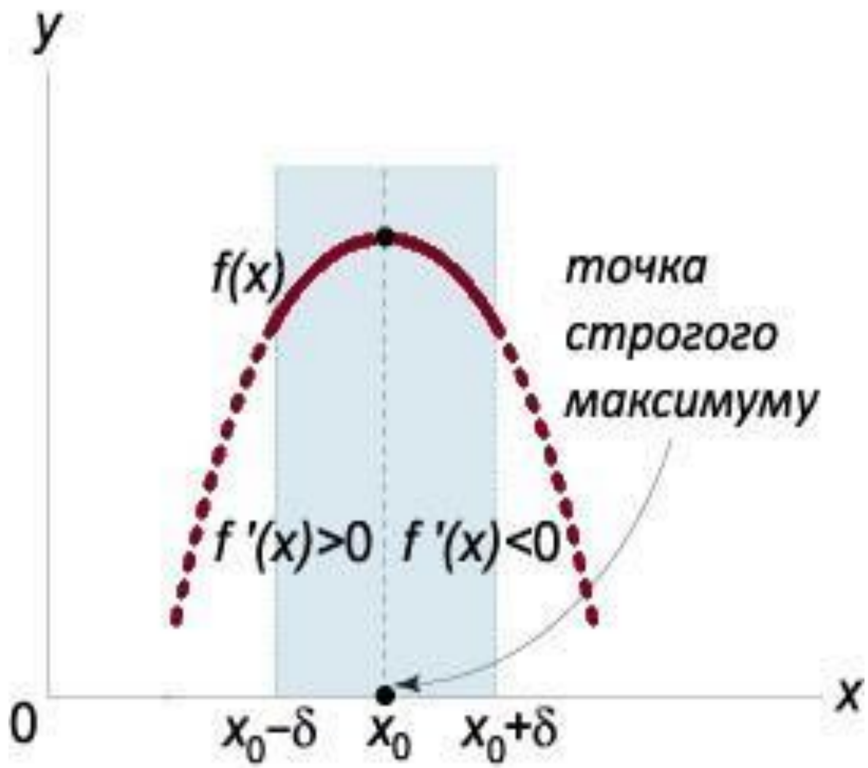


Рисунок 3. Точка строгого максимуму

- Якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус при переході через точку x_0, то точка x_0 – точка строгого максимуму (рис. 3). Іншими словами, в цьому випадку існує число $\delta > 0$ таке, що

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) => f'(x) > 0,$$

$$\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) => f'(x) < 0.$$

Доведення:

Розглянемо випадок мінімуму. Нехай похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з мінуса на плюс. Зліва від точки x_0 виконується умова:

$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) => f'(x) < 0.$

За теоремою Лагранжа різниця значень функції в точках x і x_0 записується як $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, де точка c належить інтервалу $(x_0 - \delta, x_0)$, в якому похідна від'ємна, тобто $f'(c) < 0$. Оскільки $x - x_0 < 0$, зліва від точки x_0, то, отже, $f(x) - f(x_0) > 0$ для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Таким же чином встановлюється, що $f(x) - f(x_0) > 0$ для всіх $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (зліва від точки x_0).

За означенням випливає, що точка x_0 – точка строгого мінімуму функції $f(x)$.

Аналогічно можна довести першу достатню умову для строгого максимуму функції. ■

Відмітимо, що в першій достатній умові не потрібно, щоб функція була диференційованою в точці x_0. Якщо в цій точці похідна дорівнює нескінченості або не існує (тобто точка x_0 – критична, но не стаціонарна), то перша достатня умова все одно можна використовувати для дослідження функції на максимум чи мінімум.

Друга достатня умова екстремуму

Нехай в точці x_0 перша похідна дорівнює нулю: $f(x_0) = 0$, тобто точка x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$. Нехай також в цій точці існує друга похідна $f''(x_0)$. Тоді:

- Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого мінімуму функції $f(x)$;
- Якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого максимуму функції $f(x)$.

Доведення:

В випадку строгого мінімуму $f''(x_0) > 0$. Тоді перша похідна являє собою зростаючу функцію в точці x_0. Отже, знайдеться число $\delta > 0$ таке, що

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) => f'(x) < f'(x_0),$$

$$\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) => f'(x) > f'(x_0).$$

Оскільки $f''(x_0) = 0$ (так як x_0 – стаціонарна точка), то, отже, в δ-околі зліва від точки x_0 перша похідна від’ємна, а справа – додатня, тобто перша похідна змінює знак з мінусу на плюс при переході через точку x_0. За першою достатньою ознакою екстремуму це означає, що x_0 – точка строгого мінімуму.

Аналогічно розглядається випадок максимуму. ■

Другу достатню ознаку екстремуму зручно використовувати, коли обчислення перших похідних в околі стаціонарної точки важке. С іншого боку, другу ознаку можна використовувати лише для стаціонарних точок (де перша похідна дорівнює нулю) – на відміну від першої ознаки, яка застосовується до будь-яких критичних точок.

Третя достатня умова екстремуму

Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 похідні до n-го порядку включно. Тоді, якщо $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0$ і $f^n(x_0) \neq 0$, то при парному n точка x_0 - :

- точкою строгого мінімуму, якщо $f^n(x_0) > 0$,
- точкою строгого максимуму, якщо $f^n(x_0) < 0$.

При непарному n екстремумі в точки x_0 не існує.

Зрозуміло, що при $n = 2$ в якості приватного випадку ми отримаємо розглянуту вище другу ознаку екстремуму. Щоб виключити такий перехід, в третій ознаці вважають, що $n > 2$.

Для доведення використовують ряд Тейлора та функцію signum, тому не будемо його розглядати.

Першу та другу достатні умови використовують в профільному курсі «Алгебри та початків аналізу», а третю не розглядають зовсім.

Для знаходження точок екстремуму функції $y = f(x)$, можна застосовувати такий алгоритм:

- Знайти область визначення функції.
- Знайти похідну функції.
- Прирівняти похідну до нуля і знайти критичні точки функції.
- Намалювати числову вісь, на ній відмітити критичні точки та визначити знаки похідних функцій в отриманих інтервала. Якщо знак похідної змінюється з плюса на мінус, то критична точка є точкою максимуму, а якщо з мінуса на плюс, то точкою мінімуму.

- Обчислити значення функції в точках екстремуму.

1.2. Логіко-дидактичний аналіз розділу «Лінійне програмування»

Математичне програмування (від англ. «Mathematical Programming») – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує оптимізаційні (екстремальні) задачі (задачі пошуку мінімуму або максимуму) і розробляє методи їх розв'язання. [15, с. 4]

Термін «математичне програмування» склався історично і на сьогодні вважається не досить вдалим, оскільки дезорієнтує фахівців схожістю з програмуванням на електронно-обчислювальних машинах. Як правило, синонімами до нього використовують терміни «теорія оптимізації», «оптимальне програмування» тощо.

Метою дослідження операцій є виявлення оптимального способу дій при розв'язанні задач керування системами.

Задачі пошуку оптимальних управлінських рішень, що математично зводяться до задач знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних є предметом вивчення математичного програмування.

Лінійне програмування (від англ. «Linear Programming») – це розділ більш загальної теорії математичного програмування, який досліджує моделі екстремальних задач з лінійною цільовою функцією і системою обмежень, яка складається з лінійних рівнянь та нерівностей. [19, с.3]

Загальна постановка задачі лінійного програмування, та один із підходів до її розв'язання (ідея розрішаючих множників або двоїстих оцінок) вперше наведено в роботі радянського вченого Канторовича Л. В. в 1939. В цій же роботі намічено один із методів розв'язання задачі — метод послідовного зменшення нев'язок [19, с.4].

Задача лінійного програмування — задача оптимізації з лінійною цільовою функцією та допустимою множиною обмеженою лінійними рівностями або нерівностями.

Цільовою функцією (або цільова квадратична форма, або функція плану, або критерієм оптимізації) називають функцію, для якої треба визначити оптимальне розв'язання або знайти екстремальне значення.

Або кажуть, що лінійне програмування або лінійна оптимізація – метод досягнення найліпшого виходу (такого як найбільший прибуток або найменша вартість) у математичній моделі, чиї вимоги подані через лінійні відношення. Лінійне програмування є особливим випадком математичного програмування (математичної оптимізації) [16, с. 10].

Словосполучення «математичне програмування» означає, з одного боку, що в результаті розв'язування задачі одержується оптимальне (екстремальне) значення цільової функції, але для виходу на цей розв'язок потрібно виконати ряд дій по певній програмі (алгоритму). З іншого боку, одержаний розв'язок з економічної точки зору часто інтерпретується як програма діяльності підприємства (фірми), при виконанні якої цільова функція, що відображає ефективність роботи по заданій програмі, досягає екстремуму.

Математичною моделлю задачі називають відображення оригіналу у вигляді функцій, рівнянь, нерівностей і т.п., в яку, за думкою І. Л. Акуліча, Я. В. Гончаренко, В. Г. Карманова, входить:

- План задачі (розв'язок, стратегія та ін.) – це сукупність невідомих величин, діючи на які, систему можна вдосконалити.
- Цільова функція, за допомогою якої ми можемо обрати найкращій варіант (екстремальне значення) із можливих.
- Умови (системи обмежень), які ми накладаємо на невідомі величини. Математичними обмеженнями виступають рівняння та нерівності, об'єднуючи які в сукупність, ми отримаємо область допустимих розв'язків.

Процес складання математичної моделі називається математичним моделюванням. Це найзагальніший і найрозповсюдженіший у науці метод дослідження реальних процесів, що відбуваються у природі та суспільстві.

Найбільш поширеним методом оптимізації використання обмежених ресурсів є лінійне програмування. Методи лінійного програмування (планування) ефективні для розв'язання задач з області дослідження операцій, як вважав Браян Банді. Виникнення основних ідей лінійного програмування датується часом Другої світової війни (1939-1945 рр.), коли необхідно було знайти оптимальну стратегію при ведені бойових дій. З того часу лінійне програмування починає широко використовуватись в багатьох галузях, зокрема в промисловості, торгівлі, управлінні. Цими методами починають вирішувати багато завдань, які пов'язані з ефективним використанням обмежених ресурсів. [16, с. 20]

Лінійне програмування - це один із найбільш простих способів вирішення завдань в Microsoft Excel. Він значно прискорює весь процес роботи і не вимагає особливих навичок.

Цей спосіб дозволяє розв'язувати завдання за допомогою двох способів – «вручну» та автоматично, завдяки вже готовим формулам. Для обох способів достатньо мати початковий рівень навичок користування програмою MS Excel, вміти задавати параметри, використовувати вже готові формули або ж вводити їх «вручну» (що вже вміють учні 10 класу).

1.3. Формування математичної компетентності засобами оптимізаційних задач

Однією з головних цілей навчання математики є підготовка учнів до повсякденного життя, а також розвиток їх особистості засобами математики. У зв'язку з практичною орієнтованістю сучасної освіти основним результатом діяльності освітнього закладу повинна стати не система знань, умінь та навичок сама по собі, а набір ключових компетентностей:

- цінністно-суттєва;
- загальнокультурна;
- навчально-пізнавальна;
- інформаційна;
- комунікативна;
- соціально-трудова;
- особистісна.

Компетенція – це готовність (здатність) учня використовувати вивчені знання, навчальні вміння та навички, а також способи діяльності в житті для розв’язання практичних та теоретичних задач. [10, с.138-143] Окрім ключових компетентностей, спільних для всіх предметних областей, виділяються і предметні компетенції – це специфічні здібності, необхідні для ефективного виконання конкретної дії в конкретній предметній області і які включають вузькоспеціальні знання, особливого роду предметні вміння, навички, способи мислення. Зокрема, математична компетенція - це здібність структурувати дані (ситуацію), виокремлювати математичні відношення, створювати математичну модель ситуації, аналізувати та перетворювати її, інтерпретувати отримані результати. Іншими словами, математична компетенція учня сприяє адекватному застосуванню математики для розв’язання, виникаючих в повсякденному житті, проблем.

Сукупність компетенцій, наявність знань та досвіду, необхідних для ефективної діяльності в заданій предметній області, називають компетентністю. Компетентність проявляється в тому випадку застосування знань та вмінь при розв’язуванні задач, відмінних від тих, в яких ці знання засвоювались.

В стандартах середньої (повної) загальної освіти (базовий та профільні рівні) сформовані вимоги до рівня підготовки випускників, які прийнято використовувати для характеристики рівня математичної компетентності. Аналіз, виникаючих в повсякденному житті ситуацій, для вирішення яких потрібні знання та вміння, сформовані при навчанні математики визначає перелік необхідних для цього предметних вмінь:

- вміння проводити обчислення, включаючи округлення та оцінку результатів дій, використовувати для обчислення відомі формули;
- вміння витягти та проінтерпретувати інформацію, яка представлена в різних формах (таблицях, діаграмах, схемах, графіках тощо);
- вміння застосовувати знання елементів статистики та ймовірності для характеристики нескладних реальних процесів та явищ;
- вміння обчислювати довжини, площі та об'єми реальних об'єктів при розв'язанні практичних задач [11, с.112-117 та 12, с. 35-39].

Для перевірки компетентності учнів на міжнародному рівні використовують два типи задач:

1) математичні (усі види чисто математичних задач);
2) практико-орієнтовні або контекстні (задачі, у яких контекст забезпечує істинні умови для використання математики при розв'язанні, надає вплив на розв'язання та його інтерпретацію, не виключено використання задач, у яких умова є гіпотетичною, якщо вона не сильно віддалена від реальності)[9, с. 97-99].

«Центр ваги» при розв'язанні контекстних задач полягає у області побудови самої моделі реальної ситуації. Саме побудова моделі потребує високого рівня математичної підготовки і є результатом навчання, який доцільно назвати загальнокультурним (загальноосвітнім). Важливо розрізняти ключові компетентності як результат освіти від інших результатів освіти, в частності, від традиційних знань, умінь та навичок. Принциповою різницею компетентностей є те, що вони як результат освіти формуються та проявляються в діяльності. Щоб впевнитись, що учень засвоїв той чи інший аспект компетентності на потрібному рівні, слід дати йому завдання, виконати яке можна лише здійснивши певну діяльність. Тобто компетентністний підхід – це підхід, який реалізує діяльнісний характер освіти [8, с. 123-143].

Прийнято три рівня математичної компетентності:

I. Рівень відтворення – це пряме застосування в знайомій ситуації відомих фактів, стандартних прийомів, розпізнавання математичних об’єктів та властивостей, виконання стандартних процедур, застосування відомих алгоритмів та технічних навичок, робота зі стандартними, знайомими виразами та формулами, безпосереднє виконання обчислень.

II. Рівень встановлення зв’язків – будується на репродуктивній діяльності за розв’язанням задач, які, хоч і не стандартні, але все ж знайомі учням або виходять за рамки відомого лише в дуже маленькій мірі. Зміст задачі підказує, матеріал якого розділу математики потрібно використовувати і які відомі методи застосовувати. Зазвичай в цих задачах присутні більше вимоги до інтерпретації розв’язання, вони пропонують встановити зв’язки між різними уявленнями ситуацій, описаних в задачі, або встановити зв’язки між даними в умові.

III. Рівень міркувань – будується як розвиток попереднього рівня. Для розв’язання задач цього рівня потрібна певна ситуація, міркування та творчість у виборі математичного інструментарію, інтегрування знань з різних розділів курсу математики, самостійна розробка алгоритму дій. Завдання, як правило, включають більше даних, від учнів часто вимагається знайти закономірність, провести узагальнення та пояснити чи обґрунтувати отримані результати. [7, с. 112-119].

Математична компетентність – це складна системна якість особистості, що передбачає володіння математичними знаннями, уміннями, навичками [9, с. 53-57]. Вона виявляється в готовності та здатності використовувати математичні знання для ефективного розв’язання задач, які можна розв’язати математичними методами.

Математична компетентність, як інтегроване утворення особистості, на думку М. С. Головань, має таку сукупність структурних компонентів:

- мотиваційний;
- когнітивний;
- діяльнісний;
- ціннісно-рефлексивний;
- емоційно-вольовий [9, с. 53-57].

Для задач оптимізації мотиваційний компонент – це їх прикладна спрямованість, тобто набуття учнями знань, які будуть необхідні їм у майбутньому житті, у їх здобутій майбутній професії.

Когнітивний компонент задач оптимізації полягає у вивченні теоретичних та практичних знань з тем: «Екстремуми функції», «Дослідження функції на екстремум», «Екстремуми функції. Розв’язування практичних задач».

Діяльнісним компонентом виступає математичне моделювання задач оптимізації. Воно полягає у необхідності учням навчитись підбирати до задач такі складові компоненти як цільова функція та система обмежень, які повинні відображати її умови і вимоги.

Ціннісно-рефлексивний компонент передбачає прагнення учнів працювати над собою, над розв’язуванням задач. Вони повинні навчитись оцінювати результат своєї роботи зі сторони та аналізувати його.

Емоційно-вольовий компонент полягає у цілеспрямованості учнів у процесі роботи, прояві зусиль, наполегливості під час розв’язування задач оптимізації. Виховування в учнів певної поведінки у разі невдачі у процесі розв’язання математичних задач також є важливим компонентом.

Висновки до розділу 1

Входження української освіти в європейський освітній простір потребує реформування всіх її ланок, насамперед загальної середньої школи. Нові підходи до організації навчання в старшій школі закладено в Національній доктрині розвитку освіти (2002), Законі України «Про загальну середню освіту» [1], Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа) та Концепції профільного навчання в старшій школі, у якій ідея профільності старшої школи була теоретично обґрунтована групою науковців Інституту педагогіки АПН України [2].

У названих документах закладено нові підходи до організації освіти в старшій школі, Вона має функціонувати як профільна. Це створюватиме сприятливі умови для врахування індивідуальних особливостей, інтересів і потреб учнів. для формування у школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності [3, с. 15-17]. Профільна школа найповніше реалізує принцип особистісно орієнтованого навчання, що значно розширює можливості учня у виборі власної освітньої траєкторії.

Мета профільного навчання – забезпечити рівний доступ учнівської молоді до здобуття загальноосвітньої профільної та початкової допрофесійної підготовки, неперервної освіти протягом усього життя, виховання особистості, здатної до самореалізації, професійного зростання й мобільності в умовах реформування сучасного суспільства [4, с. 4-5]. Профільне навчання спрямоване на набуття старшокласниками навичок самостійної науково-практичної, дослідницько - пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти.

Аналіз діючої навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів на профільному рівні, а також аналіз шкільних підручників та навчальних посібників дає підстави, щоб зробити наступний висновок: формування в учнів умінь математичного моделювання, в процесі розв'язування задач розроблено на низькому рівні, оскільки в методичній літературі недостатньо висвітлено це питання.

З метою ефективного формування в старшокласників умінь математичного моделювання виникає потреба у додаткових заняттях. Одним із видів таких занять є елективний курс. Елективні курси – це обов'язкові курси за вибором учнів, що входять до складу профілю навчання у старшій школі та реалізуються за рахунок варіативної складової типового навчального плану. Елективні курси профільного доповнення поглиблюють та розширюють межі профільних предметів, розвивають і доповнюють їх зміст.

Для того щоб побудувати власну програму елективного курсу нами проаналізовано структуру математичної та інформаційно-цифрової компетентностей з метою вивчення оптимального впливу засобів (систем комп'ютерної математики) на формування математичної компетентності.

На думку Головань М.С., математична компетентність, як інтегративне утворення особистості, має такі структурні компоненти: мотиваційний; когнітивний; діяльнісний; ціннісно-рефлексивний; емоційно-вольовий.

Згідно теорії В.В. Краєвського, у складі інформаційно-цифрової компетентності можна виділити такі структурні компоненти: мотиваційноцільовий; когнітивний; операційно-діяльнісний; рефлексивний. Всі ці структурні компоненти існують не ізольовано один від одного, а тісно взаємопов'язані між собою. Також у першому розділі було розглянуто яким саме чином задачі дослідження операцій формують компоненти математичної та інформаційно-цифрової компетентностей.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В ЕЛЕКТИВНОМУ КУРСІ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

2.1. Методичні особливості елективного курсу «Розв’язування задач дослідження операцій» в профільній школі

Наш факультатив передбачає за мету саме формування в учнів навичок побудови математичної моделі до задач оптимізації. Саме цій темі – «Розв’язування задач дослідження операцій» - в розділі «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» приділяється недостатня кількість уваги, а саме кількість годин на цю тему мізерна.

Моделювання дуже корисне для всебічного розвитку дитини. Чому? Все просто - учень вчиться критично мислити, аналізувати та розв’язувати проблеми. Вчить життю, якщо можна так сказати. Також факультатив передбачає розвиток комунікації серед учнів. Сьогодення, нажаль, мінімізує комунікацію серед дітей під час навчання. Саме тому цьому ми приділили особливу увагу. Розвиток комунікаційних навичок учнів передбачаємо шляхом різних видів робіт, а саме:

- робота в групах - передбачає виховання в учнів відповідальності, оскільки кожен повинен попрацювати, щоб привнести свій вклад у результат всієї групи; вчить учнів висловлювати та прислуховуватись до думок один одного, підтримувати один одного задля отримання спільного результату роботи;
- проблемний метод, який передбачає виникнення дискусій серед учнів;
- евристичні бесіди тощо [13, с. 153-167; 14, с.55-57].

Завдяки їм учень розвивається як особистість.

Нами була розроблена програма елективного курсу для учнів 10 класу за допомогою використання програмного забезпечення Microsoft Office Excel як засобу формування математичних компетентностей учнів профільної школи – «Розв’язування задач дослідження операцій».

Основна мета елективного курсу - формування в учнів практичного застосування математичного апарату при розв’язуванні задач, а також використання для цього програмного забезпечення MS Excel.

Програма передбачає таку форму проведення як групова робота учнів під керівництвом вчителя (можливий як online-курс, так і offline-курс).

Елективний курс розрахований на рік та включає в себе 70 годин.

Програма містить такі п'ять тем:

Тема 1. Загальна постановка задачі дослідження операцій.

Тема 2. Методи дослідження операцій.

Тема 3. Типові класи задач дослідження операцій.

Тема 4. Розв’язування класичних задач дослідження операцій.

Тема 5. Розв’язування задач дослідження операцій засобами табличного процесора Excel.

Правила, яких слід дотримуватись, розробляючи модель математичного програмування:

1) Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для використання.
2) Множина змінних повинна бути непорожньою.
3) Форми запису задачі лінійного програмування.
4) У моделі використовувати все істотне, виключаючи другорядне.
5) Модель має адекватно описувати процеси.

Загальна постановка задачі дослідження операцій

Дослідження операцій - наукова дисципліна, що займається розробкою та практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різними організаційними системами.

Управління будь-якою системою реалізується як процес, що підпорядковується певним закономірностям. Їхнє знання допомагає визначити умови, необхідні та достатні для здійснення даного процесу. Для цього всі параметри, що характеризують процес та зовнішні умови, мають бути кількісно визначені, виміряні. Отже, мета дослідження операцій – кількісне обґрунтування прийнятих рішень щодо організації управління.

Прикладами завдань дослідження операцій, що відбивають його специфіку, можуть бути такі завдання:

Завдання 1. Для забезпечення високої якості виробів, що випускаються на заводі, використовується система вибіркового контролю. Потрібно вибрати такі форми його організації – наприклад, призначити розміри контрольних партій, вказати послідовність контрольних операцій, визначити правила відбракування, щоб забезпечити необхідну якість при мінімальних витратах.

Завдання 2. Задля реалізації певної партії сезонних товарів створюється мережу тимчасових торгових точок. Потрібно вибрати параметри мережі – щоб забезпечити максимальну економічну ефективність розпродажу.

Завдання 3. До заданого терміну необхідно провести масове медичне обстеження групи з метою виявлення певних захворювань. На обстеження виділено кошти, обладнання, персонал. Потрібно розробити такий план обстеження – встановити кількість медпунктів, їх розміщення, вид та кількість аналізів, щоб виявити якомога більший відсоток із хворих. [15]

Можна розглянути інші завдання.

Наведені завдання відносяться до різних областей практики, але в них є спільні риси: у кожному випадку йдеться про якийсь керований захід (операцію), який має певну мету. У задачі 1 - це організація вибіркового контролю з метою забезпечити якість продукції; у завданні 2 – організація тимчасових торгових точок з метою проведення сезонного розпродажу; у завданні 3 – масове медичне обстеження з метою визначення відсотка хворих. У кожному завданні задані деякі умови проведення цього заходу, в рамках яких слід ухвалити рішення – таке, щоб захід приніс певну вигоду. Умовами проведення операції в кожному завданні виявляються кошти, які ми маємо, час, обладнання, технології, а рішення в задачі 1 полягає у виборі форми контролю - розміру контрольних партій, правил відбраковування; у задачі 2 – у виборі числа точок розміщення, кількості персоналу: у задачі 3 – у виборі числа медпунктів, виду та кількості аналізів.

Задачі дослідження операцій (об'єкт математичних методів) – це, як правило, задачі на знаходження екстремальних значень деяких функціональних залежностей. Кожна операція проводиться для досягнення певної мети.

Незважаючи на різноманіття завдань дослідження операцій при їх вирішенні можна виділити деяку загальну послідовність етапів, якими проходить будь-яке операційне дослідження. Це:

1. Постановка задачі. Визначити:
   - Цілі функціонування досліджуваного об'єкта та їх вагомість;
   - Засоби для досягнення поставленої цілі;
   - Критерії ефективності досягнення поставленої цілі.
2. Побудова змістовної моделі аналізованого процесу.
3. Побудова математичної моделі, тобто переклад сконструйованої змістовної моделі у форму, у якій її вивчення можна використовувати математичний апарат.

Модель операції – це досить точне опис операцій з допомогою математичного апарату (різного роду функцій. рівнянь, систем рівнянь і нерівностей тощо).

Основними компонентами математичної моделі дослідження операцій є:

1) Змінні управління (керовані), умовно керовані та некеровані змінні;
2) Обмеження;
3) Цільові функції [14, с.25-30].

Змінні, значення яких можна змінювати у процесі управління системою чи процесом під час знаходження певного вирішення проблемної ситуації називають змінними управління (керованими змінними). Зазвичай це ті змінні, які дослідник може змінювати задля знаходження найкращого (оптимального) розв’язку задачі. Вони обумовлюють управлінські дії при виборі того чи іншого варіанту рішення з множини альтернативних рішень.

Також шукач повинен врахувати значення некерованих змінних на об’єкт дослідження, але змінювати їх самостійно він не може. Так, наприклад, під час знаходження оптимальної структури посівних площ ми не можемо змінювати погодні фактори, що мають певний вплив на врожайність. Некеровані змінні називають параметрами задачі.

Потрібно наголосити, що залежно від цілі розв’язування задачі керовані змінні можуть змінювати свій статус на «некеровані», і навпаки.

Обмеження математичної моделі задачі дослідження операцій має на увазі зв’язок керованих і некерованих змінних. Зазвичай це й зв’язок виражають за допомогою системи рівнянь та (або) нерівностей, які сукупністю дають нам область зміни керованих змінних, тобто область припустимих рішень. Також може бути випадок, коли область припустимих рішень виявилась нульовою. Це дає змогу стверджувати, що неможливе досягнення поставленої мети при встановлених співвідношеннях керованих та некерованих змінних.

Розглядають ще критерій оптимальності – показник діяльності досліджуваного об’єкта, що має конкретний економічний або фізичний зміст. Значення цього критерію допомагає обрати рішення проблемної ситуації, яке максимально задовольняє поставлену мету.

Цільовою функцією (або цільова квадратична форма, або функція плану, або критерієм оптимізації) називають функцію, для якої треба визначити оптимальне розв’язання або знайти екстремальне значення.

Тобто цільова функція – це математична форма критерію оптимальності, яка пов'язує між собою мету розв'язування задачі дослідження операцій, керовані та умовно керовані змінні моделі.

4. Вирішення завдань, складених на базі побудованої математичної моделі.

Розглянемо у математичному вигляді постановку задачі дослідження операцій:

Деякі з кількісних характеристик бувають незмінними, тобто сталими для певної операції чи для певних умов. Нехай це будуть $c_k(k = \overline{1,l})$ – параметри задачі. Інші величини – це змінні, незалежні, залежні, детерміновані чи випадкові. Поділимо незалежні змінні на дві групи:

1) Керовані (змінні) - $x_j(j = \overline{1,n})$;
2) Некеровані (значення яких визначаються комплексом зовнішніх умов) - $y_r(r = \overline{1,s})$.

Встановимо функціональну залежність між деякою величиною $f(X)$, якою вимірюють ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами операції:

$$f(X) = F(x_j, y_r, c_k) \quad (1)$$

Функція (1) є критерієм оптимальності або цільовою функцією, оскільки її значення є мірою ефективності проведення операції після досягнення певної мети.

Завданням є вибір таких значень керованих змінних x_j, які б надавали критерію оптимальності екстремального значення, тобто:

$$f^*(X) = \underset{x_j}{extrem}\, F\left(x_j, y_r, c_k\right) \quad (2)$$

Але вибір керованих змінних x_j завжди обмежений зовнішніми умовами для проведення операції – енергетичними, матеріальними, людськими, грошовими ресурсами тощо, а також параметрами самої операції. Ці обмеження можна записати за допомогою математичних рівнянь та (або) нерівностей:

$$g_i\left(x_j, y_r, c_k\right)\{\leq = \geq\}b_i, i = \overline{1,m} \quad (3)$$

Залежність (3) – це система обмежень або система умов задачі, де $g_i\left(x_j, y_r, c_k\right)$ та b_i – відповідно функція витрати та величини i-го ресурсу.

Вирази (1) і (3) є математичною моделлю операції.

Таким чином, задача зводиться до пошуку

$$\underset{x_j}{extrem}\, F(x_j, y_r, c_k) \quad (4)$$

за умови

$$g_i(x_j, y_r, c_k)\{\leq = \geq\}b_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, r = \overline{1,s}, k = \overline{1,l} \quad (5)$$

Проілюструємо побудову математичної моделі проблемної операції на конкретному прикладі.

Задача. Фермер вирощує два види зернових – А і В. Для цього він використовує три види підкормки. Витрати підкормки кожного виду на один вид зернових за видами наведені в табл. 1. У ній також зазначені запаси підкормки та прибуток від реалізації 1 кг зернових. Визначити, скільки зернових кожного виду потрібно підкормити фермерові, щоб отримати максимальний прибуток. Складіть математичну модель операції [15].

Розв’язання:

Кількість зернових виду А позначимо як x_1, кількість зернових виду В – як x_2.

Отже, визначено вектор керованих змінних $X = (x_1;\ x_2)$.

Таблиця 1

Вид підкормки	**Витрати підкормки для**		**Запаси підкормки**
	виду зернових А	виду зернових В	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації 1 кг зернових	16	6	

Складемо функцію прибутку: $F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow max$. Ця функція виражає критерій оптимальності задачі у математичній форма, тобто є цільовою функцією.

Складемо вектор некерованих змінних $B = (b_1, b_2, b_3) = (180; 240; 426)$.

За умовою задачі прикормка I виду витрачається в кількості $2x_1 + 3x_2$, що не повинно перевищувати запаси цієї підкормки, тобто 180. Маємо нерівність:

$2x_1 + 3x_2 \leq 180.$

Складаємо аналогічні нерівності для II та II виду прикормок маємо відповідно:

$4x_1 + x_2 \leq 240,$

$6x_1 + 7x_2 \leq 426.$

У результаті маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426. \end{cases}$$

Додамо також, що кількість зернових культур не може бути від’ємним числом, тобто $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$. Об'єднаємо всі нерівності та одержимо систему обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Цільова функція та система обмежень разом утворюють математичну модель операції. Тобто має наступний вигляд:

$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Методи дослідження операцій

Розв'язування задач дослідження операцій передбачає використання різноманітного математичного апарату (рис. 4)

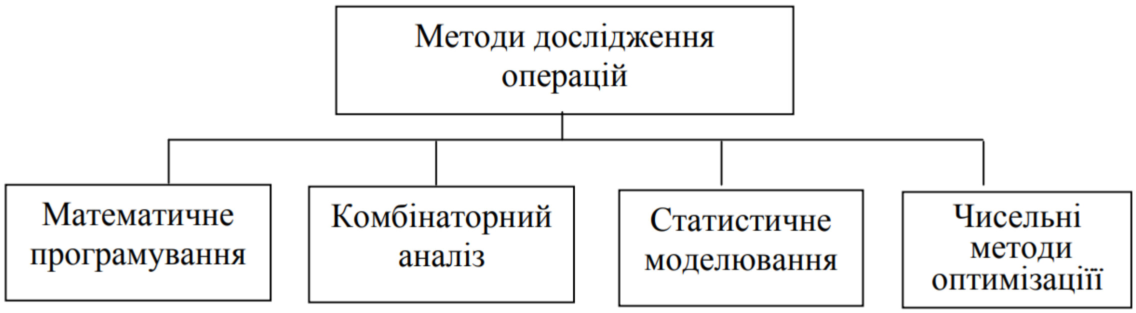


Рисунок 4 – методи розв'язування задач дослідження операцій

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує оптимізаційні (екстремальні) задач та розробляє методи їх розв'язування. Математичне програмування ми можемо розглядати як певну сукупність самостійних дисциплін, що вивчають і розробляють методи розв’язання певних класів задач, залежно від вигляду функцій f і g_i (рис. 5).

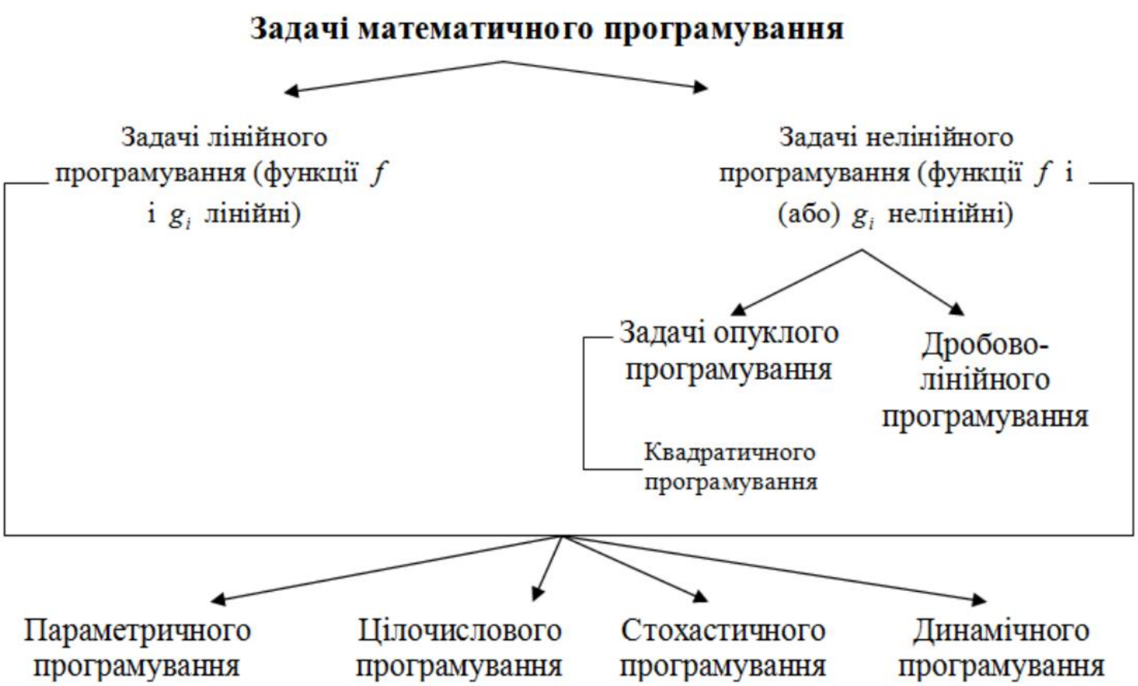


Рисунок 5 – Класифікація задач математичного програмування

Задачі опуклого програмування – це задачі, в яких необхідно знайти максимум опуклої чи мінімум увігнутої функції.

Задачі квадратичного програмування – задачі, розв'язком яких є максимум чи мінімум квадратичної функції за умов, що її змінні задовольняють деяку систему лінійних обмежень (нерівностей чи рівнянь).

Задачі дробово-лінійного програмування – задачі, в яких цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій.

Задачі параметричного програмування – задачі, в яких цільова функція або коефіцієнти системи обмежень залежать від деяких параметрів.

Задачі стохастичного програмування – задачі, в яких цільова функція або система обмежень містять випадкові величини.

Задачі динамічного програмування – задачі, процес розв’язання яких є багатоетапним [15].

Комбінаторний аналіз – інструмент розв'язання задач вибору і розміщення елементів деякої, як правило, скінченої множини відповідно до заданих правил. Ідея перебору всіх допустимих рішень – це основа комбінаторних методів дослідження операцій. Метод гілок та метод меж – найбільш відомі комбінаторні методи.

Статистичне моделювання передбачає, що внутрішні взаємодії ймовірнісних систем невідомі, та досліджує процеси поведінки цих систем. Змістом задачі статистичного моделювання є відтворення досліджуваного фізичного процесу за допомогою ймовірнісної математичної моделі та обчислення характеристик відбувається на основі цього процесу.

Методи статистичного моделювання в дослідженні операцій використовується при розв'язуванні задач управління запасами, аналізу систем масового обслуговування.

Для розв’язування задач оптимізації, які мають точні або наближені обчислення значення функції мети, використовують чисельні методи оптимізації в дослідженні операцій. Результатом розв'язання буде наближення із заданою точністю, а саме наближення до точки екстремуму функції, якщо така точка не єдина, то до множини точок екстремуму.

Типові класи задач дослідження операцій

Множину задач на дослідження операцій за змістом та постановкою умови ми можемо розбити на ряд класі (звісно це не повний перелік класів на рис. 6). Через «щоденне» розширення уявлення про досліджувану функцію задачі відповідних класів «виникають» одна з одної.

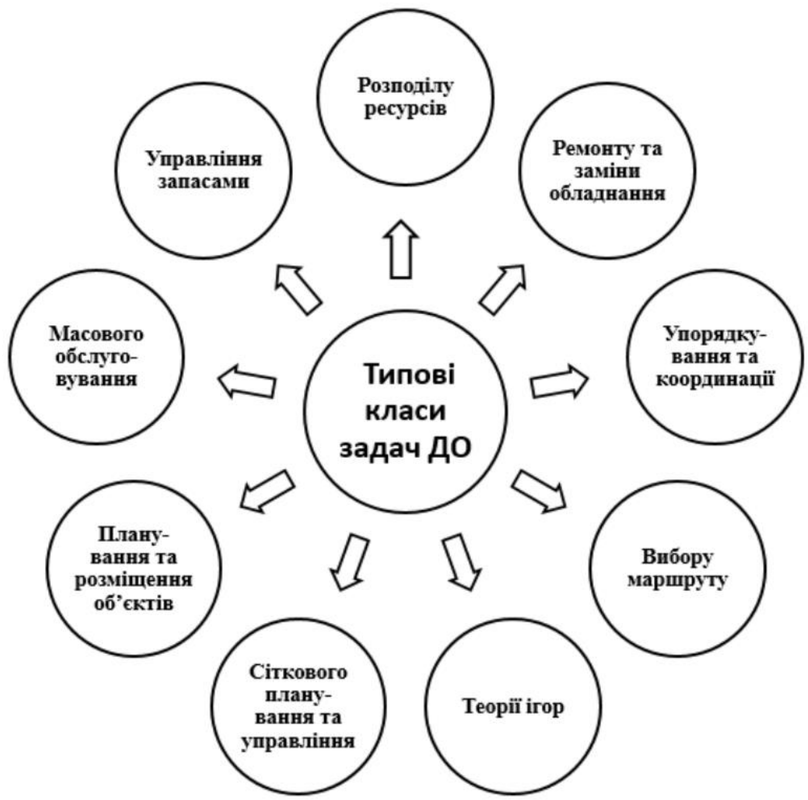


Рисунок 6 – Типові класи задач дослідження операцій (ДО)

Стисла характеристика деяких із перелічених класів задач.

Одним із найпоширеніших та добре вивчених класів задач дослідження операцій є задачі управління запасами. Їх виникнення обумовлене необхідністю визначати оптимальну кількість запасів. Використовується закономірність – збільшення запасів приводить до збільшення витрат на їх зберігання, але витрати зменшуються, якщо можлива недостача запасів.

Задачі управління запасами формулюються так:

Існують певні запаси, витрати на зберігання яких є функцією їх величини. Відомі також витрати на доставляння ресурсів. Необхідно визначити оптимальний розмір поставляння, частоту та терміни надходження ресурсів, щоб сумарні витрати були мінімальними. Критерієм оптимальності є сума витрат на зберігання та поставлення ресурсів.

Також існує певна класифікація задач управління запасами:

- за кількістю періодів управління (поповнення запасів) – на одноперіодні та багатоперіодні;
- за характером поповнення запасів – із неперервною системою поповнення запасів (миттєве) і періодичне (наприклад, щотижня або щомісяця);
- за урахуванням попиту – на детерміновані та ймовірнісні (статичні);
- за кількістю типових ресурсів – на однопродуктові і багатопродуктові;
- за видом цільової функції – на задачі з пропорційними та непропорційними витратами [18].

Задачі розподілу ресурсів з’являються тоді, коли існує певний набір робіт (операцій), які необхідно виконати, а наявних ресурсів не вистачає для виконання якнайкраще кожної з робіт.

Задачі розподілу ресурсів формулюються так:

Можуть бути заданими як роботи, так і ресурси або лише роботи. Необхідно відшукати такий розподіл ресурсів, при якому максимізується спільний прибуток або результат, чи мінімізуються витрати.

Залежно від умови задачі розподілу ресурсів поділяють на три групи:

- Відомі і роботи, і ресурси. Необхідно розподілити ресурси між роботами таким чином, щоб максимізувати певну міру ефективності (прибуток) або мінімізувати очікувані витрати (витрати виробництва).

- Відома лише кількість ресурсів. Визначити, який перелік робіт можна виконати з урахуванням цих ресурсів, щоб забезпечити максимум певної міри ефективності.
- Відомий лише перелік робіт. Визначити, які ресурси необхідні для того, щоб мінімізувати сумарні витрати виробництва.

Ситуації, коли обладнання зношується, застаріває і з часом потребує заміни, викликає виникання задач ремонту та заміни обладнання. Зазвичай зношене обладнання або ремонтують, або повністю замінюють.

Але існує і таке обладнання, в якому деталі можуть повністю вийти з ладу і поновлюються (прикладом такого обладнання є електронні лампи). В таких ситуаціях визначають терміни профілактичного контролю, за допомогою яких мінімізують сумарні витрати на проведення профілактики та втрати від простою обладнання внаслідок тимчасово непрацюючого обладнання і заміни деталей.

Задачі ремонту та заміни обладнання класифікують:

- за характером зміни обладнання:
  - задача зміни обладнання довгострокового використання;
  - задача зміни обладнання з метою попередження відмов;
  - задачі вибору оптимального плану попереджувального ремонту та профілактичного обслуговування;
- за характером урахування витрат на обладнання – на дискретні та неперервні;
- за виходом із ладу обладнання – на детерміновані та випадкові;
- за стратегією зміни обладнання;
- за часом урахування витрат на обладнання – із зведенням та без зведення витрат більш пізніх років до розрахункового.

Задачі масового обслуговування пов’язані з повсякденним життям кожної людини, вони розглядають питання утворення та функціонування черг. Наприклад, черги у супермаркеті, на зупинці, черги на отримання паспорта громадянина України, черги у лікарні тощо. Виникнення черг викликано неможливістю управляти випадковим потоком вимог (клієнтів на обслуговування). Якщо великою є кількість пристроїв обслуговування, то черги виникають нечасто, з іншого боку, при цьому неминучі довготривалі простої обладнання. Але якщо кількість пристроїв обслуговування – недостатня, то створюються черги й можливі великі втрати майбутніх звернень через очікування.

Одним із можливих формулювань задачі масового обслуговування є:

Визначити, яка кількість пристроїв масового обслуговування необхідна, щоб мінімізувати сумарні втрати, що очікуються від несвоєчасного обслуговування та простою обладнання.

Поділ задач масового обслуговування відбувається залежно від мети дослідження:

- задачі аналізу – припускають оцінювання ефективності функціонування систем при незмінних, наперед відомих вихідних характеристиках;
- задачі синтезу (оптимізації) – спрямовані на пошук оптимальних параметрів і характеристик функціонування.

Задачі упорядкування та координації мають зв'язок з визначенням оптимальної послідовності оброблення виробів, масивів даних (інформації) з використанням різних приладів обслуговування або за певного способу обслуговування, що має декілька обов'язкових етапів. Також ці задачі називають задачами календарного планування або задачами складання розкладу.

Задачі планування та розміщення дають змогу визначити оптимальну кількість і місця розташування нових об'єктів, враховуючи їх взаємодію з існуючими об'єктами та між собою.

Прикладом такої задачі може бути:

Місто побудувало новий мікрорайон, відоме розміщення житлових будинків. Визначте кількість продуктових магазинів та розташуйте їх таким чином, щоб населення могло одержувати необхідні послуги із заданим ступенем їх доступності одночасно із забезпеченням вимоги прибутковості торгових точок.

Задачі вибору маршруту виникають при дослідженні транспортних систем та систем зв'язку.

До таких задач відносять задачу вибору оптимального (найкоротшого) шляху, задачу про максимальний потік тощо.

Задачі сіткового планування та управління використовуються під час розроблення складних та високовартісних проєктів. Вони розглядають певне співвідношення між терміном закінчення великого комплексу операцій і моментом початку всіх операцій комплексу.

Постановки задач сіткового планування та управління можуть бути такими:

- задана тривалість усього комплексу робіт; визначити терміни початку кожної операції, за яких мінімізується один з таких критеріїв:
  - загальні витрати на виконання всього комплексу робіт;
  - середньоквадратичний показник нерівномірності ресурсів, що використовуються;
  - імовірність невиконання комплексу робіт у календарний термін;
  - середньоквадратичне відхилення наявних ресурсів від необхідних;
- відомі загальний перелік комплексу робіт та наявні ресурси для їх виконання; визначити терміни початку кожної операції, за яких мінімізується тривалість виконання всього комплексу робіт.

Задачі теорії ігор досліджують виникаючі конфліктні ситуації, тобто ситуації, в яких стикаються інтереси двох і більше сторін, які прагнуть до протилежних цілей. Розв'язанням таких задач є визначення стратегій (оптимальних) поведінки кожного зі сторін, щоб мінімізувати програш, а не ті, які б призвели до виграшу.

Задачі теорії ігор за різними ознаками поділяють на:

- по можливості гравців об’єднуватись у групи з відповідною координацією власних дій щодо інтересів усієї групи: кооперативні, некооперативні, гібридні;
- за рівністю стратегій: симетричні (якщо гравці поміняються місцями, їх виграші за одні й ті самі ходи не зміняться) та асиметричні;
- за наявністю можливості змінювати ресурси або фонд гри: ігри з нульовою та ненульовою сумами; прикладом гри з нульовою сумою є гра у покер, де один виграє всі ставки інших;
- за наявністю інформації про ходи суперника: паралельні та послідовні ігри; у паралельних іграх гравці ходять одночасно або вони не мають інформації про вибір суперника, поки він його не зробить; – за повнотою інформації: ігри з повною та ігри з неповною інформацією; у грі з повною інформацією для кожного гравця відомі всі ходи до поточного моменту і можливі стратегії супротивника;
- за терміном тривалості гри: ігри зі скінченною та ігри з нескінченною кількістю кроків; ігри реального світу, як правило, скінченні, дослідження ігор з нескінченною кількістю кроків – поки що «забавка» математиків;
- за типом компонентів гри: дискретні та неперервні; для дискретних ігор характерна скінченна кількість гравців, стратегій, результатів тощо; якщо значення хоча б одного з компонентів належить множині дійсних чисел, то це диференціальні числа.

Комбіновані задачі – це ті задачі, які містять декілька класів задач одночасно.

Розв’язування класичних задач дослідження операцій

Математичне програмування, як напрямок, сформувало певний набір класичних постановок задач. Математичні моделі цих задач широко використовуються на практиці у різних сферах людської діяльності. Класичними задачами математичного програмування є транспортна задача, задача про призначення, задача про розкрій матеріалів, задача оптимального розподілу ресурсів (капіталовкладень) та інші. Більш детально розглянемо перші три з них.

Транспортна задача

Математична постановка транспортної задачі.

Нехай із деяких m пунктів відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ (постачальників) потрібно перевезти вантаж у n пунктів призначення $B_1, B_2, \dots, B_n$ (споживачам). Запаси пунктів відправлення й потреби у вантажу пунктів призначення та витрати на доставку одиниці вантажу від постачальника до споживача відомі. Необхідно знайти план перевезень, щоб весь вантаж був вивезен, були задоволені всі споживачі і витрати на перевезення були мінімальними.

Позначимо:

- a_i – запаси вантажу в i-тому пункті відправлення ($i = \overline{1,m}$);
- b_i – потреба у вантажі в j-тому пункті призначення ($j = \overline{1,n}$);
- X_{ij} – кількість одиниць вантажу, який перевезли з i-того пункту відправлення до j-того пункту призначення;
- c_{ij} – тарифи перевезення одиниці вантажу від i-того пункту відправлення до j-того пункту призначення.

Постановка задачі у математичному сенсі зводиться до знаходження мінімального значення функції:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min \quad (6)$$

Накладемо умови:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j = \overline{1,n}) \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \; (i = \overline{1,m}) \quad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}) \;\; (9)$$

Оскільки виконання умови $x_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n})$ задовільняє систему лінійних рівнянь (7) і (8) й умови невід'ємності (9), то виконується доставка необхідної кількості вантажу в кожний пункт призначення, вивезення вантажу з усіх пунктів відправлення, при цьому зворотні перевезення не допускаються.

Довільний невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (7) і (8), що визначається матрицею:

$$X = \left(x_{ij}\right) \; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}) \;\; (10),$$

називається планом транспортної задачі.

План:

$$X^{*} = \left(x_{ij}^{*}\right) \; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}) \;\; (11),$$

при якому функція (6) є мінімальним значенням, називається отпимальним планом транспортної задачі.

Покажемо як оформляють вхідні дані транспортної задачі у вигляді таблиці (табл. 2).

Правий верхній кут клітинок $A_i B_j$ – вартість перевезення одиниці вантажу з i-того пункту відправлення до j-того пункту призначення. Посередені кожної клітинки $A_i B_j$ вносять кількість перевезеного вантажу з i-того пункту відправлення до j-того пункту призначення.

Таблиця 2

Пункт відправлення	**Пункт призначення**					**Запас**
	B_1	B_2	B_3	…	B_n	
A_1	C_{11}/X_{11}	C_{12}/X_{12}	C_{13}/X_{13}	…	C_{1n}/X_{1n}	a_1
A_2	C_{21}/X_{21}	C_{22}/X_{22}	C_{23}/X_{23}	…	C_{2n}/X_{2n}	a_2
A_3	C_{31}/X_{31}	C_{32}/X_{32}	C_{33}/X_{33}	…	C_{3n}/X_{3n}	a_3
…	…	…	…	…	…	…

A_m	C_{m1}/X_{m1}	C_{m2}/X_{m2}	C_{m3}/X_{m3}	…	C_{mn}/X_{mn}	a_m
Потреба	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Етапами розв’язання транспортної задачі є:

- Визначаємо опорний план (допустиме базисне рішення) транспортної задачі.
- Виконуємо перевірку опорного плану на оптимальність.
- Виконуємо перехід від одного опорного плану до іншого (або завершуємо розв’язання задачі оптимізації, якщо ми знайшли оптимальний план).

Знаходження оптимального плану транспортної задачі має багато шляхів розв’язання, але найбільш широко використовуються на практиці саме такі методи як метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Розглянемо один із цих методів, а саме метод північно-західного кута.

Розв’язування транспортної задачі методом північно-західного кута.

Метод полягає в послідовному переборі рядків і стовпців транспортної таблиці, починаючи з лівого стовпця і верхнього рядка, і виписуванні максимально можливих відвантажень у відповідні осередки таблиці так, щоб не були перевищені заявлені завдання можливості постачальника або потреби споживача. На ціни доставки в цьому методі не звертають уваги, оскільки передбачається подальша оптимізація відвантажень.

Тобто заповнення таблиці, як було зазначено вище, починаємо з лівого верхнього (північно – західного) кута. У клітинку записують менше з двох чисел A_1 та B_1. Далі ми переходимо до заповнення наступної клітинки в цьому самому рядку або у стовпчику, і т.д. Заповнення таблиці закінчуємо у правій нижній клітинці. В такому випадку значення поставок будуть розміщуватись по діагоналі нашої таблиці.

Розглянемо конкретний приклад транспортної задачі, нехай її умови будуть подані у табл.3.

Таблиця 3

Постачальник	**Споживач**				**Запаси вантажу**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	4	2	5	150
A_2	5	3	1	2	60
A_3	2	1	4	2	90
Потреба	110	50	60	80	

Намалюємо таблицю 4 – шаблон для можливого плану перевезень продукції, не враховуючи вартості перевезень.

Таблиця 4

Постачальник	**Запас**	**Споживач**			
		$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
		Потреба			
		$\boldsymbol{b_1 = 110}$	$\boldsymbol{b_2 = 50}$	$\boldsymbol{b_3 = 60}$	$\boldsymbol{b_4 = 80}$
A_1	$a_1 = 150$				
A_2	$a_2 = 60$				
A_3	$a_3 = 90$				

Для початку задовільнимо потреби першого споживача B_1, користуючись запасами першого постачальника A_1. У нашій табл. 4 потреби споживача становлять $b_1 = 110$ одиниць продукції, а запаси постачальника - $a_1 = 150$ одиниць. Як ми бачимо, то із запасів першого постачальника можемо повністю задовільнити потреби першого споживача. Тоді в клітинку A_1B_1 ми записуємо менше значення з a_1, b_1, тобто це буде 110. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів від першого постачальника становить:

$150 - 110 = 40$ (одиниць) – продукції, які можна перевезти від першого постачальника другому

Тому в клітинку A_1B_2 записуємо число 40.

Тоді наша табл. 4 матиме вигляд табл. 4.1.

Тепер, коли потреби нашого першого споживача повністю задоволені, переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2. Обсяг його потреб складає $b_2 = 50$ одиниць продукції. Оскільки залишок складає 40 одиниць продукції, то незадоволеними потребами другого споживача будуть:

$50 - 40 = 10$ (одиниць) – продукції.

Тому в клітинку A_2B_2 записуємо число 10.

Таблиця 4.1

<table>
<tr><th rowspan="4">Постачальник</th><th rowspan="4">Запас</th><th colspan="4">Споживач</th></tr>
<tr><th>$\boldsymbol{B_1}$</th><th>$\boldsymbol{B_2}$</th><th>$\boldsymbol{B_3}$</th><th>$\boldsymbol{B_4}$</th></tr>
<tr><th colspan="4">Потреба</th></tr>
<tr><th>$\boldsymbol{b_1 = 110}$</th><th>$\boldsymbol{b_2 = 50}$</th><th>$\boldsymbol{b_3 = 60}$</th><th>$\boldsymbol{b_4 = 80}$</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>$a_1 = 150$</td><td>110</td><td>40</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>$a_2 = 60$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>$a_3 = 90$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Після вичерпань продукції першого постачальника переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Його запаси складають:

$a_2 = 60$ (одиниць) – продукції.

Таким чином ми можемо задовільнити другого споживача необхідною кількістю продукції, і в залишку запасів другого постачальника ще отримаємо:

$60 - 10 = 50$ (одиниць) – продукції.

Запишемо це число у клітинку A_2B_3.

Тоді таблиця 4.1 матиме вигляд таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Постачальник	Запас	Споживач			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреба			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	110	40		
A_2	$a_2 = 60$		10	50	
A_3	$a_3 = 90$				

Аналогічно перейдемо до задоволення потреб споживача B_4, його потреби складають $b_4 = 80$ одиниць продукції, які повністю задовільняються за рахунок залишку запасів третього постачальника:

$90 - 10 = 80$ (одиниць) – продукції.

Отримаємо дані табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Постачальник	Запас	Споживач			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреба			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	110	40		
A_2	$a_2 = 60$		10	50	
A_3	$a_3 = 90$			10	80

Отже, в таблиці 4.3 по діагоналі розміщені числа, які означають можливий план перевезень продукції. Якщо обчислити суму чисел у рядках – це і буде обсяг запасів постачальників, а сума чисел у стовпчиках – обсяг потреб відповідних споживачів.

Аналогічну таблицю ми можемо одержати, якщо почнемо наші міркування з правого нижнього кута табл. 4, рухаючись до лівого верхнього кута по діагоналі.

Цей метод є найпростішим, однак і найменш ефективним. Цей метод пов'язаний з великим обсягом обчислень, тому його і реалізують на комп'ютері.

Додамо у нашу табл. 4.3 у правий верхній куточок вартість перевезень згідно даних табл. 3. Отримаємо у результаті табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Постачальник	**Запас**	**Споживач**			
		$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
		Потреба			
		$\boldsymbol{b_1 = 110}$	$\boldsymbol{b_2 = 50}$	$\boldsymbol{b_3 = 60}$	$\boldsymbol{b_4 = 80}$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Для визначення загальної вартості перевезень необхідно врахувати вартість усіх перевезень, тоді загальна вартість усіх перевезень складає:

$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880$ (грош. од.)

Задача про призначення

Математична постановка задачі про призначення

Нехай маємо n видів робіт і стільки ж робітників. Кожен робітник може виконати будь-яку роботу, але з різним ступенем майстерності. Якщо на деяку роботу призначають робітника саме тієї кваліфікації, яка необхідна для її виконання, тоді вартість виконання цієї роботи буде нижчою, ніж при призначенні на цю роботу робітника іншої кваліфікації. Метою є знаходження оптимального розподілу робітників по всіх видах робіт, що є у наявності. Тобто такий розподіл, щоб загальна вартість комплексу робіт була мінімальною.

Загальна задача про призначення n робітників на n робіт наведена на рис. 7.

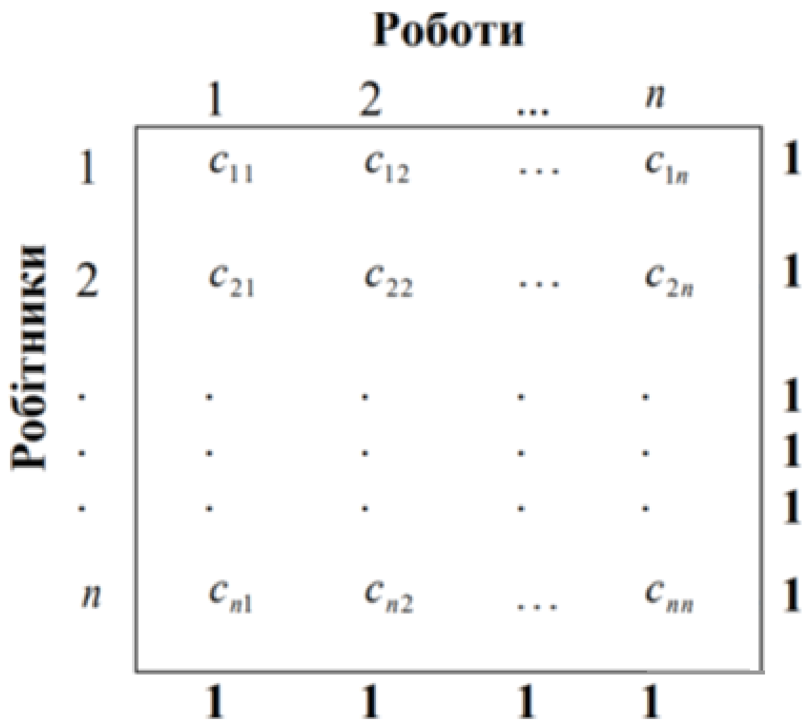


Рисунок 7 – Табличний вигляд задачі про призначення

c_{ij} – коефіцієнт, який показує вартість призначення робітника i на роботу $j (i, j = \overline{1, n})$. Також у модель можуть ввести фіктивних робітників або фіктивні роботи, якщо кількість робітників не дорівнює кількості робіт ($i \neq j$).

Насправді, задача про призначення – це окремий випадок транспортної задачі, де робітники – це пункти відправлення, а роботи – це пункти призначення. Всі величини попиту і пропозиції рівні одиниці.

Введемо позначення виду:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо робітник } i \text{ призначений на роботу } j, \\ 0, \text{у протилежному разі,} \end{cases}$$

тоді математична модель задачі про призначення буде наступною.

Знайдіть мінімум функції:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min,$$

якщо відомо, що:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$$

Розв’язання задач про призначення передбачає використання специфічних алгоритмів через врахування специфічних особливостей умови задачі. Одним із таких «специфічних» методів є угорський метод.

Алгоритм угорського методу для розв’язання задач про призначення.

Розглянемо дві конкретні задачі про призначення, на основі яких і пояснимо алгоритм угорського методу їх розв’язання.

Задача 1. До проєктної фірми надішло замовлення на складання проєктів перебудови трьох споруд. Виконати кожен із цих проєктів може виконати один із трьох співробітників фірми, однак час виконання роботи кожним із них буде різним. (табл. 5).

Розподіліть роботи між співробітниками фірми так, щоб замовлення було виконане якнайшвидше.

Таблиця 5

Робітники	1-ий проєкт	2-ий проєкт	3-ій проєкт
1-ий	15 діб	10 діб	9 діб
2-ий	9 діб	15 діб	10 діб
3-ій	10 діб	12 діб	8 діб

Розв’язання:

І крок.

Знайдемо мінімальні значення діб у кожному стовпчику та рядку табл. 5. Результати представимо у вигляді табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**	*min*
1-ий	15 діб	10 діб	9 діб	***9 діб***
2-ий	9 діб	15 діб	10 діб	***9 діб***
3-ій	10 діб	12 діб	8 діб	***8 діб***
min	***9 діб***	***10 діб***	***8 діб***	

II крок.

Наступною дією від елементів рядка віднімають знайдений мінімальний елемент рядка. Представимо результати цієї дії у вигляді табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**
1-ий	6 діб	1 доба	0 діб
2-ий	0 діб	6 діб	1 доба
3-ій	2 доби	4 доби	0 діб

В одержаній таблиці у кожному стовпчику знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів відповідних стовпчиків (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**
1-ий	6 діб	<u>0 діб</u>	0 діб
2-ий	<u>0 діб</u>	6 діб	1 доба
3-ій	2 доби	4 доби	<u>0 діб</u>

У цій таблиці підкреслені нульові елементи визначають нам оптимальний розв’зок задачі:

- 1-ий проєкт виконає 2-ий робітник за 10 діб;
- 2-ий проєкт виконає 1-ий робітник за 9 діб;

- 3-ій проєкт виконає 3-ій робітник за 8 діб.

Мінімально можливий термін виконання всіх проєктів – це $\max\{10, 9, 8\} = 10$ діб.

Інколи нульові елементи, які ми одержуємо на першому та другому кроках алгоритму угорського методу, не дозволяють однозначно визначити розв'язок задачі, тоді використовують додаткові кроки для одержання однозначного розв'язку. Розглянемо це на прикладі задачі 2.

Задача 2. До проєктної фірми надішло замовлення на складання проєктів перебудови чотирьох споруд. Виконати кожен із цих проєктів може виконати один із чотирьох співробітників фірми, однак час виконання роботи кожним із них буде різним. (табл. 6).

Таблиця 6

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**	**4-ий проєкт**
1-ий	1 доба	4 доби	6 діб	3 доби
2-ий	9 діб	7 діб	10 діб	9 діб
3-ій	4 доби	5 діб	11 діб	7 діб
4-ий	8 діб	7 діб	8 діб	5 діб

Виконавши перший та другий кроки алгоритму угорського методу одержуємо таблицю 6.1.

Таблиця 6.1

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**	**4-ий проєкт**
1-ий	<u>0 діб</u>	3 доби	2 доби	2 доби
2-ий	2 доби	<u>0 діб</u>	<u>0 діб</u>	2 доби
3-ій	<u>0 діб</u>	1 доба	4 доби	3 доби
4-ий	3 доби	2 доби	<u>0 діб</u>	<u>0 діб</u>

Як ми бачимо, то нульові елементи цієї матриці не дозволяють призначити кожному співробітнику певний проєкт. Якщо ми, наприклад, першому робітнику призначимо виконання 1-ого проєкту, то надалі виключається весь перший стовпчик нашої матриці, тоді для третього виконавця не залишається нульових елементів. У таких випадках виконують додаткові кроки:

I додатковий крок. У таблиці 6.1 проводять мінімальну кількість горизонтальних та вертикальних по рядках прямих для закреслення всіх наших нульових елементів. Тоді наша таблиця виглядатиме так (табл.6.2).

Таблиця 6.2

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**	**4-ий проєкт**
1-ий	0 діб	3 доби	2 доби	2 доби
2-ий	2 доби	0 діб	0 діб	2 доби
3-ій	0 діб	1 доба	4 доби	3 доби
4-ий	3 доби	2 доби	0 діб	0 діб

II додатковий крок. Шукають найменший невикреслений елемент. Від невикреслених елементів ми віднімаємо найменший невикреслений елемент і додаємо до елементів, що знаходяться на перетині проведених на попередньому кроці прямих.

В цій задачі найменший елемент – це 1 (a_{32}).

Запишемо у табл. 6.3 результат описаних вище дій.

Таблиця 6.3

Робітники	**1-ий проєкт**	**2-ий проєкт**	**3-ій проєкт**	**4-ий проєкт**
1-ий	0 діб	2 доби	1 доба	1 доба
2-ий	3 доби	0 діб	0 діб	2 доби
3-ій	0 діб	0 діб	3 доби	2 доби
4-ий	4 доби	2 доби	0 діб	0 діб

Оптимальний розв’язок (розподіл робіт між працівниками) буде таким:

- 1-ий проєкт виконає 1-ий робітник за 1 добу;
- 2-ий проєкт виконає 3-ій робітник за 5 діб;
- 3-ій проєкт виконає 2-ий робітник за 10 діб;
- 4-ий проєкт виконає 4-ий робітник за 5 діб.

Мінімально можливий термін виконання всіх проєктів – це $\max\{1, 5, 10, 5\} = 10$ діб.

Якщо б одержана табл. 6.3 також би не позволила побудувати розв'язок, то ми би повторювали кроки додаткового алгоритму.

Задача про розкрій матеріалу

Математична постановка задачі про розкрій матеріалу.

Модель саме задачі про розкрій часто використовуються для економії сировини та матеріалів.

Постановка задачі: Значна частина матеріалів надходить на підприємство у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Для виробничого використання його доводиться розрізати на частини, щоб одержати заготовки необхідної величини та форми. Виникає проблема мінімізації відходів матеріалів.

Для вирішення завдання оптимального розкрою розглядають декілька способів розкрою матеріалу та обирають той, у якому необхідно використати якнайменше матеріалу.

Розв’язання задач про розкрій матеріалу проводять у два етапи:

- І етап – визначаємо раціональні способи розкрою матеріалу;
- ІІ етап – вирішуємо завдання лінійного програмування для визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою.

Ці задачі передбачають розгляд так званих раціональних (оптимальних за Парето) способів розкрою.

Нехай з одиниці матеріалу ми можемо виговити заготовки декількох видів.

Раціональним (оптимальних за Парето) способом розкрою одиниці матеріалу називається такий, при якому збільшення кількості заготовок одного виду можливе за рахунок скорочення кількості заготовок іншого виду.

Введемо позначення:

- k - індекс виду заготовки ($k = \overline{1,q}$);
- i – індекс способу розкрою одиниці матеріалу ($i = \overline{1,p}$);
- a_{ik} – кількість заготовок виду k, які були одержані при розкрої одиниці матеріалу i-им способом (має бути цілим числом).

Сформалізуємо визначення раціонального способу розкрою:

Спосіб розкрою v є раціональним (оптимальним за Парето), якщо для будь-якого іншого способу розкрою i зі співвідношень $a_{ik} \geq a_{vk}$ $(k = \overline{1,q})$ випливають співвідношення $a_{ik} = a_{vk}$ $(k = \overline{1,q})$.

Розглянемо приклади постановки задач про оптимальний розкрій матеріалів.

Розв'язування задач про оптимальний розкрій матеріалів.

Задача 1. Прут сталевого прокату довжиною $l = 800$ см отримує підприємство. Необхідно виготовити деталі трьох видів:

- $l_1 = 250$ см, $a_1 = 150$ штук;
- $l_2 = 190$ см, $a_2 = 140$ штук;
- $l_3 = 100$ см, $a_3 = 48$ штук.

Складіть раціональний план розкрою деталей (матеріалу) із найменшими залишками (відходами).

Розв'язання:

Задамо позначення:

- x_j – кількість прутиків певного матеріалу, який ми розкроємо j-им варіантом;
- a_i – потрібна кількість деталей i-того різновиду (l_i – довжини);
- C_j – залишок при розкрої прутика за j-им варіантом;

- b_{ij} – кількість деталей i-того різновиду, яку одержать при виготовленні з прутика за j-им варіантом.

Можливі варіанти розкрою задамо у вигляді таблиці 7.

Цільовою функцією буде:

$$z = 50x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 50x_6 + 40x_7 + 30x_8 + 20x_9 + \\ +10x_{10} + 0x_{11} \rightarrow min$$

Таблиця 7

Номер способу j	b_{ij}			**Залишок C_j**	**Кількість прибутків за j-тим способом**
	$l_1 = 250$	$l_2 = 190$	$l_3 = 100$		
1	3	0	0	50	x_1
2	2	1	1	10	x_2
3	2	0	3	0	x_3
4	1	2	1	70	x_4
5	1	1	3	60	x_5
6	1	0	5	50	x_6
7	0	4	0	40	x_7
8	0	3	2	30	x_8
9	0	2	4	20	x_9
10	0	1	6	10	x_{10}
11	0	0	8	0	x_{11}
Потрібна кількість деталей a_i	150	140	48	-	-
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$		

Обмеження мають вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 150; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} > 140; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_8 + 4x_9 + 6x_{10} + 8x_{11} > 48; \end{cases}$$

де $x_{ij} \geq 0, j = \overline{1,11}$.

Задача 2.

Дано листки розміром 6×13. З них виріжте 800 деталей, які мають розмір 4×5, та 400 деталей, які мають розмір 2×3.

Складіть модель оптимізації розкрою матеріалу за:

1) мінімальною кількістю сумарних відходів;
2) мінімальною кількістю використаних листків.

Розв’язання:

I етап. Наведемо можливі варіанти розкрою матеріалу (рис. 8) та складемо таблицю, яка схарактеризує кожний з них (табл. 8).

Таблиця 8

	Кількість деталей		**Відходи**
Номер варіанта	4×5	2×3	
1	0	13	0
2	1	9	4
3	2	6	2
4	3	1	2
Кількість деталей	800	400	

II етап. Складаємо математичну модель задачі:

1) Задача оптимізації за мінімальною кількістю сумарних відходів

Введемо змінні x_1, x_2, x_3, x_4. Кожна з цих змінних відповідає певної кількості листків, розмір яких - 6×13, ці листки повинні розрізатись відповідним способом – 1, 2, 3, 4.

Тоді функція, яка визначає мінімум відходів при відповідному розкрої, тобто функція мети має вид:

$F = 4x_2 + 2x_3 + 12x_4 \to min,$

обмеження задаються у вигляді:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 800; \\ 13x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 400; \end{cases}$$

де $x_j \geq 0; j = \overline{1{,}4};$

тоді x_j => цілі; $j = \overline{1{,}4}$.

1) Задача оптимізації за мінімальною кількістю використаних листків

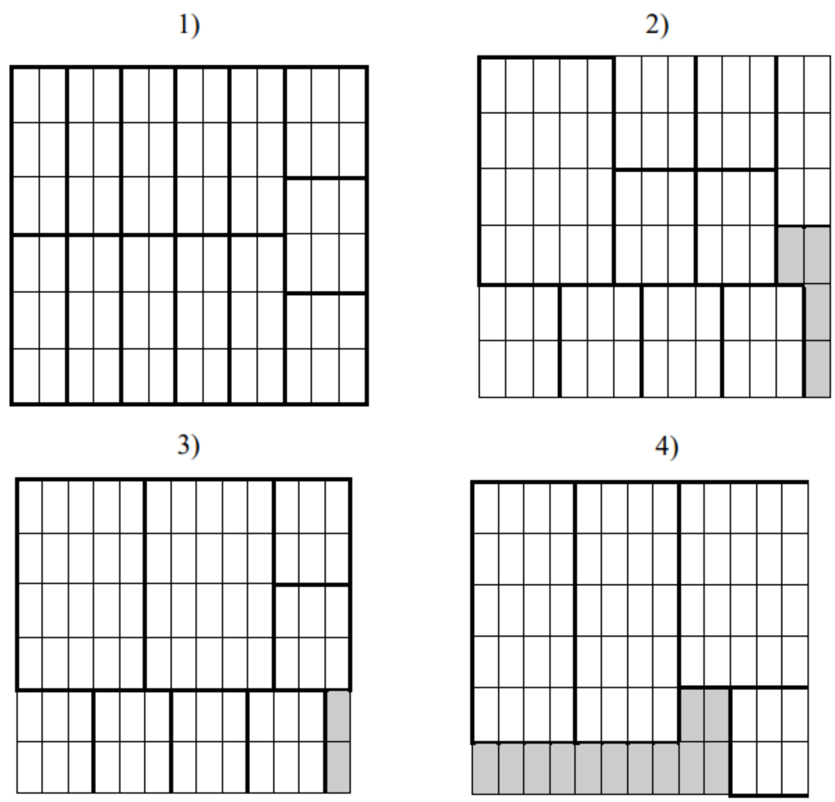


Рисунок 8 – Варіанти розкрою матеріалу (жирним контуром позначено межі деталей, сірим кольором – залишки матеріалу)

Функція, яка визначає мінімальну кількість використаних листків, задається у вигляді:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to min,$$

обмеження задаються у вигляді:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 800; \\ 13x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 400; \end{cases}$$

де $x_j \geq 0; j = \overline{1,4}$;

тоді $x_j =>$ цілі; $j = \overline{1,4}$

Задачі оптимізації на визначення мінімального значення сумарних відходів та кількості використаних листків є задачами лінійного програмування (їх розв'язують графічним або симплексним методом).

2.2. Переваги використання Microsoft Office Excel для розв'язування задач дослідження операцій

На кожному кроці нас переслідують інформаційно-комунікаційні технології. Наразі, у зв'язку з тією ситуацією, яка склалась у нашій країні, а саме війною, інформаційно-комунікаційні засоби використовують у всіх сферах нашого життя, а особливо у сфері освіти. Тому як для дітей, так і для вчителів, оволодіння інформаційно-комунікаційними технологіями є вкрай важливими. А навіщо? Використання нових методів роботи, нових технологій, нових сервісів та програм дають змогу учням глибоко осмислити навчальний матеріал, закріпити його на практиці, а також сформувати інтерес до знань. У розробці нашого факультативу ми використовуємо табличний процесор Microsoft Office Excel.

Microsoft Excel (повна назва Microsoft Office Excel) — програма для роботи з електронними таблицями, створена корпорацією Microsoft для Microsoft Windows, Windows NT і Mac OS. Програма входить до складу офісного пакету Microsoft Office.

Типові області застосування Excel:

- завдяки тому, що лист Excel являє собою готову таблицю, Excel часто використовують для створення документів без усіляких розрахунків, що просто мають табличне представлення (наприклад, прайс-листи в магазинах, розклади);

- у Excel легко можна створювати різні види графіків і діаграм, які беруть дані для побудови з комірок таблиць (графік зниження ваги тіла за вказаний період від початку занять спортом);
- його можуть використовувати звичайні користувачі для елементарних розрахунків (скільки витратив за цей місяць, що/кому/коли дав/взяв);
- Excel містить багато математичних і статистичних функцій, завдяки чому його можуть використовувати школярі і студенти для розрахунків курсових, лабораторних робіт;
- Excel інтенсивно використовується в бухгалтерії — у багатьох фірмах це основний інструмент для оформлення документів, розрахунків і створення діаграм. Природно, він має в собі відповідні функції;
- Excel може навіть працювати як база даних. Хоча, звичайно, до повноцінної бази даних йому далеко [17-19].

Це програмне забезпечення є майже на кожному комп'ютері, його використання значно полегшує математичні обчислення. Офіційний сайт Microsoft Office Excel: https://www.microsoft.com/uk-ua/microsoft-365/excel.

Звичайно, нині існує велика кількість різноманітного програмного забезпечення для полегшення математичних обчислень, яке б відповідало вимогам нашого факультативу, тому доречним буде навести переваги використання саме програми MS Excel.

Переваги використання Microsoft Excel:

1) Microsoft Excel – це вільне програмне забезпечення. Це означає, що у всьому світі це програмне забезпечення для розрахунків або підготовки аркушів та діаграм, розроблене корпорацією Microsoft Corporation, доступне у безкоштовній версії та у платній версії, а також якщо особа чи організація шукає розширену функцію. Щоб отримати його безкоштовно, волонтери можуть відвідати офіційний веб-сайт корпорації Майкрософт, який називається products.office.com, і натиснути на "Спробувати

безкоштовно" на першій сторінці. Для тих, хто хоче отримати розширену функцію найбільш часто використовуваної електронної таблиці на планеті, натисніть кнопку «Купити зараз» або «Купити Office 365». Але в рамках нашого факультативу ми обмежились безкоштовною версією.

2) Файл з проєктом ви можете зберігати як на вашому комп'ютері, так і у хмарному середовищі. Ризик втрати даних у цьому випадку мінімальний. Також існує спеціальна функція захисту від втрати даних, яка дозволяє сканувати вміст у режимі реального часу для всіх ваших конфіденційних даних.
3) За допомогою функції зберігання файлів у хмарному середовищі ресурс є дуже зручним у використанні. Можна отримати доступ до своїх проєктів у будь-який час, з довільної точки світу, як з комп'ютера, так і зі смартфона або планшета, під'єднаних до мережі Інтернет.
4) Спільний доступ і співпраця дають можливість виконувати навчальні проєкти колективно, тобто користувачі програми можуть ефективно взаємодіяти між собою, як в роботі безпосередньо над реалізацією проєкту, так і при використанні чата для спілкування.
5) Основною перевагою програм пакета Microsoft Office є його інтегрованість, тобто пакет дозволяє спільно використовувати й легко переміщувати інформацію між різними додатками завдяки технології OLE (Object Linking and Embedding).
6) Настроювана панель інструментів. Користувач може легко налаштувати панель інструментів відповідно для кращої продуктивності.

Microsoft Office Excel - комерційний табличний процесор, який служить для виконання будь-яких обчислень та їх візуалізації за допомогою анімованих графіків та діаграм. Оболонка програми Excel містить неймовірно безліч формул і функцій, службовців на вирішення рівнянь, складання пропорцій, продовження математичного ряду чи послідовності, пошуку шуканого значення серед запропонованих і розв'язання безлічі інших завдань. Також додаток має у своєму розпорядженні солідний арсенал типів даних, доступних для введення в комірки Excel. Так, є загальний формат, грошовий числовий, фінансовий, дробовий, процентний, експоненційний, а також формати дати та часу. На додаток, інструментарій утиліти має опції фільтрації та сортування даних, що вводяться. Варто відзначити наявність тулкіта для створення зведених таблиць, заснованих на даних із поточного аркуша Excel або числової інформації, отриманої із зовнішнього джерела даних. Також є майстер генерації рекомендованих зведених таблиць, заснований на аналізі опублікованих на аркуші числових відомостей. Різноманітність представлених діаграм дійсно велика і дозволяє наочно зобразити будь-який тренд чи динаміку зміни числової складової у відповідному масштабі [20].

2.3. Використання Microsoft Office Excel в елективному курсі «Розв’язування задач дослідження операцій» в профільній школі

Розв’язання учнями задач дослідження операцій з використанням табличного процесора Microsoft Office Excel передбачає використання поданих шаблонів до кожного з типів задач. Від учнів вимагається зосередитись на побудові математичних моделей до поданих задач, а шаблони їм допоможуть у їх розв’язанні.

Розв’язування задач лінійного програмування

Задача. Фермер відгодовує два види тварин – А і В. Для цього використовує три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину за видами наведені в табл. 9. У ній також зазначені запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини. Визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток. Скласти математичну модель операції [22].

Таблиця 9

Вид корму	Витрати кормів на відгодівлю		Запаси кормів
	тварини виду А	тварини виду В	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Складемо математичну модель задачі:

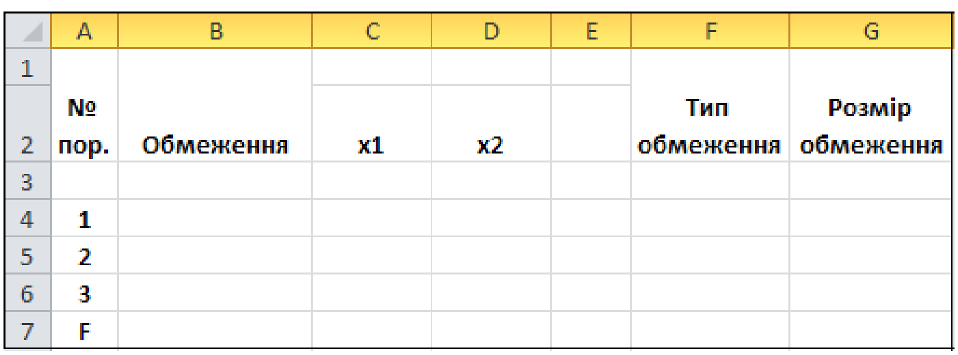
$F = 16x_1 + 6x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування за допомогою MS Excel:

1. Вводять умову задачі:

1.1. Створюють форму для введення умов задачі (рис. 9).



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	№ пор.	Обмеження	x1	x2		Тип обмеження	Розмір обмеження
3							
4	1						
5	2						
6	3						
7	F						

Рисунок 9 – Форма для введення умов задачі

Примітка. Під заголовком таблиці і перед колонкою «Тип обмеження» залишають відповідно порожній рядок і порожній стовпчик

1.2. Вводять вхідні дані (рис. 9.1):

A	B	C	D	E	F	G
№ пор.	Обмеження	x1	x2		Тип обмеження	Розмір обмеження
1	Витрати корму 1-го виду	2	3		<=	180
2	Витрати корму 1-го виду	4	1		<=	240
3	Витрати корму 1-го виду	6	7		<=	426
F	Прибуток	16	16		max	

Рисунок 9.1 – Введення вхідних даних

1.2.1. Вводять залежності математичної моделі: у рядки обмежень заносять числові коефіцієнти при змінних, що відповідають назвам стовпчиків. Якщо деяка змінна в обмеженні відсутня, її стовпчик залишають пустим.

1.2.2. Вводять коефіцієнти цільової функції (рядок F на рис. 9.1). Максимізація чи мінімізація функції позначається у цьому рядку в стовпчику «Тип обмеження».

1.2.3. Вводять типи обмежень у стовпчик «Тип обмеження». Введення типу обмеження «=» повинно закінчуватися натисканням клавіші Enter.

1.2.4. Вводять граничні умови, тобто праві частини обмежень у стовпчик «Розмір обмеження».

2. Оформлюють умову задачі у вигляді моделі.

2.1. На перетині рядка, що відповідає і –тому обмеженню, і пустого стовпчика вписують функцію =SUMPRODUCT(array 1; array 2), де array 1 – діапазон пустих клітинок під змінними; array 2 – діапазон коефіцієнтів і-го обмеження. Так, у нашому прикладі у клітинці Е4 запишеться функція:

= SUMPRODUCT ($C$3:$D$3;C4:D4).

Примітка. Функція SUMPRODUCT використовується для обчислення суми добутків відповідних елементів числових масивів однакової розмірності Синтаксис функції:

= SUMPRODUCT(array 1; array 2; array 3; ...), де array 1; array 2; array 3; ... – від 2 до 30 числових масивів.

Результат виконання даної функції – число, яке є сумою добутків відповідних елементів числових масивів.

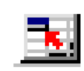
Необхідно пам’ятати, що:

– масиви повинні мати однакові розмірності;
– нечислові елементи масивів сприймаються як нульові.

2.2. Аналогічну функцію записують у рядок цільової функції.

3. Застосовують елемент надбудови табличного процесора Excel Пошук розв’язання.

3.1. Викликають пункти меню Сервіс→Пошук розв’язання. На екран виводиться діалогове вікно, зовнішній вигляд якого подано на рис. 10.1.

3.2. У полі Встановити цільову комірку вводять адресу клітинки, що містить формулу для обчислення значення цільової функції. Це можна зробити вручну (з клавіатури) або за допомогою кнопки  , що дозволяє перейти в робочу таблицю, зображену на рис. 10.6, і виділити потрібну клітинку. Повернення до вікна Пошук розв’язання здійснюється за допомогою кнопки .

Примітка. У полі Встановить цільову комірку автоматично вводиться адреса тієї клітинки, на якій знаходився курсор перед викликом вікна Пошук розв’язання.

У нашому прикладі адреса цільової клітинки E7 установлена автоматично.

3.3. Установлюють перемикач Дорівнює у положення, що відповідає спрямованості цільової функції (максимум, мінімум, деяке конкретне значення). У нашому прикладі перемикач установлено на Максимальне значення.

3.4. У полі Зміна комірки вводять адреси клітинок пустого рядка, що повинні містити значення змінних. У нашому прикладі це клітинки $C$3:$D$3.

3.5. Натискають кнопку Додати. На екрані з’являється діалогове вікно Додавання обмеження.

3.6. Для кожного обмеження в полі Посилання на комірку вводять адресу клітинки, що містить значення функції SUMPRODUCT. У нашому прикладі для першого обмеження у полі Посилання на комірку введена адреса $E$4.

3.7. Із списку, що розкривається, обирають тип обмеження.

3.8. У полі Обмеження вводять адресу клітинки, що містить числове значення з колонки «Розмір обмеження».

Примітка. Для введення наступного обмеження натискають кнопку Додати. Після введення останнього обмеження натискають кнопку ОК Обмеження, що мають однаковий знак, можна вводити групами.

3.9. У вікні Пошук розв’язання натискають кнопку Налаштування.

3.10. У вікні Параметри пошуку розв’язання встановлюють опції Лінійна модель і Невід’ємні значення і натискають кнопку ОК.

3.11. У вікні Пошук розв’язання натискають кнопку Виконати.

На екран виведеться вікно Результати пошуку розв’язання, що може містити такі повідомлення:

1. «Розв’язання знайдено. Всі обмеження і умови оптимальності виконані». Це означає, що знайдено оптимальний розв’язок моделі. Після натискання кнопки ОК на робочому аркуші у клітинці, що містила формулу для обчислення цільової функції, та під змінними будуть виведені їх значення.

2. «Значення цільової комірки не сходяться». Це означає, що значення цільової функції прямує до нескінченості.

3. «Пошук не може знайти підходящого розв’язання». У цьому випадку система обмежень несумісна і задача не має розв’язку.

Результат розв’язування задачі наведено на рис. 9.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1–2	No пор.	Обмеження	К-сть норок	К-сть нутрій		Тип обмеженя	Розмір обмеження
3			x1	x2			
4			57	12			
5	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	150	<=	180
6	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	240	<=	240
7	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	426	<=	426
8	F	Прибуток	16	6	984	max	

Рисунок 9.2 – Результат розв’язування задачі

3.12. Тлумачать одержаний розв’язок. Так, як бачимо з рис. 9.2, для одержання максимального прибутку розміром 984 грош. од. фермер повинен вирощувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В.

Розв’язування транспортної задачі

Алгоритм розв’язування транспортної задачі за допомогою табличного процесора Excel розглянемо на конкретному прикладі.

Задача. Нехай маємо три постачальники із запасами вантажу 26, 33, 45 т відповідно і чотири споживачі з потребами на цей вантаж кількістю 14, 29, 20, 41 т відповідно. Вартість перевезення 1 т вантажу задана табл. 9.

Таблиця 9

Постачальник	**Споживач**			
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
A_1	6	4	15	19
A_2	13	17	28	3
A_3	5	20	6	10

Знайти кількість вантажу, яку повинен отримати кожен споживач від того або іншого постачальника, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною. Розв’язати задачу засобами табличного процесора Excel [22].

Розв’язання:

1. Створюють підготовчу форму для розв’язування задачі (рис. 10). Відстань між пунктами перевезень зазначають у клітинках B4:E6. У клітинках B11:E13 після застосування Пошуку розв’язання з’являться шукані значення змінних. Клітинка B17 буде містити вартість перевезення. У клітинки B14:E14 та F11:F13 вводять формули для лівих частин обмежень, значення правих частин обмежень – у клітинки B15:E15, G11:G13. Клітинка B17 містить формулу для розрахунку значення цільової функції.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Вхідні дані**						
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		
4	**A1**	6	4	15	19		
5	**A2**	13	17	28	3		
6	**A3**	5	20	6	10		
7							
8	**Результати**						
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**Запаси**
11	**A1**					=СУММ(B11:E11)	26
12	**A2**					=СУММ(B12:E12)	33
13	**A3**					=СУММ(B13:E13)	45
14		=СУММ(B11:B13)	=СУММ(C11:C13)	=СУММ(D11:D13)	=СУММ(E11:E13)		
15	**Потреби**	14	29	20	41		
16							
17	**Вартість переве-зення**	=СУММПРОИЗВ(B4:E6;B11:E13)					

Рисунок 10 – Підготовча форма для розв’язування транспортної задачі

2. Виконують пункти головного меню Сервис→Пошук розв’язання. На екрані з’являється діалогове вікно Пошук розв’язання, у якому встановлюють такі параметри:

   а) у полі Встановіть цільову комірку вводять адресу клітинки, що містить цільову функцію (у нашому прикладі B17);

б) у полі Дорівнює установлюють перемикач у положення мінімальному значенню (за спрямованістю цільової функції);

в) у полі Зміна комірки вводять діапазон комірок для шуканих змінних B11:E13;

г) задають праві частини обмежень таким чином:

– у діалоговому вікні Пошук розв’язання клацають на кнопці Додати. Відкривається діалогове вікно Додавання обмеження;

– у полі Посилання на комірку вводять адреси комірок із формулами для обчислення лівих частин обмежень. Обмеження, що записані одне за одним і мають однаковий знак, можна вводити групою.

ґ) установлюють Параметри пошуку рішень. Для цього в діалоговому вікні Пошук розв’язання клацають на кнопці Налаштування. Відкривається діалогове вікно Налаштування пошуку розв’язання, в якому необхідно встановити прапорці у полях Лінійна модель і Невід’ємні значення. Після встановлення необхідних параметрів клацають на кнопці ОК і потрапляють знов у вікно Пошук розв’язання.

д) клацають на кнопці Виконати діалогового вікна Пошук розв’язання, після цього на екрані з’являється вікно Результати пошуку розв’язання.

Можна зберегти знайдений розв’язок, якщо обрати опцію Зберегти знайдене розв’язання, або Відновити вихідні значення, якщо потрібно перейти до розв’язування іншої задачі.

3. Описують (тлумачать) одержані результати (рис. 10.1), які знаходяться у клітинках B11:E13 і B17.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Вхідні дані**						
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		
4	**A1**	6	4	15	19		
5	**A2**	13	17	28	3		
6	**A3**	5	20	6	10		
7							
8	**Результати**						
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**Запаси**
11	**A1**	0	26	0	0	26	26
12	**A2**	0	0	0	33	33	33
13	**A3**	14	3	20	8	45	45
14		14	29	20	41		
15	**Потреби**	14	29	20	41		
16							
17	**Вартість переве-зення**	533					

Рисунок 10.1 – Результати розв'язування транспортної задачі

У ході розв'язування транспортної задачі одержано такі результати:

1) Мінімальна вартість перевезення вантажу становить 533 грош. од.

2) Матриця перевезень $X_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \\ 14 & 3 & 20 & 8 \end{pmatrix}$. Це означає, що 26 одиниць вантажу перевозять від першого постачальника до другого споживача, 33 одиниці – від другого постачальника до четвертого споживача, від третього постачальника перевозять 14, 3, 20, 8 одиниць вантажу відповідно у перший, другий, третій та четвертий пункти призначення.

Розв'язування задачі про розкрій матеріалу

Задача 1. Нехай необхідно металеві прути довжиною 26 см розрізати на заготовки по 7, 9 і 13 см. Останніх потрібно по 30 шт. Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план, за якого кількість розрізаних прутів найменша [22].

Розв'язання:

Спочатку визначають усі можливі варіанти розрізування матеріалу, наприклад, прут довжиною 26 см на заготовки відповідно 7, 9 та 13 см можна розрізати такими способами:

1) 3 заготовки довжиною 7 см;
2) 2 заготовки довжиною 7 см та 1 заготовка довжиною 9 см;
3) 1 заготовка довжиною 7 см та 2 заготовки довжиною 9 см;
4) 1 заготовка довжиною 7 см та 1 заготовка довжиною 13 см;
5) 1 заготовка довжиною 9 см та 1 заготовка довжиною 13 см;
6) 2 заготовки довжиною 13 см.

Уводимо позначення: нехай x_i – кількість прутів, розрізаних i-тим способом, тоді загальна кількість розрізаних прутів буде дорівнювати $\sum_{i=1}^{6} x_i$, це й буде наша цільова функція.

За умовою заготовок кожного виду необхідно по 30 штук. Звідси будуємо обмеження:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30,$$
$$x_2 + 2x_3 + x_5 = 30,$$
$$x_4 + x_5 + 2x_6 = 30.$$

Крім того, обмеженнями будуть умови: x_i => цілі; $i = \overline{1,6}$.

Вносимо дані до таблиці (рис. 11):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N_var	1	2	3	4	5	6	potribno
2	7 cm.	3	2	1	1	0	0	30
3	9 cm.	0	1	2	0	1	0	30
4	13 cm.	0	0	0	1	1	2	30

Рисунок 11 – Умова задачі у Microsoft Excel

Клітинки B11:G11 резервуємо для x_i – результатів розв’язування задачі (рис. 11.1):

	A	B	C	D	E	F	G
10		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
11							

Рисунок 11.1 – Комірки для виведення результатів розв’язування задачі

Будуємо допоміжну таблицю (рис. 11.2), у кожній клітинці B6:G8 якої обчислюється кількість заготовок кожного виду за кожним варіантом розкрою, а в клітинках H6:H8 – сумарна їх кількість:

	A	B	C	D	E	F	G	H
6		=B2*B11	=C2*C11	=D2*D11	=E2*E11	=F2*F11	=G2*G11	=СУММ(B6:G6)
7		=B3*B11	=C3*C11	=D3*D11	=E3*E11	=F3*F11	=G3*G11	=СУММ(B7:G7)
8		=B4*B11	=C4*C11	=D4*D11	=E4*E11	=F4*F11	=G4*G11	=СУММ(B8:G8)

Рисунок 11.2 – Допоміжна таблиця

До клітинки H11 вносимо формулу для обчислення цільової функції:

= SUM(B11:G11)

Для формули цільової функції можна використати функцію SUMPRODUCT.

Звертаємося до опції Пошук розв’язання. Заповнюємо відповідні поля.

У вкладці Налаштування пошуку розв’язання установлюємо максимальний час та максимальну кількість ітерацій, оскільки у нас і цільова функція, і обмеження задані лінійними виразами, то відзначаємо, що це лінійна модель, а оскільки параметри нашої задачі не можуть набувати від’ємних значень, то відзначаємо і це (тоді обмеження xi □0 у попередньому вікні можна не вводити).

Після натискування клавіші ОК переходимо до попереднього вікна і вибираємо Виконати. Програма знаходить оптимальне розв’язування задачі, значення xi розміщуються у клітинках B11:G11, а значення цільової функції – у клітинці H11 (табл. 10) – результати розв’язування задачі про розкрій матеріалу:

Таблиця 10

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Цільова функція**
5	0	15	0	0	15	35

Отже, для отримання необхідної кількості заготовок кожного виду найменша кількість розрізаних прутів дорівнює 35, їх потрібно розрізати таким чином:

- від 5 прутів відрізати по 3 шт. довжиною 7 см кожен;
- від 15 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 7 см та 2 шт. довжиною 9 см кожен;
- 15 прутів розрізати на 2 шт. довжиною 13 см кожен.

Задача 2. Розглянемо цю задачу з точки зору мінімізації відходів.

Для x_i– розв’язування задачі – резервуємо клітинки B12:G12. Будуємо аналогічну допоміжну таблицю, у кожній клітинці якої B6:G8 обчислюється сумарна довжина заготовок кожного виду за кожним варіантом розкрою, а в клітинках B9:G9 – залишок після розрізування, тобто відходи [22].

Для цього до клітинки B6:B9 відповідно вносимо такі формули:

=B2·7·B12,

=B3·9·B12,

=B4·13·B12,

=26·B12-B6-B7-B8

та розмножуємо їх на C6:G9.

Сумарна кількість відходів є цільовою функцією, розміщуємо її у H9:

=SUM(B9:G9)

Звертаємося до опції Пошук розв’язання. Заповнюємо відповідні поля та звертаємося до опції Налаштування і знаходимо оптимальне розв’язання (табл. 11) - результати розв’язання задачі про розкрій з точки зору мінімізації відходів:

Таблиця 11

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	0	15	0	0	15

Отже, щоб кількість відходів була мінімальною, прути потрібно розрізати таким чином:

– від 5 прутів відрізати по 3 шт. довжиною 7 см кожен;
– від 15 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 7 см та 2 шт. довжиною 9 см кожен;
– 15 прутів розрізати на 2 шт. довжиною 13 см кожен.

Мінімальна сумарна кількість відходів при цьому буде дорівнювати 40 см. Як бачимо, розв'язання одержали таке саме, однак це не завжди так.

Необхідно зазначити, що задачі такого типу за допомогою опції Пошук розв'язання можна розв'язувати лише тоді, коли в задачі небагато параметрів.

Задача 3. Нехай 50 металевих прутів довжиною 26 см необхідно розрізати на заготовки по 7, 9 і 13 см у комплектності, заданій відношенням $1:3:2$. Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план, за якого кількість комплектів заготовок максимальна [20].

Розв'язання:

Спочатку визначають всі можливі варіанти розрізування матеріалу (рис. 8). Вводимо позначення: нехай x_i – кількість прутів, розрізаних i-тим способом. Визначаємо загальну кількість заготовок кожного виду, за цільову функцію беремо кількість заготовок по 7 см і максимізуємо її, а в обмеженнях зазначаємо, що заготовок по 9 см повинно бути втричі більше, по 13 см – удвічі, а загальна кількість розрізаних прутів буде дорівнювати 50.

Розміщуємо дані в таблиці таким чином, щоб у клітинках H6:H8 розмістилися кількості заготовок кожного виду, у клітинці H11 – загальна кількість розрізаних прутів, значення хі розміщуються у клітинках B11:G11, у клітинках B6:G8 – допоміжна таблиця (рис. 12):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N var	1	2	3	4	5	6	
2	7 cm	3	2	1	1	0	0	
3	9 cm	0	1	2	0	1	0	
4	13 cm	0	0	0	1	1	2	
5	**26 cm**							Цільова функція
6		=B2*B11	=C2*C11	=D2*D11	=E2*E11	=F2*F11	=G2*G11	**=СУММ(B6:G6)**
7		=B3*B11	=C3*C11	=D3*D11	=E3*E11	=F3*F11	=G3*G11	**=СУММ(B7:G7)**
8		=B4*B11	=C4*C11	=D4*D11	=E4*E11	=F4*F11	=G4*G11	**=СУММ(B8:G8)**
9								
10		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	Кількість
11								=СУММ(B11:G11)

Рисунок 12 – Допоміжна таблиця

Звертаємося до опції Пошук Розв’язання. Заповнюємо відповідні поля: Одержимо результат, зображений на рис 12.1:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N var	1	2	3	4	5	6	
2	7 cm	3	2	1	1	0	0	
3	9 cm	0	1	2	0	1	0	
4	13 cm	0	0	0	1	1	2	
5	**26 cm**							Цільова функція
6		0	0	20	0	0	0	**20**
7		0	0	40	0	20	0	**60**
8		0	0	0	0	20	20	**40**
9								
10		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	Кількість
11		0	0	20	0	20	10	50

Рисунок 12.1 – Результат розв’язання задачі

Отже, для одержання максимальної кількості комплектів заготовок 50 прутів потрібно розрізати таким чином:

– від 20 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 7 см кожен та 2 шт. довжиною 9 см кожен;

– від 20 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 9 см та 1 шт. довжиною 13 см кожен;

– 10 прутів розрізати на 2 шт. довжиною 13 см кожен.

Розв'язування задачі про призначення

Розглянемо алгоритм розв'язування задачі про призначення засобами табличного процесора Excel на прикладі задачі про призначення, вихідні дані якої наведені в пункті 2.1.

1. Створюють підготовчу форму для розв'язування задачі (рис. 13). Вартості виконання робіт (або термін їх виконання) зазначають у клітинках B2:D4. У клітинках B8:D10 після застосування Пошуку розв'язання з'являться шукані значення змінних. У клітинки B11:D11 та E8:E10 вводять формули для лівих частин обмежень. Значення правих частин обмежень – у клітинках B12:D12, F8:F10. У комірці B14 задають формулу для розрахунку значення цільової функції (формула для обчислення загального терміну або загальної вартості виконаних робіт).

	A	B	C	D	E	F
1		**1-й проект**	**2-й проект**	**3-й проект**		
2	**1-й робітник**	15	10	9		
3	**2-й робітник**	9	15	10		
4	**3-й робітник**	10	12	8		
5						
6						
7		**1-й проект**	**2-й проект**	**3-й проект**		
8	**1-й робітник**				=СУММ(B8:D8)	1
9	**2-й робітник**				=СУММ(B9:D9)	1
10	**3-й робітник**				=СУММ(B10:D10)	1
11		=СУММ(B8:B10)	=СУММ(C8:C10)	=СУММ(D8:D10)		
12		1	1	1		
13						
14	**Сумарна тривалість (вартість) робіт**	=СУММПРОИЗВ(B2:D4;B8:D10)				

Рисунок 13 – Підготовча форма для розв'язування задачі про призначення

2. Виконують пункти головного меню Сервіс → Пошук розв'язання. На екрані з'являється діалогове вікно Пошук розв'язання, в якому встановлюють такі параметри:

а) у полі Встановити цільову комірку вводять адресу клітинки, що містить цільову функцію (у нашому прикладі B14);

б) у полі Дорівнює установлюють перемикач у положення мінімальному значенню (за спрямованістю цільової функції);

в) у полі Зміна комірки вводять діапазон комірок для шуканих змінних B8:D10;

г) задають праві частини обмежень таким чином:

– у діалоговому вікні Пошук розв'язання клацають на кнопці Додати. Відкривається діалогове вікно Додавання обмеження;

– у полі Посилання на комірку вводять по черзі адреси комірок із формулами для обчислення лівих частин обмежень. Якщо обмеження, що записані одне за одним, мають однаковий знак, то їх уводять групою;

ґ) установлюють параметри пошуку розв'язків. Для цього у діалоговому вікні Пошук розв'язання клацають на кнопці Налаштування. Відкривається діалогове вікно Налаштування пошуку розв'язання, в якому встановлюють прапорці у полях Лінійна модель і Невід'ємні значення. Після встановлення необхідних параметрів клацають на кнопці ОК і потрапляють знов у вікно Пошук розв'язання.

д) клацають на кнопці Виконати діалогового вікна Пошук розв'язання, після цього на екрані з'являється вікно Результати пошуку розв'язання (рис. 13.1).

3. Аналізують одержані результати (рис. 13.1), які знаходяться у клітинках B7:D9 і B13. Одержані у клітинках B7:D9 одиниці задають оптимальний розподіл робіт між працівниками. Так, першому робітникові необхідно доручити виконання 2-го проєкту, другому робітникові – виконання 1-го проєкту, третьому робітникові –

виконання 3-го проєкту (табл. 12).

Таблиця 12

Номер проєкту	1	2	3
Виконавець	2	1	2

	A	B	C	D	E	F
1		**1-й проект**	**2-й проект**	**3-й проект**		
2	**1-й робітник**	15	10	9		
3	**2-й робітник**	9	15	10		
4	**3-й робітник**	10	12	8		
5						
6						
7		**1-й проект**	**2-й проект**	**3-й проект**		
8	**1-й робітник**	0	1	0	1	**1**
9	**2-й робітник**	1	0	0	1	**1**
10	**3-й робітник**	0	0	1	1	**1**
11		1	1	1		
12		1	1	1		
13						
14	**Сумарна тривалість (вартість) робіт**	**27**				

Рисунок 13.1 – Результати розв'язання задачі про призначення

Оптимальна (мінімальна) тривалість (вартість) виконання робіт становить 27 днів (грош. од.).

Висновки до розділу 2

Наш факультатив передбачає за мету саме формування в учнів навичок побудови математичної моделі до задач оптимізації. Саме цій темі – «Розв'язування задач дослідження операцій» - в розділі «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» приділяється недостатня кількість уваги, а саме кількість годин на цю тему мізерна.

Моделювання дуже корисне для всебічного розвитку дитини. Чому? Все просто - учень вчиться критично мислити, аналізувати та розв’язувати проблеми. Вчить життю, якщо можна так сказати. Також факультатив передбачає розвиток комунікації серед учнів. Сьогодення, нажаль, мінімізує комунікацію серед дітей під час навчання. Саме тому цьому ми приділили особливу увагу.

У другому розділі ми також описали та розробили програму елективного курсу для учнів 10 класу: Розв’язування задач дослідження операцій. Також розглянули переваги використання табличного процесора Microsoft Office Excel.

У розробці елективного курсу ми продемонстрували розв'язання класичних задач оптимізації як «вручну», так і за допомогою рекомендованої програми на комп'ютері, розробили шаблони розв'язання класичних задач.

ВИСНОВКИ

Під час написання кваліфікаційної роботи ми проаналізувати навчальну програму з математики для учнів 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів та дійшли до висновку, що часу, який виділено на вивчення цієї теми катастрофічно мало та програма не передбачає розглядання задач, пов’язаних з життєвими ситуаціями.

Також ми дослідили науково-популярну літературу з теми дослідження. Виокремили поняття «екстремуму». Провели логіко-дидактичний аналіз теми «Лінійне програмування». З’ясували як формуються математичні компетентності засобами дослідження операцій. Дослідили, які методичні особливості факультативного курсу «Розв’язування задач дослідження операцій».

Виокремили переваги використання Microsoft Office Excel як засобу формування математичних та інформаційно-цифрових компетентностей.

Виокремили математичні компетентності, які можна набути завдяки використанню MS Excel, та визначити показники і рівні їх сформованості в учнів профільної школи.

Виокремили інформаційно-цифрові компетентності, які можна набути завдяки використанню MS Excel, та визначити показники і рівні їх сформованості в учнів профільної школи.

Розробили елективний курс «Розв’язування задач дослідження операцій» для 10 класу, також розглянули його практичне застосування за допомогою використання програмного забезпечення Microsoft Office Excel як засобу формування математичних компетентностей учнів профільної школи.

Таким чином, мета кваліфікаційної роботи досягнута, а завдання виконані у повній мірі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Про освіту : Закон України від 17.09.2020 р. № 910-IX [Електронний ресурс] / Відомості Верховної Ради України. – Режим доступу : https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19. – Назва з екрану.
2. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі : Наказ Міністерства освіти і науки України від 21.10.2013 р., № 1456 [Електронний ресурс] / МОН України. – Режим доступу : https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v1456729-13. – Назва з екрану.
3. Бугайов О. І., Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі : методичні рекомендації / О. І. Бугайов, Д. І. Дейкун – Київ : Освіта., 1992. – 31 с.
4. Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – Київ : Педагогічна преса. – 2003. – № 24, грудень. – 32 с.
5. Навчальні програми для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень, затверджена наказом МОН України від 23.10.2017 № 1407) – Режим доступу : https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx
6. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Підручник / Ю. П. Зайченко. – 7-ме вид., переробл. та допов. – Київ : Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.
7. Казарєзов А. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. освіти. Ч. 1. Математичне програмування / А. Я. Казарєзов, Ю. Ю. Верланов ; Миколаїв. держ. гуманіт. ун-т ім. П. Могили. – Миколаїв, 2003. – 83 с.
8. Моторіна В.Г. Професійна компетентність учителя математики профільної школи : навчальний посібник для студентів природничоматематичних

спеціальностей педагогічних ВНЗ / Валентина Григорівна Моторіна. – Харків : ХНПУ, 2014. – 267 с.

9. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі : теоретичний аспект : монографія / Ірина Василівна Лов'янова. – Черкаси : Чабаненко Ю. А., 2014. – 368 с.
10. Сафонова І. Я. Компетентнісний підхід до навчання математики старшокласників [Електориний ресурс] / І. Я. Сафонова // Педагогічна освіта: теорія і практика. Педагогіка. Психологія. – 2014. – № 21. – С.53– 57 – Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Potip_2014_21_12.
11. Селевко Г. К. Компетентності і їх классификация / Г. К. Селевко // Народна освіта. – 2004. – № 4. – С. 138–143.
12. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с.
13. .Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / Микола Степанович Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. – № 1. – С. 35–39.
14. Вивальнюк Л. М. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл. / Л. М. Вивальнюк, О. І. Соломенко, Ю. В. Костарчук та ін. – Київ : Рад. шк., 1991. – 175 с.
15. Нефьодов Ю. М. Методи оптимізації в прикладах і задачах : навчальний посібник / Ю. М. Нефьодов, Т. Ю. Балицька. – Київ : Кондор, 2011. – 324 с.
16. Бех О. В. Математичне програмування : навч. посіб. / О. В. Бех, Т. А. Городня, А. Ф. Щербак. – Львів : Магнолія-2006, 2014. – 200 с.
17. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. для сам. вивчення дисципліни / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – Київ : КНЕУ, 2001. – 248 с.

18. Крушевський А. В. Математичне програмування в економіці та управлінні : навч.-метод. посіб. / А. В. Крушевський, М. Ф. Тимчук. – Київ : ІММБ, 2001. – 107с.
19. Толбатов Ю. А. Математичне програмування : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / Ю. А. Толбатов, Є. Ю. Толбатов. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. – 432 с.
20. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel : навч. посібник для студ. екон. спец. вузів / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов. – Київ : Четверта хвиля, 1998. – 207 с.
21. Гельман В. Я. Рішення математичних задач засобами Excel: Практикум. / В.Я. Гельман. – Київ: Видавничій дім «Слово», 2003. – 237 с.
22. Бугір М. К. Посібник по розв'язуванню задач з математичного програмування: навчальний посібник для студ. екон. спец. вищ. навч. 92 закладів / М. К. Бугір, Ф. П. Якімов ; Тернопільська академія народного господарства. – Тернопіль : [б.в.], 1996. – 208 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Задачі на побудову математичної моделі проблемної операції «вручну» та за допомогою табличного процесора Microsoft Office Excel

Розглянемо задачу планування виробництва у загальному вигляді. Для виготовлення n видів продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$ використовується m видів ресурсів $R_1, R_2, \dots, R_m$. Запаси ресурсів, норми витрат ресурсів за видами на виготовлення одиниці продукції, прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці (*).

Необхідно знайти такий план випуску продукції, за якого прибуток від її реалізації буде максимальним.

Необхідно:

1) скласти математичну модель задачі у загальному вигляді за даними таблиці (*);

2) побудувати математичну модель для випадку двох видів продукції і трьох видів ресурсів; вхідні дані за варіантами взяти з таблиці (**).

Таблиця (*)

Вид ресурсу	**Норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції**				**Запас ресурсу**
	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	**…**	$\boldsymbol{P_n}$	
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток від одиниці продукції	c_1	c_2	…	c_n	

Таблиця (**)

Варіант	$\boldsymbol{a_{11}}$	$\boldsymbol{a_{12}}$	$\boldsymbol{a_{21}}$	$\boldsymbol{a_{22}}$	$\boldsymbol{a_{31}}$	$\boldsymbol{a_{32}}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{c_1}$	$\boldsymbol{c_2}$
1	7	3	6	3	1	2	1365	1245	650	6	5
2	8	3	7	6	4	9	864	864	945	2	3
3	14	8	12	4	8	2	624	541	372	7	3

Додаток Б

Розв'язування класичних задач дослідження операцій «вручну» та за допомогою табличного процесора Microsoft Office Excel

1. У пунктах відправлення $A_1, A_2, A_3, \ldots$ знаходиться однорідний вантаж у кількості $a_1, a_2, a_3, \ldots$ відповідно, який необхідно перевезти до пунктів призначення $B_1, B_2, B_3, \ldots$, потреба кожного з яких становить $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Відома відстань між пунктами перевезень. Визначити такий план перевезень, при якому загальна кількість тоннокілометрів буде мінімальною. Вхідні дані згідно з варіантом наведено у табл. (***).

Необхідно:

1) скласти опорний план задачі різними відомими вам методами;

2) розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, а за опорний план обрати той, що складений методом північно-західного кута.

Таблиця (***)

Варіант	**Відстань між пунктами перевезень, км**	**Запаси пунктів відправлення, т**	**Потреба пунктів призначення, т**
1	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1 = 6$ $a_2 = 8$ $a_3 = 5$ $a_4 = 6$	$b_1 = 9$ $b_2 = 8$ $b_3 = 4$
2	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1 = 60$ $a_2 = 85$ $a_3 = 52$ $a_4 = 66$	$b_1 = 92$ $b_2 = 81$ $b_3 = 43$
3	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 14 & 15 & 39 \\ 25 & 12 & 31 \\ 27 & 26 & 12 \\ 13 & 18 & 32 \end{vmatrix}$	$a_1 = 26$ $a_2 = 28$ $a_3 = 25$ $a_4 = 26$	$b_1 = 29$ $b_2 = 28$ $b_3 = 34$

2. Для задачі вашого варіанта:

1) скласти опорний план задачі;

2) розв'язати транспортну задачу методом потенціалів; за опорний план обрати той, що складений методом північно-західного кута.

Варіант 1

Постачальник	**Споживач**	
I – 120	I – 120	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 6 & 12 & 9 \\ 9 & 8 & 12 \\ 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}$
II – 200	II – 245	
III – 130	III – 235	
IV – 150		

Варіант 2

Постачальник	**Споживач**	
I – 160	I – 80	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 25 & 19 & 26 \\ 23 & 24 & 23 & 20 & 28 \\ 29 & 27 & 28 & 15 & 27 \\ 25 & 20 & 17 & 19 & 29 \end{pmatrix}$
II – 200	II – 140	
III – 140	III – 200	
IV – 150	IV – 80	
	V – 150	

Варіант 3

Постачальник	**Споживач**	
I – 5	I – 4	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 55 & 47 & 48 \\ 54 & 48 & 47 \\ 61 & 53 & 55 \\ 60 & 56 & 52 \end{pmatrix}$
II – 4	II – 9	
III – 8	III – 10	
IV – 7		

3. Розв'язати запропоновану задачу угорським методом.

Наведена матриця витрат виконання 7 робітниками певних робіт. Розподілити роботи між робітниками, щоб сумарні витрати на виконання робіт були мінімальними.

Варіант 1

Роботи

Робітники	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	*5*	*17*	*5*	*12*	*11*	*6*	*4*
2	*10*	*9*	*6*	*10*	*12*	*16*	*4*
3	*9*	*3*	*2*	*8*	*13*	*14*	*8*
4	*13*	*1*	*7*	*11*	*7*	*18*	*19*
5	*1*	*7*	*12*	*8*	*3*	*1*	*5*
6	*3*	*11*	*13*	*9*	*14*	*20*	*21*
7	*10*	*2*	*6*	*6*	*15*	*15*	*22*

Варіант 2

Роботи

Робітники	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	*21*	*7*	*2*	*12*	*15*	*2*	*17*
2	*23*	*15*	*24*	*20*	*12*	*5*	*11*
3	*17*	*24*	*4*	*17*	*2*	*22*	*15*
4	*19*	*7*	*8*	*1*	*13*	*14*	*4*
5	*15*	*6*	*6*	*14*	*19*	*3*	*16*
6	*23*	*6*	*5*	*19*	*15*	*11*	*19*
7	*16*	*18*	*22*	*22*	*1*	*1*	*7*

Варіант 3

Роботи

Робітники	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	*2*	*4*	*5*	*10*	*4*	*6*	*8*
2	*3*	*6*	*4*	*13*	*6*	*7*	*9*
3	*4*	*7*	*10*	*5*	*10*	*4*	*5*
4	*6*	*5*	*12*	*4*	*7*	*5*	*4*
5	*7*	*4*	*13*	*6*	*6*	*7*	*5*
6	*10*	*8*	*5*	*2*	*8*	*9*	*10*
7	*11*	*9*	*4*	*8*	*4*	*5*	*4*