

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**О. А. Коновал**

**ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ  
ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ  
ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ  
НА ЗАСАДАХ  
ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ**

**Монографія**

**Кривий Ріг  
«Видавничий дім»  
2009**

УДК 538.3 (075)

ББК 22.33

К 64

**Коновал О. А.**

**К64 Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності** : монографія / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с. : іл. ISBN 978–966–177–047–7

У монографії поданий аналіз способів обґрунтування рівнянь Максвелла. Показано, що так звані фундаментальні експериментальні закони електродинаміки є наслідком принципів теорії відносності та закону Кулона. Пропонується нова наукова система інтерпретації фундаментальних законів електродинаміки, на основі якої розбудовується нова методична система навчання електродинаміки на засадах генералізації знань навколо принципу відносності та поняття електромагнітного поля.

Монографія розрахована на студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, учителів і викладачів фізики, науковців.

***Рецензенти:***

**В. В. Кідалов** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної фізики Бердянського державного педагогічного університету;

**О. І. Іваницький** – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики і методики викладання фізики Запорізького національного університету;

**В. П. Вовкотруб** – доктор педагогічних наук, професор кафедри фізики та методики її викладання Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

**Рекомендовано до видання вченою радою  
Криворізького державного педагогічного університету  
(протокол № 4 від 13.10.2008)**

ISBN 978–966–177–047–7

© Коновал О. А., 2009.

## ЗМІСТ

Передмова .....	7
<b>Розділ 1. Науковий і онтодидактичний аналіз електродинаміки та спеціальної теорії відносності ..</b>	<b>16</b>
<b>1.1. Науково-методичні основи вивчення спеціальної теорії відносності в педагогічних ВНЗ .....</b>	<b>17</b>
1.1.1. Основні положення СТВ .....	19
1.1.2. Лагранжیان релятивістської частинки .....	30
<b>1.2. Теоретичні та методичні засади вивчення електродинаміки у фаховій підготовці вчителя фізики. Структура викладання класичної та релятивістської електродинаміки в педагогічному ВНЗ .....</b>	<b>32</b>
1.2.1. Рівняння Максвелла як узагальнення експериментальних фактів....	32
1.2.1а. Рівняння Максвелла $div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .....	33
1.2.1б. Рівняння Максвелла $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ .....	34
1.2.1в. Рівняння Максвелла для струмів зміщення $rot\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ .....	38
1.2.1г. Рівняння Максвелла $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ .....	41
1.2.1д. Рівняння Максвелла $div\vec{B} = 0$ .....	42
1.2.1е. Система рівнянь Максвелла-Лорентца в локальній та інтегральній формах.....	44
1.2.1є. Рівняння Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі. ....	44
1.2.1ж. Метод електромагнітних потенціалів.....	46
1.2.1з. Елементи релятивістської електродинаміки в традиційній схемі вивчення електродинаміки. ....	48
1.2.2. Обґрунтування рівнянь Максвелла на основі принципу найменшої дії (ПНД) .....	51
1.2.2а. ПНД та рівняння руху ЗЧ в ЕМП.....	51
1.2.2б. Тензор електромагнітного поля.....	55
1.2.2в. Перша пара рівнянь Максвелла.....	58
1.2.2г. Друга пара рівнянь Максвелла. ....	59
<b>Висновки до розділу 1 .....</b>	<b>64</b>

<b>Розділ 2. Теоретичні та методичні основи вивчення властивостей магнітного поля стаціонарних і квазістаціонарних струмів на засадах теорії відносності.....</b>	<b>69</b>
<i>2.1. Огляд традиційних методик вивчення основних властивостей і понять стаціонарного та квазістаціонарного магнітного поля.....</i>	<i>69</i>
<i>2.2. Електричне поле рухомої зарядженої частинки та деякі його властивості .....</i>	<i>78</i>
<i>2.3. Особливості методики формування поняття «магнітне поле» та пояснення його релятивістської природи.....</i>	<i>87</i>
<i>2.4. Зауваження щодо змісту закону Біо-Савара-Лапласа та вивчення його в ортодоксальних методиках.....</i>	<i>98</i>
<i>2.5. Методика застосування та вивчення закону Біо-Савара в релятивістській формі .....</i>	<i>104</i>
<i>2.6. Механізм породження магнітного поля стаціонарними та квазістаціонарними струмами.....</i>	<i>118</i>
<i>2.7. Реальність, істина та еквівалентні описи явищ в електродинаміці.....</i>	<i>129</i>
<b>Висновки до розділу 2.....</b>	<b>138</b>
<b>Розділ 3. Науково-методичні засади становлення та розвитку релятивістських ідей при вивченні деяких нестаціонарних електромагнітних явищ .....</b>	<b>142</b>
<i>3.1. Історія відкриття закону електромагнітної індукції та огляд традиційних методик вивчення явища та закону електромагнітної індукції .....</i>	<i>142</i>
<i>3.2. Явище електромагнітної індукції в рухомих електричних колах .....</i>	<i>151</i>
<i>3.3. Зміна в часі потоку довільного векторного поля через рухому поверхню та субстанціональна похідна за часом векторного поля .....</i>	<i>153</i>
<i>3.4. Субстанціональна похідна за часом довільного векторного поля та фундаментальні закони електродинаміки .....</i>	<i>160</i>
<i>3.5. Непотенційність електричного поля рухомої зарядженої частинки та закон електромагнітної індукції.....</i>	<i>165</i>
<i>3.6. Методика застосування узагальненого закону електромагнітної індукції .....</i>	<i>178</i>
<i>3.7. Явище електромагнітної індукції при обертанні магнетиків в стаціонарному магнітному полі .....</i>	<i>188</i>
<b>Висновки до розділу 3.....</b>	<b>196</b>

<b>Розділ 4. Формування уявлень про єдність електричного та магнітного полів .....</b>	<b>200</b>
<b>4.1. Огляд методик формування поняття «електромагнітне поле» .....</b>	<b>200</b>
<b>4.2. Огляд різних способів обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля.....</b>	<b>201</b>
4.2.1. Коваріантність рівнянь Максвелла та формули перетворення компонент електромагнітного поля .....	202
4.2.2. Спосіб, заснований на трансформаційних властивостях компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої .....	204
4.2.3. Спосіб, що ґрунтується на релятивістській інваріантності виразу для сили Лорентца .....	206
4.2.4. Формули перетворення компонент вектора поляризації та вектора намагнічування при зміні системи відліку .....	208
<b>4.3. Елементарне обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля.....</b>	<b>212</b>
4.3.1. Принцип відносності та основні експериментальні закони електродинаміки .....	212
4.3.2. Спосіб, що ґрунтується на детальному аналізі властивостей електромагнітного поля зарядженої частинки, що рухається рівномірно та прямолінійно ( $v < c$ ).....	220
4.3.3. Електромагнітне поле зарядженої нитки, що рухається рівномірно та ФПКЕМП.....	223
<b>4.4. Методика формування поняття про відносність поділу електромагнітного поля на електричне та магнітне поля .....</b>	<b>225</b>
4.4.1. Основні наслідки формул перетворення компонент електромагнітного поля .....	225
4.4.2. Приклади застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля для аналізу простих задач .....	229
<b>4.5. Комп'ютерна програма для моделювання відносності електричного та магнітного полів.....</b>	<b>247</b>
<b>Висновки до розділу 4.....</b>	<b>261</b>
<b>Розділ 5. Релятивістські ефекти при описі взаємодії провідників з квазістаціонарними струмами.....</b>	<b>263</b>
<b>5.1. Огляд традиційних, загальноприйнятих уявлень про природу стаціонарного електричного поля провідника зі струмом.....</b>	<b>263</b>
<b>5.2. Релятивістська природа стаціонарного електричного поля провідника зі струмом.....</b>	<b>274</b>
<b>5.3. Об'ємний заряд провідника з постійним струмом та умова нейтральності провідника зі струмом .....</b>	<b>282</b>

<b>5.4. Релятивістський опис взаємодії між двома довгими провідниками зі струмами .....</b>	<b>294</b>
<b>Висновки до розділу 5.....</b>	<b>314</b>
<b>Додатки .....</b>	<b>318</b>
<b>Додаток А .....</b>	<b>318</b>
<b>Додаток Б .....</b>	<b>320</b>
<b>Додаток В .....</b>	<b>321</b>
<b>Післямова .....</b>	<b>326</b>
<b>Список використаних джерел .....</b>	<b>329</b>

## ПЕРЕДМОВА

У зв'язку з активізацією процесу євроінтеграції України, системних змін зазнає середня та вища фізична освіта.

Реформування стосується як змісту фізичної освіти, так форм і методів навчання. Мета реформування вищої та середньої фізичної освіти полягає у створенні такої системи підготовки фахівців з фізики, яка відповідала б сучасному стану науки та технологій і яка не тільки дозволяла б випускникам фізичних спеціальностей плідно працювати, а й сприяла б розвитку творчих здібностей, самореалізації особистості. Мета навчання фізиці в педагогічному вищому навчальному закладі – опанування студентом фундаментальних наукових і професійних знань, умінь і навичок, необхідних для професійної діяльності на рівні вимог сьогодення, формування фізичного стилю мислення, підготовка фахівця, здатного самостійно, творчо працювати.

Усе це зумовлює підвищення вимог до фахової підготовки учителів фізики. Однією з концептуальних засад при реалізації цих цілей є фундаменталізація освіти.

Уважаємо, що фундаменталізація фізичної освіти означає перш за все реалізацію дидактичного принципу науковості, тому технологія вивчення електродинаміки повинна відповідати методології наукового пізнання.

По-друге, фундаменталізація фізичної освіти означає, що вивчення фізики повинно базуватися на фундаментальних принципах фізики та відображати зокрема діалектику емпіричного та теоретичного в структурі фізичного знання, формувати світогляд і фізичний стиль мислення студента.

«Наука – це спроба привести хаотичне розмаїття наших дослідних фактів у відповідність до деякої єдиної системи мислення. У цій системі окремі дослідні зіставляються з теоретичною структурою так, щоб відповідність, яка впливає звідси, була однозначною й переконливою.

Чуттєві сприйняття нам даються, але теорія, покликана їх інтерпретувати, створюється людиною. Вона є результатом виключно трудомісткого процесу пристосування: гіпотетичного, ніколи остаточно не закінчуваного, постійно схильного до суперечок і сумнівів.

Спосіб утворення понять у науці відрізняється від вживаного в повсякденному житті не своїми принципами, а лише точнішим визначенням понять і наслідків, ретельнішим і систематичним відбором експериментального матеріалу та більшою економією думки.

Під цим останнім ми розуміємо **прагнення звести всі поняття й співвідношення до можливо меншого числа логічно незалежних один від одного основних аксіом і понять**» [258, с. 229].

Якісна підготовка вчителя фізики неможлива без знань фундаментальних фізичних принципів. Це відзначають багато дослідників. Прові-

дними дидактами (О. І. Бугайов, Г. Ф. Бушок, С. У. Гончаренко, А. В. Касперський, Є. В. Коршак, О. І. Ляшенко, В. Ф. Савченко, О. В. Сергєєв, М. І. Шут) наголошується на необхідності тісного зв'язку методики вивчення дисципліни з методологією базисної науки, бо сутністю навчання є метод мислення науки.

Спеціальна теорія відносності є фундаментальною (загально фізичною) релятивістською концепцією простору-часу, яка разом із законами та принципами квантової теорії лежить в основі сучасної фізичної картини світу. Релятивістські ідеї пронизують усі розділи фізики. Значимість філософсько-світоглядного потенціалу спеціальної теорії відносності, її освітня та виховна функція визначають її загальнолюдську цінність як невід'ємного елемента культури не тільки фізика за фахом, але й сучасної освіченої людини.

Закони електродинаміки лежать в основі роботи безлічі електротехнічних і електронних пристроїв, сучасні технології базуються на фундаментальних фізичних теоріях, а електродинаміка та спеціальна теорія відносності є фундаментальними фізичними теоріями, які визначають не тільки рівень відповідної фізичної освіти, але й світогляд та стиль мислення фахівця.

Стало вже традицією вивчати електродинаміку як науку, що базується на фундаментальних експериментальних законах (закони Кулона, Біо-Савара, електромагнітної індукції), які при вивченні, при мовчазній згоді методистів, уважаються зовсім між собою не зв'язаними; вони інтерпретуються й розглядаються як різномірні факти; а між тим **уся електродинаміка є релятивістською теорією.**

Але вивчення її **не базується на принципах теорії відносності.** У зв'язку з цим, на наш погляд, структура вивчення електродинаміки не відповідає суті й методології цього розділу фізики як наукової галузі. Так, незважаючи на польову природу електромагнітних явищ і процесів вивчення й формулювання в процесі навчання більшості законів електродинаміки засновано на уявленнях дальності. Тут перш за все мова йде про закон Біо-Савара та теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції.

Історично так склалося, що принцип відносності найбільш чітко й прозоро проявив себе в електромагнітних задачах. Спеціальна теорія відносності виникла з протиріч, що з'явилися в електродинаміці рухомих середовищ, тобто власне з електродинамічних проблем.

Електродинаміка як система наукового фізичного знання від самого початку її створення була релятивістськи-коваріантною теорією, але ця особливість не знайшла належного відображення ні в підручниках, ні в навчальних програмах, ні в існуючих методиках вивчення електромагнетизму.

З усіх фізичних теорій, що вивчаються в педагогічному ВНЗ, тільки електродинаміка є найбільш точною та адекватною реальності теорією.



Це зумовлене, очевидно, тим, що об'єктом вивчення цієї теорії є релятивістський феномен – електромагнітне поле. На жаль, навчальні програми складені так, що принципові особливості цього об'єкта вивчаються недостатньо й поверхово.

А тому вивчення електродинаміки як у вищих навчальних закладах, так і в середніх закладах освіти переважно носить електротехнічний характер і зовсім не базується на принципах спеціальної теорії відносності.

Спостерігається деяка відчуженість змісту електродинаміки як навчальної дисципліни від релятивістської фізики.

Не знаходить також адекватного відображення при вивченні електродинаміки характерна тенденція розвитку сучасної фізики: спираючись на невелике число основних принципів, пояснити всю сукупність фізичних явищ і законів цього розділу фізики.

Однією зі складових світогляду А. Ейнштейна було переконання, що найбільш адекватним для фізики є гіпотетико-дедуктивний шлях пізнання і навчання. Суть його полягає в тому, що спочатку формулюються теоретичні принципи, як узагальнення дослідних фактів, а потім з цих принципів методом дедукції одержують наслідки, що відповідають сукупності емпіричних даних.

«Ці фундаментальні поняття й закони, які далі не можуть бути зведені до чогось іншого, утворюють невід'ємну частину теорії, яка не піддається раціональному трактуванню. Найважливіша мета будь-якої теорії полягає в тому, щоб цих основних елементів, що не зводяться до інших, було якомога менше, і щоб вони були якомога простіші, проте так, щоб це не виключало точного відображення того, що міститься в досліді» [258, с. 183].

Таким чином, гіпотетико-дедуктивний шлях пізнання й навчання, згідно з А. Ейнштейном, полягає в тому, щоб у процесі вивчення фізики сформулювати (сконструювати, вибрати, зробити) ці основні елементи максимально простими і нечисленними, не пропустивши при цьому адекватного викладу будь-чого, що міститься у відповідних фізичних дослідях.

«Звідси витікає, що вищим обов'язком фізиків є пошук тих загальних елементарних законів, з яких шляхом чистої дедукції можна одержати картину світу. До цих законів веде не логічний шлях, а тільки заснована на проникненні в суть досліді інтуїція» [258, с. 40].

Але в той же час, далі стверджує А. Ейнштейн, «ніхто з тих, хто дійсно заглиблювався в предмет, не стане заперечувати, що теоретична система практично однозначно визначається світом спостережень, хоча **ніякий логічний шлях не веде від спостережень до основних принципів теорії**» [258, с. 41].

Ми навели так багато висловів А. Ейнштейна не тільки тому, що вони є непересічним внеском у методологію фізики й ніколи не стануть надбанням історії, але й тому, що після нього, на нашу думку, по суті питання сказано не багато. Практично всі міркування та висновки філо-

софів і методологів зводяться до інтерпретації ідей А. Ейнштейна. Як показала практика, співвідношення досліду та мислення (теорії) в розумінні А. Ейнштейна підтверджується й історичним розвитком фізики та сучасною методологією науки.

Ми звертаємося до думок А. Ейнштейна, бо вважаємо, що його світогляд, його розуміння ролі теоретичного та емпіричного в пізнанні й навчанні є актуальними та адекватними стану науки й логіки наукових досліджень.

Усе це також відповідає й нинішнім задачам реформування змісту фізичної освіти в напрямку фундаменталізації її.

За словами А. Ейнштейна в пізнанні та в навчанні фізики повинно бути **«прагнення звести всі поняття й співвідношення до можливо меншого числа логічно незалежних один від одного основних аксіом і понять»** [259, с. 229].

«Мета... фізики полягає в тому, щоб створити систему понять, засновану на можливо меншому числі логічно незалежних гіпотез, і яка дозволила б встановити причинний взаємозв'язок всього комплексу фізичних процесів» [259, с. 55].

Що стосується дидактики фізики, то це повинно означати, що при вивченні будь-якого розділу фізики необхідно спиратися на невелике число фундаментальних фізичних законів.

У той же час стало вже традицією, як ми уже відзначали, вивчати електродинаміку як науку, що ґрунтується на начебто «фундаментальних» дослідних фактах (закон Біо-Савара, закон Ампера-Грассмана, закон електромагнітної індукції) [127], які при вивченні вважаються відносно відокремленими, а то й зовсім не пов'язаними між собою.

У цьому і сила і слабкість цієї методики. Сила в наочності, в опорі на начебто очевидний емпіричний факт, який важко заперечити і який у той же час веде до деякої безапеляційності, до уявлення про односторонність фізичного пізнання з прихованим акцентом на емпіризм. Такий шлях, очевидно, не сприяє розвитку критичного мислення, зменшує роль теоретичного пізнання, гальмує психічний розвиток і формування фізичного стилю мислення учня і студента [162].

Фактично ж подібні експерименти ніколи не можуть бути (і не могли бути) проведені з необхідною точністю та чистотою, як через похибки, так і через необхідність користуватися деякою теорією при проведенні та інтерпретації результатів експерименту.

О. І. Ляшенко відзначав, що «Ця схема, відтворюючи емпіричний шлях пізнання, здається на перший погляд всеосяжною. Разом з тим вона не відбиває багатоплановості й розмаїття навчання в змістовному та організаційно-процесуальному його аспектах. Зокрема, применшує роль теоретичного знання в навчанні» [162, с. 3]. «Забобон, який зберігся й до цих пір, полягає в переконанні, ніби факти самі по собі, без вільної теоретичної побудови, можуть і повинні привести до наукового пізнання» (А. Ейнштейн). Не існує прямого й логічного шляху від експерименталь-

них фактів до теоретичного принципу. І особливо цей важливий момент методології наукового пізнання й навчання стосується зв'язку між «фундаментальними експериментальними законами електродинаміки» та рівняннями Максвелла. «Рівняння Максвелла є прикладом фундаментального закону, явно вгаданого, а не «виведеного», у ригористичному сенсі цього слова, з експериментальних даних» [250, с. 319].

У той же час А. Ейнштейн стверджував, що «не існує жодного індуктивного методу, який міг би вести до фундаментальних понять фізики» [258, с. 213]. «...пізнання не може розцвісти з голої емпірії. Такий розквіт можливий тільки з порівняння того, що придумане, з тим, що спостерігається» [258, с. 124]. «Фізика є логічною системою мислення, що розвивається, основи якої можна одержати не виділенням їх якими-небудь індуктивними методами з досліду, а лише вільною вигадкою» [258, с. 226].

Таким чином, фундаменталізація фізичної освіти в нинішніх умовах – це реалізація програми А. Ейнштейна.

Існуючі нині методики вивчення електродинаміки основані на об'єднанні значного числа окремих дослідних фактів у формі емпіричних законів, з яких шляхом порівняння встановлюються загальні закони.

Тобто при вивченні електродинаміки не знаходить повного і адекватного відображення характерна тенденція розвитку сучасної фізики: спираючись на невелике число основних принципів, сформулювати та пояснити всю сукупність фізичних явищ та законів відповідного розділу фізики.

Електродинаміка за своєю суттю є релятивістськи-коваріантною теорією, а *вивчення її у вищому педагогічному навчальному закладі зовсім не базується на принципах теорії відносності*. Достатньо переглянути чинні навчальні програми з фізики, щоб упевнитися в тому, що при вивченні електродинаміки як у вищих педагогічних, так і в середніх навчальних закладах не передбачено використання результатів і методів спеціальної теорії відносності, незважаючи на те, що ці розділи фізики органічно пов'язані між собою.

І тільки коли мова заходить про відносність електричного та магнітного полів, згадується спеціальна теорія відносності та перетворення Лорентца. А між тим дослідження А. А. Пінського, О. М. Малініна, О. М. Матвеева показали, що релятивістські ідеї необхідно вводити якомога раніше в курси фізики як вищих, так середніх навчальних закладів. Слід зазначити, що й раніше були спроби викладати електродинаміку на основі теорії відносності, але вони були не до кінця послідовними.

Існують спроби вивчати електродинаміку (електромагнетизм) у рамках курсу загальної фізики, виходячи із системи рівнянь Максвелла. Але цей підхід має проблеми методичного характеру, пов'язані з тим, що не вдається обґрунтувати рівняння Максвелла вже на самому початку вивчення електродинаміки.

Існують також спроби вивчати електродинаміку, використовуючи принцип відносності. Так, на основі перетворень Лорентца під час вивчення магнітного поля показують відносність електричного та магнітного полів та релятивістську природу магнетизму (О. Н. Матвеев, Р. Фейнман, Е. Парселл, А. А. Пінський та інші). Це значний крок вперед.

Але вказані автори розв'язують тільки незначну частину питань дидактики електромагнетизму.

Окрім того, запропоновані ними підходи є не завжди послідовними й коректними. У рамках отриманих ними результатів електродинаміка не набуває рис суворо релятивістської теорії.

В останні роки актуальною є методична концепція, яка пов'язана з посиленням ролі фізичних теорій і теоретичних узагальнень при вивченні фізики (Б. Є. Будний, Г. Ф. Бушок, А. А. Пінський, В. Г. Разумовський, В. В. Мултановський, О. І. Ляшенко та інші). Ця концепція не тільки не втратила свого значення й зараз – проблема її реалізації при вивченні електродинаміки стоїть ще більш гостро, ніж раніше.

Подальший розвиток ідей Ейнштейна ми знаходимо в методичному підході генералізації знань навколо фундаментальних фізичних теорій, запровадженому В. Г. Разумовським та в реалізації більш глобального принципу фундаменталізації освіти [38].

Так, В. П. Сергієнко та М. І. Шут відзначають, що принцип генералізації «...передбачає виділення однієї чи декількох стрижневих ідей і групування матеріалу навколо них. Найбільш послідовно принцип генералізації реалізований у шкільних курсах фізики як в Україні, так і за рубежом. При цьому в якості стрижневих ідей обрані фізичні теорії» [49, с. 4].

У сучасній дидактиці наголошується на необхідності органічного зв'язку методики вивчення дисципліни з методологією базисної науки.

С. У. Гончаренко наголошував, що «...надмірне дотримання історії відкриттів, відмова від належного теоретичного аналізу й відсутність загальної методології привели до того, що сьогодні цей курс по суті розпався на сукупність окремих спецкурсів, мало пов'язаних один з одним. Йдеться не лише про необхідність збільшення обсягу курсу фізики. Потрібна його якісна перебудова, яка забезпечувала б відповідність фізики як навчальної дисципліни сьогоднішній логіці й структурі фізики як науки» [38, с. 7].

Тому у зв'язку з вище сказаним, на наш погляд, зміст, структура і методика вивчення електродинаміки не відповідає суті й методології цього розділу фізики як наукової галузі знань, оскільки її вивчення в недостатній мірі базується на принципах теорії відносності.

Тобто ми вважаємо, що при вивченні електродинаміки повинен бути реалізований принцип фундаменталізації [38; 125].

Наше завдання полягає в тому, щоб найкоротшим шляхом, на основі найменшого числа фундаментальних принципів в процесі вивчення електродинаміки, обґрунтувати основні положення електромагнетизму на засадах теорії відносності та пояснити їх фізичну суть, визнаю-

чи від самого початку систему рівнянь Максвелла як істину, що підтверджується досвідом.

Іншими словами, наше завдання полягає в реалізації програми А. Ейнштейна при вивченні електродинаміки у вищих педагогічних навчальних закладах.

Таким чином, виникає потреба в науково-методичному обґрунтуванні та розробці нової науково-методичної системи навчання електродинаміки у вищих педагогічних і середніх загальноосвітніх навчальних закладах.

Актуальність такої постановки проблеми зумовлена також невідповідністю між:

- формальним і незадовільним вивченням електродинаміки та спеціальної теорії відносності не тільки в школі, а й у вищому педагогічному навчальному закладі та надзвичайно фізично глибоким їх науковим змістом;

- другорядним місцем спеціальної теорії відносності в курсах фізики середніх і вищих навчальних закладів та фундаментальним значенням теорії відносності в сучасній фізиці й зокрема в електродинаміці;

- існуючою науково-методичною підготовкою учителів фізики та необхідністю організації ними процесу вивчення електродинаміки учнями в СНЗ на рівні сучасних вимог;

- надзвичайно великою роллю електродинаміки й спеціальної теорії відносності у формуванні фізичного (наукового) стилю мислення й наукової картини світу та формальним, а інколи й незадовільним їх вивченням.

У студентів складається враження, що спеціальна теорія відносності не має відношення до повсякденних електродинамічних фізичних процесів, бо чомусь вважається, що ефекти спеціальної теорії відносності значимо можуть проявлятися тільки при русі систем відліку чи тіл зі швидкостями, близькими до швидкості світла у вакуумі.

Такі уявлення не відповідають фізичній реальності та є методично й методологічно шкідливими. Застосування принципів спеціальної теорії відносності для обґрунтування основних законів класичної та релятивістської електродинаміки продемонструє «роботу» принципів спеціальної теорії відносності й буде сприяти більш глибокому розумінні суті електродинаміки та спеціальної теорії відносності.

Електродинаміка є релятивістською теорією (наприклад, рівняння Даламбера разом умовою калібровки Лорентца коваріантні відносно перетворень Лорентца). І оскільки електродинаміка вивчає взаємодію між зарядженими частинками, струмами та електромагнітним полем, вивчає властивості електромагнітного поля, яке створюється цими та іншими зарядженими частинками, то природно припустити, що ця коваріантність закладена в суті та механізмах взаємодії двох рухомих заряджених частинок.

**Провідний концептуальний задум дослідження** ґрунтується на припущенні, що обґрунтування основних законів електродинаміки на засадах спеціальної теорії відносності й дійсно фундаментального експериментального закону Кулона та створення методики навчання електродинаміки на основі теорії відносності зумовить істотне поліпшення фахової підготовки майбутнього вчителя фізики.

Мета дослідження полягає в теоретичному обґрунтуванні основних законів електродинаміки методами спеціальної теорії відносності й теоретичному та методичному обґрунтування технології вивчення електродинаміки у вищих педагогічних начальних закладах на принципах теорії відносності.

Були сформульовані та розв'язувалися наступні завдання:

– провести науковий, методологічний і онтодидактичний аналіз змісту електродинаміки та теорії відносності.

– проаналізувати методики викладання електродинаміки, що пропонуються в існуючих підручниках і посібниках.

– спираючись на методи спеціальної теорії відносності, обґрунтувати основні закони електродинаміки. Проаналізувати одержані результати, розглянути граничні випадки, зробити перевірку результатів щодо відповідності дослідним даним;

– розробити, а також теоретично й практично обґрунтувати методичні основи вивчення електродинаміки на послідовно релятивістських засадах у вищих педагогічних навчальних закладах.

У першому розділі монографії проводиться аналіз двох найбільш поширених способів обґрунтування рівнянь Максвелла в процесі вивчення електродинаміки у ВНЗ.

У наступних розділах показано як на основі фундаментального принципу відносності та закону Кулона обґрунтовуються основні закони електродинаміки.

Причому так звані фундаментальні дослідні закони електродинаміки (закон Біо-Савара-Лапласа, закон електромагнітної індукції та інші), які в сучасній фізиці розглядаються як незалежні, тобто фундаментальні, утрачають статус фундаментальних. Фундаментальними в цьому випадку залишаються тільки принцип відносності та закон Кулона.

Крім того, у рамках такого підходу вдається пояснити, виходячи з фізичних принципів, ряд електродинамічних явищ. Удається показати визначну роль спеціальної теорії відносності при поясненні та обґрунтуванні законів електродинаміки.

Тобто уся електродинаміка може бути побудована на послідовно релятивістських засадах і навколо поняття електромагнітного поля.

### У книзі прийняті такі скорочення

- ВЕП – вихрове електричне поле.  
ВНЗ – вищий навчальний заклад.  
ВСВ – власна система відліку.  
ЕМ – електромагнітний (електромагнітне).  
ЕМІ – електромагнітна індукція.  
ЕМП – електромагнітне поле.  
ЕП – електричне поле.  
ЗТВ – загальна теорія відносності.  
ЗЧ – заряджена частинка.  
КЕТ – класична електронна теорія.  
ЛСВ – лабораторна система відліку.  
МП – магнітне поле.  
ПНД – принцип найменшої дії  
ПВ – принцип відносності.  
ППС – провідник з постійним струмом.  
РЗЧ – рухома заряджена частинка.  
РМ – рівняння Максвелла.  
СВ – система відліку.  
СЕППС – стаціонарне електричне поле постійного струму.  
СК – система координат.  
СН – співвідношення невизначеностей.  
СНЗ – середній навчальний заклад.  
СТВ – спеціальна теорія відносності.  
ФП – формули перетворення.  
ФПКЕМП – формули перетворення компонент електромагнітного поля.  
 $\dot{f}$  – похідна за часом функції  $f$ .  
ЯЕМІ – явище електромагнітної індукції.

# Розділ 1

## НАУКОВИЙ І ОНТОДИДАКТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ТА СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Як відомо, електродинаміка вивчає взаємодію заряджених частинок і струмів між собою та з електромагнітним полем.

Рівняння Максвелла (РМ) встановлюють зв'язок між розподілом і рухом заряджених частинок та величинами, що характеризують електромагнітне поле, і становлять суть теорії електромагнітного поля. Тому обґрунтування РМ та розкриття їх фізичного змісту завжди є актуальною методичною проблемою при вивченні електродинаміки.

Огляд навчально-методичної літератури показує, що в основному використовуються такі методи обґрунтування РМ:

**А.** У дидактиці електромагнетизму певного поширення набула думка про те, що в основі класичної та релятивістської електродинаміки лежить деяка сукупність «фундаментальних» експериментальних фактів (закон Кулона, закон Біо-Савара-Лапласа, закон Ампера-Грассмана, закон електромагнітної індукції (ЕМІ) закон збереження заряду), з яких певним узагальненням (індуктивний метод) отримують рівняння Максвелла [179; 225; 118; 127].

**Б.** Кожний розділ електродинаміки (електростатика, електромагнітні хвилі і т. д.) розглядається окремо [178; 200; 201; 64; 224; 216; 209] і в рамках кожного розділу обґрунтовуються ті РМ, що описують відповідне коло явищ. А потім маємо узагальнюючий висновок про систему РМ, яка описує всю сукупність електродинамічних явищ.

Відмінність методів **А** і **Б** тільки в тому, що «фундаментальні» експериментальні факти в методі **А** розглядаються всі відразу й у результаті аналізу та узагальнення отримуються рівняння Максвелла [179; 225; 182; 127]. А в методі **Б** послідовно аналізуються електростатичні та магнітостатичні експериментальні факти, змінні електричні й магнітні поля та обґрунтовуються рівняння Максвелла [201; 64; 224].

Тому далі ми будемо розглядати ці два методи як один і назвемо його **традиційним**, який ґрунтується на узагальнені названих експериментальних законів.

**В.** РМ формулюються просто як постулати, справедливості яких підтверджується наслідками, що одержуються при їх застосуванні до реальних фізичних ситуацій [186].

Очевидно, що з методичної точки зору метод постулювання РМ при вивченні електродинаміки не є кращим. Процес обґрунтування, доведення будь-якого фізичного закону чи співвідношення є надзвичайно важливим для розкриття змісту цього закону, для формування фізичного



стилю мислення студентів і для розуміння діалектики емпіричного та теоретичного в структурі фізичного знання. І тому далі ми не будемо брати до уваги метод постулювання рівнянь Максвелла, вважаючи його неприйнятним при вивченні електромагнетизму.

Г. Метод, що ґрунтується на принципі найменшої дії (ПНД).

Він полягає в наступному. На основі загальних фізичних положень конструюється (або навіть постулюється) функція дії  $S$  для системи, що складається з електромагнітного поля й заряджених частинок у цьому полі, і з її допомогою та ПНД одержують потім рівняння руху зарядженої частинки та рівняння електромагнітного поля, РМ [154; 155; 14; 180].

На наш погляд цей метод обґрунтування РМ неприйнятний з огляду на його абстрактність, формальність і деяку відірваність від тих фізичних уявлень, які формуються в студентів-фізиків педагогічних університетів.

Але спочатку перейдемо до короткого огляду результатів і методів СТВ, а потім і до опису зазначених способів одержання рівнянь Максвелла.

### **1.1. Науково-методичні основи вивчення спеціальної теорії відносності в педагогічних ВНЗ**

Фізика, як свідчить історія розвитку науки, завжди намагалася розгадати таємниці природи, використовуючи для цього якнайменше узагальнюючих понять. Серед визначних фізиків особливе місце займають І. Ньютон, Д. К. Максвелл та А. Ейнштейн – учені, які досягли найбільших успіхів у пізнанні законів природи.

У XVIII столітті І. Ньютон розгадав природу земного тяжіння та об'єднав його з небесною гравітацією. Два століття потому Д. К. Максвелл об'єднав сили електрики та магнетизму, показавши, що світло є проявом такої єдності.

У 1905 р. А. Ейнштейн об'єднав поняття простору та часу, а через одинадцять років показав, що ньютонівська гравітація є проявом цього об'єднання, а саме описується кривиною чотиривимірного простору-часу. Так наука збагатилася двома геніальними відкриттями – спеціальною теорією відносності та загальною теорією відносності (ЗТВ).

Спеціальна теорія відносності, створена А. Ейнштейном у 1905 р., означала перегляд усіх уявлень класичної фізики й головним чином уявлень про простір і час. Тому ця теорія, відповідно до свого основного змісту, є фізичною теорією простору й часу. Її виникнення – новий переворот у фізичному світогляді в розумінні таких понять як простір і час, маса та енергія, абсолютність і відносність і т. п.

Постулати теорії відносності приводять до нових поглядів на властивості простору-часу, дають можливість передбачити нові фізичні явища (поперечний ефект Доплера, збільшення часу життя мікрочасти-

нок зі зростанням їх швидкостей), точно описати ряд фізичних явищ (рух частинок в електромагнітних полях, явище аберації, ефект Доплера), одержати рівняння руху в зовнішніх полях, які відповідають дійсності (релятивістське рівняння руху, функція Лагранжа для релятивістських частинок, закон збереження енергії-імпульсу).

Із виникненням теорії відносності постала гостро проблема істинності фізичної теорії, означення меж її застосування.

Основні положення теорії відносності перестали бути здобутком «чистої науки», як це було на зорі її виникнення. Вони лежать в основі сучасної прискорюючої техніки, фізики ядра та елементарних частинок, ядерної енергетики, квантової оптики, електродинаміки.

Усі наслідки теорії відносності експериментально підтверджені. Наприклад, зв'язок між масою та енергією, який систематично підтверджується роботою ядерних електростанцій, а також рядом інших ядерних реакцій, які проводяться в різних лабораторіях.

Усі закони електродинаміки та наслідки РМ можна теж розглядати як підтвердження СТВ, оскільки ЕМП є релятивістським об'єктом і тому повинне описуватися відповідно до вимог СТВ. З іншого боку, опис усіх електродинамічних явищ як у рамках класичної електродинаміки, так і в рамках квантової електродинаміки підтверджується в експериментах з дивовижною точністю [220].

Усе це дозволяє стверджувати, що за 100 років, які пройшли з дня створення теорії відносності, вона затвердилася як струнка, теоретично бездоганна і така, що цілком виправдала себе на практиці, фізична теорія, частка сучасної фізичної картини світу.

Сьогодні важко собі уявити розвиток науки без цих відкриттів, які стали основою сучасного наукового світогляду, породили нові напрямки фізики та астрономії.

Природно, що вона повинна зайняти належне їй місце й у практиці викладання фізики.

Але на жаль, як ми відзначали неодноразово, при вивченні електродинаміки майже не використовуються положення та методи СТВ.

Основні положення й висновки спеціальної теорії відносності широко використовуються на практиці для розрахунку енергетичного виходу ядерних реакцій, при проектуванні й створенні потужних прискорювачів частинок, наприклад, синхрофазотрону. Теорія, що має таке важливе значення на практиці, заслуговує на більш широке представництво при вивченні електромагнетизму як в середній школі, так і особливо в вищій школі. Крім того, вивчення спеціальної теорії відносності необхідне з метою формування наукового світогляду учнів і студентів.

Отже, нині є актуальним вивчення основних положень спеціальної теорії відносності – однієї з найважливіших сучасних теорій, що має важливе світоглядне та політехнічне значення при вивченні фізики.

### 1.1.1. Основні положення СТВ

I. Спеціальна теорія відносності, яка вивчає рух, взаємодію тіл, фізичні процеси в інерціальних системах відліку з урахуванням кінцевої швидкості передачі сигналів (взаємодій), була створена в основному Альбертом Ейнштейном у 1905 році. Але суть її полягає в об'єднанні простору й часу.

II. Загальна теорія відносності (ЗТВ) або теорія гравітації – вивчає фізичні процеси в неінерціальних системах відліку й одночасно є релятивістською теорією гравітації. ЗТВ створена незалежно один від одного А. Ейнштейном та Д. Гілбертом в 1916 році.

*Теорія відносності – це фізична теорія про простір і час.*

Але суть теорії відносності, зокрема спеціальної теорії відносності – в єдності простору та часу й у тому, що геометрія цього простору-часу псевдоевклідова. Але в основі СТВ лежать **постулати теорії відносності**.

**I. Принцип відносності**, який стверджує, що всі інерціальні системи відліку рівноправні для опису довільного фізичного явища.

Наведемо ще декілька еквівалентних формулювань принципу відносності.

Рівномірний та прямолінійний рух системи відліку не впливає на хід довільного фізичного явища.

У всіх інерціальних системах відліку одне й теж фізичне явище протікає однаково при умові, що зовнішні та початкові умови однакові.

Диференційні рівняння, що описують будь-який фізичний процес в СВ  $K$  та СВ  $K'$  мають однакову форму. Це означає, що основні рівняння фізики повинні бути коваріантними відносно певних перетворень координат простору й часу.

**II. Постулат сталості швидкості світла**: швидкість світла у вакуумі однакова в усіх системах відліку й не залежить від швидкості та напрямку руху системи відліку та джерела світла.

Вихідним поняттям СТВ є поняття події, яка характеризується 4 числами  $x, y, z, t$  – місцем настання та часом настання події.

Г. Мінковський стверджував, що «Предметом нашого сприйняття завжди є тільки місце та час взяті разом. Ніхто ще не спостерігав будь-якого місця інакше, ніж у деякий момент часу й будь-який час інакше, ніж у деякому місці».

Оскільки подія характеризується координатами  $x, y, z, t$ , то вся сукупність координат фізичних подій в довільній системі відліку утворює 4-вимірний простір, причому зв'язок між координатами одного й того ж простору у двох інерційних системах відліку дається перетвореннями Лорентца.

Так, при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  просторові та часові координати події перетворюються згідно з перетвореннями Лорентца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - B^2}}; y' = y; z' = z; t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad (1.1)$$

де  $B = \frac{V}{c}$ ,  $\vec{V}$  – швидкість руху системи відліку (СВ)  $K'$  відносно СВ  $K$ ;  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

Щоб знайти обернені перетворення, треба розв'язати рівняння (1.1) відносно  $x$  та  $t$  і одержимо:

$$x = (x' + Vt')\Gamma; y = y'; z = z'; t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \quad (1.2)$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}$ .

Але простіше запам'ятати правило: **при переході від однієї СВ до іншої у формулах перетворення слід штриховані величини замінити на нештриховані, а перед швидкістю  $\vec{V}$  поставити протилежний знак.**

Момент часу  $t'(x, t)$ , який визначається перетвореннями Лорентца (1.1) – це те, що показує годинник із СВ  $K'$ , який знаходиться в цю мить (момент  $t$ ) у точці  $x$  СВ  $K$ . Таким чином, годинник з набору годинників СВ  $K'$ , який буде в точці  $x$ , показує момент  $t'$ , що не збігається з часом, який показує годинник із СВ  $K$ .

Якщо  $x$  – це координата деякої точки (події) в СВ  $K$  і годинник в цій системі відліку показує момент часу  $t$ , то координата цієї події з точки зору СВ  $K'$  буде  $x'$ , (1.1).

Просторово-часові відношення між фізичними об'єктами та явищами в СТВ моделюються з допомогою 4-вимірного простору та його властивостей.

Так, метрика в 4-вимірному просторі СТВ невимушено впливає з теоретичних узагальнень сукупності експериментальних фактів.

Сукупність експериментальних фактів привела А. Ейнштейна до формулювання принципів СТВ, а останні дають вираз для квадрату інтервалу між двома нескінченно близькими подіями [154; 155; 227]:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = inv.$$

Тобто з постулатів теорії відносності впливає, що квадрат «віддалі» між двома нескінченно близькими подіями дорівнює квадрату інтервалу між цими двома подіями:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.3)$$

і який є інваріантною величиною.

Таким чином, можна стверджувати, що постулати СТВ дозволяють визначити квадрат віддалі між двома нескінченно близькими подіями  $ds^2$ . Оскільки значення  $ds^2$  не залежить від вибору СВ, то вираз для квадрату інтервалу можна використати для введення метрики в 4-вимірному просторі в довільній ІСВ. І таким чином, перетворити 4-вимірний многовид в простір-час Мінковського. Точками цього 4-вимірного простору-часу являється сукупність всіх подій.

Тобто 3-вимірний простір і одновимірний час об'єднуються в єдиний псевдоевклідовий простір-час Мінковського. В основі об'єднання простору й часу лежить вираз для  $ds^2$ .

Інваріантність квадрату інтервалу приводить до нових поглядів і уявлень щодо природи просторово-часових відношень. Хоча й зараз видно з форми (1.3), що як просторова віддаль, так і часова «віддаль» між подіями змінюються (мають відносний характер) при переході від однієї системи відліку до іншої, а квадрат інтервалу  $ds^2$  залишається незмінним.

Таким чином, наслідком постулатів теорії відносності є об'єднання в єдиний 4-вимірний простір-час Мінковського 3-вимірного простору класичної фізики та незалежного від простору одновимірного часу.

***Абсолютна величина квадрат інтервалу між подіями інваріанта, але кожна окремо взята величина часового й просторового проміжку між цими подіями залежать від СВ, тобто величини просторових і часових проміжків носять відносний характер. У цьому суть спеціальної теорії відносності. Простір і час єдині.***

***В абсолютності інтервалу та відносності окремо взятих просторових і часових проміжків,  $\Delta l$  і  $\Delta t$  якраз і виявляється більша глибока суть простору й часу, які об'єднуються в єдину форму існування матерії.***

Як уже відзначалося, СТВ є релятивістською теорією простору-часу, суть якої може бути виражена з допомогою «двох теоретичних схем» – (3+1)-вимірної та 4-вимірної [168; 172; 173; 167].

При вивченні СТВ у СНЗ, у курсі загальної фізики, на початковому етапі вивчення СТВ у курсі теоретичної фізики у вищих педагогічних навчальних закладів увага зосереджена на (3+1)-вимірному поданні теорії відносності.

Спочатку обґрунтовуються перетворення Лорентца (1.1) та (1.2). Обговорюються кінематичні наслідки перетворень (1.1) та деякі результати релятивістської динаміки.

І тільки потім, згідно з чинними навчальними програмами [204], відбувається знайомство з 4-вимірним поданням СТВ.

Відомо, що 4-вимірний методологія й методика вивчення СТВ відповідає «сутності теорії відносності більш високого порядку, ніж (3+1)-вимірний схема» [168].

Згідно 4-вимірної схеми (чи 4-вимірного подання СТВ) вивчення теорії відносності всі фізичні величини є певними «проекціями» більш загальних 4-вимірних величин на вісі тієї чи іншої системи відліку.

Фундаментальний модельний об'єкт теорії відносності – простір-час Мінковського з його псевдоевклідовою метрикою (1.3) – адекватно описується тільки в рамках 4-вимірного подання СТВ.

Якщо ввести уявну одиницю в означення «часової координати» події ( $x_4 = ict$ ), то одержуємо для квадрату інтервалу між двома подіями:

$$-ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Іншими словами, якщо в 4-вимірному просторі-часі Мінковського ввести 4-вимірний радіус-вектор, компоненти якого визначають координати події в СВ  $K$ ,

$$\mathfrak{R}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict), \quad (1.4)$$

то інтервал між двома подіями в просторі-часі Мінковського дорівнює

$$ds_M = \sqrt{\sum_i dx_i^2} = ids = icd\tau, \quad (1.5)$$

де  $ds$  – інтервал (1.3),  $i = \sqrt{-1}$ ,  $d\tau$  нескінченно малий інтервал власного часу.

З урахуванням (1.2) перетворення Лорентца для компонент 4-вимірного радіуса-вектора набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 - iBx'_4}{\sqrt{1 - B^2}}; \\ x_2 &= x'_2; \\ x_3 &= x'_3; \\ x_4 &= \Gamma(x'_4 + iBx'_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Прямі (1.1) і оберненні (1.2) перетворення Лорентца, відповідно, можна записати й так

$$x'_i = \alpha'_{ik} \cdot x_k; \quad (1.7)$$

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k, \quad (1.8)$$

де  $\alpha'_{ik}$  – це матриця перетворень Лорентца

$$\alpha'_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

а  $\alpha_{ik}$  – матриця обернених перетворень Лорентца

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Зупинимося більш детально на конкретних прикладах, що ілюструють евристичність і можливості 4-вимірного подання законів фізики, та опишемо фізичні наслідки, які випливають з формул перетворення компонент деяких 4-вимірних векторів.

**Означення:** 4-вимірним вектором називається сукупність 4 компонент (координат або проєкцій), які при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  перетворюються за формулами аналогічним перетворенням Лорентца для компонент 4-радіус-вектора (1.6).

Тобто, якщо є 4-вимірний вектор з компонентами

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4), \quad (1.11)$$

то компоненти його при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  перетворюються згідно з формулами

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \Gamma(A'_1 - iBA'_4); \\ A_2 &= A'_2; \\ A_3 &= A'_3; \\ A_4 &= \Gamma(A'_4 + iBA'_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Так, наприклад, якщо компоненти 4-швидкості визначити, як  $u_i = \frac{dx_i}{d\tau}$ , де  $d\tau$  – нескінченно малий проміжок власного часу (суттєво,

що похідна береться за власним часом:  $\frac{dx_i}{d\tau}$  – це відношення приросту

координати частинки за час  $d\tau$ , який реєструється годинником пов'язаним з частинкою), то з формул перетворення (1.12) компонент 4-швидкості при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  одержуємо не тільки формули додавання швидкостей за Ейнштейном,

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}; v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}; v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \quad (1.13)$$

а й корисне співвідношення, яке часто зустрічається в кінематичних формулах спеціальної теорії відносності.

Це співвідношення пов'язує абсолютні значення швидкості частинки в СВ  $K'$ ,  $\frac{v'}{c} = \beta'$ , та в СВ  $K$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ , а також швидкість руху самої СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ :

$$\Gamma \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{1}{1 + \frac{V v'_x}{c}}. \quad (1.13a)$$

Аналогічно визначаються й компоненти 4-вимірного прискорення:

$$b_i = \frac{du_i}{d\tau}. \quad (1.14)$$

Використовуючи для компонент 4-прискорення (1.14) формули (1.12), знаходимо закон перетворення проєкцій ньютонівського прискорення при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ :

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a'_x \left( \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} \right)^3; \\ a_y &= \left[ \left( 1 + \frac{V v'_x}{c^2} \right) a'_y - \frac{V v'_y}{c^2} a'_x \right] \frac{1 - B^2}{\left( 1 + \frac{V v'_x}{c^2} \right)^3}; \\ a_z &= \left[ \left( 1 + \frac{V v'_x}{c^2} \right) a'_z - \frac{V v'_z}{c^2} a'_x \right] \frac{1 - B^2}{\left( 1 + \frac{V v'_x}{c^2} \right)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Аналогічно визначаються компоненти 4-імпульсу:



$$\left. \begin{aligned} p_i &= m_0 u_i; \\ p_1 &= m_0 v_x \gamma; \\ p_4 &= ic\gamma m_0 \frac{c}{c} = \frac{i}{c} E, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

де  $m_0$  – маса спокою частинки;  $E = m_0 c^2 \cdot \gamma$  – повна енергія частинки в СВ  $K$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $v$  – швидкість руху частинки в СВ  $K$ .

Застосування (1.12) до компонент (1.16) приводить до формул перетворення просторових проекцій релятивістського імпульсу при переході від однієї системи відліку до іншої.

Одержуємо також універсальну формулу, згідно з якою перетворюється енергія будь-якої фізичної системи при зміні СВ

$$E = \Gamma(E' + Vp'_1).$$

Оскільки квадрат «довжини» будь-якого 4-вимірного вектора є інваріантом, то з урахуванням компонент (1.16) формулюється закон збереження енергії-імпульсу

$$\sum_i p_i^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (1.17)$$

Ми бачимо, що квадрат «довжини» 4-імпульсу в СВ  $K$  дорівнює константі. Неважко впевнитися, що й у будь-якій іншій СВ квадрат 4-імпульсу є інваріант. Тобто, компоненти 3-вимірного релятивістського імпульсу при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  змінюються; величина енергії також буде інша, але квадрат «довжини» 4-вимірного імпульсу залишиться незмінним.

Закон збереження енергії-імпульсу накладає суттєві обмеження на можливі ядерні реакції, на акти взаємодій елементарних частинок. Закон збереження (1.17) визначає також енергії осколків, що виникають при розпадах ядер, при ядерних реакціях і т. п.

Згідно з принципом відносності основні закони фізики повинні мати коваріантну форму. Це означає, що їх математична форма при переході від однієї системи відліку до іншої не повинна змінюватись при перетвореннях Лорентца.

Здавалося б, різноманітність фізичних законів і значна кількість фізичних величин, з допомогою яких формулюються ці закони, виключають існування загального підходу в поданні релятивістськи-коваріантних формулювань основних законів.

Виявляється, що найбільш загальним методом запису рівнянь у коваріантній формі є метод Мінковського. Тобто основні рівняння фізи-

ки повинні бути записані в 4-вимірній формі. Ліва й права частини певного рівняння повинні бути або скалярами, або 4-вимірні векторами, або й зліва і справа має бути 4-вимірний тензор довільного, але однакового рангу. Запис рівнянь у такій формі робить коваріатність їх майже очевидною, оскільки тоді ліва й права частина рівнянь будуть перетворюються за одним і тим же законом при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ .

Тільки в **результаті 4-вимірного подання рівняння руху точкової маси  $m$**

$$m_0 \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{S}_i, \quad (1.18)$$

де  $u_i$  – 4-вимірна швидкість;  $\mathfrak{S}_i$  – 4-вимірна сила, що називається силою Мінковського, а індекс  $i$  пробігає значення 1, 2, 3, 4;  $d\tau$  – нескінченно малий інтервал власного часу, **вдається відразу одержати релятивістське рівняння руху**

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (1.19)$$

Означення сили Мінковського повинно бути такими, щоб мав місце принцип відповідності, а саме при  $\beta \ll 1$  (при класичних швидкостях) 4-вимірне рівняння руху повинне переходити в основне рівняння класичної динаміки (другий закон Ньютона). Більш проста фізична теорія є наслідком більш загальної теорії.

Тоді, компоненти 4-сили Мінковського  $\mathfrak{S}_i$  таким чином пов'язані зі звичайною тривимірною ньютонівською силою [227]

$$\mathfrak{S}_{1,2,3} = \frac{F_{x,y,z}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \mathfrak{S}_4 = \frac{i}{c} \frac{(\vec{F}\vec{v})}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Скориставшись формулами перетворення компонент 4-векторів (1.9), знаходимо, що компоненти сили при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  перетворюються згідно з формулами

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}'\vec{v}')}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}; & F_y &= \frac{F'_y \sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}; \\ F_z &= \frac{F'_z \sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}; & \vec{F}\vec{v} &= \frac{(\vec{F}'\vec{v}') + VF'_x}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

З «часової компоненти» 4-вимірного рівняння руху частинки одержуємо релятивістський, точний вираз для кінетичної енергії тіла, що має масу спокою  $m_0$  та швидкість  $v$

$$T = m_0 c^2 (\gamma - 1). \quad (1.21)$$

Повна енергія тіла в релятивістській фізиці дорівнює сумі кінетичної енергії та енергії спокою  $E_0 = m_0 c^2$

$$E = m_0 c^2 + T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.22)$$

**Таким чином, виходячи з принципу відносності та 4-вимірного формалізму ми одержали релятивістське рівняння руху (1.19), зв'язок між енергією тіла, масою спокою та його швидкістю (1.22), знайшли точний вираз для кінетичної енергії (1.21), знайшли формули перетворення компонент звичайної сили (1.20). Одержали закон збереження енергії-імпульсу (1.17).**

Із (1.22) та (1.17) виразимо релятивістський імпульс частинки через кінетичну енергію

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}. \quad (1.23)$$

При  $T \ll m_0 c^2$  останнє співвідношення переходить у класичну формулу  $p = \sqrt{2m_0 T}$ , а при  $T \gg m_0 c^2$  релятивістський імпульс дорівнює  $p = \frac{T}{c}$ .

4-вимірний хвильовий вектор – це сукупність 4 величин:

$$k_i \left( \frac{\omega}{c} n_x, \frac{\omega}{c} n_y, \frac{\omega}{c} n_z, i \frac{\omega}{c} \right), \quad (1.24)$$

де  $\omega$  – частота електромагнітної хвилі;  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $n_x$  – це  $\cos$  кута між віссю  $OX$  (напрямок швидкості СВ  $K'$ ) та напрямком поширення хвилі

$$n_x = \cos \alpha \quad (1.25)$$

Аналогічно визначаються величини  $n_y = \cos \beta$ ,  $n_z = \cos \gamma$ .

З формул перетворення 4-вимірного хвильового вектора одержуємо опис ряду фізичних явищ.

А. Повздовжній ефект Доплера:

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - B^2}}{1 - B n_x}, \quad (1.26)$$

де  $\omega$  – частота електромагнітної хвилі, яка вимірюється в системі  $K$ ;  $\omega'$  – власна частота хвилі.

Б. Коли  $n_x = 0$ , то ми з (1.26) одержуємо так званий поперечний ефект Доплера:

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - B^2}. \quad (1.27)$$

Слід зауважити, що це новий результат, якого не було до теорії відносності. Перетворення Лорентца та перетворення (1.12) і (1.26) передбачили новий ефект Доплера, про існування якого до теорії відносності навіть не підозрювали.

І це передбачення зумовлене й означенням компонент 4-хвильового вектора, і формулами його перетворення, тобто в кінцевому рахунку властивостями простору-часу. А те, що експеримент підтверджує повністю теоретичні наслідки, говорить про адекватність наших уявлень об'єктивній реальності. Іншими словами, безпосередньо підтверджується, що наш простір і час є псевдоевклідовим і що простір і час єдині.

В. Явище аберації світла:

$$\left. \begin{aligned} n_y &= \frac{\omega'}{\omega} n'_y = n'_y \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + B n'_x}; \\ n_z &= n'_z \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + B n'_x}; \\ n_x &= \frac{(n'_x + B) \sqrt{1 - B^2}}{\sqrt{1 - B^2} (1 + B n'_x)} = \frac{(n'_x + B)}{(1 + B n'_x)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Ці три співвідношення повністю описують явище аберації для світлових хвиль. Тобто, формули (1.28) описують зміну напрямку розповсюдження електромагнітних хвиль при переході від однієї системи відліку до іншої:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n_x}{n_y} = \frac{(n'_x + B)(1 + B n'_x)}{(1 + B n'_x) n'_y \sqrt{1 - B^2}} = \frac{(n'_x + B)}{n'_y \sqrt{1 - B^2}}, \quad (1.29)$$

де  $\varphi$  – кут аберації.

Тобто одержуємо не тільки вже добре відомі результати, але й принципово нові, яких до 4-вимірного подання СТВ не можна було передбачити.

4-вимірне формулювання законів фізики є більш глибоким, хоча й менш наочним. Одна з особливостей такого формулювання полягає в

тому, що при цьому об'єднуються здавалося б зовсім різні за своєю фізичною природою (у 3-вимірному просторі) величини в 4-вимірні об'єкти: 4-вектори, 4-тензори.

Наприклад, 3-вимірний релятивістський імпульс та енергія утворюють 4-вектор енергії-імпульсу.

3-вимірний вектор поляризації  $\vec{P}$  та 3-вимірний вектор намагнічування  $\vec{M}$  є насправді, при 4-вимірному поданні електродинаміки, компонентами тензора  $m_{ik}$  [127; 100].

Ці приклади можна продовжувати, говорячи про 4-вимірний хвильовий вектор, 4-радіус-вектор, 4-силу Мінковського, 4-швидкість, 4-прискорення, 4-потенціал, 4-струм.

Аналіз трансформаційних та інших властивостей цих 4-вимірних об'єктів і формулювання законів мовою цих об'єктів дають нові фізичні закономірності, пояснюють і проливають світло на давно відомі співвідношення, наповнюють ці, здавалося б, різні за природою величини новим і глибоким фізичним змістом [127; 100].

Просторово-часові відношення та властивості тіл і процесів не залежать від систем відліку, а лише по-різному проявляються в різних СВ. Узагалі фізичні величини, які залежать від СВ і в цьому розумінні відносні, є своєрідними «проекціями» більш загальних величин, котрі від СВ не залежать.

Наприклад:

А)  $\Delta s^2$  – інваріант, а  $\Delta t$  та  $\Delta l_{12}$  – величини відносні.  $\Delta l_{12}$  – відстань між двома точками 3-вимірного простору.

***В абсолютності інтервалу й відносності окремо взятих  $\Delta l$  та  $\Delta t$  проявляється більш глибока сутність простору й часу, яка пов'язує їх в єдину форму існування матерії. Простір-час – це не допоміжний формальний прийом, це фізична реальність.***

Б)  $\sum u_i^2 = -c^2$  – інваріант, а  $v_x, v_y, v_z$  – відносні величини;

$$\text{В) } \omega t - \vec{k}\vec{r} = inv, \quad (1.30)$$

а  $\omega, n_x, n_y, n_z$  – у різних СВ величини різні, відносні;

Г)  $\sum p_i^2 = -m_0^2 c^2$ , тобто, квадрат «довжини» 4-імпульсу є інваріантом, а значення проєкцій релятивістського імпульсу та енергія в різних СВ мають різні значення, відносні.

***Це все доводить, що 4-вимірне подання законів фізики адекватно описує фізичну реальність.***

### 1.1.2. Лагранжіван релятивістської частинки

Перш за все покажемо, як використовується метод Лагранжа в релятивістській механіці, і впевнимся, що основні положення релятивістської динаміки випливають як наслідок принципу найменшої дії.

Згідно з означенням, дія  $S$  – це інтеграл за часом від функції Лагранжа  $L$ , який визначається вздовж траєкторії руху частинки між двома фіксованими точками – точками 1 і 2:

$$S = \int_1^2 L dt. \quad (1.31)$$

Точки 1 і 2 визначаються координатами частинки та моментами часу, при яких частинка проходить ці точки.

*Дія стаціонарна для дійсних траєкторій частинок. Тобто варіація дії  $\delta S = 0$ .*

Дія для вільної релятивістської частинки повинна характеризуватися таким властивостями:

а) повинна бути інваріантом перетворень Лорентца, тобто інтеграл (1.31) має одне й те саме значення в усіх СВ;

б) функція Лагранжа вільної релятивістської частинки при  $v \ll c$  повинна дорівнювати класичній функції Лагранжа,  $L = \frac{mv^2}{2}$  (принцип відповідності).

Властивість а) означає також, що інтеграл (1.31) повинен братися від скаляру. Але за відсутності полів і сил (вільна частинка) єдина релятивістська інваріантна величина, яка характеризує рух частинки в 4-вимірному часо-просторі – це довжина її світової лінії між точками 1 і 2. Таким чином, дію слід записати у вигляді:

$$S = \alpha \int_1^2 ds, \quad (1.32)$$

де  $ds$  – інтервал між двома нескінченно близькими подіями,  $\alpha$  – деяка інваріантна постійна.

Щоб привести (1.32) до виду (1.31), перейдемо до інтегрування за часом  $t$ ,  $ds = \frac{ds}{dt} dt$ . Але  $\frac{ds}{dt} = \frac{cd\tau}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , де  $v$  – тривимірний швидкість частинки. Тому (1.32) запишеться у вигляді:

$$S = \alpha c \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Тоді функція Лагранжа дорівнює:

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

А при  $v \ll c$  маємо  $\left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right)$ :

$$L = \alpha c - \alpha \frac{v^2}{2c}.$$

Порівнюючи цей вираз з класичною функцією Лагранжа, одержуємо  $\alpha = -mc$ .

Таким чином, функція Лагранжа вільної релятивістської частинки дорівнює:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.33)$$

Згідно з методом Лагранжа,  $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ , а  $E = \vec{P}\vec{v} - L$ . Вираз для

узагальненого імпульсу  $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  слід розуміти як вектор, компоненти якого дорівнюють похідним функції Лагранжа за відповідними складовими вектора  $\vec{v}$ .

Тому використовуючи (1.33), одержуємо:

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.34)$$

З цих двох важливих співвідношень знаходимо також

$$\frac{E^2}{c^2} = P^2 + m^2 c^2. \quad (1.35)$$

Похідна від імпульсу за часом, як відомо, дорівнює силі. Тобто релятивістське рівняння руху має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \vec{F}. \quad (1.36)$$

## **1.2. Теоретичні та методичні засади вивчення електродинаміки у фаховій підготовці вчителя фізики. Структура викладання класичної та релятивістської електродинаміки в педагогічному ВНЗ**

Традиційний метод обґрунтування рівнянь Максвелла є найбільш прийнятний при вивченні електродинаміки з огляду й на принцип наступності в навчанні, і на безпосередній зв'язок з експериментальними даними. Він також дозволяє, до деякої міри, ознайомити студентів з методами та методологією одержання наукових результатів. З іншого боку й сам процес наукового відкриття (як саме, виходячи з експериментальних фактів, одержують чи формулюють фундаментальний фізичний закон) є повчальним і цікавим. Такий шлях обґрунтування може підвищити також інтерес студентів і учнів до фізики.

Але при цьому в студентів може скластися враження, що фундаментальні рівняння та принципи фізики логічно й несуперечливо виводяться з дослідних фактів.

У той же час відомо, що немає прямого й логічного шляху від експериментальних фактів до теоретичного принципу. І особливо цей важливий момент методології наукового пізнання стосується зв'язку між «фундаментальними експериментальними законами електродинаміки» та рівняннями Максвелла. «Рівняння Максвелла є прикладом фундаментального закону, явно вгаданого, а не «виведеного» в ригористичному сенсі цього слова, з експериментальних даних» [250, с. 319].

Розглянемо більш детально й конкретно обґрунтування РМ в традиційному методі.

### **1.2.1. Рівняння Максвелла як узагальнення експериментальних фактів**

У цьому пункті ми схематично окреслимо способи обґрунтування рівнянь Максвелла у вакуумі й однорідному середовищі на основі аналізу й узагальнення «фундаментальних експериментальних» законів електродинаміки. При цьому ми не будемо обговорювати висновки, що впливають з РМ, не будемо розглядати приклади застосування РМ та методи інтегрування як РМ, так і рівнянь Даламбера, Пуассона, Лапласа. Усе це можна знайти зокрема в посібниках [127; 111; 100].

Наша задача полягає в конспективному описі та порівнянні дидактичних шляхів обґрунтування РМ, наявних в сучасних навчально-методичних виданнях.



$$1.2.1a. \text{Рівняння Максвелла } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

випливає як наслідок електростатичної теореми Гаусса.

Електростатична теорема Гаусса пов'язує потік вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  через деяку замкнену поверхню з величиною заряду в об'ємі, який охоплений цією поверхнею.

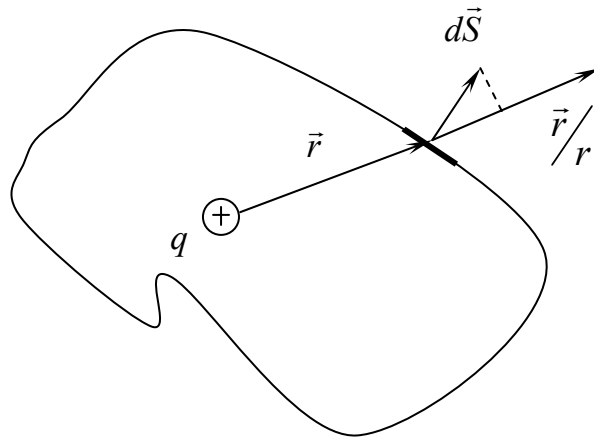


Рис. 1.1. Знаходження потоку вектора  $\vec{E}$  через довільну замкнену поверхню  $S$

Дійсно, знайдемо потік вектора  $\vec{E}$ , що створюється точковою зарядженою частинкою (ЗЧ), величина заряду якої  $q$ , через довільну замкнену поверхню  $S$ , яка охоплює цей заряд.

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} d\vec{S} = q \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\vec{S}, \quad (1.37)$$

де  $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = dS'$  – це величина проекції елементарної площадки  $d\vec{S}$  на

площину, що перпендикулярна  $\vec{r}$ . Тоді сумарний потік вектора  $\vec{E}$  дорівнює:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = q \oint_S \frac{dS'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Принцип суперпозиції дозволяє узагальнити цей результат на заряд будь-якої величини та розподілу. І тоді одержуємо теорему Гаусса.

**Теорема Гаусса:** Потік вектора  $\vec{E}$  через довільну замкнену поверхню, що охоплює довільний заряд дорівнює величині цього заряду, поділений на  $\epsilon_0$ :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.38)$$

Теорема Гаусса використовується для знаходження напруженості полів, які створюються симетричним розподілом зарядів.

Наприклад, таких: поле рівномірно розподіленого заряду на нескінченній плоскій поверхні, поле зарядженої довгої нитки, поле рівномірно зарядженої за поверхнею або за об'ємом кулі, рівномірно зарядженого за об'ємом або за поверхнею довгого циліндра й т. п.

Слід відзначити, що при застосуванні електростатичної теореми Гаусса необхідно враховувати ряд методичних застережень, на які вказано в роботі [223].

Перепишемо електростатичну теорему Гаусса (1.38) для довільного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.39)$$

Тоді при використанні математичної теореми Гаусса

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

формула (1.39) приймає вигляд:

$$\int \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

Оскільки об'єм інтегрування довільний, то рівність інтегралів означає й рівність підінтегральних виразів. Тобто теорема Гаусса в локальній формі (диференціальній формі) має вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (1.40)$$

Тобто використовуючи закон Кулона та принцип суперпозиції, ми одержали одне з рівнянь Максвелла в інтегральній (1.38) та локальній (1.40) формах.

1.2.1б. Рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Найбільш поширений і простий спосіб одержання рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  при вивченні електродинаміки у ВНЗ полягає використанні теореми про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  (1.46) шляхом поширення її на випадок довільного розподілу об'ємних струмів, які характеризуються об'ємною густиною струму  $\vec{j}(\vec{r})$ .

Але зупинимося коротко на важливих законах, які мають відношення й до рівняння  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , і до результатів подальших наших досліджень.

Як стверджується в деяких посібниках з електродинаміки, у результаті узагальнення дослідів Ампера з визначення сил взаємодії між елементами струмів було одержано такий результат [178, с. 67; 224, с. 207; 118, с. 18; 153, с. 269; 152, с. 202; 127, с. 22]:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi r_{12}^3} \left[ d\vec{l}_2, \left[ d\vec{l}_1, \vec{r}_{12} \right] \right]. \quad (1.41)$$

Це формула Ампера-Грассмана, де  $i_1 d\vec{l}_1$  – елемент 1-го струму;  $i_2 d\vec{l}_2$  – елемент 2-го струму,  $\vec{r}_{12}$  – радіус-вектор, що визначає положення другого елемента струму відносно першого (рис. 1.2).

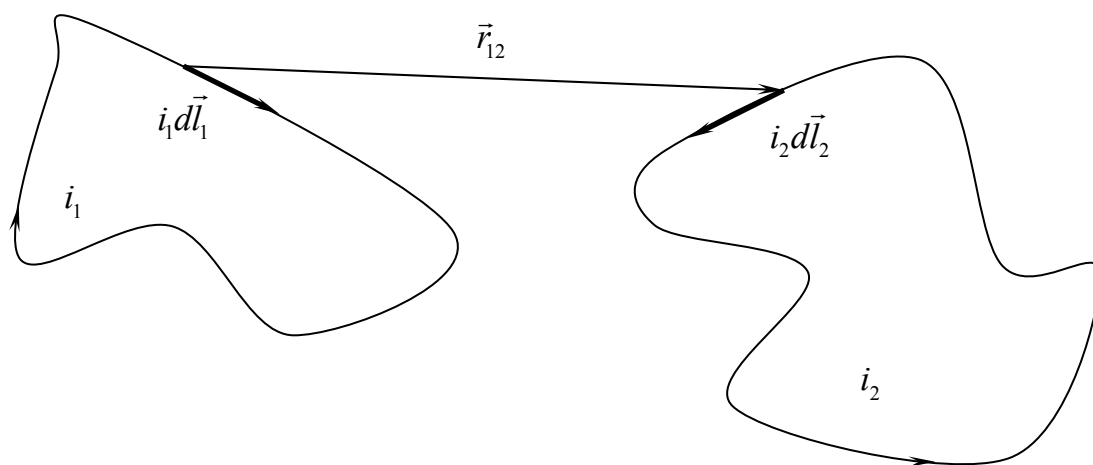


Рис. 1.2. Розташування двох елементів струму, взаємодія між якими визначається формулою Ампера-Грассмана

Формула Ампера-Грассмана, як бачимо, визначає силу взаємодії двох елементів струму.  $d\vec{F}_{12}$  – сила, що діє на другий елемент струму з боку першого. А сила, що діє на перший елемент струму з боку другого  $d\vec{F}_{21}$  очевидно дорівнює:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi r_{21}^3} \left[ d\vec{l}_1, \left[ d\vec{l}_2, \vec{r}_{21} \right] \right].$$

**Якщо закон (1.41) розглядати як основу магнітостатики, то з нього випливають як наслідок і закон Ампера (1.42), і закон Біо-Савара-Лапласа (1.43).**

Дійсно, взаємодія відбувається через магнітне поле, тому закон Ампера-Грассмана набуває вигляду:

$$d\vec{F}_{12} = i_2 \left[ d\vec{l}_2, d\vec{B}_1 \right], \quad (1.42)$$

де  $d\vec{B}_1$  – магнітне поле, що створене першим елементом струму в точці

знаходження другого елемента струму:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi r^3} [d\vec{l}_1, \vec{r}_{12}].$$

Узагальнюючи попередній вираз на довільні елементи постійного струму можемо записати

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]. \quad (1.43)$$

Це закон Біо-Савара-Лапласа. Це закон, який визначає величину та напрямок індукції магнітного поля, що створюється елементом струму  $i d\vec{l}$  в довільній точці простору, яка визначається радіус-вектором  $\vec{r}$ , проведеним від елемента струму в цю точку поля.

Зауважимо, що в більшості сучасних посібниках і підручниках з електродинаміки прийнята точка зору про первинність, досліду фундаментальність закону Біо-Савара-Лапласа (детальніше див. **Розділ 2**).

Застосування (1.43) для знаходження індукції магнітного поля нескінченно довгого провідника, по якому протікає постійний струм  $i$ , дає:

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 i dl r \sin \theta}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}, \quad (1.44)$$

де  $R$  – віддаль точки поля від провідника з постійним струмом (ППС).

Знайдемо тепер циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по контуру довільної форми, який лежить в площині, перпендикулярній струму, і охоплює цей струм.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{n} d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_L \frac{\vec{n} d\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0 i}{2} \int_{2\pi} d\alpha = \mu_0 i, \quad (1.45)$$

де  $\vec{n}$  – одиничний вектор у напрямку  $\vec{B}$ ,  $d\alpha = \frac{\vec{n} d\vec{l}}{R} = \frac{dl \cos \gamma}{R}$  – нескінченно малий кут, під яким видно елементарний відрізок  $d\vec{l}$  контуру  $L$  (див. рис. 1.3).

Узагальнюючи цей результат на довільні постійні струми, одержуємо **теорему про циркуляцію вектора  $\vec{B}$** :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i. \quad (1.46)$$

Циркуляція вектора магнітної індукції по довільному замкненому контуру дорівнює  $\mu_0$ , помноженому на алгебраїчну силу струмів, які протікають через поверхню, що спирається на цей контур.

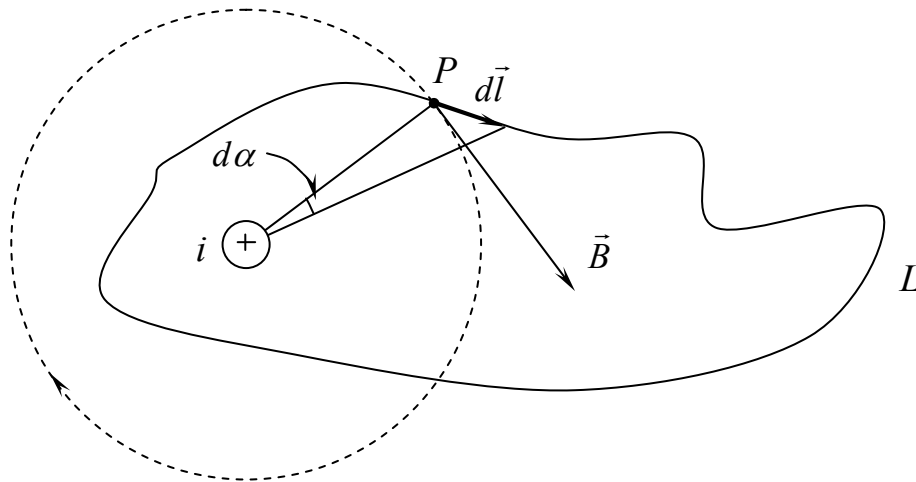


Рис. 1.3. Знаходження циркуляції вектора  $\vec{B}$  по контуру довільної форми

Повертаємося до обґрунтування рівняння  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ . У науково-методичній літературі пропонуються такі способи обґрунтування цього рівняння [127, с. 29–32].

**А.** Теорема (1.46) для об'ємно розподілених струмів  $\vec{j}(\vec{r})$  набуває вигляду

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

А далі, використовуючи теорему Стокса  $\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S}$ ,

попередній вираз можна подати так:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_S \text{rot}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}; \\ \int_S (\text{rot}\vec{B} - \mu_0\vec{j}) \cdot d\vec{S} &= 0, \end{aligned}$$

звідки й одержуємо, унаслідок довільності поверхні  $S$ , рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}. \quad (1.47)$$

Тобто в точках простору, у яких відсутні струми провідності, вихор магнітного поля  $\text{rot}\vec{B} = 0$ , але МП не дорівнює нулю незважаючи на те, що  $\vec{j} = 0$ . До речі, коли розраховується МП в конденсаторі, який поступово розряджається внаслідок того, що між його обкладинками знаходиться електропровідна речовина, то незважаючи на те, що  $\vec{j}_{np} + \vec{j}_{зм} = 0$  і  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j}_{np} + \vec{j}_{зм}) = 0$ , МП все ж не дорівнює нулю????!

Ще раз нагадаємо, що сама теорема (1.46) аналітично виводиться на основі класичного закону Біо-Савара-Лапласа для лінійних струмів (при застосуванні (1.42), як правило, тільки для достатньо довгого провідника, по якому протікає постійний струм силою  $i$ , результат (1.43)).

Інші способи обґрунтування рівняння Максвелла (1.47) проаналізовані в роботі [130] і описані в п. 2.1.

$$1.2.1в. \text{ Рівняння Максвелла для струмів зміщення } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Локальна форма закону збереження заряду

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.48)$$

та рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  суперечать одне одному.

Дійсно, знайшовши дивергенцію від обох частин рівняння  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , одержуємо, що ліва частина дорівнює нулю, оскільки  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$  завжди дорівнює нулю, а права частина дорівнює  $\mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$ .

Тобто для змінних струмів, коли  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ , рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

несправедливе. Значить праву частину цього рівняння слід доповнити таким доданком, щоб дивергенція від обох частин рівності була рівна нулеві.

Максвелл прийняв гіпотезу, що крім струмів провідності  $\vec{j}$  існують так звані струми зміщення  $\vec{j}_{3M}$ . Такі, що  $\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{3M}) = 0$ . Тому використовуючи закон збереження заряду, одержуємо:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} \vec{j}_{3M} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Похідну  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  знайдемо, використовуючи рівняння Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \text{ Тоді } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ і попереднє рівняння набуває вигляду:}$$

$$\operatorname{div} \vec{j}_{3M} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Тобто густина струмів зміщення дорівнює:

$$\vec{j}_{3M} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Таким чином, щоб два фундаментальних рівняння (1.47) і (1.48) були несуперечливі між собою, слід праву частину рівняння Максвелла  $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  доповнити доданком  $\vec{j}_{3M} = \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ . І тоді одержуємо рівняння Максвелла для вихору магнітного поля

$$rot\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{3M}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t};$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \quad (1.50)$$

Використовуючи теорему Стокса, знаходимо інтегральну форму цього рівняння Максвелла:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (1.51)$$

Має сенс розглянути ще один спосіб обґрунтування виразу для густини струмів зміщення, який також використовується при вивченні цієї теми [64; 65].

Розглянемо конденсатор, який розряджається через опір  $R$  (див. рис. 1.4), і застосуємо теорему про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по плоскому контуру  $L$ , що охоплює струм  $i$ .

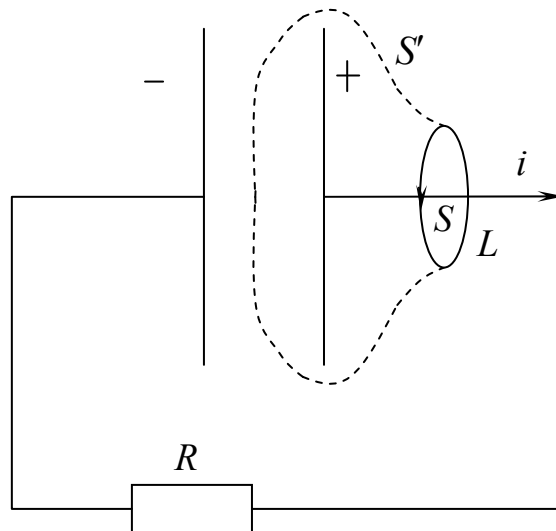


Рис. 1.4. Плоский конденсатор розряджається через опір  $R$

На цей контур можна натягнути будь-які поверхні, і зокрема  $S$  та  $S'$ . Через  $S$  протікає струм провідності, а через  $S'$  струм провідності не протікає. Тобто виходить, що  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$  начебто залежить від того, яка

поверхня спирається на контур  $L$ . Але згідно із загальними положеннями теорії поля (положень векторного аналізу) цього не повинно бути. Як уникнути такої неясності та суперечності?

Оскільки поверхню  $S'$  перетинають тільки лінії вектора  $\vec{E}$ , то при використанні теореми Остроградського-Гаусса одержуємо:

$$\oint_{S'+S} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}' = \frac{\partial q}{\partial t},$$

з іншого боку, згідно із законом збереження заряду

$$\oint_{S'+S} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Додавши ліві й праві частини цих рівнянь, маємо

$$\oint_{S+S'} \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0. \quad (1.52)$$

Деякі висновки:

а) величина  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  має таку ж розмірність, як і густина струмів

провідності; тому густина повного струму у вакуумі  $\vec{j}_n = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ;

б)  $\oint_{S+S'} \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$  означає, крім іншого, що лінії вектора

$\vec{j}_n = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  є замкнутими, неперервними;

в) означення повного струму знімає указану вище суперечність.

Дійсно, покажемо, що повна сила струму  $\oint_{S+S'} \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = i + i_{3M}$

буде мати одне і те ж значення як через поверхню  $S$ , так і через поверхню  $S'$ , які спираються на один і той же контур.

Рівняння  $\oint_{S+S'} \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$  можна записати і так:

$$\int_S \vec{j}_n d\vec{S} + \int_{S'} \vec{j}_n d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_{S'} \vec{j}_{3M} d\vec{S} = i_n(S) + i_n(S') = 0.$$



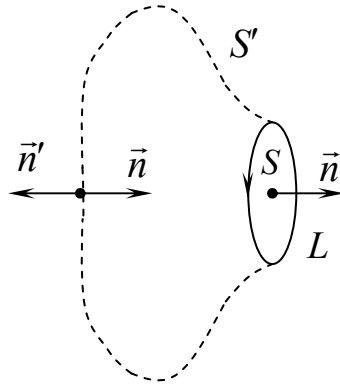


Рис. 1.5.

Якщо на поверхні  $S'$  нормаль вибрати внутрішню, то доданок  $i_n(S')$  змінить знак на протилежний, і тоді маємо:

$$i_n(S) = i_n(S').$$

Тобто теорему про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  для довільного випадку (не тільки для постійних струмів) необхідно записати у вигляді:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (1.53)$$

1.2.1г. Рівняння Максвелла  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

**Явище електромагнітної індукції** полягає у виникненні індукційного струму в замкненому колі при зміні магнітного потоку через поверхню, що опирається на цей контур (коло).

Закон електромагнітної індукції (ЕМІ), або «правило потоку»:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.54)$$

де  $\varepsilon$  – величина електрорушійної сили (ЕРС), що виникає в будь-якому дротовому контурі й чисельно дорівнює швидкості зміни магнітного потоку через довільну поверхню, яка спирається на цей контур.

Виходячи з означення ЕРС індукції та магнітного потоку, цей закон можна подати у вигляді:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Якщо контур не деформується (тобто вважаємо, що форма контуру не змінюються), то закон електромагнітної індукції в інтегральній формі

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Якщо магнітний потік змінюється в часі, а контур залишається недеформованим, то  $\frac{d\Phi}{dt}$  зумовлене тільки зміною вектора магнітної індукції в часі. Використавши теорему Стокса, запишемо цей закон в локальній формі.

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (1.55)$$

Це одне з рівнянь Максвелла в диференціальній формі.

Хоча величина ЕРС індукції завжди визначається зміною магнітного потоку в часі, але в основі цього явища лежать дві фізичні причини, різні за своєю природою [64; 65; 153; 132; 233; 127]:

1) індукційний струм в контурі може виникати за рахунок вихрового електричного поля при зміні магнітного поля в часі;

2) індукційний струм у контурі може виникати за рахунок дії сили Лорентца на заряди, що рухаються разом з провідниками замкнутого кола в магнітному полі.

### 1.2.1δ. Рівняння Максвелла $\text{div}\vec{B} = 0$ .

Згідно з принципом суперпозиції та із законом Біо-Савара індукція магнітного поля, що створюється довільним розподілом постійних струмів, визначається:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'.$$

Використовуючи формулу векторного аналізу

$$\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot}\vec{b},$$

знайдемо дивергенцію індукції магнітного поля:

$$\text{div}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \text{rot}\vec{j} - \vec{j} \cdot \text{rot} \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV' = 0.$$

Безпосереднім обчисленням можна впевнитися, що  $\text{rot}\vec{j}(\vec{r}') = 0$ .

Дійсно густина струму  $\vec{j}(\vec{r}')$  залежить від координат області  $V'$   $\vec{j}(x', y', z')$ , де зосереджені струми, а ротор від  $\vec{j}(\vec{r}')$  береться за координатами  $\vec{r}(x, y, z)$  точки поля, тому  $\text{rot}\vec{j}(\vec{r}') = 0$ .  $\text{rot} \frac{\vec{R}}{R^3} = 0$ ,

оскільки  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . А операція ротора знаходиться за координатами точки поля  $\vec{r}(x, y, z)$ .

Тобто, магнітне поле соленоїдальне:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.56)$$

II спосіб доведення рівності  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

Використаємо закон електромагнітної індукції:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Знайдемо дивергенцію від обох частин цього рівняння

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}(t).$$

Тобто

$$\operatorname{div} \vec{B}(t) = \text{const}.$$

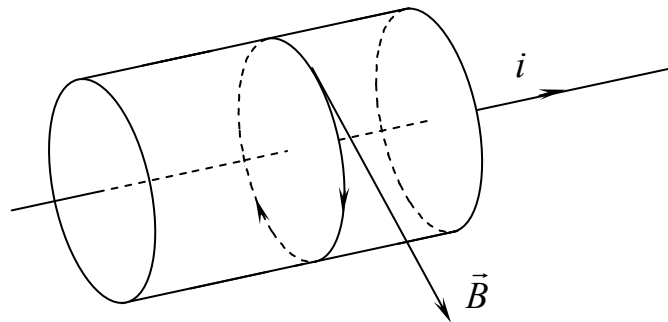
Цей результат слід розуміти так.

При даному магнітному полі  $\operatorname{div} \vec{B}$  така сама, як і  $\operatorname{div} \vec{B}$  при будь-якому іншому значенні магнітного поля, і зокрема, коли  $\vec{B} = 0$ .

Тоді  $\operatorname{div} \vec{B} = \text{const} = 0$ . Значить і при будь-якому іншому значенні індукції магнітного поля ми маємо:  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

III спосіб доведення рівності  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

Розглянемо прямолінійний струм і знайдемо магнітний потік через поверхню круглого циліндра, вісь якого збігається з прямолінійним струмом.



Силкові лінії не перетинають основи, тому магнітний потік через основи циліндра дорівнює нулю. Силкові лінії не перетинають бічну поверхню циліндра, тому магнітний потік через бічну поверхню дорівнює нулю. І як результат отримуємо:  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Таким чином, оскільки  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , ми можемо говорити про соленоїдальність магнітного поля.

1.2.1e. Система рівнянь Максвелла-Лоренца в локальній та інтегральній формах.

Локальна форма:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{зм}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right); \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Інтегральна форма:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad (\text{I}')$$

$$\int_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (i + i_{зм}) = \mu_0 \left( i + \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \right); \quad (\text{II}')$$

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}; \quad (\text{III}')$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (\text{IV}')$$

1.2.1e. Рівняння Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі.

Використовуючи модельні уявлення класичної електронної теорії (КЕТ) [127], можна знайти усереднені значення мікроскопічної густини заряду (середнє значення мікроскопічної густини заряду дорівнює сумі густини вільних зарядів і густини зв'язаних зарядів)

$$\bar{\rho}_{мікро} = \rho + \rho' = \rho - \operatorname{div} \vec{P} \quad (1.57)$$

та сумарне середнє значення мікроскопічної густини струму [118; 126; 127]

$$\vec{j}_{мікро} = \vec{j} + \vec{j}_{пол} + \vec{j}_{мол} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}, \quad (1.58)$$

де  $\vec{P}$  – вектор поляризації,  $\vec{M}$  – вектор намагнічування.

Тоді рівняння Максвелла в середовищі набувають такого вигляду

$$\text{I. } \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho - \operatorname{div} \vec{P}; \quad \text{II. } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\text{III. } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{зм} + \vec{j}_{мол} + \vec{j}_{пол}) =$$

$$= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E}) \mu_0; \text{IV. } \text{div} \vec{B} = 0.$$

Означимо повну густину струму зміщення  $\vec{j}_{zm} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \varepsilon_0 + \vec{P}) =$   
 $= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , яка дорівнює сумі густини поляризаційного струму  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , і «чис-

того» струму зміщення  $\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E})$  та введемо два допоміжні вектори, які

фізичного змісту не мають – вектор електричного зміщення  $\vec{D}$

$$\vec{D} = \vec{E} \varepsilon_0 + \vec{P}$$

та вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (1.59)$$

Тоді система рівнянь Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі в локальній формі має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \text{div} \vec{D} &= \rho; \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

В інтегральній формі ці рівняння такі:

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q; \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

### 1.2.1ж. Метод електромагнітних потенціалів.

Рівняння Максвелла дозволяють знайти електромагнітне поле довільного розподілу зарядів і струмів. Тобто, знаючи  $\rho(\vec{r}, t)$  і  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , можна знайти напруженість електричного  $\vec{E}$  та індукцію магнітного полів  $\vec{B}$  і, таким чином, відповісти на довільні питання в межах компетентності електродинаміки.

Задача знаходження напруженості електричного та індукції магнітного полів довільного електромагнітного поля, яке породжується певними розподілами  $\rho(\vec{r}, t)$  і  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , розв'язується методом електромагнітних потенціалів.

Розглянемо особливості цього методу. Спочатку з'ясуємо, як вводяться електромагнітні потенціали. Запишемо одне з рівнянь Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

На підставі формули векторного аналізу  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$  ми можемо відразу записати розв'язок цього рівняння Максвелла у вигляді

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (1.62)$$

де  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  – векторний потенціал або вектор-потенціал поля.

Тобто векторний потенціал  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  – це деяка допоміжна векторна функція, яка не має особливого фізичного змісту, але з допомогою якої знаходиться індукція магнітного поля. Єдине виправдання в необхідності введення додаткової функції  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  полягає в тому, що знаходження її за відомим розподілом струмів  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  шляхом інтегрування диференційного рівняння, є порівняно простим.

Рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  разом з означенням векторного потенціалу  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  набуває вигляду

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ або } \operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Оскільки ротор градієнта будь-якої скалярної функції завжди дорівнює нулю, то скалярний потенціал  $\varphi(\vec{r}, t)$  вводиться так

$$\nabla \varphi = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

І тоді напруженість електричного поля дорівнює

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.63)$$

Таким чином, знаючи скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля можна знайти напруженості  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  за формулами (1.68) та (1.69). Але самі електромагнітні потенціали за відомими розподілами зарядів  $\rho(\vec{r}, t)$  та струмів  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  знаходяться шляхом розв'язку відповідних диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mu_0 \vec{j}; \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Це рівняння Даламбера відповідно для векторного та скалярного потенціалів.

Причому скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля зв'язані умовою калібровки Лорентца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.65)$$

де  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$  – швидкість поширення електромагнітних хвиль в однорідному та ізотропному середовищі.

Ця система рівнянь разом з умовою Лорентца дозволяє однозначно знайти  $\vec{A}$  і  $\varphi$ , а потім і саме електромагнітне поле за відомими розподілами зарядів  $\rho(\vec{r}, t)$  та струмів  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

З математичної точки зору рівняння Даламбера простіші, ніж рівняння Максвелла. Ця обставина і є власне обґрунтуванням доцільності введення в електромагнітну теорію допоміжних величин  $\vec{A}$  і  $\varphi$ .

Але, якщо заряди нерухомі (стаціонарне поле,  $\varphi(\vec{r}, t) \neq f(t)$ ), тоді потенціалу  $\varphi(\vec{r})$  можна надати фізичного змісту

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Якщо й струми постійні (густина струмів не залежить від часу –  $\vec{j}(\vec{r})$ ), то умова калібровки набирає вигляду  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ .

При цьому в рівняння Даламбера не входять доданки, що залежать від часу. Тоді одержуємо рівняння Пуассона для векторного  $\vec{A}(\vec{r})$  потенціалу та скалярного  $\varphi(\vec{r})$  потенціалу

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= -\mu\mu_0 \vec{j}; \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

1.2.13. *Елементи релятивістської електродинаміки в традиційній схемі вивчення електродинаміки.*

Згідно з принципом відносності всі основні рівняння фізики не повинні змінювати свою математичну форму при переході від однієї системи відліку до іншої.

Безпосередньо можна впевнитися, що рівняння Максвелла не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої. Тобто, вони є коваріантними при перетвореннях Лорентца [259, с. 22; 182; 127, с. 271].

Але при цьому всі величини, що входять в систему рівнянь Максвелла повинні перетворюватися за певними законами при переході від однієї СВ до іншої [127].

Набагато простіше можна впевнитися в лорентц-коваріантності основних рівнянь електродинаміки, якщо вдасться записати їх в 4-вимірній формі.

Основними рівняннями електродинаміки можна вважати рівняння Даламбера для векторного та скалярного потенціалів, умову калібровки Лорентца та закон збереження заряду.

Тобто якщо вдається надати рівнянням Даламбера для векторного та скалярного електромагнітних потенціалів, умові калібровки Лорентца та закону збереження заряду 4-вимірної форми, то автоматично доводиться лорентц-коваріантність рівнянь Максвелла, оскільки система рівнянь (1.64) та (1.67) еквівалентна рівнянням Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Виявляється, що рівняння (1.64) та (1.67) не тільки можна записати в 4-вимірній формі, якщо ввести три 4-вектори – 4-струм, 4-потенціал та 4-радіус-вектор, а й одержати вираз для тензора електромагнітного поля.

Компоненти 4-вимірної густини струму в деякій СВ визначаються так

$$\vec{s}(\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, ic\rho), \quad (1.68)$$

де  $u_x, u_y, u_z$  – проекції швидкості руху певного розподілу заряду;  $\rho$  – густина заряду.

Ураховуючи, що 4-вимірний радіус-вектор визначається

$$\vec{\mathfrak{R}}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict),$$

закон збереження заряду в 4-вимірній формі набуває вигляду



$$\sum_{i=1}^4 \frac{ds_i}{dx_i} = 0. \quad (1.69)$$

Якщо ввести 4-вимірний потенціал, просторові компоненти якого дорівнюють проєкціям вектор-потенціалу відповідно на вісі  $x, y, z$ , а четверта компонента (часова компонента)  $\Phi_4 = i \frac{\varphi}{c}$ , де  $\varphi$  – скалярний потенціал електромагнітного поля

$$\Phi \left( \Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i \cdot \frac{\varphi}{c} \right), \quad (1.70)$$

то умова калібровки Лорентца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

набуває вигляду

$$\sum_i \frac{d\Phi_i}{dx_i} = 0. \quad (1.71)$$

А рівняння Даламбера (нагадаємо, що кожна подія визначається радіус-вектором події  $\vec{\mathcal{R}}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$ ) в 4-вимірній формі набуває коваріантного вигляду

$$\tilde{D}\Phi_i = -\mu_0 s_i, \quad (1.72)$$

де  $\tilde{D} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  – оператор Даламбера,  $s_i$  – компонента 4-струму.

**Таким чином, визначивши 4-вимірні вектори  $s_i$ ,  $\Phi_i$ , нам удалося записати рівняння Максвелла в коваріантній формі. Тобто класична електродинаміка є релятивістськи-коваріантною теорією.**

Використовуючи означення 4-потенціалу (1.70) та 4-радіус-вектора (1.4) компоненти векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  можна подати в такій формі

$$\begin{aligned} E_x &= i \cdot c \cdot \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right); & B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}; \\ E_y &= i \cdot c \cdot \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right); & B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}; \\ E_z &= i \cdot c \cdot \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right); & B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Таким чином, усі компоненти електромагнітного поля можуть бути виражені через деякі комбінації похідних компонентів 4-х потенціалу за координатами 4-х вектора події.

Очевидна симетрія в цих означеннях за індексами дозволяє ввести єдиний принцип побудови компонент поля через 4-х потенціали в 4-вимірному просторі:

$$F_{\mu\nu} = c \cdot \left( \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right); \quad \mu, \nu = 1..4, \quad (1.73)$$

де  $F_{\mu\nu}$  – **4-вимірний тензор електромагнітного поля**. Оскільки індекси  $\mu$  і  $\nu$  пробігають значення від 1 до 4, то тензор  $F_{\mu\nu}$  має 16 компонент. Тобто виходячи з рівнянь Максвелла та подання їх в 4-вимірному просторі Мінковського (принцип відносності) два вектора електромагнітного поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  можуть бути виражені за допомогою деякого єдиного алгоритму через відповідні просторово-часові похідні від 4-потенціалу  $\Phi_i$ .

Таким чином, тензор електромагнітного поля має такий явний вигляд

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Компоненти векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , як видно з означення тензора ЕМП, є його компонентами.

У 4-просторі вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , якими ми описували електромагнітну взаємодію в класичному тривимірному просторі, уже не вектори. Вони злилися в одну величину, більш складну за своєю математичною природою. Поки мова йшла про перетворення систем координат в класичній електродинаміці, вектори поля були 3-векторами.

Але як тільки ми переходимо до СВ, що знаходяться у відносному русі, опис поля суттєво змінюється. У 4-просторі Мінковського  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  уже не вектори, навіть не 4-вимірні.

Усі ці компоненти (16 величин) є окремими проекціями більш загального математичного об'єкту – тензора електромагнітного поля.

Найбільш цікавими для нас є формули перетворення компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої.

Оскільки при переході від однієї системи відліку до іншої координати події перетворюються згідно з формулами

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k,$$

де  $\alpha_{ik}$  – матриця перетворень Лорентца

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix},$$

то, згідно з означенням тензора, компоненти 4-вимірного тензора другого рангу при переході від системи відліку  $K'$  до системи відліку  $K$  перетворюються за формулами

$$F_{ik} = \alpha_{im} \cdot \alpha_{kl} \cdot F'_{ml}. \quad (1.75)$$

Нагадаємо, що 4-вимірним тензором другого рангу називається сукупність 16-ти компонент, які при переході від однієї системи відліку до іншої перетворюються згідно формул (1.75).

Щоб знайти формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої використаємо формули, що визначають правила перетворення компонент тензора та явний вигляд тензора електромагнітного поля.

Таким способом можна одержати формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від системи  $K'$  до СВ  $K$  [127; 100]:

$$E_x = E'_x; E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z); E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y); \quad (1.76)$$

$$B_x = B'_x; B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right); B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right). \quad (1.77)$$

### 1.2.2. Обґрунтування рівнянь Максвелла на основі принципу найменшої дії (ПНД)

#### 1.2.2а. ПНД та рівняння руху ЗЧ в ЕМП.

Опишемо, як на основі принципу найменшої дії вводяться основні фізичні поняття та величини, які характеризують ЕМП і рух ЗЧ в ньому.

Дія для ЗЧ, яка знаходиться в заданому ЕМП, дорівнює [154; 155; 14; 180]

$$S = S_{\text{Ч}} + S_{\text{ПЧ}} = \int_1^2 -mc ds + \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i, \quad (1.78)$$

де  $S_{\text{ПЧ}} = \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i$  – частина дії, що описує взаємодію зарядів з ЕМП,

$S_{\mathcal{C}} = \int_1^2 -mcds$  – дія вільної ЗЧ,  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$  – функції координат

і часу, які описують ЕМП, і які утворюють 4-вектор.

Тобто постулюється, що ЕМП описується 4-вимірним потенціалом  $\Phi_i$ .

Вираз для дії  $S_{\text{ПЧ}} = \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i$  по суті – це постулат, справедлив

вість якого підтверджується порівнянням наслідків, що одержують із (1.78), із сукупністю електродинамічних дослідних фактів.

На відміну від [154; 155; 14; 180], другий доданок (1.78), узятий зі знаком плюс тому, що вираз для квадрату інтервалу між двома нескінченно близькими подіями

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

з допомогою диференціалів компонент 4-радіус-вектора  $\mathfrak{R}$  будемо подавати у вигляді

$$ds_M^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -ds^2 = -c^2 d\tau^2.$$

Тобто в 4-вимірному часо-просторі Мінковського ми будемо використовувемо сигнатуру  $++++$  для квадрату інтервалу (причому часова координата події  $x_4 = ict$ ) і тільки коваріантні 4-вектори та тензори. Подання 4-векторів у комплексній формі, наприклад у формі (1.70) і (1.4), і використання ортогональної системи координат спрощує запис формул електродинаміки, оскільки тоді коваріантні та контраваріантні компоненти 4-векторів співпадають.

**Оскільки  $ds$  і  $\Phi_i dx_i$  – релятивістські інваріанти, то й дія  $S$  теж є інваріантом. Тому рівняння руху частинки маси  $m$ , яке одержимо з релятивістської інваріантної дії, буде справедливим у будь-якій інерціальній системі відліку.**

Ураховуючи означення компонент 4-потенціалу та 4-радіус-вектору, перепишемо (1.78) в загальноприйнятій формі,  $S = \int_1^2 L \cdot dt$ :

$$S = \int_1^2 \left( -mc \frac{ds}{dt} + q\vec{A} \frac{d\vec{r}}{dt} - q\varphi \right) dt, \quad (1.79)$$

де  $\vec{A}(\vec{r}, t)$   $\varphi(\vec{r}, t)$  – векторний і скалярний потенціали ЕМП;  $q$  – величина заряду (константа взаємодії);  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  – швидкість руху ЗЧ;  $m$  – маса ЗЧ;  $c$  – швидкість світла в вакуумі;  $\frac{ds}{dt} = \frac{cd\tau}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Тобто функція Лагранжа релятивістської ЗЧ в електромагнітному полі визначається формулою:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\vec{A}\vec{v} - q\varphi. \quad (1.80)$$

Якщо узагальненими координатами ЗЧ, яка рухається в ЕМП, є три декартові координати, то рівняння руху ЗЧ в заданому електромагнітному полі даються рівняннями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, \quad (1.81)$$

де похідна  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  є узагальненим імпульсом  $\vec{P}$  частинки.

Вираз для узагальненого імпульсу  $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  у (1.81) слід розуміти як вектор, компоненти якого дорівнюють похідним функції Лагранжа за відповідними складовими вектора  $\vec{v}$ .

Використовуючи (1.81), знаходимо

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + q\vec{A} = \vec{p} + q\vec{A},$$

де  $\vec{p}$  – релятивістський імпульс частинки.

А повна похідна за часом:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + q \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + q \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) \vec{A} \right). \quad (1.82)$$

Далі знаходимо  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla L = q \cdot \text{grad}(\vec{A}\vec{v}) - q \cdot \text{grad}\varphi.$$

Але за відомою формулою векторного аналізу

$$\text{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + [\vec{b}, \text{rot}\vec{a}] + [\vec{a}, \text{rot}\vec{b}],$$

де  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  – будь-які два вектори. Застосовуючи цю формулу до скалярного добутку  $\vec{A}\vec{v}$  і пам'ятаючи, що диференціювання за  $\vec{r}$  проводиться при постійній швидкості  $\vec{v}$ , знаходимо (або ж можна скористатися формулою  $[\vec{v}, [\nabla, \vec{A}]] = \nabla(\vec{v}\vec{A}) - (v\nabla)\vec{A}$  для знаходження  $\nabla(\vec{v}\vec{A})$ )

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = q(\vec{v}\nabla)\vec{A} + q[\vec{v}, \text{rot}\vec{A}] - q\text{grad}\varphi.$$

Таким чином, рівняння Лагранжа, рівняння руху ЗЧ в довільному ЕМП, мають вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \cdot \text{grad}\varphi + q[\vec{v}, \text{rot}\vec{A}]. \quad (1.83)$$

Це і є рівняння руху частинки в електромагнітному полі.

Зліва стоїть похідна від імпульсу частинки за часом. Отже, вираз у правій частині (1.83) є силою, що діє на ЗЧ в електромагнітному полі.

Ми бачимо, що ця сила складається з двох частин. Перша частина (перший та другий члени в правій частині (1.83)) не залежить від швидкості частинки.

Друга частина (третій доданок) залежить від цієї швидкості: пропорційна величині швидкості та перпендикулярна до неї.

Силу першого роду, віднесено до величини заряду, який дорівнює одиниці, називають напруженістю електричного поля  $\vec{E}$ . Отже, за визначенням

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi. \quad (1.84)$$

Множник при швидкості  $\vec{v}$ , у силі другого роду, що діє на одиничний заряд, називають індукцією магнітного поля,  $\vec{B}$ . Отже, згідно з означенням

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (1.85)$$

Якщо в електромагнітному полі  $\vec{E} \neq 0$ , а  $\vec{H} = 0$ , то говорять про електричне поле; якщо ж  $\vec{E} = 0$ , а  $\vec{H} \neq 0$ , то поле називають магнітним. У загальному випадку електромагнітне поле є накладанням полів електричного та магнітного.

Відзначимо, що  $\vec{E}$  являє собою полярний, а  $\vec{B}$  – аксіальний вектор.

Рівняння руху ЗЧ в електромагнітному полі можна тепер записати у вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.86)$$

Вираз, що стоїть справа, носить назву лорентцевої сили. Перша її частина – сила, з якою діє електричне поле на ЗЧ, – не залежить від швидкості руху ЗЧ та орієнтована за напрямком поля  $\vec{E}$ . Друга частина – сила, з якою магнітне поле діє на ЗЧ, – пропорційна швидкості руху ЗЧ та спрямована перпендикулярно до цієї швидкості й до напрямку індукції магнітного поля  $\vec{B}$ .

У такому достатньо загальному підході, на основі одного фундаментального принципу – ПНД, ми одержуємо опис руху ЗЧ в заданому електромагнітному полі.

Але при цьому в процесі вивчення електромагнетизму втрачається зв'язок з вихідними означеннями фізичних величин.

### 1.2.2б. Тензор електромагнітного поля.

У пункті 1.1.2 ми вивели рівняння руху ЗЧ у полі, виходячи з функції Лагранжа (1.33), написаній у тривимірному вигляді. Виведемо тепер ті ж рівняння безпосередньо з виразу для дії

$$S = \int_1^2 -mcds + \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i,$$

записаної мовою чотиривимірних векторів та принципу найменшої дії.

Принцип найменшої дії стверджує, що

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mcds + q\Phi_i dx_i) = 0. \quad (1.87)$$

Зауважуючи, що

$$ds_M = \sqrt{\sum_i dx_i^2} = i \cdot ds = i \cdot cd\tau,$$

для варіації  $ds$  знаходимо

$$\delta ds = \frac{1}{2i} \left( \sqrt{\sum_i dx_i^2} \right)^{-1/2} 2dx_i \cdot \delta dx_i = \frac{dx_i \cdot \delta dx_i}{i \cdot ds_M} = -\frac{1}{c} u_i \cdot \delta dx_i,$$

де 4-швидкість  $u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = ic \cdot \frac{dx_i}{ds_M}$ , звідси  $\frac{dx_i}{ds_M} = \frac{u_i}{ic}$ .

Тоді для варіації дії знаходимо (нижче межі інтегрування  $a$  і  $b$  ми будемо для скорочення упускати)

$$\delta S = - \int (mc \frac{dx_i \cdot \delta dx_i}{i \cdot ds_M} - q \cdot \Phi_i \cdot \delta dx_i - q \cdot \delta \Phi_i \cdot dx_i) = 0. \quad (1.88)$$

Тобто, (1.88) набуває вигляду

$$\delta S = \int (m u_i \cdot \delta dx_i + q \cdot \Phi_i \cdot \delta dx_i + q \cdot \delta \Phi_i \cdot dx_i) = 0. \quad (1.88a)$$

Перші два доданки в підінтегральному виразі (1.88a) про інтегруємо частинами і одержимо:

$$\int (-m \cdot du_i \cdot \delta x_i - q \cdot \delta x_i \cdot d\Phi_i + q \cdot \delta \Phi_i dx_i) + (m u_i + q \cdot \Phi_i) \delta x_i \Big|_a^b = 0 \quad (1.89)$$

Другий доданок цього рівняння дорівнює нулю, бо інтеграл варіюється при заданих значеннях координат на границях. Далі перетворимо підінтегральний вираз (1.89) урахувавши, що

$$\delta \Phi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \delta x_k; \quad d\Phi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} dx_k,$$

і тому маємо

$$\int \left( -m du_i \delta x_i - q \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \delta x_i dx_k + q \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k \right) = 0. \quad (1.90)$$

Напишемо в першому члені  $du_i = \frac{du_i}{ds} ds$ . Крім того, у третьому

доданку в підінтегральному виразі поміняємо місцями індекси  $i$  та  $k$  (це нічого не змінює, бо за індексами  $i$  та  $k$  відбувається сумування). А потім у другому та третьому доданках  $dx_k$  подамо як

$$dx_k = \frac{u_k ds_M}{ic} = \frac{u_k ds}{c}.$$

Тоді (1.90) набуває вигляду:

$$\int \left[ -m \frac{du_i}{ds} - \frac{q}{c} \cdot \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right) u_k \right] \delta x_i ds = 0.$$

Оскільки  $\delta x_i$  може приймати довільні значення, то підінтегральний вираз дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} -m \frac{du_i}{ds} - \frac{q}{c} \cdot \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right) u_k &= 0; \\ m \frac{du_i}{ds} &= \frac{q}{c} \cdot \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right) u_k. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Уведемо означення компонент антисиметричного тензора електромагнітного поля

$$F_{ik} = c \cdot \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right); \quad i, k = 1..4. \quad (1.92)$$

Тоді рівняння руху ЗЧ (1.91) в ЕМП запишеться у вигляді



$$m \frac{du_i}{ds} = \frac{q}{c^2} \cdot F_{ik} \cdot u_k; \quad (1.93)$$

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{q}{c} \cdot F_{ik} \cdot u_k.$$

Це – рівняння руху зарядженої частинки в чотиривимірній формі.

Зміст окремих компонентів тензору  $F_{ik}$  легко з'ясувати, підстави-

вши значення 4-потенціалу  $\Phi_i = \left( \vec{A}, i \frac{\varphi}{c} \right)$  в означення (1.92). Результат

можна записати у вигляді таблиці, де індекс  $i = 1, 2, 3, 4$  нумерує рядки, а індекс  $k$  – стовпці

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

**Приклад.** Записати вираз для густини сили Лорентца  $\vec{f} = \rho \left( \vec{E} + [\vec{v} \cdot \vec{B}] \right)$  в 4-вимірній формі.

*Розв'язання.* Запишемо спочатку компоненту сили Лорентца по вісі  $OX$ :

$$\begin{aligned} f_x = f_1 &= \rho \left( E_x + v_y B_z - v_z B_y \right) = \left( -\frac{is_4}{c} \right) iF_{14} + s_2 \frac{F_{12}}{c} - s_3 \left( -\frac{F_{13}}{c} \right) = \\ &= \frac{1}{c} (F_{12}s_2 + F_{13}s_3 + F_{14}s_4) = \frac{1}{c} F_{1k} s_k, \end{aligned}$$

де  $s_k = \rho_0 u_k = \rho_0 \gamma \{ v_x, v_y, v_z, ic \}$  – компоненти 4-струму;

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ;  $\rho_0$  – густина заряду у власній системі відліку.

Аналогічні вирази знаходяться для інших проекцій густини сили Лорентца  $f_y = f_2$ ,  $f_z = f_3$ ,  $f_t = f_4$ . Таким чином, 4-вектор густини сили Лорентца має такі компоненти

$$f_i = \frac{1}{c} \cdot F_{ik} \cdot s_k,$$

де  $f_i$  – відповідна компонента густини сили,

1.2.2в. Перша пара рівнянь Максвелла.

З означень (1.84) та (1.85) для індукції магнітного і напруженості електричного полів

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}; E = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi$$

легко отримати рівняння, які містять лише  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  [155; 14].

Для цього визначимо  $\text{rot}\vec{E}$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A} - \text{rotgrad}\varphi.$$

Але ротор усякого градієнта дорівнює нулю, отже

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (1.95)$$

**Тобто якщо постулювати 4-потенціал у вигляді (1.70), то закон електромагнітної індукції (1.95) є наслідком (1.78) та рівняння Лагранжа.**

Узявши дивергенцію від двох частин рівняння  $\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$  та пам'ятаючи, що дивергенція усякого ротора дорівнює нулю, знаходимо

$$\text{div}\vec{B} = 0. \quad (1.96)$$

Рівняння (1.95) та (1.96) складають першу пару рівнянь Максвелла.

Зазначимо, що ці два рівняння ще не визначають у цілому властивості полів. Це видно вже з того, що вони визначають зміну магнітного поля в часі (похідна  $\partial\vec{B}/\partial t$ ), але не визначають похідної  $\partial\vec{E}/\partial t$ .

Використовуючи теорему Гаусса та теорему Стокса, рівняння (1.96) та (1.95) можна написати в інтегральній формі

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0; \quad (1.97)$$

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}d\vec{S}. \quad (1.98)$$

Рівняння Максвелла (1.95) та (1.96) можна також написати й у чотиривимірних позначеннях. Виходячи з означення тензора електромагнітного поля (1.94), легко переконатися, що перша пара рівнянь Максвелла еквівалентна рівнянням [155]

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.99)$$

Вираз, що стоїть у лівій частині рівняння (1.99), є тензором третього рангу, антисиметричний за всіма трьома індексами. Його компоненти не дорівнюють тотожно нулю лише при  $i \neq k \neq l$ .

Таким чином, усього маємо чотири різних рівняння, які, як легко впевнитися, збігаються з рівняннями (1.95) та (1.96).

### 1.2.2г. Друга пара рівнянь Максвелла.

Дія  $S$  для системи, що включає в себе ЕМП та ЗЧ має бути з трьох доданків:

$$S = S_{\text{Ч}} + S_{\text{ПЧ}} + S_{\text{ЕМП}}, \quad (1.100)$$

де  $S_{\text{Ч}}$  – дія всіх заряджених частинок в системі,  $S_{\text{ПЧ}}$  – дія, що описує взаємодію зарядів з ЕМП,  $S_{\text{ЕМП}}$  – дія, яка залежить тільки від властивостей самого ЕМП, тобто,  $S_{\text{ЕМП}}$  – дія для поля у відсутності ЗЧ.

Як ми впевнилися в попередньому пункті, перші два доданки мають вигляд

$$S_{\text{Ч}} = \sum_a \int_1^2 -mc ds; \quad (1.101)$$

$$S_{\text{ПЧ}} = \sum_a \int_1^2 q_a \Phi_i \cdot dx_i \quad (1.102)$$

де індекс  $a$  – нумерує заряджені частинки.

Оскільки в попередніх параграфах ми цікавилися **тільки рухом ЗЧ у відомому ЕМП**, то величина  $S_{\text{ЕМП}}$  не входила у вираз для сумарної дії (1.84). Дія  $S_{\text{ЕМП}}$  не залежить від заряджених частинок і тому вона не може вплинути на доведення чи вигляд рівняння руху ЗЧ.

Коли метою є виведення рівняння поля, знання дії  $S_{\text{ЕМП}}$  принципово необхідне. Але як же сконструювати дію  $S_{\text{ЕМП}}$  ?

**Дію  $S_{\text{ЕМП}}$  слід побудувати з величин, які описують ЕМП, тобто з компонент 4-потенціалу  $\Phi_i$ . Крім того, прийдеться використати ряд обмежень, які необхідно накласти на величину  $S_{\text{ЕМП}}$ , і які впливають із загальних фізичних принципів та з дослідних даних.**

Іншими словами, потрібно врахувати такі властивості дії  $S_{\text{ЕМП}}$  [154; 155; 14].

1.  $S_{\text{ЕМП}}$  повинна **бути релятивістським інваріантом** – ця вимога впливає з принципу відносності.

2. Як впливає з пунктів 1.2.2б та 1.2.2в, величини, **які спостерігаються чи вимірюються в експерименті, є компонентами тензора  $F_{ik}$  і незмінними при градієнтному перетворенні потенціалів ЕМП.**

Значить і вся теорія ЕМП повинна бути градієнтно-інваріантною. А це значить, **що всі рівняння, які описують як власне поле, так і взаємодію поля з ЗЧ повинні бути виражені через градієнтно-інваріантні величини – компоненти тензора  $F_{ik}$ .**

3. З принципу суперпозиції

$$\vec{E} = \sum_a \vec{E}_a; \vec{B} = \sum_a \vec{B}_a,$$

де  $a$  – номер ЗЧ, або джерела магнітного поля, впливає, що диференційні рівняння поля повинні бути лінійними, оскільки лінійному диференційному рівнянню властива така особливість: сума будь-яких його розв'язків теж є його розв'язком.

А тому під знаком інтеграла в дії  $S_{EM\Pi}$  повинен бути вираз, квадратичний за полем. Бо тільки в цьому випадку рівняння поля будуть лінійними. Оскільки рівняння поля одержуються шляхом варіювання дії, а при варіюванні дії показник степені підінтегрального виразу зменшується на одиницю.

Тобто  $S_{EM\Pi}$  повинне бути білінійним функціоналом від компонент 4-потенціалу та їх похідних.

4. Оскільки при варіюванні дії порядок похідних збільшується на одиницю, то вираз для дії  $S_{EM\Pi}$  повинен містити похідні від 4-потенціалу не вище першого порядку. Тобто в рівняння ЕМП повинні входити похідні від 4-потенціалу не вище другого порядку за координатами й часу.

Таким чином, умови 2 та 4 вимагають, щоб в  $S_{EM\Pi}$  не входили компоненти 4-потенціалу, а входили компоненти  $F_{ik}$  – похідні першого порядку від  $\Phi_i$  по компонентам 4-радіус-вектора.

Умови 1 та 3 приводять до того, що під інтегралом в дії  $S_{EM\Pi}$  повинен бути інваріант, причому інваріант у вигляді білінійного виразу від похідних 4-потенціалу.

Тобто, ще раз повторимо,  $S_{EM\Pi}$  повинна бути інтегралом деякої функції від тензора  $F_{ik}$ . А єдина функція від тензора  $F_{ik}$ , яка є скаляром, є інваріантом  $(F_{ik})^2 = c^2 B^2 - E^2$ .

Тому дія  $S_{EM\Pi}$  повинна мати вигляд

$$S_{EM\Pi} = b \cdot \int (F_{ik})^2 \cdot dV dt, \quad (1.103)$$

де інтегрування за  $dV$  ведеться за всім простором, а за часом – між двома заданими моментами часу;  $b$  – деяка константа, причому  $b < 0$  [154; 155].

Зробимо ще одне доповнення.

Вирази  $S_{ПЧ} = \sum_a \int_1^2 q \Phi_i \cdot dx_i$  та  $S_{EM\Pi} = b \cdot \int (F_{ik})^2 \cdot dV dt$  за-

писані в різних формах: у той час, як  $S_{EMП}$  – це чотирикратний інтеграл за просторово-часовою областю,  $S_{ПЧ} = \sum_a \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i$  – це сума однократних інтегралів за світовими лініями заряджених частинок. Щоб одержати рівняння поля, необхідно подати  $S_{ПЧ}$  у польовій формі, за аналогією до структури  $S_{EMП}$ . Цього досягають шляхом уведення в (1.102) 4-струму. Перепишемо (1.102)

$$S_{ПЧ} = \sum_a \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i = \int_1^2 \left( \sum_a q_a \cdot dx_i \right) \cdot \Phi_i = \int (\rho dV \cdot dx_i) \cdot \Phi_i \cdot \frac{dt}{dt}.$$

Але, згідно з означенням,  $s_i = \rho \frac{dx_i}{dt}$  – це компоненти 4-струму.

Тому з попереднього одержуємо

$$S_{ПЧ} = \int s_i \Phi_i \cdot dt dV = \frac{1}{ic} \int s_i \Phi_i \cdot d\Omega, \quad (1.104)$$

де  $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = dx dy dz \cdot ic dt$  – елементарний об'єм в 4-вимірному часо-просторі.

Нарешті можна записати дію для довільної електродинамічної системи

$$S = - \sum_a m_a \int cds + \frac{1}{ic} \int s_i \Phi_i \cdot d\Omega + \frac{b}{ic} \cdot \int (F_{ik})^2 \cdot d\Omega. \quad (1.105)$$

При знаходженні рівнянь поля з принципу найменшої дії потрібно вважати заданим рух зарядів, а варіювати повинні тільки потенціали поля (які в цьому випадку грають тут роль «координат» системи). При знаходженні рівнянь руху в п. 1.2.2а ми, навпаки, уважали поле заданим і варіювали траєкторією частинки.

Тому варіація першого члену в дії (1.105) тепер дорівнює нулю, а в другому не повинен варіюватися 4-струм  $s_i$ . Таким чином,

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int [s_i \delta \Phi_i + 2b F_{ik} \delta F_{ik}] \cdot d\Omega = 0. \quad (1.106)$$

Для варіації тензора ЕМП з урахуванням (1.94) маємо

$$\delta F_{ik} = c \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \Phi_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \delta \Phi_i \right).$$

Тоді (1.106) набуває вигляду

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ s_i \cdot \delta \Phi_i + 2b F_{ik} c \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \Phi_k - 2b F_{ik} c \frac{\partial}{\partial x_k} \delta \Phi_i \right\} d\Omega = 0.$$

У другому доданку змінюємо місцями індекси  $i$  та  $k$ , за якими складається сума, і, крім того, замінимо  $F_{ki}$  на « $-F_{ik}$ ». Тоді отримаємо

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ s_i \cdot \delta \Phi_i - 4bF_{ik}c \frac{\partial}{\partial x_k} \delta \Phi_i \right\} d\Omega = 0. \quad (1.107)$$

Скористаємося формулою  $(uv)' = uv' + vu'$ , щоб перетворити другий доданок в фігурних дужках (1.107).

$$F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta \Phi_i = \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{ik} \cdot \delta \Phi_i) - \delta \Phi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} F_{ik}$$

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ s_i \cdot \delta \Phi_i - 4bc \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{ik} \cdot \delta \Phi_i) - \delta \Phi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} F_{ik} \right) \right\} d\Omega = 0.$$

$\frac{\partial}{\partial x_k} (F_{ik} \cdot \delta \Phi_i)$  – це 4-вимірна дивергенція величини  $F_{ik} \cdot \delta \Phi_i$ .

Згідно з теоремою Гаусса,

$$\int \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{ik} \cdot \delta \Phi_i) d\Omega = \int_S (F_{ik} \cdot \delta \Phi_i) \cdot dS_k,$$

де  $dS_k$  – елемент поверхні в 4-вимірному просторі Мінковського.

Значення інтегралу слід брати згідно з межами інтегрування. Але межею інтегрування за просторовими координатами є нескінченність, де фактично поле відсутнє. Тобто,  $\delta \Phi_i = 0$ . На крайніх межах інтегрування за часом, тобто в початковий і кінцевий моменти часу, варіація потенціалів дорівнює нулеві, оскільки за змістом ПНД потенціали в ці моменти часу задані.

Тоді для варіації дії маємо

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ s_i \cdot \delta \Phi_i + 4bc \delta \Phi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} F_{ik} \right\} d\Omega = 0$$

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left\{ s_i + 4bc \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} F_{ik} \right\} d\Omega \cdot \delta \Phi_i = 0 \quad (1.108)$$

Оскільки, взагалі кажучи, варіації  $\delta \Phi_i$  довільні, то з принципу найменшої дії для ЕМП (1.108) одержуємо

$$s_i + 4bc \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} F_{ik} = 0$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{s_i}{4bc}. \quad (1.109)$$

Сукупність рівнянь (1.109) – суть друга пара рівнянь Максвелла.

Запишемо ці чотири рівняння в більш звичній тривимірній формі.

При  $i = 4$  та враховуючи (1.94) з (1.109), одержуємо одне з другої пари рівнянь Максвелла

$$i \cdot \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = -\frac{ic\rho}{4bc},$$

або

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\rho}{4b}. \quad (1.110)$$

Як відзначалося раніше значення коефіцієнта  $b$  у виразі для дії  $S_{EMII}$  (1.103), залежить від вибору одиниць вимірювання величин, що характеризують поле. При використанні системи СІ з порівняння рівняння (1.110) з рівнянням Максвелла  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  приходимо до виснов-

ку, що  $b = -\frac{\epsilon_0}{4}$ .

При  $i = 1$  з (1.110) маємо

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = -\frac{s_1}{4bc}$$

Якщо підставити відповідні компоненти тензора  $F_{ik}$  (1.94), то одержуємо

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{j_x}{4bc^2}; \quad (1.111)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu_0 j_x.$$

Останнє рівняння (1.111) разом з наступними двома, які впливають з (1.109) при  $i = 2$  та  $i = 3$  дають векторне рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{B}$

$$rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.112)$$

Рівняння (1.110) і (1.112) складають другу пару рівнянь Максвелла. Разом з першою парою вони цілком визначають електромагнітне поле та є основними рівняннями теорії цього поля – електродинаміки.

Застосовуючи теорему Гаусса до (1.110) та теорему Стокса до (1.112) одержуємо РМ в інтегральній формі (I') та (II') відповідно.

З рівнянь Максвелла можна отримати відоме нам уже рівняння неперервності. Узявши з двох сторін рівняння (1.112) дивергенцію, знаходимо

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}.$$

Але  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$ . Оскільки, згідно з (1.110),  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ , одержу-

ємо рівняння неперервності

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

У чотиривимірному вигляді з (1.109) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right) = -\frac{1}{4bc} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{1}{4bc} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \frac{\partial s_i}{\partial x_i}.$$

Якщо застосувати симетричний за індексами  $i, k$  оператор  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$  до антисиметричного тензору  $F_{ik}$ , то тотожно одержимо нуль.

І знову маємо рівняння неперервності, написаному в чотиривимірному вигляді [154; 155].

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_i} = 0.$$

## Висновки до розділу 1

**У п. 1.2.2 вперше** в науково-методичній літературі з класичної електродинаміки **поданий опис методу** обґрунтування рівнянь Максвелла **в системі одиниць СІ** на основі ПНД.

Найбільш просто й несуперечливо традиційним методом обґрунтовуються рівняння  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  і  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ . Але щоб одержати  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , необхідно мати або закон ЕМІ (III), або закон Біо-Савара (1.43).



А от обґрунтування рівнянь Максвелла  $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  та  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  в традиційній схемі відбувається надто формально, непереконливо, інколи суперечливо та помилково (див. **Розділ 2** та **Розділ 3**).

Щоб послідовно обґрунтувати РМ на основі ПНД необхідно постулювати такі положення:

А) вигляд потенціалів ЕМП:

$$\Phi \left( \Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i \cdot \frac{\varphi}{c} \right);$$

Б) вигляд дії для ЗЧ в ЕМП:  $S_{ПЧ} = \int_1^2 q\Phi_i dx_i$ ;

В) справедливість ПНД для ЗЧ в ЕМП.

Формально просто обґрунтовується на основі ПНД перша пара РМ. Але при цьому втрачається, у процесі вивчення електромагнетизму, зв'язок з вихідними означеннями фізичних величин.

Достатньо абстрактно вводяться поняття напруженості електричного та індукції магнітного полів з рівняння руху (1.83).

До того ж необхідно ввести додаткові, не прості при засвоєнні, поняття й величини: інтервал  $ds$ , 4-потенціал  $\Phi_i$ , 4-радіус-вектор, функція дії  $S$ .

Дійсно, чому саме в такій формі вибирається, чи означається функція дії для ЗЧ в ЕМП,  $S_{ПЧ} = \int_1^2 q\Phi_i \cdot dx_i$ ?

Очевидно з міркувань сумісності одержаних теоретичних наслідків з експериментальними фактами.

Тобто вивчення електродинаміки й побудову теорії навіть на основі ПНД слід робити з максимальним наближенням і до експериментальних фактів, і до поступового введення формальним шляхом фізичних величин.

При цьому слід обов'язково весь час простежувати сумісність одержаних з використанням ПНД результатів з рівняннями Максвелла, які одержані іншим шляхом або розглядаються як результат узагальнення дослідних фактів.

Тобто ми постійно спираємося на дослід та на відомі вже рівняння Максвелла.

Маємо також достатньо довгий шлях обґрунтування виразу для функції дії самого ЕМП у відсутності ЗЧ:  $S_{ЕМП} = b \cdot \int (F_{ik})^2 \cdot dVdt$ .

Таким чином, щоб реалізувати можливості ПНД у контексті одержання РМ, необхідно, крім перерахованих постулатів, мати **ще й готові (постульовані незалежно від ПНД «істини» у вигляді самих РМ)** РМ для того, щоб знайти коефіцієнт  $b$  (п. 1.2.2z).

До речі цей коефіцієнт можна визначити, не посилаючись на РМ  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , а порівнюючи наслідки з (1.35) чи (1.36) із законом Кулона, або з іншими дослідними фактами.

Знову ж таки для визначення коефіцієнту  $b$  необхідно використувати знання **вже відомого рівняння Максвелла**  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Крім того, сам метод, хоч і є загальним і відповідає СТВ, залучає інформацію з досліду (закон Кулона,  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ), що робить його, на наш погляд, дещо непослідовним.

**Але на цьому шляху ми одержуємо ряд надзвичайно важливих результатів: і рівняння руху зарядженої частинки в 4-вимірній формі**

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{q}{c} \cdot F_{ik} \cdot u_k, \text{ і тензор ЕМП } F_{ik} = c \cdot \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right), \text{ і рівняння}$$

**поля в 4-вимірній формі**  $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0$  та  $\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = s_\mu$ ,

де  $f_{\mu\nu}$  – тензор електромагнітного поля в середовищі [127].

Але як плату за цю абстрактність маємо цілісний, системний в Ейнштейнівському розумінні підхід до вивченні електродинаміки.

У той же час маємо довге, абстрактне, формальне обґрунтування, з уведенням значної кількості 4-вимірних величин, зміст і властивості яких сприймаються важко й непереконливо.

У процесі варіювання функції дії залишається багато непорозуміннь у студентів при вивченні ЕМП саме таким шляхом – чому дія вибрана саме в такому, а не в іншому вигляді, чому при варіювання функції дії 4-струм слід залишати незмінним, чому при (перед (1.8)) диференціюванні за  $V$  швидкість руху ЗЧ слід уважати незмінною й т. д.

Такий шлях недоцільний при вивченні електродинаміки, бо не дає детальної фізичної інтерпретації електродинамічних явищ, що вивчаються.

Такий підхід, на наш погляд, при вивченні класичної електродинаміки в рамках базової вищої освіти в педагогічних університетах не прийнятний з огляду на його абстрактність, формальність і деяку відірваність від тих фізичних уявлень, які формуються в студентів-фізиків

педагогічних університетів. Дійсно, поняття  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , а також їх означення через  $\vec{A}$  і  $\varphi$  впливають як наслідок рівняння руху (1.83).

Недолік цієї методики й у тому, що попередньо необхідно вводити досить формально поняття векторного та скалярного потенціалів ЕМП як компонент 4-потенціалу. Усе це разом взяте справляє враження чогось штучного й дещо відірваного від експерименту.

Кращим для засвоєння й розуміння максвелівської теорії, на нашу думку, є підхід в обґрунтуванні рівнянь Максвелла, який оснований на експериментально-дослідних законах. Оскільки він є більш наочним, на відміну від підходу, що базується на принципі найменшої дії, містить набагато менше елементів векторної алгебри.

І крім того, у рамках цього методу можна більш доступно пояснювати фізичну суть таких понять, як електромагнітне поле, напруженість електромагнітного поля, індукція тощо.

У той же час традиційний спосіб обґрунтування рівнянь Максвелла переобтяжений великою кількістю «незалежних фундаментальних експериментальних фактів».

З ПНД закон ЕМІ впливає у формі  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  після того, як одержані рівняння руху у формі рівнянь Лагранжа. Перша пара рівнянь Максвелла – це формальний наслідок означень  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  через електромагнітні потенціали.

І це певний позитив, оскільки в традиційних методиках вихідним фундаментально-дослідним формулюванням закону ЕМІ є, як на наш погляд безпідставно, формула

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Щодо мінуса в «правилі потоку». Закон ЕМІ подається й у формі  $\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$ , й у формі  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ , й у формі  $\varepsilon = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$  з відповідною інтерпретацією в кожному випадку.

Такі два підходи в обґрунтуванні першої пари РМ відображають характерну тенденцію в історії становлення та розвитку теорії ЕМП. Можна навіть сказати, що маємо проблемну методологічну ситуацію.

А саме: які величини найбільш адекватно описують стан електродинамічної системи – напруженості поля чи потенціали [166; 28].

Далі, у посібниках з електродинаміки як для вищої школи, так і для СНЗ взагалі не обговорюється питання про механізм виникнення МП постійних струмів.

Обговорення та фізичне пояснення зводиться до словосполучень типу «електричний струм супроводжується магнітним полем», «з рухом заряджених частинок пов'язане магнітне поле», «навколо рухомих зарядів (струмів) існує магнітне поле».

$rot\vec{B} = 0$  поза межами струмів. Тобто, МП у просторі поза струмами є полем потенційним. Як узгодити цей висновок з уявленнями про МП струмів як поле вихрове? Поле вихрове тоді й тільки тоді, коли  $rot\vec{B} \neq 0$ .

Але розрахунки індукції МП у просторі навколо ППС з використанням рівняння  $rot\vec{B} = 0$  та його еквіваленту  $\nabla^2\vec{A} = 0$  дають результати, що збігаються з експериментальними.

Таким чином, при обґрунтуванні РМ та при їх інтерпретації існує низка нерозв'язаних науково-методичних проблем. Ці проблеми стосуються як фізичного розуміння явищ, так і методики вивчення деяких питань електродинаміки.

Закон збереження заряду при застосуванні ПНД впливає як наслідок одержаних РМ. У традиційній же методиці закон збереження заряду відіграє самостійну роль, наприклад, як елемент суперечності з РМ  $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ .

У рамках традиційного методу обґрунтування РМ електромагнітні потенціали  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  вводяться як один зі способів розв'язання РМ.

Уводяться для того, щоб мовою цих величин РМ подати у формі рівнянь Даламбера.

А в методі обґрунтування РМ на основі ПНД вираз для електромагнітних потенціалів у вигляді 4-потенціалу просто постулюється.

Рівняння Максвелла, як це видно з пункту 1.2.2, впливають як наслідок цього постулату та ПНД.

Таким чином, не існує ідеального способу обґрунтування РМ. А з тих, що обговорювалися одержуємо цілу низку суперечностей і непослідовностей.

Тому пошук оптимальної методики обґрунтування й вивчення рівнянь Максвелла є актуальною науково-методичною проблемою.

## Розділ 2

### ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАГНІТНОГО ПОЛЯ СТАЦІОНАРНИХ І КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ СТРУМІВ НА ЗАСАДАХ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

#### **2.1. Огляд традиційних методик вивчення основних властивостей і понять стаціонарного та квазістаціонарного магнітного поля**

У підручниках з електромагнетизму для середньої та вищої школи, виданих в останні роки й десятиліття, знаходимо ряд різних методик уведення поняття «магнітне поле» та величин, які характеризують це магнітне поле.

Усі вони мають одну спільну рису: МП визначається як вид матерії, що передає силову взаємодію між струмами провідності, подібно до того, як електричне поле передає взаємодію між нерухомими зарядженими частинками. За основу визначення характеристик МП береться будь-який ефект, пов'язаний з магнітною взаємодією.

**А.** Так, автор посібників [40; 41] розглядає два паралельних провідники зі струмами та за взаємодією між ними дає означення магнітної індукції  $B$

$$B = \frac{F}{I \cdot l}. \quad (2.1)$$

Подібний підхід знаходимо також в посібниках [69; 229; 230].

**Б.** Автори підручників [187; 22; 145; 61] для виявлення МП пропонують брати маленьку рамку з струмом  $i$ , щоб за моментом сили  $M$ , який діє на рамку, визначити величину й напрямок вектора  $\vec{B}$

$$B = \frac{M}{iS}, \quad (2.2)$$

де  $S$  – площа, охоплена струмом  $i$ .

**В.** У посібниках [200; 224; 234] значення та напрям вектора  $\vec{B}$  пропонується визначати за силою, що діє на рухоми заряджену частинку в магнітному полі, величина заряду якої  $q$

$$\vec{F}_Л = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.3)$$

**Г.** У посібнику І. Є. Тамма [224] в основу визначення вектора  $\vec{B}$  покладено вираз для сили Ампера

$$d\vec{F} = i \left[ d\vec{l}, \vec{B} \right], \quad (2.4)$$

яка діє на елемент струму  $i d\vec{l}$  з боку магнітного поля.

Але оскільки  $i d\vec{l} = Nq\vec{v}$ , де  $N$  – число ЗЧ, що реалізують елемент струму  $i \cdot d\vec{l}$ ,  $\vec{v}$  – дрейфова швидкість ЗЧ,  $q$  – величина заряду, то ми бачимо, що методики **A**, **B**, **Г** по суті подібні.

**Д.** У навчальному посібнику [178] МП розглядається як посередник, що передає взаємодію двох елементів струму згідно з формулою Ампера-Грассмана; а релятивістська природа МП продемонстрована на прикладі аналізу взаємодії заряду та нескінченно довгої зарядженої нитки, але це пояснення носить фрагментарний характер.

**Е.** Автори посібника [155] визначають індукцію магнітного та напруженість електричного полів через електромагнітні потенціали  $\vec{A}$  і  $\varphi$ , (див. п. 1.2.2a, формули (1.84) та (1.85))

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Очевидно, як ми вже відзначали, такий підхід при початковому вивченні електродинаміки, у курсі «Загальна фізика» чи навіть у курсі теоретичної фізики не прийнятний як надто абстрактний.

Жодна з цих методик (певною мірою за винятком деяких ідей релятивізму в посібниках [260; 178]) не може від самого початку пояснити одну з найважливіших властивостей МП – його релятивістську природу.

**Практично в усіх посібниках з електродинаміки значна увага надається обґрунтуванню та поясненню закону Біо-Савара.**

У підручнику Савельєва [209, с. 112] з допомогою напівправдоподібних міркувань обґрунтовується формула для індукції МП, яке створюється рухомою ЗЧ

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = f \{ q, \vec{v}, \vec{r}(t) \} = k' \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (2.6)$$

причому підкреслюється, що ці міркування не мають «доказової сили».

І все ж з (2.6) одержується закон Біо-Савара [209, с. 115] у формі (1.43).

І в той же час, знову повторюється теза, що закон Біо-Савара був встановлений експериментально.

По друге, у [209, с. 112, с. 113] декілька раз повторюються слова про те, що вигляд функції  $\vec{B}(\vec{r}, t) = f \{ q, \vec{v}, \vec{r}(t) \}$  та формула

$\vec{B}(\vec{r}, t) = k' \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$  можуть бути встановлені тільки експериментальним шляхом.

**На нашу думку, це твердження як основа обґрунтування (2.6) є принципово помилковим.**

Дійсно, вигляд цієї функції при  $\vec{v} = \text{const}$  установлюється з достатньо простих теоретичних міркувань [82; 129], а експеримент якраз і підтверджує, що формула (2.6) для рухомих ЗЧ, узагалі кажучи, невірна [129; 124] (див. нижче п. 2.2 та **Розділ 3**).

Якщо ж в основу магнітостатики покласти формулу Ампера-Грассмана [178, с. 67] (див. також (1.41))

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi r_{12}^3} \cdot \left[ d\vec{l}_2, \left[ d\vec{l}_1, \vec{r}_{12} \right] \right],$$

як начебто одержаної в результаті узагальнення дослідних даних (насправді невідомо яких саме) [178; 118; 126; 153; 127], то закон Біо-Савара можна розглядати як наслідок формули Ампера-Грассмана [68; 126; 153; 118; 127] (див. також п. 1.2.1б).

А з якої потім, користуючись принципом суперпозиції, одержується в нерелятивістському наближенні й формула (2.6) [126; 153; 118; 127].

Обґрунтування формули Ампера-Грассмана на основі деяких експериментальних фактів і правдоподібних міркувань у нерелятивістському наближенні наведено в [68, с. 177–178]. Але аналогічні міркування наводив і Ампер [149, с. 424], які, як потім виявилось, не відповідають фізичній реальності.

У посібнику Д. В. Сивухіна [216, с. 218–221] закон Біо-Савара розглядається як наслідок виразу для індукції магнітного поля (в нерелятивістському наближенні) ЗЧ, що має постійну швидкість, та принципу суперпозиції магнітних полів.

У посібниках [153; 152] стверджується, що «вивчаючи експериментально магнітну взаємодію провідників зі струмом, А. Ампер у 1820 р.

установив закон...  $d\vec{F}_{12} = k \frac{i_1 i_2}{r_{12}^3} \cdot \left[ d\vec{l}_2, \left[ d\vec{l}_1, \vec{r}_{12} \right] \right]$ » [153, с. 269].

Це не відповідає дійсності, ні історичній, ні фізичній.

Насправді Ампер установив такий закон [149, с. 424]:

$$dF = \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{r^2} (\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2), \quad (2.7)$$

де  $\theta_1, \theta_2$  – кути, які утворюють елементи струмів  $d\vec{l}_1$  та  $d\vec{l}_2$  з  $\vec{r}_{12}$ ;  $\varepsilon$  – кут між елементами струмів  $d\vec{l}_1$  та  $d\vec{l}_2$ .

В оглядовій статті І. С. Шапіро [250, с. 321] та посібнику І. Є. Тамма [224, с. 210] сила, що діє на другий елемент струму з боку першого елемента струму, згідно з дослідями Ампера, подається у вигляді

$$d\vec{F}_{12} = \frac{i_1 i_2}{4\pi r_{12}^3} \left[ 3 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})(d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^2} - 2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \right] \cdot \vec{r}_{12}, \quad (2.8)$$

де  $\vec{r}_{12}$  – радіус-вектор проведений від  $d\vec{l}_1$  до  $d\vec{l}_2$ .

Останні два вирази принципово не збігаються з формулою Ампера-Грассмана.

На нашу думку, при вивченні електромагнетизму закон Ампера-Грассмана слід коментувати не як експериментальний закон, який начебто одержаний у результаті чітко проведених дослідів.

Несуперечливо й у відповідності до сучасної фізичної парадигми силу  $d\vec{F}_{12}$  слід розглядати як сукупну силу Лорентца, що діє на електрони провідності одного елемента струму з боку магнітного поля, створеного іншою сукупністю електронів провідності другого елемента струму [89; 129; 6; 183].

Таким чином, як бачимо, в основі методик вивчення магнітного поля постійних струмів як у курсі загальної фізики, так і в курсі теоретичної фізики для фізичних спеціальностей університетів лежить або закон Біо-Савара (1.43), або формула Ампера-Грассмана (1.41), або непослідовно й необґрунтовано одержана формула для вектора  $\vec{B}$  рухомої ЗЧ (2.1).

При цьому незважаючи на те, що електродинаміка є суттєво релятивістською теорією, усі основні формули магнітостатики записуються в нерелятивістському наближенні.

У посібниках з електродинаміки для СНЗ і ВНЗ, виданих за останні 20–30 років, поняття «магнітне поле» уводиться, в основному, виходячи із аналізу взаємодії постійних струмів [178; 64; 224; 40; 189; 251; 78; 65; 69].

Така методика характеризується відносною простотою, прозорістю й майже очевидними (наочними) дослідями та демонстраціями. Крім того, така взаємодія лежить в основі роботи різних (але знайомих учням і студентам) електричних машин, механізмів і пристроїв, що теж сприяє засвоєнню поняття МП. Далі, традиційна методика вивчення цієї теми спирається на начебто «фундаментальні» дослідні факти (закон Біо-Савара-Лапласа, закон Ампера-Грассмана).

У цьому й сила, і слабкість цієї методики.

Сила в наочності, в опорі на начебто очевидний емпіричний факт, який важко заперечити та який у той же час веде до деякої безапеляційності, до уявлення про однобічність фізичного пізнання з прихованим акцентом на емпіризм.



Такий шлях, очевидно, не сприяє розвитку критичного мислення, зменшує роль теоретичного пізнання, гальмує психічний розвиток і формування фізичного стилю мислення учня.

Подібні експерименти ніколи не можуть бути (і не могли бути) проведені з необхідною точністю та чистотою, як через похибки, так і через необхідність користуватися деякою теорією при проведенні та інтерпретації експерименту.

І нарешті просто не враховується електрична взаємодія між провідниками зі струмами.

**З огляду на концепцію фундаментальності фізичної освіти, глибинні причини та необхідність появи МП не можуть бути висвітлені в принципі в рамках цієї методики.**

Крім того, традиційна методика формування поняття МП є дещо непослідовною.

Дійсно, при проходженні струму, наприклад, циліндричним провідником на його поверхні з'являються певним чином розподілені електричні заряди, які створюють електричне поле всередині й зовні такого провідника [225; 208; 108; 216; 85; 92]. Унаслідок пінч-ефекту такий провідник з струмом характеризуються й деякою об'ємною густиною заряду [225; 108; 176]. Але це ще не все. Рухомі електрони провідності повинні створювати додаткове електричне поле зовні провідника з струмом, зумовлене релятивістськими поправками у виразі для напруженості їх електричного поля [108; 85; 92; 100]. Більш детально обговорення фізичних явищ, які приводять до уявлень про заряд провідника зі струмом, подано в **Розділі 5**.

Таким чином, говорячи про «заряд провідника зі струмом» слід мати на увазі всі ці три фізичні ефекти. А чи враховуються вони в стандартних методиках вивчення цієї теми?!

Жодна з цих методик (у деякій мірі за винятком [260; 178]) не в змозі від самого початку пояснити одну із найважливіших властивостей МП – його релятивістську природу. Зовсім не приділяється увага релятивістській природі магнітного поля і, як наслідок, учні та студенти не в повному обсязі отримують суттєво-важливу інформацію, а це гальмує процес формування фізичного стилю мислення.

Як уже відзначалося, класична електродинаміка є релятивістськи-коваріантною теорією, але методи вивчення її, як це впливає з попереднього аналізу, базуються не на релятивістських принципах.

Тільки в курсах теоретичної фізики вдається в повній мірі використати методологію та фундаментальні концепції спеціальної теорії відносності для одержання нових результатів та узагальнення добре відомих фактів [155; 172; 227; 100].

Останні дослідження в царині теорії та методики навчання фізики [213; 212; 38; 125; 74] показали необхідність перебудови курсу фізики на

основі методології й змісту сучасної науки, що знайшло відображення й у відповідних програмах [17].

У роботах [89; 129; 135; 86] нами показано, що загальноприйняті методики формування поняття «магнітне поле» та введення й означення величин, які характеризують це поле, мають, у всякому разі, два таких недоліки.

По-перше, жодна з них не розкриває релятивістської природи МП.

По-друге, не зважаючи на те, що причиною виникнення:

– обертового моменту, який діє на рамку з струмом в магнітному полі;

– сил, що діють на заряджену частинку, яка рухається в магнітному полі;

– сили, що діє на елемент струму, або на довгий провідник зі

струмом з боку інших рухомих ЗЧ (усі ці ефекти лежать в основі визначення вектора магнітної індукції  $\vec{B}$ ), є взаємодія рухомих заряджених частинок у цих провідниках між собою та з іншими рухомими ЗЧ, **детальний аналіз взаємодії таких двох заряджених частинок, які рухаються з довільними швидкостями не був покладений в основу формування поняття МП.**

Тому в основі вивчення магнітної взаємодії має бути аналіз взаємодії двох ЗЧ, що рухаються паралельно один одному з  $\vec{v} = const$ .

Таким чином, очевидна потреба у створенні методичної системи вивчення основних положень електродинаміки, яка не мала б зазначених вище недоліків і базувалася б на послідовно релятивістських засадах.

Перейдемо тепер до огляду та аналізу шляхів обґрунтування рівняння Максвелла  $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ .

**А.** Найбільш поширений у навчально-методичній літературі з електродинаміки спосіб обґрунтування рівняння Максвелла (1.47) –  $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  – наведений у п. 1.2.1б.

**Б.** Другий спосіб обґрунтування (1.47) полягає в безпосередньому знаходженні операції ротора від індукції магнітного поля  $\vec{B}(\vec{r})$ , яка обчислюється згідно з законом Біо-Савара для довільного розподілу об'ємних струмів в інтегральній формі (рис. 2.1)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (2.9)$$

Тоді

$$rot\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} rot \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} rot \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (2.10)$$

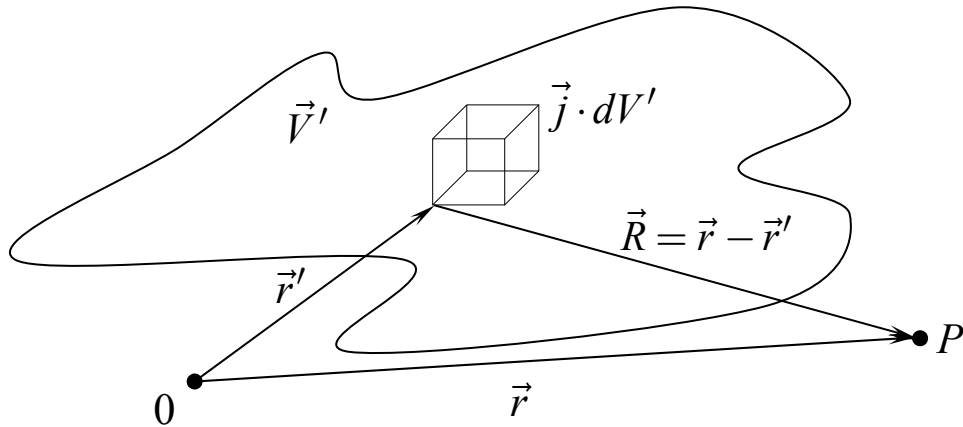


Рис. 2.1. До пояснення способу обґрунтування рівняння  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  в довільній точці простору

При використанні формули векторного аналізу

$$\text{rot}(u\vec{a}) = u \cdot \text{rot}\vec{a} + [\text{gradu}, \vec{a}]$$

підінтегральний вираз (2.10) набуває вигляду

$$\text{rot} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{R^3} \text{rot}[\vec{j}, \vec{R}] + \left[ \text{grad} \frac{1}{R^3}, [\vec{j}, \vec{R}] \right].$$

Ураховуючи, що в останній формулі операції ротора, градієнта обчислюються за координатами точки поля, після нескладних, але кропітких перетворювань одержуємо рівняння (1.47).

Обґрунтування рівняння  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  таким способом носить досить непереконливий і формальний характер.

Уважається, що густина струму  $\vec{j}(\vec{r}')$  у кожному елементарному об'ємі  $dV'$  не залежить від магнітного поля, яке створюється іншими елементами струму  $\vec{j}(\vec{r}')dV'$  цього розподілу струмів.

Але як закон  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'$  можна вважати уза-

гальненням дослідних фактів, якщо з об'ємними струмами взагалі не проводилися експерименти?!

І по-друге, лінійний елемент струму  $id\vec{l}$  як окремий і незалежний об'єкт, як окрему фізичну структуру неможливо реалізувати. Як же вдалося сформулювати закон Біо-Савара на базі такого скромного й неточного експериментального матеріалу? Складається враження, що закон Біо-Савара просто так сформульований, щоб несуперечливо пояснити хоча б взаємодію в нерелятивістському наближенні двох рухомих заряджених частинок [46, с. 219].

**В.** Спосіб, реалізований у підручнику академіка І. Є. Тамма [224].

Шляхом математичних перетворень, закон (1.14) можна подати у вигляді, (див. також [118; 130; 127]):

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (2.11)$$

де  $A(\vec{r}, t)$  – векторний потенціал постійних струмів

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}. \quad (2.12)$$

Порівнюючи далі вираз для векторного потенціалу (2.12) з виразом для скалярного потенціалу електростатичного поля

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R},$$

який є розв'язком рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

можна припустити, що й вектор-потенціал (2.12) є розв'язком подібного диференційного рівняння

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (2.13)$$

Далі, використовуючи формулу векторного аналізу  $\text{rot}\vec{B} = \text{rot}\text{rot}\vec{A} = \nabla \cdot \text{div}\vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ , та умову калібровки вектор-потенціалу стаціонарного МП,  $\text{div}\vec{A} = 0$ , одержуємо

$$\text{rot}\vec{B} = -\nabla^2 \vec{A}. \quad (2.14)$$

І нарешті, порівнюючи (2.13) та (2.14), приходимо до рівняння (1.47).

Можна запропонувати й інший спосіб, оснований на певній комбінації способів **Б** і **В** [118; 130].

**Г.** Неважко показати, що  $\frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = \text{rot}_P \left( \frac{\vec{j}}{R} \right)$ , де індекс  $P$  означає,

що операція ротора береться за координатами точки поля. Тоді маємо для підінтегрального виразу (1.48):

$$\text{rot} \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = \text{rot}\text{rot}_P \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) = \nabla \cdot \text{div}_P \left( \frac{\vec{j}}{R} \right) - \nabla^2 \frac{\vec{j}}{R}, \quad (2.15)$$

а інтеграл за об'ємом струмів від величини (2.15) дорівнює

$$\begin{aligned}
& - \int_{V'} \vec{j} \nabla^2 \frac{1}{R} dV' - \int_{V'} \nabla_P \cdot \operatorname{div}_Q \frac{\vec{j}}{R} dV' = \\
& = 4\pi \int_{V'} \vec{j} \cdot \delta(R) dV' - \nabla_P \int_{V'} \operatorname{div}_Q \frac{\vec{j}}{R} dV'.
\end{aligned}$$

А далі, урахувавши співвідношення  $\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(R)$  та

$$\int_{V'} \operatorname{div}_Q \frac{\vec{j}}{R} dV' = 0, \text{ отримуємо (1.46) (детальніше див. [127]).}$$

Складається враження, що всі способи обґрунтування рівняння  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  носять надто формальний, штучний, а інколи й непереконливий характер. Усі вони потребують значної кількості формул векторного аналізу та векторної алгебри, за якими важко простежити фізичну сторону явища.

Єдиним і, можливо, вирішальним фактором прийнятності цих способів є експериментальне підтвердження висновків математичного формалізму магнітостатики.

Зокрема, розв'язок рівняння Пуассона (2.13) в області простору поза межами струмів провідності дає значення  $\vec{B}(\vec{r})$ , які відповідають дійсності.

У цих точках  $\vec{B}(\vec{r}) \neq 0$ , а  $\vec{j} = 0$ . Так чим же та як створюється в цих точках МП?!

Як це може бути, що струми провідності не рівні нулю в одній частині простору, а МП з'являється в тих точках простору, де відсутні струми?

Відповіді на подібні питання математичний формалізм не дає. Можливо, бездоганного способу обґрунтування (1.46) і не існує, оскільки відсутній логічний шлях від дослідних фактів якісного рівня до теоретичного рівняння.

Згідно зі стандартними процедурами класичної електродинаміки індукція магнітного поля довільної квазістаціонарної електродинамічної системи є розв'язком системи диференційних рівнянь

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}; \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0,
\end{aligned}$$

яка зводиться до  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  та рівняння Пуассона (2.13).

## 2.2. Електричне поле рухомої зарядженої частинки та деякі його властивості

Розглядаючи відомий дослід із взаємодії двох паралельних струмів [178; 200; 224; 64; 40; 69; 41; 187; 42] приходимо до висновку, що заряджені частинки, які рухаються відносно деякої (наприклад, лабораторної системи відліку) взаємодіють не так, як нерухомі. Але очевидно, що результуюча взаємодія провідників зі струмами зумовлена додатковою (**не електричною**) взаємодією між сукупностями рухомих заряджених частинок (двома процесіями ЗЧ).

Слід звернути увагу й на той факт, що на базі ньютонівської механіки неможливо пояснити походження магнітних сил.

У ньютонівській механіці сила є функцією відстані між взаємодіючими тілами та їхніми відносними швидкостями. Але відстані між електронами провідності у двох паралельних лінійних провідниках зі струмами не змінюються; їхня швидкість відносно один одного залишається рівною нулю. Здавалося б, що й ніякі допоміжні сили виникнути не повинні.

Тобто, згідно з основними положеннями класичної механіки, сили взаємодії між зарядженими частинками, що рухаються рівномірно, не повинні були б відрізнятися від сил взаємодії між нерухомими ЗЧ. Але такий висновок суперечить реальності.

Досвід свідчить про те, що при русі електронів у паралельних лінійних провідниках між ними виникають сили, яких не було при відсутності струму. Тим самим показана обмеженість ньютонівської механіки та непридатність її подань для трактування магнітної взаємодії.

Тобто на основі уявлень класичної фізики ми не в змозі пояснити експериментальні прояви магнітної взаємодії.

*Таким чином, щоб описати й зрозуміти взаємодію між рухомими зарядженими частинками (а фактично взаємодію між елементами струмів та провідниками зі струмами), слід знайти вираз для напруженості електричного поля окремої точкової зарядженої частинки, яка рухається з постійною швидкістю та проаналізувати взаємодію двох рухомих ЗЧ.*

Тому використовуючи закон Кулона та положення спеціальної теорії відносності, знайдемо спочатку напруженість електричного поля рухомої зарядженої частинки.

Для цього СВ  $K'$  зв'яжемо з РЗЧ. Тоді СВ  $K'$  рухається з швидкістю  $\vec{V} = const$  відносно лабораторної СВ  $K$  вздовж вісі  $OX$ .

У СВ  $K'$  будемо спостерігати тільки електричне поле, напруженість якого визначається

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3}. \quad (2.16)$$

Причому проєкції напруженості електричного поля на вісі  $O'X'$ ,  $O'Y'$ ,  $O'Z'$  дорівнюють, відповідно:

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3},$$

де  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  – радіус-вектор, який визначає положення точки поля відносно СВ  $K'$ .

Щоб знайти напруженість електричного поля, яке створюється цією ЗЧ у лабораторній СВ (СВ  $K$ ), необхідно виразити всі величини, від яких може залежати напруженість поля (координати точки поля, проєкції напруженості електричного поля, величину заряду) у СВ  $K$ .

Відомо, що величина заряду не є функцією швидкості руху ЗЧ  $q \neq q(V)$ , а координати будь-якої точки простору при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  змінюються згідно з перетвореннями Лорентца. Але виявляється, що й проєкції  $\vec{E}'$  на вісі  $E'_x$ ,  $E'_y$ ,  $E'_z$  теж змінюються при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  згідно з такими формулами:

$$E_x = E'_x; E_y = E'_y \cdot \Gamma; E_z = E'_z \cdot \Gamma,$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ .

Ці формули можна обґрунтувати на основі наступних міркувань.

Нехай СВ  $K'$  є власною СВ плоского зарядженого конденсатора, рис. 2.2.

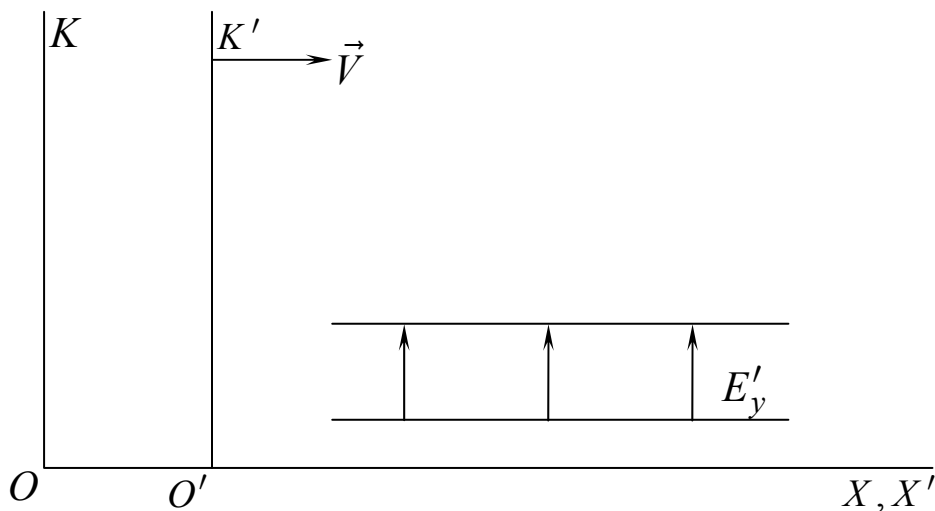


Рис. 2.2. Електричне поле плоского конденсатора в СВ  $K'$  та в СВ  $K$

Тут  $E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon\varepsilon_0}$ , де  $\sigma' = \frac{q'}{S'}$  – поверхнева густина заряду на пластинках конденсатора. Тоді в СВ  $K$  напруженість електричного поля  $E_y$  збільшиться порівняно з  $E'_y$  в  $\Gamma$  разів, оскільки  $\sigma = \sigma' \cdot \Gamma$ , унаслідок лорентцевого скорочення повздовжніх розмірів пластин конденсатора.

Якщо пластини конденсатора розмісти паралельно площині  $X'O'Y'$ , то на основі аналогічних міркувань одержимо  $E_z = \Gamma E'_z$ . Коли ж пластини паралельні площині  $Y'O'Z'$ , то  $E_x = E'_x$ , незважаючи на те, що віддаль між пластинами в СВ  $K$  зменшилась.

Таким чином, якщо в СВ  $K'$  є тільки електричне поле, то при переході із  $K'$  в  $K$ -систему поперечні складові напруженості електричного поля перетворюються так:

$$E_y = \Gamma E'_y; E_z = \Gamma E'_z, \quad (2.17)$$

а повздовжня складова не змінюється:  $E_x = E'_x$ .

Виразимо тепер радіус-вектор  $\vec{r}'$ , що визначає положення точки поля в СВ  $K'$  через радіус-вектор  $\vec{r}$ , проведений з миттєвого положення заряду  $q$  в точку  $P(x, y, z)$  СВ  $K$ , рис. 2.3.

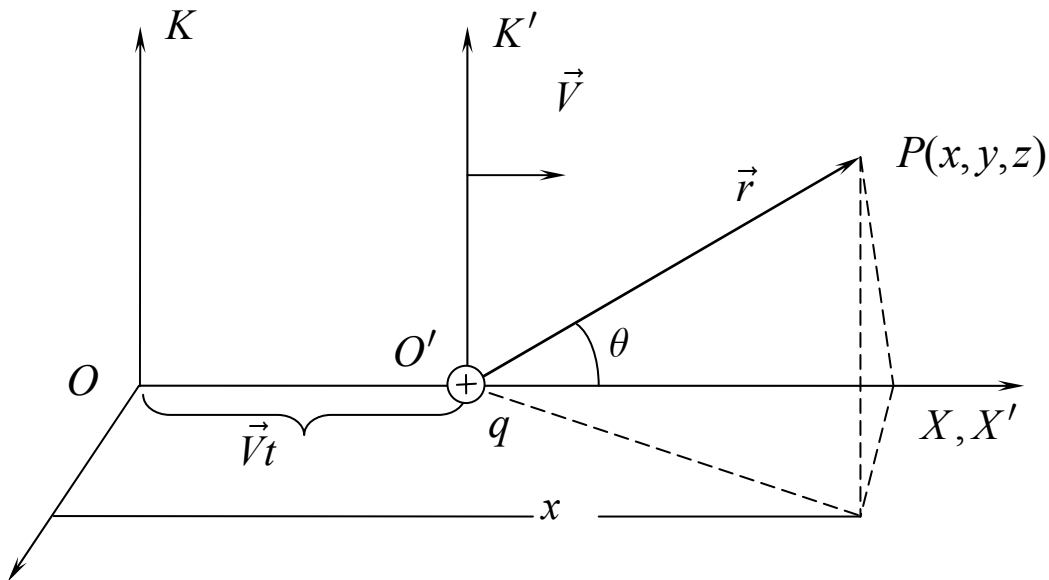


Рис. 2.3. До знаходження напруженості електричного поля РЗЧ

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \Gamma^2 \left[ (x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2} \right]. \end{aligned}$$



$$r' = \Gamma \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} = \Gamma \cdot \sqrt{(x - Vt)^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\Gamma^2}}.$$

Але оскільки  $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  (див. рис. 2.3), то вираз для  $r'$  можна подати так:

$$\begin{aligned} r' &= \Gamma \cdot \left[ \left( (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right) \cdot \left( 1 - \frac{V^2 (y^2 + z^2)}{c^2 r^2} \right) \right]^{1/2} = \\ &= r \cdot \Gamma \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

тобто

$$\left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2} = r^3 \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}, \quad (2.18)$$

де  $\sin^2 \theta = \frac{y^2 + z^2}{r^2}$ .

І тоді одержуємо

$$E_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q(x - Vt) \cdot \Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}};$$

$$E_y = \frac{qy \cdot \Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}};$$

$$E_z = \frac{qz \cdot \Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}}.$$

Ураховуючи формулу (2.18) і вираз  $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ , для вектора напруженості електричного поля рухомої зарядженої частинки одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{r}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}} = \\ &= \frac{q\vec{r}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ще раз нагадаємо, що  $r$  – це віддаль точки поля від миттєвого положення ЗЧ, а  $\theta$  – кут між напрямком руху ЗЧ (вектором швидкості  $\vec{V}$  ЗЧ) та радіус-вектором, проведеним із миттєвого положення ЗЧ в цю точку простору.

Як буде видно з наступного аналізу (див. **Розділ 3**), навіть незначна відмінність електричного поля РЗЧ (при  $V \ll c$ ) та поля нерухомої ЗЧ носить принциповий характер.

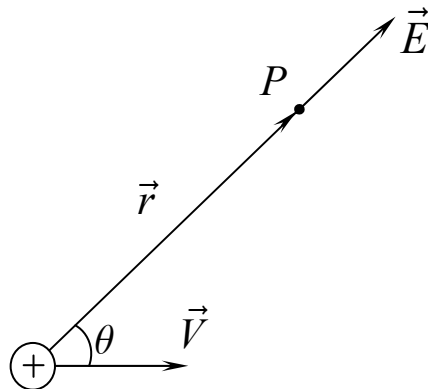
Для кращого розуміння властивостей електричного поля РЗЧ нами була створена комп'ютерна програма для моделювання та пояснення особливостей ЕП РЗЧ.

### **Основні властивості електричного поля рухомої зарядженої частинки.**

Таким чином, відзначимо характерні властивості електричного поля рухомої зарядженої частинки.

З формули (2.19) випливають наступні наслідки.

1. Вектор  $\vec{E}$  у кожному мить направлений уздовж радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з миттєвого положення ЗЧ в цю точку поля.



2. Напруженість електричного поля залежить і від швидкості руху зарядженої частинки  $V$ , і від кута  $\theta$  між радіус-вектором, який проведений з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля та напрямком руху ЗЧ, див. (2.19).

Різниця між електричним полем рухомої ЗЧ і полем нерухомої ЗЧ зводиться до сильної залежності напруженості поля рухомої ЗЧ від напрямку знаходження точки поля (кута  $\theta$ ) та від швидкості ЗЧ. Напруженість електричного поля ЗЧ зменшується в напрямку руху (коли  $\theta = 0, \theta = \pi$ ),

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) < E_{nr},$$

де  $E_{nr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  – напруженість електричного поля нерухомої ЗЧ в точках простору на такій же віддалі  $r$  від ЗЧ, як і миттєві відстані точок поля від рухомої ЗЧ.

При релятивістських швидкостях,  $V \rightarrow c$ , напруженість електричного поля в напрямку руху зменшується практично до нуля  $E_{\parallel} \rightarrow 0$ . Але при цьому величина поля значно зростає в точках простору, що лежать у площині, перпендикулярній до  $\vec{V}$  (коли  $\theta = \pm \pi/2$ ):

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} > E_{nr}.$$

При  $V \rightarrow c$  напруженість поля в площині, яка перпендикулярна  $\vec{V}$ , прямує до нескінченності,  $E_{\perp} \rightarrow \infty$ .

При значеннях  $\vec{V}$  порядку швидкості світла електричне поле зосереджене біля площини, перпендикулярної  $\vec{V}$ .

Іншими словами, величина напруженості електричного поля ЗЧ, що рухається з довільною за величиною швидкістю  $V$ , зменшується в напрямку руху й збільшується в площині, перпендикулярній до  $\vec{V}$ .

У зв'язку з цим говорять, що електричне поле рухомої ЗЧ «сплющується» в напрямку руху.

При релятивістських швидкостях  $\left( \frac{V}{c} \approx 1 \right)$  напруженість поля

*рухомого заряду на заданій відстані від нього мала за лінією руху заряду та велика в перпендикулярному напрямку, тобто поле начебто сконцентровується поблизу площини, проведеної через миттєве положення ЗЧ перпендикулярно його швидкості.*

3. Електричне поле не є сферично-симетричним, хоча й характеризується значними симетріями, зокрема поле вектора  $\vec{E}$  дзеркально симетричне відносно координатних площин  $YOZ$  та  $XOZ$  (узагалі кажучи

чи, відносно будь-якої площини, що проходить через вісь  $OX$ ), див. результати моделювання електричного та електромагнітного поля РЗЧ.

4. Електричне поле рухомої ЗЧ є, взагалі кажучи, непотенційним полем [180]:

$$\text{rot}\vec{E} \neq 0, \quad (2.20)$$

хоча можна вказати на безліч контурів в цьому полі, циркуляція вектора  $\vec{E}$  вздовж яких дорівнює нулю. Так, наприклад,  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$ :

а) уздовж будь-якого контуру, що лежить в площині  $YOZ$ ;  
 б) уздовж контуру, що симетрично розташований відносно площини  $YOZ$ ;

в) уздовж контуру, у площині якого знаходиться вектор  $\vec{r}$  і який симетрично й перпендикулярно розташований відносно будь-якої площини, що проходить через вісь  $OX$ .

г) уздовж контуру, що симетрично розташований відносно площини  $XOY$ .

Тобто, з одного боку, у будь-якій точці поля поза межами ЗЧ електричне поле є вихровим полем  $\text{rot}\vec{E} \neq 0$ , з іншого, – є потенційним (якщо за критерій потенційності поля брати  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$ ). Завдяки певній симетрії ЕП РЗЧ (рис. 2.4 та рис. 2.9, 2.10) можна знайти форми замкнених контурів, циркуляція  $\oint_L \vec{E}d\vec{l}$  уздовж яких дорівнює нулю.

Але в сутності своїй поле вектора  $\vec{E}$  рухомої ЗЧ є вихровим, оскільки, як показано в **Розділі 3**,  $\text{rot}\vec{E}$  у довільній точці поля РЗЧ повністю визначається (породжується) швидкістю зміни за часом вектора індукції магнітного поля РЗЧ  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  у цій же точці простору. Аналогічно може бу-

ти показано, що  $\text{rot}\vec{H}$  породжується  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (див. п. 2.6).

*У зв'язку з цим виникає питання: як може бути потенційним електричне поле, яке утворене суперпозицією електричних полів сукупності рухомих ЗЧ (наприклад, електричне поле провідника з постійним струмом)?!*

5. Дещо несподіваними виявилися результати моделювання ЕП рухомої ЗЧ. Картина ЕП, яку ми отримали (див. рис. 2.4) не описана в існуючих підручниках з електродинаміки. З тексту вказаних посібників випливає, що нібито електричне поле РЗЧ сплющується в напрямку руху таким же чином, як і еквіпотенціальні поверхні Хевісайда (див. наприклад [155, с. 125; 200, с. 184]).

Комп'ютерне моделювання ЕП РЗЧ та дослідження функції

$$f(\beta, \theta) = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \quad (2.21)$$

показало (рис. 2.5), що полярна діаграма напруженості ЕП РЗЧ при великих швидкостях руху частинки не має вигляду сплющеного еліпсоїду.

При  $V \rightarrow c$  в області значення кутів  $\theta \approx 0$  спостерігається ніби «перетяжка» (див. рис. 2.4) на полярній діаграмі напруженості електричного поля, і в площині  $XOY$  полярна діаграма має вигляд «вісімки» (рис. 2.4б, 2.4в, 2.4г).

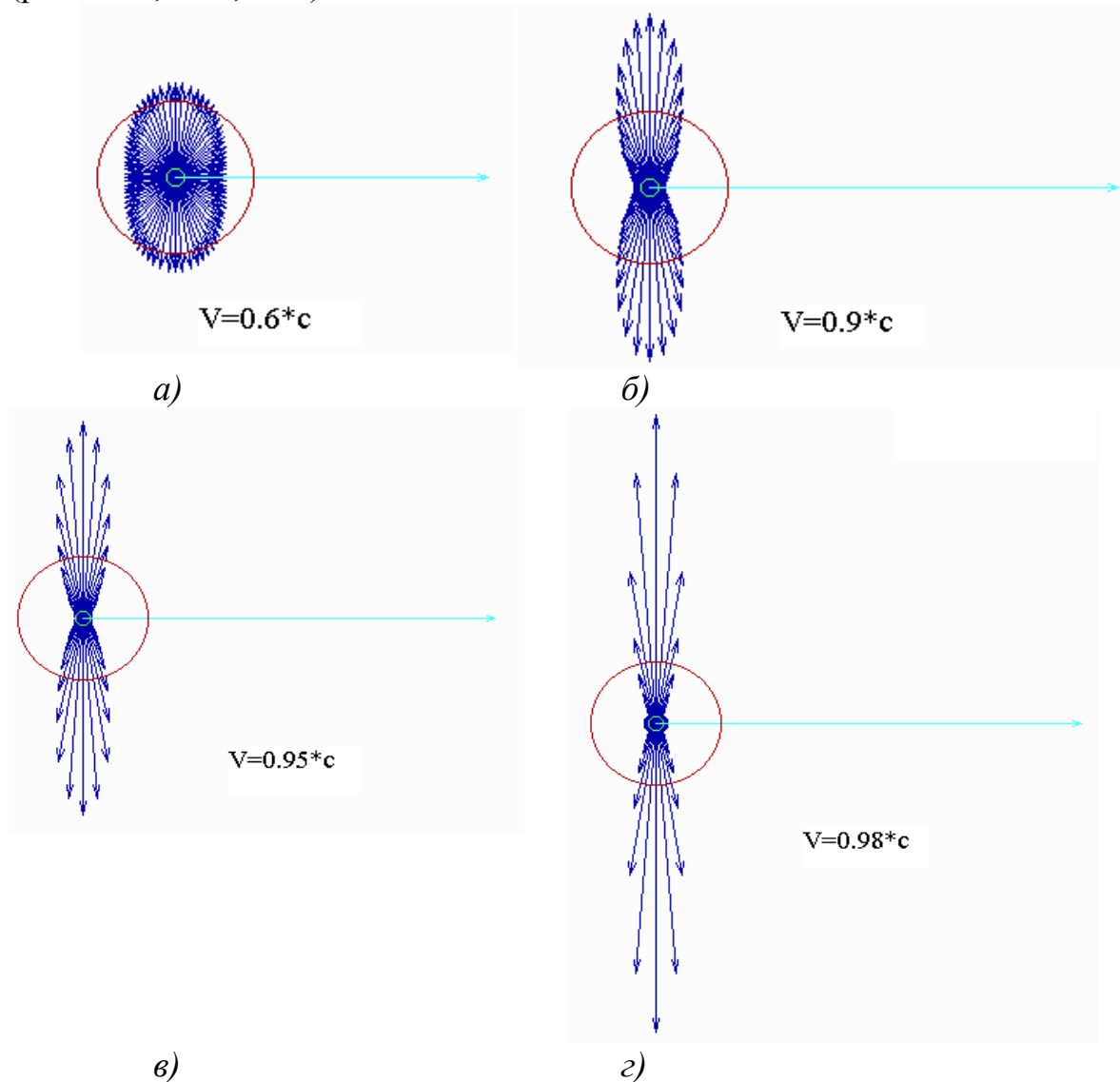


Рис. 2.4. Полярні діаграми напруженості електричного поля РЗЧ в площині  $XOY$  при різних значеннях швидкості руху ЗЧ

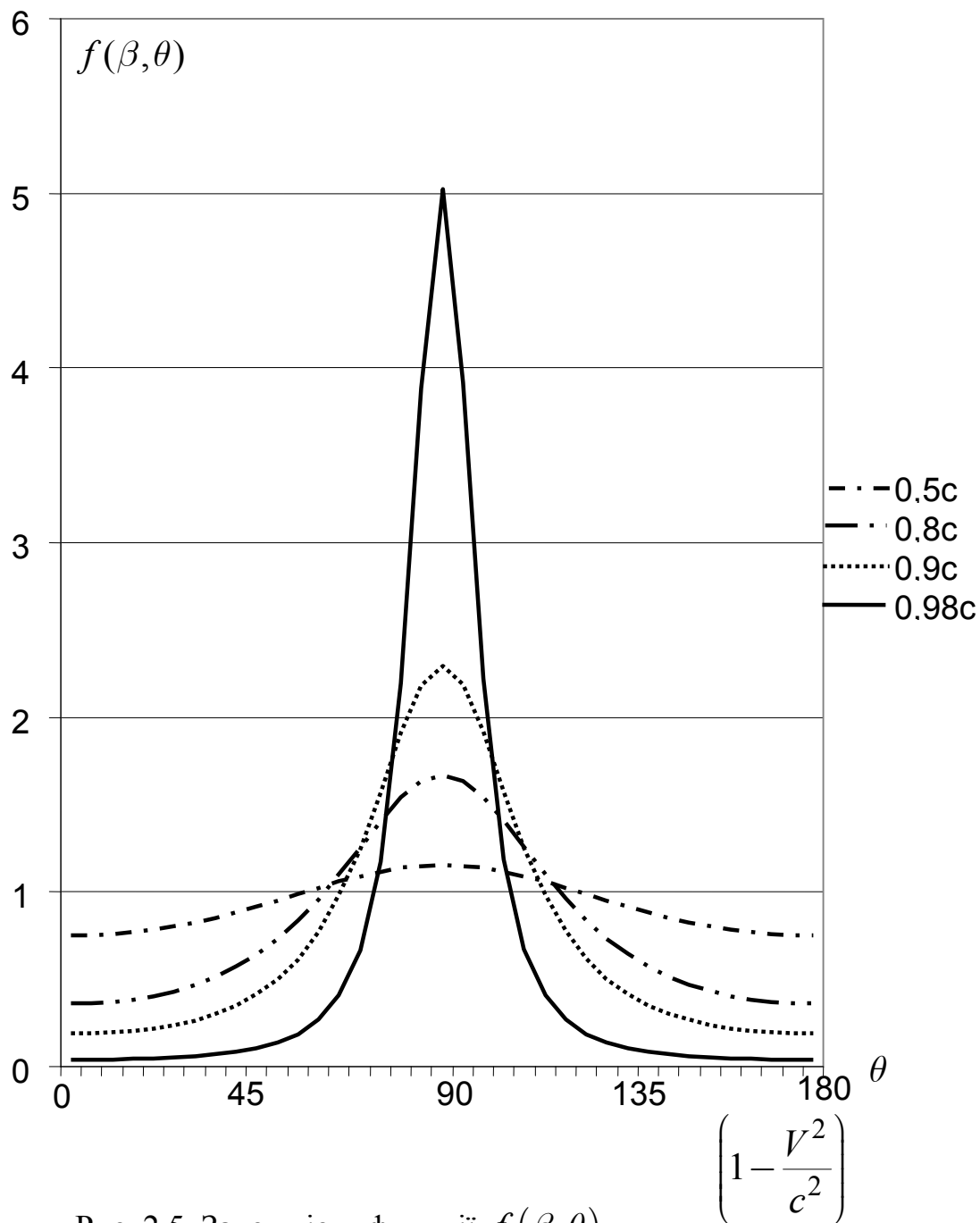


Рис. 2.5. Залежність функції  $f(\beta, \theta) = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$

від кута  $\theta$  при різних значеннях швидкості руху ЗЧ

Таким чином, аналіз формули (2.19) і комп'ютерне моделювання ЕП РЗЧ показало, що «сплющування» електричного поля РЗЧ в напрямку руху відбувається нерівномірно в площині  $YOZ$ . «Сплющування» електричного поля і магнітного полів в напрямку руху суттєво залежить від кута  $\theta$ .

А саме, при  $\theta = 0$  та  $V = 0,8c$   $E_{\parallel} \rightarrow 0$ .

Іншими словами, у будь-якій площині, у якій знаходиться вісь  $OX$ , величина вектора  $\vec{E}$  на полярній діаграмі утворює картину електричного поля, що нагадує «вісімку».

У навчально-методичній літературі відсутні коментарі з приводу такої картини ЕП РЗЧ.

Видно, що лінії  $\vec{B}$  утворюють концентричні кола з центром на вісі  $OX$ , уздовж якої рухається заряджена частинка  $q$ .

Конфігурація поля заряду, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат  $K$ , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом з ЗЧ.

Але якщо зафіксувати довільну точку простору, то в ній і напруженість електричного, і індукція магнітного полів змінюються в часі.

### **2.3. Особливості методики формування поняття «магнітне поле» та пояснення його релятивістської природи**

Оскільки електричний струм в провідниках – це напрямлений рух електронів провідності, тому зі спостережень за взаємодією паралельних провідників зі струмами, як уже відзначалося, впливає очевидний висновок: між двома процесіями рухомих електронів виникає додаткова сила, якої не було між нерухомими електронами.

**Значить, природу цієї сили ми можемо з'ясувати, аналізуючи взаємодію двох заряджених частинок, які рухаються паралельно один одному з однаковими або різними за величиною швидкостями.**

Тому в основу вивчення й розуміння магнітної взаємодії повинен бути покладений аналіз взаємодії двох ЗЧ, що рухаються. Для простоти та ясності аналізу розглянемо взаємодію двох ЗЧ, які рухаються паралельно одна одній з  $\vec{V} = \text{const}$ .

Зазначимо, що при коректному розгляді будь-якого явища з точки зору систем відліку, які знаходяться у відносному русі, слід спиратися на ПВ.

Тобто в процесі встановлення співвідношення між довільною фізичною величиною, вимірюваною в різних системах відліку слід базуватися тільки на основі ПВ.

Як наголошував А. Ейнштейн, тільки теорія може сказати, що ж вимірюється в експерименті.

Таким чином, аналіз взаємодії двох рухомих ЗЧ будемо проводити з урахуванням точних співвідношень між фізичними величинами, що характеризують рух та взаємодію ЗЧ.

Нехай у системі відліку  $K'$  у площині  $X'Y'$  знаходяться в спокої дві заряджені частинки (далі – протони), величина заряду яких  $q_1$  і  $q_2$ , а віддаль між ними  $r'$  (рис. 2.6). СВ  $K'$  рухається з швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$  відносно лабораторної СВ  $K$  уздовж вісі  $OX$ .

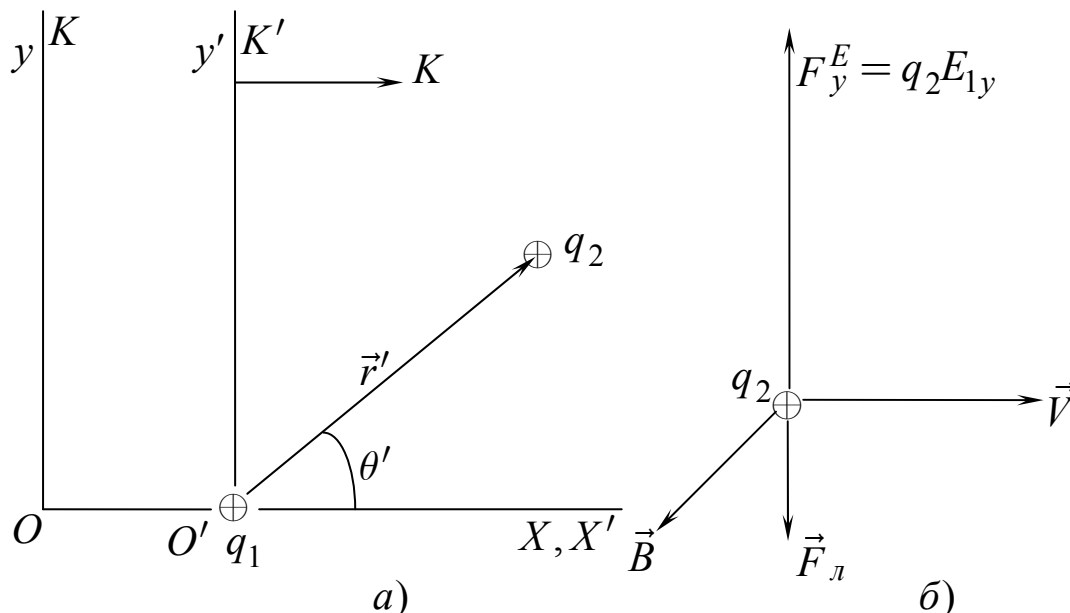


Рис. 2.6. Взаємодія двох заряджених частинок, які рухаються з постійною швидкістю  $\vec{V}$  відносно ЛСВ (а) і поперечна складова сили, що діє на другу ЗЧ (б).

Тоді в СВ  $K'$  існує тільки електрична взаємодія між ЗЧ. Тобто на другу ЗЧ (заряд якої  $q_2$ ) діє сила

$$\vec{F}'_2 = q_2 \vec{E}'_1,$$

де  $\vec{E}'_1$  – напруженість електричного поля, що створюється першою ЗЧ в точці знаходження заряду  $q_2$ ,

$$\vec{E}'_1 = \frac{q_1 \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}.$$

Але в СВ  $K$  напруженість електричного поля визначається формулою (2.19).

Неважко впевнитися використовуючи перетворення Лорентца, що повздовжня компонента сили взаємодії між зарядами  $q_1$  і  $q_2$  не змінюється при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ .

Тепер переходимо до аналізу поперечної складової взаємодії між цими ЗЧ. Як видно з виразу для напруженості електричного поля рухомої ЗЧ (2.19), поперечна складова сили електричної взаємодії між ЗЧ в СВ  $K$  зростає, тобто



$$F_y^E = q_2 E_{1y} > q_2 E'_{1y},$$

де  $E_{1y}$ ,  $E'_{1y}$  – поперечні складові напруженості електричного поля, що створюється першою ЗЧ в точці знаходження другої ЗЧ в СВ  $K$  і СВ  $K'$  відповідно.

Як відомо, принцип відносності стверджує, що фізичні явища протікають однаково (при тотожних початкових умовах) у всіх інерціальних СВ.

Іншими словами, математична форма основних законів фізики не повинна змінюватися при переході від однієї системи відліку до іншої: рівняння фізики повинні бути лорентцковаріантними; при цьому просторові й часова координати  $(x, y, z, t)$  будь-якої події в СВ  $K$  і СВ  $K'$  пов'язані перетвореннями Лорентца.

Щоб основні рівняння фізики мали однакову математичну форму в СВ  $K$  і СВ  $K'$ , проекції сили (зокрема) на координатні вісі повинні перетворюватися згідно з формулами (1.20).

Оскільки ЗЧ нерухомі в СВ  $K'$ , то  $v'_x = 0$ , і для нашого випадку

$$F_y = F'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Тоді  $F_y < F'_y$ , бо  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < 1$ .

**Тобто, незважаючи на те, що поперечна складова сили електричної взаємодії між ЗЧ в СВ  $K$  зростає, принцип відносності вимагає, щоб повна поперечна компонента сили взаємодії між ЗЧ в нашій задачі була меншою, ніж поперечна складова сили взаємодії між ЗЧ в СВ  $K'$ , і дорівнювала**

$$F_y = F'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (2.22)$$

Таким чином, що ж ми маємо? Електрична сила взаємодії в напрямку осі  $OY$  збільшується в СВ  $K$ , а принцип відносності вимагає, щоб сумарна сила взаємодії між рухомими ЗЧ зменшилася згідно з формулою (2.22).

Це означає лише одне – в СВ  $K$  з'явилася додаткова взаємодія між рухомими зарядженими частинками, якої не було в СВ  $K'$ .

Іншими словами, ми повинні допустити виникнення такої поперечної сили взаємодії між рухомими ЗЧ в СВ  $K$ , існування якої необхідне для виконання принципу відносності. Коли ЗЧ нерухомі в СВ  $K'$ , між ними існує тільки електрична сила  $\vec{F}'_2 = q_2 \cdot \vec{E}'_1$ , коли ж вони рухаються зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$ , ми змушені припустити, згідно з

принципом відносності, появу (очевидно внаслідок руху ЗЧ) деякої додаткової поперечної сили, що діє на другу ЗЧ.

Позначимо цю, невідому поки що, силу  $\vec{F}_L$ . Ця сила зменшує електричну складову сили, яка діє на другу ЗЧ,  $F_y^E$ , до значення

$$F_y = F_y' \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ яке вимагається принципом відносності.}$$

Таким чином, можемо записати

$$q_2 E_{1Y} - F_L = F_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (2.23)$$

Значення абсолютної величини сили знаходимо з (2.23)

$$F_L = \frac{q_1 q_2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \sin \theta \cdot V^2}{4c^2 \pi \epsilon_0 r^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} = q_2 V \frac{V}{c^2} E_1 \sin \theta. \quad (2.23a)$$

Ця сила завжди перпендикулярна швидкості руху ЗЧ  $q_2$  (див. рис. 2.6б) і паралельна осі  $OY$ , де б не знаходився заряд  $q_2$  в площині  $XOY$ .

Згідно із сучасними уявленнями про природу будь-яких сил, поява цієї додаткової сили повинна бути зумовлена дією на ЗЧ  $q_2$  деякого фізичного поля. Точніше кажучи, поява цієї сили повинна розглядатися як наслідок руху заряджених частинок та дії на  $q_2$  через виникнення деякого поля.

Причому поперечна складова сили, що діє на  $q_2$ , нами повинна трактуватися як сила, що діє на другу рухому ЗЧ у деякому фізичному полі, існування та появу якого вимагає ПВ.

Властивості та характеристики цього поля впливають з (2.23) і (2.23a).

Ураховуючи просторове розташування сил та швидкості руху  $\vec{V}$  заряджених частинок, а також інваріантність повздовжньої компоненти електричного поля (та інваріантність повздовжньої компоненти сили, яка діє на  $q_2$ ), яке створюється зарядом  $q_1$ , вираз у векторній формі тієї сили  $\vec{F}_L$ , існування якої вимагає спеціальна теорія відносності, необхідно записати в такому вигляді (рис. 2.6):

$$\vec{F}_L = q_2 \left[ \vec{V}, \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right]. \quad (2.24)$$

У рамках сучасної фізичної парадигми будь-яка сила є результат дії на тіло (заряджену частинку) деякого фізичного чи геометричного поля.

Говорять, що  $\vec{F}_L$  – це сила, що діє на заряд  $q_2$ , який рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  в полі  $\left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right]$ , яке, у свою чергу, створюється рухом першої ЗЧ, величина заряду якої  $q_1$ . Тобто (2.24) подають у вигляді

$$\vec{F}_L = q_2 \left[ \vec{V}, \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right] = q_2 \left[ \vec{V}, \vec{B}_1 \right]. \quad (2.25)$$

Це поле називають магнітним, а індукція магнітного поля  $\vec{B}_1$  рухомої ЗЧ дорівнює

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}_1] = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{V}, \vec{E}_1] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \cdot [\vec{V}, \vec{r}]. \quad (2.26)$$

Якщо швидкість руху зарядів  $q_1$  і  $q_2$  різні ( $\vec{v}_1$  та  $\vec{v}_2$  відповідно), то узагальнюючи (2.25), одержуємо силу, що діє на рухому електрично заряджену частинку  $q_2$  у полі рухомого заряду  $q_1$

$$\vec{F}_L = q_2 \left[ \vec{v}_2, \left[ \frac{\vec{v}_1}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right] = q_2 \left[ \vec{v}_2, \vec{B}_1 \right].$$

Очевидно, що коли рухається електрон, то індукція його МП визначається формулою

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} [\vec{V}, \vec{r}]. \quad (2.26a)$$

Таким чином, вище наведений аналіз взаємодії двох рухомих заряджених частинок приводить до наступних результатів.

1. Необхідність уведення поняття «магнітне поле» зумовлена вимогами теорії відносності, а саме: щоб рівняння руху матеріальної точки мали однаковий вигляд в СВ  $K$  і в СВ  $K'$ , сили при переході від однієї СВ до іншої повинні перетворюватися за певними формулами (1.20), а з урахуванням виразу для напруженості електричного поля рухомої ЗЧ (2.19) додаткова сила, що забезпечує виконання цих вимог, визначається

$$\vec{F}_L = q_2 \left[ \vec{V}, \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right] = q_2 [\vec{V}, \vec{B}].$$

Тобто магнітне поле з індукцією  $\vec{B} = \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E} \right]$  вводиться для того,

**щоб забезпечити виконання принципу відносності в електродинаміці.**

Але при цьому нічого не можна сказати про механізм виникнення, створення чи породження цього магнітного поля.

З вимог СТВ впливає тільки необхідність існування такого пов'язаного з рухомою ЗЧ поля, яке характеризується властивостями (2.25), (2.26).

2. Магнітна взаємодія – суттєво релятивістський ефект, який виникає при будь-якій швидкості руху заряджених частинок, навіть при  $v \ll c$ . Але при цьому аналіз слід проводити відповідно до точних релятивістських співвідношень, бо якщо не враховувати точні релятивістські формули (десь знехтувати  $v$  порівняно з  $c$ ), магнітної взаємодії ми не отримаємо.

*«Тільки теорія може сказати, що ж вимірюється в експерименті» (А. Ейнштейн).*

3. Отримуємо вираз для сили Лорентца, формули (2.24) і (2.25), що діє на заряд  $q_2$  з боку МП, породженого рухом першої ЗЧ (величина заряду  $q_1$ ).

І, як бачимо, сила Лорентца виникає не при «русі відносно магнітного поля», а при русі зарядженої частинки в магнітному полі, бо з точки зору СВ  $K$  заряди  $q_1$  і  $q_2$  нерухомі один відносно одного.

Обґрунтування виразу (2.25) для сили Лорентца в загальному випадку ми матимемо тоді, коли одна із ЗЧ рухається в магнітному полі, яке створюється не рухом іншої ЗЧ, а довільними зовнішніми джерелами МП (наприклад, лінійною процесією інших ЗЧ).

4. Уявимо собі лінійну процесією ЗЧ (наприклад, провідник зі струмом  $I$ ) у магнітному полі  $\vec{B}$ , створеному рухом інших ЗЧ.

Оскільки на кожний з електронів провідності, які реалізують елемент струму, діє сила Лорентца, то для сили Ампера, що діє на елемент

струму  $I \cdot d\vec{l}$  в МП з індукцією  $\vec{B}$ , знаходимо

$$d\vec{F} = -q[\vec{v}, \vec{B}]N = I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}] \quad (2.27)$$

бо  $I \cdot d\vec{l} = -N \cdot q \cdot \vec{v}$ , де  $N$  – число електронів, що реалізують елемент струму  $I \cdot d\vec{l}$ ;  $\vec{v}$  – дрейфова швидкість руху електронів провідності.

5. Використовуючи принцип суперпозиції для магнітних полів, що породжуються окремими електронами, і які входять до елемента струму  $I \cdot d\vec{l}$  та вираз (2.26а) одержуємо **закон Біо-Савара в релятивістській формі**

$$\begin{aligned} d\vec{B} = N \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{r^3 \cdot (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{\left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $v$  – дрейфова швидкість руху електронів провідності в провіднику зі струмом  $I$ .

Очевидно, що при  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$  закон (2.28) переходить у звичайний закон Біо-Савара (1.43)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.29)$$

Таким чином, можна стверджувати, що закон (2.28) є більш загальним і точним. У всякому разі для рівномірного та прямолінійного руху заряджених частинок тільки (2.28) дає адекватний і коректний опис магнітної взаємодії (див. п. 2.4).

6. Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний напруженості електричного поля та швидкості руху ЗЧ. Тому силові лінії вектора  $\vec{B}$  утворюють сукупність концентричних кіл, що лежать в площині перпендикулярній  $\vec{V}$ , а центри яких знаходяться на лінії руху ЗЧ (див. рис. 2.11). До речі цей висновок, що випливає і з виразів для  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  РЗЧ приводить до формулювання «правила буравчика» для визначення напрямку силових ліній магнітного поля струмів в середній школі.

**Результати комп'ютерного моделювання електромагнітного поля зарядженої частинки, що рухається рівномірно і прямолінійно.**

В основу комп'ютерної програми, що ілюструє особливості електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки для  $\vec{v} = const$  були покладені формули для напруженості електричного (2.19) та індукції магнітного полів (2.26).

Була використана мова програмування «TURBO PASCAL» [190].

З метою підтримки двостороннього зв'язку з користувачем та для перемикання від одного до іншого необхідного пункту програми було створене меню з шести пунктів: «Електричне поле», «Магнітне поле»,

«Електромагнітне поле», «Графік:  $(1 - \beta^2)$ », «Графік:  $(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}})$ », а та-

кож «Вихід».

Також до цього було додано демонстрацію деяких графіків, які показують залежність між певними величинами. Усе це зроблено для наочності та для кращого розуміння явища залежності характеристик електромагнітного поля РЗЧ від швидкості руху ЗЧ.

Простота управління не створює труднощів в процесі використання програми й не вимагає витрат часу на вивчення правил користування.

Використовуючи комп'ютерну модель як засіб пізнання, удається проілюструвати залежність напруженості електричного та індукції магнітного полів від швидкості руху зарядженої частинки. Можна спостерігати, як змінюється вигляд ЕМП у цілому, порівняти величини полів при різних швидкостях руху та в різних напрямках по відношенню до прямої швидкості руху ЗЧ.

Відомо, що динамічні моделі більш повно передають інформацію про властивості об'єкту, і з психологічної точки зору краще запам'ятовуються, оскільки дію моделі можна розглядати й вивчати необхідну кількість раз, повертаючись до різних аспектів механізму, часового перебігу явища.

Досвід використання наших імітаційних моделей у навчальному процесі показав, що вони виконують не лише пояснювальну функцію, а й сприяють кращому розумінню властивостей ЕМП РЗЧ та поглибленому вивченню особливостей ЕМП РЗЧ, реалізуючи таким чином принцип наочності в навчанні.

Як показав досвід використання цієї програми, вона є легкою для сприйняття як студентами, так і учнями.

У програмі також відображені такі дуже важливі моменти, як урахування граничних випадків, тобто досягнення ЗЧ швидкості, яка дорівнює швидкості світла у вакуумі. І продемонстровано, що при цьому відбувається з електромагнітним полем. Усе це показано з допомогою векторів напруженості електричного та індукції магнітного полів. Вектори

подаються в різних кольорах для кращого сприйняття та розрізнення. У такому ж представленні виведені підказки, указівки та інше.

Іншими словами, удається пояснити характерні зміни, що відбуваються з електричним полем, коли ЗЧ рухається з малою швидкістю, або зі швидкістю, яка майже дорівнює швидкості світла у вакуумі.

Тепер можна охарактеризувати те, що відбувається на моніторі під час виконання програми. Так, при  $V = 0$  ми одержуємо модель, що відображає електричне поле нерухомої, або повільно рухомої ( $V \ll c$ ), ЗЧ. З рис. 2.7 видно, що вектори напруженості електричного поля на однаковій відстані від заряду однакові за величиною. Але цей висновок справедливий тільки при малих швидкостях руху ЗЧ, або коли ЗЧ нерухома.

Картина цього ж поля в тривимірній моделі має вигляд, зображений на рис. 2.8.

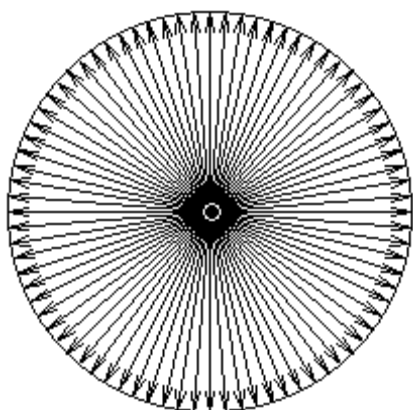


Рис. 2.7

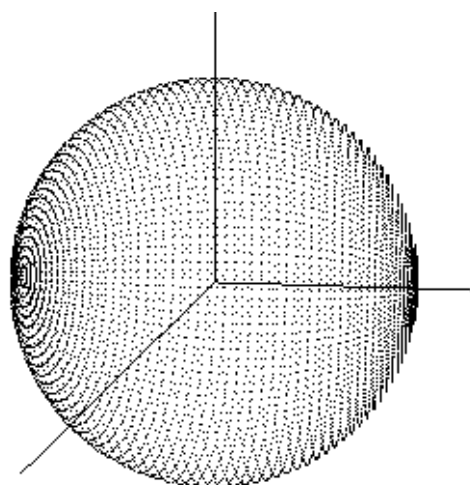


Рис. 2.8

У центрі знаходиться заряджена частинка, а віддаль від центру до точок на моделі дорівнює, у певному масштабі, величині напруженості ЕП у точках простору, рівновіддалених від миттєвого положення ЗЧ.

При збільшенні швидкості поле зарядженої частинки начебто сплющується в напрямку його руху. Це й спостерігаємо під час роботи програми, наприклад,  $V = 0,6c$  (рис. 2.9). Зліва на рис. 2.9 зображена картина ЕП в площині  $XOY$ , справа – просторова картинка.

При швидкості руху ЗЧ  $V = 0,9c$  картина поля суттєво змінюється (рис. 2.10).

Згідно (2.26),  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, E]$ , вектори напруженості електричного

та індукції магнітного полів взаємно перпендикулярні, крім того це ілюструють наступні рисунки, що відображають орієнтацію векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  у цій моделі при швидкостях руху зарядженої частинки  $V \ll c$ ,  $V = 0,6c$  та  $V = 0,9c$ , відповідно, рис. 2.11.

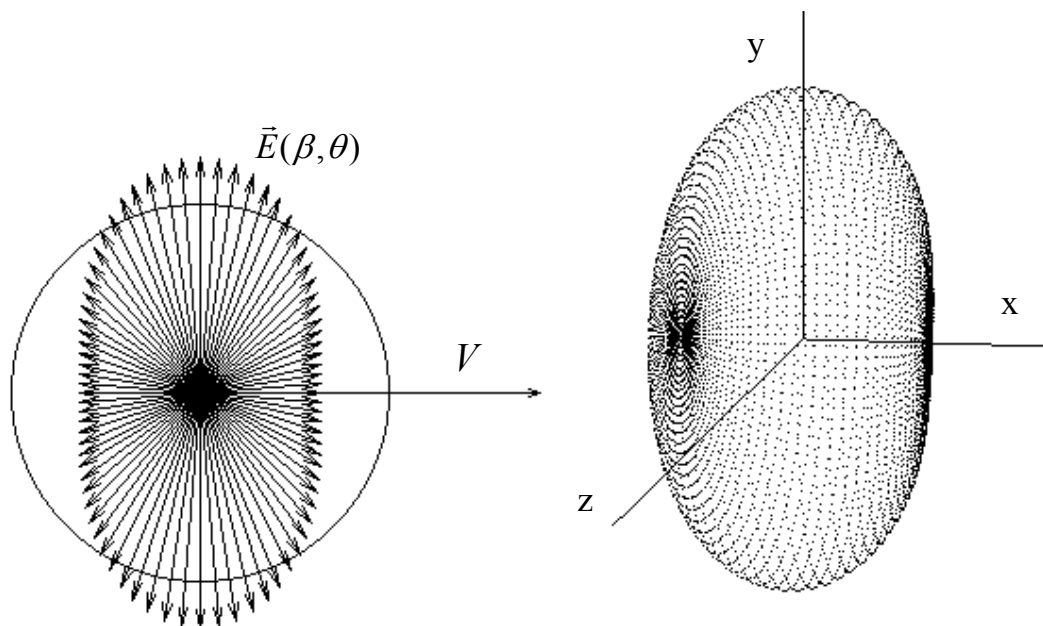


Рис. 2.9

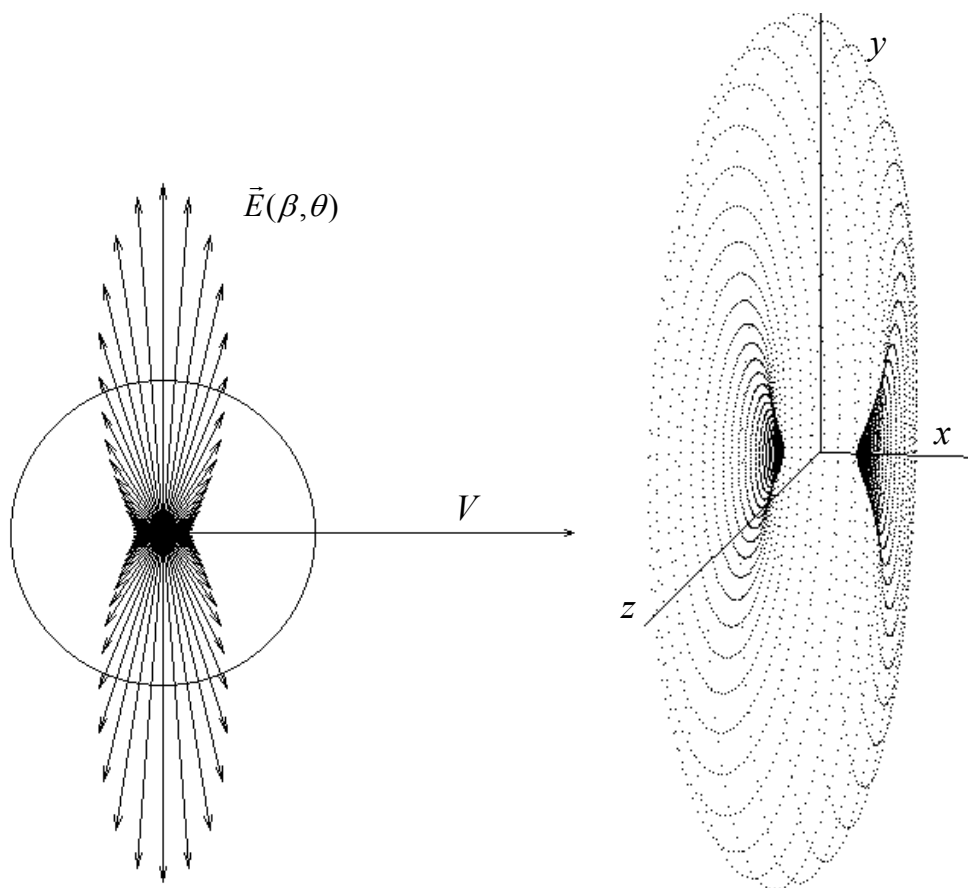


Рис. 2.10. Картина електричного поля РЗЧ при швидкості руху  $V = 0,9c$



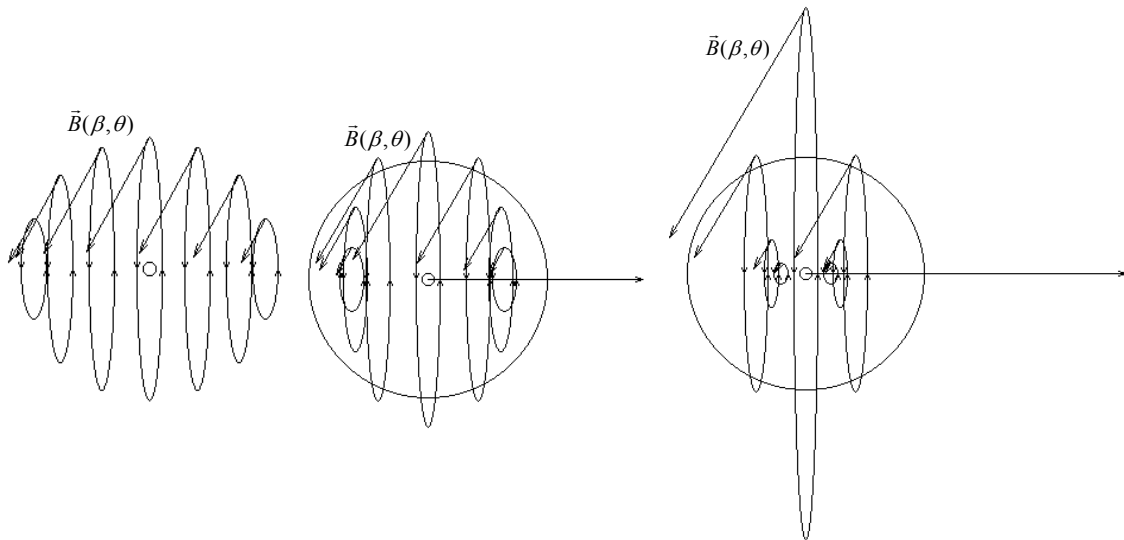


Рис. 2.11

А тепер розглянемо випадок, коли швидкість руху ЗЧ дорівнює швидкості світла у вакуумі. При цьому ми спостерігаємо, що вектор напруженості електричного поля в напрямі, перпендикулярному до швидкості ЗЧ, дорівнює нескінченності, а в напрямку руху дорівнює нулю (рис. 2.12).

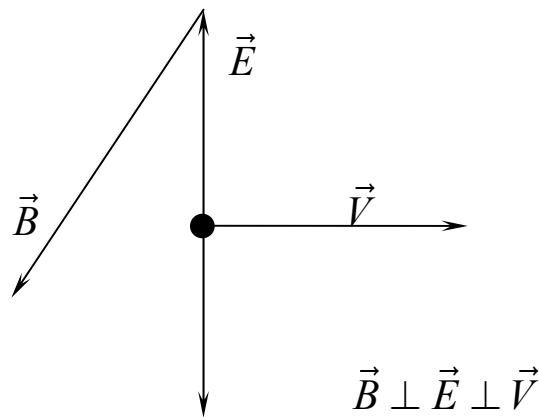


Рис. 2.12

Програми, що дали зображення (рис. 2.7–2.12), динамічні, тобто при збільшенні швидкості відповідною клавішею зображення автоматично перемальовується відповідно до значення швидкості й таким чином створюється ефект руху.

При значеннях  $\vec{V}$  порядку швидкості світла як електричне, так і магнітне поля зосереджені в околі площини перпендикулярній швидкості руху зарядженої частинки  $\vec{V}$ .

Магнітне поле  $\vec{B}$  ЗЧ, що рухається з довільною за величиною швидкістю  $\vec{V}$ , зменшується в напрямку руху й збільшується в площині, перпендикулярній до  $\vec{V}$ .

Таким чином, і магнітне поле рухомої ЗЧ «сплющується» в напрямку руху.

Видно, що лінії  $\vec{B}$  утворюють концентричні кола з центром на вісі  $OX$ , уздовж якої рухається заряджена частинка  $q$ .

Конфігурація поля заряду, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат  $K$ , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом з ЗЧ.

Але якщо «зафіксувати» деяку точку простору, то в цій точці й вектор  $\vec{E}$ , і вектор  $\vec{B}$  є функцією часу.

На нашу думку, створені програми добре ілюструють основні властивості ЕМП РЗЧ, і їх можна рекомендувати учням, студентам і викладачам фізики в навчальних закладах усіх рівнів.

***Досвід роботи з цими програмами в рамках методики вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності та впровадження їх в навчальний процес у вищих педагогічних навчальних закладах показав їх ефективність.***

#### **2.4. Зауваження щодо змісту закону Біо-Савара-Лапласа та вивчення його в ортодоксальних методиках**

Таким чином, із огляду поданому в п. 2.1 маємо наступні точки зору щодо статусу закону Біо-Савара-Лапласа.

А) закон Біо-Савара-Лапласа є незалежним і фундаментальним експериментальним законом [201; 64; 225; 65];

Б) закон Біо-Савара-Лапласа – це наслідок формули Ампера-Грассмана [126; 153; 152; 118; 127], а формула Ампера-Грассмана є вихідним фундаментально-дослідним положенням магнітостатики [178, с. 67; 153, с. 269];

В) закон Біо-Савара-Лапласа в принципі не може бути незалежним і дослідно-фундаментальним, оскільки елемент струму  $idl\vec{l}$  не може бути реалізований як самостійна структура [216, с. 221], а його використання передбачає, перш за все, процедуру обґрунтування. Мабуть, уперше на цю обставину щодо статусу цього закону наголос зроблений у посібнику проф. А. В. Желеховського [60];

Г) закон Біо-Савара-Лапласа може бути обґрунтований на основі правдоподібних і суперечливих міркувань [209, с. 112–115; 68, с. 177–178; 229, с. 22; 230, с. 235];

Д) цей закон розглядається як результат узагальнення дослідних даних [224, с. 207; 61, с. 193–194; 229, с. 22; 230, с. 235];

Е) закон Біо-Савара в інтегральній формі (1.48) є наслідком рівнянь Максвелла [159, с. 81; 186, с. 89; 234, с. 291], і тому не виникає потреби в його обґрунтуванні;

Є) закон Біо-Савара розглядається як наслідок виразу для індукції магнітного поля (в нерелятивістському наближенні) ЗЧ, що рухається з  $\vec{v} = const$  та принципу суперпозиції магнітних полів «...в основу вчення про магнітне поле постійних струмів ми поклали не елементарний закон Біо-Савара, як це зазвичай прийнято, а закон, що визначає магнітне поле рухомого заряду» [216, с. 221].

Слід також відмітити, що значна кількість авторів посібників і статей на цю тему відзначали суперечливість і непослідовність зазначених точок зору та методик вивчення магнітного поля постійних і квазістаціонарних струмів.

Причому й відчувався їх власний дискомфорт та певна розгубленість при описі та поясненні основ магнітостатики [260; 178; 200; 250; 64; 186; 224; 216; 209; 223; 118; 84; 82; 89; 129; 183; 217; 69], про що свідчить непослідовна та суперечлива аргументація щодо обґрунтування закону Біо-Савара такими численними способами.

І все ж закон Біо-Савара-Лапласа в більшості навчально-методичних виданнях вважається фундаментальним. Основний аргумент, який підкріплює таку точку зору, полягає в тому, що результати розрахунків, виконаних на його основі, підтверджуються в дослідах.

**Але, виходячи з принципу фундаментальності, навіщо співвідношення, яке не встановлене прямим експериментом і яке є або може бути наслідком інших принципів, підносити до рангу фундаментального й незалежного!?**

Незважаючи на те, що значна більшість авторів посібників з електродинаміки вважають за необхідне обґрунтувати та використовувати (або тільки коментувати) закон Біо-Савара, існують настільки рафіновані та формальні подання класичної електродинаміки, у яких навіть не згадується такий закон [180].

Що ж говорить нам історія фізики щодо відкриття чи формулювання закону Біо-Савара?

Біо (J. Biot) та Савар (F. Savart) у 1820 році, згідно з [163, с. 250], експериментально отримали залежність електромагнітної сили, що діє на магнітний полюс магнітної стрілки з боку металевого провідника зі струмом у залежності від віддалі між цим вертикально розташованим провідником зі струмом і центром магнітної стрілки.

«Якщо провідник з вольтовим струмом, що проходить по ньому, діє на частинку північного або південного магнетизму, що знаходиться на відомому віддаленні від середини провідника, то рівнодіюча всіх сил з провідника направлена перпендикулярно до найкоротшої відстані частинки від дроту, і загальна дія провідника на будь-який південно- або північно-магнітний елементи обернено пропорційно до відстані останнього від дроту» [149, с. 422].

Далі, Лаплас увів поняття елемента струму і запропонував принцип суперпозиції: дію струму на магнітний полюс можна розглядати як результат дії на полюси стрілки дуже великого числа малих елементів, на які можна розділити струм.

З цього він прийшов до висновку, що елемент струму діє на кожний полюс із силою, пропорційною  $\frac{1}{r^2}$ .

«Лаплас показав, що закон Біо-Савара може бути виведений з припущення, що дія струму складається з дії його окремих елементів» [149, с. 422].

«Звідси Лаплас вивів, що й ці дії, подібно до тяжіння, убувають обернено пропорційно до квадрата відстані» [207, с. 193].

Причому як у книзі М. Льюї [163, с. 250], так і в книзі П. С. Кудрявцева [149, с. 422] зовсім не вказується, на яких віддаль від провідника зі струмом знаходилася магнітна стрілка, з допомогою якої визначалася «залежність електромагнітної сили» від цієї віддалі.

Але в книзі Ф. Розенберга [207] ми знаходимо певну вказівку про конкретні умови експериментів Біо.

«Якщо необмеженої довжини дріт зі струмом вольта, що проходить по ньому, діє на частинку північного або південного магнетизму, що знаходиться на відомій відстані від середини дроту, то *рівнодіюча всіх сил, що витікають з дроту, направлена перпендикулярно до найкоротшої відстані частинки від дроту, і загальна дія дроту на будь-якій – південний або північний – магнітний елемент обернено пропорційна до відстані останнього від дроту*» [207, с. 193].

І в той же час, як може знаходитися «частинка північного або південного магнетизму... на відомій відстані від середини дроту», якщо цей дріт має необмежену довжину?!

Очевидно, що «дріт зі струмом вольта» мав кінцеву довжину. Проаналізуємо «залежність електромагнітної сили» від віддалі точки поля до «дроту із струмом вольта».

Насправді сила, що діє на магнітний полюс стрілки з боку провідника з постійним струмом (ППС), згідно із сучасними уявленнями, пропорційна не  $\frac{1}{R}$ , а

$$\sim \frac{\mu_0 i \cdot l}{4\pi R \sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}}, \quad (2.30)$$

де  $l$  – довжина провідника зі струмом;  $i$  – сила струму в провіднику;  $R$  – віддаль магнітного полюса від середини провідника,  $V$  – швидкість руху носіїв заряду в провіднику зі струмом (див. п. 2.5, формула (2.38)).

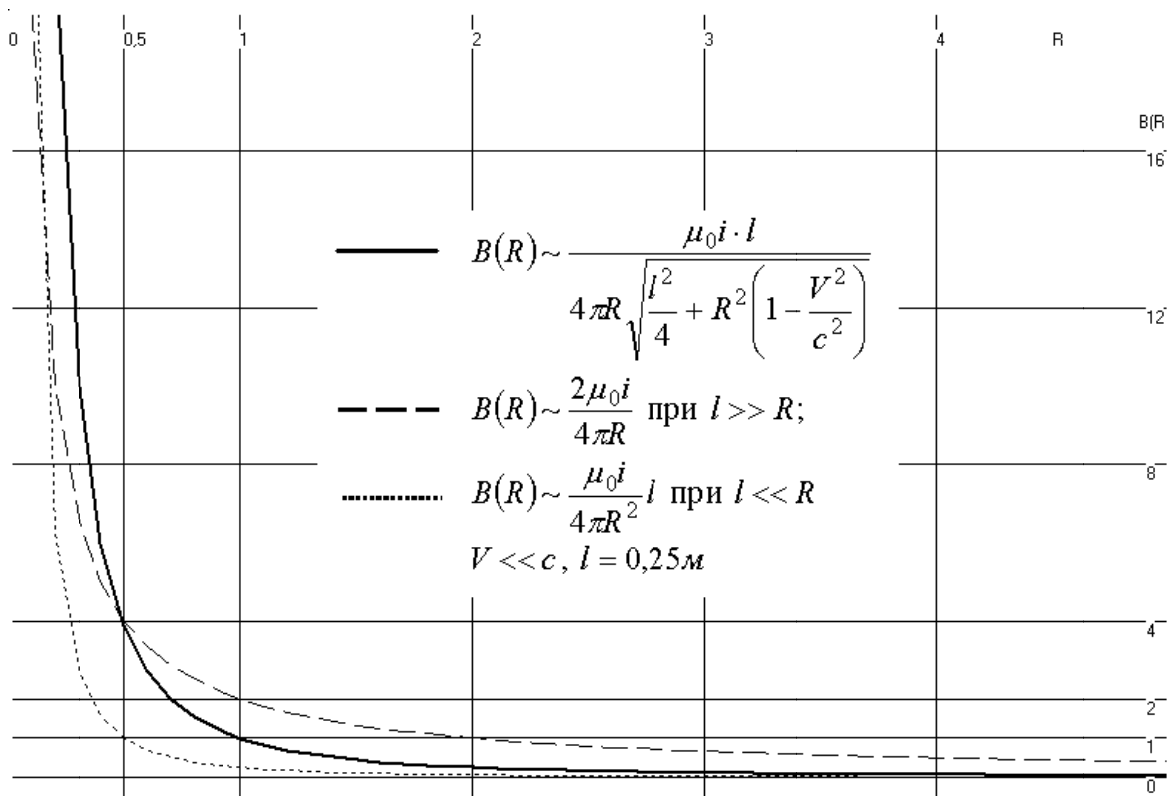


Рис. 2.13. «Залежність електромагнітної сили»,  
що діє на магнітний полюс стрілки з боку ППС згідно з (2.30)

Тобто, реальна залежність сили від віддалі  $R$  складніша ніж  $\frac{1}{R}$  чи  $\frac{1}{R^2}$ . Тому викликає подив, як Біо та Савар одержали цей закон  $\frac{1}{R}$ .

Можливо були надто неточні експерименти або вони вгадали, або ж вибрали найпростішу залежність сили від віддалі  $R$  (подібну до залежності гравітаційної сили взаємодії точкової маси й однорідного стержня довжини  $l$ ).

Здається очевидним, що в результаті скрупульозно проведених експериментів неможливо одержати залежність  $\frac{1}{R}$ .

Як уже відзначалося, у посібниках І. В. Савельєва, Д. В. Сивухіна в основу методики вивчення магнітного поля постійних струмів покладений вираз для магнітного поля повільно рухомої ЗЧ (який обгрутовується з допомогою деяких правдоподібних міркувань, але які в той же час «не мають доказової сили» [209, с. 113]) та принцип суперпозиції [209, 216].

І все ж незважаючи на розуміння того, що закон (2.29) принципово недоступний дослідній перевірці, закон Біо-Савара

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}$$

у переважній більшості сучасних навчально-методичних посібників і підручників тлумачиться як експериментальний закон.

Але аналіз суті цього закону та історичних джерел свідчить про некоректність такого підходу при вивченні та інтерпретації співвідношення (1.43) [84; 82].

По-друге, наші дослідження показали, що в деяких випадках застосування закону (1.43) приводить до результатів, що суперечать основним положенням релятивістської електродинаміки [112] (див. також п. 2.5).

По-третє, оскільки закон Біо-Савара визначає магнітне поле, що створюється елементом струму, припускаючи, що всі заряди, які реалізують елемент струму, рухаються з однаковою швидкістю  $\vec{v}$ , ми можемо знайти, користуючись принципом суперпозиції, магнітне поле, що створюється однією ЗЧ, яка рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  [118; 84; 113; 105; 127]

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 q N}{4\pi r^3} \cdot [\vec{v}, \vec{r}] = \vec{B}_1 \cdot N$$

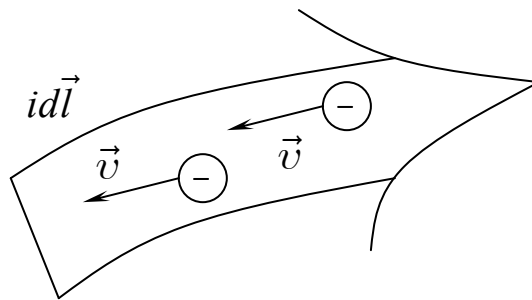


Рис. 2.14. Елемент струму  $id\vec{l}$  реалізується сукупністю рухомих ЗЧ,  $id\vec{l} = -q\vec{v}N$

Тоді вираз для індукції магнітного поля, яке створюється рухомою ЗЧ, визначається формулою, яка випливає з класичного закону Біо-Савара-Лапласа (1.43) і має вигляд [84; 105; 127]

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} \cdot [\vec{v}, \vec{r}] = \mu_0 \epsilon_0 \left[ \vec{v}, \frac{q\vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right] = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}], \quad (2.31)$$

де  $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$  – напруженість електричного поля, що створюється нерухомою ЗЧ у відповідній точці поля.

Позитивні методичні моменти такої інтерпретації закону Біо-Савара та викладу теми наступні.

1. Ми можемо відразу стверджувати, що магнітне поле створюється рухомих електричним полем. Якщо швидкість переміщення його в просторі  $\vec{v}$ , то

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (2.32)$$

Тобто індукція МП, яка визначається законом Біо-Савара-Лапласа і створюється елементом струму в деякій точці простору, **насправді породжується рухомих електричним полем кожної із ЗЧ, що входять до складу елемента струму.**

2. Формула (2.32) справедлива також і для ЗЧ, які рухаються з релятивістськими швидкостями. Але для таких швидкостей напруженість електричного поля ЗЧ буде визначатись не співвідношенням

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

справедливим при  $v \ll c$  ( $\beta \ll 1$ ), а формулою (2.19).

Тому й магнітне поле окремої ЗЧ, що рухається рівномірно, повинно описуватися формулою (2.26)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 q \cdot [\vec{v}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \cdot r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\theta$  – кут між вектором швидкості  $\vec{v}$  і радіус-вектором  $\vec{r}$ , проведеним від миттєвого положення ЗЧ у відповідну точку поля [84; 82] (див п. 2.3).

Тоді, з урахуванням (2.26) для закону Біо-Савара-Лапласа, як це було показано [84; 89; 129] (див. також п. 2.3), слід записати у формі (2.28)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{r^3 \cdot (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

**Тобто такий підхід щодо інтерпретації закону Біо-Савара дозволив нам уперше сформулювати закон Біо-Савара в релятивістській формі [84].**

3. Формула  $\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}]$  справедлива при довільних за величиною швидкостях рівномірного руху будь-якого електричного поля, напруженість якого  $\vec{E}$ .

Але в той же час формули  $\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}]$  і  $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$  несумі-

сні між собою.

Сумісне застосування їх приводить до висновків, що суперечать принципу відносності.

У той же час у стандартних посібниках та в науково-методичних публікаціях [29], ці дві формули використовуються разом, що є грубою фізичною помилкою.

## 2.5. Методика застосування та вивчення закону Біо-Савара в релятивістській формі

У пп. 2.2–2.4 показано, що закон Біо-Савара в релятивістській формі впливає як наслідок закону Кулона та принципу відносності.

Тобто вираз для індукції МП, що створюється елементом струму при довільній величині швидкості руху носіїв заряду має вигляд (2.28)

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{r^3 \cdot (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{\left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}}, \end{aligned}$$

де  $i$  – сила струму;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від елемента струму

$id\vec{l}$  в дану точку поля,  $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\sin^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,

$c$  – швидкість світла у вакуумі;  $\theta$  – кут між  $\vec{r}$  та елементом струму  $id\vec{l}$ ,  $\rho^2 = y^2 + z^2$  [129, 112], див. також п. 2.3.

Наскільки точно закон (2.28) відповідає реальності? Експериментально перевірити (2.28) дуже непросто, тим більше що й класичний закон Біо-Савара (2.29) навряд чи можна перевірити безпосередньо шляхом прямого експерименту.

Уважається, що непрямим підтвердженням закону Біо-Савара (2.29) є несуперечність результатів розрахунків на основі (2.29) і відповідних дослідних фактів.

Але є й інші критерії. Порівняємо результати аналізу деяких фізичних ситуацій, застосовуючи закон Біо-Савара в класичній і релятивістській формах.



1. Використаємо (2.28) для знаходження індукції МП нескінченного довгого лінійного ППС.

Оскільки  $r = \frac{R}{\sin \theta}$ ,  $\frac{r \cdot d\theta}{dl} = \sin \theta$ , то індукція МП прямого струму в точці простору на віддалі  $R$  від провідника дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 i (1 - \beta^2)}{4R\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (2.33)$$

Виявляється, що інтеграл, який стоїть у правій частині (2.33), неможливо виразити через елементарні функції при інтегруванні за кутом  $\theta$ .

Але може бути знайдено, що

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \\ & = \int_0^\pi F(\theta, \beta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta - \frac{2}{1 - \beta^2} \int_0^\pi E(\theta, \beta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta, \end{aligned}$$

де  $F(\theta, \beta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}}$  – еліптичний інтеграл 1-го роду;

$E(\theta, \beta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta$  – еліптичний інтеграл 2-го роду.

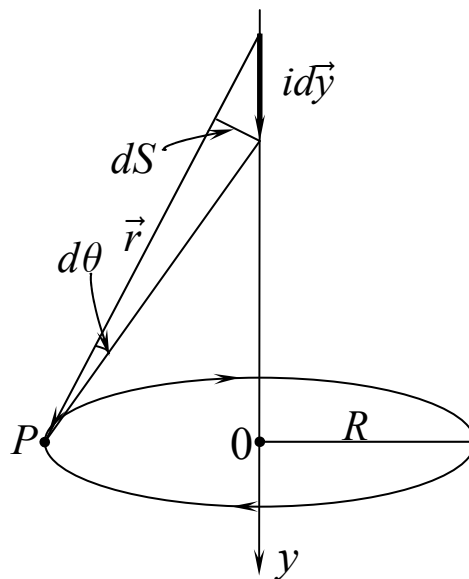


Рис. 2.15. Індукція магнітного поля в точці  $P$  є суперпозицією МП  $d\vec{B}$ , що породжуються всіма елементами струму

Еліптичні інтеграли можуть бути обчислені з будь-якою точністю за наступними формулами [48, с. 154–155]

$$F(\theta, \beta) = \frac{2\theta}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1^2}{2^2} \beta^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} \beta^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2} \beta^6 + \dots \right) - \right. \\ \left. - \sin \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{1 \cdot A_2 \beta^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot A_4 \beta^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot A_6 \beta^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right) \right], \quad (2.34)$$

$$E(\theta, \beta) = \frac{2\theta}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1^2}{2^2} \beta^2 - \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} \beta^4 - \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2} \beta^6 - \dots \right) + \right. \\ \left. + \sin \theta \cdot \cos \theta \left( \frac{1 \cdot A_2 \beta^2}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot A_4 \beta^4}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot A_6 \beta^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots \right) \right], \quad (2.35)$$

де  $A_2 = \frac{1}{2}$ ;  $A_4 = \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta$ ;  $A_6 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \sin^2 \theta + \frac{1}{6} \sin^4 \theta$ .

Використовуючи формули (2.34), (2.35) і обмежившись тільки доданками, пропорційними  $\beta^k$ , де  $k \leq 6$ , після простих підрахунків одержуємо

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{2}{1 - \beta^2} \left( 1 + \frac{1}{7} \beta^8 \right). \quad (2.36)$$

Якщо врахувати у формулах (2.34), (2.35) доданки, пропорційні  $\beta^8$ , то інтеграл (2.36) відрізнявся б від величини  $\frac{2}{1 - \beta^2}$  доданками  $\sim \beta^{10}$ . Тобто чим точніше ми обчислюємо інтеграл (2.36), тим з більшою точністю він дорівнює  $\frac{2}{1 - \beta^2}$ .

Таким чином, згідно з (2.33) і (2.36) індукція магнітного поля в кожній точці простору навколо довгого провідника зі струмом визначається

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

Незважаючи на те, що носії зарядів рухаються з довільною за величиною швидкістю, ми отримали вираз для МП прямого струму, який збігається з формулою, яка одержується на основі класичного закону Біо-Савара (2.29), і який вірний не завжди.

Очевидно, що тоді й циркуляція вектора магнітної індукції по довільному контуру, який охоплює такий нескінченно довгий провідник зі струмом (таку нескінчену довгу процесію ЗЧ, що рухаються з довільними швидкостями), дорівнює тому ж самому значенню  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$ , яке

одержується в рамках традиційного способу обґрунтування рівнянь Максвелла, формула (1.46),

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i.$$

2. Тепер використаємо (2.28) для знаходження індукції МП відрізка лінійного провідника з постійним струмом.

Вираз для магнітної індукції прямолінійного відрізка струму в будь-якій точці простору знайдемо, користуючись (2.28) у такому поданні (рис. 2.16)

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot (1 - \beta^2) \cdot R \cdot dx}{\left[ x^2 + R^2 \cdot (1 - \beta^2) \right]^{3/2}}. \quad (2.27)$$

тому

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l_1}^{l-l_1} \frac{i \cdot (1 - \beta^2) \cdot R \cdot dx}{\left[ x^2 + R^2 \cdot (1 - \beta^2) \right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cdot \left\{ \frac{l-l_1}{\sqrt{(l-l_1)^2 + R^2(1-\beta^2)}} + \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + R^2(1-\beta^2)}} \right\}. \quad (2.38)$$

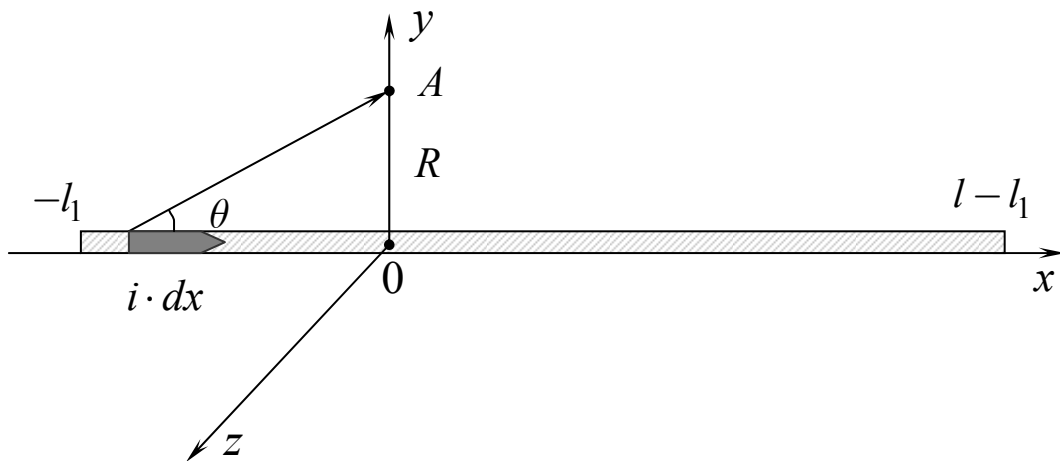


Рис. 2.16. Знаходження індукції магнітного поля прямолінійного відрізка зі струмом

Ми одержали результат, що відрізняється від добре відомого, але при  $\beta \ll 1$  дорівнює йому.

Якщо в останній формулі взяти  $l - l_1 \gg R$ ,  $l_1 \gg R$ , то маємо

$$B_z = \frac{2\mu_0 i}{4\pi R} - \text{звичайний вираз для індукції магнітного поля нескінченно}$$

довгого прямолінійного провідника зі струмом  $i$ .

3. Нехай рівномірно заряджена нитка рухається з швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$  уздовж вісі  $OX$  системи відліку  $K$ . Лінійна густина заряду на нитці у власній СВ  $K'$  дорівнює  $\tau'$ , довжина  $l'$ . Знайдемо електричне та магнітне поля в точці  $A$  СВ  $K$ , відносно якої  $K'$ -система рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  (рис. 2.17).

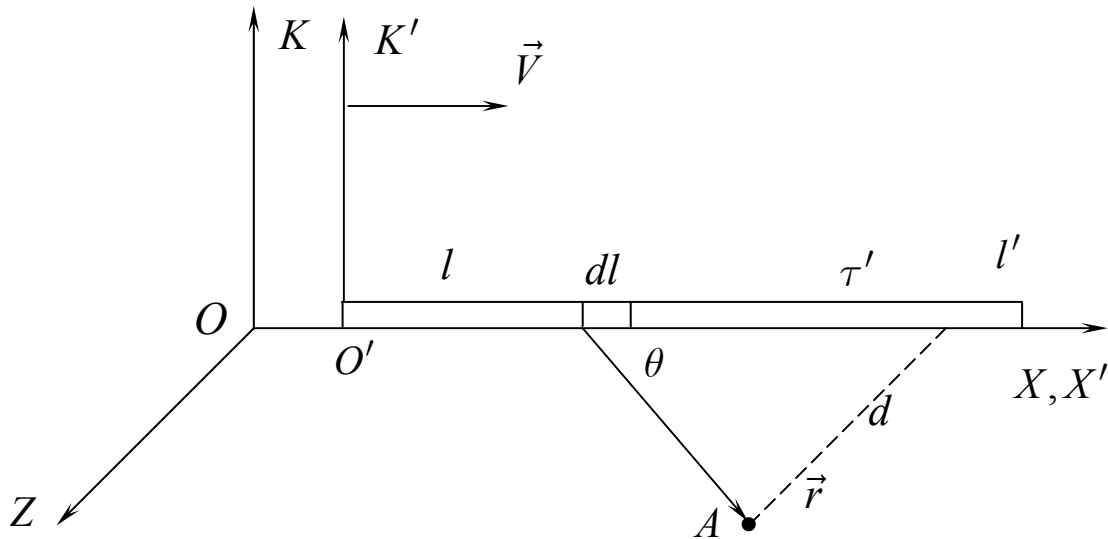


Рис. 2.17. Обчислення напруженості електричного та індукції магнітного поля рівномірно зарядженої нитки, яка рухається з швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$

З одного боку ці поля можна знайти з допомогою формул перетворення компонент ЕМП (див. **Розділ 1** та **Розділ 4**) при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot (E'_z - \beta B'_y); \\ B_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \left( B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right). \end{aligned} \right\} (*)$$

У формулі (\*)  $E'_z$ ,  $B'_y$  – відповідні складові електромагнітного поля у СВ  $K'$

$$B'_y = 0; E'_z = \frac{\tau'}{4\pi\epsilon_0 d} \cdot \left[ \frac{l' - x'}{\sqrt{(x' - l')^2 + d^2}} + \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + d^2}} \right], \quad (2.39)$$

де  $x'$  – іксова координата точки поля,  $d$  – відстань точки поля  $A$  від нитки.

З іншого боку ці величини можуть бути знайдені за допомогою принципу суперпозиції та виразів для полів  $dE_z$ ,  $dB_y$ , які створюються елементарним відрізком  $dl$  рухомої зарядженої нитки

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{dq \cdot (1 - B^2) \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2 \cdot (1 - B^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{dq(1 - B^2)r \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - B^2) \right]^{3/2}}, \end{aligned}$$

де  $dq = \tau dl$  – величина заряду на елементарному відрізку  $dl$ ;  $\vec{r} = (x - Vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, проведений від миттєвого по-

ложення заряду  $dq = \tau dl$  у дану точку поля  $A(x, y, z)$ ;  $\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - B^2}}$ ;

$B = \frac{V}{c}$ ,  $\theta$  – кут між вектором  $\vec{r}$  та напрямком руху нитки (рис. 2.17).

Оскільки ми шукаємо напруженість електричного поля, яке створюється в дану мить усією рухомою зарядженою ниткою (а це значить, що в дану мить інтегрувати необхідно за довжиною нитки в СВ  $K$ ), то попередній вираз слід подати у формі

$$dE_z = \frac{\tau dl \cdot (1 - B^2) \cdot d}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x - l)^2 + d^2(1 - B^2) \right]^{3/2}}, \quad (2.40)$$

де  $l$  – змінна координата елементарного відрізка  $dl$ .

Інтегрування будемо проводити для моменту часу, коли початки координат систем відліку  $K$  та  $K'$  збігаються. Якщо ввести нову змінну  $x - l = u$ , то одержуємо

$$E_z = \int_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}} dE_z = \frac{\tau \cdot d \cdot (1 - B^2)}{4\pi\epsilon_0} \int_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}} \frac{du}{\left[ u^2 + d^2(1 - B^2) \right]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\tau \cdot d \cdot (1 - B^2)}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{u}{d^2(1 - B^2)\sqrt{u^2 + d^2(1 - B^2)}} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=l'\sqrt{1-B^2}}$$

Підстановка меж інтегрування дає величину напруженості шуканого електричного поля

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} \times \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1 - B^2)}} + \frac{l'\sqrt{1 - B^2} - x}{\sqrt{(x - l'\sqrt{1 - B^2})^2 + d^2(1 - B^2)}} \right) \quad (2.41)$$

Знайдемо індукцію магнітного поля, яке породжується зарядженою ниткою, що рівномірно рухається, використовуючи релятивістську форму закону Біо-Савара (2.28)

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - B^2)}{r^3 \cdot (1 - B^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - B^2)}{\left[ (x - l)^2 + (y^2 + z^2)(1 - B^2) \right]^{3/2}} \end{aligned}$$

Ігрекова компонента індукції магнітного поля в довільній точці площини  $XOZ$  дорівнює

$$\begin{aligned} dB_y &= -\frac{\mu_0 \cdot i dl \cdot (1 - B^2) \cdot z}{4\pi \left[ (x - l)^2 + d^2(1 - B^2) \right]^{3/2}} = \\ &= -\frac{\mu_0 i \cdot du (1 - B^2) \cdot z}{4\pi \left[ u^2 + d^2(1 - B^2) \right]^{3/2}}, \quad (2.42) \end{aligned}$$

де  $(x-l) = u, du = -dl, i = \tau V = \frac{\tau'}{\sqrt{1-B^2}} V$ .

Інтегруючи (2.42) за довжиною рухомої зарядженої нитки, одержуємо

$$\begin{aligned}
 B_y &= \int_{x-l'\sqrt{1-B^2}}^{x-0} dB_y = \\
 &= \frac{\mu_0 \tau' V \cdot d (1-B^2)}{4\pi \sqrt{1-B^2}} \int_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}} \frac{du}{\left[ u^2 + d^2 (1-B^2) \right]^{3/2}} = \\
 &= \frac{\mu_0 \tau' V \cdot d (1-B^2)}{4\pi \sqrt{1-B^2}} \cdot \left( \frac{u}{d^2 (1-B^2) \sqrt{u^2 + d^2 (1-B^2)}} \right) \Bigg|_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, на основі формул (2.40) та (2.42) одержуємо величину індукції магнітного і напруженості електричного поля, яке створюється рухомою зарядженою ниткою в довільній точці площини  $XOZ$ :

$$\begin{aligned}
 B_y &= \frac{\mu_0 \tau' V}{4\pi \cdot d \sqrt{1-B^2}} \times \\
 &\times \left( \frac{x-l'\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{\left( x-l'\sqrt{1-B^2} \right)^2 + d^2 (1-B^2)}} - \frac{x}{\sqrt{(x)^2 + d^2 (1-B^2)}} \right) = \\
 &= - \frac{\mu_0 \tau' V}{4\pi \cdot d \sqrt{1-B^2}} \times \\
 &\times \left( \frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{\left( x-l'\sqrt{1-B^2} \right)^2 + d^2 (1-B^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(x)^2 + d^2 (1-B^2)}} \right), \\
 E_z &= \frac{\tau}{4\pi \epsilon_0 d} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2 (1-B^2)}} + \frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{\left( x-l'\sqrt{1-B^2} \right)^2 + d^2 (1-B^2)}} \right).
 \end{aligned}$$

Якщо початок координат СВ  $K$  розташувати так, щоб вісь  $OZ$  проходила через точку поля  $A$ , тоді межі інтегрування будуть від  $-x$  до  $l'\sqrt{1-B^2} - x$ , й інтегрування за довжиною рухомої нитки дає той же результат

$$E_z = \int_{-x}^{l'\sqrt{1-B^2}-x} dE_z = \frac{\tau'}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{1-B^2}} =$$

$$\times \left[ \frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{(l'\sqrt{1-B^2} - x)^2 + d^2(1-B^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} \right]. \quad (2.43)$$

$$B_y = -\frac{V \cdot \tau' \mu_0}{4\pi \cdot d\sqrt{1-B^2}} \times$$

$$\times \left[ \frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{(l'\sqrt{1-B^2} - x)^2 + d^2(1-B^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} \right]. \quad (2.44)$$

Значення напруженості електричного та індукції магнітного полів  $E'$ ,  $B'$ ,  $E$ ,  $B$  у формулах (\*), (2.39), (2.43), (2.44) беруться для однієї й тієї ж просторово-часової точки. Якщо взяти момент часу, коли початки координат СВ  $K$  і СВ  $K'$  збігаються ( $t = t' = 0$ , тоді  $x = x'\sqrt{1-\beta^2}$ ) і із (2.43), (2.44) одержуємо

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{E'_z}{\sqrt{1-B^2}}; \\ B_y &= -\frac{VE'_z}{c^2\sqrt{1-B^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Ці результати, (2.45), які одержані на основі (2.19) та на основі закону Біо-Савара в релятивістській формі (2.28), збігаються з тими, що отримуються з допомогою абсолютно точної формули (\*).

Але якби ми при знаходженні  $B_y$  користувалися законом Біо-Савара в класичній формі, то одержали б результат, що суперечить (\*) і (2.45).



Це означає, що застосування класичного закону Біо-Савара (2.29) для знаходження ЕМП зарядженої нитки, яка рухається рівномірно й поступально, дає результати, які суперечать вимогам релятивістської електродинаміки.

4. Розглянемо дві паралельні рівномірно заряджені нитки. У власній СВ  $K'$  довжина кожної  $l'$ , густина заряду  $\tau'$ , віддаль між нитками  $d$  і вони орієнтовані вздовж вісі  $O'X'$  (рис. 2.18). Система відліку  $K'$  рухається зі швидкістю  $\vec{V} = const$  вздовж осі  $OX$  СВ  $K$ .

Знайдемо силу взаємодії між такими зарядженими нитками в СВ  $K$ .

Для сили взаємодії  $F'_z$  у СВ  $K'$  маємо

$$F'_z = \int_0^{l'} E'_z \cdot \tau' \cdot dx' = \frac{2\tau'^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left( \sqrt{d^2 + l'^2} - d \right), \quad (2.46)$$

де  $E'_z$  визначається (2.39).

У СВ  $K$  результуюча сила взаємодії дорівнює геометричній сумі електричної сили та магнітної сили.

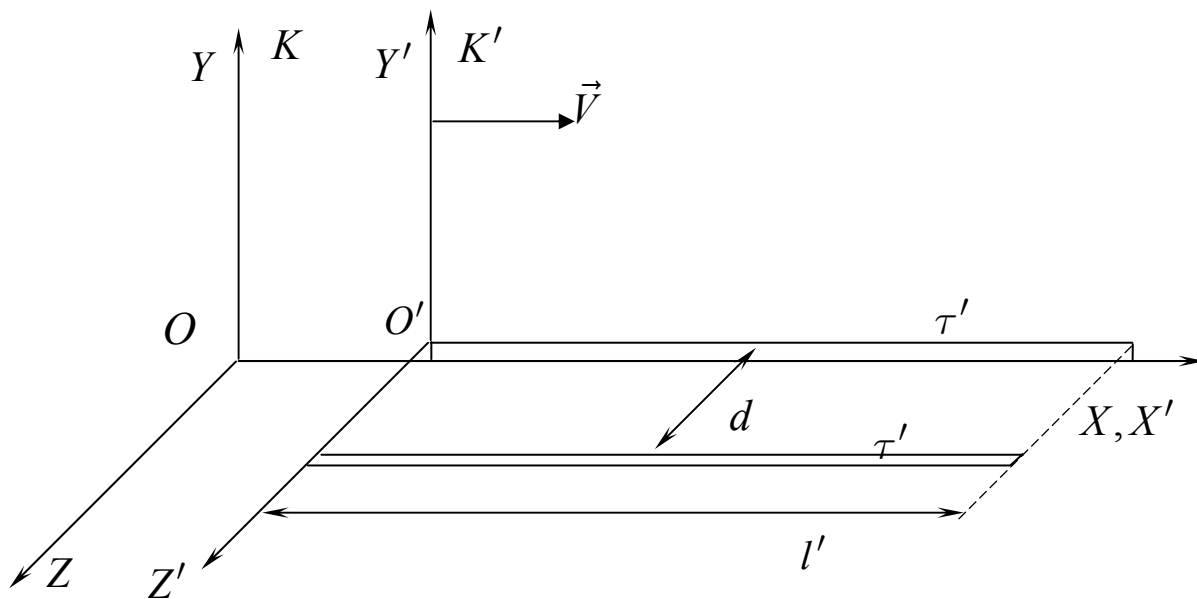


Рис. 2.18. Взаємодія двох рівномірно заряджених ниток

Відзначимо, що за формулами перетворення компонент сили при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$

$$\gamma \cdot F_z = \gamma' \cdot F'_z,$$

де  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ ,  $v, v'$  – швидкості руху взаємодіючих тіл відносно СВ  $K$  та СВ  $K'$  відповідно.

У цьому випадку  $v' = 0$ , тому зв'язок між  $F_z$  і  $F'_z$  повинен бути таким

$$F_z = F'_z \cdot \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.47)$$

Сили електричної та магнітної взаємодії між нитками в СВ  $K$  дорівнюють відповідно

$$F_z^E = \int_0^{l' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}} E_z \cdot \tau \cdot dx = \frac{2\tau'^2}{4\pi\epsilon_0 d \sqrt{1 - \beta^2}} \left( \sqrt{d^2 + l'^2} - d \right);$$

$$F_z^B = \int_0^{l' \cdot \sqrt{1 - \beta^2}} v \cdot B_y \cdot \tau \cdot dx = \frac{2\tau'^2 v^2 \mu_0}{4\pi d \sqrt{1 - \beta^2}} \left( \sqrt{d^2 + l'^2} - d \right). \quad (2.48)$$

**Сумарна сила взаємодії між нитками  $F_z = F_z^E - F_z^B = = F'_z \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$ , що й вимагає теорія відносності.**

Очевидно, що при знаходженні сили взаємодії між нитками на основі класичного закону Біо-Савара, вимога (2.47) не була б виконана.

Таким чином, розглянуті приклади показують, що закон Біо-Савара в релятивістській формі дає коректний опис фізичних явищ, у той час як застосування класичного закону (2.29) не дає релятивістськи інваріантного опису цих явищ. У всякому разі це вірно для прямолінійного та рівномірного руху носіїв заряду.

Дивним є те, що формули перетворення компонент електромагнітного поля (\*) одержані на основі системи рівнянь Максвелла (одне з яких базується на (2.29), як на дослідному факті [179; 227; 225; 65; 127]), а безпосереднє застосування (2.29) дає результат, що суперечить (\*).

Оскільки класична електродинаміка є лорентцковаріантною теорією, то з усього вище сказаного випливає висновок, що логічніше й у методичному відношенні більш цілеспрямовано основи електромагнетизму викладати, використовуючи послідовно релятивістські ідеї та методи, наприклад використовуючи закон Біо-Савара в релятивістській формі та методику, запропоновану в [135; 89; 129; 84; 128].

Оскільки рівняння (1.46) у традиційній методиці вивчення електродинаміки може розглядатися як наслідок (2.29), і, як ми впевнилися (див. [112] та задачі 2, 3, 4 в цьому підрозділі), застосування закону (2.29) у деяких випадках дає некоректні результати (більш правильною формою закону Біо-Савара є (2.28)), то здається, що й теорема про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по довільному контуру, який охоплює постійний струм має дещо відрізнятись від (1.46).

З іншого боку, можливість зміни (2.29) до форми (2.28) оснований на співвідношенні

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, d\vec{E}],$$

де  $d\vec{E}$  – точне значення напруженості електричного поля, яке створюється рівномірно рухомою ЗЧ ( $dq$  – величина заряду)

$$d\vec{E} = \frac{dq \cdot \vec{r} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}. \quad (2.49)$$

Залишається незрозумілим, яким чином нерелятивістське (неточне) значення напруженості електричного поля рухомої ЗЧ

$$d\vec{E} = \frac{dq \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

яке разом з принципом суперпозиції дає класичний закон Біо-Савара, приводить до релятивістської теорії – електродинаміки.

Формулу (2.49) можна отримати також із системи рівнянь Максвелла (а не тільки з аналізу взаємодії двох рухомих ЗЧ [89; 129; 112; 115]), одним з яких в інтегральній формі є (1.46).

Тобто система рівнянь Максвелла містить у собі результат, який вказує на обмеженість основ, що лежать у фундаменті теорії.

Але як, базуючись на неточних дослідних фактах, удається сформулювати точну теорію?! І на цю неточність та обмеженість вказує сама теорія.

Тому становить інтерес перевірка теореми про циркуляцію вектора індукції магнітного поля (1.46) на конкретному прикладі.

Для цього знайдемо циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по квадратному контуру  $adcb$  (кожна сторона якого дорівнює  $2d$ ), який охоплює постійний струм  $i$ , що протікає по квадратній рамці  $ABCD$  таких же розмірів, як і контур (рис. 2.19) [83].

Індукцію МП, яке породжується кожним з відрізків рамки  $ABCD$  у точках контуру  $adcb$ , будемо знаходити з використанням (2.28), інтегруючи при цьому за довжиною відрізків струму, а не за кутом  $\theta$ , див. (2.37)

$$d\vec{B} = \frac{i\mu_0 (1 - \beta^2) \cdot Rdl}{4\pi \left[ l^2 + R^2 (1 - \beta^2) \right]^{3/2}}.$$

Криволінійний інтеграл  $I_1 = \int_{-d}^d \vec{B} d\vec{l} = \int_{-d}^d B_x dx$  вектора  $\vec{B}$ , створеного відрізком струму  $DA$ , за прямими  $ad, dc, cb, ba$  дорівнює

$$I_1 = \frac{i\mu_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3-2\beta^2}}. \quad (2.50)$$

Криволінійний інтеграл  $I_2 = \int_{-d}^d B_x dx$  за прямою  $da$  поля  $\vec{B}$  відрізка струму  $BC$  дорівнює

$$I_2 = \frac{i\mu_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{11-10\beta^2}}. \quad (2.51)$$

Криволінійний інтеграл  $I_3 = \int_{-d}^d B_x dx$  за прямою  $da$  поля  $\vec{B}$  відрізків струму  $AB$  і  $CD$  дорівнює

$$I_3 = \frac{i\mu_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{11-2\beta^2}} - \frac{i\mu_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3-2\beta^2}}. \quad (2.52)$$

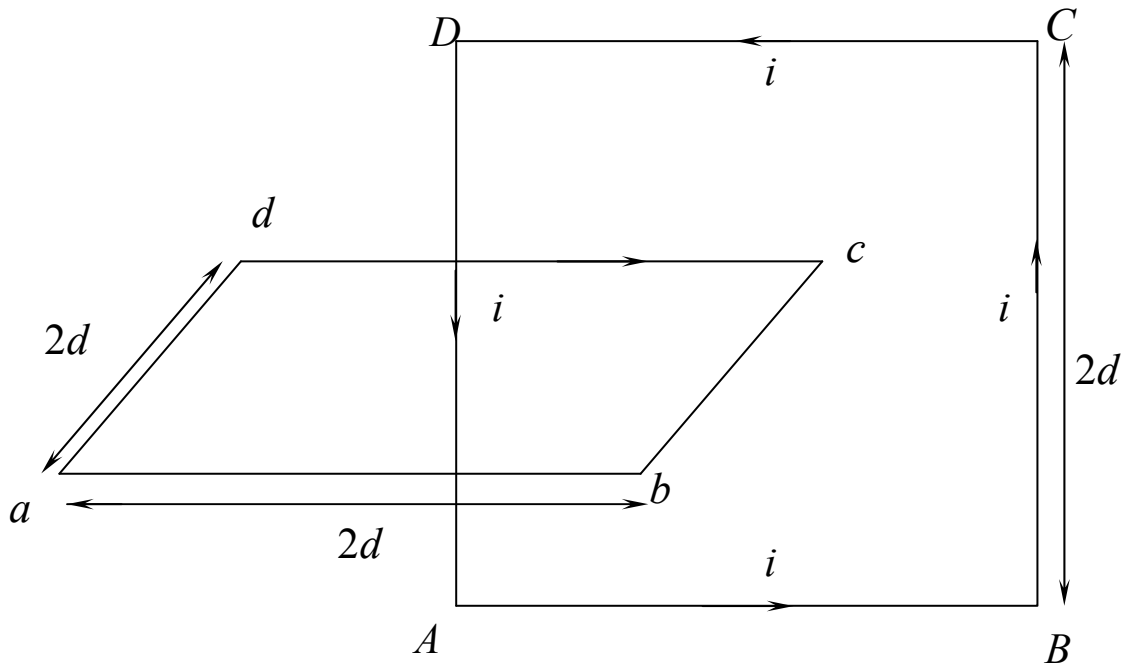


Рис. 2.19. Знаходження циркуляції вектора  $\vec{B}$  по контуру  $adcb$ .  
Струм протікає по провіднику  $ABCD$

І нарешті,  $I_4 = \int_{-d}^d B_x dx$  за прямими  $cd$  і  $ab$  поля  $\vec{B}$  відрізка струму  $BC$  дорівнює  $I_3$ . Тобто циркуляція вектора індукції магнітного поля  $\vec{B}$ , яке створюється замкнутим постійним струмом, по квадратному контуру  $adcba$  дорівнює [83]

$$\frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[ 36 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3-2\beta^2}} - 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{11-2\beta^2}} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3 \cdot \sqrt{11-10\beta^2}} \right]. \quad (2.53)$$

Залежність циркуляції вектора  $\vec{B}$  від швидкості руху ЗЧ показана на рис. 2.20.

Такий замкнутий провідник з постійним струмом (контур  $ABCD$ ), носії заряду в якому рухаються з релятивістськими швидкостями, є гіпотетичним.

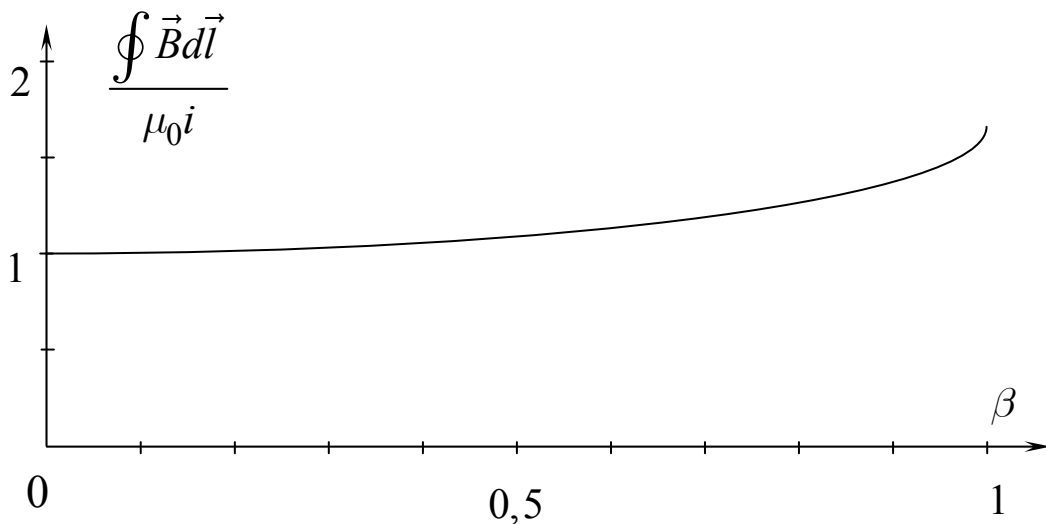


Рис. 2.20. Залежність циркуляції вектора  $\vec{B}$  від швидкості руху ЗЧ у замкненому контурі  $ABCD$

Але до деякої міри такий провідник  $ABCD$  можна змоделювати чотирма нескінченно довгими провідниками, розташованим у просторі так, як це показано на рис. 2.21.

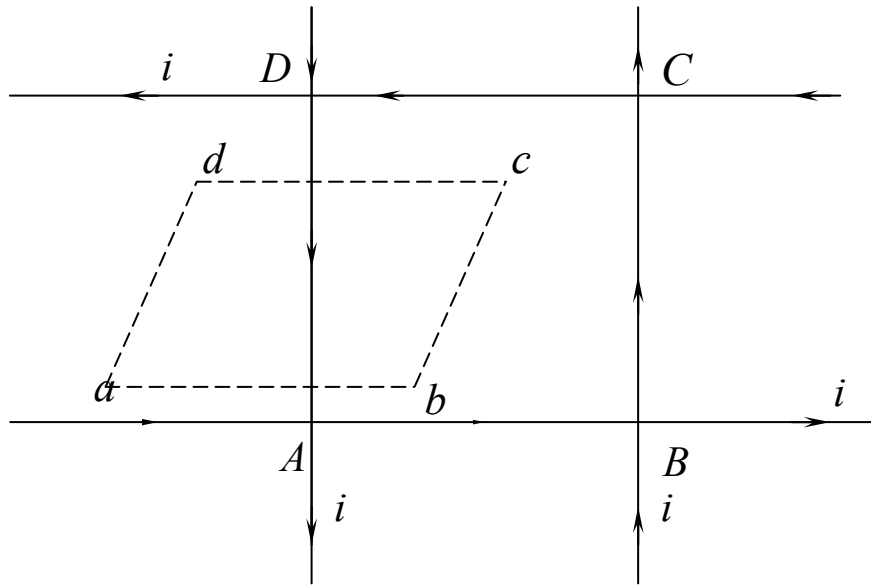


Рис. 2.21

При  $\beta \ll 1$ , що реалізується в більшості практично значимих випадках, циркуляція вектора  $\vec{B}$  дорівнює

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \left[ 36 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{11}} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3 \cdot \sqrt{11}} \right] = \mu_0 i. \quad (2.54)$$

Таким чином, значення циркуляції вектора  $\vec{B}$  по контуру  $adcba$ , підраховане на основі закону (2.28) відрізняється від класичного загальноприйнятого значення  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$  на мізерну величину.

І тільки при  $\beta \approx 1$  циркуляція вектора  $\vec{B}$ ,  $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$ , приблизно дорівнює  $1,65 \mu_0 i$  [83].

## 2.6. Механізм породження магнітного поля стаціонарними та квазістаціонарними струмами

У рамках запропонованої методики формування поняття МП та вивчення відповідних тем у вищих навчальних закладах, одержана сукупність важливих науково-методичних результатів (пп. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5).

Результати, одержані в попередніх пунктах **Розділу 2**, є наслідком вимог спеціальної теорії відносності щодо опису електромагнітної взаємодії.

Але СТВ не може дати чи пояснити механізм виникнення магнітного поля струмів.

Спеціальна теорія відносності, зокрема, тільки вказує, які повинні бути співвідношення між величинами, щоб опис і аналіз електродинамічних явищ був коректним.

Ще раз відзначимо основні положення традиційної, ортодоксальної методики опису властивостей магнітного поля стаціонарних і квазістаціонарних струмів.

Як уже відзначалося в кінці п. 2.1 (див також [159; 201; 186; 127]), рівняння Максвелла (1.47)  $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  означає, що вихрове магнітне поле породжується струмами провідності. Причому в точках простору, де існує густина струму  $\vec{j}(\vec{r})$ , вихор вектора індукції МП дорівнює  $\mu_0\vec{j}$ .

Тобто в точках простору, у яких відсутні струми провідності,  $rot\vec{B} = 0$ . Але магнітне поле в таких точках не дорівнює нулю, незважаючи на те, що струм, як джерело МП,  $\vec{j} = 0$ .

До речі, коли розраховується МП в конденсаторі, який поступово (квазістаціонарно) розряджається внаслідок того, що між його обкладками знаходиться електропровідна речовина, то незважаючи на те, що  $\vec{j}_{np} + \vec{j}_{зм} = 0$  і  $rot\vec{B} = \mu_0(\vec{j}_{np} + \vec{j}_{зм}) = 0$ , а МП дорівнює нулеві???

Хоча при пошуку відповіді на одне й те ж питання в цих двох задачах використовується формально по суті однакове рівняння Максвелла  $rot\vec{B} = \mu_0(\vec{j}_{np} + \vec{j}_{зм})$ . А відповіді різні.

По-друге, як фізично пояснити виникнення МП в точках простору, у яких  $\vec{j} = 0$ ? Як може бути, що струми провідності не рівні нулю в одній частині простору, а МП з'являється в тих точках простору, де відсутні струми?

У цих точках  $\vec{B}(\vec{r}) \neq 0$ , а  $\vec{j} = 0$ . Так чим же та як створюється в цих точках МП?!

Відповіді на деякі з цих питань може дати методичний підхід, запропонований спочатку Г. В. Ніколаєвим [194], а потім нами в роботах [80; 102; 140], і нарешті реалізація цього підходу в навчальних посібниках [64; 65; 111; 127] у випадку нерелятивістського руху заряджених частинок.

Так, у посібниках [64; 65] вираз для індукції магнітного поля РЗЧ при  $v < c$  одержується в результаті застосування інтегрального рівняння Максвелла для струмів зміщення.

Причому ніяк не аналізується механізм чи причина виникнення МП унаслідок руху ЗЧ.

Просто в результаті розрахунків показується, що циркуляція вектора індукції МП, яке створюється рівномірно рухомою ЗЧ, уздовж колового контуру, який симетрично охоплює лінію руху ЗЧ, пов'язана зі струмом зміщення через поверхню, що спирається на цей контур.

Але в роботах [194; 80; 121; 102; 140; 111; 127] для **нерелятивістського руху ЗЧ** уперше в науково-методичній періодиці з'являється ідея про породження МП рухомих ЗЧ струмами зміщення.

А от в роботах [121; 102; 140; 122; 80], здається вперше, показано, що фізичною причиною виникнення МП унаслідок руху ЗЧ (**причому, при довільній величині швидкості руху ЗЧ**) є густина струму зміщення

$$\vec{j}_{zm} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

У пп. 2.2 та 2.3 показано, що з вимог принципу відносності та закону Кулона напруженість електричного та індукція магнітного полів за умови рівномірного руху ЗЧ з довільною за величиною швидкістю визначаються (2.19) та (2.26).

Але, як уже відзначалося, щодо фізичного механізму виникнення магнітного поля при русі ЗЧ спеціальна теорія відносності нічого сказати не може.

Покажемо, що МП протона, який рухається з довільною за величиною швидкістю  $\vec{v} = \text{const}$ , породжується тільки струмами зміщення.

При нерелятивістському русі ЗЧ часткове обговорення подібного питання дано в [194; 64; 65].

Нехай протон рухається вздовж вісі  $OX$  з постійною швидкістю  $v < c$ , рис. 2.22.

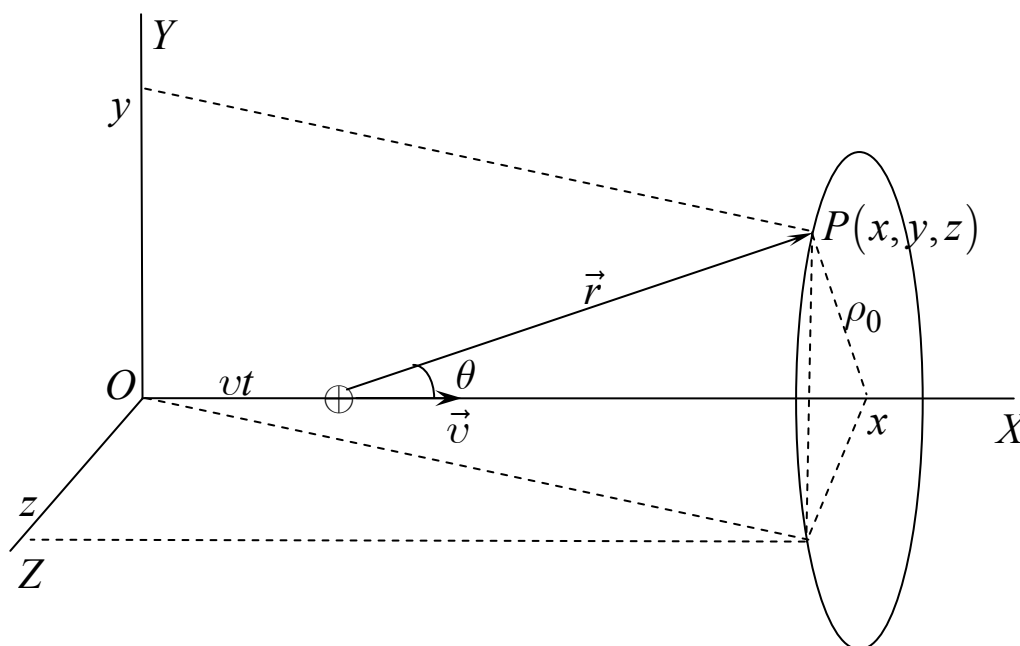


Рис. 2.22. Струм зміщення та магнітне поле протона, який рухається з  $\vec{v} = \text{const}$



Магнітне поле в т.  $P(x, y, z)$  не може породжуватися струмами переносу (струмами провідності), оскільки сила струму переносу через плоску поверхню круга радіуса  $\rho_0$ , на периферії якого знаходиться т.  $P$ , дорівнює нулю ( $i_{пер} = \int_{S_0} \vec{j} d\vec{s} = 0$ , бо  $\vec{j} = 0$ ).

Але в пп. 2.2 показано, що між величинами, які характеризують ЕМП РЗЧ в однорідному та ізотропному середовищі, існує зв'язок

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (2.55)$$

Використаємо (2.55) для знаходження напруженості МП РЗЧ за відомою напруженістю електричного поля (2.19).

Згідно з (2.55) поява магнітного поля в т.  $P(x, y, z)$  зумовлена струмами зміщення.

Дійсно, оскільки в довільній точці простору (т.  $P(x, y, z)$ ) напруженість електричного поля, що створюється рухом ЗЧ ( $\vec{v} = \text{const}$ ), дорівнює

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}},$$

то для густини струму зміщення в цій точці простору маємо

$$\begin{aligned} \vec{j}_{3M} &= \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \\ &= \left\{ \frac{3qv(1-\beta^2)(x-vt)^2}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{5/2}} - \frac{qv(1-\beta^2)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{3/2}} \right\} \vec{i} + \\ &\quad + \frac{3qvy(1-\beta^2)(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{j} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{3qvz(1-\beta^2)(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{k}. \quad (2.56)$$

Для струму зміщення  $i_{3M}$  через плоску поверхню  $S_0$  одержуємо

$$i_{3M} = \int_{S_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\rho_0} \left[ \frac{3qv(1-\beta^2) \cdot (x-vt)^2}{\left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{5/2}} - \frac{qv(1-\beta^2)}{\left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{3/2}} \right] \times$$

$$\times \rho \cdot \partial \rho = \frac{q \cdot v(1-\beta^2) \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{3/2}}. \quad (2.57)$$

При застосуванні рівняння  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  теорема про

циркуляцію вектора  $\vec{H}$  набуває вигляду

$$2\pi\rho_0 \cdot H = \frac{qv \cdot (1-\beta^2) \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{3/2}}. \quad (2.58)$$

Звідси

$$H = \frac{qv \cdot (1-\beta^2) \cdot \rho_0}{4\pi \cdot \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{3/2}}, \quad (2.59)$$

що в точності відповідає формулі (2.26), яка підтверджується дослідними фактами.

З огляду на локальний характер основних законів класичної та релятивістської електродинаміки знайдемо тепер напруженість магнітного поля в т.  $P(x, y, z)$ , користуючись рівнянням Максвелла в диференціальній формі (2.55). Зауважимо, що, згідно з (2.26),  $H_x = 0$ , тому вихор вектора  $\vec{H}$  дорівнює

$$\text{rot}\vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{k}. \quad (2.60)$$

Тоді, ураховуючи (2.56), одержуємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно невідомих  $H_z(x, y, z)$  та  $H_y(x, y, z)$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{3qv(1-\beta^2)(x-vt)^2}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{5/2}} - \frac{qv(1-\beta^2)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{3/2}}; \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = - \frac{3qv(1-\beta^2)y(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{5/2}}; \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{3qv(1-\beta^2)z(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{5/2}}. \quad (2.63)$$

Інтегруючи два останніх рівняння, знаходимо  $H_z(x, y, z)$  та  $H_y(x, y, z)$ :

$$H_z(x, y, z, t) = \frac{qv(1-\beta^2)y}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{3/2}}; \quad (2.64)$$

$$H_y(x, y, z, t) = - \frac{qv(1-\beta^2)z}{4\pi \left[ (x-t)^2 + \rho_0^2(1-\beta^2) \right]^{3/2}}. \quad (2.65)$$

Безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що розв'язки (2.64) та (2.65) задовольняють рівнянню (2.61).

Уважаючи, що субстанція, яка відповідальна за властивості заряду, розподілена рівномірно по поверхні зарядженої частинки радіуса  $r_0$ , для сили струму переносу через поверхню  $S_0$  маємо

$$i_{\text{пер}} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma 2\pi r_0 dx) = \frac{qv}{2r_0}.$$

Цей струм переносу буде створювати МП тільки в точках простору, обмеженого розмірами зарядженої частинки. А поза межами зарядженої частинки МП створюється тільки струмами зміщення.

У всякому разі це вірно при рівномірному та прямолінійному русі протона.

Згідно із сучасною фізичною парадигмою, будь-яка взаємодія розповсюджується з кінцевою швидкістю, від однієї точки простору до іншої нескінченно близької точки. Значить, закони фізики, і зокрема електродинаміки, повинні буди сформульовані в локальній формі.

У нашому випадку це означає, що **причиною виникнення магнітного поля  $\vec{H}$  в т.  $P(x, y, z)$  є явище, яке відбувається в цій же точці чи в її околі.**

Зважаючи на польову концепцію взаємодії причиною виникнення МП, пов'язаного з рухом заряджених частинок, слід визнати  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

Закон Біо-Савара, теорема про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  та інші інтегральні закони, з допомогою яких визначають магнітні поля постійних струмів, не пояснюють причину виникнення МП у точках простору, де немає ні зарядів, ні струму переносу.

Оскільки в сучасній науково методичній літературі з електродинаміки відсутнє фізичне обґрунтування механізму виникнення МП при русі заряджених частинок, то наведені вище пояснення цього явища в методичному й у методологічному відношенні є актуальними.

Розглянемо провідник довжиною  $l_0$  зі струмом, який зумовлений рухом заряджених частинок з дрейфовою швидкістю  $\vec{v} = \text{const}$ . Кожен елементарний відрізок лінійного провідника зі струмом можна розглядати як заряд величиною  $dq = \tau \cdot dl$ , що рухається з  $\vec{v} = \text{const}$  (де

$$\tau = \frac{q \cdot n \cdot S}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

– лінійна густина заряду,  $q$  – величина заряду кожної з частинок, які внаслідок руху утворюють струм,  $n$  – їх концентрація,  $S$  – площа поперечного перерізу провідника) (рис. 2.23).

Тоді, сумарна густина струму зміщення в довільній т.  $P(x, y, z)$  дорівнює

$$\vec{J}_{\text{зм}} = \int_0^{l_0} \vec{j}_{\text{зм}} \cdot dl = \left[ \frac{v\tau \cdot u^3}{4\pi \cdot \rho^2 \cdot [u^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)]^{3/2}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{v\tau \cdot u}{4\pi \cdot \rho^2 \cdot [u^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)]^{1/2}} \right\}_0^{l_0} \cdot \vec{i} + \\
& + \left\{ \frac{v\tau \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \cdot [u^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)]^{3/2}} \cdot (y\vec{j} + z\vec{k}) \right\}_0^{l_0}, \quad (2.66)
\end{aligned}$$

де  $u = x - l_0$ .

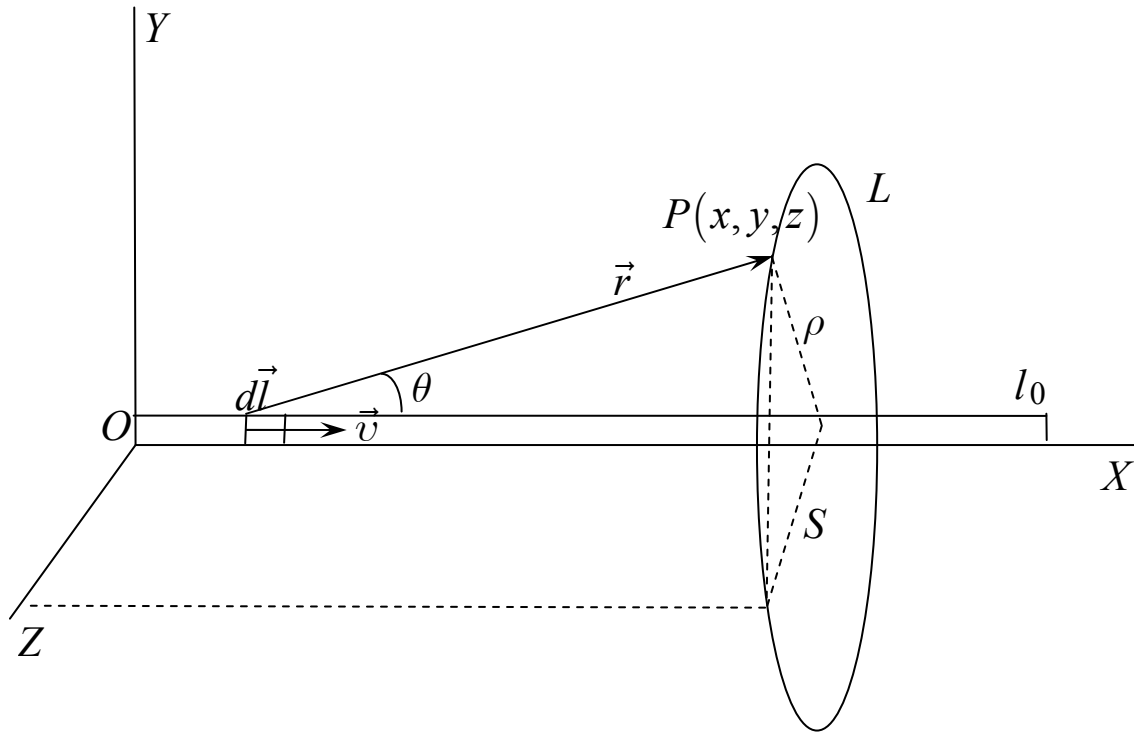


Рис. 2.23. Пояснення щодо знаходження густини струму зміщення в т.  $P$  відрізка постійного струму

Узявши, наприклад, тільки складову  $(\vec{J}_{зм})_y$  і використовуючи (2.55) для  $H_z$ , після інтегрування відповідного рівняння одержуємо

$$H_z = \frac{v\tau \cdot y}{4\pi \cdot \rho^2} \cdot \left[ \frac{l_0 - x}{\sqrt{(x - l_0)^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} \right]. \quad (2.67)$$

Для напруженості магнітного поля в т.  $P(x, y, z)$ , оскільки  $H_z = H \cdot \frac{y}{\rho}$ , яке виникає внаслідок руху носіїв заряду по відрізку провідника довжиною  $l_0$ , одержуємо вираз

$$H = \frac{v\tau}{4\pi \cdot \rho} \cdot \left[ \frac{l_0 - x}{\sqrt{(x - l_0)^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} \right], \quad (2.68)$$

що в нерелятивістському випадку співпадає із загальновідомою формулою для величини вектора  $\vec{H}$  відрізка провідника довжиною  $l_0$  зі струмом  $i = v\tau$  (див. також формулу (2.38)).

Сила струму зміщення через плоску поверхню круга радіуса  $\rho$

$$I'_{зм} = \int_0^{l_0} dx \cdot \int_0^{\rho} \vec{j}_{зм} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \vec{i} =$$

$$= \frac{v\tau}{2} \cdot \left[ \frac{l_0 - x}{\sqrt{(x - l_0)^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} \right]. \quad (2.69)$$

Тільки в тому випадку, коли провідник нескінченно довгий, то  $I'_{зм} = v\tau$  (при довільній величині радіуса  $\rho$ ) і дорівнює  $I_{пер}$  – так званому струму переносу.

А струм зміщення через всю поверхню  $S = \pi\rho^2$ , що межує з  $\pi\rho^2$ , дорівнює:

$$I''_{зм} = -\frac{v\tau}{2} \cdot \left[ \frac{l_0 - x}{\sqrt{(x - l_0)^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \rho^2 \cdot (1 - \beta^2)}} \right]. \quad (2.70)$$

Таким чином,  $I'_{зм} = -I''_{зм}$ , струм зміщення  $I'_{зм}$  через поверхню  $S = \pi\rho^2$  замикається струмом  $I''_{зм}$  через поверхню  $S = \pi\rho^2$ , що межує з  $\pi\rho^2$ .

Цей висновок справедливий для плоскої поверхні будь-якого радіуса і при довільній швидкості носіїв заряду.

Для швидкостей  $v \ll c$  ця властивість струмів зміщення вперше відзначена у [194]. Але на відміну від ситуації, зображеної на рис. 2 в

роботі [140], у якій струм переносу та струм зміщення через  $S_0$  сумуються, при розгляді провідника з струмом (рис. 2.23) реальний (фізичний) струм через поверхню  $S = \pi \rho^2$  дорівнює тільки струму зміщення (2.69) (див. також [194]).

**Таким чином, фізичною причиною виникнення МП стаціонарних і квазістаціонарних струмів є тільки струм зміщення.**

Реалізація такої методики обґрунтування й пояснення дає загальновідомі формули для вектора  $\vec{H}$  (при  $v \ll c$ ) (2.64), (2.65), (2.67), (2.68).

У ці формули входить комбінація величин, яку називають силою електричного струму.

Але не струм переносу  $I_{\text{пер}} = \frac{dq}{dt}$  породжує МП.

У загальноприйнятій методиці знаходження вектора  $\vec{H}$  з допомогою закону Біо-Савара та теореми про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (з допомогою формул, принципово основаних на дальності) використовується  $I_{\text{пер}}$ , хоча очевидно, що формальна за суттю величина  $\frac{dq}{dt}$  ніякого відношення до механізму виникнення МП не має.

$\frac{dq}{dt} = v\tau$  – це величина заряду, який у дану мить перетинає деяку поверхню, а МП індукується змінними за часом полями  $\vec{D}(t)$  усіх зарядів, що реалізують елемент струму чи відрізок провідника зі струмом.

Методика вивчення електромагнетизму, заснована на принципі дальності, суперечить самому духу сучасної фізики й зокрема польовим теоріям.

Тому обґрунтування й опис магнітної взаємодії з допомогою формул і законів, основаних на дальності є неадекватним і фізично помилковим (хоча такий опис і дає кінцевий результат, що відповідає фізичній реальності в наближенні  $v \ll c$ ).

Така можливість суттєво змінює наші уявлення про механізм виникнення чи породження МП. Навіть МП постійного струму породжується струмами зміщення, а не струмами провідності. Хоч слід визнати, що уявлення про струми переносу широко використовується у фізиці та техніці. Але насправді реальним струмом, у розумінні породження МП, є (необхідно вважати) струм зміщення, оскільки тільки струм зміщення, згідно з уявленнями близькодії (сучасними уявленнями) індукує в просторі навколо ППС магнітне поле.

Що ж стосується фізики явищ, то слід признати неприйнятною традиційну точку зору, бо вона приводить до спотворення уявлень і розуміння фізичної суті електродинамічних процесів.

Картина явищ, заснована на уявленнях про струми зміщення постійних струмів, більш фізично адекватно відображає суть електромагнітних процесів.

Для кращого розуміння механізму «протікання» струмів зміщення та розподілу в просторі векторного поля  $\vec{j}_{зм}$  (2.56) і, таким чином, з метою більш повного пояснення властивостей поля  $\vec{j}_{зм}$  нами створена імітаційна модель розподілу густини струму зміщення РЗЧ, рис. 2.23а та рис. 2.23б [122].

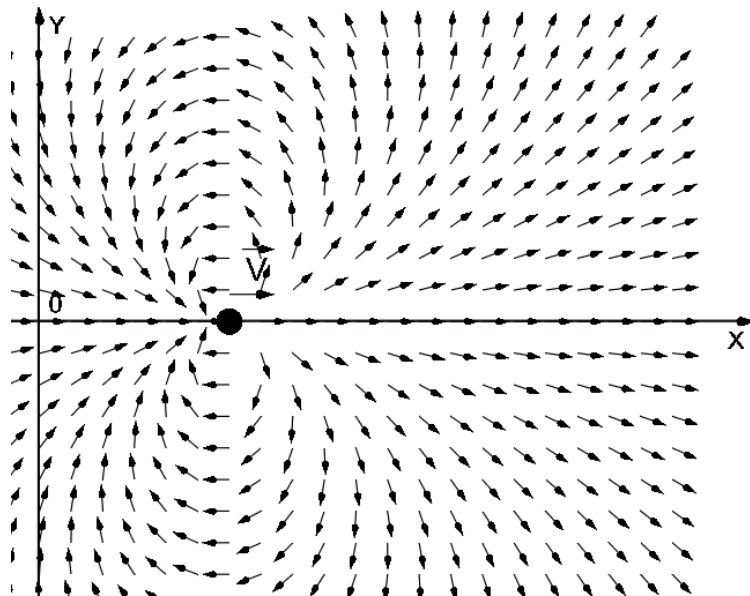


Рис. 2.23а. Розподіл в площині  $XOY$  поля  $\vec{j}_{зм}$  ЗЧ, що рухається рівномірно та прямолінійно

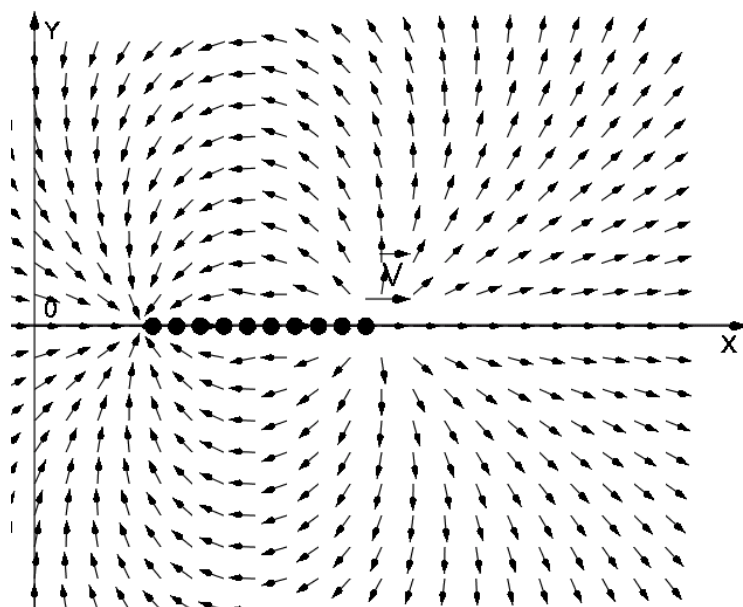


Рис. 2.23б. Розподіл в площині  $XOY$  поля  $\vec{j}_{зм}$  при русі сукупності заряджених частинок зі швидкістю  $\vec{v}$  [122]



З допомогою комп'ютерних імітаційних моделей можна продемонструвати, а значить і уявити, у деяких межах, основні властивості об'єкту, який вивчається.

Так, зокрема, з рис. 2.23а видно, що в будь-якій точці площини, що перпендикулярна вектору швидкості руху ЗЧ  $\vec{v}$  і яку в дану мить перетинає заряджена частинка, вектор  $\vec{j}_{зм}$  направлений протилежно осі  $OX$ , див також (2.56),

$$\vec{j}_{зм} = -\frac{qv}{4\pi \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cdot \rho^3} \cdot \vec{i}.$$

У кожній точці простору, унаслідок руху заряджених частинок, буде змінюватися з часом вектор  $\vec{D}$ , тому вихор напруженості магнітного поля  $rot\vec{H}$  у кожній точці простору дорівнює  $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ , рівняння (2.55).

Зауважимо, що фундаментальне рівняння (2.55),  $rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ , слід розглядати як наслідок властивостей електромагнітного поля ЗЧ, яка рухається рівномірно й прямолінійно (або, іншими словами, як наслідок принципу відносності та закону Кулона).

## **2.7. Реальність, істина та еквівалентні описи явищ в електродинаміці**

Одна з цілей вивчення фізики у ВНЗ полягає в опануванні студентами основних положень фундаментальних фізичних теорій і формування на основі цих теорій адекватного об'єктивній реальності світогляду.

Метою фізики як наукової галузі є пошук істини, тобто знань, які адекватно відображають об'єктивний світ. У той же час виявити, пізнати фундаментальні причини, які лежать в основі фізичних явищ, побудувати об'єктивну картину світу – один з основних мотивів діяльності фізиків.

«Звідси витікає, що вищим обов'язком фізиків є пошук тих загальних елементарних законів, з яких шляхом чистої дедукції можна одержати картину світу. До цих законів веде не логічний шлях, а тільки заснована на проникненні в суть досліду інтуїція. При такій невизначеності методики можна думати, що існує довільне число рівноцінних систем теоретичної фізики; у принципі ця думка, безумовно, правильна. Але історія показала, що з усіх мислимих побудов у даний момент тільки одна виявляється переважаючою. Ніхто з тих, хто дійсно заглиблювався в предмет, не стане заперечувати, що теоретична система практично

однозначно визначається спостереженнями, хоча ніякий логічний шлях не веде від спостережень до основних принципів теорії» [258, с. 40].

Тобто ще А. Ейнштейн наголошував, що один і той же аспект фізичної реальності може бути описаний різними теоретичними конструкціями.

«Для одного й того ж комплексу дослідних фактів може існувати кілька теорій, що значно розрізняються одна від одної. Але відносно висновків з теорій, які доступні для дослідної перевірки, згода між теоріями може бути настільки повною, що важко знайти такі наслідки, які дозволили б відрізнити ці теорії одна від одної» [259, с. 593].

Ситуацію, коли одну й ту ж предметну область фізики, або деякі частини її, описують дві й більше теорій, або фрагменти теорій, і які приводять до однакових емпіричних наслідків, називають «еквівалентними описами» [249, с. 42].

У принципі, висновок про існування еквівалентних описів впливає, взагалі кажучи, із гносеологічних позицій А. Ейнштейна.

При цьому він часто наголошував, що фундаментальні поняття й закони фізичної теорії – це «вільні творіння людського розуму» [258, с. 183]. «Не існує ніякого індуктивного методу, який міг би вести до фундаментальних понять фізики» [258, с. 213]. «...пізнання не може розцвісти з голої емпірії. Такий розквіт можливий тільки з порівняння того, що придумане, з тим, що спостерігається» [258, с. 124]. «...тільки теорія може сказати, що ж вимірюється в експерименті». «Фізика є логічною системою мислення, що розвивається, основи якої можна одержати не виділенням їх якими-небудь індуктивними методами з досліду, а лише вільною вигадкою» [258, с. 226].

Тобто принципова незвідність теорії до фізичних дослідів означає, що одну й ту ж область фактів можна описати декількома теоретичними моделями.

Прикладом такого еквівалентного опису є три формулювання нерелятивістської квантової механіки – подання Шредінгера, подання Гейзенберга та формулювання квантової механіки на мові інтегралів за траєкторіям (Р. Фейнман) [249; 24]. Другим прикладом еквівалентного опису є формулювання спеціальної теорії відносності – у лорентцевих та галілеєвих координатах [249; 160].

Як правило, хоч еквівалентні описи й приводять до однакових емпіричних наслідків, інколи вони дають різні й навіть несумісні між собою, уявлення про фізику явищ та об'єктивну картину світу.

Але якщо певний комплекс дослідних фактів може бути описаним різними, але еквівалентними теоріями, то яка з них відповідає реальності, що є істина?

«Це приводить до нетривіальної проблеми істини: яким чином відмінність описів об'єктивного світу узгоджується з тим, що кожне з них є істинним?» [249, с. 42].

Цю проблему можна сформулювати більш вузько, говорячи тільки про різні описи ряду електродинамічних задач. Тому з більш простих прикладів еквівалентних описів електродинамічних процесів наведемо наступні:

**А.** Задача про розрядження конденсатора в традиційній методиці описується II-м законом Кірхгофа, але без особливих фізичних пояснень. Але з точки зору польових уявлень цей процес розрядки зумовлений міграцією енергії поля з об'єму конденсатора в зовнішній простір, а потім втіканням її в провідник, яким закорочено пластини конденсатора. При цьому не обійтися без рівняння Максвелла, уявлень про струми зміщення, вектор Пойнтінга. Хоч кінцевий результат одержується однаковим, очевидно, що фізична інтерпретація зовсім різна.

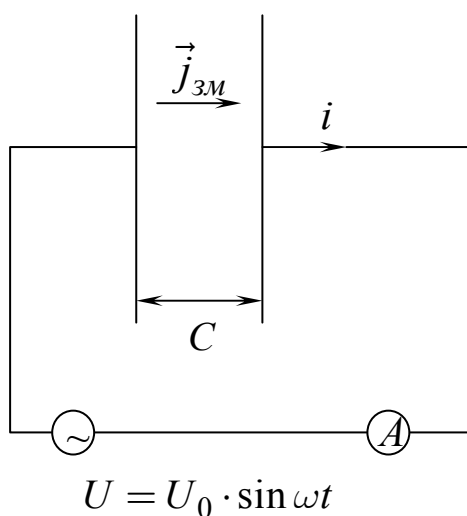


Рис. 2.24. Явище протікання змінного струму через конденсатор зумовлене повністю струмами зміщення. Амперметр вимірює силу струму зміщення

**Б.** Протікання змінного струму через конденсатор (рис. 2.24).

Можна вказати на два еквівалентні описи цього процесу. Перший – оснований на розв'язку II-го закону Кірхгофа, другий – ґрунтується на уявленні, що струм, який протікає через конденсатор, повністю зумовлений струмами зміщення. На відміну від першого, другий спосіб дає адекватне фізичне пояснення механізму цього процесу.

**В.** Кількість теплоти, що виділяється в провіднику з активним опором  $R$ ,  $i^2 R$  на електротехнічному рівні викладання та пояснення цього явища, зумовлена зіткненням електронів провідності з іонами кристалічної ґратки та передачею цим іонам своєї кінетичної енергії. З точки зору адекватних фізичних уявлень, ця кількість теплоти дорівнює енергії електромагнітного поля, що втікає в провідник із зовнішнього простору. Знову ж таки, незважаючи на однаковий кінцевий результат фізичні пояснення принципово різні. Причому, як свідчить дос-

від викладання, електротехнічний рівень пояснення цих явищ суттєво спотворює розуміння студентами цих (та й інших) електродинамічних процесів. Уявлення, що носієм енергії струму є електромагнітне поле, яке локалізоване як в провіднику, так і в оточуючому його просторі, а не носії струму (заряджені частинки), сприймається студентами з певними труднощами.

Г. Магнітне поле рівномірно рухомої ЗЧ може бути знайдене такими способами:

1) використовуючи дальнодіючий закон Біо-Савара, який справедливий при швидкості руху носіїв струму  $v \ll c$  [65; 127];

2) на основі рівняння Максвелла  $rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$ , де  $\vec{v}$  – швидкість руху ЗЧ;  $q$  – величина заряду;  $\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$  – дельта-функція Дірака;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля [159; 111].

3) з допомогою потенціалів Ліенара-Віхерта [4; 127; 111];

4) спираючись тільки на концепцію струмів зміщення та рівняння (2.55) [102; 121];

5) на основі закону Кулона та принципу відносності [129] (див. також пп. 2.1–2.4).

Зупинимось більш детально на способі Г.4) з тим, щоб порівняти його потім з описом цієї задачі на основі способу Г.1).

Як відомо, вирази для вектора  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  та індукції магнітного поля  $\vec{B}$  електромагнітного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки найбільш просто можна одержати з принципу відносності та закону Кулона [129, 112; 101] (п. 2.3)

$$\vec{D}(x, y, z, t) = \frac{q(1 - \beta^2)\vec{r}}{4\pi r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{q(1 - \beta^2)\vec{r}}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}};$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

де  $q$  – величина заряду РЗЧ;  $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення ЗЧ у дану точку поля  $P(x, y, z)$ ;

$$\beta = \frac{v}{c}; \theta - \text{кут між вектором } \vec{r} \text{ і напрямком руху ЗЧ, } \sin^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2},$$

див. рис. 2.22.

Слід наголосити ще раз, що ці вирази є наслідком принципу відносності.

Іншими словами, ПВ вимагає, щоб вирази для векторів  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  електромагнітного поля (ЕМП) РЗЧ мали саме такий вигляд. Але щодо механізму породження полів ПВ нічого сказати не може.

А от з аналізу властивостей ЕМП РЗЧ, [132; 125; 142], впливають фундаментальні рівняння (див. також п. 2.1 та п. 3.5)

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (**)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{зм}, \quad (***)$$

де  $\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  – густина струму зміщення в довільній точці простору в околі РЗЧ.

У роботах [121; 130] (див. також п. 2.6) на основі концепції струмів зміщення, знайдено, що напруженість МП рівномірно рухомою ЗЧ (при довільній величині швидкості руху її) дорівнює

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \frac{q[\vec{v}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}}.$$

Тому, для знаходження індукції МП в довільній точці простору, яке створюється «елементом струму», очевидно, можемо записати

$$d\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \cdot N = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (2.71)$$

де  $N$  – число ЗЧ, що реалізують «елемент струму», рис. 2.25.

Таким чином, з допомогою очевидних алгебраїчних перетворень нам вдалося один опис трансформувати в інший опис.

Тобто в кожній точці простору в деякий момент часу вихор вектора  $\vec{H}$  зумовлений (породжується) густиною струму зміщення в цій же точці й у цей же момент часу.

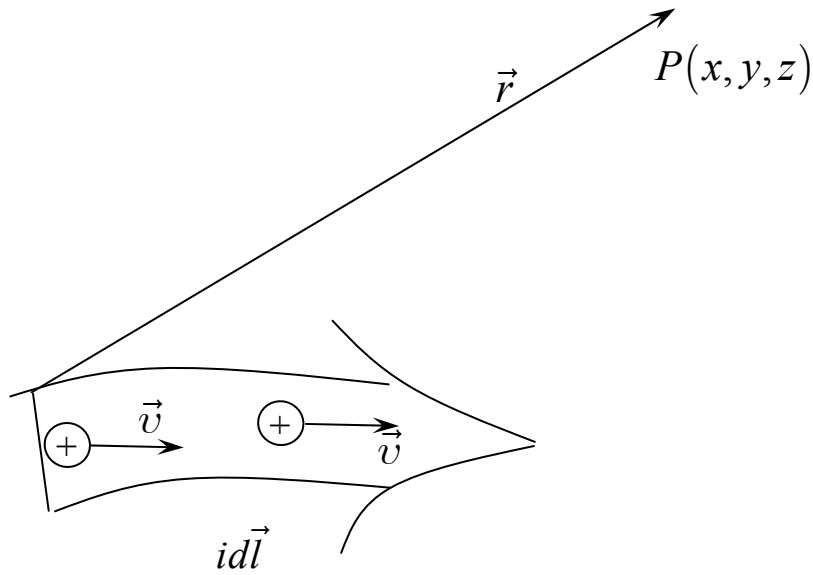


Рис. 2.25. Елемент струму  $id\vec{l}$  реалізують рухомі ЗЧ у межах провідника довжиною  $dl$ ,  $i \cdot d\vec{l} = q\vec{v}N = \vec{j}dV$

Узагальнюючи рівняння (\*\*\*) та (\*\*\*) на ЕМП, що створюються довільно упорядкованими рухами заряджених частинок, приходимо до такого висновку.

Рівняння (\*\*\*) та (\*\*\*) не тільки пояснюють фізичний механізм породження векторів поля  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  ЕМП, яке пов'язано з довільними переміщеннями в просторі ЗЧ, але дозволяють знайти й самі вектори  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  за відомими похідними  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  і  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

Д. Індукція МП, що створюється лінійним провідником з постійним струмом (ППС) (кінцевої, або нескінченної довжини) у довільній точці простору поза межами ППС знаходиться, як відомо:

- 1) з допомогою закону Біо-Савара та принципу суперпозиції;
- 2) шляхом розв'язання рівняння Лапласа  $\nabla^2 \vec{A} = 0$ , де  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ,  $\vec{A}(x, y, z)$  – векторний потенціал;
- 3) або використовуючи рівняння (\*\*\*) [102; 140].

Порівняємо спосіб розв'язання цієї задачі Д.3) зі способами Д.1) і Д.2). Оскільки розв'язання способами Д.1) і Д.2) описано в стандартних посібниках з електродинаміки, на ньому зупиняться не будемо.

Опис попередньої задачі (п. 2.6) показав, що при русі ЗЧ у кожній точці простору створюється МП, яке (згідно з принципом близькодії) породжується змінним у часі електричним полем (тобто, струмами змі-

щення,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ) у цій самій точці простору.

Тому й магнітне поле ППС повинне породжуватися тільки струмами зміщення.

Тобто виходячи з концепції струмів зміщення, і вважаючи, що в довільній точці простору поза межами ППС  $\text{rot}\vec{H} \neq 0$ , ми одержали той же результат, що й при традиційному описі цієї задачі. Але в традиційному описі  $\text{rot}\vec{H} = 0!!!$

Тобто традиційні описи в принципі не можуть пояснити механізм і природу явищ, але вони дають описи, які підтверджуються дослідами та досвідом, мовою величин, що експериментально безпосередньо вимірюються: сили струмів, напруги, активні опори.

І тому в значній кількості фізиків, які мають справу з таким приладами та задачами, що формулюються в термінах виключно феноменологічних, електротехнічних величин, складається враження, що фізика суто експериментально-дослідна наука.

І в цьому випадку (як і в інших, розглянутих вище, наприклад протікання струму через конденсатор чи розрядка його зарядка, магнітне поле породжується струмами зміщення) ми знову бачимо, що тільки теорія може сказати, що ж вимірюється чи спостерігається на досліді.

«Забобон, який зберігся й до цих пір, полягає в переконанні, ніби факти самі по собі, без вільної теоретичної побудови, можуть і повинні привести до наукового пізнання. Такий самообман можливий тільки тому, що нелегко усвідомити, що й ті поняття, які завдяки перевірці та тривалому вживанню здаються безпосередньо пов'язаними з емпіричним матеріалом, насправді вільно вибрані» [258, с. 276].

Як бачимо, фізичною причиною виникнення МП в околі ППС є тільки струм зміщення.

Між еквівалентними описами взагалі й між еквівалентними описами розглянутих прикладів, як бачимо, існують глибокі відмінності в онтологічному плані, тобто в наших уявленнях про об'єктивну фізичну реальність. Тобто, як ми представляємо фізику цих явищ в рамках кожного еквівалентного опису. «Зміна мови наукової теорії на відміну від перекладу тексту з однієї природної мови іншою відбивається на баченні істотних аспектів структури об'єктивного світу» [249, с. 47].

Закон Біо-Савара зручний і начебто зрозумілий, бо оперує величиною (сила струму), що легко визначається на досліді. Але не ця величина є первинною та істиною причиною виникнення магнітного поля.

Не струм переносу  $I_{\text{пер}} = \frac{dq}{dt}$  породжує МП. Формальна за суттю величина  $\frac{dq}{dt}$  ніякого відношення до механізму виникнення МП не має.

$\frac{dq}{dt} = v\tau$  – це величина заряду, який у дану мить перетинає деяку пове-

рхню. А МП індукується змінними в часі полями  $\vec{D}(t)$  усіх зарядів, що реалізують елемент струму чи відрізок провідника зі струмом [130].

Тому вивчення законів МП на основі дальнодіючих, інтегральних законів Біо-Савара, Ампера-Грассмана, теореми про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  можна назвати електротехнічним рівнем, але не фізичним. Можна навіть сказати, що опис властивостей МП постійних та квазістаціонарних струмів на основі цих дальнодіючих законів і рівнянь

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}, \quad \nabla^2\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j},$$

носить «кінематичний» характер, оскільки абсолютно не пояснює природи МП, фізичних причин виникнення МП, механізмів його породження та поширення.

Можливо через те, що homo sapiens, як пізнаючий суб'єкт, макроскопічний, результат пізнання в будь-якій області знань на початковому етапі цього процесу не може не бути сформульованим у вигляді інтегральних законів. Тому історично так склалося, що закони фізики спочатку записувалися в термінах величин, які безпосередньо вимірювалися та контролювалися в дослідах.

Що дає наш опис цих задач?

1. Пояснює механізм виникнення (породження) електричного та магнітного полів.

2. Формує правильне розуміння співвідношення теоретичного та експериментального методів у пізнанні фізичних явищ.

3. У процесі вивчення фізики при послідовній аргументації формує в студентів адекватний реальності фізичний світогляд.

Звичайно, можна говорити, що кожен з описів у рамках окремої задачі доповнює один одного. Але природно поставити питання: який з описів відповідає реальності.

А чи слід в методиці використовувати начебто очевидні, спрощені (але не завжди адекватні реальності) пояснення з метою чи то зрозумілішого пояснення, чи то кращого запам'ятовування формул з посиленням на антропоморфну очевидність явища.

Очевидно, що такий підхід формує збочені уявлення про фізичну реальність.

Крім того, «електротехнічний рівень» опису формує неправильні уявлення про співвідношення теоретичного та емпіричного пізнання у фізиці й зокрема в електродинаміці.

Таким чином, вивчення властивостей МП постійних і квазістаціонарних струмів слід починати з детального вивчення ЕМП РЗЧ, обґрунтування та пояснення законів (2.19), (2.26), (\*\*), (\*\*\*)).



Далі необхідно детально пояснити фізичний механізм виникнення МП рухомою ЗЧ, постійним струмом.

Показано, що використання моделі рухомої ЗЧ, що має постійну швидкість, і принципу відносності приводить більш послідовно та несуперечливо до обґрунтування фундаментальних рівнянь (\*\*), (\*\*\*) , ніж у традиційному описі.

Хоч загальний принцип «немає логічного шляху від експериментального факту до теоретичного принципу» правильно відображає методологію наукового пізнання, усе ж в дидактиці фізики слід обґрунтувати фундаментальні рівняння.

Показано що одержані на цьому шляху результати можуть бути подані в інтегральній формі як дальнодіючі закони. Тобто показана еквівалентність традиційного «електротехнічного» опису та нашого, основаного на фундаментальних фізичних принципах (уявленнях про близькодію, принцип відносності, закон Кулона).

Методика вивчення електромагнетизму, яка основана на принципі дальності, суперечить самому духу сучасної фізики та польовим теоріям. Така методика не сумісна з фундаментальними принципами фізики.

Тому обґрунтування і опис магнітної взаємодії з допомогою формул і законів, основаних на дальності є неадекватним і фізично помилковим (хоча такий опис і дає кінцевий результат, що відповідає фізичній реальності в наближенні  $v \ll c$ ).

Щоб у межах нашої методичної системи обґрунтувати рівняння Максвелла, як основу електродинаміки, необхідно, як уже відзначалося раніше, **спиратися на фундаментальний закон Кулона, закон збереження заряду та принцип відносності.**

У рамках же традиційної методики, крім названих законів, потрібні ще «фундаментальні» закони Біо-Савара, закон електромагнітної індукції, закон Ампера-Грассмана.

«З двох теорій, що пояснюють сукупність достовірних дослідних фактів у деякій області, перевагу слід віддати тій, яка вимагає менше незалежних припущень» [259, с. 690].

Наш підхід не тільки пояснює та обґрунтовує положення, які недоступні традиційній методиці, але й відповідає сучасній фізичній парадигмі.

**«...то це означає, що ми намагаємося знайти систему ідей, яка дозволила б нам по можливості просто пов'язати воєдино факти, що спостерігалися. Але така простота зовсім не означає, що засвоєння саме цієї системи надасть студентіві найменше клопоту. Ми маємо на увазі лише те, що система містить найменше можливе число незалежних постулатів або аксіом, бо зміст цих логічно незалежних аксіом і є тим залишком, який не пізнаваний» [258, с. 171].**

## **Висновки до розділу 2**

**1. Послідовний аналіз моделі, зображеної на рис. 2.6, з допомогою принципів спеціальної теорії відносності, дозволив обґрунтувати із перших принципів:**

- **формули для сили Лорентца (2.24) і (2.25);**
- **формули для сили Ампера (2.27);**
- **вираз для магнітного поля, яке пов'язане з рівномірним рухом ЗЧ (2.26);**
- **закон Біо-Савара в релятивістській формі (2.28).**

**Це також означає, що формули (2.24), (2.27), та класичний закон Біо-Савара (2.29) не можуть називатися фундаментальними, оскільки власне кажучи, у такій технології навчання, вони й не є такими.**

2. Уважається загальноприйнятим, що фундаментальним принципом чи законом є таке положення, яке одержане безпосередньо з досліду або є узагальнення його й не може бути наслідком інших принципів чи законів.

У рамках досліджуваної наукової-методичної і методологічної концепції вивчення електродинаміки закони Біо-Савара-Лапласа, Ампера-Грассмана, електромагнітної індукції, формула Ампера (вираз для сили Лорентца), які в сучасній фізиці та традиційній схемі навчання електродинаміки розглядаються як незалежні, тобто фундаментальні, утрачають статус фундаментальних.

Фундаментальними в цьому випадку залишаються тільки принцип відносності, закон Кулона та закон збереження заряду.

Тобто вся електродинаміка може бути побудована на послідовно релятивістських засадах і навколо поняття електромагнітного поля, визнаючи систему рівнянь Максвелла як істину, що підтверджується експериментально та в якій чітко просліджується взаємозв'язок класичного й релятивістського.

Електродинаміка за своєю суттю набуває рис послідовної релятивістськи-коваріантної теорії, побудованої гіпотетико-дедуктивний шляхом і підтвердженої експериментально.

**Можна сказати навіть так. Якби на початку XIX століття фізиками був усвідомлений принцип відносності (а він проявлявся в дослідах, дослід Фізо, аберація світла, хоча ці досліді пояснювалися в той час зовсім по-іншому), то всі експериментальні закони, які зараз називаються фундаментальними, могли бути передбаченні чи доведенні теоретично.**

А далі стандартними методами можемо одержати й пояснити всі закони та формули теми «Магнітне поле постійних струмів».

3. Показано, що в одній і тій же просторово-часовій точці напруженість електричного та індукція магнітного поля ЕМП, яке пов'язане з рухом ЗЧ, взаємозумовлені та зв'язані співвідношенням:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, E_1] = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{V}, \vec{E}_1].$$

Узагальнюючи останній вираз можна стверджувати, що будь-яке електричне поле, яке «переміщується» зі швидкістю  $\vec{V}$ , породжує в тій самій просторово-часовій точці магнітне поле величина та напрямок якого визначаються формулою:

$$\vec{B} = \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E} \right].$$

Аналізуючи більш детально цю модель, можна обґрунтувати й формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї СВ до іншої (**Розділ 4**).

4. Оскільки взаємодія двох струмів є деякий сумарний ефект взаємодії двох процесій рухомих заряджених частинок, то будь-який дослід по демонстрації взаємодії двох струмів слід розглядати як пряме підтвердження принципів СТВ і непряме підтвердження лорентцевого скорочення, релятивістських формул додавання швидкостей, «сповільнення ходу годинників».

Такий висновок надає широкі можливості для методичних новацій при вивченні теорії відносності та електродинаміки як у СНЗ, так і в ВНЗ і безперечно буде сприяти більш глибокому розумінню основ цих наук.

5. У рамках методичної концепції вивчення електродинаміки, запропонованої нами, закон Біо-Савара в релятивістській формі є наслідком закону Кулона та принципу відносності.

Тому, як ми вважаємо, при вивченні та поясненні закону Біо-Савара не варто наголошувати на його експериментальній основі, посиляючись на досліди Біо та Савара, які начебто привели до формулювання (2.29).

У дидактиці фізики слід еволюціонувати від емпіризму до широких теоретичних узагальнень з використанням фундаментальних фізичних теорій.

Тобто базуючись на принципах дидактики вважаємо, що коли в науці зроблений крок до більш глибокого розуміння фізичних явищ, то при вивченні й поясненні цих фізичних явищ у ВНЗ чи СНЗ слід відображати цей більш високий рівень розуміння та адекватної інтерпретації.

«...надмірне дотримання історії відкриттів, відмова від належного теоретичного аналізу й відсутність загальної методології привели до того, що сьогодні цей курс по суті розпався на сукупність окремих спецкурсів, мало зв'язаних один з одним. Йдеться не лише про необхідність збільшення обсягу курсу фізики. Потрібна його якісна перебудова, яка забезпечувала б відповідність фізики як навчальної дисципліни сьогоднішній логіці й структурі фізики як науки» [38, с. 7].

Нами ще раніше наголошувалося, що «структура вивчення електродинаміки не відповідає суті і методології цього розділу фізики як наукової галузі» [125, с. 101, 102].

6. Обґрунтування закону (2.28) більш раціонально та відповідно до змісту електродинаміки як релятивістської теорії слід робити, спираючись на послідовний релятивістський аналіз взаємодії двох рухомих заряджених частинок [129].

Але для цього необхідно детально пояснити студентам властивості електромагнітного поля рухомої ЗЧ. Закон (2.28) зумовлений вимогами СТВ, але ми поки що ще нічого не можемо сказати про механізм породження МП, яким чином виникає МП унаслідок руху ЗЧ.

Тільки при аналізі ЕМП рухомої ЗЧ приходимо до фундаментальних рівнянь  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  та  $rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ .

Тобто на основі ПВ та закону Кулона можна запропонувати пояснення механізму породження МП в просторі навколо ППС (див. п. 2.6).

7. Далі слід показати на конкретних прикладах застосування закону (2.28). Розглянути граничний випадок  $\beta \ll 1$  і проілюструвати принцип відповідності.

8. Такий методичний підхід з точки зору ортодоксального вивчення електродинаміки може здатися інколи обтяжливим. Але таким чином нам вдається реалізувати не тільки методичну систему навчання електродинаміки на засадах генералізації знань навколо принципу відносності та поняття ЕМП, а й принцип фундаменталізації фізичної освіти в межах однієї навчальної дисципліни: електродинаміки.

«Тому перед ученими й педагогами сьогодні стоїть кардинальне завдання – виявити цілісність кожної з фундаментальних наук, а потім виявляти цілісність усього природознавства» [38, с. 5].

Однак, слід зауважити, що подібне завдання, з нашої точки зору, ніколи не може бути розв'язаним до кінця, бо процес пізнання нескінченний. І тому в будь-який момент розвитку цивілізації про кожну з фундаментальних наук не можна сказати, що вона досягла завершеності та кінцевої досконалості.

Але в рамках довільного часового проміжку в історії цивілізації можна створити цілісне уявлення, виявити цілісність кожної з фундаментальних фізичних дисциплін.

9. Показано, що закон Біо-Савара в релятивістській формі дає коректний опис фізичних явищ, у той час як застосування класичного закону Біо-Савара не дає релятивістськи інваріантного опису цих явищ. У всякому разі це вірно для прямолінійного й рівномірного руху носіїв заряду.

10. Оскільки класична електродинаміка є лорентцковаріантною теорією, то з усього вище сказаного робимо висновок, що логічніше й у ме-

тодичному відношенні більш цілеспрямовано основи електромагнетизму слід викладати використовуючи послідовно релятивістські ідеї і методи.

11. Створення методичної системи навчання електродинаміки на засадах генералізації знань навколо принципу відносності та поняття електромагнітного поля дозволяє розглядати всі розділи електродинаміки з єдиних позицій, методично поєднаних спільною ідеєю. Це сприятиме отриманню студентами узагальнених знань з електромагнетизму, систематизованих навколо спільного теоретичного ядра, полегшить усвідомлення як окремих законів електродинаміки, так і всього курсу електродинаміки в цілому й сприятиме формуванню у свідомості студентів та учнів наукового стилю мислення та електромагнітної картини світу.

12. Послідовна реалізація цієї методичної системи дозволить проілюструвати використання методів наукового пізнання для одержання фізичних законів, а не просто стверджувати «як показують досліди» для повідомлення готових законів і формул фізики.

13. Проведений методичний аналіз наявних в навчально-методичній літературі шляхів обґрунтування рівняння Максвелла  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ .

14. Детально описаний фізичний механізм породження магнітного поля постійних струмів.

15. Запропонована методична концепція вивчення законів і властивостей магнітного поля постійних струмів в контексті теорії відносності.

16. Проведено моделювання струмів зміщення рівномірно рухомої зарядженої частинки й показано, що всі властивості МП постійних струмів знаходять повний опис в рамках запропонованої методики.

### Розділ 3

## НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ СТАНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТКУ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ІДЕЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ДЕЯКИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ЯВИЩ

### **3.1. Історія відкриття закону електромагнітної індукції та огляд традиційних методик вивчення явища та закону електромагнітної індукції**

Явище електромагнітної індукції відіграє визначну роль у формулюванні та вивченні самих загальних законів електромагнетизму.

Не можна також перебільшити значення цього явища й при використанні його в електротехніці та радіоелектроніці.

Як правило, при вивченні цього явища після його опису та дослідної демонстрації від самого початку формулюється закон ЕМІ [65, с. 226; 178, с. 316; 69, с. 75; 201, с. 106]:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.1)$$

Причому наголошується, що він є експериментальним законом.

Але слід сказати, що це твердження, якщо його розуміти буквально, не відповідає дійсності.

Дійсно, (3.1) не може бути експериментальним законом, оскільки не існують прилади (принцип роботи яких не оснований на (3.1)), які могли б вимірювати магнітний потік  $\Phi$ , або зміну магнітного потоку  $d\Phi$ .

Що ж стверджують історики фізики та як подається еволюція формулювання закону (3.1)?

У навчально-методичній літературі, як правило, узагалі не обговорюється або майже не обговорюється питання, хто і як сформулював (3.1).

У відомому посібнику Матвеева О. М. [178, с. 316] стверджується що закон ЕМІ у формі (3.1) вперше записав Нейман у 1845 році.

Уперше математичну теорію електромагнітної індукції почав розробляти Ф. Нейман в роботах, що датуються 1845–1847 рр.

Ось як відтворюються думки Неймана в книзі П. С. Кудрявцева [149].

При визначенні величини сили індукційного струму, Нейман використовував п'ять гіпотез [149, с. 501–502].

Але дві основні гіпотези такі. Згідно з першою гіпотезою, електрорушійна сила індукції  $d\varphi$ , що виникає в елементі лінійного провідника  $dl$  у результаті його руху відносно контуру з постійним струмом  $i$  або магніту, пропорційна швидкості цього руху  $\vec{v}$ . Ця гіпотеза виходить

з експериментальних даних, отриманих Фарадеєм та іншими. Друга гіпотеза полягає в тому, що електрорушійна сила індукції в провіднику пропорційна проекції на напрям його руху сили  $F_v dl$  ( $F$  – сила на одиницю довжини провідника), яка діє на нього з боку контуру зі струмом або магніту, коли по ньому протікає індукційний струм, рівний одиниці. Ця гіпотеза виникла в Неймана під впливом закону Ленца, який встановлює зв'язок між електромагнітною індукцією та силами, діючими між струмами або струмом і магнітом. Таким чином, Нейман вважає, що

$$d\varphi = -k v F_v dl,$$

де  $k$  – постійний коефіцієнт, який визначається вибором одиниць.

Ураховуючи вираз сили  $F$  (використовуючи закон Ампера або Біо-Савара), можна отримати, що кількість електрики  $dq$ , що протекла через поперечний переріз провідника за час  $dt$  його нескінченно малого переміщення (Нейман називає цю величину диференціальним струмом), дорівнює

$$dq = -\frac{a}{R} d\Phi, \quad (3.2)$$

де  $a$  – константа;  $R$  – опір провідника;  $\Phi$  – функція, що залежить від конфігурації та взаємного розташування провідника й контуру зі струмом або провідника й магніту, а також від величини струму в контурі або магнітної маси.

Якщо тепер визначити поняття «інтегральний струм», тобто кількість електрики, що протікає в провіднику за кінцевий час при кінцевому переміщенні провідника, то воно визначається різницею значень  $\Phi_2$  і  $\Phi_1$ , і отже, залежить тільки від його кінцевого та початкового положення.

Тому Нейман назвав функцію  $\Phi$  потенційною функцією магніту й провідника, або провідника й контуру зі струмом.

Для випадку двох лінійних контурів  $L_1$  і  $L_2$  ( $L_1$  – контур, у якому індукується електрорушійна сила) Нейман показав, що (в сучасних позначеннях)

$$\Phi = a I_2 \oint \oint \frac{(d\vec{l}_1 d\vec{l}_2)}{r},$$

де  $I_2$  – сила струму у другому контурі.

Тоді для цього випадку (3.2) набуває вигляду

$$dq = \frac{a I_2}{R} d \oint \oint \frac{(d\vec{l}_1 d\vec{l}_2)}{r}$$

До формули  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$  можна прийти також за допомогою закону

збереження енергії, як це вперше зробив **Гельмгольц** (1821–1894).

Розглянемо, згідно з Гельмгольцем (див. [216; 60]), замкнутий виток дроту, у який включений гальванічний елемент з електрорушійною силою  $\varepsilon$ . Виток рухається в постійному магнітному полі (взагалі кажучи, неоднорідному). За час  $dt$  амперові сили виконують над витком роботу  $I \cdot d\Phi$ . Крім того, у витку виділяється джоулеве тепло  $RI^2 dt$ . Сума цих величин повинна дорівнювати роботі гальванічного елемента  $\varepsilon \cdot I dt$ , тобто

$$Id\Phi + RI^2 dt = \varepsilon Idt. \quad (3.3)$$

Звідси

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (3.4)$$

Таким чином, у витку, що рухається, струм визначається не тільки електрорушійною силою гальванічного елемента. До неї входить доданок  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Цей доданок і є електрорушійною силою індукції.

Недоліком цього способу обґрунтування закону ЕМІ в інтегральній формі є необхідність доведення виразу для роботи сил Ампера  $dA = I \cdot d\Phi$ . Зазвичай цей вираз виводиться при умові  $I = \text{const}$ , незважаючи на те, що при русі витка в магнітному полі  $I \neq \text{const}$  унаслідок виникнення ЕРС індукції в цьому контурі.

Слід зауважити, що рівнянню збереження енергії (3.3) можна також задовольнити, допустивши, що  $I = 0$ . Яке з двох розв'язків вибрати:  $I = 0$  або розв'язок (3.4), – на це закон збереження енергії не дає ніяких вказівок. Отже, без залучення додаткових міркувань він не дозволяє передбачити явище електромагнітної індукції. Потрібно якось виключити розв'язок  $I = 0$ .

З цією метою, як це зробив Гельмгольц, у виток і включений гальванічний елемент з електрорушійною силою  $\varepsilon$ . Та обставина, що додаткова електрорушійна сила  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , яка з'являється при русі провідника, не

залежить від  $\varepsilon$ , робить правдоподібним висновок, що й за відсутності гальванічного елемента у витку, який рухається, повинна виникнути така ж електрорушійна сила. Можна обійтися й без уведення гальванічного елемента, якщо припустити, що при русі провідника повинен виникати індукційний струм. Тоді закон збереження енергії дозволяє визначити силу цього струму, а отже, й електрорушійну силу індукції. У цьому істинне значення та зміст міркування Гельмгольца [216 с. 266–267].

Очевидно, що Фарадей у принципі не міг закону ЕМІ надати форми (3.1).



Але в деяких книгах, присвячених історії розвитку фізичних ідей (див. наприклад [151]), проводиться думка, що Фарадей майже сформулював закон ЕМІ у формі (3.1). І наводяться такі слова Фарадея:

«118. Усі ці результати доводять, що здатність індукувати струми виявляється по колу навколо магнітної рівнодіючої або силової осі так, як розташований по колу магнетизм виникає навколо електричного струму та ним виявляється» [151, с. 240].

Ці слова Фарадея коментуються П. С. Кудрявцевим таким чином: «Математичною мовою це означає, що «здатність індукувати струми», або індукційна ЕРС  $\varepsilon$  виражається інтегралом по контуру, який охоплює магнітний потік  $\Phi$ . Відповідно до результатів, одержаних згодом Ленцем і Нейманом, вона може бути виражена рівнянням

$$\varepsilon = \oint E_l dl = -k \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{» [151, с. 241].}$$

П. С. Кудрявцев з точки зору сучасних поглядів «вгадує-вбачає» у вище наведених словах Фарадея закон ЕМІ в формі (3.1).

Фактично М. Фарадей і не міг у принципі сформулювати закон ЕМІ в такій формі, оскільки в часи Фарадея поняття і «магнітний потік», і «електрорушійна сила» не мали чітких означень.

Більше того, в [151, с. 241] ми маємо підтвердження, що закон ЕМІ у формі (3.1) відповідає результатам, «одержаним згодом Ленцем і Нейманом».

Коротко окреслимо хід думок Д. К. Максвелла, наскільки це можливо згідно з літературними джерелами, щодо формулювання закону ЕМІ.

Відомо, що точно й адекватно відновити хід думок тієї чи іншої видатної людини минулого надзвичайно важко. Це пов'язано з тим, що до кінця, з урахуванням всіх обставин, практично неможливо зануритися у світ наукових ідей, уявлень, стилів мислення фізиків, наприклад 30–60 років 19 століття.

«Згідно з Фарадеем, провідник, поміщений в магнітне поле, знаходиться в стані, який не виявляє себе, якщо умови стаціонарні, але якщо поле змінюється, то в провіднику виникає електрорушійна сила. “Ця електрорушійна сила, – пише Максвелл, – залежить тільки від зміни числа ліній магнітної індукції, які пронизують контур струму. Напрошується припущення, що подібна сила, яка залежить від зміни числа силових ліній, зумовлена зміною деякого стану, який вимірюється цим числом”» [77, с. 62].

«Для того, щоб пов'язати індукцію з числом силових ліній, Максвелл уводить поняття «електромагнітної кількості руху», яке із сучасної точки зору є не чим іншим, як векторним потенціалом  $\vec{A}$ , а потім, виражаючи індукцію  $\vec{B}$  через вектор-потенціал:  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  і використовуючи

закон Ампера у формі  $rot\vec{H} = 4\pi\vec{j}$ , а також умови збереження енергії, він одержує вираз для ЕРС індукції:  $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ » [77, с. 62].

Потім Максвелл вводить поняття повної електротонічної інтенсивності вздовж замкненої кривої

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S rot\vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi, \quad (3.5)$$

з допомогою якої формулюється закон ЕМІ.

«Електрорушійна сила (індукції), що діє на елемент провідника, вимірюється похідною за часом від електротонічної інтенсивності, незалежно від того, чи зумовлена ця похідна зміною величини або напрямом електротонічного стану» [150, с. 138].

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L \left( -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_L \vec{A}d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (3.6)$$

«Відносно історії запропонованої теорії я вкажу, що використані вище математичні функції для виразу фарадеївського електротонічного стану та для визначення електродинамічних потенціалів і електрорушійних сил, наскільки мені відомо, абсолютно нові» [150, с. 139].

**Таким чином, можна стверджувати, що найбільш чітко й «абсолютно по-новому» теорію явища ЕМІ дав Максвелл.**

При цьому, якщо врахувати подання самим Максвеллом теорії електромагнітного поля [165; 175], у якому взагалі відсутній закон ЕМІ

у формі  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ , але наведений локальний вираз для напруженості електричного поля, який враховує й індуковане поле (два типи ефектів ЕМІ:  $[\vec{V}, \vec{B}]$  та  $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ), і поле заряджених частинок,  $\nabla\varphi$ :

$$\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}] - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad (3.7)$$

**то питання про подвійну природу ЕРС індукції (на якому в сучасних навчальних посібниках весь час наголошується), як виявляється, було поставлене й вирішене Максвеллом [165; 175].**

*Огляд традиційних методик вивчення явища та закону електромагнітної індукції.* При вивченні явища ЕМІ акцентують увагу на двох типах ефектів ЕМІ [64; 65, с. 230; 233, с. 52–53; 235, с. 537–538; 20].

Перший з них полягає в «наведенні вихрового електричного поля

$\vec{E}(\vec{r}, t)$  змінним магнітним полем  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ :  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ , або

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \gg [235, \text{с. 537}].$$

А другий тип ефектів ЕМІ «пов'язаний з рухом матеріального середовища (провідників, діелектриків, твердих тіл, рідин, газів, плазми) в стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r})$ » [235, с. 538].

Тобто в посібниках наголошується, що в основі явища ЕМІ лежать дві, різні за своєю природою, фізичні причини виникнення ЕРС індукції:

1) наведення вихрового електричного поля змінним у часі магнітним полем;

2) дія сили Лорентца на ЗЧ, що входять до складу матеріального середовища (зокрема, провідників замкненого кола), яке рухається в полі  $\vec{B}(\vec{r})$ ,  $\varepsilon_i = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}$ .

Тоді закон ЕМІ з урахуванням цих двох причин виникнення ЕРС індукції можна записати у формі [65, с. 231]

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}. \quad (3.8)$$

При обґрунтуванні закону ЕМІ та аналізі фізичних причин, які приводять до появи індукційного поля, використовуються наступні **методичні підходи**.

**А.** У переважній більшості навчальних посібників закон (3.1) виводиться як результат аналізу уявної експериментальної ситуації (рис. 3.1) та виходячи з виразу для сили Лорентца як сторонньої сили [200, с. 220; 233, с. 51; 36, с. 12; 1; 69; 29; 61, с. 261; 153, с. 348; 152, с. 276–278; 209, с. 176].

А потім наводяться аргументи того, що ЕРС індукції визначається формулою (3.1) й у випадку змінного магнітного поля при нерухомому контуру.

Через усвідомлення того, що такий спосіб обґрунтування закону ЕМІ є надто простим, позбавленим узагальнюючих рис і до того ж спирається на ідеалізовані ситуації (однорідне магнітне поле в межах замкненого дрогового контуру, відрізок провідника рухається з постійною швидкістю), у ряді посібників з електродинаміки для вищої школи про-

понуються способи обґрунтування (3.1) на основі знаходження  $\frac{d\Phi}{dt}$  через поверхню різної форми, яка рухається в довільному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  [6530, с. 254; 200, с. 226; 229, с. 37–38; 199, с. 162–163; 230, с. 301–302], (детальніше див. п. 3.2).

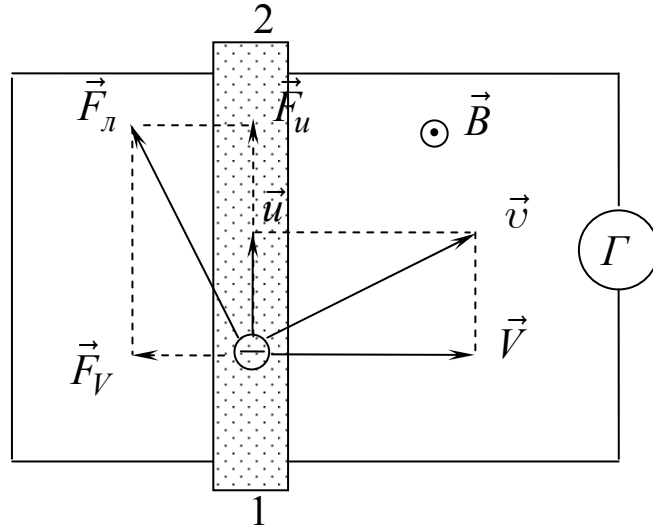


Рис. 3.1. До обґрунтування «правила потоку»

Причому в посібниках [64; 200, с. 226; 65; 229; 230] в основу виводу (3.1) з допомогою знаходження  $\frac{d\Phi}{dt}$  через рухому поверхню **уже закладений вираз для сили Лорентца**, і вважається, що магнітне поле стаціонарне, але неоднорідне. А в посібниках [200; 229; 230] при цьому взагалі властивості  $\vec{B}$  не уточнюються.

**Б.** Відразу формулюється закон у формі (3.1), а потім аналізуються фізичні причини, які приводять до виникнення індукційного струму (індукційного електричного поля) [65, с. 226; 178, с. 316; 64].

**В.** «Правило потоку» (3.1) виводиться способом Гельмгольца [216, с. 266], [61, с. 251–254], а потім, знову таки ж, обговорюються фізичні причини виникнення індукційного поля та відповідні узагальнення щодо максвеллівського трактування ЕРС індукції [216, с. 273].

Простежимо тепер способи обґрунтування в навчально-методичній літературі локальної форми закону ЕМІ.

**1.** За основу береться «правило потоку» (3.1), а потім з використанням теореми Стокса та означення ЕРС записується послідовність формул:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt};$$

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (3.9)$$

А далі читаємо дивні речі – «Перехід до частинної похідної в правій частині виражає ту обставину, що мова іде про зміну вектора  $\vec{B}$  у визначеній точці простору» [201, с. 107].

І тоді маємо

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

По суті, аналогічні міркування наводяться в посібнику [216, с. 271], але правило потоку записується у вигляді

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

і відзначається, що контур при цьому нерухомий.

У той же час у фізичній енциклопедії [235] стверджується, що співвідношення

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ або } \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (3.10)$$

«універсально застосовні, як до вільного простору (електродинамічного вакууму), так і до довільних середовищ і систем (нерухомих і рухомих)» [235, с. 537] (виділено мною).

До речі, формула (6) в фізичній енциклопедії [235, с. 537]

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \left( \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right) \cdot d\vec{l},$$

яка повинна об'єднувати, за задумами авторів цієї статті в [235], ЕРС зумовлену як силою Лорентца, так і змінним магнітним полем, **неадекватна думкам і задумам авторів**. Очевидно, слід було записати формулу (3.8).

Аналогічна непослідовність в обґрунтуванні  $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  про-  
сліджується й у посібнику [69, с. 75].

Тобто висновок у фізичній енциклопедії **суперечить** поясненню цих питань у посібнику Д. В. Сивухіна.

Автори посібників [152; 153] локальну форму закону ЕМІ одержують в результаті низки таких очевидних перетворень

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}; \int_S \operatorname{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Але потім ми читаємо дивний перехід: «Загалом  $\vec{B}$  є функцією координат і часу. Тому зміну за часом  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  правильніше буде записати як

частинну похідну  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ . Тоді  $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ » [152, с. 279; 153, с. 350].

У посібнику Парселла [200] закон  $rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$  з «правила потоку» виводиться абсолютно подібно до того як це робиться в [152; 153]. А потім знову легковажний перехід.

«Оскільки  $\vec{B}$  може залежати від положення й від часу, ми напишемо  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  замість  $\frac{d\vec{B}}{dt}$ . Тоді ми одержимо два абсолютно еквівалентних форму-

лювання закону індукції:  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  та  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ »

[200, с. 233].

**Тобто залишається незрозумілим перехід від повної похідної за часом до частинної похідної та навпаки.**

Таким чином, ми можемо сказати, що в цитованих вище посібниках демонструється нерозуміння різниці між повною похідною за часом і частинною похідною за часом.

**2.** Використовуючи функцію Лагранжа ЗЧ в ЕМП та рівняння руху ЗЧ в ЕМП у формі рівнянь Лагранжа [155, с. 93] (див. також п. 1.2.2),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q \cdot grad\varphi + q[\vec{v}, rot\vec{A}], \quad (3.11)$$

приходимо до висновку, що з допомогою електромагнітних потенціалів напруженість електричного поля та індукція магнітного поля, відповідно, визначаються

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\varphi; \quad \vec{B} = rot\vec{A}.$$

Тоді вихор вектора напруженості електричного поля дорівнює

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{A} - rotgrad\varphi.$$

Оскільки ротор усякого градієнта дорівнює нулю, то одержуємо закон ЕМІ в локальній формі

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

**3.** У навчальному посібнику [186] взагалі не обговорюється походження та обґрунтування рівнянь Максвелла (у тому числі й закон ЕМІ в локальній формі), а самі РМ подаються як аксіоми чи постулати.

«Зараз випишемо рівняння без обговорення їх походження та історії відкриття, тобто в готовому вигляді» [186, с. 19].

### 3.2. Явище електромагнітної індукції в рухомих електричних колах

Тепер перейдемо до огляду способів обґрунтування (3.1) у випадку руху дротового контуру в зовнішньому магнітному полі.

Розглянемо явище ЕМІ в пласкій рамці, що рухається рівномірно [95; 200, с. 224].

Припустимо, що прямокутна рамка рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  в неоднорідному магнітному полі, силові лінії якого перпендикулярні площині рамки (рис. 3.2).

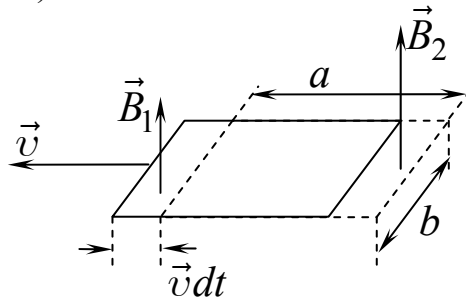


Рис. 3.2. До знаходження ЕРС у пласкій рамці, яка рухається з постійною швидкістю

Тоді, згідно з ФПКЕМП (див. **Розділ 4**), у СВ  $K'$ , пов'язаній з рамкою, виникає індукційне електричне поле  $\vec{E}' = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}]$ . А в СВ  $K$ , відносно якої рамка рухається, у двох сторонах рамки, довжина яких  $b$ , виникне індукційне електричне поле  $\vec{E}_1 = [\vec{v}, \vec{B}_1]$  та  $\vec{E}_2 = [\vec{v}, \vec{B}_2]$  (див. наприклад [126; 127; 100]). Тому величина ЕРС в рамці дорівнює

$$\varepsilon = b(E_2 - E_1) = bv(B_2 - B_1). \quad (3.12)$$

Формулу (3.12) можна подати у вигляді «правила потоку».

Дійсно, при русі рамки вліво, за проміжок часу  $dt$  (рис. 3.2), рамка зміститься на віддаль  $\vec{v}dt$ . Потік вектора  $\vec{B}$  в лівій частині рамки зростає на  $B_1 \cdot b \cdot vdt$ , у правій частині рамки зменшиться на  $B_2 \cdot b \cdot vdt$ . Якщо відомий розподіл магнітного поля в просторі, тобто  $B(x)$ , для зміни магнітного потоку через площу рамки одержуємо

$$d\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = B_1 \cdot b \cdot vdt - B_2 \cdot b \cdot vdt = b \cdot vdt(B_1 - B_2),$$

але  $B_2 - B_1 = -\Delta B = -\frac{\partial B}{\partial x} \Delta x \approx -\frac{\partial B}{\partial x} \cdot a$ , якщо  $a$  достатньо маленька величина.

Тому

$$\varepsilon = b \cdot v(B_2 - B_1) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{b \cdot vdt(B_1 - B_2)}{dt}.$$

По суті це один з різновидів методичного підходу **A** (п. 3.1).

Тепер проаналізуємо обґрунтування (3.1) розглядаючи рух зі швидкістю  $\vec{v}$  довільного контуру  $L$  в неоднорідному, але стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}$  (рис. 3.3).

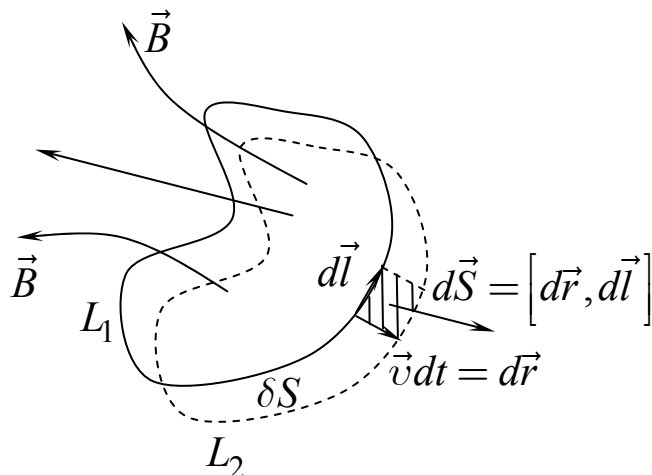


Рис. 3.3. Знаходження ЕРС в контурі  $L$ , який рухається в неоднорідному, але стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r})$

Тоді в межах кожного нескінченно малого елемента цього контуру  $d\vec{l}$  виникає електричне поле  $\vec{E}'$ . Напруженість цього поля в системі відліку, яка пов'язана з цим елементом контуру, згідно з (4.5) (див. також **Розділ 4, Приклад 4.10**), дорівнює

$$\vec{E}' = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}].$$

Але з точки зору СВ  $K$  напруженість цього поля, як уже відзначалося, дорівнює  $\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}]$ , що сприймається та інтерпретується як поле сили Лорентца. Іншими словами, у межах кожного  $d\vec{l}$  з'являється нескінченно мала ЕРС  $[\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}$ .

Тоді сумарна ЕРС у контурі, очевидно, дорівнює

$$\varepsilon_i = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}, \quad (3.12a)$$

де за змістом величин, які входять у (3.12a),  $\vec{B}(\vec{r})$  – значення індукції магнітного поля в тій точці контуру  $L$ , яка в дану мить має швидкість  $\vec{v}$ .

Нехай за час  $dt$  контур змістився з положення  $L_1$  в положення  $L_2$ . Якщо припустити, що в першому положенні магнітний потік через поверхню  $S_1$ , що обмежена контуром  $L_1$ , дорівнює  $\Phi_1$ , то в другому по-



ложенні магнітний потік через поверхню, яка спирається на контур  $L_2$  буде рівним  $\Phi_1 + \delta\Phi$ , де  $\delta\Phi$  – збільшення магнітного потоку через вузьку смужку  $\delta S$ , яка обмежується контурами  $L_1$  і  $L_2$ , рис. 3.3.

Користуючись властивостями змішаного добутку векторів,

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}, \vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]\vec{c}$$

підінтегральний вираз (3.12а) можна записати таким чином:

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B} \right] \cdot d\vec{l} = -\vec{B} \cdot \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{l} \right],$$

але  $[d\vec{r}, d\vec{l}] = d\vec{S}$  – елементарна площадка смужки  $\delta S$ , утвореної пере-

міщенням контуру на  $d\vec{r}$ , тому  $-\vec{B} \cdot \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{l} \right] = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot d\vec{S})$ .

І (3.12а) набуває вигляду

$$\varepsilon_i = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l} = -\oint_L \vec{B} \cdot \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{l} \right] = -\frac{d}{dt} \int_{S_0} \vec{B} \cdot [d\vec{r}, d\vec{l}] = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.12б)$$

де  $d\Phi = \int_{S_0} \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{B} [d\vec{r}, d\vec{l}] = -\oint_L [d\vec{r}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}$  – приріст, зміна по-

току магнітного поля, яка зумовлена нескінченно малим переміщенням контуру з положення  $L_1$  в положення  $L_2$ .

Тобто сумарна ЕРС у контурі визначається повною похідною за часом від магнітного потоку через будь-яку поверхню, яка спирається на контур  $L$ .

Подібне обґрунтування наведене в [65, с. 254; 230, с. 302].

### **3.3. Зміна в часі потоку довільного векторного поля через рухому поверхню та субстанціональна похідна за часом векторного поля**

*Зміна в часі потоку векторного поля через рухому поверхню.* Навіть поверховий огляд навчально-методичної літератури з методів математичної фізики показує [148; 197; 198; 191], що при вивченні векторного аналізу на фізико-математичних факультетах педагогічних університетів взагалі не розглядається питання про знаходження потоку векторного поля через рухому поверхню.

І тільки в деяких посібниках з електродинаміки у зв'язку з аналізом явища електромагнітної індукції в рухомих провідниках [156; 199;

182] та обґрунтуванням рівнянь Максвелла в рухомих тілах [199; 174; 4; 182] ми знаходимо обговорення цього питання.

Але способи знаходження похідної за часом потоку векторного поля через рухоми поверхню, які описанні в [156; 199; 174; 182; 4] (див. також [100]) супроводжує низка непослідовностей (вибір нормалей до поверхонь та зв'язок цих нормалей з напрямком обходу контурів, на які спираються ці поверхні [199, с. 162]).

Ці способи характеризуються методично не виваженими, а інколи й неясними та суперечливими формулюваннями [182, с. 8] і застосовністю одержаних співвідношень тільки для окремих випадків.

Дійсно, у способах обґрунтування (3.1), наведених в [65; 230] нічого не стверджується відносно стану руху поверхні, натягнутої на контур.

Чи вона не змінює свою форму, чи окремі частини її рухаються з різними швидкостями, але так, що вона залишається нерозривною й весь час спирається на цей контур?

Звичайно, урахувуючи властивості МП, ми можемо сказати, що як би не рухалися елементи поверхні натягнутої на  $L$ , потік вектора  $\vec{B}(\vec{r})$  у дану мить через дві, наприклад  $S_1$  та  $S_2$ , довільної форми поверхні, які спираються на один і той же контур, залишається незмінним за величиною, рис. 3.4.

Але для будь-якого іншого вектора цей висновок, взагалі кажучи, несправедливий.

Тому й знаходження швидкості зміни потоку довільного векторного поля за часом через рухоми поверхню повинне ґрунтуватися на більш загальних підходах, ніж це зроблено в [64; 182; 199; 174; 230].

Крім того, слід враховувати не тільки неоднорідність поля, але і його нестационарність.

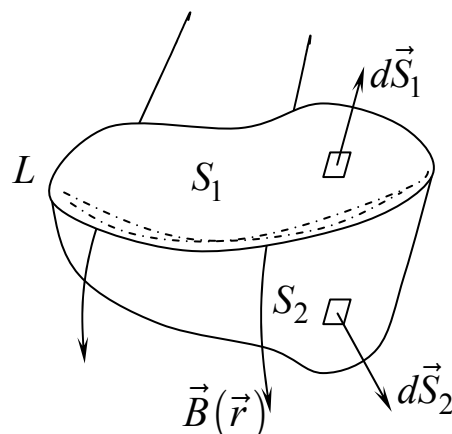


Рис. 3.4. Потоки вектора  $\vec{B}(\vec{r})$  через поверхні  $S_1$  та  $S_2$

$$\text{однакові за величиною: } \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}$$

По-друге, у посібнику [199, с. 162] в другому інтегралі правої частини формули (9.10) (див. також формулу (4.53) п. 4.1.3 посібника [100]) недостатньо обґрунтований знак мінус (доданок  $\oint \vec{B}_t \cdot [\vec{v} dt, d\vec{l}]$ ).

Далі, права частина (9.16) [199, с. 163] (див. також формулу (4.58) п. 4.1.3 посібника [100]) нагадує вираз для повної похідної за часом вектора  $\vec{B}$  при умові, що  $\vec{v} = \text{const}$ . Але ліва частина описує вихор напруженості електричного поля в СВ  $K'$  ?!

Згідно з посібником [100], рівняння (4.58), за задумами авторів [199], записане в супутній СВ (СВ  $K'$ ). А похідні (4.51) та (4.56) ми шукали й знайшли в СВ  $K$ . У той же час в [182, с. 8–10] вираз (4.47), як і подібний йому (4.55) слід вважати справедливим в СВ  $K$ .

Іншими словами, протиріччя, які зустрічаються в ряді посібників при обґрунтуванні похідної за часом потоку векторного поля через рухому поверхню, пов'язані з тим, до якої СВ слід відносити вираз для повної похідної за часом будь-якого векторного поля.

У посібниках [199, с. 163; 4, с. 254, с. 256, с. 349, с. 408] вважається, що похідні, подібні до формули

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left[ \nabla, [\vec{B}, \vec{v}] \right] + (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{v},$$

мають місце для векторного поля в супутній системі відліку.

А в [182, с. 8–10; 224, с. 152, с. 547; 11, с. 169; 252, с. 201] вважається, що формула  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$  визначає повну похідну векторного поля  $B(\vec{r}, t)$  у лабораторній СВ (СВ  $K$ ).

Тому послідовне, основане на прозорих вихідних засадах, обґрунтування формули для похідної за часом потоку довільного векторного поля через рухому поверхню є актуальним.

Нижче пропонується спосіб обґрунтування формули похідної за часом потоку векторного поля через рухому поверхню, який використовує позитивні аспекти способів, описаних в [182; 4; 199; 174] (див. також п. 4.1.3 посібника [100]).

Розглянемо взаємозв'язані поверхню  $S$  і контур  $L$ , які рухаються зі швидкістю  $\vec{v}$  в довільному векторному полі  $\vec{a}$ .

Знайдемо повну швидкість зміни за часом потоку довільного векторного поля  $\vec{a}$  через дану рухому поверхню  $S$ .

Нехай поверхня  $S$ , що обмежена контуром  $L$  (рис. 3.5) у момент  $t$  знаходиться в положенні  $S_1$ , а в момент  $t + dt$  – в положенні  $S_2$ .

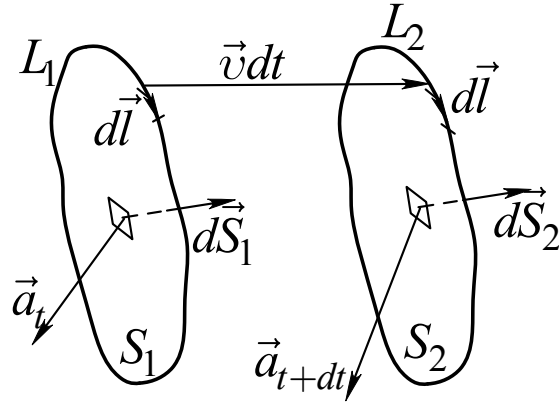


Рис. 3.5. Поверхня  $S$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  у векторному полі  $\vec{a}(\vec{r}, t)$

Тоді, згідно з означенням, для зміни в часі потоку векторного поля через рухоми поверхню,  $\frac{d\Phi}{dt}$ , можемо записати:

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \right)}{\Delta t}, \quad (3.13)$$

де  $\Phi = \int_S \vec{a} d\vec{S}$  – потік вектора  $\vec{a}$  через поверхню  $S$ ,  $\Delta \left( \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \right)$  – приріст потоку  $\Phi$  через поверхню  $S$  при зміні її положення від початкового  $S_1$  до  $S_2$ .

Будемо вважати, що векторне поле в загальному випадку, являється неоднорідним і нестационарним,  $\vec{a}(\vec{r}, t)$ .

Розглянемо приріст функції  $\int_S \vec{a} d\vec{S}$ :

$$\Delta \left( \int_S \vec{a} d\vec{S} \right) = \int_{S_2} \vec{a}_{t+dt} d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1, \quad (3.14)$$

де  $\vec{a}_{t+dt}$  – векторне поле в кожній точці поверхні  $S_2$  у момент часу  $t + dt$ ;  $\vec{a}_t$  – векторне поле в кожній точці поверхні  $S_1$  у момент часу  $t$ .

Нехай  $\Delta V$  – об'єм, утворений рухом поверхні  $S$ , від положення  $S_1$  до положення  $S_2$  за час від  $t$  до  $t + dt$  (рис. 3.6).

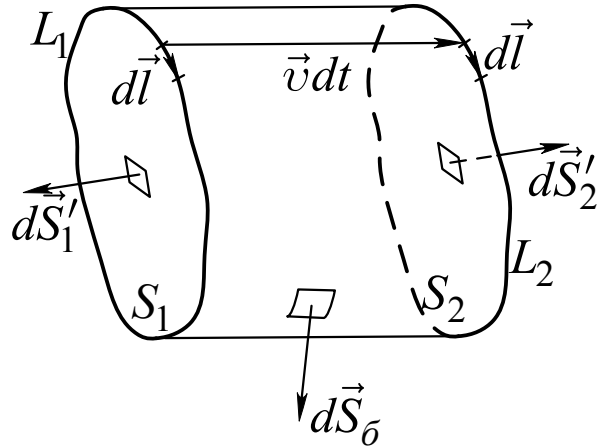


Рис. 3.6. Об'єм  $\Delta V$ , утворений рухом поверхні  $S$  унаслідок її переміщення

Очевидно, що загальна величина замкненої поверхні  $S_{\text{заг}}$ , яка обмежує об'єм  $\Delta V$ , складається з трьох частин: поверхні  $S$  в початковий момент часу ( $S_1$ ), поверхні  $S$  в кінцевому положенні ( $S_2$ ), після того як вона здійснила елементарне переміщення  $\vec{v} dt$ , і «циліндрична» поверхня ( $\Delta S_{\sigma}$ ), утворена контуром  $L$  унаслідок його переміщення на  $d\vec{r} = \vec{v} dt$

$$S_{\text{заг}} = S_1 + S_2 + \Delta S_{\sigma}. \quad (3.15)$$

**Розглянемо цю уявлювану поверхню  $S_{\text{заг}}$  в момент часу  $t$ . Ми говоримо про уявлювану поверхню  $S_{\text{заг}}$ , адже в початковий момент часу існує лише поверхня  $S_1$ .** До цієї поверхні  $S_{\text{заг}}$  застосуємо теорему Гаусса

$$\int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t dV = \oint_{S_{\text{заг}}} \vec{a}_t d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}'_2 + \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}'_1 + \int_{\Delta S_{\sigma}} \vec{a}_t d\vec{S}_{\sigma}. \quad (3.16)$$

Як прийнято, за додатній напрям нормалі обирається напрям зовнішньої нормалі до поверхні, що обмежує об'єм, тому вектори елементарних площинок  $d\vec{S}'_1$ ,  $d\vec{S}'_2$ ,  $d\vec{S}_{\sigma}$  мають напрям, вказаний на рис. 3.6. Порівнюючи напрямки елементарних площинок на рис. 3.5 і на рис. 3.6, можна зробити висновок, що  $d\vec{S}'_1 = -d\vec{S}_1$ , а  $d\vec{S}'_2 = d\vec{S}_2$ . Ураховуючи цей результат, рівняння (3.16) можна переписати у вигляді

$$\int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 = \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t dV - \int_{\Delta S_{\sigma}} \vec{a}_t d\vec{S}_{\sigma}. \quad (3.17)$$

Урахуємо, що елементарна площинка  $d\vec{S}_\delta$  дорівнює  $d\vec{S}_\delta = [d\vec{l}, \vec{v}dt]$ , тоді маємо

$$\int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 = \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t dV - \int_{\Delta S_\delta} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v}dt], \quad (3.18)$$

де  $\vec{v}dt$  – елементарне переміщення елемента контуру  $d\vec{l}$ .

Останній доданок у (3.18) визначає зміну потоку через бічну поверхню при русі контуру  $L$  поверхні  $S$ , елемент якого  $d\vec{l}$ . Підкреслимо ще раз, що потік через поверхні  $S_1$  і  $S_2$  у співвідношенні (3.17) обчислюється у момент часу  $t$ , оскільки теорема Гаусса застосовна лише для миттєвих значень векторного поля  $\vec{a}$ .

Величину вектора  $\vec{a}$  в кожній точці на поверхні  $S_2$  в момент часу  $t + dt$  можна виразити через його величину в момент  $t$  розкладом в ряд

$$\vec{a}_{t+dt} = \vec{a}_t + \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt + \delta, \quad (3.19)$$

де  $\delta$  – величина більш високого порядку малості, ніж  $dt$ .

Тобто, вважаємо при цьому, що зміна векторного поля в часі зумовлена тільки явною залежністю  $\vec{a}(t)$ .

Підставимо знайдене нами значення в формулу (3.14), отримаємо

$$\Delta \left( \int_S \vec{a} d\vec{S} \right) = \int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt d\vec{S}_2 + \int_{S_2} \delta d\vec{S}_2. \quad (3.20)$$

З урахуванням виразу (3.18) співвідношення (3.20) перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} & \Delta \left( \int_S \vec{a} d\vec{S} \right) = \\ & = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} \cdot dt \cdot d\vec{S}_2 + \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t \cdot dV - \int_{\Delta S_\delta} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v}dt] + \int_{S_2} \delta d\vec{S}_2. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Підставимо у співвідношення (3.13) вираз (3.21) та, зробивши граничний перехід при  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \right)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt d\vec{S}_2 + \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t \cdot dV - \int_{\Delta S_6} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v} dt] + \int_{S_2} \delta d\vec{S}_2}{\Delta t}. \quad (3.22)$$

Розглянемо почергово доданки в формулі (3.22).

$$1. \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt d\vec{S}_2}{\Delta t} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.23)$$

При граничному переході  $\Delta t \rightarrow 0$  поверхня  $S_2$  переходить в поверхню  $S_1$ . За непотрібністю ми опустили індекс 1 при поверхні  $S_1$ .

2. Використовуючи очевидний вираз для елементарного об'єму  $dV = \vec{v} d\vec{S} dt$ , маємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t \cdot dV}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int \text{div} \vec{a}_t \cdot \vec{v} d\vec{S} dt}{\Delta t} = \int_S \vec{v} \cdot \text{div} \vec{a} \cdot d\vec{S}. \quad (3.24)$$

При граничному переході  $\Delta t \rightarrow 0$  об'єм  $\Delta V$  стягується в поверхню  $S$ .

$$3. \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{- \int_{\Delta S_6} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v} dt]}{\Delta t} =$$

$$= - \oint_L \vec{a} \cdot [d\vec{l}, \vec{v}] = \oint_L [\vec{a}, \vec{v}] \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} [\vec{a}, \vec{v}] \cdot d\vec{S}. \quad (3.25)$$

При граничному переході  $\Delta t \rightarrow 0$  площа  $\Delta S_6$  стягується в контур  $L$  поверхні  $S$

$$4. \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \delta d\vec{S}_2}{\Delta t} = 0. \quad (3.26)$$

Використовуючи (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) для повної швидкості зміни потоку довільного векторного поля  $\vec{a}$  через рухоми поверхню  $S$  одержуємо

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_S \text{rot} [\vec{a}, \vec{v}] \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{v} \cdot \text{div} \vec{a} \cdot d\vec{S}. \quad (3.27)$$

Формула (3.27) дозволяє записати явний вираз для швидкості зміни в часі потоку вектора магнітної індукції через рухому поверхню.

Оскільки  $\text{div}\vec{B} = 0$ , то

$$\frac{d}{dt}\Phi_B = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]\cdot d\vec{S}, \quad (3.28)$$

та для повного струму зміщення через рухому поверхню

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_D &= \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}d\vec{S} = \\ &= \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{v}, \vec{D}]\cdot d\vec{S} + \int_S \vec{v}\cdot \text{div}\vec{D}\cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Якщо поверхня  $S$  перетинає область простору, у якій розподілені заряди, то миттєве значення струму зміщення дорівнює

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}d\vec{S} = \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{v}, \vec{D}]\cdot d\vec{S} + \int_S \vec{v}\cdot \rho\cdot d\vec{S}. \quad (3.29)$$

Якщо припустити, що поверхня  $S$  і контур  $L$  пов'язані із середовищем (знаходяться в середовищі), то останні формули (3.28), (3.29) дозволяють записати РМ в повільно рухомих немагнітних тілах:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{v}, \vec{D}] + \vec{v}\rho; \quad (3.30)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{B}\right] = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}], \quad (3.31)$$

оскільки  $(\vec{B}\nabla)\vec{v} - \vec{B}\cdot \text{div}\vec{v} = 0$ .

### **3.4. Субстанціональна похідна за часом довільного векторного поля та фундаментальні закони електродинаміки**

Повні похідні векторних полів органічно входять як до рівнянь Максвелла, так і в інші рівняння електродинаміки. Крім того, з допомогою повних похідних векторних і скалярних полів можна визначати електромагнітне поле та рівняння, які його описують в рухомих середовищах.

Тому зупинимося більш детально на виразі для повної похідної довільної динамічної величини та на зміст величин, що входять в цей вираз.



Повна (або субстанціональна, матеріальна) похідна за часом  $t$  характеризує зміну певної величини для даної частинки, тоді як частинна (або локальна) похідна описує зміну цієї величини в даному місці. Тобто матеріальна похідна описує швидкість повної зміни величини в точці, яка рухається разом із середовищем. При цьому вважається, що ця величина залежить і від часу, і від миттєвого положення точки.

Вираз для повної похідної за часом довільної фізичної величини може бути обґрунтований (у всякому разі) трьома різними способами [102, с. 185].

Згідно правил диференційного числення для будь-якої функції координат і часу,  $\vec{a}(x, y, z, t)$ , повинне мати місце співвідношення [147; 4, с. 408; 224, с. 201; 118, с. 185; 126, с. 351; 127, с. 318]

$$\begin{aligned} \dot{\vec{a}} &= \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Аналогічно, згідно з примітками редактора перекладу книги Р. Беккера [4, с. 408], для кожної функції  $f$  від координат і часу «повинно бути»

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (3.33)$$

Останні три доданки у формулах (3.32) (3.33), якщо ввести оператор  $(\vec{v}\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ , записують зазвичай у формі  $(\vec{v}\nabla)\vec{a}$ .

З іншого боку, якщо  $\vec{V}$  – швидкість «точки спостереження» (швидкість довільної точки середовища), то оператор  $(\vec{V}\nabla)\vec{a}$  дорівнює [118, с. 189]

$$(\vec{V}\nabla)\vec{a} = -rot[\vec{V}, \vec{a}] + (\vec{a}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot div\vec{a} - \vec{a} \cdot div\vec{V}. \quad (3.34)$$

Тому повна похідна векторного поля  $\vec{a}(x, y, z, t)$  за часом дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{a} = \\ &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - rot[\vec{V}, \vec{a}] + (\vec{a}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot div\vec{a} - \vec{a} \cdot div\vec{V}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тепер переходимо до пояснення змісту величин, які входять в (3.32), або (3.35).

Згідно з примітками редактора перекладу до книги Р. Беккера, [4, с. 408],  
 $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  означає  $\dot{\vec{A}} = \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{x',y',z'}$ , а під  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  розуміють  $\left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{x,y,z}$ .

У цих виразах  $x', y', z'$  – координати в системі відліку, яка рухається разом з тілом (середовищем). Як правило, таку СВ позначають  $K'$ , СВ  $K$ . А  $x, y, z$  – координати в нерухомій СВ  $K$ . Тому, стверджується в [4, с. 408], « $x, y, z$  є функціями від  $x', y', z'$  і від  $t$ , похідні ж цих функцій за  $t$  суть компоненти вектора  $\vec{V}$ ».

І тому застосування (3.33) для, наприклад,  $P_x$  дає можливість записати повну похідну за часом іксової проекції вектора поляризації  $\dot{P}_x$  у вигляді

$$\dot{P}_x = \frac{\partial P_x}{\partial t} + V_x \cdot \text{div} \vec{P} + \frac{\partial}{\partial y} (P_x V_y - P_y V_x) - \frac{\partial}{\partial z} (P_z V_x - P_x V_z).$$

Тоді для повної похідної вектора поляризації  $\dot{\vec{P}}$  маємо

$$\dot{\vec{P}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{V} \text{div} \vec{P} + \text{rot} [\vec{P}, \vec{V}].$$

**І це вірно тільки при умові  $\vec{V} \neq V(x, y, z)$  (виділено мною).**

« $\dot{\vec{P}}$  являє собою похідну від  $\vec{P}$  за часом з погляду спостерігача, який рухається разом з тілом, але вектор  $\vec{P}$  у правій частині рівності слід розглядати як функцію координат і часу точки зору спостерігача, що покоїться» [4, с. 256].

До речі, останнє співвідношення для  $\dot{\vec{P}}$  можна відразу одержати використовуючи вираз для повної похідної довільного векторного поля (3.35) та умову  $(\vec{P} \nabla) \vec{V} - \vec{P} \cdot \text{div} \vec{V} = 0$ , яка має місце при  $\vec{V} = \text{const}$ .

Таким чином, хоча  $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  – це похідна з точки зору СВ  $K'$ , а сам вектор  $\vec{A}(x, y, z, t)$  у правій частині (3.32) слід розглядати як функцію координат і часу з точки зору «нерухомої» СВ  $K$ .

Що й використовується Р. Беккером [4] для знаходження  $\dot{\vec{B}}$  у різних місцях книги, де  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля.

У [4] повна похідна  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  позначається  $\dot{\vec{B}}$  і дорівнює

$$\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}], \quad (3.36)$$

оскільки завжди  $\text{div}\vec{B} = 0$ .

Формула (3.36) випливає й з (3.35) при  $\vec{V} = \text{const}$ . Тому, очевидно, у [4], мабуть, припускається, що  $\vec{V} = \text{const}$ , або швидкість настільки мало змінюється, що в межах будь-якого малого відрізка часу можна вважати рух рівномірним і прямолінійним.

І ця похідна визначає ротор вихрового електричного поля в системі відліку, яка пов'язана з рухомим тілом (провідником) (формула (43.3) в [4, с. 254], або (9.16) в [199, с. 163]):

$$\text{rot}\vec{E}' = -\dot{\vec{B}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (3.37)$$

Таким чином, згідно з [4, с. 254, с. 256, с. 349, с. 408], вважається, що вираз (3.32)  $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$ , визначає похідну від  $\vec{A}(x, y, z, t)$  з точки зору спостерігача, який рухається разом з тілом, або з точкою спостереження.

«Оскільки для спостерігача, який рухається разом з магнітом, повна зміна  $\vec{B}$ , тобто  $\dot{\vec{B}} + (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{B}$ , дорівнює нулю, то  $\text{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ , як того вимагає закон індукції» [4, с. 349]. Тобто в цій частині книги [4, с. 349]

вважається, що  $\dot{\vec{B}}$  – це частинна похідна  $-\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , оскільки, насправді,

повна зміна  $\vec{B}$  дорівнює  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{B}$ . Але це суперечить тому,

що написано на с. 254 книги Р. Беккера –  $\dot{\vec{B}} = \frac{d\vec{B}}{dt}$ .

Хоча вираз  $\dot{\vec{B}} + (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{B}$  у контексті книги Р. Беккера, [4, с. 349], є, на мій погляд, помилковим, можливо помилковим випадково.

А повинно бути, згідно з [4, с. 349],  $\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{B}$ . Автор кни-

ги [4] скоріше за все це й мав на увазі. Але тоді  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , а не

$\text{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ , як це стверджується в [4, с. 254, с. 349].

Аналогічної точки зору на зміст доданків (3.32) дотримуються й автори книги [182]. Причому в одних місцях  $\dot{A} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  – це похідна величини  $\vec{A}(x, y, z, t)$  у СВ  $K$ , а в інших місцях [182] формула (3.32) визначає похідну з точки зору СВ  $K'$ .

У класичному посібнику Э. В. Шпольського [252, с. 201], навпаки, вираз (3.35) означає матеріальну похідну вектора  $\vec{a}$  в лабораторній системі відліку (СВ  $K$ ).

У посібнику І. Є. Тамма [224, с. 152–153, с. 546–547] похідна (3.32), (3.35) визначає повну зміну в часі величини  $\vec{a}$  в СВ  $K$ .

Таким чином, ми маємо низку суперечностей і непослідовностей щодо змісту доданків в (3.35) як в рамках однієї книги, так і при порівнянні висловлювань відносно розуміння (3.35) в різних книгах.

Якщо вважати, що повна похідна за часом потоку вектора  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  через рухому поверхню  $\frac{d}{dt}\Phi$  дорівнює потоку вектора  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  через цю

поверхню  $\left( \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot d\vec{S} \right)$ ,  $\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot d\vec{S}$ , то порівнюючи

(3.35) з теоремою про повну зміну в часі потоку векторного поля  $\vec{a}$  (3.27)

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{V} \cdot \text{div} \vec{a} \cdot d\vec{S},$$

одержуємо:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] + \vec{V} \cdot \text{div} \vec{a}. \quad (3.38)$$

Тобто, з точністю до доданку  $(\vec{a}\nabla)\vec{V} - \vec{a} \cdot \text{div}\vec{V}$ , одержуємо однакові результати для виразу повної похідної за часом векторного поля  $\vec{a}(\vec{r}, t)$ .

Відсутність цього доданку у виразі для повної похідної  $\frac{d\vec{a}}{dt}$ , який впливає з (3.27), означає, напевно, що й  $\text{div}\vec{V} = 0$ , і  $(\vec{a}\nabla)\vec{V} = 0$ , а це у свою чергу говорить про те, що в усіх методах доведення та обґрунтування формули (3.27) і рівнянь Максвелла в рухомому тілі приймається, за мовчазної згоди в усіх посібниках і монографіях, угода про рівномірний і прямиолінійний рух середовища або системи відліку, яка пов'язана з ним ( $\vec{V} \neq f(x, y, z)$ , швидкість  $\vec{V}$  руху «точки» однакова для всіх точок поверхні  $S$  і контуру  $L$ ).

Щодо цього, то важливим являється також зауваження І. Є. Тамма [224, с. 546].

Аналогічно, формулу (3.27) можна обґрунтувати виходячи й з виразу для матеріальної похідної за часом векторного поля.

Дійсно, виберемо будь-яку точку, «точку спостереження», на нашій поверхні  $S$ . Тоді матеріальна, або субстанціональна, похідна (3.35) визначає повну зміну в часі величини  $\vec{a}$  у точці («точці спостереження»), яка рухається разом з середовищем.

Про інтегрувавши (3.35) по довільній поверхні  $S$  одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] \cdot d\vec{S} + \\ + \int_S (\vec{a} \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{V} \cdot \text{div} \vec{a} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{a} \cdot \text{div} \vec{V} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Оскільки  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  визначає повну зміну з часом величини  $\vec{a}$  в точці, яка рухається разом з середовищем, то коли інтегруємо за поверхнею  $S$ , яка рухається, бо  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  визначається в «точках спостереження», які переміщуються разом з поверхнею, то й знаходимо в результаті інтегрування повну похідну поля  $\vec{a}$  через рухому поверхню:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} d\vec{S}.$$

Тобто з точністю до доданку  $\int_S (\vec{a} \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{a} \cdot \text{div} \vec{V} \cdot d\vec{S}$  одержуємо результат для повної похідної за часом потоку вектора  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  через рухому поверхню, який збігається з (3.27).

### **3.5. Непотенційність електричного поля рухомої зарядженої частинки та закон електромагнітної індукції**

Таким чином, у результаті обговорення в учбовій і методичній літературі [65; 178; 233] фізичних причин виникнення ЕРС індукції прийнята точка зору про подвійну природу ЕРС індукції. Якщо в лабораторній системі відліку  $K$  існує постійне, але неоднорідне магнітне поле, то ЕРС індукції, що виникає в контурі, який рухається в цьому полі, зумовлена силою Лорентца. А у власній СВ контуру, СВ  $K'$ , ЕРС зумовлена виникненням електричного поля, яке породжується рухом відносно  $K'$  магнітного поля СВ  $K$ . Спостерігач СВ  $K'$  може також інтерпретувати «свою» ЕРС як наслідок зміни магнітної індукції з часом.

Власне, у першій роботі А. Ейнштейна зі спеціальної теорії відносності «До електродинаміки рухомих тіл» [259] й наголошується на цьому: «Відомо, що електродинаміка Максвелла в сучасному її вигляді приводить у застосуванні до рухомих тіл до асиметрії, яка невластива, мабуть, самим явищам. Пригадаємо, наприклад, електродинамічну взаємодію між магнітом і провідником зі струмом. Спостережуване явище залежить тут тільки від відносного руху провідника й магніту, тоді як, згідно зі звичайним уявленням, два випадки, у яких рухається або одне, або інше з цих тіл, повинні бути строго розмежовані» [259, с. 7].

Як показує аналіз (див. п. 3.1, п. 3.2, [65; 127]), у більшості випадків ЕРС визначається швидкістю зміни магнітного потоку через контур і не залежить від того, яким чином реалізується зміна магнітного потоку  $\Phi$  («правило потоку») (3.1).

«Ми не знаємо у фізиці жодного іншого такого прикладу, коли б простий і точний загальний закон вимагав для свого справжнього розуміння аналізу в термінах двох різних явищ. Зазвичай таке красиве узагальнення виявляється витікаючим з єдиного глибокого основоположного принципу. Але в цьому випадку якого-небудь особливо глибокого принципу не видно. Ми повинні сприймати «правило» як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ» [233, с. 53].

Але при аналізі конкретних фізичних ситуацій, у яких спостерігається явище електромагнітної індукції, завжди слід звертати увагу на фізичну причину виникнення ЕРС.

У посібнику [65] повторюється слова Р. Фейнмана [233, с. 53] щодо відсутності єдиного принципу, що лежить в основі закону електромагнітної індукції: «Зважаючи на те що ніякого єдиного глибокого принципу, об'єднуючого обидва явища, не видно, ми повинні сприймати закон електромагнітної індукції як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ. Обидва ці явища, взагалі кажучи, незалежні один від одного, і проте – що дивно – ЕРС індукції в контурі завжди рівна зміні магнітного потоку крізь контур» [65, с. 230].

У курсі загальної фізики при вивченні явища електромагнітної індукції теж, як правило, акцентується увага на двох фізичних причинах виникнення індукованої ЕРС у замкнутому контурі або в окремих частинах його [178; 65; 233; 200]: дія сили Лорентца на вільні електрони провідника, який рухається в магнітному полі та виникнення вихрового електричного поля в нестационарному МП.

У стандартних методиках вивчення фізики в СНЗ пропонується вивчати закономірності цього явища теж у два етапи [55; 36; 1; 69; 29]. Спочатку аналізується явище ЕМІ в рухомих провідниках з використанням традиційної моделі (рис. 3.1), а потім, з опорою на відомі дослідження, що ілюструють ЯЕМІ, формуються уявлення про вихрове електричне поле [69; 56].

Аналіз науково-методичних публікацій з питань інтерпретації ЯЕМІ та методик його вивчення показує, що існує ціла низка проблем методичного характеру [36; 1; 61; 100] (див. також п. 3.1).

Електростатичній теоремі Гаусса, теоремі про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  та іншим рівнянням Максвелла в інтегральній формі відповідають рівняння Максвелла в диференційній формі. А от «правило потоку» (3.1), як видно з аналізу науково-методичної літератури, не сформульовано відповідного локального закону.

Один з аспектів сучасної фізичної парадигми припускає, що інтегральний закон є наслідком локального закону. Але стосовно рівняння

Максвелла  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  в навчально-методичній літературі прийнятий зовсім інший підхід (див. п. 3.1).

Незважаючи на те, що електродинаміка за суттю своїй належить до релятивістської фізики, аналіз значної частини навчальних моделей електродинаміки проводиться в рамках класичної механіки. Так, при розгляді традиційної моделі (див. рис. 3.1) [1, с. 24; 36, с. 12; 61, с. 261] формули додавання швидкостей, а також формули перетворення компонент електромагнітного поля беруться тільки в нерелятивістському наближенні [200; 36; 1; 29]. Останнє не сприяє глибокому розумінню суті явища та принципу відносності, а інколи приводить і до фактичних помилок.

**Покажемо, що явище ЕМІ та закон електромагнітної індукції є наслідками принципу відносності та закону Кулона.**

Виходячи з принципу відносності та закону Кулона можна одержати формулу для вектора  $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$  електричного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки [101; 131; 100] (див. також пп. 2.1–2.3):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi} \frac{1}{\left[(x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)\right]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

де  $q$  – величина заряду РЗЧ,  $\vec{r} = (x-vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля  $P(x, y, z)$ ,

$\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\theta$  – кут між вектором  $\vec{r}$  та напрямком руху ЗЧ (рис. 3.7).

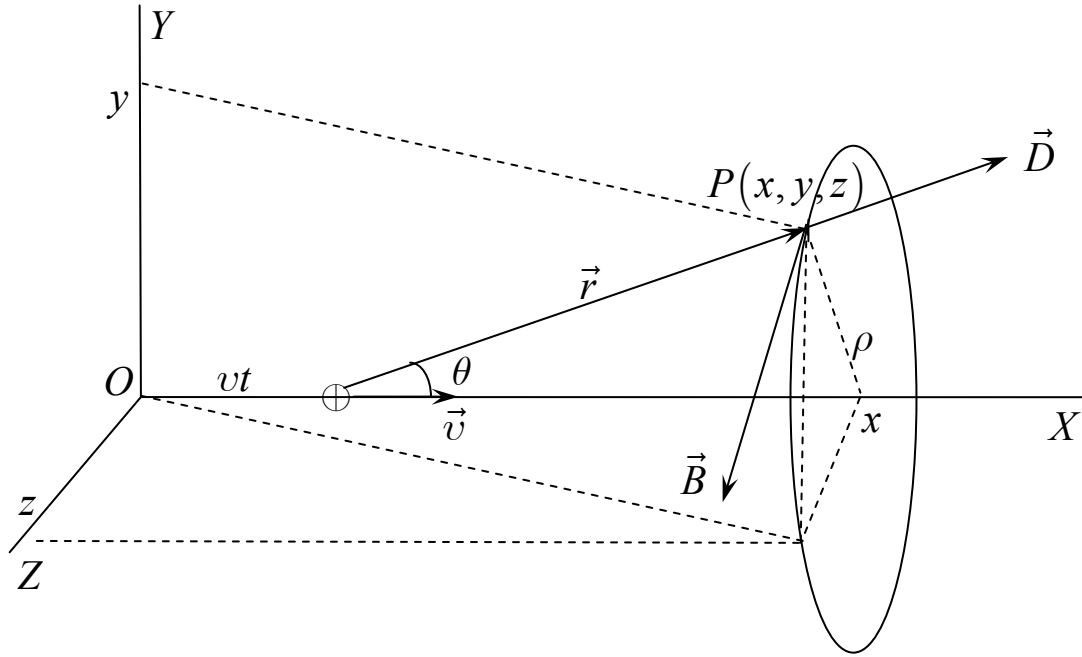


Рис. 3.7. Електромагнітне поле ЗЧ,  
що рухається рівномірно та прямолінійно

Електричне поле РЗЧ є **непотенційним**. Дійсно, використовуючи (4.131), для ротора вектора  $\vec{D}$  знаходимо:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\vec{D} &= \left( \frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\
 &= \frac{3q(1-\beta^2)(x-vt) \cdot z \cdot \beta^2}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{j} - \\
 &\quad - \frac{3q(1-\beta^2)y(x-vt) \cdot \beta^2}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{k}. \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

З метою спрощення виразів та для більшої прозорості розрахунків та висновків, ЕМП будемо розглядати в площині  $XOY$  (рис. 3.8).

Тоді

$$\text{rot}_z \vec{D} = - \frac{3q(1-\beta^2)y(x-vt) \cdot \beta^2}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{k}. \quad (3.42)$$



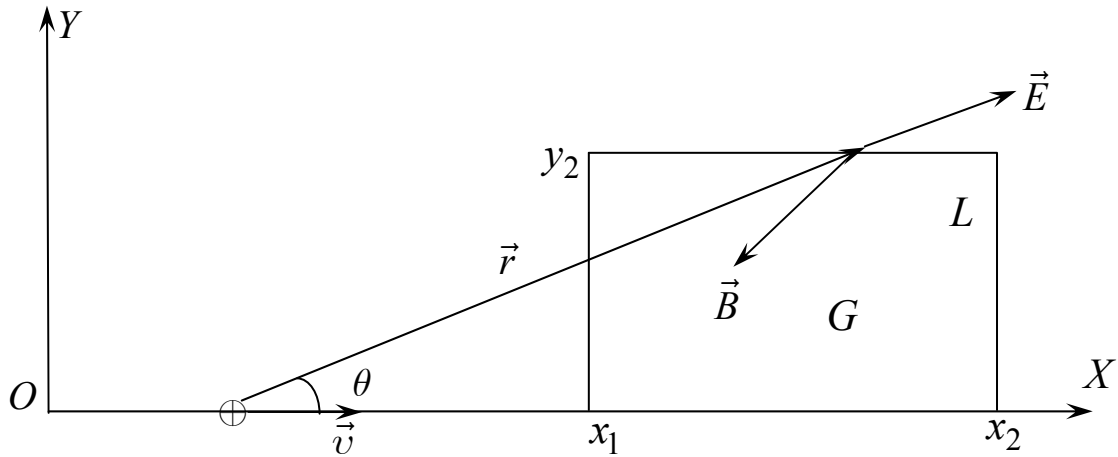


Рис. 3.8. Прямокутний контур  $L$  знаходиться в площині  $XOY$

Як відомо, циркуляція вектора  $\vec{D}$  може бути знайдена трьома шляхами:

$$1. \oint D_x dx + \oint D_y dy = \int_{x_1}^{x_2} D_x(x_1, y=0) dx + \int_{x_2}^{x_1} D_x(x_1, y=y_2) dx + \\ + \int_{y_1}^{y_2} D_y(x_2, y) dy + \int_{y_2}^{y_1} D_y(x_1, y) dy,$$

причому контур  $L$  необхідно обходити проти годинникової стрілки, щоб область інтегрування  $G$  була зліва.

2. Використовуючи формулу Гріна

$$\oint_L (D_x dx + D_y dy) = \iint_G \left( \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

3. Виходячи з фізичного змісту  $\oint \vec{D} d\vec{l}$  (брати відповідні проекції  $\vec{D}$  за 4-ма сторонами прямокутного контуру  $L$ ). Але цей шлях приводить до першого способу.

Неважко впевнитися, що всі 3 способи розрахунку циркуляції вектора  $\vec{D}$ ,  $\oint \vec{D} d\vec{l}$ , дають однаковий результат

$$\oint \vec{D} d\vec{l} = \iint_G \left( \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) dx dy = \\ = \frac{q\beta^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} \right] + \frac{q\beta^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{(x - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)} \right] \Bigg|_{x_1}^{x_2}. \quad (3.43)$$

У власній системі відліку зарядженої частинки (СВ  $K'$ ) контур рухається в кулонівському потенційному полі. Тому ЕРС в контурі  $\varepsilon' = \oint \vec{E}' d\vec{l} = 0$ .

У СВ  $K$ , що пов'язана з контуром, ЗЧ рухається з деякою швидкістю. Але електричне поле рухомої ЗЧ непотенційне, і це має принципове значення.

Циркуляція цього непотенційного поля не дорівнює нулю:  $\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ . Тому, здавалося б, у будь-якому контурі, відносно якого рухаються ЗЧ (навіть зі швидкостями  $v \ll c$ ) повинна виникати ЕРС, що чисельно дорівнює циркуляції вектора  $\vec{E}$  непотенційного поля РЗЧ.

**Цей висновок суперечить принципу відносності. Принцип відносності – один з фундаментальних принципів не тільки фізики, а й сучасного світогляду та методології наукового пізнання.**

Тому для виконання ПВ слід припустити існування додаткової ЕРС, яка компенсує в будь-який момент часу циркуляцію непотенціального поля  $\oint \vec{E} d\vec{l}$  в контурі  $L$ .

**Приклад 3.1.** Заряджена частинка рухається у вакуумі зі швидкістю  $\vec{v}$ . Покажемо, що непотенційне електричне поле РЗЧ в кожній точці простору і в довільний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем цієї ж РЗЧ.

*Розв'язання:* Оскільки електромагнітне поле РЗЧ визначається формулами (2.19) та (2.26), то вихор вектора напруженості електричного поля РЗЧ дорівнює

$$\text{rot}\vec{E} = \frac{3q\beta^2(1-\beta^2) \cdot (x-vt) \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2) \cdot (1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{j} - \frac{3q\beta^2(1-\beta^2) \cdot (x-vt) \cdot y}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2) \cdot (1-\beta^2) \right]^{5/2}} \cdot \vec{k},$$

а частинна похідна вектора  $\vec{B}$  [124]

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{3q\beta^2(1-\beta^2) \cdot (x-vt) \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2) \cdot (1-\beta^2) \right]^{5/2}} \vec{j} +$$

$$+ \frac{3q\beta^2(1-\beta^2) \cdot (x-vt) \cdot y}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left[ (x-vt)^2 + (y^2+z^2) \cdot (1-\beta^2) \right]^{5/2}} \cdot \vec{k}.$$

Порівнюючи ці вирази, одержуємо фундаментальне рівняння

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Таким чином, аналіз властивостей електромагнітного поля РЗЧ приводить до однозначної відповіді: непотенційне вихрове електричне поле РЗЧ у кожній точці простору, у кожний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем,  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  [124; 103; 132]:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Ще раз підкреслимо, що для виконання ПВ необхідно вимагати, щоб в системі відліку, яка пов'язана з контуром  $L$ , циркуляція вектора  $\vec{E}$  по цьому контуру повністю компенсувалася ЕРС, зумовленою змінною магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром  $L$ . Тобто щоб з точки зору і СВ  $K$ , і СВ  $K'$  в контурі  $L$  не виникало ЕРС.

Власне ця вимога ПВ та непотенційність електричного поля РЗЧ з однозначністю приводять до рівняння (3.44). Це й дозволяє зробити висновок, що закон електромагнітної індукції (3.44) є наслідком ПВ та закону Кулона.

З методичною метою впевнімося, що ЕРС в контурі зображеному на рис. 3.8, який знаходиться в ЕМП РЗЧ, визначається  $\epsilon_{ind} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ .

**Приклад 3.2.** Показати, що зміна в часі магнітного потоку через нерухомий контур  $L$  (рис. 3.8) дорівнює зі знаком мінус циркуляції вектора напруженості  $\vec{E}$  електричного поля РЗЧ по контуру  $L$ .

*Розв'язання:* Знайдемо потік  $\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  через поверхню обмежену прямокутним контуром  $L$  (рис. 3.8)

$$\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

де  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  – індукція магнітного поля РЗЧ в точках цієї поверхні.

$$\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 q [\vec{v} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}};$$

$$B_z = \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2) v \cdot r \sin \theta}{4\pi \left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 q \cdot (1 - \beta^2) \cdot v \cdot \sqrt{y^2}}{4\pi \left[ (x - vt)^2 + (y^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}},$$

де  $\sin^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2}$ , див. рис. 3.8.

Оскільки рівняння поверхні  $S$ , яка обмежена контуром  $L$ , має вигляд  $z = f(x, y) = 0$ , то величина магнітного потоку через цю поверхню в довільний момент часу дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_z dS = \int_G B_z \cdot dx dy =$$

$$= \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2) v}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_2} \frac{y dy}{\left[ (x - vt)^2 + y^2 (1 - \beta^2) \right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 q v}{4\pi} \left[ \ln \frac{x_2 - vt}{x_1 - vt} - \ln \frac{x_2 - vt + \sqrt{(x_2 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}}{x_1 - vt + \sqrt{(x_1 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} \right].$$

Таким чином, для величини  $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  одержуємо

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 q v^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} \right],$$

що збігається з виразом (3.43) для вакууму.

Важливо наголосити, що при використанні нерелятивістських виразів для векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  ЕМП РЗЧ:

$$\vec{E}_{np} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \vec{B}_{np} = \frac{\mu_0 [\vec{v}, \vec{r}] q \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{[\vec{v}, \vec{r}] \epsilon_0 \mu_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}_{np}],$$

одержуємо результат, що суперечить ПВ:

$$rot\vec{E}_{np} = 0, \quad \text{але} \quad \frac{\partial \vec{B}_{np}}{\partial t} \neq 0,$$

де  $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, проведений з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля.

Дійсно, для ситуації, зображеної на рис. 3.8, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}_{np}}{\partial t} &= \frac{\partial B_{np}^x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial B_{np}^y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial B_{np}^z}{\partial t} \vec{k}; \\ \frac{\partial B_{np}^z}{\partial t} &= \frac{3\mu_0 q v^2 y (x - vt)}{4\pi [(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{5/2}}; \end{aligned}$$

А тому

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\mu_0 q v^2 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - vt)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - vt)^2 + y^2}} \right]. \end{aligned}$$

У той же час циркуляція вектора  $\vec{E}_{np}$  по контуру  $L$  дорівнює нулю (оскільки  $rot\vec{E}_{np} = 0$ ).

Тобто, з точки зору СВ, яка пов'язана із ЗЧ, ЕРС у контурі дорівнює нулю, а з точки зору СВ, яка пов'язана з контуром, ЕРС дорівнює  $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Явне порушення принципу відносності.

**Таким чином, при аналізі будь-яких електромагнітних явищ для одержання коректних несуперечливих результатів слід користуватися формулами та методами теорії відносності.**

**Відтак локальна форма закону ЕМІ впливає як наслідок закону Кулона та ПВ.**

Узагальнюючи цей результат на змінні в часі магнітні поля довільної природи та використовуючи теорему Стокса й принцип суперпозиції, ми одержуємо вираз для ЕРС індукції в нерухомому контурі, рівняння (3.1).

Рівняння  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  обґрунтовано нами для довільної точки

простору, в якому існує змінне магнітне поле, **але для точки нерухомої в даній системі відліку.**

Якщо трохи ускладнити задачу й розглянути рух зі швидкістю  $\vec{V}$  «точки спостереження» в довільному МП  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , то ми знайдемо, що [132]

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (3.45)$$

де  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B}$  – це зміна в часі вектора  $\vec{B}$  з точки зору СВ  $K$

у тілі (середовищі), яке рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$ .

При русі «точки спостереження» в полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  субстанціональна,

або повна, похідна  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  (як уже відзначалося) описує зміну в часі поля

$\vec{B}$  не тільки тому, що це поле нестационарне, а й тому, що точка рухається через неоднорідне поле.

Тобто ми можемо узагальнити закон (3.45) на довільні магнітні поля  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , створені іншими джерелами, а не тільки РЗЧ.

Тобто якщо в неоднорідному та нестационарному полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  зі швидкістю  $\vec{V}$  рухається «точка спостереження», то для повної похідної вектора індукції магнітного поля ми повинні записати згідно з (3.35)

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot div\vec{B} - \vec{B} \cdot div\vec{V}.$$

У цих задачах  $div\vec{B} = 0$  завжди, а при русі тіла як цілого  $div\vec{V} = 0$  (при  $\vec{V} = const$ ). Іншими словами,  $div\vec{V} = 0$  означає «нестисливість» тіла [156, с. 264].

Тому попередня формула спрощується

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V}. \quad (3.46)$$

Доданок  $(\vec{B}\nabla)\vec{V}$  ураховує зміну орієнтації вектора  $\vec{B}$  по відношенню до тіла [156, с. 264]. Цей доданок дорівнює нулю при поступаль-

ному русі з  $\vec{V} = \text{const}$  і дорівнює  $[\vec{\omega}, \vec{B}]$  при обертанні тіла ( $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ , де  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість).

Тобто, при русі зі швидкістю  $\vec{V}$  «точки спостереження» в МП з індукцією  $\vec{B}$  рівняння (3.45) набуває вигляду:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (3.47)$$

Якщо поле стаціонарне, то  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ , і тоді напруженість індукційного електричного поля в провіднику дорівнює:

$$\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}],$$

що й інтерпретується як напруженість сили Лорентца в традиційних методиках вивчення закону ЕМІ (див. п. 3.1).

У випадку простого розподілу поля в просторі зміст доданку  $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$  можна пояснити з допомогою рис. 3.9, де зображені стаціонарні,

неоднорідні поля  $B_y(x) = a + bx$ ,  $B_y(x) = B_0x^{1/2}$  та  $B_y(x) = B_1x^n$ , де  $a$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  – деякі постійні величини.

Характеристика будь-якого поля як постійного чи змінного носить відносний характер.

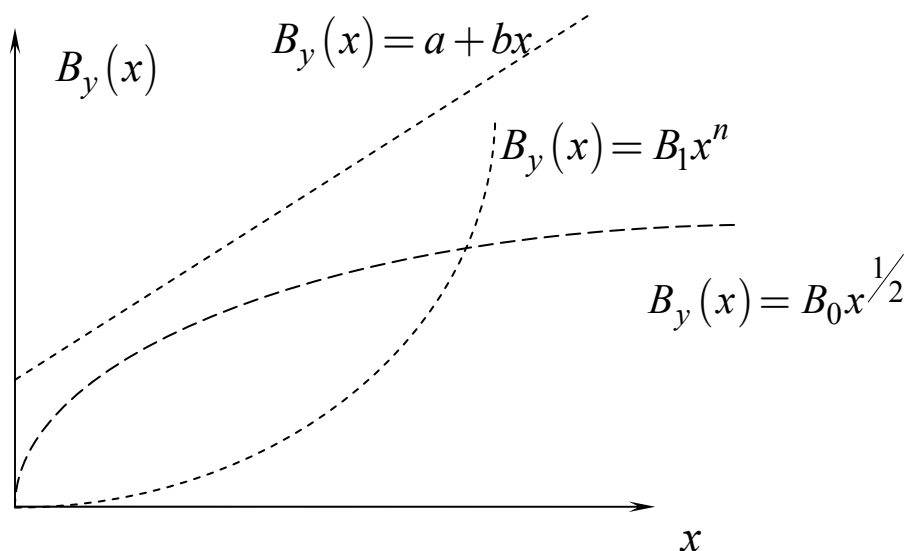


Рис. 3.9. Рух «точки спостереження» в стаціонарному,

але неоднорідному полі спостерігається як змінне поле:  $\frac{\partial B_y}{\partial t} = V \frac{\partial B_y}{\partial x}$

Наприклад, з точки зору СВ  $K$  поле  $B_y$  постійне, але неоднорідне, а з точки зору СВ  $K'$ , яка рухається зі швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$  уздовж осі  $OX$  поле  $B'_y(t')$  є функцією часу (рис. 3.9).

В існуючих методиках вивчення й пояснення явища ЕМІ якраз і акцентують увагу на виникненні ЕРС у нерухомому й у рухомому контурі в довільному магнітному полі. А потім дивуються тому, що для пояснення цього явища доводиться використовувати різні фізичні причини, незважаючи на те, що практично у всіх випадках має місце «правило потоку».

**Ці фізичні причини об'єднуються в одну, якщо закон ЕМІ записати у формі  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ , яка випливає з принципу відносності та закону Кулона [124; 132; 100].**

І тоді, ця дивина – «ЕРС індукції в контурі завжди рівна зміні магнітного потоку крізь контур», як показано в [124; 132; 100], взагалі зникає, якщо уважніше подивитися на закон ЕМІ, (3.45), або (3.47).

Дійсно, уявимо контур будь-якої форми, який рухається в довільному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  зі швидкістю  $\vec{V}$ .

Тоді, оскільки ЕРС дорівнює циркуляції вектора  $\vec{E}$ , то, згідно з теоремою Стокса, ця циркуляція повинна дорівнювати потоку ротора вектора  $\vec{E}$ . А тому з урахуванням закону (3.45), (3.47) маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} = \\ &= - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint [\vec{V}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Таким чином, на основі (3.45) ми одержали закон (3.8), який об'єднує в собі дві фізичні причини виникнення ЕРС індукції.

Отже, вихрове електричне поле повністю визначається повною похідною за часом від індукції магнітного поля.

Рухомий чи нерухомий контур – відносні твердження, а характеристика будь-якого векторного поля як постійного чи змінного носить, взагалі кажучи, відносний характер.

Тому дивним є не вираз  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ , а фізична інтерпретація та зведення причин виникнення ЕРС тільки до двох, начебто зрозумілих: вихрове електричне поле та сила Лорентца. Тим самим свідомо чи не свідомо звужується спектр фізичних причин виникнення ЕРС.



Інші причини – це третій та п'ятий доданки у виразі для повної похідної за часом вектора  $\vec{B}$ .

**Тобто ПВ лежить в основі об'єднання «двох причин виникнення ЕРС індукції». На феноменологічному, явищному рівні ці дві причини зумовлені самим процесом пізнання. Вихрове електричне**

**поле породжується тільки  $\frac{d\vec{B}}{dt}$ .**

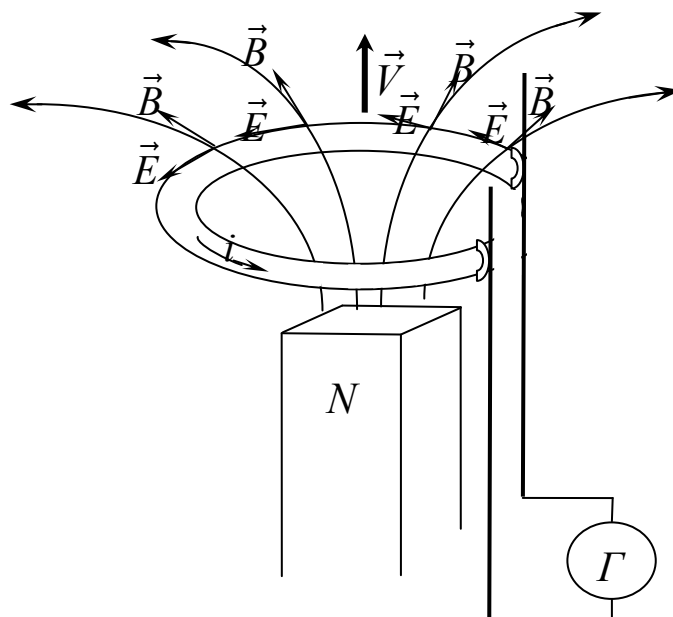


Рис. 3.10. Вихрове електричне поле, яке породжується в кожній точці контуру (локально) полем сили Лорентца

Індукційне електричне поле в будь-якому випадку непотенційне в цілому. У цілому лінії вектора напруженості індукційного електричного поля  $\vec{E}$  замкнені завжди.

Аналізуючи модель, у якій відрізок провідника рухається з швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$  в МП мимовільно формується уявлення про однорідність індукційного електричного поля в цій моделі. Зумовлене воно тим, що в цьому випадку аналіз проводиться локально, без урахування картини електромагнітного поля в цілому.

Індукційний струм, що виникає в контурі при русі його в неоднорідному, стаціонарному магнітному полі, зумовлений вихровим електричним полем, яке породжується в кожній точці контуру (локально) полем сили Лорентца. А більш точно задача описується рівнянням (3.45) з урахуванням (3.46).

У п. 3.3. показано (див. пояснення щодо (3.38) та (3.39)), що й локальне подання, й інтегральне подання (при  $\vec{V} \neq f(x, y, z)$ ) приводить

до того, що повна похідна вектора  $\vec{B}$ ,  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B}$ , збігається з повною похідною, яку отримуємо з виразу для повної похідної за часом потоку векторного поля через рухоми поверхню, (3.27). При цих умовах такий результат може означати, що всі точки контуру рухаються в дану мить з однаковою швидкістю. *А якщо різна швидкість?? Відповіді в інтегральній формі не має. А локальна форма передбачає існування додаткових складових ЕРС індукції???*

### 3.6. Методика застосування узагальненого закону електромагнітної індукції

Розглянемо приклади, які ілюструють (3.45), де

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V}.$$

Незважаючи на те, що в самому загальному вигляді локальне подання закону ЕМІ  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$  приводить до (3.8) та (3.48) упевнімося на конкретних прикладах, що (3.45) описує повністю весь спектр проявів явища ЕМІ.

Тобто покажемо, що локальна форма закону ЕМІ (3.45) описує всі ті явища, які в традиційній методиці вивчення інтерпретуються на основі уявлень про подвійну природу ЕРС індукції.

**Приклад 3.3.** Нехай в площині  $XOY$  СВ  $K$  в однорідному магнітному полі  $\vec{B} = k\vec{B}_z$  знаходиться контур (рис. 3.11). Перемичка  $AB$  рухається зі швидкістю  $\vec{v} = \vec{i}v$ . Знайти напруженість індукційного електричного поля, яке виникає в кожній точці перемички.

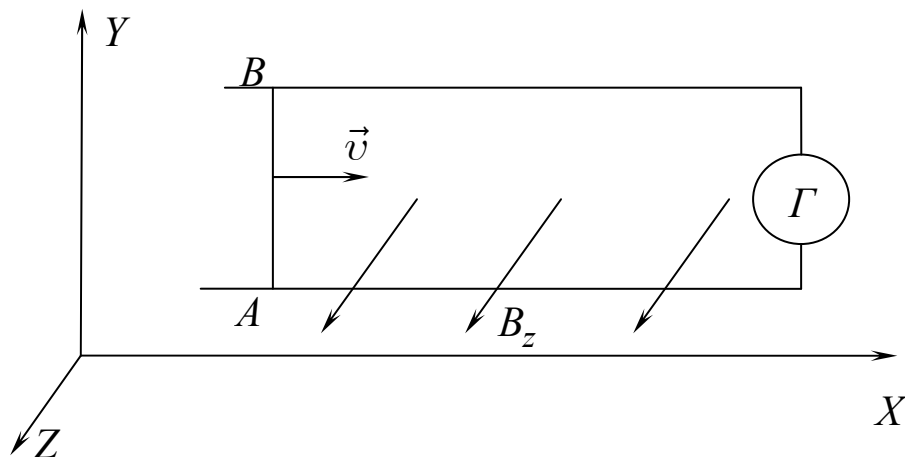


Рис. 3.11. В однорідному МП  $k\vec{B}_z$  рухається перемичка  $AB$

*Розв'язання:* Оскільки МП стаціонарне, то закон ЕМІ (3.45) для цього випадку має вигляд

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Тобто в кожній точці перемички маємо індукційне електричне поле напруженістю

$$\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}]; \quad \vec{E}_i = -vB_z\vec{j}.$$

У цій задачі, згідно з умовою, у кожній точці перемички електричне поле не вихрове,  $\text{rot}\vec{E} = 0$ . У цьому можна впевнитися безпосереднім обчисленням величин  $\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]$  або  $-(\vec{v}\nabla)\vec{B}$ .

**Приклад 3.4.** Геометрія задачі така ж як і в **Прикладі 3.3**, але МП неоднорідне,  $\vec{B} = \vec{k}B_z(x) = \vec{k}B_1x^2$ , де  $B_1$  – деяка постійна. Знайти напруженість індукційного електричного поля, яке виникає в кожній точці перемички.

*Розв'язання:* Використаємо закон ЕМІ

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]$$

Перш за все впевнимся безпосереднім обчисленням, що

$$-(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Дійсно, у цьому прикладі

$$(\vec{v}\nabla)\vec{B} = v_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = v\vec{k} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \vec{k} 2xvB_1;$$

$$[\vec{v}, \vec{B}] = -\vec{j}vB_z = -\vec{j}vB_1x^2;$$

$$\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = -\left[ \left( -\vec{i} \frac{\partial}{\partial z} vB_z \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x} vB_z \right] = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial x} vB_z = -\vec{k} 2xvB_1.$$

Таким чином

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{v}\nabla)\vec{B} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = -2\vec{k}xvB_1.$$

З урахуванням геометрії задачі останнє диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\text{rot}_z\vec{E} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -2\vec{k}xvB_1;$$

$$dE_y = -2\vec{k}xvB_1 \cdot dx; \quad E_y = -vB_1x^2 + C = -vB_1x^2.$$

Одержуємо добре відомий зі шкільного та загального курсу фізики результат: напруженість стороннього електричного поля визначається силою Лорентца й дорівнює

$$\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}(x)] = -\vec{j}vB_1x^2.$$

**Приклад 3.5.** Нехай уздовж осі  $OX$  знаходиться достатньо довгий лінійний ППС (див. рис. 3.12). Використовуючи (4.35), знайти індукційне електричне поле в «точці», яка рухається зі швидкістю  $\vec{V} = V\vec{j} = \text{const}$ .

*Розв'язання:* Вектор магнітної індукції в довільній точці простору визначається:

$$\vec{B}(y,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} [\vec{i}, \vec{r}] = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y^2 + z^2)} (-z\vec{j} + y\vec{k}),$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні орти,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, який визначає точку поля.

Магнітне поле стаціонарне, але неоднорідне.

Припустимо, що «точка» спостереження рухається з постійною швидкістю вздовж вісі  $OY$ ,  $\vec{V} = V\vec{j} = \text{const}$ .

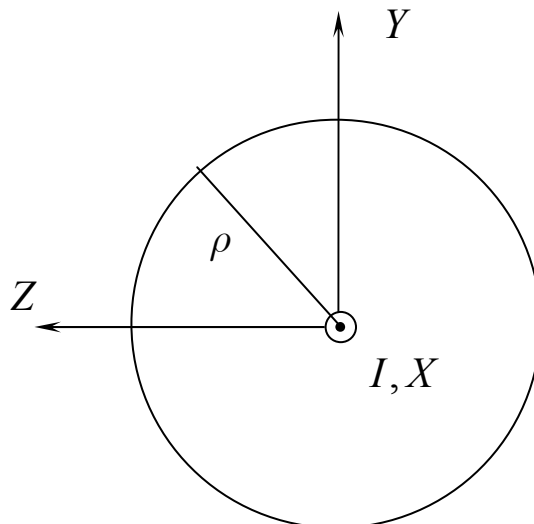


Рис. 3.12. Вздовж осі  $OX$  розташований достатньо довгий ППС, сила струму  $I$

Тоді для нашого випадку

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B} = (\vec{V}\nabla)\vec{B} = V_x \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + V_y \frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + V_z \frac{\partial\vec{B}}{\partial z} = V_y \frac{\partial\vec{B}}{\partial y};$$

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z = \vec{j}B_y + \vec{k}B_z;$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \vec{j} \frac{\partial B_y}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial B_z}{\partial y}.$$

Оскільки  $\vec{V} = V\vec{j} = \text{const}$ , повна похідна  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  дорівнює:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{V}\nabla)\vec{B} = V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \vec{k}V \frac{\partial B_z(y)}{\partial y} = \vec{k}V \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{y^2} \right).$$

Значить, закон ЕМІ набуває вигляду:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{V}\nabla)\vec{B}.$$

$$\text{Тому } (\text{rot}\vec{E})_z = -\frac{\partial E_x}{\partial y} = -V \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{y^2} \right) = V \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{y^2} \right).$$

І звідси отримуємо величину напруженості індукційного електричного поля в точці простору на віддалі  $y$  від ППС:

$$E_x = V \frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

Це ж значення ми одержимо відразу, не знаходячи попередньо  $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ , а врахувавши, що при такій умові задачі  $(\vec{V}\nabla)\vec{B} = -\text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]$  (див. формулу (3.34))

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{V}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}],$$

що ще більш детально випливає із закону ЕМІ (3.45)

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B} \right] = \\ &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] - (\vec{B}\nabla)\vec{V} - \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} + \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \end{aligned}$$

Тобто,  $\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}]$ , а для нашої задачі  $\vec{E} = [\vec{V}, \vec{k}B_z]$  і одержуємо той же результат:

$$E_x = \left| [\vec{V}, \vec{k}B_z] \right| = V \frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

Ці результати дозволяють стверджувати (в більш спрощеному формулюванні), що причиною виникнення ЕРС індукції є сила Лорентца.

**Приклад 3.6.** У неоднорідному стаціонарному полі (див. рис. 3.12) уздовж осі  $OY$  рухається рівноприскорено «точка» (або відрізок провідника, який паралельний осі  $OX$ ). Прискорення  $a$ . Знайти індукційне електричне поле в цій «точці».

*Розв'язання:* Для вихору індукційного електричного поля маємо:

$$\text{rot}\vec{E} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (3.49)$$

Ураховуючи вираз для векторного добутку векторів  $[\vec{V}, \vec{B}]$ ,  $[\vec{V}, \vec{B}] = \vec{i}V_y B_z$ , для ротора  $[\vec{V}, \vec{B}]$  одержуємо:

$$\text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] = \text{rot}(\vec{i}V_y B_z) = \vec{j} \frac{\partial}{\partial z}(V_y B_z) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z).$$

Тобто права частина рівняння (3.49) дорівнює

$$-\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{2ay} \cdot \frac{\mu_0 I}{2y\pi} \right) = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi y^{3/2}} \vec{k}$$

Але  $\text{rot}\vec{E} = \vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{k} \frac{\partial E_x}{\partial y}$ , тому із закону ЕМІ одержуємо дифе-

ренційне рівняння:

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi y^{3/2}};$$

$$E_x = -\frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi} \int \frac{dy}{y^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

Якщо помножити чисельник і знаменник на  $\sqrt{y}$ , то одержуємо

$$E_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2a}{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{V_y \mu_0 I}{2y \pi} = V_y \frac{\mu_0 I}{2\pi y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

Чи можна в цій і подібних задачах вважати, що швидкість залежить від координати  $y$  і в правій частині закону ЕМІ (3.45) враховувати доданок  $\text{div}\vec{V}$ , оскільки  $V_y = at = \sqrt{2ay} = f(y)$ ?

При знаходженні  $\text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]$  швидкість є функцією  $y$ , але  $\text{div}\vec{V} = 0$  завжди, яка не була б залежність швидкості руху «точки спо-

стереження» від просторових координат. «Нестисливість тіла» – означає, що  $div\vec{V} = 0$ .

Порівнюючи розв'язки двох останніх прикладів бачимо, що при русі в неоднорідному магнітному полі з постійною швидкістю  $E_x \approx \frac{1}{y}$ . При русі ж в цьому неоднорідному магнітному полі, але зі швидкістю, яка залежить від координати  $V_y = at = \sqrt{2ay} = f(y) - E_x \approx \frac{1}{\sqrt{y}}$ .

**Приклад 3.7.** Показати, що за умови **Прикладу 3.6** має місце така рівність

$$-(\vec{V}\nabla)\vec{B} = rot[\vec{V}, \vec{B}] - (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{B} \cdot div\vec{V}.$$

*Розв'язання:* 1. Із попереднього прикладу ми маємо

$$rot[\vec{V}, \vec{B}] = rot(\vec{i}V_y B_z) = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi y^{3/2}} \vec{k}.$$

2. Диференційна операція  $(\vec{B}\nabla)\vec{V}$  означає

$$(\vec{B}\nabla)\vec{V} = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{V}.$$

Коли «точка» рухається вздовж осі  $OY$ , то  $(\vec{B}\nabla)\vec{V} = \left( B_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{V} = B_y \frac{\partial}{\partial y} (\vec{j}V_y) = 0$ , оскільки  $B_y = 0$  на осі  $OY$  (див. рис. 3.12).

У цьому прикладі  $(\vec{B}\nabla)\vec{V} \neq 0$ , тільки тоді коли «точка» рухається нерівномірно ще (або) й у напрямку осі  $OZ$ , тобто, при умові  $\vec{V} = \vec{i}V_x + V_y(y, z)\vec{j} + \vec{k}V_z(y, z)$ .

3.  $V_y = at = \sqrt{2ay} = f(y)$ .

Якщо так, то  $div\vec{V} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{2ay} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{y}}$ .

Тобто права частина нашої рівності дорівнює

$$-\vec{k} \frac{\partial}{\partial y} (V_y B_z) + \vec{k} B_z \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{y}} =$$

$$= -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{2ay} \cdot \frac{\mu_0 I}{2y\pi} \right) + \vec{k} B_z \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{y}} = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2\pi y^{3/2}} \vec{k}.$$

Оскільки  $rot[\vec{V}, \vec{B}] + \vec{B} \cdot div\vec{V} = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2\pi y^{3/2}} \vec{k}$ , то для порівняння

знайдемо  $-(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ .

Оскільки  $\vec{B}(y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} [\vec{i}, \vec{r}] = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y^2 + z^2)} (-z\vec{j} + y\vec{k})$ , то

на осі  $OY$   $\vec{B} = \vec{k} B_z(y) = \vec{k} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$ .

$$\begin{aligned} (\vec{V}\nabla)\vec{B} &= V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \\ &= \sqrt{2ay} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{y^2} \right) \vec{k} = -\frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2\pi y^{3/2}} \vec{k}. \end{aligned}$$

Тобто, рівність має місце.

Але незважаючи на це, при використанні закону ЕМІ (3.45), навіть якщо швидкість руху «точки спостереження» й залежить від просторових координат  $x, y, z$ , слід вважати, що  $div\vec{V} = 0$ .

А якщо ми маємо й поступальний рух «точки спостереження», то закон (3.45) спрощується до (3.47)

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot[\vec{V}, \vec{B}],$$

у якому  $\vec{V}$  та  $\vec{B}$  слід розглядати (залежно від умов конкретної задачі) як функції просторових координат.

Тому, можливо, при використанні (3.45) простіше знаходити відразу диференціальну операцію  $-(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ .

**Приклад 3.8.** В однорідному МП  $\vec{B} = \vec{k} B_z$  у площині  $XOY$  знаходиться дріт, що має форму параболи (рис. 3.13). З вершини параболи переміщують поступально й без початкової швидкості перемичку з постійним прискоренням  $a$ . Знайти ЕРС індукції в контурі, що утворився, як функцію координати  $y$ .



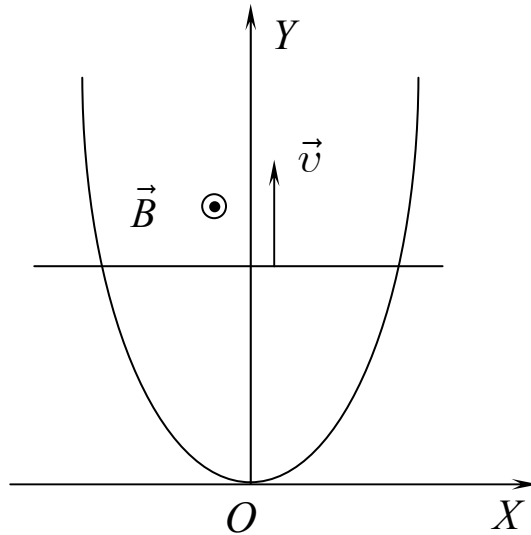


Рис. 3.13

Розв'язання:

$$\text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] = \text{rot}(\vec{i}V_y B_z) = \vec{j} \frac{\partial}{\partial z}(V_y B_z) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z).$$

Тобто права частина рівняння (3.49) дорівнює

$$-\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{2ay} \cdot B_z) = -\frac{B_z \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot y^{1/2}} \vec{k}.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{B_z \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot y^{1/2}}$$

для величини індукційного електричного поля, одержуємо

$$E_x = \sqrt{2ay} \cdot B_z.$$

Позитивне значення  $E_x$  означає, що вектор напруженості індукційного електричного поля направлений вздовж осі  $OX$ .

У кожному мить ЕРС індукції дорівнює

$$\varepsilon = E_x 2x = \sqrt{2ay} \cdot B_z 2\sqrt{\frac{y}{k}} = B_z y \sqrt{\frac{8a}{k}}.$$

**Приклад 3.9.** В електромагнітному полі РЗЧ в площині  $XOY$  знаходиться прямокутний контур  $L$  (рис. 3.14). Перемичка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж осі  $OX$ . Визначити напруженість електричного поля в кожній точці перемички та ЕРС індукції в контурі.

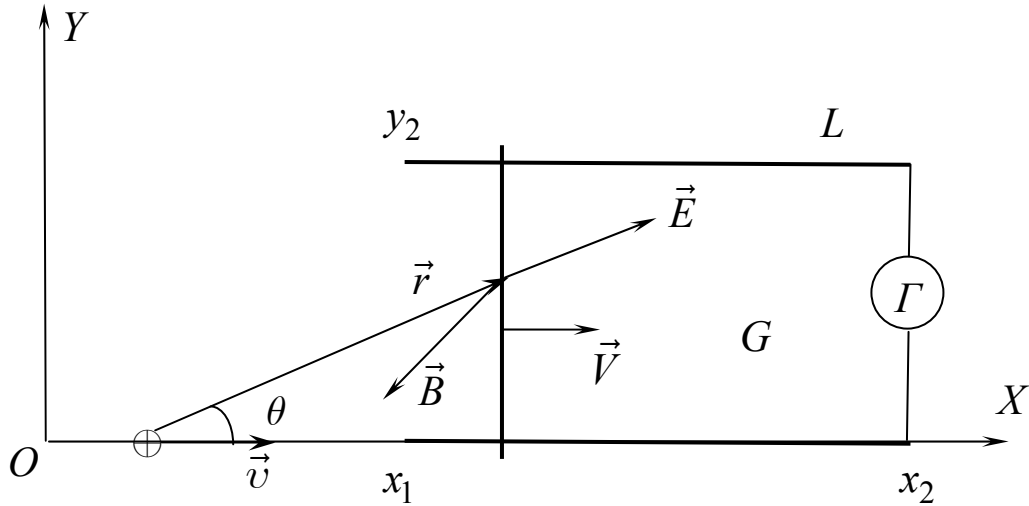


Рис. 3.14.

Розв'язання: Скористаємося законом ЕМІ

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - (\vec{V}\nabla)\vec{B},$$

де  $\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 q [\vec{v} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}}$ ;  $\vec{v}$  – швидкість руху ЗЧ.

Оскільки ми розглядаємо контур, який лежить в площині  $XOY$ ,

то  $\vec{B} = \vec{k}B_z$ , де  $B_z = \frac{\mu_0 q \cdot (1 - \beta^2) \cdot v \cdot y}{4\pi \left[ (x - vt)^2 + (y^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}}$ .

Із розв'язання та обговорення попередніх задач випливає

$$(\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V} = 0.$$

Було також показано, що непотенційне електричне поле РЗЧ в кожній точці простору й у довільний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем цієї ж РЗЧ.

Тобто при кожному миттєвому положенні перемички індукційне електричне поле буде породжуватися тільки доданком  $-(\vec{V}\nabla)\vec{B}$  і закон ЕМІ для даної задачі набуває вигляду

$$\text{rot}\vec{E} = -(\vec{V}\nabla)\vec{B}.$$

До речі, як і в **Прикладі 3.4**, можна впевнитися, що  

$$-(\vec{V}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}].$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} -(\vec{V}\nabla)\vec{B} &= -V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} - V_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = -V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = -\vec{k}V \frac{\partial B_z}{\partial x}; \\ -\vec{k}V \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \vec{k}V \frac{3\mu_0 q \cdot (1-\beta^2) \cdot v \cdot y(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + (y^2)(1-\beta^2) \right]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Диференційне рівняння, яке відповідає закону ЕМІ в цьому прикладі, має вигляд

$$\text{rot}_z \vec{E} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = V \frac{3\mu_0 q \cdot (1-\beta^2) \cdot v \cdot y(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + (y^2)(1-\beta^2) \right]^{5/2}},$$

А розв'язок його такий

$$E_y = \int V \frac{3\mu_0 q \cdot (1-\beta^2) \cdot v \cdot y(x-vt)}{4\pi \left[ (x-vt)^2 + (y^2)(1-\beta^2) \right]^{5/2}} dx = -VB_z.$$

Знову приходимо до висновку, що про індукційне електричне поле можна говорити як про поле сили Лорентца.

Таким чином, загальний аналіз та аналіз розв'язків **Прикладів 3.1–3.9** показав, що явище електромагнітної індукції може описуватися на основі узагальненого закону ЕМІ (3.45). Причому це узагальнення, як показано вище, впливає із «єдиного глибокого основоположного принципу».

Можливо й простіше «сприймати закон електромагнітної індукції як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ. Обидва ці явища, взагалі кажучи, незалежні одне від одного...» [65, с. 230] і аналізувати явище ЕМІ мовою поля сили Лорентца  $[\vec{V}, \vec{B}]$  та вихрового електричного поля,

зумовленого  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Але насправді ці явища **не є незалежними один від одного.**

**У математичному сенсі кожне з них дає свій внесок у загальну, повну зміну в часі вектора магнітної індукції.**

Дійсно, узагальнений закон ЕМІ

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - (\vec{V}\nabla)\vec{B} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{B}]$$

ураховує прояв цих явищ.

Доданки  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  і  $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$  у правій частині узагальненого закону

ЕМІ визначають разом матеріальну похідну за часом вектора  $\vec{B}$ . При певних обставинах зміна за часом вектора  $\vec{B}$  може визначатися явною залежністю  $\vec{B}(t)$ , а при інших умовах задачі або експериментальної ситуації зміна за часом вектора  $\vec{B}$  визначається рухом в неоднорідному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r})$ . І тоді можна говорити, що ці явища незалежні одне від одного.

У загальному випадку, на нашу думку, це прояви при різних фізичних обставинах (умовах) одного явища –  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  та породження вихрового електричного поля повною похідною за часом вектора  $\vec{B}$ .

### **3.7. Явище електромагнітної індукції при обертанні магнетиків в стаціонарному магнітному полі**

У навчально-методичній літературі відсутній порівняльний аналіз опису електромагнітних явищ, що виникають при обертанні намагнічених тіл.

Однак, як свідчить практика, такий аналіз є корисним і важливим для майбутніх учителів фізики.

Зокрема, у курсі загальної фізики, при знаходженні ЕРС індукції, яка виникає внаслідок обертання намагніченого циліндра (рис. 3.15), використовується «правило потоку»:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де приріст потоку  $d\Phi$  за проміжок часу  $dt$  дорівнює потоку вектора  $\vec{B}_0$  через поверхню  $acbb'c'a$ . І тоді ЕРС, згідно з [4, с. 347], [224, с. 550], дорівнює

$$\varepsilon = -\omega \int_a^b r \left\| \left[ \vec{B}_0, d\vec{l} \right] \right\|. \quad (3.50)$$

Оскільки в кожній точці на смужці бічної циліндричної поверхні  $cbb'c'$   $\vec{B} \perp d\vec{l}$ , то фактично приріст  $d\Phi$  зумовлений потоком вектора

$\vec{B}$  через поверхню  $acc'a$ . Але в такому способі знаходження ЕРС фізична причина виникнення її залишається нез'ясованою. Тобто незважаючи на те, що, як стверджується в [4, с. 347] «це безперечно правильний спосіб обчислення електричного поля», цей спосіб знаходження ЕРС є формальним і суперечливим [224, с. 550].

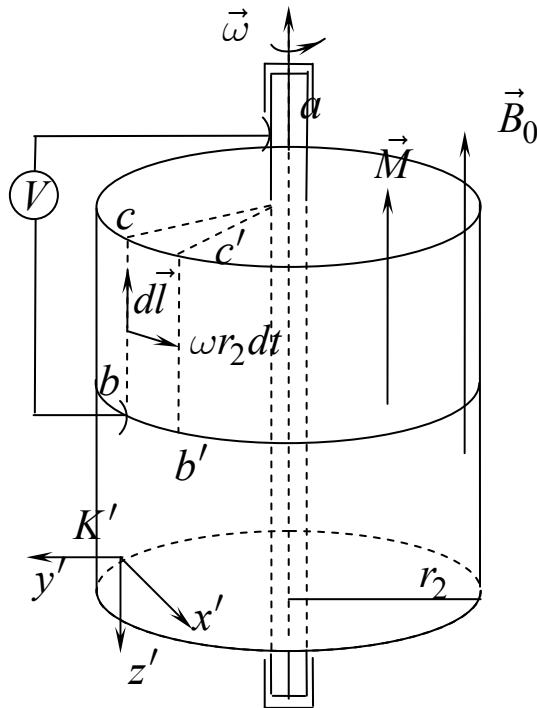


Рис. 3.15. Однорідний циліндричний магнетик обертається в магнітному полі

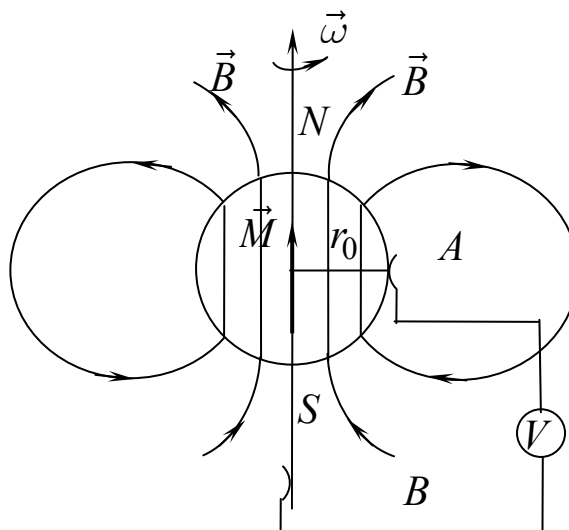


Рис. 3.16. Уніполярна індукція при обертанні однорідної намагніченої кулі

Але другий спосіб, запропонований у [4, с. 347], в основі якого роль сторонньої сили відіграє сила Лорентца, вже більшою мірою відпо-

відає фізичній реальності порівняно з першим. Тоді можна говорити про локалізацію ЕРС по радіус-вектору  $\vec{r}$ , проведеному від осі обертання до довільної точки циліндра.

ЕРС уніполярної індукції в подібній задачі у посібнику [156, с. 264–265] пропонується знаходити в системі відліку, пов'язаній з магнітом.

*Тоді ЕРС індукції зумовлена рухом (обертанням) провідника  $AVB$  в постійному полі магніту. Тобто ЕРС індукції виникає у зовнішній відносно магніту частині електричного кола. Але при такій геометрії за-*

$$\text{дачі } \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Розглянемо спочатку циліндричний магнетик (магнітна проникність  $\mu$ , радіус його  $r_2$ , радіус осі, навколо якої він обертається  $r_1$ ), що обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  у зовнішньому магнітному полі  $\vec{B}_0$  (рис. 3.15).

Для того, щоб використати методи СТВ зв'яжемо інерціальну СВ  $K'$  з довільною точкою магнетика. Тобто в дану мить швидкість початку координат цієї супутньої СВ  $\vec{v} = \omega \cdot [\vec{r}, \vec{k}']$ , де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від осі обертання до даної точки магнетика,  $\vec{k}'$  – орт в напрямку осі  $O'z'$  СВ  $K'$ . Як показано в посібнику А. А. Логунова [160], методи СТВ можна застосовувати й для неінерціальних СВ.

У випадку намагнічування достатньо довгого циліндричного магнетика, магнітне поле в СВ  $K'$  при швидкостях руху  $v \ll c$ , очевидно визначається  $\vec{B}' = \mu \vec{B}_0 = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$ , де  $\vec{M}$  – вектор намагнічування магнетика в даній його точці (див. напр. [209, с. 153]). Тому  $\vec{M} = \frac{\mu - 1}{\mu_0} \vec{B}_0$ .

Відносно СВ  $K'$  усі точки циліндра рухаються з миттєвою лінійною швидкістю  $\vec{v}' = \vec{v}_i - \vec{v} = [(\vec{r}_i - \vec{r}), \vec{k}'] \omega$ .

Тому з точки зору будь-якої супутньої СВ  $K'$  рух намагніченого магнетика видається поляризованим, причому вектор поляризації при  $v \ll c$  дорівнює [126, с. 322] (див. також п. 4.2.4 та формулу (4.39)):

$$\vec{P}'_i = \frac{[\vec{v}', \vec{M}'_i]}{c^2} \approx \frac{[\vec{v}', \vec{M}_i]}{c^2} = \frac{[\vec{v}', \vec{B}_0]}{c^2} \frac{\mu - 1}{\mu_0}, \quad (3.51)$$

де  $\vec{M}' \approx \vec{M}$  – вектор намагнічування в СВ, що пов'язана з  $i$  – точкою циліндра.

Унаслідок неоднорідної (радіальної) поляризації магнетика виникають пов'язані поляризаційні заряди, об'ємна густина яких визначається формулою  $\rho_{зв} = -div'_i \vec{P}'_i$ . Тоді з урахуванням (3.51) для  $\rho_{зв}$  одержуємо [182, с. 73–83]

$$\begin{aligned} \rho_{зв} &= -div'_i \vec{P}'_i = -div'_i \frac{[\vec{v}', \vec{M}'_i]}{c^2} = -\frac{1}{c^2} div' \left[ [\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}'_i \right] \omega = \\ &= -\frac{1}{c^2} div [\vec{v}_i, \vec{M}_i] = \frac{(\mu-1)\omega}{c^2 \mu_0} div \left[ \vec{B}_0, [\vec{r}, \vec{k}] \right] = -2B_0 \varepsilon_0 \omega (\mu-1). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Оскільки при використанні ідеального вольтметра струм в колі дорівнює нулеві, то згідно з формулами перетворення компонент електромагнітного поля в нерелятивістському наближенні  $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] = 0$ .

Тобто електричне поле в СВ  $K'$  відсутнє. Тоді напруженість електричного поля в лабораторній СВ дорівнює:  $\vec{E} = -[\vec{v}, \vec{B}] = -[\vec{v}, \mu \vec{B}_0]$ . Аналогічний результат для рівномірного та прямолінійного руху металеві пластины описаний і в [126, с. 345–347] (див. також [100, с. 183–195]).

Електричне поле  $\vec{E}$ , яке породжується певним об'ємним розподілом зарядів, компенсує електричне поле  $[\vec{v}, \mu \vec{B}_0]$ , що виникає внаслідок руху магнітного поля  $\mu \vec{B}_0$  відносно супутньої СВ.

Сумарна об'ємна густина заряду, що компенсує електричне поле  $[\vec{v}, \mu \vec{B}_0]$  і дорівнює сумі зв'язаного заряду та вільного заряду, визначається з рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \rho_{сум} &= \rho_{зв} + \rho = \varepsilon_0 div \vec{E} = -\varepsilon_0 div [\vec{v}, \mu \vec{B}_0] = \\ &= \mu \omega \varepsilon_0 div \left[ \vec{B}_0, [\vec{r}, \vec{k}] \right] = -2\mu \omega \varepsilon_0 B_0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

До речі, об'ємна густина вільного заряду при обертанні магнетика в зовнішньому магнітному полі

$$\rho = -2\mu \omega \varepsilon_0 B - (-2B_0 \varepsilon_0 \omega (\mu-1)) = -2\omega \varepsilon_0 B_0, \quad (3.54)$$

як виявляється, у точності дорівнює густині заряду, який з'являється в немагнітному металевому циліндрі при обертанні його в МП з індукцією  $\vec{B}_0$ .

Тоді різниця потенціалів між точками  $a$  та  $b$  дорівнює:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \left( -[\vec{v}, \mu \vec{B}_0] \right) d\vec{r} = -\frac{\mu \omega B_0}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (3.55)$$

Звичайно, при замиканні кола зовнішнє електричне поле навколо магнетика змінюється суттєво, а всередині магнетика буде існувати радіальне поле  $\vec{E}_l = [\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$  у СВ  $K$  та поле  $\vec{E}'_r = \Gamma[\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$  у СВ  $K'$ , які приведуть до виникнення ЕРС індукції та індукційного струму. Причому ЕРС індукції дорівнює

$$\varepsilon = \int_{r_1}^{r_2} ([\vec{v}, \mu\vec{B}_0]) d\vec{r} = \frac{\mu\omega B_0}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (3.56)$$

**Таким чином, ЕРС уніполярної індукції, яка виникає при обертанні магнетиків у зовнішньому магнітному полі, зумовлена радіальною поляризацією цього магнетика.**

Але в рамках шкільного чи загального курсу фізики можна в грубому наближенні сказати, що ЕРС уніполярної індукції зумовлена силою Лорентца, оскільки у формулах (3.50) (3.52) (3.55) (3.56) зустрічається співмножник, який дорівнює напруженості ЕП сили Лорентца –  $\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}]$ .

Але таке пояснення не є адекватним реальності. Наведемо аналогію: розрахунки втрат енергії (та інших величин) в лініях електропередач оснований на законах Ома і Джоуля-Ленца й уявленнях про передачу енергії по провідниках. А в суті енергія, яка споживається, повністю передається електромагнітним полем.

**Обертання постійних магнітів.** Якщо обертається однорідний циліндричний магніт (рис. 3.17), то в лабораторній системі відліку він виявляється радіально поляризованим

$$\vec{P}_i = \frac{[\vec{v}, \vec{M}'_i]}{c^2} \approx \frac{[\vec{v}, \vec{M}]}{c^2} = \frac{\omega}{c^2} [[\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}].$$

У радіальному напрямку в магніті виникає електричне поле, напруженість якого знаходиться із умови:

$$\text{div} \vec{E}_i = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{div} \vec{P}_i = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{div} \frac{\omega}{c^2} [[\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}].$$

Звідси знаходимо напруженість ЕП в кожній точці магніту:

$$\vec{E}_i = -\frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} [[\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}].$$

У залежності від форми магніту напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  усередині магніту визначається  $\vec{H} = -N\vec{M}$ , де  $N$  – так званий розмагнічуючий коефіцієнт. Для нескінченно довгого намагніченого циліндра  $N = 0$ . А наприклад, для рівномірно намагнічених кулі (рис. 3.16) й тонкого диску розмагнічуючий коефіцієнт, відповідно, дорівнює  $N = \frac{1}{3}$  і  $N = 1$ .



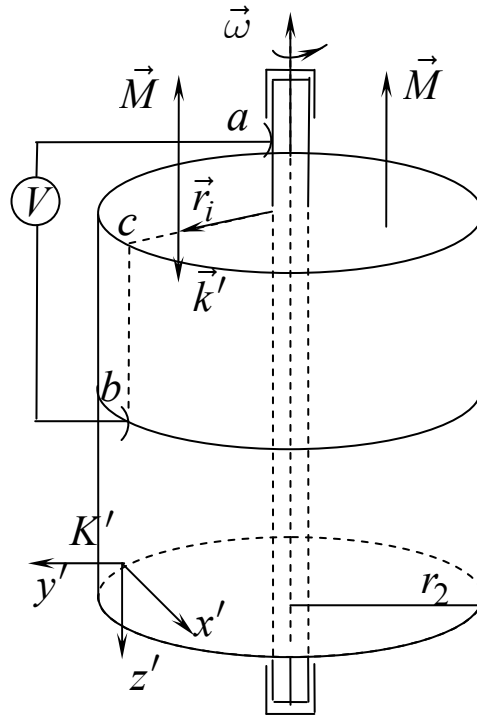


Рис. 3.17. Уніполярна індукція при обертанні однорідного циліндричного магніту

Якщо знехтувати крайовими ефектами, і вважати, що циліндричний магніт достатньо довгий, то напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  всередині магніту дорівнює нулю [178, с. 275–278], а  $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ .

Тому для напруженості ЕП в довільній точці магніту маємо

$$\vec{E}_i = -\frac{\omega}{\epsilon_0 c^2} \left[ [\vec{r}_i, \vec{k}'], \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = -[\vec{v}_i, \vec{B}]. \quad (3.57)$$

Таким чином, ЕРС індукції виникає **не тому, що ЗЧ, деякий контур чи частина його рухаються в магнітному полі магніту, а тому що рухомий магнетик поляризується.**

Таким чином, явище уніполярної індукції – це суто релятивістський ефект.

Хоча формально й у повній відповідності до чисельних значень ЕРС, яка при цьому виникає, можна пояснити уніполярну індукцію та як результат дії сили Лорентца на електрони, що обертаються разом з магнітом.

У цій задачі ЕРС уніполярної індукції дорівнює

$$\varepsilon = \int_a^b [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} r \omega B \cdot dr = \frac{\omega \mu_0 M}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (3.58)$$

У випадку уніполярного генератора, модель якого зображена на рис. 3.16, ЕРС дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\omega \mu_0 M}{3} r_0^2,$$

оскільки для намагніченої кулі  $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$ .

При поясненні релятивістського ефекту – поляризації рухомого намагніченого тіла, у методичному плані має сенс розглянути дещо спрощену задачу.

**Приклад 3.10.** Нехай рівномірно намагнічений брусок (рис. 3.18) рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  уздовж вісі  $OX$ . Знайдемо напруженість ЕП між точками  $A$  і  $B$  та ЕРС уніполярної індукції.

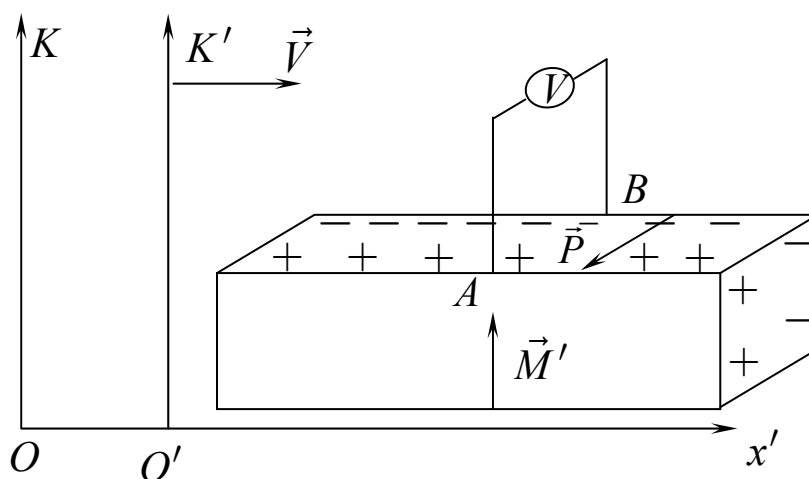


Рис. 3.18. Поляризація рівномірно рухомого намагніченого бруска та явище уніполярної індукції

*Розв'язання:* Пов'яжемо систему відліку  $K'$  з намагніченим бруском. Тоді в СВ  $K$  брусок, згідно з (4.39), буде характеризуватися вектором поляризації, п. 4.2.4. (див. також [126, с. 322])

$$\vec{P} = \vec{P}' + \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2} = \frac{[\vec{V}, \vec{M}]}{c^2}.$$

Дивергенція вектора  $\vec{E}$  електричного поля, яке з'являється внаслідок поляризації, через параметри задачі виражається

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{P} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \operatorname{div} [\vec{V}, \vec{M}] = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} (\vec{M} \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{V} \operatorname{rot} \vec{M}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{V} \operatorname{rot} \vec{M}. \end{aligned}$$

З іншого боку  $rot\vec{M} = rot\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , оскільки вихор вектора

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  дорівнює нулеві, бо струми провідності відсутні в нашій задачі. Тому

$$div\vec{E} = \frac{\vec{V}}{\varepsilon_0 c^2 \mu_0} rot\vec{B}.$$

Але  $\vec{V}rot\vec{B}$  при постійній швидкості дорівнює  $-div[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Таким чином, напруженість електричного поля в кожній точці простору, у якій індукція магнітного поля має значення  $\vec{B}$ , дорівнює

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}],$$

що, власне, впливає й з ФПКЕМП [126, с. 327] (див. також **Приклад 4.3** та формулу (4.81)).

Електротехнічне пояснення цього явища, на базі спрощеної форми принципу відносності, наступне. Якщо біля верхньої горизонтальної поверхні бруска знаходиться нерухома ЗЧ, то на неї збоку рухомого намагніченого бруска діє така сама сила, яка виникає й у тому випадку, коли брусок нерухомий, а ЗЧ рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ . Але в цьому випадку сила рівна силі Лорентца  $q[\vec{V}, \vec{B}]$ . Значить рухомий намагнічений брусок створює поле  $-[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Якщо ж аналізувати цю задачу мовою величин, які характеризують електромагнітне поле, то можна говорити, що це електричне поле,  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$ , породжується рухомим магнітним полем. Хоча при такій інтерпретації в цій задачі й виникають деякі суперечності.

Дійсно, якщо ЗЧ нерухома, то чому внаслідок руху магніту виникає електричне поле? Не можна вважати, що при русі магніту разом з ним переміщуються й «магнітні силові лінії», які начебто, при електротехнічному поясненні, зумовлюють появу сили  $-q[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Індукція магнітного поля  $\vec{B}$ , створеного рухомим намагніченим бруском (магнітом), у точці знаходження ЗЧ незмінна в часі. Тобто вимірювання в околі ЗЧ не можуть дати відповідь на те, рухається магніт чи ні. Таким чином, при такому підході до інтерпретації явища уніполярної індукції причина виникнення поля  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  залишається незрозумілою.

Але тут проявляється те, що це електричне поле в суті є електростатичним за своєю природою. **Воно породжується поляризацією намагніченого бруска.**

Упевнимся, що поле  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  є потенційним.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}] = \\ &= -\left[ (\vec{B} \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \nabla) \vec{B} + \vec{V} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{V} \right] = (\vec{V} \nabla) \vec{B}. \end{aligned}$$

У нашій задачі  $(\vec{V} \nabla) \vec{B} = 0$ , тому що у випадку нескінченного бруска поле  $\vec{B}$  не залежить від координати  $x$ . І тому  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ .

Навіть і в тому випадку, коли рухається магніт кінцевих розмірів, формула  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  залишається вірною, але при цьому  $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$ :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (\vec{V} \nabla) \vec{B}.$$

Дійсно, використовуючи вираз для повної похідної, яка для спостерігача, що рухається разом з магнітом, дорівнює нулеві,  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{B} = 0$ , маємо:

$$(\vec{V} \nabla) \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

А тому одержуємо закон ЕМІ:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (\vec{V} \nabla) \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

У наведених вище розрахунках нехтували додатковим внеском у сумарне магнітне поле в магнетику чи магніті, зумовленим відносним рухом зарядів, розподілених згідно з формулою (3.54). Ми також знехтували внеском відцентрової сили інерції в сумарне індукційне електричне поле.

### **Висновки до розділу 3**

1. Твердження, що закон ЕМІ в інтегральній формі («правило потоку») (3.1) є експериментальним законом, вважаємо помилковим.

Розуміння, що закон (3.1) не є експериментальним законом, є надзвичайно важливим.

Цей висновок важливий також для усвідомлення співвідношення теоретичного й емпіричного в процесі пізнання фізичних явищ та формулювання законів і принципів, які описують ці явища.

2. Найбільш чітко й «абсолютно по-новому» теорію явища ЕМІ дав Максвелл після того, як пов'язав ЕРС індукції з повною електротонічною інтенсивністю вздовж замкненої кривої (див. (3.6)). Тобто, тільки в результаті аналізу так званого електротонічного стану Максвеллу вдалося сформулювати закон ЕМІ.

3. У навчально-методичній літературі «правило потоку» (3.1) виводиться з аналізу рис. 3.1 та виходячи з виразу для сили Лорентца як сторонньої сили. Саме через математичну простоту та прозорість цей спосіб обґрунтування (3.1) є найбільш поширеним в науково-методичній літературі.

У той же час, незважаючи на те, що електродинаміка є релятивістською теорією, аналіз рис. 3.1 проводиться на базі класичної фізики (класичні формули додавання швидкостей).

4. При обґрунтуванні локальної форми закону ЕМІ в ряді посібників з електродинаміки [200, с. 233; 152, с. 279; 153, с. 350; 201, с. 107] залишається незрозумілим і необґрунтованим перехід від повної похідної до частинної й навпаки. Некоректним і непослідовним виявляється

вивід рівняння  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  з «правила потоку» (3.1).

5. Якщо інтегральною формою закону ЕМІ є (3.8)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l},$$

то в локальній формі цього закону ( $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ) ніяк не представлений другий доданок правої частини (3.8).

6. Висновок у фізичній енциклопедії відносно того, що співвідношення

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ або } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

універсально застосовні [235, с. 537] і до довільних рухомих середовищ і систем, суперечить відповідним положенням посібника Д. В. Сивухіна [216, с. 271–272] і суті цих рівнянь Максвелла.

Тобто такий висновок є помилковим, оскільки дані рівняння Максвелла, (3.10), описують явище ЕМІ в нерухомих середовищах та контурах.

7. Виходячи із суті електродинаміки як локальної й польової теорії, інтегральна форма закону ЕМІ повинна бути наслідком локальної форми цього закону. Тобто вихідним законом слід вважати визначення

$rot\vec{E}$  в довільно рухомій точці простору, а не тільки в нерухомій ( $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ).

8. Таким чином, можна сказати, що при описі явища ЕМІ ряд положень (як фізичних, так і методичних) є некоректними, непослідовними і навіть помилковими. Усе це вимагає більш уважного й глибокого аналізу явища ЕМІ та методики його вивчення.

9. В останньому варіанті своєї праці [165] Д. К. Максвелл не подав закон ЕМІ у формі  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ , але навів локальний вираз для напруженості електричного поля, який враховує й індуковане поле (два типи ефектів ЕМІ:  $[\vec{V}, \vec{B}]$  та  $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ), і поле заряджених частинок  $\nabla\varphi$  (див. формулу (3.7)).

У зв'язку з цим існує точка зору [175, с. 92–94], що (див. також пп. 3.3, 3.4) Максвелл зміг більш точно й адекватно описати суть явища ЕМІ, ніж це зроблено в сучасних літературних джерелах.

Тобто, подання (3.7) якраз і відображає подвійну природу ЕРС індукції (на якій в сучасних навчальних посібниках весь час наголошується).

10. Показано, що в основі ЯЕМІ лежать принцип відносності, закон Кулона, принцип суперпозиції.

11. Показана необхідність обов'язкового врахування релятивістських ефектів, навіть якщо вони й нескінченно малі, для коректного опису електромагнітних явищ.

Дійсно, якщо не враховувати релятивістських поправок у виразах для напруженості електричного  $\vec{E}$  та індукції магнітного  $\vec{B}$  поля РЗЧ, то в СВ  $K$   $rot\vec{E}_{кл} = 0$ , а  $\frac{\partial\vec{B}_{кл}}{\partial t} \neq 0$ , і таким чином,  $rot\vec{E}_{кл} \neq \frac{\partial\vec{B}_{кл}}{\partial t}$ .

12. Обґрунтовано формулу (3.27) для швидкості зміни в часі потоку довільного векторного поля  $\vec{a}$  через рухому поверхню  $S$ .

13. Показано, що формула (3.27) має місце насправді тільки при  $\vec{v} = \text{const}$  (швидкість  $\vec{v}$  однакова для всіх точок контуру).

Підкреслимо, що в усіх посібниках з електродинаміки вважається без обґрунтування й пояснення, що швидкість різних ділянок контуру одна й та сама.

14. Показано, що формула (3.27) може бути обґрунтована також виходячи з повної (субстанціональної) похідної по часу довільного векторного поля.

15. Показано, що закон ЕМІ у формі  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  є наслідком принципу відносності та закону Кулона.

16. Таким чином, в результаті проведених досліджень можна констатувати (на відміну від тверджень [233, с. 53; 65, с. 230] про відсутність єди-

ного глибокого принципу, який лежить в основі закону ЕМІ), що знайдений такий фундаментальний принцип. Це подання закону ЕМІ у формі

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

17. Показано, що при застосуванні узагальненого закону ЕМІ [132; 100]

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

знімаються й спростовуються непослідовності в інтерпретації явища ЕМІ, пов'язані з так званою подвійною природою ЕРС індукції [233; 65].

18. Показано, що на основі узагальненого закону ЕМІ

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt},$$

де

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \operatorname{div}\vec{V},$$

можна описати всі ті явища, які в традиційній методиці вивчення ЯЕМІ інтерпретуються на основі уявлень про подвійну природу ЕРС індукції.

19. Використання методів СТВ при поясненні природи ЕРС уніполярної індукції робить зайвими й надуманими проблеми нерелятивістського обґрунтування цього явища. А саме: чи обертається магнітне поле разом з магнітом, у якій частині замкнутого контуру виникає ЕРС індукції: у нерухомих провідниках, що приєднують вольтметр до уніполярного генератора чи всередині самого магніту. Релятивістський підхід спростовує подібні суперечливі пояснення природи ЕРС уніполярної індукції.

Подібні міркування стають досить корисними для підвищення фундаментальної підготовки майбутніх учителів фізики та випускників ВНЗ за спорідненою спеціальністю.

20. Для електромагнітного поля РЗЧ мають місце хвильові рівняння

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

21. Показано в результаті проведених досліджень, що твердження «Співвідношення  $IR - \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$  є незалежним законом, одержаним

експериментально, який жодним чином не може бути виведений із співвідношень, що наводилися раніше. Всупереч деяким твердженням закон індукції не виводиться також і із закону збереження енергії повної системи струмів в магнітному полі» [199, с. 159] є помилковим.

## Розділ 4

### ФОРМУВАННЯ УЯВЛЕНЬ ПРО ЄДНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ТА МАГНІТНОГО ПОЛІВ

#### **4.1. Огляд методик формування поняття «електромагнітне поле»**

Як відомо, електромагнітне поле, яке передає взаємодію між зарядженими частинками, адекватно описується тензором електромагнітного поля [155; 227].

Залежно від системи відліку, у якій спостерігається чи описується конкретна електромагнітна взаємодія, електромагнітне поле проявляється або як суто електричне, або як суто магнітне, або як деяка суперпозиція електричного й магнітного полів.

При формуванні поняття електромагнітного поля в існуючих на даний момент посібниках з електродинаміки та методик вивчення електромагнетизму [178; 65; 233], спочатку вивчаються електро- та магніто-статичні поля й уважається [36; 55; 29; 42], що «лише при вивченні явища електромагнітної індукції виявляється зв'язок між магнітним та електричним полем» [55, с. 53].

По-перше, на наш погляд, останнє твердження не відповідає фізичній реальності й по суті є помилковим. Взаємозв'язок електричного та магнітного полів, відносність поділу електромагнітного поля на електричне та магнітне достатньо повно, і не тільки на якісному рівні, можуть бути описані при вивченні електромагнітного поля зарядженої частинки, яка рухається прямолінійно з довільною за величиною постійною швидкістю [99; 142] (див. **Розділ 2** та п. 4.3.3).

По-друге, методичний недолік такого висновку полягає ще й в тому, що ілюстрація зв'язку між законами електродинаміки та спеціальною теорією відносності стає можливою (і до того ж тільки якісною) лише при вивченні явища електромагнітної індукції. Класична електродинаміка є по суті своїй релятивістською. А ігнорування при вивченні електродинаміки такою фундаментальною фізичною теорією, якою є спеціальна теорія відносності, приводить до порушення одного з принципів дидактики.

Наш досвід викладання електродинаміки показує, що незалежно одне від одного вивчення електро- та магнітостатичних полів приводить до стійких і невірних уявлень про електричне та магнітне поля як окремих сутностей (видів матерії), ніяк не пов'язаних між собою, та єдиним електромагнітним полем. На цей недолік у методиці формування поняття електромагнітного поля ще раніше зверталась увага в [36].



Найбільш повно сукупність уявлень про єдине електромагнітне поле можна сформулювати (звичайно разом з поясненням загальноприйнятих якісних прикладів [36; 69; 42; 41; 107; 110; 58]) розглядаючи обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля, наслідки та застосування їх для аналізу різноманітних електродинамічних прикладів.

Уважаємо, що в проблемі формування уявлень про електромагнітне поле важливим являється розкриття наступних питань:

а) обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля та на основі їх формування поняття про відносність поділу електромагнітного поля на суто магнітне та суто електричне;

б) детальний аналіз електродинамічних прикладів і явищ, у яких проявляються властивості електромагнітного поля (тепло Джоуля-Ленца, процес заряджання та розряджання конденсатора, потік електромагнітної енергії в колі постійного чи квазістаціонарного струму, взаємозв'язок між електричним та магнітним полями, що змінюються в часі, та інше);

в) вивчення властивостей поля випромінювання (електромагнітні хвилі).

У цій монографії зупинимося тільки на розкритті першого та частково другого з означених вище питань.

Ставимо за мету зробити детальний огляд деяких питань, пов'язаних з відносністю електричного та магнітного полів і проілюструвати застосування методів релятивістської електродинаміки для аналізу електродинамічних задач.

Покажемо, що значна частина питань навчальних дисциплін «Електромагнетизм» й «Електродинаміка» може розглядатися як наслідок формул перетворення компонент електромагнітного поля (вираз для сили Лорентца, формули напруженості електричного та магнітного полів зарядженої частинки, що рухається з постійною швидкістю, значна частина задач, пов'язаних з явищем електромагнітної індукції та інше).

## **4.2. Огляд різних способів обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля**

Як показує аналіз науково-методичної літератури з електродинаміки [100], існує декілька способів обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля (ФПКЕМП), які відрізняються один від одного різним за рівнем складності та узагальненням підходами. Так, можна виокремити наступні способи.

1. Виходячи із вимоги коваріантності рівнянь Максвелла щодо перетворень Лорентца [182; 100].

2. Спосіб, оснований на трансформаційних властивостях компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої.

3. ФПКЕМП можна також обґрунтувати з вимоги релятивістської інваріантності виразу для сили Лорентца [178, с. 73–74].

4. Аналізуючи з допомогою принципу відносності основні експериментальні закони електродинаміки [142].

5. Спосіб, що ґрунтується на детальному аналізі властивостей ЕМП зарядженої частинки, що рухається рівномірно і прямолінійно ( $v < c$ ) [99].

6. На основі аналізу електромагнітного поля рухомої зарядженої нитки [110].

Кожен з цих способів має свої переваги та недоліки при порівнянні з іншими.

Детальний опис та аналіз цих конкретних способів обґрунтування ФПКЕМП поданий у посібнику [100].

Далі конспективно прокоментуємо ці способи обґрунтування ФПКЕМП.

#### 4.2.1. Коваріантність рівнянь Максвелла та формули перетворення компонент електромагнітного поля

Формули перетворення компонент полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  та  $\vec{H}$ ,  $\vec{P}$  та  $\vec{M}$  при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ , тобто формули, з допомогою яких можна описувати й вивчати електромагнітні процеси в рухомій СВ  $K'$ , можуть бути одержані з умови лорентцковаріантності рівнянь Максвелла. Проілюструємо суть цього способу обґрунтування ФПКЕМП.

Уважаємо при цьому, що СВ  $K'$  рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  уздовж осі  $OX$  СВ  $K$ .

Згідно з принципом відносності, усі основні рівняння фізики не повинні змінювати свою математичну форму при переході від однієї системи відліку до іншої.

Безпосередньо можна впевнитися, що рівняння Максвелла не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої, тобто вони є коваріантними при перетвореннях Лорентца. Але при цьому всі величини, що входять у систему рівнянь Максвелла, повинні перетворюватися за певними законам при переході від однієї СВ до іншої.

Дійсно, в системі рівнянь Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad (4.1a)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho; \quad (4.1б)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad (4.1в)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (4.1г)$$

перейдемо від координат події  $x, y, z, t$  у СВ  $K$  до координат тієї ж події, але в СВ  $K' - x', y', z', t'$ .

Оскільки, згідно з перетвореннями Лорентца,  $x' = x'(x, t)$ ,  $t' = t'(x, t)$ , і  $x = x(x', t')$ ,  $t = t(x', t')$ , то враховуючи явний вигляд перетворень Лорентца

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \alpha'_{ik} \cdot x_k; \\ x_i &= \alpha_{ik} \cdot x'_k, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

де  $\alpha'_{ik}$  та  $\alpha_{ik}$  – матриці, відповідно, прямих та обернених перетворень Лорентца (1.9) і (1.10); індекси  $i, k$  пробігають значення  $i, k = 1 \dots 4$ , для операторів частинних похідних, які необхідні для запису рівнянь Максвелла в СВ  $K'$  за відомим виглядом цих рівнянь в СВ  $K$ , одержуємо [168]:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \right); \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad (4.4)$$

аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

У системі рівнянь Максвелла (4.1) зробимо заміну змінних з допомогою (4.3), (4.4).

Спочатку рівняння (4.1в) після нескладних алгебраїчних перетворень, перегрупування доданків і введення позначень:

$$E'_x = E_x; E'_y = \Gamma(E_y - VB_z); E'_z = \Gamma(E_z + VB_y); \quad (4.5)$$

$$B'_x = B_x; B'_y = \Gamma\left(B_y + \frac{VE_z}{c^2}\right); B'_z = \Gamma\left(B_z - \frac{VE_y}{c^2}\right), \quad (4.6)$$

набуває вигляду

$$\text{rot}' \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}. \quad (4.7)$$

**Таким чином, локальна форма закону електромагнітної індукції й у СВ  $K'$  має таку ж форму, як і в СВ  $K$  лише при умовах (4.5) та (4.6).**

Подібно до перетворення рівняння Максвелла (4.1в) зробимо аналогічні перетворення рівняння (4.1а). Тоді з урахуванням (4.3), (4.4), рівняння Максвелла  $div\vec{D} = \rho$  та за умови,

$$H'_x = H_x; H'_y = \Gamma(H_y + VD_z); H'_z = \Gamma(H_z - VD_y); \quad (4.8)$$

$$D'_x = D_x; D'_y = \Gamma\left(D_y - \frac{V}{c^2}H_z\right); D'_z = \Gamma\left(D_z + \frac{V}{c^2}H_y\right); \quad (4.9)$$

$$j'_x = \Gamma(j_x - V \cdot \rho); j'_y = j_y; j'_z = j_z, \quad (4.10)$$

одержуємо:

$$rot'\vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t'}. \quad (4.11)$$

Тепер рівняння Максвелла  $div\vec{D} = \rho$  з урахуванням операторів похідних (4.3) і (4.4) та  $rot'\vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t'}$  набуває вигляду

$$div'\vec{D}' = \rho'.$$

за умови, що густина заряду в СВ  $K'$  пов'язана з густиною заряду в СВ  $K$  співвідношенням

$$\rho' = \Gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}j_x\right), \quad (4.12)$$

де  $j_x$  –  $x$ -ва компонента густини струму в СВ  $K$ .

Аналогічно, рівняння  $div\vec{B} = 0$  в СВ  $K'$  має коваріантну форму:

$$div'\vec{B}' = 0.$$

*Таким чином, коваріантність рівнянь Максвелла (4.1) має місце, якщо компоненти напруженості електричного та індукції магнітного полів перетворюються згідно з формулами (4.5) та (4.6); коли вектори індукції електричного та напруженості магнітного полів перетворюються при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  за формулами (4.8) і (4.9), і на кінець, ще й коли густини зарядів і струмів (джерела поля) перетворюються за формулами (4.12) і (4.10).*

#### **4.2.2. Спосіб, заснований на трансформаційних властивостях компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої**

ФПКЕМП найбільш строго і послідовно одержують використовуючи формули перетворення компонент тензора ЕМП при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  [154; 155; 227] (див. також [100] та пп. 1.2.1з й 1.2.2б Розділу 1).

У свою чергу сам вираз для тензора ЕМП може бути одержаний такими двома шляхами.

Аналізуючи вирази для декартових проекцій векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  на мові компонент чотиривимірного потенціалу [201; 227; 118; 127] (п. 1.2.1з) і шляхом обґрунтування рівняння руху ЗЧ у ЕМП полі на основі принципу найменшої дії [154; 155; 14; 180] (1.2.2б). Але цей спосіб надто формальний.

Опис цього способу більш детально поданий в посібниках [100; 127].

У той же час має значний методичний інтерес подання одержаних формул перетворення для векторів поля та фізичних величин, що характеризують джерела поля, через повздовжні та поперечні (по відношенню до напрямку швидкості руху СВ  $K'$ ) проекції відповідних векторів [182; 100].

Якщо будь-який вектор поля записати у вигляді

$$\vec{A} = \vec{A}_{\perp} + \vec{A}_{\parallel},$$

де  $\vec{A}_{\parallel}$ ,  $\vec{A}_{\perp}$  – повздовжня та відповідно поперечна компоненти вектора  $\vec{A}$  по відношенню до напрямку вектора швидкості руху СВ  $K'$ ,  $\vec{V}$ , то формули перетворення векторів поля та джерел поля при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  набувають вигляду

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}; \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] \right); \quad (4.13)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}; \vec{B}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}] \right); \quad (4.14)$$

$$\vec{H}_{\parallel} = \vec{H}'_{\parallel}; \vec{H}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{H}'_{\perp} + [\vec{V}, \vec{D}'_{\perp}] \right); \quad (4.15)$$

$$\vec{D}_{\parallel} = \vec{D}'_{\parallel}; \vec{D}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{D}'_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{H}'_{\perp}] \right); \quad (4.16)$$

$$\vec{j}_{\parallel} = \Gamma \left( \vec{j}'_{\parallel} + \vec{V} \rho' \right); \vec{j}_{\perp} = \vec{j}'_{\perp}; \rho = \Gamma \left( \rho' + \frac{1}{c^2} j' V \right). \quad (4.17)$$

А при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ :

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}; \vec{E}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}] \right); \quad (4.18)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}; \vec{B}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}_{\perp}] \right); \quad (4.19)$$

$$\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}; \vec{H}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{H}_{\perp} - [\vec{V}, \vec{D}_{\perp}] \right); \quad (4.20)$$

$$\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}; \vec{D}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{H}_{\perp}] \right); \quad (4.21)$$

$$\vec{j}'_{\parallel} = \Gamma \left( \vec{j}_{\parallel} - \vec{V} \rho \right); \vec{j}'_{\perp} = \vec{j}_{\perp}; \rho' = \Gamma \left( \rho - \frac{1}{c^2} j V \right). \quad (4.22)$$

**Подання формул перетворення векторів поля та джерел поля у формах (4.13)–(4.22) вигідне ще й тим, що формули в такому поданні будуть справедливі при довільному напрямку  $\vec{V}$  відносно осей координат.**

Якщо ізотропне та однорідне середовище нерухоме відносно СВ  $K'$ , то можна записати матеріальні рівняння:

$$\vec{B}' = \mu_0 \mu \vec{H}'; \vec{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}'; \vec{j}' = \lambda \vec{E}'. \quad (4.23)$$

Тоді для рухомого відносно СВ  $K$  середовища можемо, згідно з (4.13)–(4.22), записати:

$$\vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}] = \mu_0 \mu \left( \vec{H} - [\vec{V}, \vec{D}] \right); \quad (4.24)$$

$$\vec{D} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}]}{c^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \left( \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \right); \quad (4.25)$$

$$\Gamma \left( \vec{j}_{\parallel} - \vec{V} \rho \right) = \lambda \vec{E}_{\parallel}; \quad (4.26)$$

$$\vec{j}_{\perp} = \Gamma \lambda \left( \vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}] \right). \quad (4.27)$$

Ці співвідношення пов'язують між собою в рухомому середовищі величини, які вимірюються чи спостерігаються з точки зору СВ  $K$ . Як бачимо, останні чотири формули дають додаткові зв'язки між величинами  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ .

#### **4.2.3. Спосіб, що ґрунтується на релятивістській інваріантності виразу для сили Лорентца**

Виходячи з ПВ вираз для сили Лорентца повинен бути релятивістськи інваріантним [178, с. 73–74].

Тобто вигляд формули сили Лорентца має бути однаковим у всіх СВ. Таким чином, і в СВ  $K$ , і в СВ  $K'$  вираз для сили Лорентца матиме такий вигляд [178]:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]\right), \quad (4.28)$$

$$\vec{F}' = q\left(\vec{E}' + [\vec{v}', \vec{B}']\right). \quad (4.29)$$

Підставимо у формулу (А.5) замість  $F_y$  та  $F'_y$  їхні вирази із (4.28) та (4.29):

$$E_y + (v_z B_x - v_x B_z) = \frac{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}} \left[ E'_y + (v'_z B'_x - v'_x B'_z) \right]. \quad (4.30)$$

З допомогою формул додавання швидкостей

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}; \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - B^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

спочатку виключимо з (4.30) величини  $v'_x$  та  $v'_z$ , а потім, перегрупувавши всі доданки в ліву частину, одержуємо

$$\left( E_y - \frac{E'_y}{\sqrt{1 - B^2}} - \frac{VB'_z}{\sqrt{1 - B^2}} \right) \cdot v_x + \left( -B_z + \frac{VE'_y}{c^2 \sqrt{1 - B^2}} + \frac{B'_z}{\sqrt{1 - B^2}} \right) \cdot v_x + (B_x - B'_x) \cdot v_z = 0.$$

Оскільки ця рівність повинна мати місце при будь-яких значеннях  $v_x$  та  $v_z$ , то вирази в круглих дужках цієї рівності дорівнюють нулю. І, як наслідок, одержуємо деякі ФПКЕМП:

$$B_x = B'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - B^2}}; \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (4.31)$$

Аналогічно, підставляючи у формулу

$$F_z = \frac{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}} F'_z$$

компоненти сили Лорентца  $F_z$  та  $F'_z$ , одержуємо

$$B_x = B'_x, \quad E_z = \frac{E'_z + VB'_y}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad B_y = \frac{B'_y + \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (4.32)$$

Для знаходження формули перетворення для повздовжньої компоненти напруженості електричного поля використаємо формулу (А.1):

$$F_x = \frac{1}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \left[ F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{v}') \right].$$

Знову таки, аналогічно до попереднього, формулу (А.1) приводимо до такої форми

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) \left[ E_x + (v_y B_z - v_z B_y) \right] - \left[ E'_x + (v'_y B'_z - v'_z B'_y) \right] = \\ = \frac{V}{c^2} (\vec{E}' \cdot \vec{v}'), \end{aligned} \quad (4.33)$$

де  $\vec{F}' \cdot \vec{v}' = q \vec{E}' \cdot \vec{v}'$ .

Для подальшого спрощення (4.33) скористаємося (4.31) та (4.32) і знайдемо

$$E_x = E'_x. \quad (4.34)$$

Таким чином, одержуємо ФПКЕМП

$$E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - B^2}}; \quad E_z = \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1 - B^2}}; \quad (4.35)$$

$$B_x = B'_x; \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - B^2}}; \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (4.35a)$$

#### 4.2.4. Формули перетворення компонент вектора поляризації та вектора намагнічування при зміні системи відліку

Щоб знайти формули перетворення компонент векторів поляризації  $\vec{P}$  та намагнічування  $\vec{M}$  при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , використаємо зв'язок їх з векторами поля в середовищі, згідно з означенням:

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{M}' &= \vec{B}' - \mu_0 \vec{H}'; \\ \vec{P}' &= \vec{D}' - \varepsilon_0 \vec{E}'. \end{aligned}$$

А в СВ  $K$

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{M} &= \vec{B} - \mu_0 \vec{H}; \\ \vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}. \end{aligned}$$

Тоді, використовуючи (4.19) і (4.20) для поперечних компонент векторів  $\vec{M}'_{\perp}$  та  $\vec{P}'_{\perp}$ , маємо



$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{M}'_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{B}_{\perp} - \mu_0 \vec{H}_{\perp} - \frac{V \vec{E}_{\perp}}{c^2} + \mu_0 [\vec{V}, \vec{D}_{\perp}] \right) = \\ &= \Gamma \left\{ \mu_0 \vec{M}_{\perp} + \mu_0 [\vec{V} (\vec{D}_{\perp} - \varepsilon_0 \vec{E}_{\perp})] \right\} = \Gamma \mu_0 \left( \vec{M}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{P}_{\perp}] \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Використовуючи далі (4.18) і (4.21), одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{P}'_{\perp} &= \Gamma \left\{ \vec{D}_{\perp} - \varepsilon_0 \vec{E}_{\perp} - \left[ \vec{V}, \left( \varepsilon_0 \vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{H}_{\perp}}{c^2} \right) \right] \right\} = \\ &= \Gamma \left\{ \vec{P}_{\perp} - \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \left( \frac{\vec{B}_{\perp}}{\mu_0} - \vec{H}_{\perp} \right) \right] \right\} = \Gamma \left\{ \vec{P}_{\perp} - \frac{[\vec{V}, \vec{M}_{\perp}]}{c^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Розглядаючи окремо компоненти векторів, які паралельні вектору швидкості, одержуємо

$$\vec{M}_{\parallel} = \vec{M}'_{\parallel}; \quad \vec{P}_{\parallel} = \vec{P}'_{\parallel}.$$

У результаті формули перетворення повздовжніх та поперечних складових векторів поляризації  $\vec{P}$  та намагнічування  $\vec{M}$  при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}_{\parallel} &= \vec{M}'_{\parallel}; \\ \vec{M}_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{M}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{P}'_{\perp}] \right); \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_{\parallel} &= \vec{P}'_{\parallel}; \\ \vec{P}_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{P}'_{\perp} + \frac{[\vec{V}, \vec{M}'_{\perp}]}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Якщо у формулах (4.38) і (4.39) штриховані величини змінити на не штриховані й навпаки, а  $\vec{V}$  на  $-\vec{V}$ , то одержимо формули перетворення повздовжніх і поперечних компонент вектора поляризації та вектора намагнічування при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}'_{\parallel} &= \vec{M}_{\parallel}; \\ \vec{M}'_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{M}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{P}_{\perp}] \right); \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}'_{\parallel} &= \vec{P}_{\parallel}; \\ \vec{P}'_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{P}_{\perp} - \frac{[\vec{V}, \vec{M}_{\perp}]}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Ці формули перетворення можна отримати й таким шляхом.

Використовуючи означення векторів поля  $\vec{D}$  та  $\vec{H}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P};$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

можна ввести тензор електромагнітного поля в середовищі, компоненти якого  $f_{ik}$  визначаються таким чином

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Цей тензор одержується з (1.74) шляхом заміни компонент  $c\vec{B}$  на  $\vec{H}$ , а компоненти  $-i\vec{E}$  на  $-ic\vec{D}$  [227].

Аналогічно вводиться тензор електричного та магнітного моментів:

$$m_{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot F_{ik} - f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icP_x \\ -M_z & 0 & M_x & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

де вектор  $\vec{M}$  – вектор намагнічування (магнітний момент одиниці об'єму).

З означення тензора електричного та магнітного моментів (4.43) компоненти електричного та магнітного моментів перетворюються таким чином при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ :

$$M_x = M_x; M_y = \Gamma(M_y + VP'_z); M_z = \Gamma(M_z - VP'_y); \quad (4.44)$$

$$P_x = P'_x; P_y = \Gamma\left(P'_y - \frac{V}{c^2}M_z\right); P_z = \Gamma\left(P'_z + \frac{V}{c^2}M_y\right). \quad (4.45)$$

Розглянемо приклад.

**Приклад 4.1.** В системі відліку  $K'$  знаходиться

а) однорідно поляризоване середовище ( $\vec{P}' \neq 0, \vec{M}' = 0$ );

б) однорідно намагнічене середовище ( $\vec{P}' = 0, \vec{M}' \neq 0$ ).

Знайти компоненти вектора поляризації та вектора намагнічування в СВ  $K$ , відносно якої середовище рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ .

*Розв'язання:* а) Виходячи з формул перетворення (4.44) (4.45), у системі відліку  $K$  з'явиться як електричний, так і магнітний моменти:

$$P_x = P'_x; P_y = \Gamma P'_y; P_z = \Gamma P'_z;$$

$$M_y = \Gamma V P'_z; M_z = \Gamma V P'_y,$$

б) Якщо в СВ  $K'$  існує намагнічене середовище ( $\vec{P}' = 0, \vec{M}' \neq 0$ ), то в системі відліку  $K$  це ж середовище буде спостерігатися не тільки намагніченим, але і поляризованим

$$M_x = M'_x; M_y = \Gamma M'_y; M_z = \Gamma M'_z;$$

$$P_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} M'_z; P_z = \Gamma \frac{V}{c^2} M'_y,$$

Для наочності спростимо цей приклад.

Будемо розглядати рамку зі струмом, яка знаходиться в площині  $X'O'Y'$  (рис. 4.1).

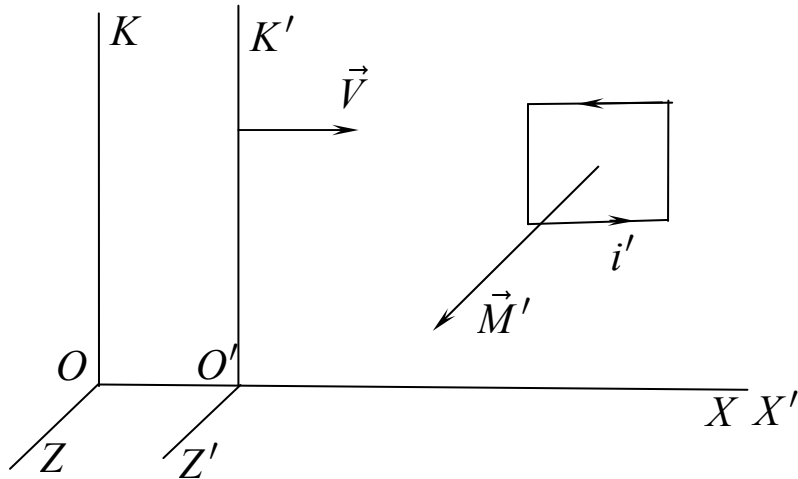


Рис. 4.1. Рамка зі струмом  $i'$  нерухома в СВ  $K'$

Тоді, згідно з формулами (4.39) та (4.45), у системі відліку  $K$  будемо спостерігати й дипольний момент, яким з точки зору СВ  $K$  характеризується ця рамка зі струмом:

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{M}]. \quad (4.46)$$

Цей результат ілюструється рис. 4.2а та 4.2б.

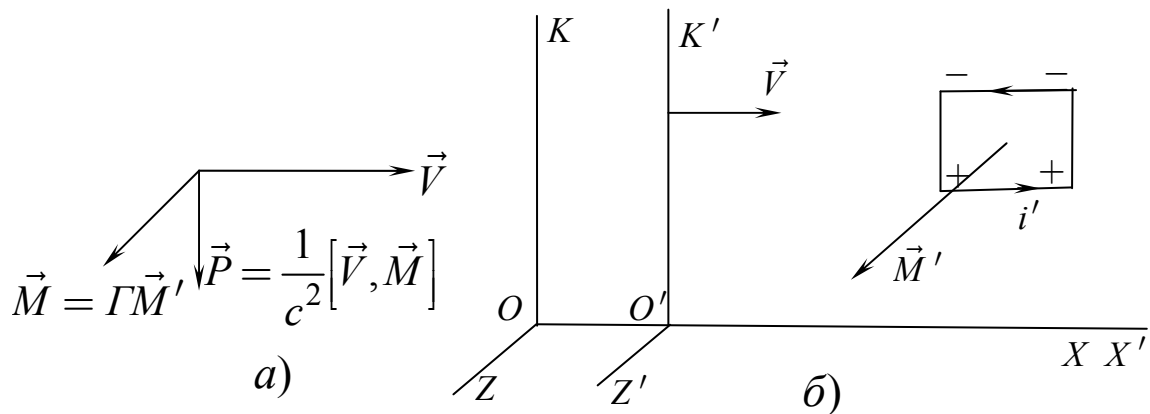


Рис. 4.2. У СВ  $K$  рамка зі струмом має

і магнітний момент  $\vec{M} = \Gamma \cdot \vec{M}'$ , і дипольний момент  $\vec{P} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{M}]$

Узагальнюючи, можна сказати, що рухоме намагнічене тіло з точки зору ЛСВ буде виглядати поляризованим. Цей релятивістський ефект лежить в основі явища уніполярної індукції та в основі роботи уніполярних генераторів.

Досвід викладання класичної та релятивістської електродинаміки показує, що ФПКЕМП, які одержуються як наслідок трансформаційних властивостей тензора ЕМП, сприймаються надто формально.

У студентів залишаються питання: чому такі формули перетворення, чому саме такий вигляд вони мають, а не інший, чому «рухоме» електричне поле породжує магнітне поле, чому «рухоме» МП породжує електричне поле, і чому саме згідно з тими чи іншими формулами.

З метою дати відповідь на деякі з цих питань, і були запропоновані нами наступні оригінальні способи обґрунтування ФПКЕМП.

### 4.3. Елементарне обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля

#### 4.3.1. Принцип відносності та основні експериментальні закони електродинаміки

Дослідження показали визначальну роль СТВ при адекватному поясненні основних положень електромагнетизму [12; 69; 38; 77].

Якщо в довільній точці простору  $(x', y', z')$  і в довільний момент часу  $t'$  інерціальної системи відліку  $K'$  відомі напруженість електричного поля  $\vec{E}'$  та магнітна індукція  $\vec{B}'$  електромагнітного поля, то значення полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  у тій самій часо-просторовій точці СВ  $K$ , відносно

якої СВ  $K'$  поступально рухається вздовж вісі  $OX$  зі швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$ , визначаються (як це показано в підрозділах 1.2 та 4.2) формулами перетворення компонент поля (1.76) та (1.77), або, що теж саме, формулами (4.35) і (4.35а)

$$E_x = E'_x; E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z); E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y);$$

$$B_x = B'_x; B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right); B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right).$$

Нагадаємо, що слова «та сама просторово-часова точка» означають, що просторові координати цієї точки й час настання подій в СВ  $K$  та в СВ  $K'$  пов'язані перетвореннями Лорентца.

Перетворення (4.35) і (4.35а) надзвичайно глибокі за змістом, з їх допомогою ілюструється ряд фундаментальних положень електродинаміки, вони використовуються для аналізу електродинамічних задач з точки зору різних ІСВ [227; 178; 64; 234; 36; 118].

Строго й послідовно формули (4.35) і (4.35а) отримують методами теорії відносності з допомогою перетворень компонент тензора електромагнітного поля при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , як це було продемонстровано в попередньому підрозділі та **Розділі 1**.

Тому методично просте обґрунтування, пояснення та застосування цих формул є актуальними з огляду на дидактичні принципи педагогіки вищої та середньої шкіл.

Аналіз відомих учням СНЗ експериментальних фактів (див. нижче) на основі принципів СТВ, обґрунтування та застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої, на наш погляд, дає можливість найбільш повно та адекватно формувати поняття про взаємозв'язок та відносність електричного та магнітного полів.

**Тому обґрунтуємо з допомогою принципів СТВ ФПКЕМП шляхом аналізу дослідних фактів, які вивчаються як у шкільному курсі фізики, так і в загальному курсі фізики ВНЗ.**

**1А.** Нехай СВ  $K'$  є власною СВ плоского зарядженого конденсатора (рис. 2.2).

Тоді, згідно з поясненням, наведеним у п. 2.2, у СВ  $K$  поперечні складові вектора напруженості  $\vec{E}$  електричного поля зарядженого конденсатора перетворюються так:

$$E_y = \Gamma E'_y; E_z = \Gamma E'_z.$$

Коли ж пластини паралельні площині  $Y'O'Z'$  (рис. 4.3), то  $E_x = E'_x$ , незважаючи на те, що віддаль між пластинами в СВ  $K$  зме-

ншилась, але поверхнева густина заряду на пластинах конденсатора не змінилася.

Таким чином, якщо в СВ  $K'$  є тільки електричне поле, то при переході з  $K'$  в  $K$ -систему компоненти напруженості електричного поля перетворюються згідно з такими формулами

$$E_x = E'_x; E_y = \Gamma E'_y; E_z = \Gamma E'_z. \quad (4.47)$$

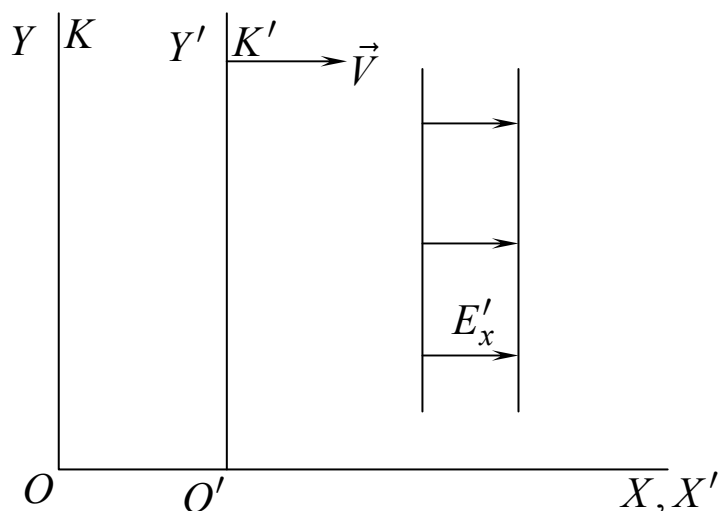


Рис. 4.3. Електричне поле плоского конденсатора в СВ  $K'$  та в СВ  $K$

**ІБ.** Знайдемо закон, згідно з яким «рухоме» магнітне поле породжує електричне поле.

Для цього розглянемо явище електромагнітної індукції, яке спостерігається при русі прямолінійного відрізка проводу в магнітному полі.

Нехай в СВ  $K'$  існує однорідне магнітне поле з індукцією  $B'_y$  (рис. 4.4). Провідник  $AB$  рухається з швидкістю  $\vec{v}' = -\vec{V}$  відносно СВ  $K'$ .

Тоді, як відомо, між кінцями провідника  $AB$  виникає ЕРС індукції, що зумовлена дією сили Лорентца на вільні електрони провідника, які рухаються разом з ним

$$\vec{F}' = q[\vec{v}', \vec{B}'_y].$$

Тобто напрямок і величина вектора напруженості електричного поля в СВ  $K'$ , яке розділяє електрони в рухомому провіднику, дорівнює (рис. 4.5а)

$$\vec{E}'_z = \frac{\vec{F}'}{q} = [\vec{v}', \vec{B}'_y]. \quad (4.48)$$

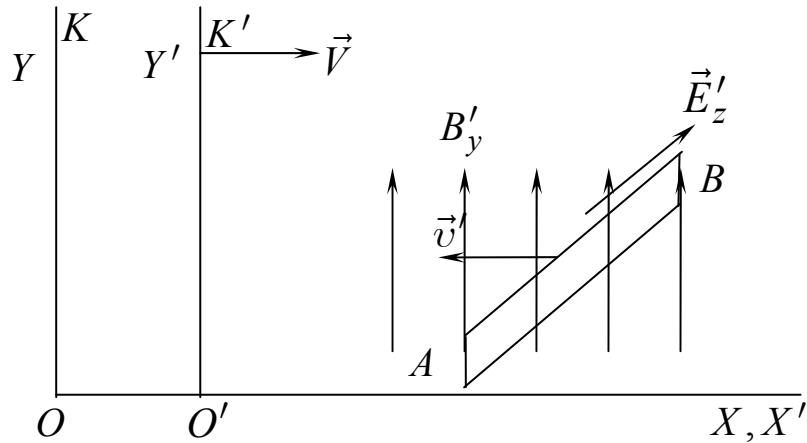


Рис. 4.4. Виникнення електричного поля в СВ  $K$  при русі відносно неї магнітного поля з індукцією  $B'_y$ .

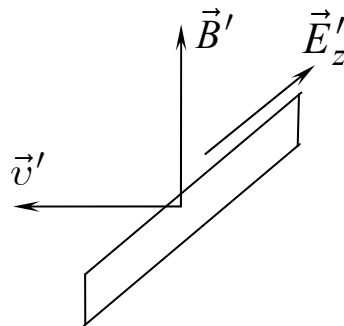


Рис. 4.5а

Або, враховуючи напрямки векторів  $\vec{E}'_z, \vec{v}', \vec{B}'_y$ ,

$$E'_z = -v' \cdot B'_y.$$

А величина ЕРС індукції в СВ  $K'$  дорівнює  $\varepsilon'_{\text{інд}} = lv' \cdot B'_y$ , де  $l$  – довжина провідника  $AB$ .

Згідно з принципом відносності, і в СВ  $K$  (у якій провідник нерухомий) між кінцями провідника  $AB$  буде теж спостерігатися ЕРС індукції.

Цю ЕРС індукції спостерігач, який знаходиться в СВ провідника, пояснить появою деякого поля  $E_z$ , завдяки руху магнітного поля  $B'_y$  зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно нього («швидкість руху поля» – це швидкість відповідних джерел поля: заряджених частинок, електромагнітів і т. п.).

Інакше кажучи, у СВ  $K$  буде існувати й магнітне поле (див. нижче), і електричне поле напруженістю  $E_z$  (рис. 4.5б). Оскільки величина заряду є інваріантом, то за формулами перетворення поперечних компонент сили при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  [227; 178] (див. **Розділ 1**, формули (1.20), а також Додаток А) одержуємо

$$E'_z = \frac{E_z}{\Gamma} = E_z \sqrt{1 - B^2}.$$

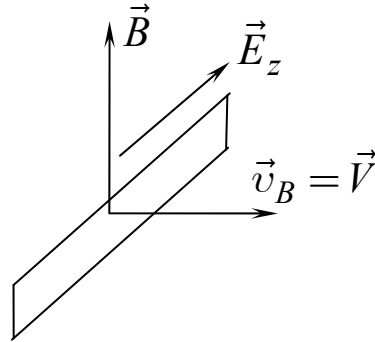


Рис. 4.56

Таким чином, складова напруженості електричного поля  $E_z$ , яке з'явиться в СВ  $K$  унаслідок руху магнітного поля  $B'_y$ , дорівнює

$$E_z = \Gamma E'_z = -\Gamma V B'_y. \quad (4.49)$$

Іншими словами, аналіз явища електромагнітної індукції з урахуванням принципу відносності дозволяє зробити висновок про те, що при русі магнітного поля  $\vec{B}'$  зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$  в ній виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E}$ , рис. 4.56,

$$\vec{E} = -\Gamma[\vec{V}, \vec{B}'] = \vec{E}_z. \quad (4.50)$$

Аналогічно, якщо в СВ  $K'$  існує магнітне поле з індукцією  $B'_z$ , а провідник  $AB$  орієнтований вздовж осі  $O'Y'$ , то внаслідок руху магнітного поля  $B'_z$  в СВ  $K$  виникає електричне поле напруженістю

$$E_y = \Gamma V B'_z. \quad (4.51)$$

Сумуємо висновки **п. 1А і 1Б**.

При наявності в СВ  $K'$  і електричного поля напруженістю  $\vec{E}'(E'_x, E'_y, E'_z)$ , і магнітного поля з індукцією  $\vec{B}'(B'_x, B'_y, B'_z)$  в СВ  $K$  напруженість електричного поля дорівнює:

$$E_x = E'_x; E_y = \Gamma(E'_y + V B'_z); E_z = \Gamma(E'_z - V B'_y). \quad (4.52)$$

Переходимо тепер до обґрунтування формул перетворення компонент вектора магнітної індукції.

**2А.** Нехай вздовж вісі  $O'X'$  СВ  $K'$  розташований довгий провідник з постійним струмом  $I'$ .

Тоді в СВ  $K'$  складові  $B'_y, B'_z$  магнітної індукції в точках  $A$  і  $C$ , рис. 4.6, чисельно дорівнюють



$$B'_z = B'_y = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r'},$$

де  $r'$  – віддаль точок  $A$  і  $C$  від проводу,  $I' = j' \cdot S'$ ;  $j' = \frac{n_-^0 \cdot v' q}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$  – густина струму в СВ  $K'$ ;  $S'$  – площа поперечного перерізу провідника,  $n_-^0$  – концентрація електронів провідності у ВСВ,  $\beta' = \frac{v'}{c}$ ,  $v'$  – дрейфова швидкість руху цих електронів,  $q$  – величина заряду електрона.

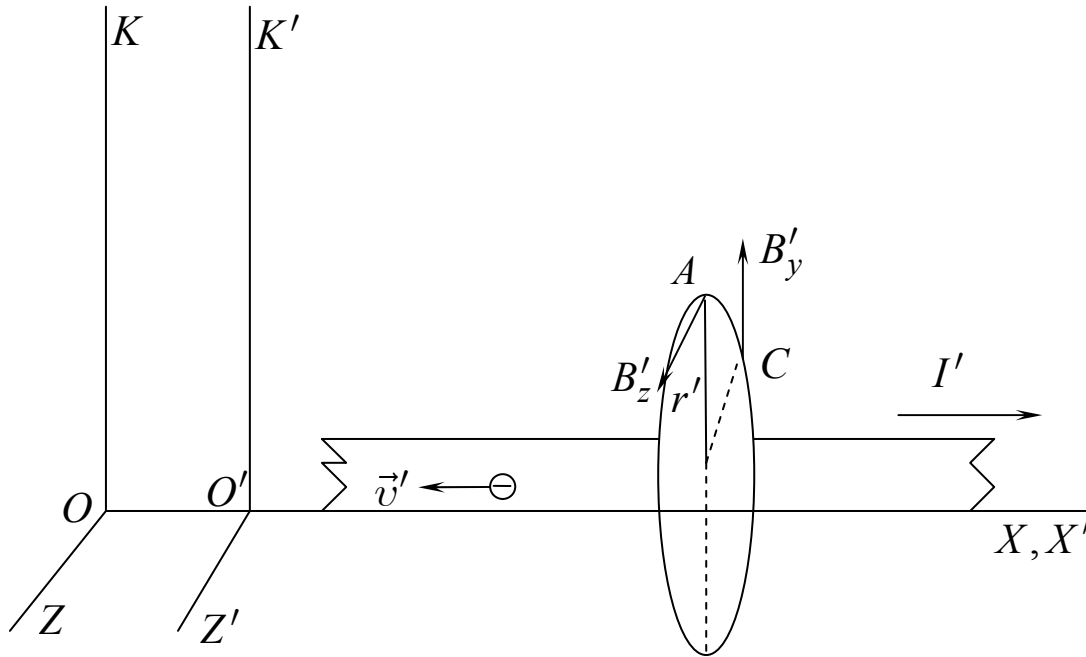


Рис. 4.6. Магнітне поле провідника зі струмом в СВ  $K$  і  $K'$

Знайдемо магнітну індукцію в цих точках поля ( $A$  і  $C$ ) в СВ  $K$ . Очевидно, що  $r' = r$ ,  $S' = S$ , а сила струму  $I$  в СВ  $K$  буде відрізнятися від значення  $I'$ . В  $K$ -системі струм, що протікає по провіднику зумовлений не тільки рухом електронів з швидкістю  $v$ , але і рухом позитивних іонів кристалічної ґратки з швидкістю  $V$ . Тому густина струму в СВ  $K$  дорівнює

$$j = j_+ - j_- = \frac{\rho_+^0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\rho_-^0 \cdot (V - v')}{\left(1 - \frac{v'V}{c^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{j'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (4.53)$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $v = \frac{V - v'}{1 - \frac{v'V}{c^2}}$  – швидкість руху електронів провідності в СВ

$K$ ,  $\rho_+^0 = n_+^0 q$  – об’ємна густина заряду позитивних іонів у ВСВ,  
 $\rho_-^0 = n_-^0 q$  – об’ємна густина заряду електронів провідності у ВСВ.

При цьому використана умова нейтральності провідника зі струмом у СВ  $K'$  [227; 234] (див. також п. 5.3 **Розділу 5**)

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}}. \quad (4.54)$$

При уважному аналізі фізичних обставин, що пов’язані з протіканням струму в металевому провіднику, умова (4.54) досить суперечлива [193; 85; 108; 176], але в існуючих навчальних посібниках є загальноприйнятою.

Критичний аналіз умови нейтральності (4.54) приведений в пп. 5.3 та 5.4 **Розділу 5**.

Ряд проблемних питань, пов’язаних з умовою (4.54) обговорюється в [108; 85; 176; 92]. Зауважимо, що (4.53) може бути отримано й з допомогою формул перетворення компонент 4-струму [227; 85; 108].

Таким чином,  $I = \Gamma \cdot I'$ , і тому поперечні складові магнітної індукції в СВ  $K$  дорівнюють

$$B_y = \Gamma B'_y; B_z = \Gamma B'_z. \quad (4.55)$$

**2Б.** Знайдемо закон, згідно з яким магнітне поле пов’язане з рухомих електричним полем. Для цього скористаємося результатами опису взаємодії двох заряджених частинок [89; 129] (див. також **Розділ 2**).

Коли заряджена частинка рухається в СВ  $K$  з швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$ , то вона створює магнітне поле, індукція якого визначається

$$\vec{B} = \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2}, \quad (4.56)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля цієї зарядженої частинки в СВ  $K$ , формула (2.19):

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}},$$

де  $q$  – величина заряду,  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений із миттєвого положення заряду в дану точку поля  $M$  (рис. 4.7),  $\theta$  – кут між векторами  $\vec{V}$  та  $\vec{r}$ .

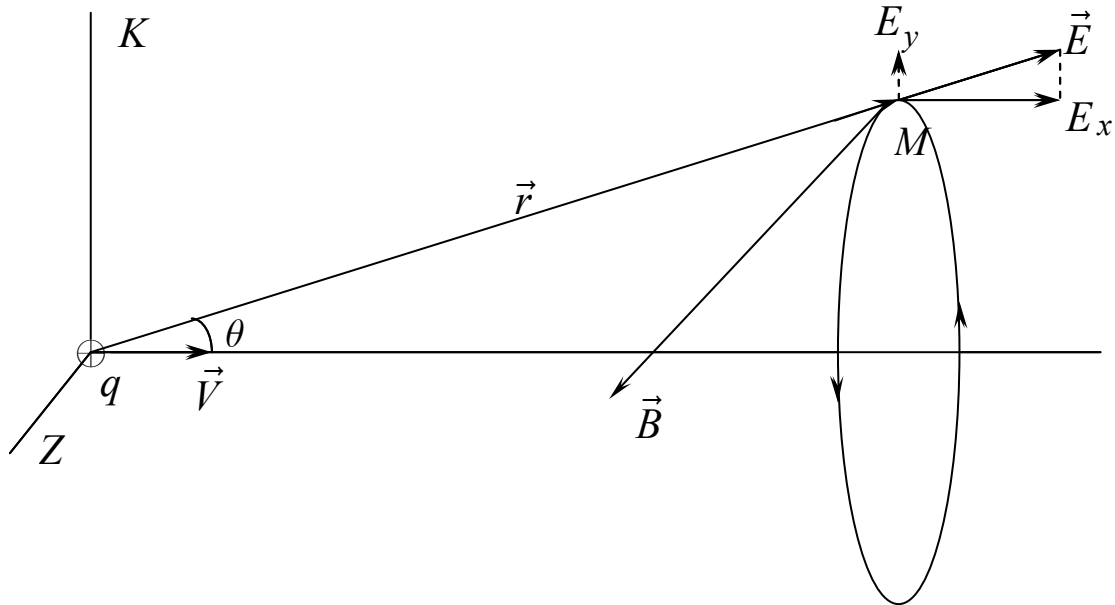


Рис. 4.7. Електричне та магнітне поля рухомої ЗЧ в СВ  $K$

З виразу (2.19), між іншим, відразу підтверджуються висновки **п. 1А**.

$$E_x = E'_x, \text{ бо при } \theta = 0 \quad r = r' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ а при } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma E'_y, \quad E_z = \Gamma E'_z.$$

Очевидно, що

$$B_z = \frac{V}{c^2} E_y, \text{ але } E_y = \Gamma E'_y, \text{ тому } B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (4.57)$$

Якщо т.  $M$  знаходиться в площині  $XOZ$ , то із (4.56) і (2.19) одержуємо

$$B_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} E'_z. \quad (4.58)$$

Сумуємо висновки пунктів **2А** та **2Б**:

При наявності в СВ  $K'$  і магнітного поля з індукцією  $\vec{B}'(B'_x, B'_y, B'_z)$  і електричного напруженістю  $\vec{E}'(E'_x, E'_y, E'_z)$  в СВ  $K$  магнітна індукція дорівнює

$$B_x = B'_x; \quad B_y = \Gamma \left( B'_y - \frac{VE'_z}{c^2} \right); \quad B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{VE'_y}{c^2} \right). \quad (4.59)$$

Таким чином, співвідношення (4.52), (4.59), як бачимо, збігаються з (1.76) та (1.77).

ФПКЕМП (4.52) та (4.59) носять локальний характер, хоча й одержані нами при аналізі нелокальних електродинамічних задач. Чи справедливі вони для будь-якого електромагнітного поля, утвореного довільним розподілом зарядів і струмів?

«Це питання приводить нас до самої суті поняття поля. Якщо поняття електричного поля  $\vec{E}$  в просторово-часовій точці повинне мати однозначний зміст, тоді значення поля  $\vec{E}$  у цій же просторово-часовій точці, але з точки зору інших СВ, не може залежати від природи джерел, що створюють це поле, якими вони не були б. Іншими словами, спостерігач в СВ  $K$ , який виміряв у деякий момент часу поле біля себе, у змозі передбачити тільки на основі цих вимірів, що ж вимірюють у тій же просторово-часовій точці спостерігачі з інших СВ. Якби це було не так, поняття поля було б непотрібне. Дослідні докази справедливості цього твердження і є вирішальними підтвердженнями згоди теорії поля з експериментом» [58].

*Тому, незважаючи на те, що при обґрунтуванні формул (1.76) і (1.77) розглядалися найпростіші конфігурації заряджених тіл і струмів, ми одержали ФПКЕМП (4.52) та (4.59), які мають загальну силу й справедливі для електромагнітного поля, утвореного будь-яким розподілом зарядів і струмів.*

Ще раз відзначимо два важливі наслідки, що випливають з аналізу простих дослідних фактів. При русі зі швидкістю  $\vec{V}$  магнітного поля, індукція якого  $\vec{B}$ , у тій самій просторово-часовій точці виникає електричне поле напруженістю

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.60)$$

Якщо ж рухається електричне поле зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно довільної системи відліку, то в тій же самій часово-просторовій точці виникає магнітне поле  $\vec{B}$  (див. також (2.26))

$$\vec{B} = \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2}. \quad (4.61)$$

Але більш детально наслідки ФПКЕМП аналізуються в *пп. 4.4.1 та 4.4.2.*

### **4.3.2. Спосіб, що ґрунтується на детальному аналізі властивостей електромагнітного поля зарядженої частинки, що рухається рівномірно та прямолінійно ( $v < c$ )**

Цей спосіб органічно впливає з інноваційної методичної концепції вивчення електродинаміки на засадах СТВ [129; 99] (**Розділ 2**).

Тобто з самого початку вивчення теми «Магнітне поле», після формування поняття «магнітне поле» й розкриття релятивістської природи

магнітного поля [129] можна показати, що електричне й магнітне поля зв'язані ФПКЕМП (1.76), (1.77).

Нехай у нас є три СВ: СВ  $K$ , СВ  $K'$ , СВ  $K_0$ , (див. рис. 4.8).

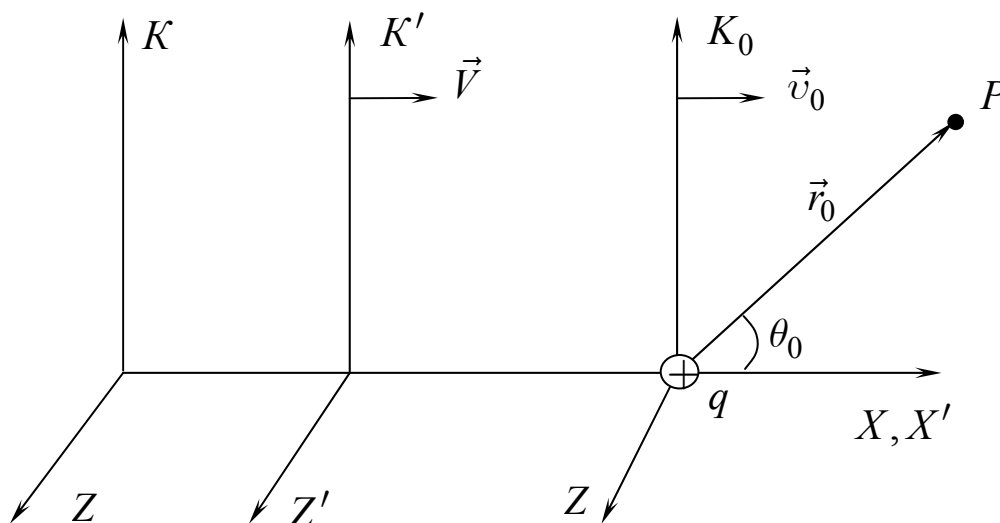


Рис. 4.8. Рух ЗЧ відносно СВ  $K$  і СВ  $K'$

СВ  $K_0$  є, як видно з рис. 4.8, власною СВ для зарядженої частинки. СВ  $K_0$  рухається відносно СВ  $K'$  зі швидкістю  $\vec{v}_0 = \text{const}$ , а СВ  $K'$  у свою чергу рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно лабораторної СВ  $K$ .

Тоді напруженості електричного й індукції магнітного полів, які виникають в СВ  $K_0$ , СВ  $K'$ , СВ  $K$ , відповідно, дорівнюють [129; 99]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{q\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}; \\ \vec{E}' &= \frac{q\vec{r}'(1-\beta_0^2)}{4\pi\epsilon_0 r'^3(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}; \\ \vec{E} &= \frac{q\vec{r}(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^3(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}; \\ \vec{B}_0 &= 0; \vec{B}' = \frac{[\vec{v}_0, \vec{E}']}{c^2}; \vec{B} = \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\vec{B}_0 = 0; \vec{B}' = \frac{[\vec{v}_0, \vec{E}']}{c^2}; \vec{B} = \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}, \quad (4.63)$$

де  $v = \frac{V + v_0}{1 + \frac{V \cdot v_0}{c^2}}$  – швидкість руху ЗЧ відносно лабораторної системи

відліку,  $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\theta_0$  – кут між радіус-вектором  $\vec{r}_0$  і віссю  $OX$  СВ  $K_0$ ;  $\theta'$  – кут між радіус-вектором  $\vec{r}'$ , який проведений із миттєвого положення заряду в системі  $K'$  в дану точку поля і вектором  $\vec{v}_0$ ;  $\theta$  – кут між напрямом руху ЗЧ ( $\vec{v}$ ) і радіус-вектором  $\vec{r}$ , який проведений з миттєвого положення ЗЧ в системі відліку  $K$  в дану точку поля  $P$ .

З допомогою перетворень Лорентца може бути показано, що:

$$r_0 = \gamma_0 \left[ (x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2) \cdot (1 - \beta_0^2) \right]^{1/2}; \quad (4.64)$$

$$r_0 = \gamma \left[ (x - v t)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right]^{1/2}; \quad (4.65)$$

$$r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2} = \left[ (x - v t)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right]^{3/2}, \quad (4.66)$$

де  $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

І тоді, ураховуючи (4.62) та (4.63), (4.64), (4.65) (4.66), одержуємо

$$E_x = E'_x;$$

$$E_y = \frac{qy \cdot (1 - \beta_0^2)}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2) (1 - \beta_0^2) \right]^{3/2}} \cdot \Gamma(1 + B\beta_0) =$$

$$= E'_y \Gamma \left( 1 + \frac{Vv_0}{c^2} \right) = \Gamma \left( E'_y + V \frac{v_0 E'_y}{c^2} \right) = \Gamma (E'_y + VB'_z); \quad (4.67)$$

аналогічно можна одержати формулу перетворення для проекції  $E_z$ :

$$E_z = \Gamma (E'_z - VB'_y). \quad (4.68)$$

Використовуючи (4.62) та (4.63), (4.64), (4.65) (4.66), для компонент вектора магнітної індукції в СВ  $K$  одержуємо

$$B_x = B'_x; \quad B_y = \Gamma \left( B'_y - \frac{VE'_z}{c^2} \right); \quad B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{VE'_y}{c^2} \right). \quad (4.69)$$

Таким чином, обговорюючи властивості електричного і магнітного полів рухомої ЗЧ, на основі запропонованого в [129; 99] підходу вдається обґрунтувати формули перетворення компонент електромагнітного поля.

### 4.3.3. Електромагнітне поле зарядженої нитки, що рухається рівномірно та ФПКЕМП

Розглянемо спосіб обґрунтування ФПКЕМП, заснований на положеннях фізики, що вивчаються в школі [110]. Уявимо собі дві системи відліку, лабораторну СВ  $K$  та СВ  $K'$ , яка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$  вздовж осі  $OX$ . А в самій СВ  $K'$  – уздовж вісі  $O'X'$  рухається зі швидкістю  $v'$  нескінченно довга рівномірно заряджена нитка, причому у власній СВ лінійна густина заряду нитки дорівнює  $\tau_0$  (рис. 4.9).

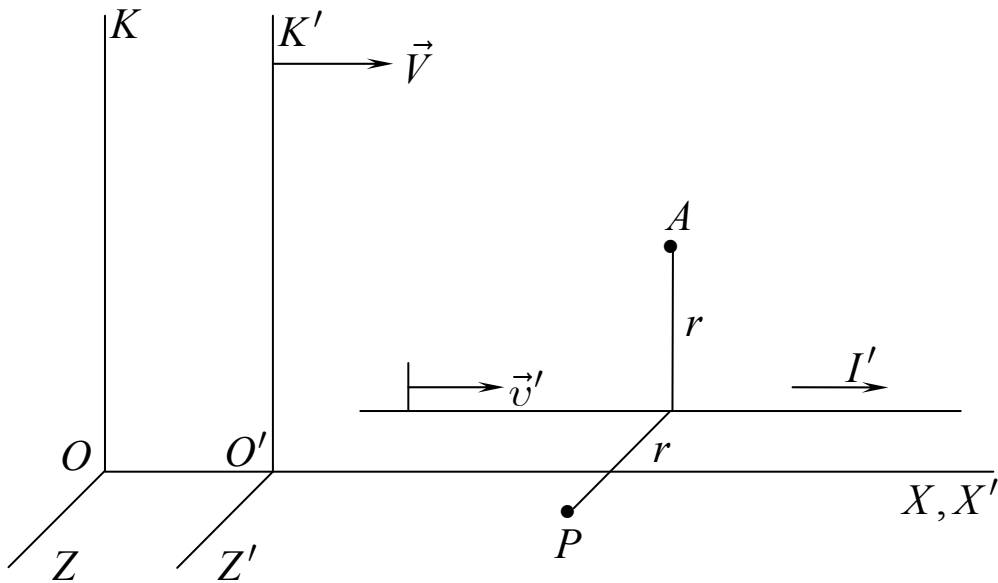


Рис. 4.9. Електромагнітне поле, що створюється рівномірно зарядженою рухомою ниткою в СВ  $K$  та СВ  $K'$

Тоді в СВ  $K'$  будемо мати напруженість електричного та індукцію магнітного полів у точках  $A$  і  $P$ , які дорівнюють, відповідно

$$E'_y = \gamma' \cdot E_y^0; B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = \varepsilon_0 \mu_0 v' E'_y; \quad (4.70)$$

$$E'_z = \gamma' \cdot E_z^0; B'_y = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = -\varepsilon_0 \mu_0 v' E'_z, \quad (4.71)$$

де  $E_y^0 = E_z^0 = \frac{\tau_0}{2\pi \varepsilon_0 r}$  – величина напруженості електричного поля, створеного зарядженою ниткою у ВСВ в точках на віддалі  $r$  від нитки;

$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ ,  $\beta' = \frac{v'}{c}$ ,  $I' = \tau' v'$  – сила струму в СВ  $K'$ , який зумовлений рухом нитки з швидкістю  $v'$ ;  $\tau' = \gamma' \tau_0$ .

У СВ  $K$  значення напруженості електричного та індукції магнітного полів знаходяться з використанням подібних формул

$$E_y = E_z = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r};$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r},$$

але при цьому необхідно брати до уваги те, що нитка рухається відносно

СВ  $K$ , причому зі швидкістю  $v = \frac{V + v'}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$ .

Тому електромагнітне поле в точках  $A$  і  $P$ , СВ  $K$  має такі компоненти (виражені через компоненти електромагнітного поля в СВ  $K'$ )

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau_0 \gamma}{2\pi\epsilon_0 r} = \Gamma(E'_y + VB'_z); \quad (4.72)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_0 v \tau_0 \gamma}{2\pi \cdot r} = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right); \quad (4.73)$$

$$E_z = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau_0 \gamma}{2\pi\epsilon_0 r} = \Gamma(E'_z - VB'_y); \quad (4.74)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} = -\frac{\mu_0 v \tau_0 \gamma}{2\pi \cdot r} = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right), \quad (4.75)$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Gamma \gamma' \left(1 + \frac{Vv'}{c^2}\right)$ .

Тобто, розраховуючи електромагнітне поле ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) такого симетричного та простого розподілу заряду та порівнюючи характеристики цього електромагнітного поля в СВ  $K$  та СВ  $K'$ , вдасться вивести формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї СВ до іншої:

$$E_x = E'_x; \quad E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z); \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y); \quad (4.76)$$

$$B_x = B'_x; \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{VE'_z}{c^2}\right); \quad B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{VE'_y}{c^2}\right). \quad (4.77)$$

Таким чином, ми одержали ФПКЕМП.



Ці формули не пояснюють механізмів породження того чи іншого поля. Для цих формул не має значення, яким чином виникли поля та яка природа (походження) цих полів, які джерела відповідальні за появу полів.

Вдумливий аналіз властивостей ФПКЕМП та застосування їх дають надзвичайно широкий спектр методичних новацій при формуванні уявлень про єдине електромагнітне поле, причому без посилення на взаємозв'язок між електричним і магнітним полями, що змінюються.

У традиційній методиках вважається [155; 200; 55; 36; 42; 41], що тільки при вивченні нестационарних електромагнітних явищ можна більшою чи меншою мірою успішно формувати поняття про електромагнітне поле.

Але, як раніше відзначалося [99; 142] (див. також пп. 4.1, 4.2, 4.3.1, 4.3.2), достатньо повно формувати уявлення про ЕМП можна й значно раніше – вивчаючи електромагнітне поле, створене стаціонарним, прямолінійним рухом заряджених частинок.

Зокрема, слід звернути увагу на те, що електромагнітне поле не є векторним полем, а в рамках класичної (не квантової) електродинаміки адекватно описується апаратом тензорного числення. Про це свідчать безліч прикладів і ряд відомих учням експериментальних фактів (явище електромагнітної індукції, розглянутий вище приклад). Дійсно, якби електромагнітне поле як особливий вид матерії, що здійснює взаємодію між зарядженими частинками, не являло собою дещо єдине й особливе, то при переході від однієї СВ до іншої напруженість електричного поля, наприклад, виражалася б тільки через компоненти вектора  $\vec{E}'$ . Можна сказати, що в кожній СВ вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  – це «проекції» на цю систему складного фізичного об'єкту – електромагнітного поля.

#### **4.4. Методика формування поняття про відносність поділу електромагнітного поля на електричне та магнітне поля**

##### **4.4.1. Основні наслідки формул перетворення компонент електромагнітного поля**

Перш за все слід підкреслити, що ці формули (4.76) та (4.77) ілюструють відносність електричного та магнітних полів.

Дійсно, якщо в СВ  $K'$  існує тільки електричне поле, а магнітне поле відсутнє, то в СВ  $K$  будемо мати й електричне поле, поперечні компоненти якого зростають в  $\Gamma$  разів, і магнітне поле, компоненти індукції якого  $B_y$  і  $B_z$ .

І навпаки, якщо в СВ  $K'$  існує тільки магнітне поле, а електричне поле відсутнє, то в СВ  $K$ , крім збільшення магнітного поля в  $\Gamma$  разів виникне й електричне поле, поперечні компоненти якого визначаються рівняннями

$$E_y = \Gamma(VB'_z); E_z = \Gamma(-VB'_y).$$

Оскільки будь-яка компонента тензора ЕМП в СВ  $K$  є лінійною комбінацією всіх компонент тензора в СВ  $K'$ , то при переході від однієї СВ до іншої електричне поле, наприклад, може «з'явитися» за рахунок того, що в другій СВ було тільки магнітне поле, і навпаки.

Саме цей фізичний факт неможливо відобразити в математичному апараті, якщо вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  подати як компоненти деякого 4-вектора. Якби кожний з векторів  $\vec{E}$  чи  $\vec{B}$  входив у «свій», так би мовити, 4-вектор, то при перетвореннях Лорентца кожен з векторів  $\vec{E}$  чи  $\vec{B}$  у СВ  $K$  виражався б тільки через компоненти «свого» 4-вектора в СВ  $K'$ .

**Таким чином, електричне та магнітне поля, які були незалежними одне від одного в довільній системі координат, у системах відліку, що знаходяться у відносному русі, перестають бути незалежними.**

Властивості поля, що відображені в законах його перетворення є локальними властивостями. Значення  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в деякій просторово-часовій точці СВ  $K$  однозначно визначають компоненти поля в СВ  $K'$  в тій самій просторово-часовій точці.

Дослідимо більш детально формули перетворення компонент ЕМП.

Напруженість електричного та індукцію магнітного полів можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові компоненти поля, паралельні осі  $OX$  і перпендикулярні до вісі  $OX$ . Наприклад,  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ .

Тоді формули перетворення (4.76) та (4.77), як було відзначено в п. 4.2, можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel}; \vec{E}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}]\right); \\ \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel}; \vec{B}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}]\right). \end{aligned}$$

Оскільки  $\vec{B}'_{\parallel}$  та  $\vec{V}$  – колінеарні, то  $[\vec{V}, \vec{B}'] = [\vec{V}, \vec{B}'_{\parallel}] + [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] = [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}]$ , аналогічно  $[\vec{V}, \vec{E}'] = [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}]$ .

Тому останні формули набувають вигляду

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}; \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}']); \quad (4.78)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}; \quad \vec{B}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}']\right). \quad (4.79)$$

Розглянемо наслідки формул перетворення (4.78) і (4.79) та приклади їх застосування .

**Приклад 4.2.** Нехай в СВ  $K'$  магнітне поле відсутнє ( $\vec{B}' = 0$ ), а електричне поле описується вектором  $\vec{E}'$ . Знайти ЕМП в СВ  $K$ .

*Розв'язання:* Тоді, згідно з (4.78) і (4.79), у СВ  $K$  напруженість електричного поля визначається:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma\vec{E}'_{\perp},$$

а сумарне електричне поле:

$$\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \Gamma\vec{E}'_{\perp}.$$

А індукція магнітного поля дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \Gamma \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}'] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \Gamma\vec{E}'_{\perp}].$$

Оскільки  $[\vec{V}, \vec{E}'_{\parallel}] = 0$ , то останній результат можна подати у вигляді

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{V}, (\vec{E}'_{\parallel} + \Gamma\vec{E}'_{\perp})] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}]. \quad (4.80)$$

Тобто, вектор індукції магнітного поля в СВ  $K$  буде перпендикулярний вектору  $\vec{E}$ .

Іншими словами, у тому випадку, коли електричне поле  $\vec{E}'$  переміщується відносно СВ  $K$ , у системі відліку  $K$  виникає індукція магнітного поля  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}], \quad (4.80a)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля в СВ  $K$ . Причому вектор індукції магнітного поля в СВ  $K$  буде перпендикулярний вектору  $\vec{E}$ .

Рис. 4.10. якраз й ілюструє взаємну орієнтацію векторів поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  та «швидкості руху  $\vec{V}$  поля  $\vec{E}'$ ». Рухоме електричне поле породжує магнітне поле. Ще раз нагадаємо, що коли мова йде про «рух поля» мається на увазі рух джерел поля.

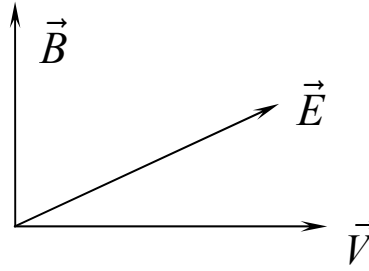


Рис. 4.10. Взаємна локальна орієнтація векторів  $\vec{V}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  у СВ  $K$ , якщо в СВ  $K'$  існує лише одне електричне поле  $\vec{E}'$

**Приклад 4.3.** Нехай тепер в СВ  $K'$  відсутнє електричне поле ( $\vec{E}' = 0$ ), а магнітне поле не дорівнює нулю,  $\vec{B}' \neq 0$ . Використовуючи ФПКЕМП (4.78) та (4.79), знайдемо вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в СВ  $K$ .

*Розв'язання:* По-перше, індукція магнітного поля в СВ  $K$  дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp}.$$

А напруженість електричного поля в СВ  $K$ , згідно з (4.78), дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'] \right) = -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'] = \\ &= -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V}, \Gamma \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V}, (\vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp})]. \end{aligned}$$

Тобто, якщо в СВ  $K'$   $\vec{E}' = 0$ , тоді в СВ  $K$  виникає електричне поле, напруженість якого:

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}], \quad (4.81)$$

де  $\vec{B}$  – вектор індукції магнітного поля в СВ  $K$ .

Наслідок (4.81) прокоментувати можна наступним чином.

При переміщенні магнітного поля  $\vec{B}'$  зі швидкістю  $\vec{V}$  в СВ  $K$  виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$ . Тобто рухоме магнітне поле породжує електричне поле, причому вектори  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  утворюють ліву трійку векторів, рис. 4.11.

**Тобто якщо в системі  $K'$  існує тільки електричне або тільки магнітне поле, то в системі відліку  $K$  з'являється відповідно магнітне й електричне поля, вектори індукції та напруженості яких перпендикулярні, відповідно, вектору  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ . Можна сказати й так: у всіх інших системах відліку вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  перпендикулярні один одному.**

**Має місце й обернене твердження: якщо в системі відліку  $K'$  вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}'$  перпендикулярний вектору індукції магнітного поля  $\vec{B}'$ , то тоді завжди можна знайти систему відліку, у якій буде існувати суто електричне або суто магнітне поле.**

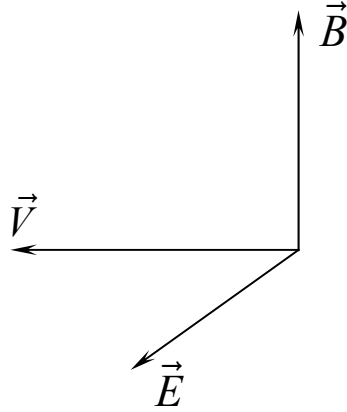


Рис. 4.11. Взаємна локальна орієнтація векторів  $\vec{V}, \vec{B}, \vec{E}$  в СВ  $K$ , якщо в СВ  $K'$  існує лише одне магнітне  $\vec{B}'$

Як же знайти напрямок і величину швидкості такої системи відліку? Розглянемо конкретні приклади.

#### 4.4.2. Приклади застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля для аналізу простих задач

**Приклад 4.4.** Нехай в системі відліку  $K'$  є взаємно перпендикулярні напруженість електричного поля  $\vec{E}'$  та вектор індукції  $\vec{B}'$  магнітного поля. Як повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб в СВ  $K$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = 0$ ?

*Розв'язання:* Орієнтацію осей СВ  $K'$  слід вибрати так, щоб вісь  $O'X'$  була перпендикулярна площині, у якій лежать вектори  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$ . Тоді  $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} = 0$ , а  $\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}'$ .

Але згідно з умовою задачі повинно бути  $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} = 0$  (тобто в СВ  $K$  повздовжня компонента електричного поля дорівнює нулеві). Очевидно, що це буде при умові, коли (див.(4.78)

$$\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'] \right) = 0.$$

Тобто з попередньої рівності одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'] &= 0 \\ \vec{E}' &= [\vec{V}, \vec{B}']. \end{aligned}$$

Але потрібно знайти величину швидкості СВ  $K'$ . Помножимо останню рівність векторно на  $\vec{B}'$  і врахуємо, що  $\vec{B}' \perp \vec{V}$

$$[\vec{B}', \vec{E}'] = [\vec{B}', [\vec{V}, \vec{B}']] = \vec{V} \cdot (B'^2) - \vec{B}' \cdot (\vec{B}' \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (B'^2).$$

Звідси одержуємо, що при умові  $cB' > E'$  (див. рис. 4.12) СВ  $K'$  повинна рухатися з швидкістю, рис. 4.12,

$$\vec{V} = \frac{[\vec{B}', \vec{E}']}{B'^2}. \quad (4.82)$$

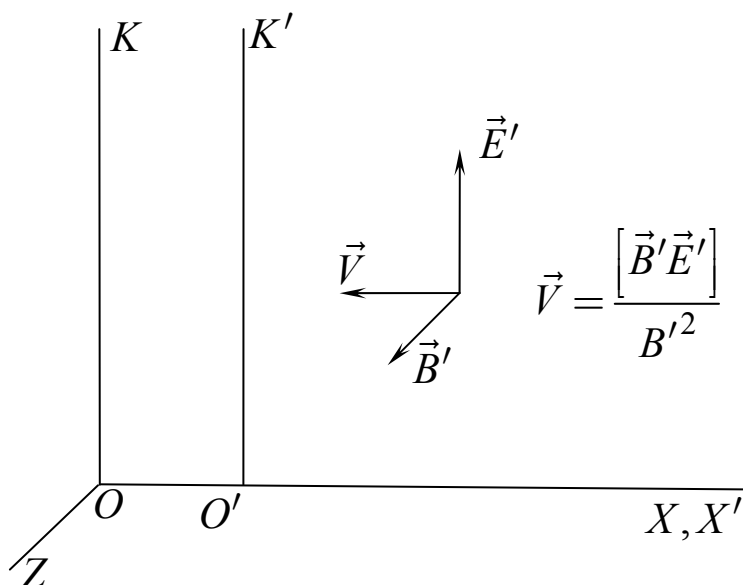


Рис. 4.12. Щоб в СВ  $K$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = 0$  СВ  $K'$  повинна рухатися з швидкістю, яка визначається формулою (4.82)

Умова  $cB' > E'$  впливає із наявності інваріанту  $I_1 = c^2 B^2 - E^2$  в довільному ЕМП (див. нижче) та очевидної вимоги СТВ –  $V < c$ .

Цей результат можна пояснити й таким чином.

СВ  $K'$  повинна рухатися так, щоб електричне поле, що породжується рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{E}_{B'} = -\Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}']$ , компенсувало те електричне поле, що виникає в СВ  $K$  унаслідок руху  $\vec{E}'$ ,  $\vec{E}_{E'} = \Gamma \vec{E}'$  (рис. 4.13).

Тобто

$$\begin{aligned} \vec{E}_{E'} &= -\vec{E}_{B'}; \\ \vec{E} &= \Gamma \cdot \vec{E}' = \Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}'] = 0. \end{aligned}$$

Приходимо до результату (4.82). Електричне поле в СВ  $K$  може зникнути при умові, що  $cB' > E'$ .

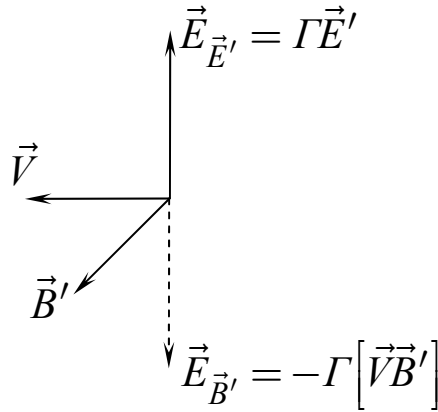


Рис. 4.13. Електричне поле буде відсутнє в СВ  $K$ , якщо електричне поле, що породжується рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{E}_{B'} = -\Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}']$ , компенсується електричним полем, яке виникає внаслідок руху  $\vec{E}'$ ,  $\vec{E}_{E'} = \Gamma \vec{E}'$

**Приклад 4.5.** Знайти напрямок і величину швидкості системи відліку  $K'$ , при якій в СВ  $K$  буде відсутнє магнітне поле, якщо в СВ  $K'$  вектор напруженості поля  $\vec{E}'$  перпендикулярний вектору  $\vec{B}'$ .

*Розв'язання:* Аналогічно розв'язанню попереднього прикладу, орієнтацію осей СВ  $K'$  слід вибрати так, щоб вісь  $O'X'$  була перпендикулярна площині, у якій лежать вектори  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$ . Тоді згідно з умовою задачі можна записати

$$\vec{B}'_x = \vec{B}_x = 0, \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}'.$$

А в СВ  $K$  повинно бути  $\vec{B}_{\perp} = \vec{B} = 0$ .

Тоді з формули перетворення (4.79)  $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'] \right) = 0$

одержуємо

$$\vec{B}'_{\perp} = \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'].$$

Помножимо це рівняння зліва векторно на  $\vec{E}'$  і одержимо

$$[\vec{E}', \vec{B}'] = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{E}', [\vec{V}, \vec{E}']] = -\frac{1}{c^2} \vec{V} (E'^2).$$

Тобто, швидкість СВ  $K'$ , при якій в СВ  $K$  відсутнє магнітне поле (рис. 4.14), дорівнює

$$\vec{V} = -\frac{c^2 \cdot [\vec{E}', \vec{B}']}{E'^2}, \quad V = \frac{c^2 \cdot B'}{E'} \quad (4.83)$$

при умові, що в системі відліку  $K'$   $E' > cB'$ .

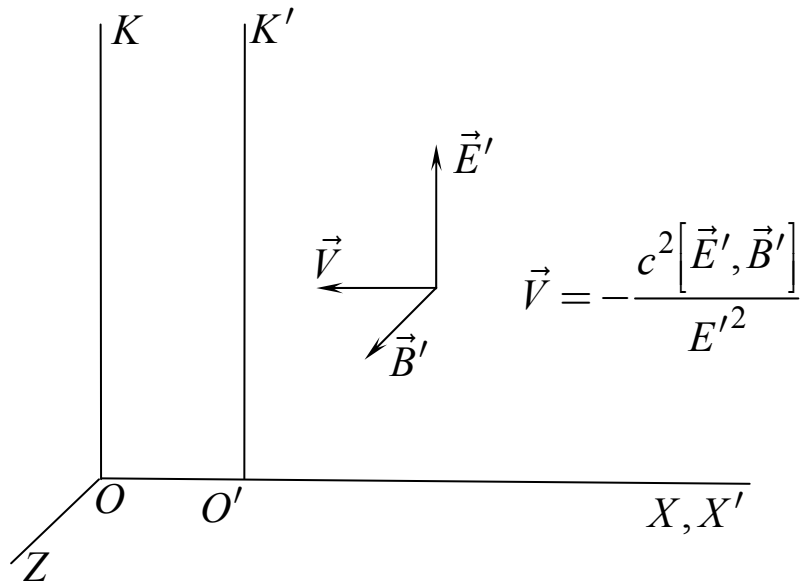


Рис. 4.14. Щоб в СВ  $K$  напруженість магнітного поля  $\vec{B} = 0$ , СВ  $K'$  повинна рухатися з швидкістю, яка визначається формулою (4.83)

Знаходження величини та напрямку швидкості руху такої СВ  $K'$  наочно можна пояснити й так: у СВ  $K$  повинні мати тільки електричне поле, бо магнітне поле повинно зникнути. Але магнітне поле в СВ  $K$  створюється рухом  $\vec{B}'$  ( $\vec{B}_{B'} = \Gamma \cdot \vec{B}'$ ) і рухом електричного поля  $\vec{E}'$  ( $\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$ ).

А в сумі повинні отримати нуль. Тобто на основі умови прикладу слід записати:

$$\vec{B}_{B'} = \Gamma \vec{B}' = -\vec{B}_{E'} = -\frac{\Gamma}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}']; \quad \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'].$$

Звідки і отримуємо (4.83) (див. рис. 4.15).

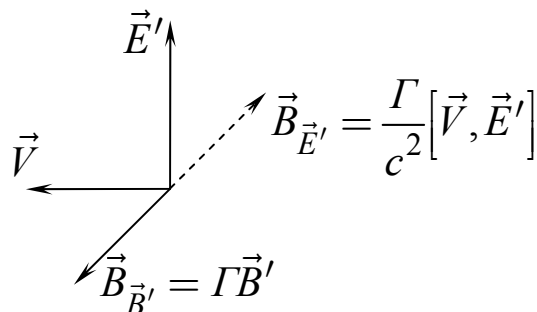


Рис. 4.15. Магнітне поле буде відсутнє в СВ  $K$  якщо магнітне поле, що породжується рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{B}_{B'} = \Gamma \cdot \vec{B}'$ , компенсується магнітним

полем, яке виникає внаслідок руху  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}']$



**Приклад 4.6.** У СВ  $K'$  вектори поля  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$  орієнтовані довільно один відносно одного. Яка повинна бути швидкість СВ  $K'$ , щоб у СВ  $K$  вектор напруженість електричного та вектор індукції магнітного поля були паралельні між собою [227]?

*Розв'язання:* Припустимо, що вектори напруженості електричного та магнітного полів в СВ  $K$  паралельні, тобто  $[\vec{E}, \vec{B}] = 0$ . Направимо швидкість СВ  $K'$  перпендикулярно полям  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ , причому напрямок  $\vec{V}$  виберемо за вісь  $OX$ , рис. 4.16.

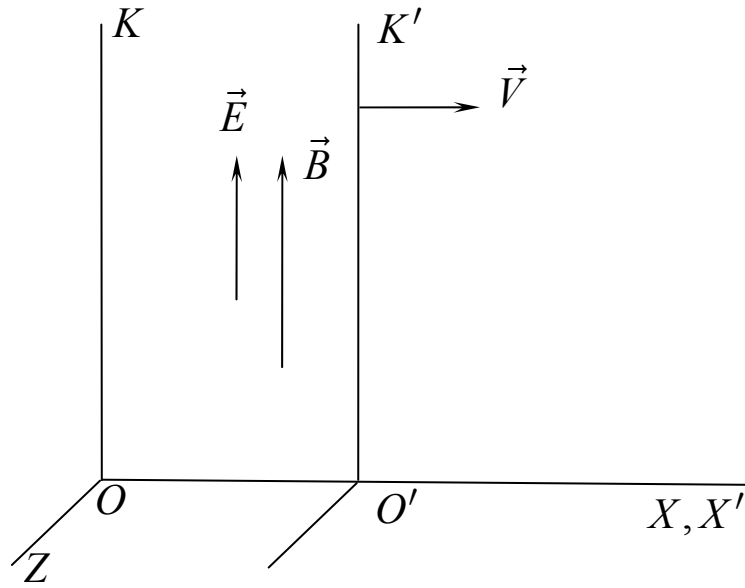


Рис. 4.16. До знаходження такої швидкості руху електродинамічної системи з полями  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$ , при якій у ЛСВ ці поля будуть паралельні

Тоді  $E_x = B_x = 0$  і умова  $[\vec{E}, \vec{B}] = 0$  еквівалентна рівності  $E_y B_z - E_z B_y = 0$ .

Після підстановки в цю рівність компонент поля з формул (4.76) та (4.77) одержимо наступне алгебраїчне рівняння:

$$\Gamma(E'_y + VB'_z) \cdot \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right) = \Gamma(E'_z - VB'_y) \cdot \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right). \quad (4.84)$$

Згідно з формулами (4.76) і (4.77) та розв'язання,  $E'_x = B'_x = 0$ , маємо тому  $[\vec{E}', \vec{B}'] = (E'_y B'_z - E'_z B'_y) \cdot \vec{i}$ . Але ж і швидкість  $\vec{V} = \vec{i} \cdot V$ .

Із попереднього рівняння (4.84) знаходимо швидкість руху СВ  $K'$

$$\frac{\vec{V}}{c^2} = \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{c^2 \cdot B'^2 + E'^2} \cdot [\vec{B}', \vec{E}']. \quad (4.85)$$

Напрямок швидкості визначається вектором  $[\vec{B}', \vec{E}']$ , а величина швидкості є одним із коренів квадратного рівняння (4.85).

*Приклад 4.7.* Нехай в СВ  $K'$  в магнітному полі  $B'_y$  знаходиться нерухома заряджена частинка (протон) (рис. 4.17). Знайти силу, що діє на протон в СВ  $K$ .

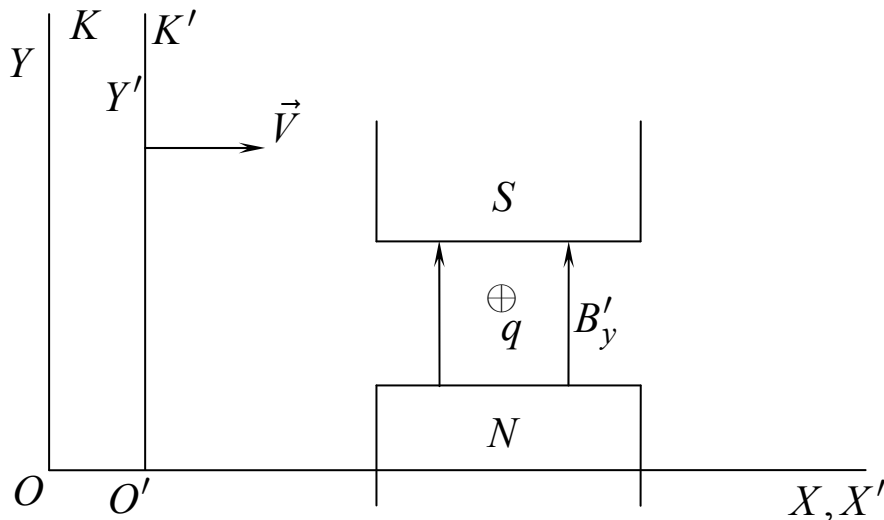


Рис. 4.17. В СВ  $K'$  в магнітному полі  $B'_y$  знаходиться нерухомий протон

*Розв'язання.* Протон в СВ  $K'$  перебуває в стані спокою, тому на нього в цій системі відліку не діє сила Лорентца. З ПВ впливає, що й у СВ  $K$  сила, що діє на протон, повинна дорівнювати нулю. Але в СВ  $K$  будуть існувати й електричне, і магнітне поля з напруженістю та індукцією, відповідно  $E_z = -\Gamma V B'_y$ ,  $B_y = \Gamma B'_y$ . З точки зору СВ  $K$  протон рухається в магнітному полі  $B_y$  зі швидкістю  $\vec{V}$ .

Тому на нього діє й сила Лорентца  $F_L = qV B_y = q\Gamma V B'_y$ , і сила з боку електричного поля,  $F_z^E = qE_z = -q\Gamma V B'_y$ , які направлені протилежно одна одній, але однакові по величині (рис. 4.18).

Тому результуюча сила, яка діє на протон дорівнює нулю, як того і вимагає ПВ. Хоч протон відносно джерела магнітного поля не рухається, в  $K$ -системі сила Лорентца, що діє на нього, не дорівнює нулю.

**Суттєво тут те, що протон рухається відносно СВ  $K$  в певному магнітному полі.**

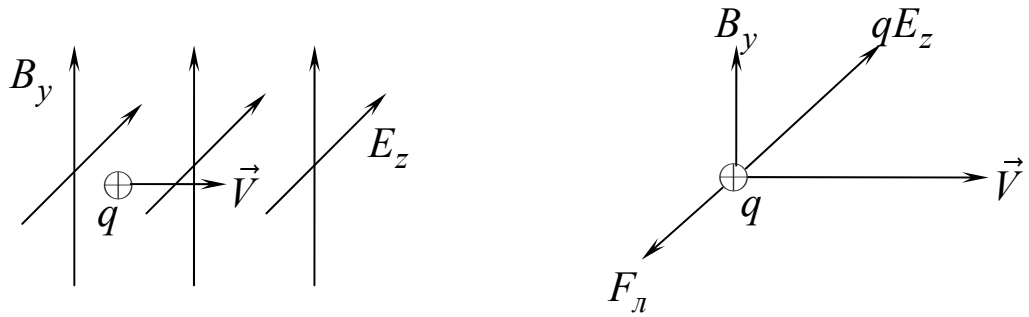


Рис. 4.18. Електромагнітне поле в СВ  $K$  та сили, які діють на заряджену частинку

**Приклад 4.8.** Уявимо, що між пластинами нерухомого в СВ  $K'$  зарядженого конденсатора знаходиться в спокої протон. Чому дорівнює сила, що діє на нього, в СВ  $K$ ? (Рис. 4.19).

*Розв'язання.* Знаходимо спочатку за формулами (4.76) і (4.77) компоненти ЕМП в СВ  $K$

$$E_y = \Gamma E'_y; B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (4.86)$$

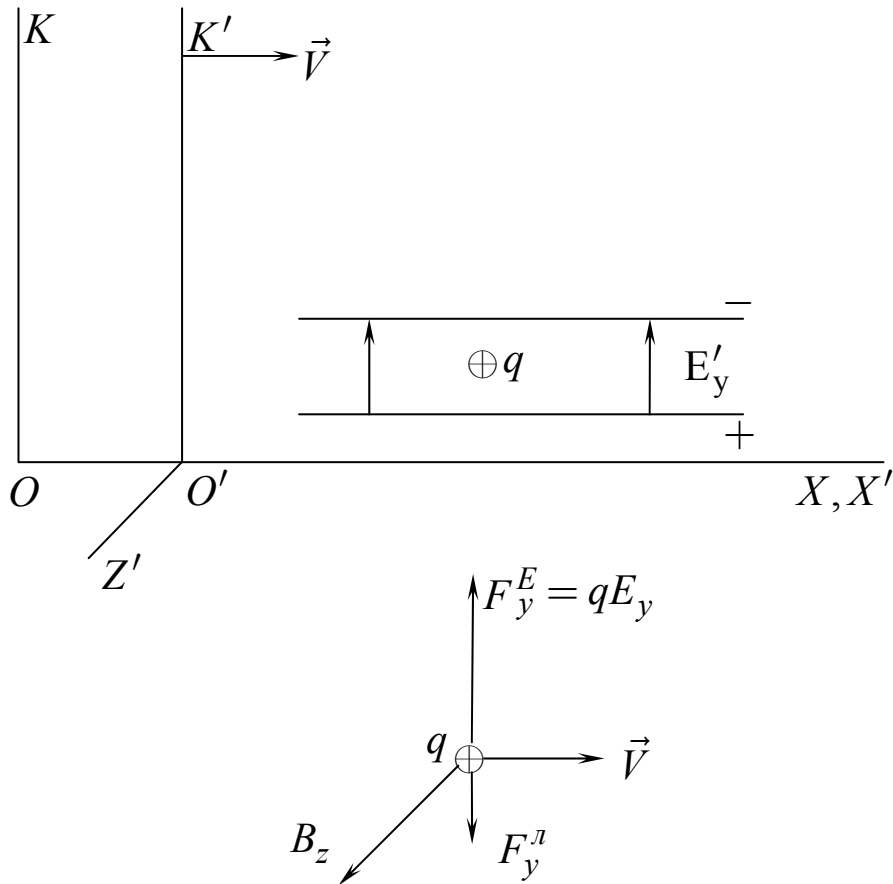


Рис. 4.19. Електромагнітні сили, що діють на протон в СВ  $K'$  та в СВ  $K$

Тому сумарна сила, що діє на протон, з урахуванням напрямку векторів поля та напрямку швидкості його, дорівнює

$$F_y = F_y^E - F_y^M = \Gamma q E'_y - q V B_z = q E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (4.87)$$

Тобто, в СВ  $K$  сила зменшилася в  $\Gamma^{-1}$  разів відповідно до вимог СТВ (оскільки в СВ  $K'$  протон нерухомий, то повинне мати місце таке співвідношення між поперечними складовими сили  $F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ ).

Зауважимо, що при бажанні аналіз електромагнітних сил, які діють на протон у цих двох прикладах, можна покласти в основу доведення співвідношень (останнє можна розглядати як самостійне завдання учням, або студентам, чи як тему науково-оглядового реферату)

$$E_z = -\Gamma V B'_y \text{ та } B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y.$$

**Приклад 4.9.** У СВ  $K'$  у магнітному полі з індукцією  $B'_z$  знаходиться заряджений конденсатор разом з нерухомим протоном в ньому (рис. 4.20). Як повинна рухатися СВ  $K'$ , щоб в СВ  $K$  існувало:

а) тільки електричне поле, ( $\vec{B} = 0$ );

б) тільки магнітне поле ( $\vec{E} = 0$ )?

Знайти також силу, що діє на протон в СВ  $K$  у випадках а) і б) задачі.

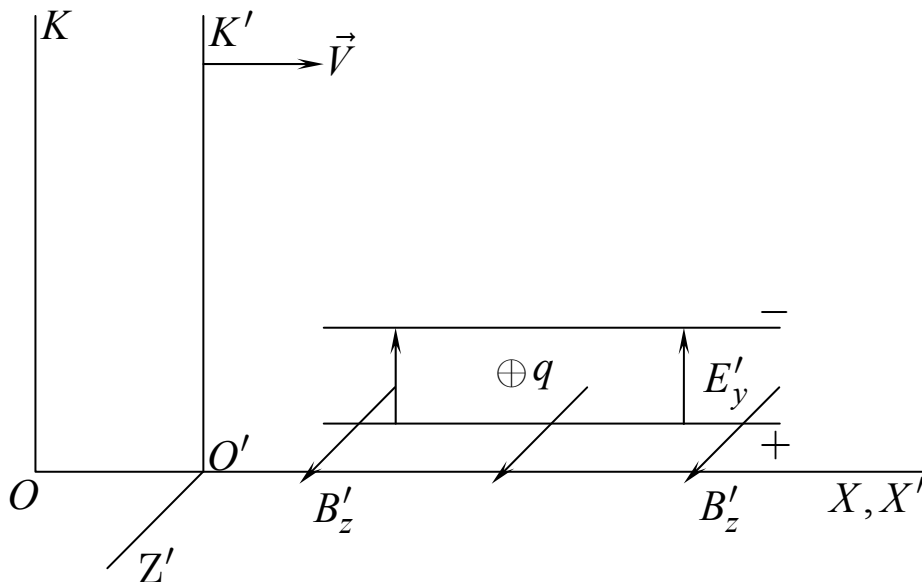


Рис. 4.20. Електромагнітне поле в СВ  $K'$  і СВ  $K$

**Розв'язання.** а) СВ  $K'$  повинна рухатися так, щоб індукція  $B_z$  в СВ  $K$  дорівнювала нулю. Тоді з формул перетворення (4.77) одержуємо

$$B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) = 0, \text{ звідси } V = -\frac{c^2 B'_z}{E'_y}, \quad (4.88)$$

де знак « $\rightarrow$ » означає, що СВ  $K'$  повинна рухатися в сторону від'ємних значень осі  $OX$ . Цей же результат можна отримати на основі таких фізичних міркувань. Очевидно, що  $K'$ -система повинна рухатися так, щоб магнітне поле, яке породжується в СВ  $K$  рухомим електричним полем  $E'_y$  ( $B_z = \frac{V}{c^2} \Gamma E'_y$ ), повністю компенсувало магнітне поле  $B_z = \Gamma B'_z$ .

З рис. 4.20 видно, що складова магнітного поля, яке породжується рухомим електричним полем  $E'_y$ , повинна бути направлена протилежно  $B'_z$  (у бік від'ємних значень осі  $OZ$ ).

Це може бути тільки в тому випадку, коли швидкість руху СВ  $K'$  направлена в сторону від'ємних значень осі  $OX$  (як це показано на рис. 4.21, оскільки вектори швидкості  $\vec{V}$ , напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , яке рухається, та вектор індукції магнітного поля, яке виникає внаслідок руху цього електричного поля, утворюють правогвинтову систему). Тому чисельне значення швидкості руху СВ  $K'$  знаходимо із співвідношення:

$$\Gamma B'_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y,$$

що підтверджує (4.88).

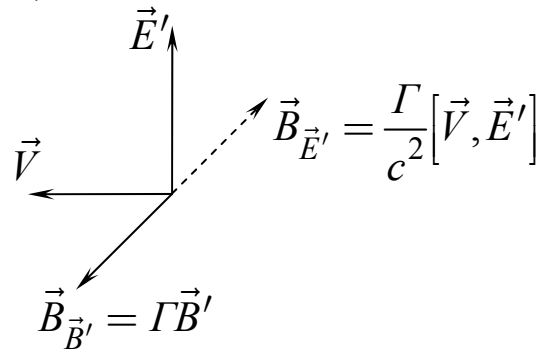


Рис. 4.21. Магнітне поле буде відсутнє в СВ  $K$ , якщо магнітне поле, що породжується рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{B}_{B'} = \Gamma \vec{B}'$ , компенсується магнітним полем, яке виникає внаслідок руху електричного поля  $\vec{E}'$ ,

$$\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'].$$

Таким чином, у СВ  $K$  буде існувати тільки електричне поле, напруженість якого дорівнює (з формули (4.76))

$$E_y = \Gamma (E'_y + V B'_z).$$

Ураховуючи вираз (3.3) для швидкості  $\vec{V}$ , одержуємо для значення сили, що діє на протон в СВ  $K$

$$\begin{aligned} F_y &= qE_y = q\Gamma E'_y \left( 1 - \frac{c^2 \cdot B_z'^2}{E_y'^2} \right) = \\ &= q\Gamma E'_y \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (4.89)$$

відповідно до вимогами СТВ.

б) Щоб в  $K$ -системі було відсутнє електричне поле,  $K'$ -система повинна рухатися зі швидкістю, величина й напрямок якої визначається з другого співвідношення формули (4.76)

$$E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z) = 0, \text{ тоді } V = -\frac{E'_y}{B'_z}, \quad (4.90)$$

що зрозуміло і з наступних фізичних міркувань.

Напруженість електричного поля в СВ  $K$  складається з двох доданків:  $\Gamma E'_y$  – напруженості поля, зумовленого перетворенням поперечної складової поля  $E'_y$  при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , і доданка, який зумовлений породженням електричного поля рухомим магнітним полем  $B'_z$ ,  $\Gamma VB'_z$ .

А результуюче електричне поле в СВ  $K$ , згідно з умовою задачі, дорівнює нулю.

Значить, складова напруженості електричного поля  $\Gamma VB'_z$  повинна бути направлена протилежно  $\Gamma E'_y$ .

І оскільки вектори  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  при русі магнітного поля (і виникненні електричного поля напруженістю  $\vec{E}$ ) утворюють лівогвинтову систему, рис. 4.22, то необхідно, щоб СВ  $K'$  рухалася вліво (у напрямку, протилежному осі  $OX$ ) зі швидкістю, яку знаходимо з рівності

$$\Gamma E'_y = -\Gamma VB'_z,$$

що еквівалентно (4.90).

Чому ж дорівнює сила, що діє на протон у такій СВ?

Із загальних міркувань ясно, що ця сила буде менша від  $qE'_y$  в  $\Gamma$  раз. Упевнимся в цьому безпосередньо, ураховуючи (4.77) і те, що на протон буде діяти тільки сила Лорентца в СВ  $K$ :

$$F_y = qVB_z = qV \left( \Gamma B'_z - \frac{\Gamma V E'_y}{c^2} \right) = qE'_y \Gamma \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

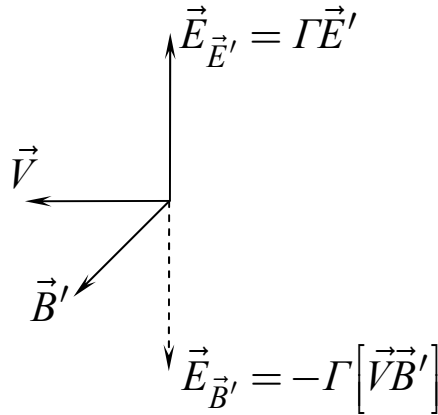


Рис. 4.22. Електричне поле в СВ  $K$  дорівнює нулю, якщо поля  $\vec{E}_{E'}$  і  $\vec{E}_{B'}$  компенсують одне одного

У загальному випадку при довільному електромагнітному полі в СВ  $K'$  і довільній швидкості руху зарядженої частинки для знаходження значення сили, яка діє на неї, у СВ  $K$  треба знайти за формулами (4.76) і (4.77) складові поля, а швидкість частинки в СВ  $K$  знайти за релятивістськими формулами додавання швидкостей.

**Приклад 4.10. Природа сили Лорентца.** Нехай у СВ  $K$  є магнітне поле  $\vec{B}$  й у ньому зі швидкістю  $\vec{V}$  рухається ЗЧ. Показати, що сила Лорентца, яка діє на ЗЧ в СВ  $K$  – це сила з боку електричного поля, що існує в власній СВ зарядженої частинки [102; 125].

*Розв'язання:* Дійсно, у СВ  $K'$ , що пов'язана з ЗЧ, згідно з ФПКЕМП (4.5), спостерігаємо електричне поле

$$E'_x = E_x; E'_y = \Gamma(E_y - VB_z) = -\Gamma VB_z;$$

$$E'_z = \Gamma(E_z + VB_y) = \Gamma VB_y.$$

Ураховуючи, що

$$[\vec{V}, \vec{B}] = \vec{i}(V_y B_z - V_z B_y) + \vec{j}(V_z B_x - V_x B_z) + \vec{k}(V_x B_y - V_y B_x),$$

та згідно з умовою задачі  $\vec{V} = \vec{i}V$ , напруженість електричного поля в СВ  $K'$  можна подати у вигляді

$$\vec{E}' = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}].$$

І таким чином, можна записати вираз для сили, що діє в СВ  $K'$  на ЗЧ

$$\vec{F}' = q\vec{E}'.$$

Оскільки заряд в СВ  $K'$  нерухомий при вимірюванні цієї електричної сили із СВ  $K$  ми повинні мати:

$$\vec{F} = \vec{F}' \sqrt{1 - B^2}.$$

Іншими словами, з точки зору СВ  $K$ , сила дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E}' \cdot \sqrt{1 - B^2} = q\Gamma[\vec{V}, \vec{B}] \cdot \sqrt{1 - B^2} = q[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.91)$$

Тобто, ми одержали силу Лорентца.

**Таким чином, сила Лорентца – це сила з боку електричного поля  $\vec{E}'$ , яке існує у ВСВ зарядженої частинки, але ця сила вимірюється приладами, що нерухомі в лабораторній системі відліку (СВ  $K$ ).**

**Приклад 4.11.** Знайти електромагнітне поле зарядженої частинки, що рухається рівномірно та прямолінійно [102; 125].

*Розв'язання:* Сумістимо початок декартової системи відліку  $K'$  з точковою ЗЧ, величина заряду якої  $q$ . У цій системі напруженість електричного поля в довільній точці простору, що визначається радіус-вектором  $\vec{r}'$ , описується законом Кулона, а магнітне поле відсутнє

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3}; \quad \vec{B}' = 0;$$

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; \quad E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; \quad E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad (4.92)$$

де  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ .

У СВ  $K$  ЗЧ рухається зі швидкістю  $V$  в напрямку додатних значень вісі  $OX$ . Вісі координат  $K'$  орієнтовані таким чином, що в момент часу  $t' = t = 0$  вони збігаються з відповідними осями СВ  $K$ .

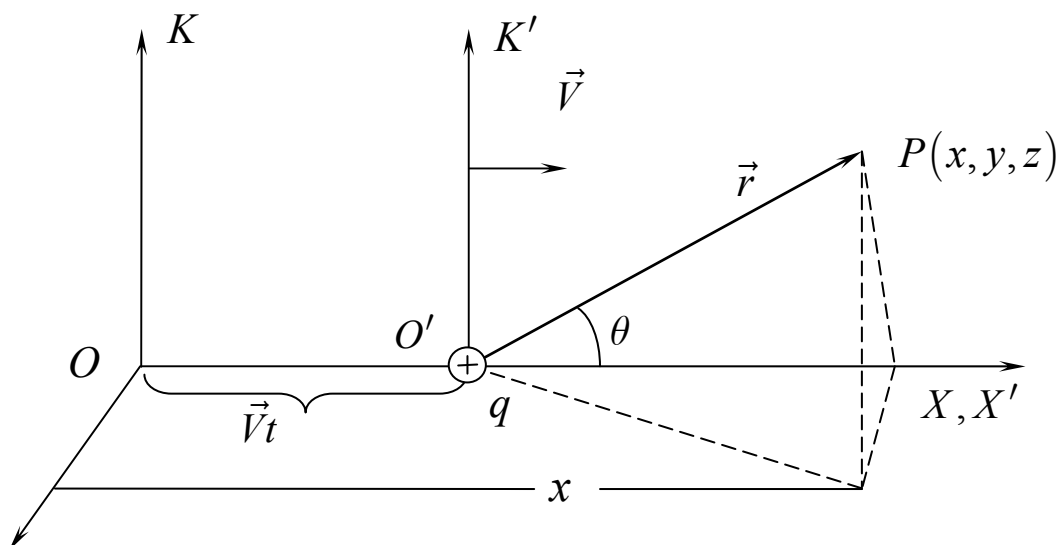


Рис. 4.23. До знаходження ЕМП ЗЧ, що рухається рівномірно і прямолінійно



Використовуючи формули перетворення компонент електромагнітного поля, одержуємо:

$$E_x = E'_x; E_y = E'_y \Gamma; E_z = E'_z \Gamma \quad (4.93)$$

$$B_x = B'_x = 0; B_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} E'_z; B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (4.94)$$

Виразимо тепер радіус-вектор  $r'$ , що визначає положення точки простору  $P(x', y', z')$  в СВ  $K'$ , через радіус-вектор  $\vec{r}$  проведений з миттєвого положення заряду  $q$  в системі відліку  $K$  в ту ж саму точку поля  $P(x, y, z)$  (рис. 4.23).

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \Gamma^2 \left[ (x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r' &= \Gamma \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} = \\ &= \Gamma \cdot \sqrt{(x - Vt)^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\Gamma^2}}. \end{aligned}$$

Але оскільки  $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  (див. рис. 4.23), то вираз для  $r'$  можна подати так:

$$\begin{aligned} r' &= \Gamma \cdot \left[ \left( (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right) \cdot \left( 1 - \frac{V^2 (y^2 + z^2)}{c^2 r^2} \right) \right]^{1/2} = \\ &= r \cdot \Gamma \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

тобто

$$\left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2} = r^3 \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}, \quad (4.95)$$

де  $\sin^2 \theta = \frac{y^2 + z^2}{r^2}$ .

І тоді на основі (4.93) одержуємо:

$$E_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q(x-Vt)\Gamma}{4\pi\epsilon_0\Gamma^3 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2+z^2) \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}};$$

$$E_y = \frac{qy\Gamma}{4\pi\epsilon_0\Gamma^3 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2+z^2) \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}};$$

$$E_z = \frac{qz\Gamma}{4\pi\epsilon_0\Gamma^3 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2+z^2) \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}}.$$

Ураховуючи формулу (4.95) для вектора напруженості електричного поля рухомої зарядженої частинки, одержуємо:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2+z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}}. \quad (4.96)$$

Індукція магнітного поля визначається за допомогою формул (4.94). Результат краще записати у векторній формі:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}], \quad (4.97)$$

де  $\vec{E}$  визначається формулами (4.96).

Нагадаємо, що результат (4.97) може бути обґрунтований декількома способами [102; 108; 125]:

1. На основі інтерпретації закону Біо-Савара.
2. Використовуючи потенціали Лієнара-Віхерта.
3. Користуючись формулами перетворення 4-потенціалу.
4. І врешті, з допомогою формул перетворення компонент електромагнітного поля.

З формули (4.97) видно, що лінії  $\vec{B}$  утворюють концентричні кола з центром на вісі  $OX$ , уздовж якої рухається заряд  $q$ .

Конфігурація ЕМП ЗЧ, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат  $K$ , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом з ЗЧ.

Але для будь-якої фіксованої точки простору в СВ  $K$  вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  є функціями часу.

Причому для ЕМП, яке визначається векторами поля (4.96) та (4.97), у будь-який момент часу, у будь-якій точці простору мають місце фундаментальні співвідношення:

$$\begin{aligned} \text{rot}E &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{rot}\vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Перше з цих рівнянь дозволяє зробити висновок про те, що **як явище електромагнітної індукції, так і закон ЕМІ є наслідком принципу відносності та закону Кулона** [200; 135; 130; 26] (див. також п. 3.5).

Ще раз нагадаємо, що  $r$  – це віддаль точки поля від миттєвого положення ЗЧ, а  $\theta$  – кут між напрямком руху ЗЧ (вектором швидкості  $\vec{V}$  ЗЧ) та радіус-вектором  $\vec{r}$ , проведеним з миттєвого положення ЗЧ в дану точку простору.

Як буде видно з наступних пояснень навіть незначна відмінність електричного поля РЗЧ (при  $V \ll c$ ) та поля нерухомої ЗЧ носить принциповий характер.

Особливо наочним прикладом, який часто використовується в навчальній літературі для ілюстрації відносності електричного та магнітного полів, є аналіз взаємодії зарядженої частинки та довгого провідника з струмом (рис. 3.8).

Розглянемо взаємодію прямолінійного провідника зі струмом та зарядженої частинки, яка рухається вздовж провідника, з точки зору 2-х систем відліку  $K$  і СВ  $K'$  [102; 125; 26; 100].

**Приклад 4.12.** У СВ  $K'$  знаходиться нерухомий провідник, по якому протікає постійний струм  $I'$ . Уздовж провідника в площині  $XOY$  у протилежному напрямі осі  $OX$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}'$  електрон. Знайти силу взаємодії між електроном і провідником зі струмом  $I'$  в СВ  $K$ . Пояснити явище виникнення об'ємного заряду в рухомому провіднику зі струмом.

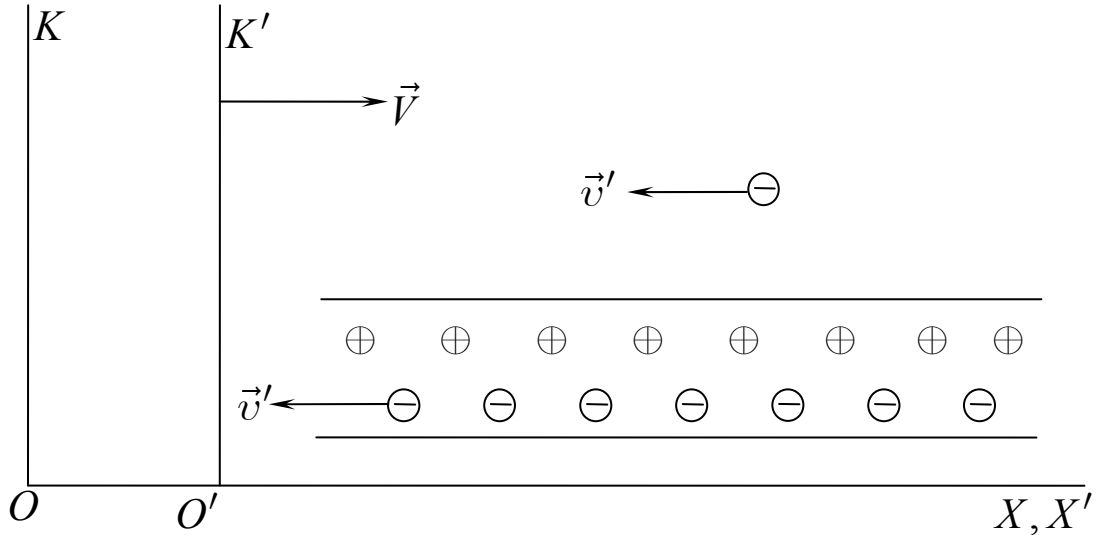


Рис. 4.24. Взаємодія електрона й провідника зі струмом

*Розв'язання.* Індукція магнітного поля в точці знаходження електрона визначається за формулою

$$B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r'}, \quad (4.98)$$

де  $r'$  – віддаль електрона від провідника,  $I' = j' \cdot S'$ ,  $j' = \frac{n_-^0 \cdot v' q}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$  –

густина струму в СВ  $K'$ ,  $S'$  – площа поперечного перерізу провідника,  $n_-^0$  – концентрація електронів провідності у ВСВ,  $\beta' = \frac{v'}{c}$ ,  $v'$  – дрейфова швидкість руху цих електронів.

Тоді величина сили Лорентца, яка діє на електрон в СВ  $K'$  дорівнює

$$F'_l = qv' \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'}. \quad (4.99)$$

Якщо СВ  $K'$  разом з провідником рухається зі швидкістю  $V = v'$ , то в СВ  $K$  електрон буде нерухомий, і тому до уваги в цій СВ слід брати тільки силу, що діє на електрон з боку електричного поля напруженістю

$$E_y = \Gamma V B'_z \quad (4.100)$$

Це електричне поле в СВ  $K$  виникає внаслідок руху відносно СВ  $K$  магнітного поля  $B'_z$ . І тоді сила, що діє на ЗЧ в СВ  $K$

$$F = q\Gamma V B'_z. \quad (4.101)$$

Порівнюючи (4.99) і (4.101), бачимо, що  $F'_l = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ .

Але ця задача з такою моделлю ППС (рис. 4.24) дає можливість для іншого наглядного фізичного пояснення явища виникнення електричного поля в СВ  $K$ .

Як виявляється, це електричне поле напруженістю  $E_y = \Gamma V B'_z$  створюється різною за величиною густиною об'ємного заряду електронів провідності й об'ємною густиною заряду позитивних іонів кристалічної ґратки.

Часто говорять, що провідник зі струмом, який рухається в лабораторній СВ вздовж своєї довжини, у цій СВ характеризується деякою об'ємною густиною заряду (провідник зі струмом є «заряджений»).

Дійсно, якщо СВ  $K'$  є власною СВ провідника зі струмом, то в цій СВ об'ємна густина заряду електронів провідності

$$\rho'_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}},$$

де  $v'$  – дрейфова швидкість електронів провідності в СВ  $K'$ ;  $\beta' = \frac{v'}{c}$ .

Тоді очевидно, що в лабораторній СВ  $K$ , відносно якої  $K'$ -система рухається з швидкістю  $V = \vec{v}$  електрони провідності будуть нерухомі, а іони кристалічної ґратки мають швидкість  $V = \vec{v}$ . Тому густина заряду позитивних іонів в СВ  $K$  дорівнює

$$\rho_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.102)$$

А густина заряду електронів провідності СВ  $K$

$$\rho_- = \rho_-^0 = \rho'_- \cdot \sqrt{1 - \beta'^2}, \quad (4.103)$$

де  $\rho_+^0 = n_+^0 q$ ,  $\rho_-^0 = n_-^0 q$  – об'ємна густина заряду позитивних іонів і електронів провідності, відповідно, у власних СВ;  $q$  – величина заряду електрона;  $n_+^0$ ,  $n_-^0$  – концентрація іонів та електронів у ВСВ, відповідно.

Значить, сумарна об'ємна густина заряду провідника зі струмом у СВ  $K$

$$\begin{aligned} \rho = \rho_+ - \rho_- &= \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} - \rho'_- \cdot \sqrt{1 - \beta'^2} = \\ &= \frac{\rho_+^0 \cdot \frac{v'^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j_x' \cdot v'}{\sqrt{1 - \beta'^2}}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Таким чином, лінійний провідник зі струмом в СВ, відносно якої він рухається, при геометрії задачі, показаній на рис. 4.24, характеризується лінійною густиною заряду  $\tau = \rho \cdot S$  і тому створює електричне поле напруженістю:

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\rho_+^0 v'^2 \cdot S}{2\pi\epsilon_0 \cdot r c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma v' \cdot \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = \Gamma V B'_z, \quad (4.105)$$

де  $I' = j'S = v' \rho'_- S$ , що збігається з напруженістю поля (4.88), яка може бути знайдена й іншими шляхами.

А сила, що діє на електрон в СВ  $K$  тоді дорівнює

$$F_y = \frac{F'_-}{\sqrt{1 - \beta'^2}}.$$

Здавалося б, що ми одержали майже ідентичний опис взаємодії ЗЧ та ППС:  $F_y \cong F'_y$ . Але насправді маємо в СВ  $K$  точно таке ж значення сили, яка діє на ЗЧ, як і в СВ  $K'$ .

Дійсно, необхідно врахувати формули перетворення для поперечних компонент сили при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ ,  $F_y = \frac{F'_-}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$

(див. (1.20)).

Для простоти підрахунків ми розглянули випадок коли  $V = v'$ . Зацікавлений читач, розглянувши більш загальний випадок  $V \neq v'$  прийде до аналогічного висновку: у лабораторній СВ провідник зі струмом, який рухається вздовж своєї довжини з довільною за величиною швидкістю  $V$  характеризується об'ємною густиною заряду (4.104) (див. п. 5.3).

Зауважимо ще раз, що протиріччя, які виникають при використанні умови нейтральності  $\rho_+^0 = -\rho'_- = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ , проаналізовані в ро-

ботах [193; 85; 108; 176; 92; 136; 90], і там же запропоновані альтернативні розв'язки цих протиріч у рамках моделі, зображеної на рис. 4.24. (додаткові пояснення див. п. 5.3 та п. 5.4).

Електродинаміка та спеціальна теорія відносності є фундаментальними фізичними теоріями, які мають надзвичайно широке практичне й теоретичне застосування.

Знайомство з методами сучасної фізики, ілюстрація та використання на конкретних прикладах фундаментальних положень електрома-

гнетизму та принципів СТВ допомагають формуванню наукового світогляду студентів, виховують у них творчий підхід до знань.

Аналіз подібних задач невимушено формує також поняття про єдине електромагнітне поле. І ця єдність, як бачимо, може ілюструватися не тільки при вивченні явища електромагнітної індукції. У дидактичному аспекті, у найчистішому вигляді, єдине електромагнітне поле проявляється при аналізі взаємодії 2-х рухомих заряджених частинок [69, 87]. На наш погляд, чіткого й повного уявлення про єдність і відносність електричного та магнітного полів неможливо досягти без вивчення елементарних основ СТВ.

Таким чином, аналіз цих питань, з огляду на перегляд змісту фізичної освіти в педагогічних ВНЗ і СНЗ та реалізацію загальних принципів дидактики: фундаментальність, науковість, системність і послідовність, є актуальним.

#### **4.5. Комп'ютерна програма для моделювання відносності електричного та магнітного полів**

Методика вивчення явища відносності електричного й магнітного полів, як свідчить аналіз навчально-методичної літератури та досвід викладання цієї теми в ВНЗ, потребує вдосконалення [142] (див. також пп. 4.1–4.4).

Один зі шляхів удосконалення методики вивчення теми «Відносність електричного та магнітного полів» полягає в моделюванні явища відносності електричного та магнітного полів.

Ознайомлення учнів і студентів з методами наукових досліджень – одна з найважливіших вимог принципу науковості у вивченні фізики. Серед багатьох методів наукового пізнання вагоме місце займає метод моделювання, який використовується не лише у фізиці, а й у багатьох інших галузях науки.

Комп'ютерні моделі легко вписуються в структуру традиційних форм навчання, дають змогу викладачу моделювати природні явища, створювати абстрактні моделі, які в процесі вивчення електродинаміки описувались словесно, або в суто формальному вигляді.

Комп'ютерні моделі є також ефективним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів та студентів, що відкриває перед викладачем широкі можливості щодо удосконалення навчально-виховного процесу.

Взагалі, застосування методу моделювання в навчальному процесі – одне з актуальних питань сучасної педагогіки і відповідних методик. І це цілком закономірно, оскільки сам процес формування знань пов'язаний з перетворенням у свідомості учня чи студента одних моделей на інші, які є похідними від перших, але точнішими, з більшим наближенням до фізичної реальності [72; 71].

Використання моделей з навчальною метою допомагає виділити й відобразити найважливіші для пізнання зв'язки в явищах, які часто бувають недоступними для безпосереднього спостереження, розкрити механізм протікання відповідних процесів, ознайомити учнів з експериментальною базою сучасної фізики.

Крім названих дидактичних можливостей метод моделювання може бути використаний також для самостійної роботи учнів і студентів при вивченні відповідних розділів фізики, зокрема електродинаміки.

Метод математичного моделювання, який дозволяє звести дослідження явищ зовнішнього світу до математичних задач, займає провідне місце серед інших методів дослідження, особливо у зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки. Математичні моделі проявили себе також як важливий засіб управління пізнавальною діяльністю студентів.

Одним з можливих напрямків застосування методу математичного моделювання є дослідження відносності електричного та магнітного полів.

Як показано в **Розділі 1** (п. 1.2.1з, п. 1.2.2б) та в пп. 4.2 та 4.3, якщо в довільній точці простору  $(x', y', z')$  і в довільний момент часу  $t'$  інерційної системи відліку  $K'$  відомі напруженість електричного поля  $\vec{E}'$  та магнітна індукція  $\vec{B}'$  електромагнітного поля, то значення полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в тій самій просторово-часовій точці СВ  $K$ , відносно якої СВ  $K'$  рухається вздовж вісі  $OX$  зі швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$ , визначаються ФПКЕМП (4.76) (4.77):

$$E_x = E'_x; E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z); E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y);$$

$$B_x = B'_x; B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right); B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right).$$

Для більш наочної демонстрації основних наслідків ФПКЕМП (проявів явища відносності електричного та магнітного полів) нами був розроблений програмний продукт «Компонент». Ця програма складається з 3-х модулів: «Компонент  $K \rightarrow K'$ » (за допомогою якого можна простежити за поведінкою векторів поля  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{P}, \vec{M}$  при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ ), «Компонент  $K' \rightarrow K$ » (за допомогою якого можна простежити за поведінкою названих вище векторів поля при переході з СВ  $K'$  до СВ  $K$ ) та модулю «ЗАДАЧІ» (за допомогою якого можна розв'язати деякі задачі з цієї теми) [98].

Розглянемо основні особливості використання програмного продукту «Компонент».

Після запуску програми перед користувачем з'явиться вікно програми (див. рис. 4.25).



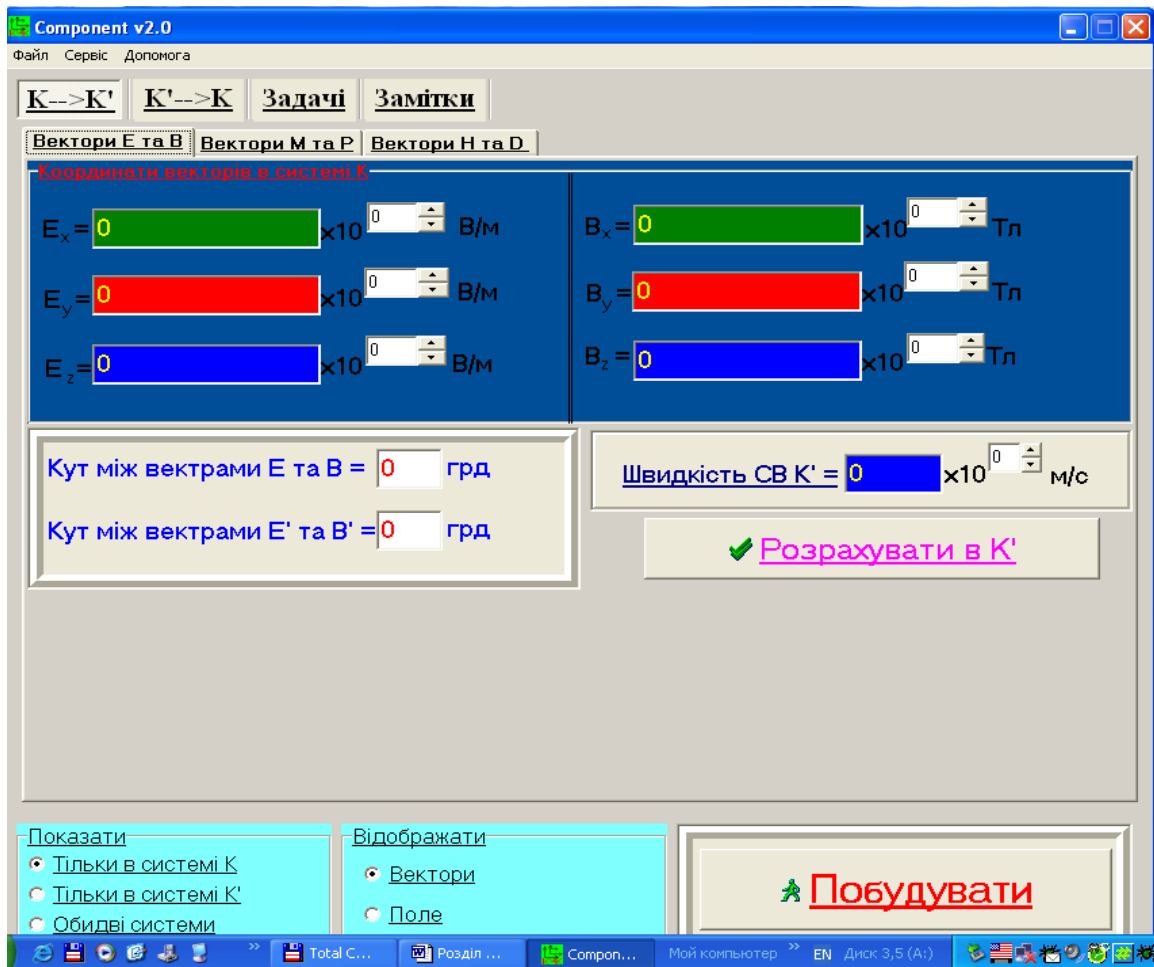


Рис. 4.25. Головне вікно програми

Розглянемо основні елементи цього вікна.

Головне меню програми представлено такими елементами (рис. 4.26)



Рис. 4.26. Головне меню програми

У закладці «Файл» можна очистити головне вікно або ж закрити програму.

У закладці «Сервіс» є декілька важливих пунктів (див. рис. 4.27):

1. «Налаштування СВ»
2. «Розрахувати вектори»
3. «Параметри».

«Налаштування СВ» – це меню застосовується для налагодження системи координат, а також для визначення меж значень відповідних векторів (наприклад,  $E_x^{\max} = E_y^{\max} = E_z^{\max}$  та  $B_x^{\max} = B_y^{\max} = B_z^{\max}$ ). У ньому можна задати як кольори осей системи координат, так і кольори векторів.



Рис. 4.27. Елементи закладки «Сервіс»

«Розрахувати вектори» – у цьому вікні можна в автоматичному режимі підрахувати вектори електричного і магнітного полів при переході від системи відліку  $K$  до СВ  $K'$  або навпаки (див рис. 4.28).

«Параметри» – вікно, яке служить для вибору клієнтської області програми залежно від розподільчої здатності окремо взятого монітора (розміри екрана).

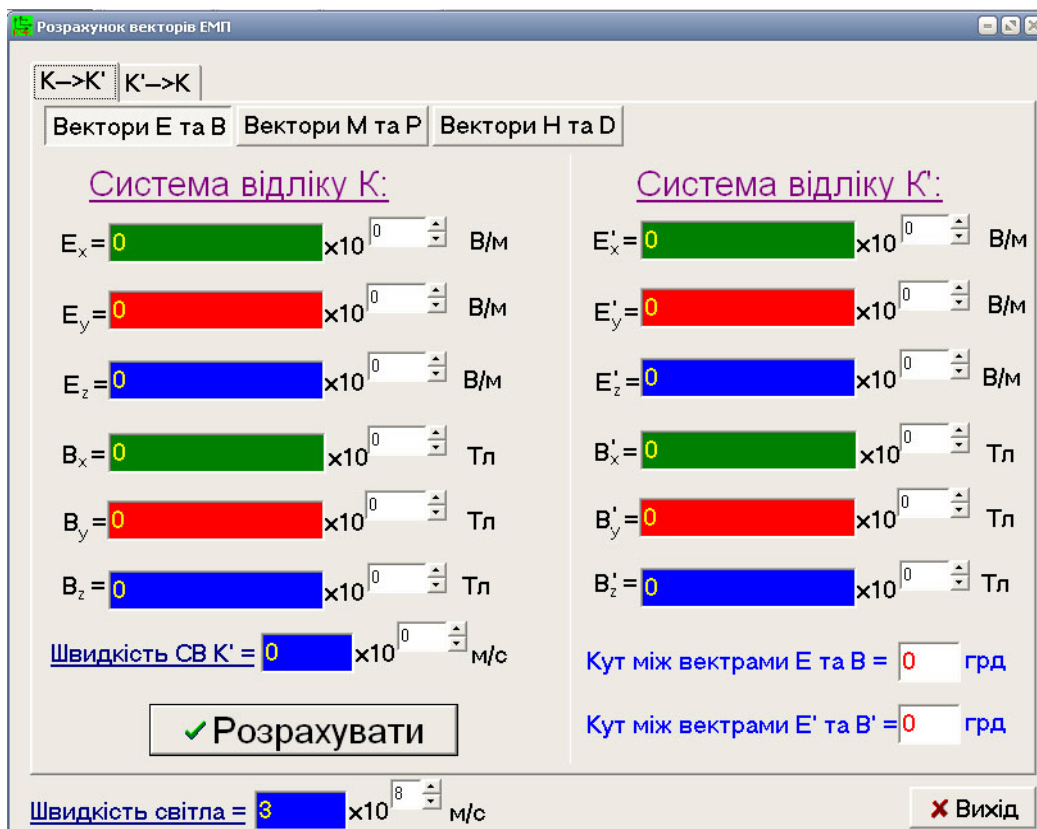


Рис. 4.28. Розрахунок компонент векторів

Ознайомившись з елементами меню, перейдемо до розгляду питань, що пов'язані з роботою програми.

Для прикладу розглянемо роботу з модулем переходу від системи відліку  $K$  до СВ  $K'$  (аналогічно використовується і модуль переходу від СВ  $K'$  до СВ  $K$ ).

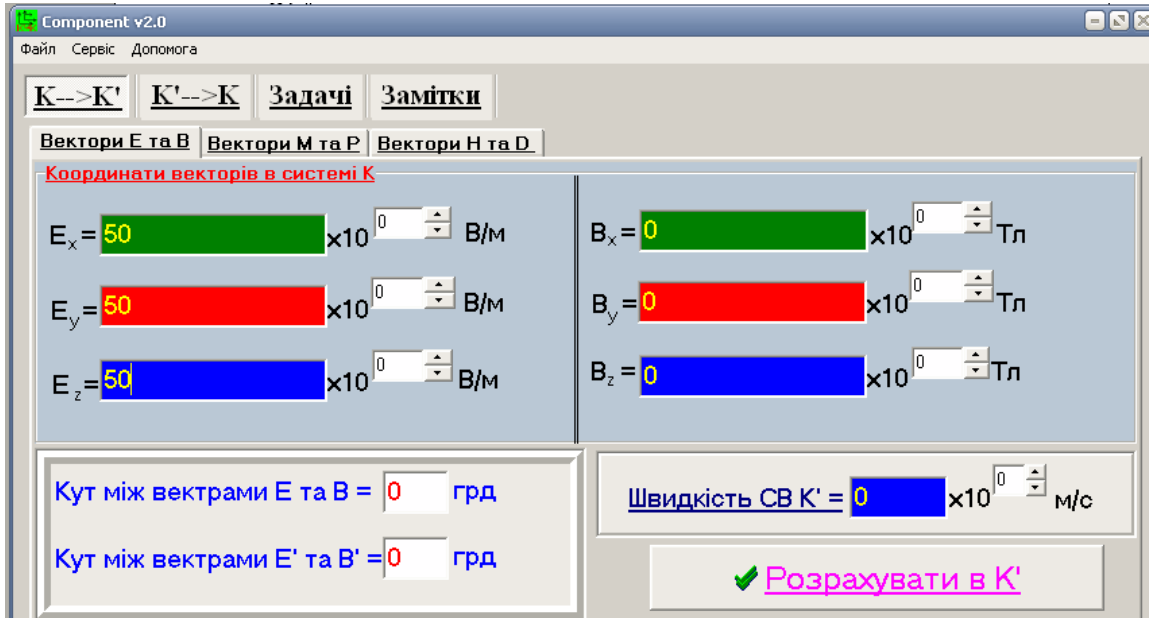


Рис. 4.29. Область вводу компонент поля

Після вводу відповідних компонент поля (як показано на рис. 4.29), користувач може вибрати два різних види показу результатів (рис. 4.30): поодиноким вектором (рис. 4.31) та полем (рис. 4.32).

Для кожного випадку можна вибрати систему відліку, у якій буде виконано побудову (рис. 4.33).

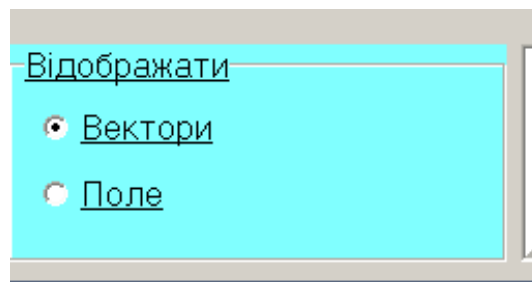


Рис. 4.30. Виведення показу результатів

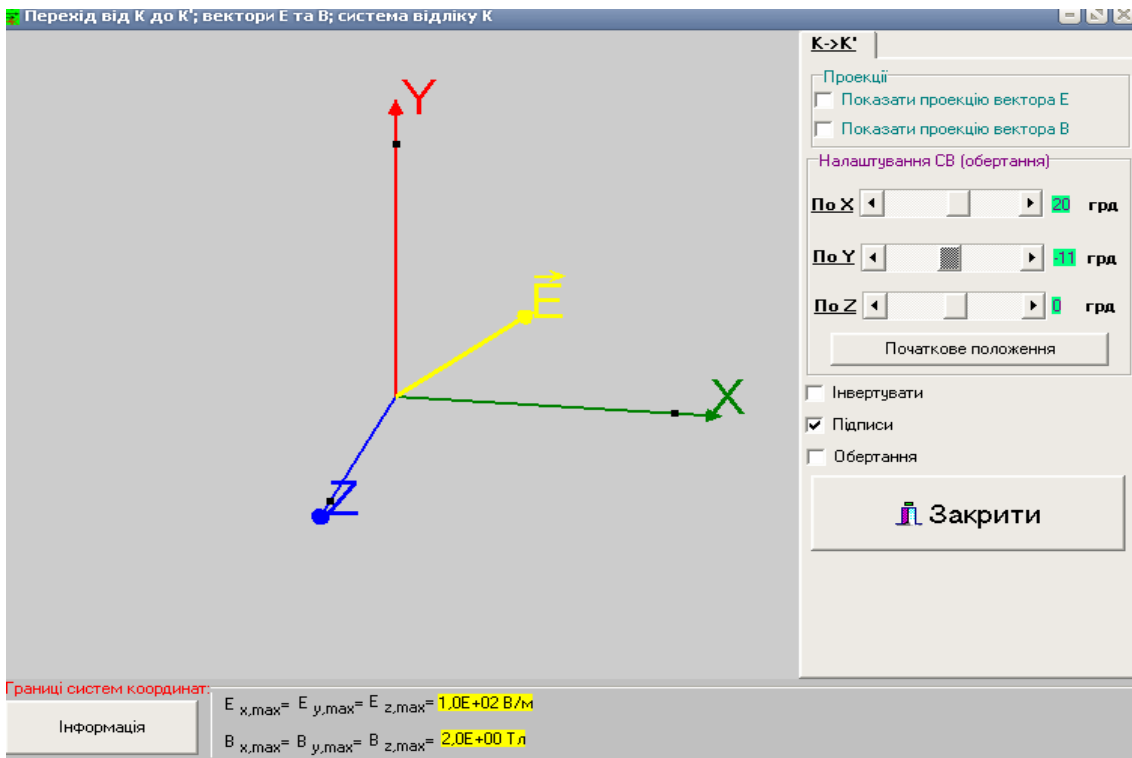


Рис. 4.31. Результат побудови вектора

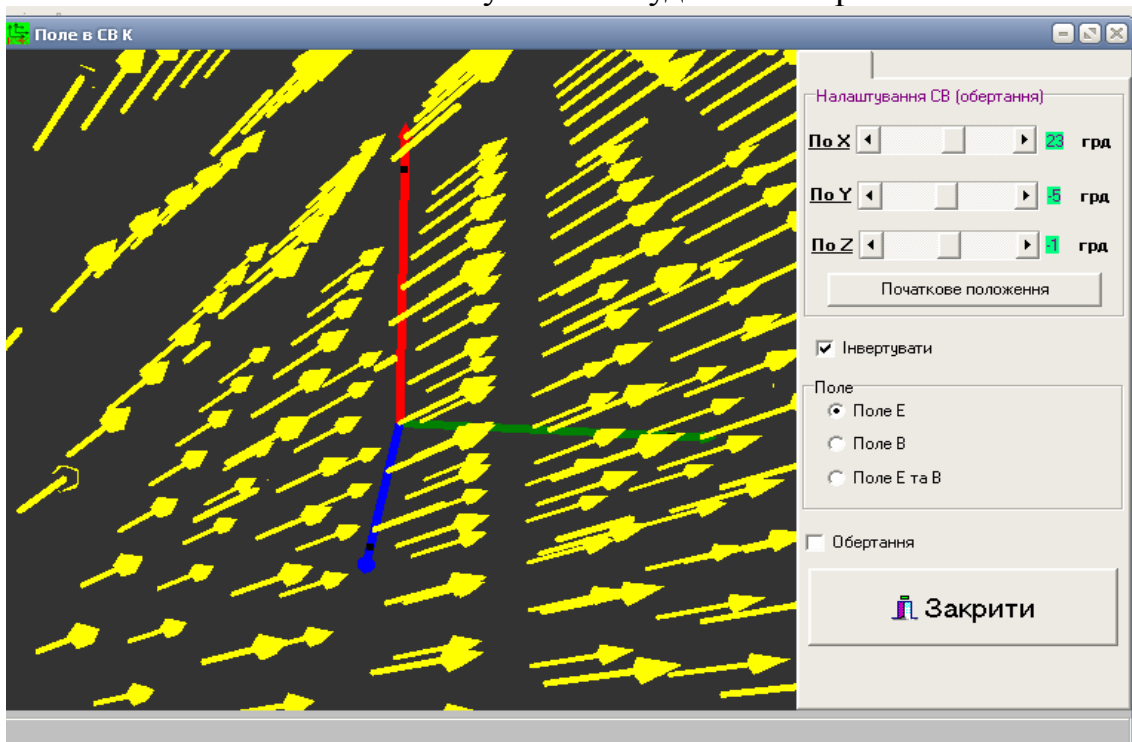


Рис. 4.32. Результат побудови поля

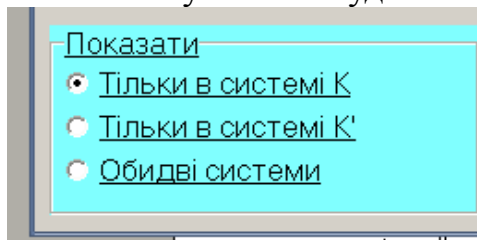


Рис. 4.33. Вибір системи відліку для отримання результатів обчислення

При побудові векторів у нижній частині вікна (див. рис. 4.34) показані граничні значення проєкцій компонент електромагнітного поля для даного випадку.

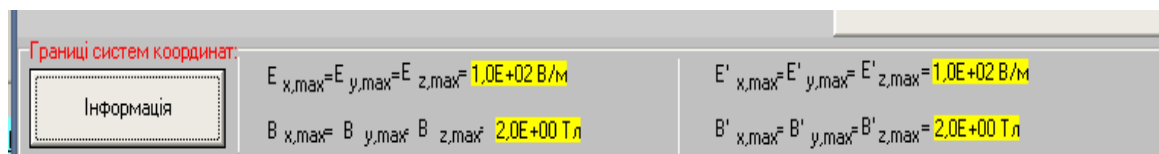


Рис. 4.34. Граничні значення проєкцій векторів поля

У цій версії програми є можливість моделювати поведінку не тільки векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , а й векторів намагнічування і поляризації ( $\vec{M}$ ,  $\vec{P}$ ), а також векторів напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  та індукції електричного поля  $\vec{D}$ . Меню вибору векторів зображено на рисунку 4.35.

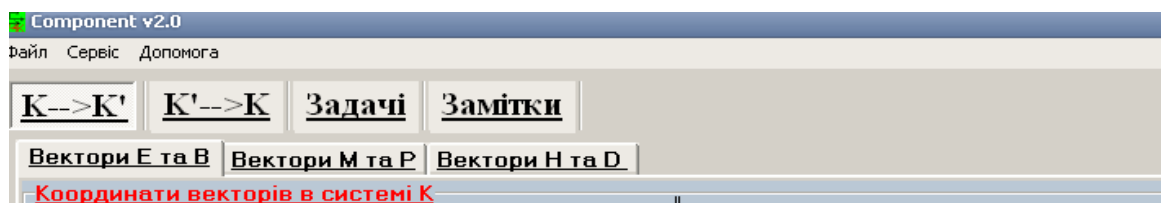


Рис. 4.35. Закладки для вибору різних векторів

Умови роботи з векторами  $\vec{M}$  і  $\vec{P}$ ,  $\vec{H}$  та  $\vec{D}$  такі ж, як і для описаних вище векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ .

Тепер детальніше зупинимося на розгляді модуля розв'язку задач (модуль розв'язку задач поданий на рисунку 4.36).

За допомогою цього модуля можна демонструвати деякі наслідки формул перетворення компонент електромагнітного поля (див. п. 4.4).

Зокрема:

Знаходження величини та напрямку швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб в СВ  $K$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = 0$ ;

Знаходження величини та напрямку швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб в СВ  $K$  індукція магнітного поля  $\vec{B} = 0$ .

Розглянемо деякі приклади використання програми.

**Приклад 4.13.** Довести, що якщо в деякій системі відліку є тільки електричне або тільки магнітне поля, то в будь-якій іншій системі відліку спостерігається і електричне і магнітне поля причому вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{E}$  перпендикулярні між собою.

Розв'язання: У головному вікні програми вводимо будь-які значення компонент проекції вектора, наприклад вектора  $\vec{B}$  у відповідні поля, та вказуємо швидкість системи відліку  $K'$  (наприклад як показана на рис. 4.36).

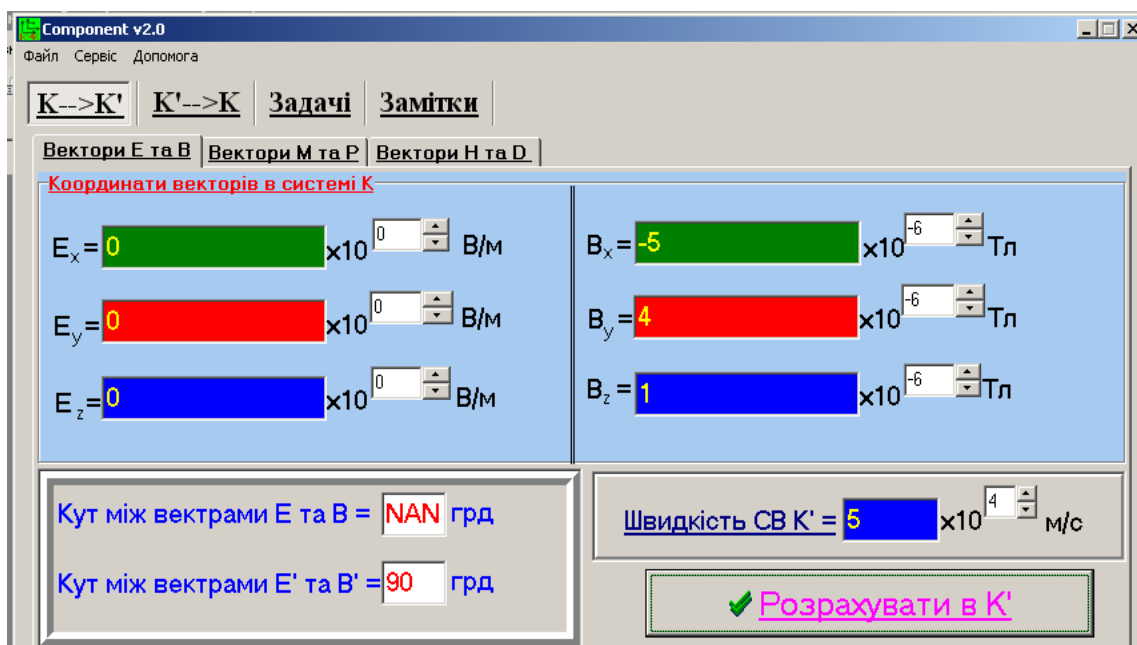


Рис. 4.36. Компоненти вектора  $\vec{B}$

Після натискання кнопки «Розрахувати в  $K'$ », ми побачимо, що дійсно в СВ  $K'$  буде існувати як вектор  $\vec{E}'$  так і вектор  $\vec{B}'$ , (рис. 4.37), причому кут між ними буде дорівнювати 90 градусів (див. рис. 4.36).

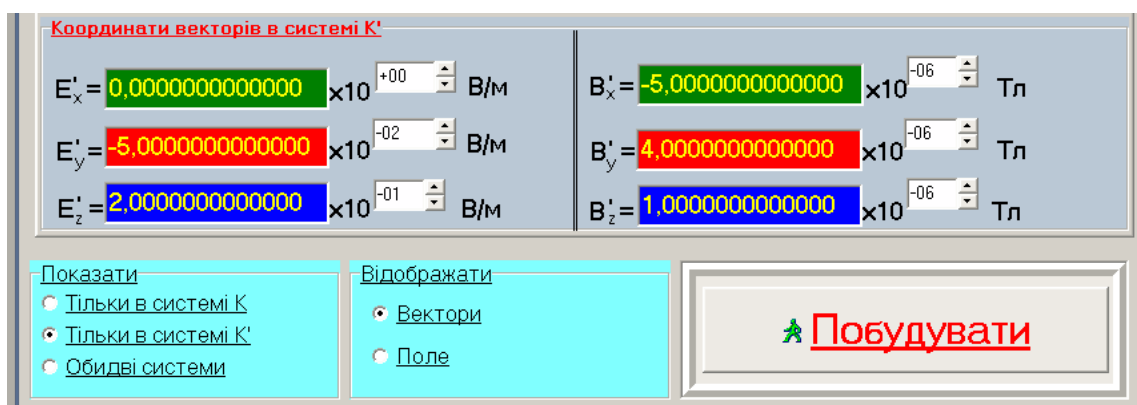


Рис. 4.37. Результат аналітичного розрахунку

Щоб побачити графічний розв'язок задачі потрібно натиснути кнопку «Побудувати», попередньо вибравши відповідну систему координат (наприклад як показано на рис. 4.37). Результати побудови зображені на рис. 4.38.

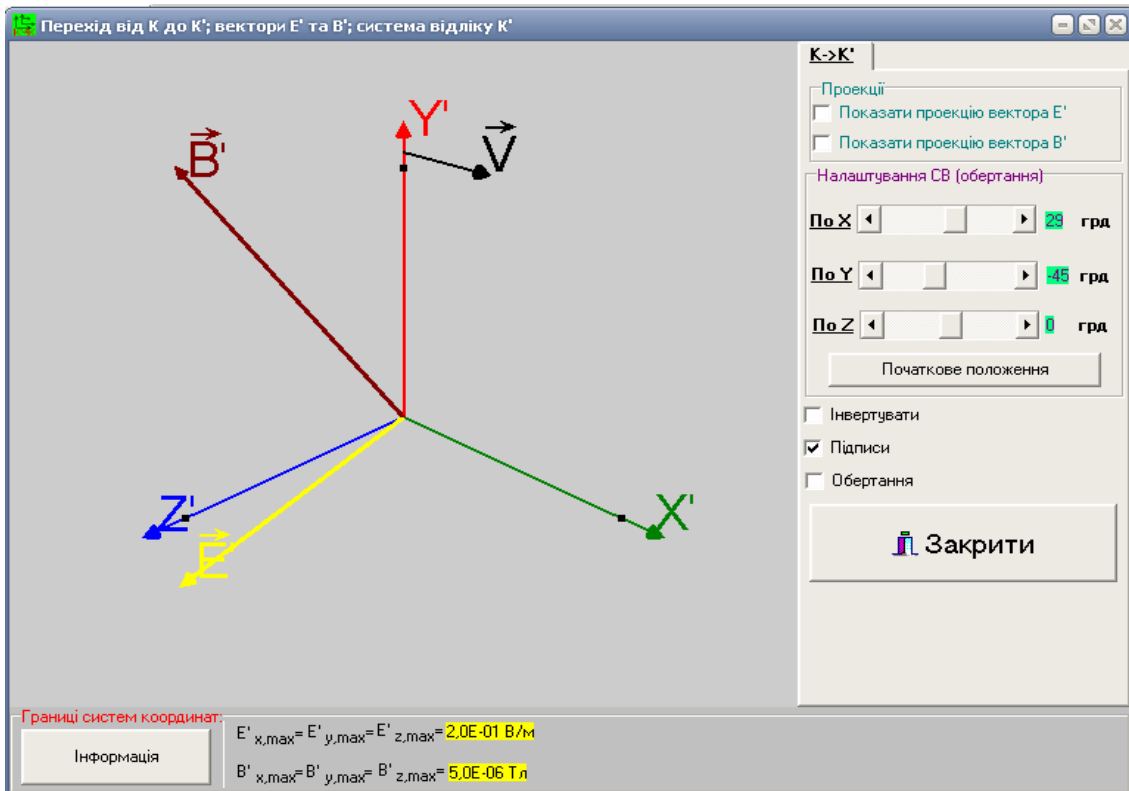


Рис. 4.38. Результати побудови

Якщо ж вибрати відображення результату у вигляді поля, то можна буде побачити картинку, яка зображена на рис. 4.39.

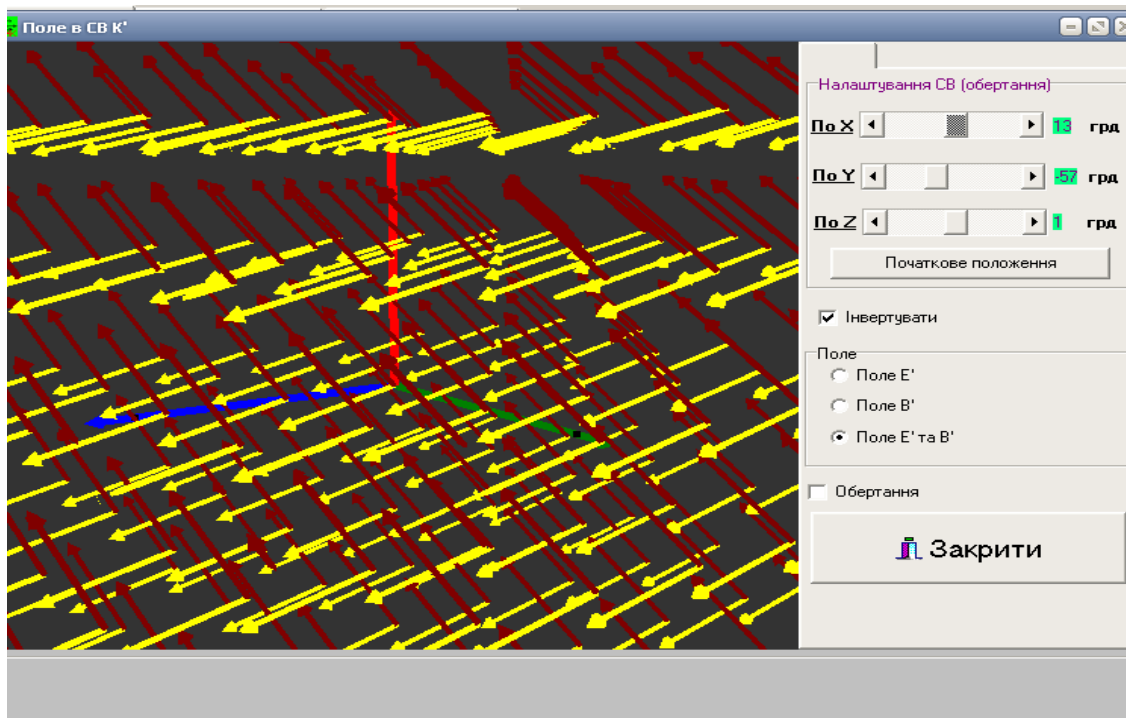


Рис. 4.39. Результати побудови

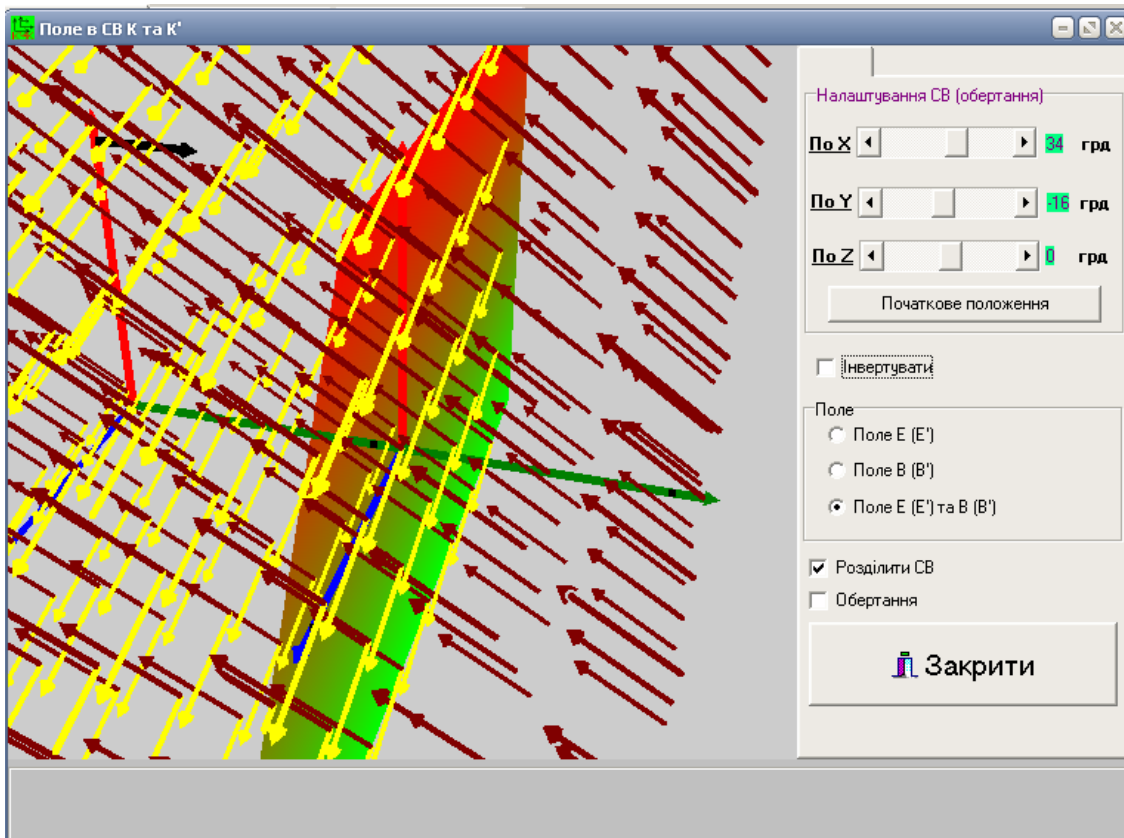


Рис. 4.40. Результати побудови (у вигляді поля)

На рис. 4.39. видно, що в системі  $K'$  існує як електрична складова ЕМП так і магнітна складова ЕМП, при чому чітко видно, що кут між ними дорівнює 90 градусів.

Якщо задати одночасно показ картин поля у системі відліку  $K'$  та  $K$ , то можна буде спостерігатися картинку, що зображена на рис. 4.40.

На рисунку 4.40 червоно-зелена площина є умовною поділкою систем відліку: у цьому випадку зліва зображена система відліку  $K'$ , а справа – система відліку  $K$ .

**Приклад 4.14.** Знайти кут між векторами  $\vec{E}(0; 11 \cdot 10^6; 5 \cdot 10^5) \text{ В/м}$  та  $\vec{B}(5 \cdot 10^{-12}; 8 \cdot 10^{-12}; 7 \cdot 10^{-12}) \text{ Тл}$ .

*Розв'язання:* Для розв'язку цієї задачі використаємо модуль розв'язку задач. Для цього треба вибрати закладку «Задачі». Ввести відповідні значення проекцій векторів. У полі шуканої величини поставити знак «?» та натиснути кнопку «Знайти» (див. рис. 4.41).

Після чого замість знаку «?» з'явиться значення шуканої величини. Якщо натиснути кнопку «Побудувати», то програма побудує задану ситуацію (див. рис. 4.42).



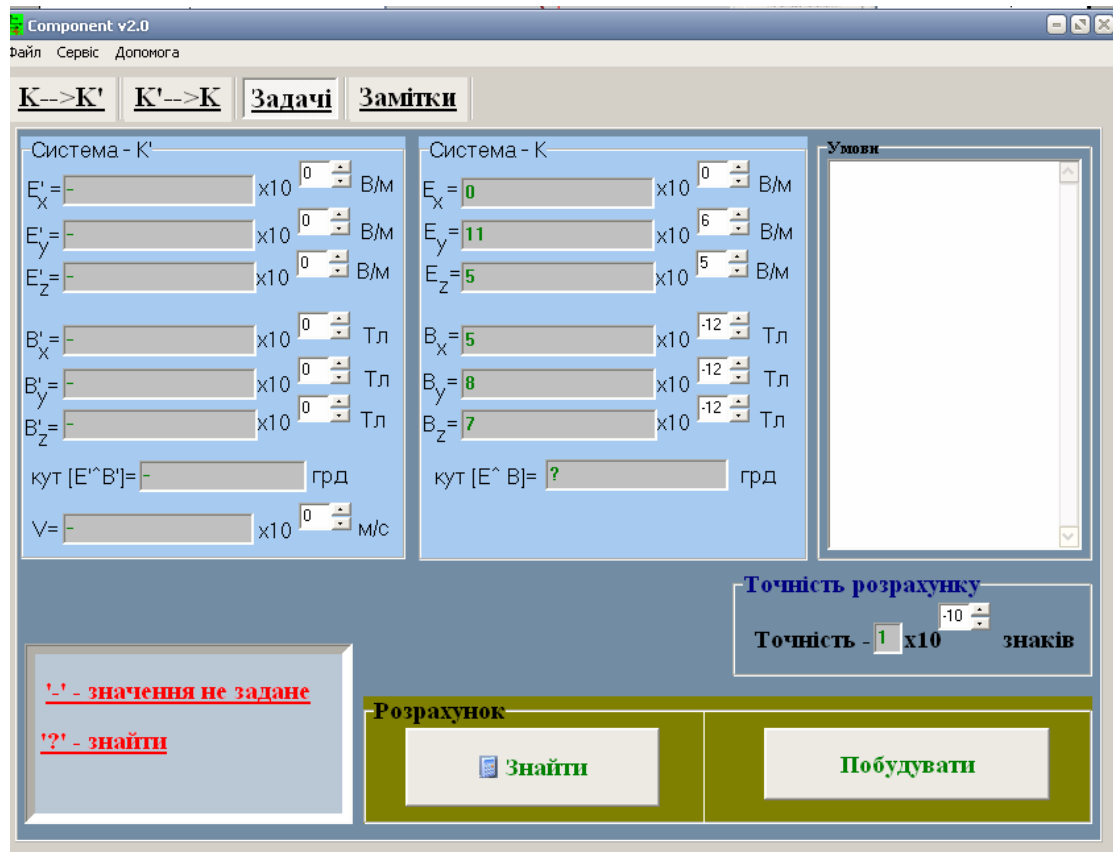


Рис. 4.41. Використання модуля «Задачі»

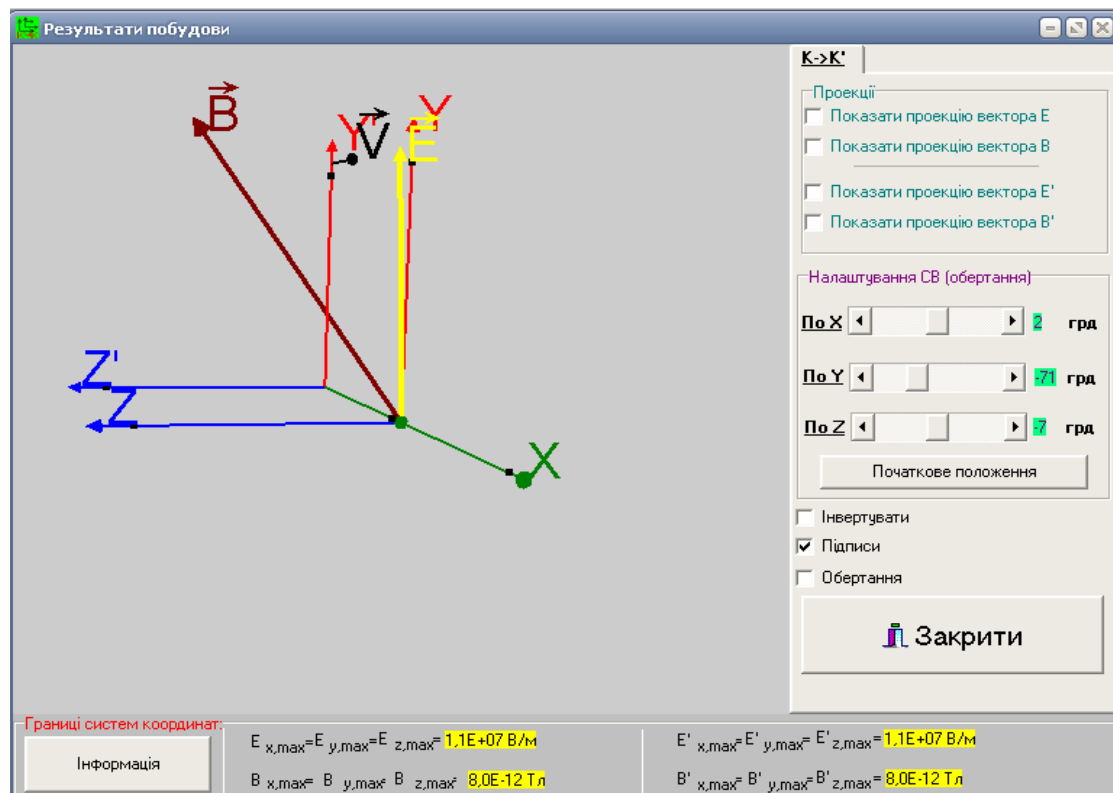


Рис. 4.42. Використання модуля «Задачі» (графічна побудова)

**Приклад 4.15.** Знайти проекцію вектора  $\vec{B}$  якщо задані проекції векторів  $\vec{B}'$  та  $\vec{E}'$ .

*Розв'язання:* Для розв'язку цієї задачі теж можна використати модуль розв'язку задач. Для цього треба вибрати закладку «Задачі», увести у відповідні поля значення проекцій відповідних векторів та вказати швидкість СВ  $K'$ .

Потім на полях проекцій вектора  $\vec{B}$  поставити символ «?» та натиснути кнопку «Знайти». Результат поданий на рисунку 4.43.

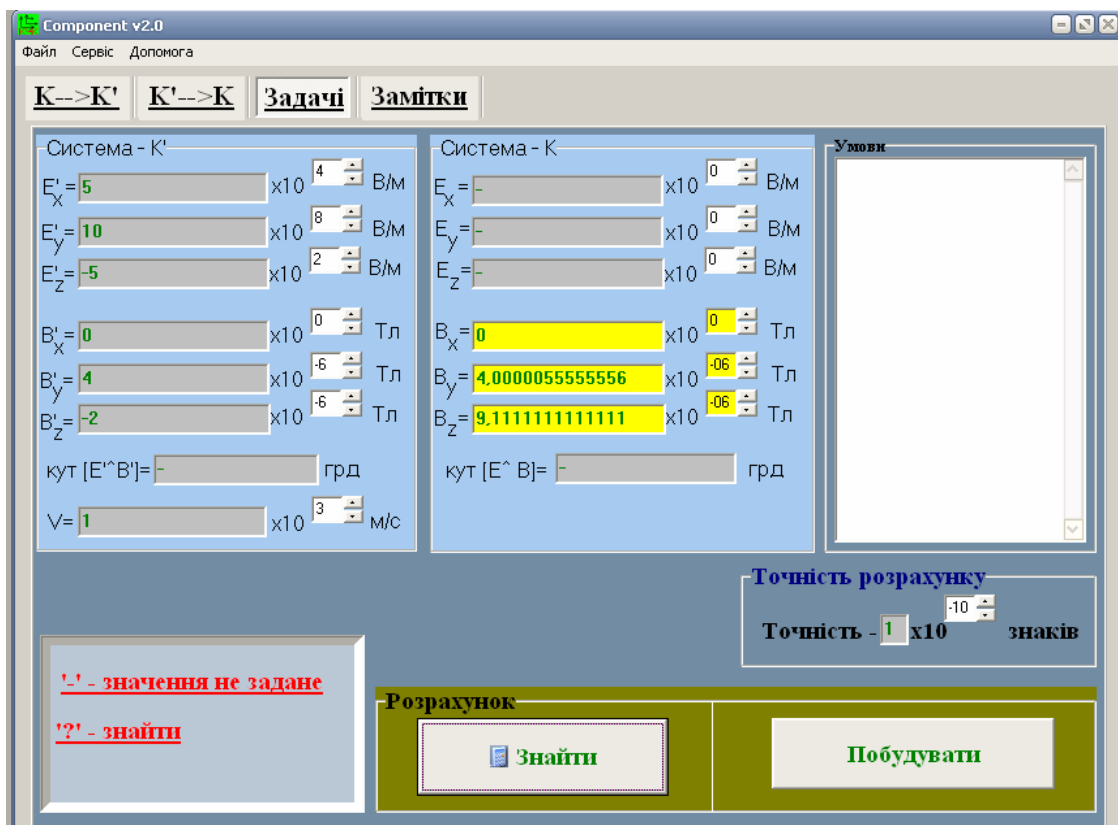


Рис. 4.43. Використання модуля «Задачі»

**Приклад 4.17.** Нехай в СВ  $K'$  існує ЕМП, проекції вектора напруженості електричного поля та вектора індукції МП якого мають значення  $\vec{E}'(0; 20; 40) \text{ В/м}$ ,  $\vec{B}'(0; -4,7 \cdot 10^{-11}; 2,35 \cdot 10^{-11}) \text{ Тл}$ . Знайти величину та напрямок швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб в СВ  $K$  вектор магнітної індукції дорівнював нулю  $\vec{B} = 0$ .

*Розв'язання:* Уведемо ці значення у відповідні поля модуля «Задачі» та натиснемо кнопку «Знайти» (як описано в попередньому прикладі). Результати роботи програми показані на рисунку 4.44.

Слід зауважити, що справа зазначені умови, які накладаються на задачу.

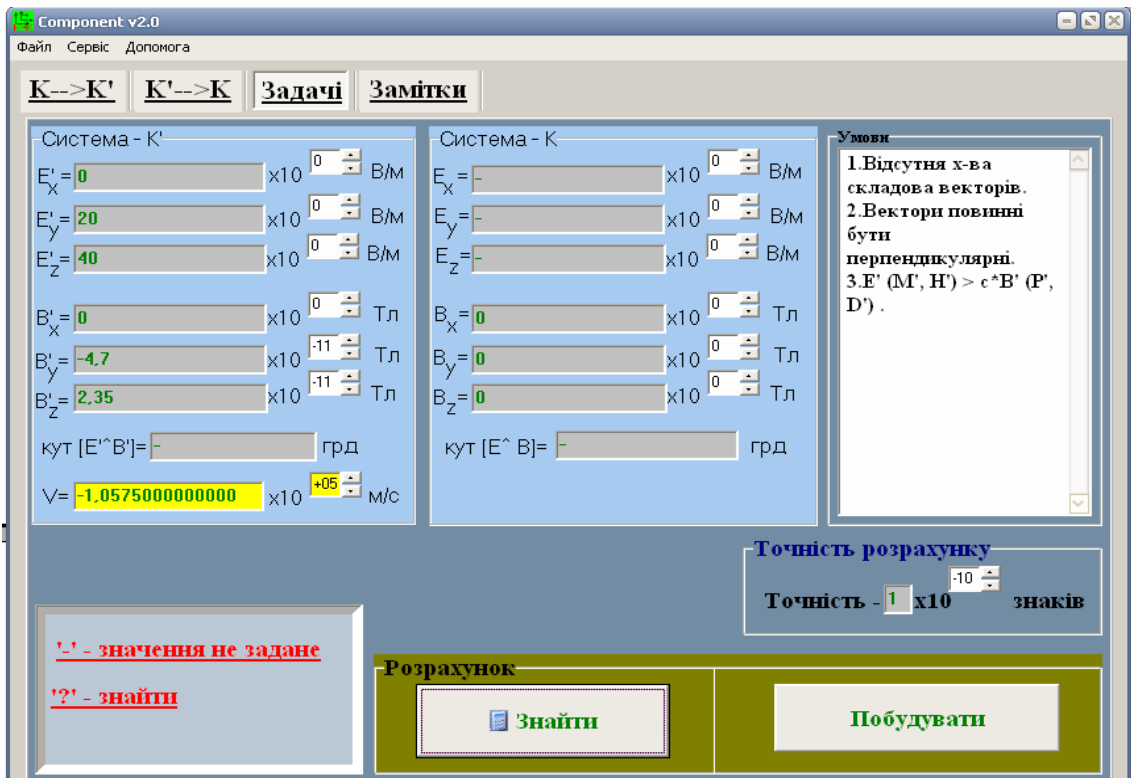


Рис. 4.44. Результат розрахунку

Якщо ж тепер натиснути кнопку «Побудувати», то можна побачити графічно відповідь цієї задачі (див. рис. 4.45).

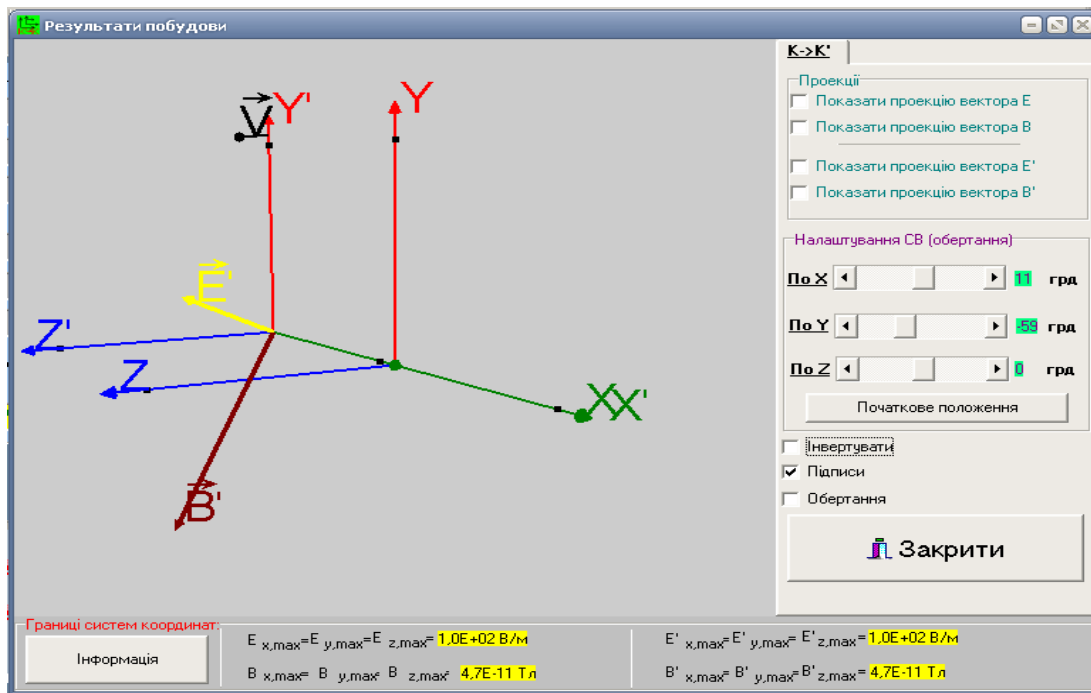


Рис. 4.45. Результат побудови

Тобто ми бачимо, що при швидкості СВ  $K'$   $V = -1,0575 \cdot 10^5 \frac{M}{c}$ , яка направлена так, як показано на рисунку, буде відсутнє магнітне поле в СВ  $K$ .

**Приклад 4.18.** Нехай СВ  $K'$  ЕМП задано векторами  $\vec{E}'(0; 40 \cdot 10^{-6}; 20 \cdot 10^{-6}) \text{ В/м}$  і  $\vec{B}'(0; -1,215 \cdot 10^{-11}; 2,43 \cdot 10^{-11}) \text{ Тл}$ . Знайти величину та напрямок швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб в СВ  $K$  вектор напруженості електричного поля дорівнював нулю  $\vec{E} = 0$ .

*Розв'язання:* Уведемо ці значення у відповідні поля модуля «Задачі» та натиснемо кнопку «Знайти». Результати роботи програми показані на рисунку 4.46.

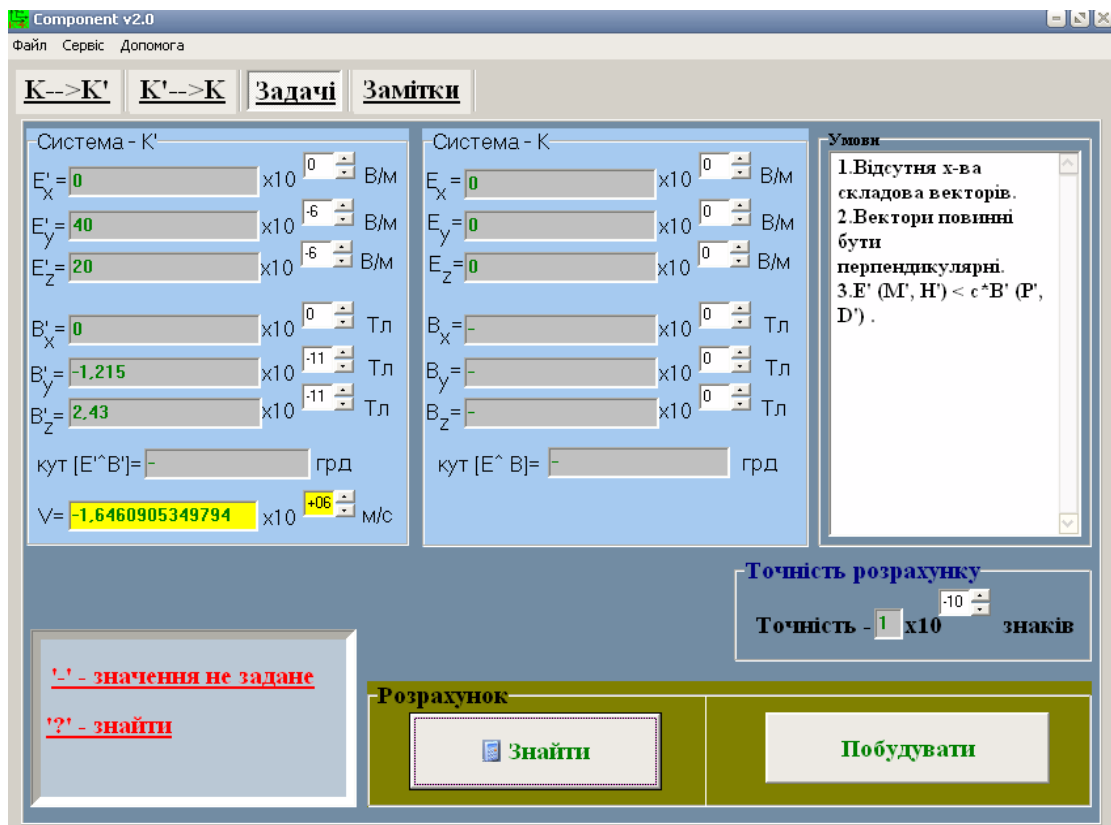


Рис. 4.46. Результат розрахунку

Слід зауважити, що справа зазначені умови, які накладаються на задачу.

Якщо ж тепер натиснути кнопку «Побудувати», то можна побачити графічно відповідь цієї задачі (див. рис. 4.47).

Тобто, при швидкості  $V = -1,6461 \cdot 10^6 \text{ м/с}$  СВ  $K'$ , яка направлена так, як показано на рисунку, буде відсутнє електричне поле в СВ  $K$ .

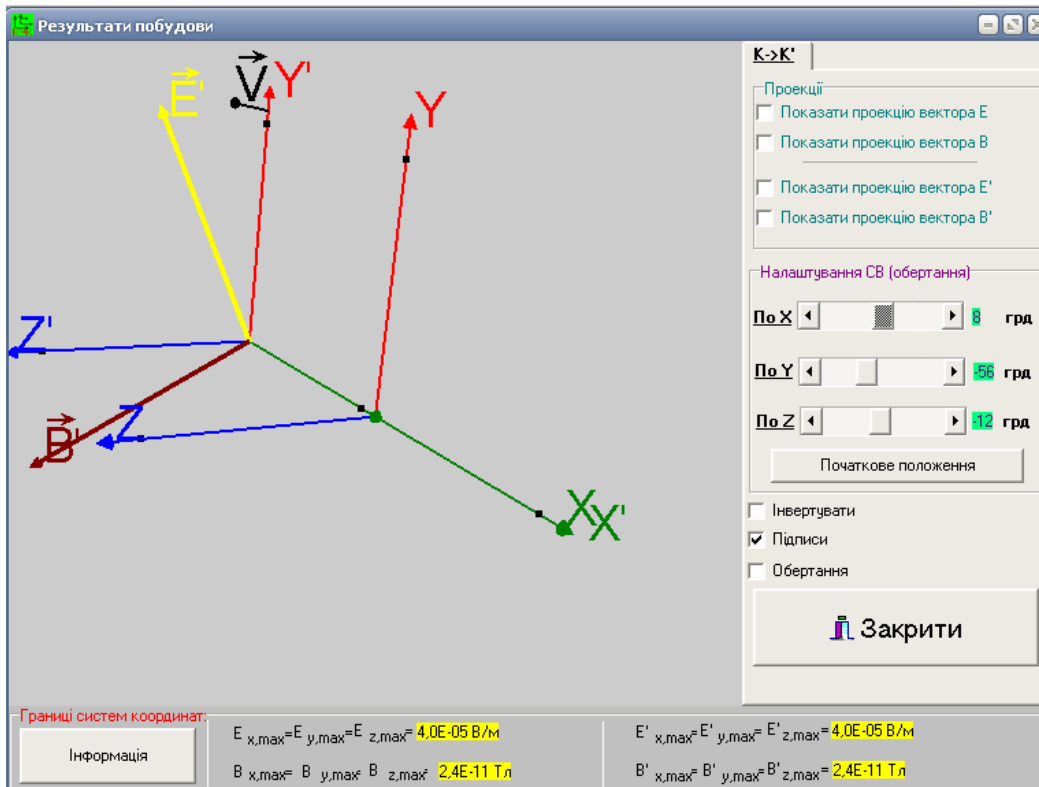


Рис. 4.47. Результат побудови

### Висновки до розділу 4

1. Зроблений огляд відомих у науковій і навчально-методичній літературі способів обґрунтування ФПКЕМП (п. 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3).
2. Таким чином, з огляду шести способів обґрунтування ФПКЕМП випливає, що найбільш строгим і послідовним є спосіб, який ґрунтується на формулах перетворення компонент тензора ЕМП при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  [154; 155; 118; 127; 100] (п. 4.2.2). Але для його реалізації слід ввести тензор ЕМП.
3. Запропоновані нові способи обґрунтування ФПКЕМП (п. 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3), у яких не використовується поняття тензора ЕМП.
4. Ці три нових способи обґрунтування ФПКЕМП можуть бути використані навіть у навчальному процесі фізико-математичних класів СНЗ, оскільки в математичному відношенні вони ґрунтовані на алгебрі шкільного курсу математики.
5. Ці способи (п. 4.3) обґрунтування ФПКЕМП дозволяють не тільки довести формули перетворення, але й більш ґрунтовно пояснити учням і студентам закони електромагнетизму та методику застосування принципу відносності.
6. Детально пояснено, що електричне та магнітне поля, які описуються векторами  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  не незалежні одне від одного. Вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$

окремо – це дві сторони прояву в 3-вимірному просторі об'єкта більш складної природи, який описується тензором електромагнітного поля  $F_{\mu\nu}$ .

7. Подані два способи обґрунтування формул перетворення компонент тензора електричного та магнітного моментів при переході від однієї системи відліку до іншої (п. 4.2.4).

8. Як наслідок ФПКЕМП обґрунтовані формули перетворення повздовжніх і поперечних компонент електромагнітного поля, (4.78) та (4.79).

9. Пояснена методика знаходження такої швидкості руху СВ  $K'$  (в якій  $\vec{E}' \perp \vec{B}'$ ), при якій у СВ  $K$  було або тільки електричне поле, або тільки магнітне поле (**Приклади 4.2–4.5**).

10. Створена й описана комп'ютерна програма «Компонент» для моделювання відносності електричного та магнітного полів.

11. Використання цього програмного продукту в навчальному процесі, як показує досвід навчання студентів, дозволяє більш ґрунтовно і наглядно ілюстрування основні наслідки ФПКЕМП.

12. З допомогою розробленої комп'ютерної програми можна більш детально аналізувати ФПКЕМП.

13. Програма дозволяє наочно уявити та представити електромагнітне поле і перетворення його компонент при переході від однієї системи відліку до іншої, причому не лише якісно – у вигляді відповідних зображень, але й кількісно, оскільки значення векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  можуть бути розраховані з будь-якою точністю за відомими полями  $\vec{E}'$  і  $\vec{B}'$  та швидкості руху СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ .

14. Розроблений програмний продукт дозволяє моделювати поведінку компонент тензора  $f_{ik}$  електричного та магнітного полів в середовищі (4.42), а також компонент тензора  $m_{ik}$  (формули (4.44) і (4.45)).

15. Запропоновано ряд оригінальних задач, використання яких в навчальному процесі, при вивченні питання про відносність поділу ЕМП на електричне та магнітне поля, позитивно вплинуло на активізацію пізнавальної діяльності студентів і рівень опанування цим питанням.

16. Показано, що сила Лорентца – це сила з боку електричного поля  $\vec{E}'$ , яке існує у ВСВ зарядженої частинки, але ця сила вимірюється приладами, що нерухомі в лабораторній системі відліку (СВ  $K$ ) (**Приклад 4.10**). Причому, якщо ЗЧ і нерухома відносно магніту, але магніт разом з ЗЧ рухаються відносно СВ  $K$ , то все ж у цій системі виникає сила Лорентца (хоч ЗЧ відносно джерела магнітного поля не рухається). **Суттєво тут те, що ЗЧ рухається відносно СВ  $K$  в певному магнітному полі (Приклад 4.7).**

## Розділ 5

### РЕЛЯТИВІСТСЬКІ ЕФЕКТИ ПРИ ОПИСІ ВЗАЄМОДІЇ ПРОВІДНИКІВ З КВАЗІСТАЦІОНАРНИМИ СТРУМАМИ

#### **5.1. Огляд традиційних, загальноприйнятих уявлень про природу стаціонарного електричного поля провідника зі струмом**

Вивчення, здавалося б достатньо прозорого електромагнітного явища – протікання постійного струму по однорідному металевому провіднику (для простоти та ясності будемо далі розглядати циліндричний і достатньо довгий провідник), не приховує в собі якісь несподіванки й проблеми. І все ж існують зв'язані з цим явищем деякі фізичні питання, на які в процесі використання на практиці та при вивченні електромагнетизму не звертається увага.

При вивченні законів постійного струму й у вищій, і в середній школах, як правило, обмежуються законами Ома та наслідками, що випливають з них. Електротехнічний рівень викладання цих питань неминуче приводить до того, що природа та механізм виникнення стаціонарного електричного поля в провіднику зі струмом (СЕППС) не обговорюється, або майже не обговорюється.

Мова йде по-перше, про механізми виникнення електричного поля провідника з постійним струмом (ППС), по-друге, про природу об'ємного заряду, який може виникати в ППС та, по-третє, про електромагнітну взаємодію між провідниками зі струмами. Іншим словами, наскільки електрична складова взаємодії між провідниками зі струмами може впливати на результуючу силу цієї взаємодії.

Можна вказати на три фізичних явища, які, в принципі, приводять до виникнення електричного поля як усередині, так і зовні ППС:

1. СЕППС створюється певним чином розподіленими по поверхні циліндричного провідника з струмом поверхневими зарядами.

2. Електричне поле ППС може створюватися об'ємним зарядом, який з'являється внаслідок пінч-ефекту (див. п. 5.3).

3. Додаткове електричне поле ППС може бути зумовлене різницею у величинах густини зарядів сукупності електронів та іонів кристалічної ґратки внаслідок руху їх з різними швидкостями в деякій СВ (див. п. 5.3).

Зупинимось спочатку на аналізі першого фізичного явища.

*Стаціонарне електричне поле в однорідному провіднику з постійним струмом.* Якщо розглядається тільки стаціонарне електричне поле постійного струму (СЕППС), то воно створюється певним чином розподіленими по поверхні циліндричного провідника з струмом поверхне-

вими зарядами [40, с. 244–246; 42, с. 100; 225, с. 105–106; 208, с. 37–41; 216, с. 177].

Якщо радіус поперечного перерізу такого провідника  $r_0$ , то поверхнева густина заряду на поверхні провідника зі струмом дорівнює [225, с. 106]:

$$\sigma = \frac{Ez}{4\pi r_0 \ln \frac{r_0}{a}}, \quad (5.1)$$

де  $E$  – напруженість електричного поля в провіднику;  $E = \frac{j}{\lambda}$ ,  $\lambda$  – питома електропровідність;  $a$  – деяка константа;  $z$  – координата точки провідника (вісь  $OZ$  циліндричної системи координат спрямована вздовж осі провідника).

Густина струму в довільній точці однорідного ізотропного провідника пов'язана з напруженістю електричного поля в цій точці співвідношенням, що виражає закон Ома в диференціальній формі:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \lambda \vec{E},$$

де  $\rho$  – питомий опір провідника;  $\lambda = \frac{1}{\rho}$  – питома електропровідність провідника.

З цього співвідношення виходить, що лінії струму збігаються із силовими лініями стаціонарного електричного поля, що підтримує ці струми.

Тому в режимі постійного струму лінії вектора  $\vec{j}$  не можуть обриватися всередині провідника чи на його поверхні, бо інакше на цих ділянках кола відбувалося б накопичування зарядів, що змінювало б електричне поле, і постійний струм був би неможливий.

Таку ж властивість мають і силові лінії стаціонарного електричного поля: жодна з них не може обриватися всередині провідника, рис. 5.1, чи перетнути його поверхню, рис. 5.2.

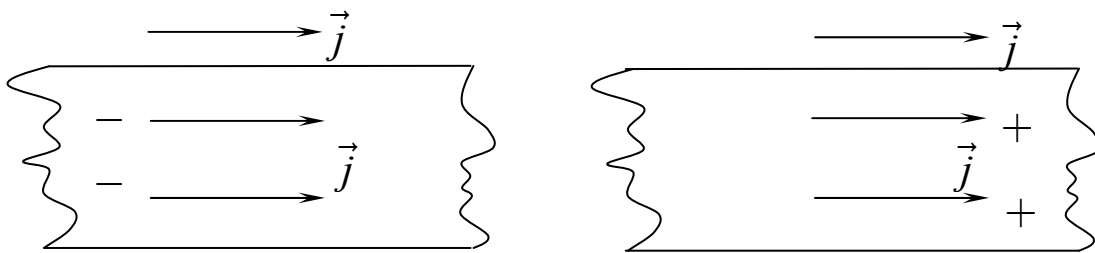


Рис. 5.1. Якби лінії вектора  $\vec{j}$  починалися або закінчувалися всередині ППС, то на цих ділянках кола відбувалося б накопичування зарядів



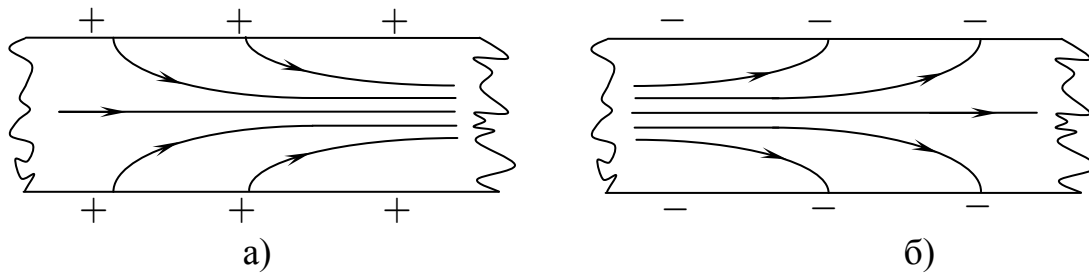


Рис. 5.2. Якби лінії вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  починалися (а) або закінчувалися (б) на поверхні ППС, то на ній виникали б заряди, і стаціонарний режим був би неможливим

Таким чином, приходимо до висновку, що *всередині провідника і на його межі з діелектриком нормальна складова напруженості стаціонарного електричного поля дорівнює нулю.*

Тому напруженість електричного поля в провіднику має на межі поділу ППС та діелектрика тільки дотичну складову, і *силові лінії збігаються з поверхнею провідника.* Для стаціонарного електричного поля, що існує всередині провідника, поверхня провідника відіграє роль бар'єру, що спрямовує його силові лінії.

Якщо провідник має однакову площу поперечного перерізу, то стаціонарне електричне поле всередині цього провідника однорідне.

Порівняємо граничні умови електростатичного поля, що оточує провідник, і стаціонарного електричного поля всередині провідника з постійним електричним струмом.

В електростатичному полі:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \varphi|_S = \text{const}, \quad (5.2)$$

де  $\varphi|_S$  – потенціальна поверхня провідника.

У стаціонарному електричному полі постійного струму [208]:

$$E_n = 0; \nabla\varphi|_S = -\rho\vec{j}, \quad (5.3)$$

де індексом  $S$  позначена поверхня провідника.

В електростатичному полі всі точки провідника мають однаковий потенціал. У стаціонарному електричному полі відбувається падіння потенціалу на провіднику в напрямку струму.

Оскільки ізопотенціальні поверхні перпендикулярні до силових ліній, то всередині провідника вони проходять перпендикулярно до його поверхні. У циліндричному провіднику постійного поперечного перерізу ізопотенціальні поверхні являють собою паралельні площини, перпендикулярні до його осі.

Розглянемо ділянку кола постійного струму, що складається з двох циліндричних провідників різного діаметру і обмежена перерізами  $S_2$  та  $S_1$  (рис. 5.3).

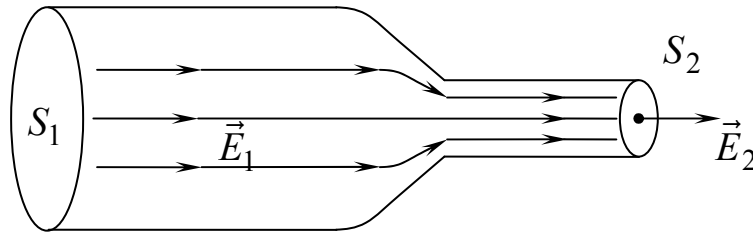


Рис. 5.3. Залежність напруженості стаціонарного електричного поля від площі поперечного перерізу провідника

Оскільки на поверхні провідника виконуються умови (5.3), то потік напруженості електричного поля через замкнену поверхню, що обмежує дану ділянку ППС, дорівнює:

$$E_2 S_2 - E_1 S_1. \quad (5.4)$$

В однорідному провіднику при постійному електричному струмі об'ємні заряди відсутні. Тому з (5.4) маємо:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (5.5)$$

При послідовному з'єднанні циліндричних провідників з однаковим питомим опором напруженість поля в них обернено пропорційні площам їх поперечних перерізів. Силкові лінії стаціонарного електричного поля не можуть перетинати поверхню провідника та якщо його поперечний переріз зменшується, то їх густина збільшується, рис. 5.3.

Ураховуючи, що напруженість електричного поля дорівнює за абсолютною величиною градієнту потенціалу, приходимо до висновку, що в провіднику з меншим радіусом поперечного перерізу (з більшим омичним опором) потенціал падає швидше вздовж ППС.

З'ясуємо, де розташовані заряди, що створюють однорідне стаціонарне електричне поле в циліндричному провіднику.

Ці заряди не можуть знаходитись ні всередині провідника ні поза його межами. Вони не можуть бути розташовані й на його кінцях.

Припустимо, що заряди розташовані на самій поверхні провідника. Доведемо, що в цьому випадку електричне поле в провіднику однорідне.

Відомо, що напруженість поля поблизу зарядженої площини перпендикулярна до неї, якщо площина заряджена рівномірно, рис. 5.4.

Якщо поверхнева густина заряду  $\sigma$  спадає в деякому напрямку, то вектор  $\vec{E}$  нахилений у той же бік, див. рис. 5.5.

Тому, якщо взяти дві однойменно заряджені паралельні площини, то при постійному значенні величини  $\sigma$  напруженість поля між ними дорівнює нулю, рис. 5.6.

Якщо поверхнева густина заряду  $\sigma$  на обох площинах спадає в одному напрямку, то сумарна напруженість поля між ними не дорівнює нулю, а вектор  $\vec{E}$  буде мати напрямок, протилежний градієнту поверхневої густини заряду, рис. 5.7, [208, с. 37–39].

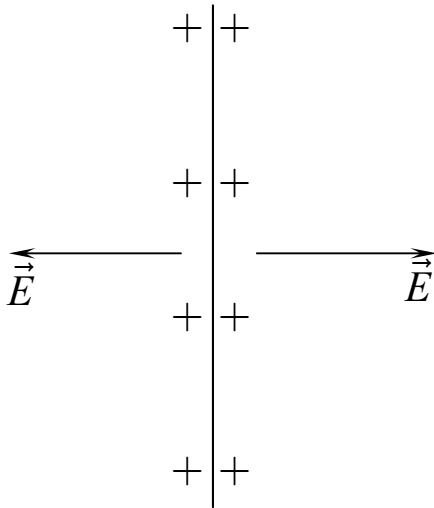


Рис. 5.4. Однорідне електростатичне поле поблизу рівномірно зарядженої площини

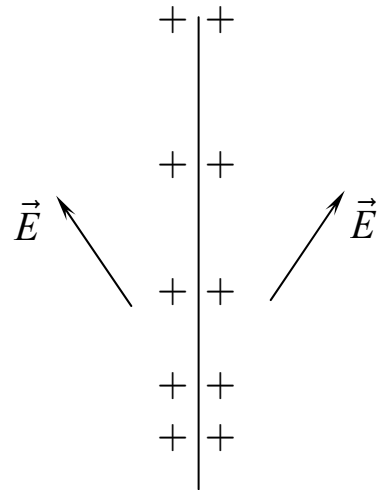


Рис. 5.5. Вектор напруженості  $\vec{E}$  поле поблизу нерівномірно зарядженої площини

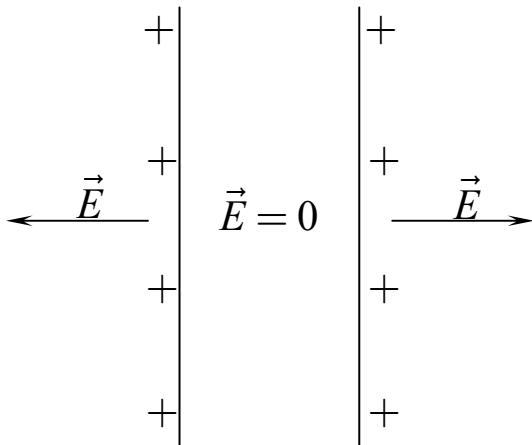


Рис. 5.6. Відсутність поля між рівномірно однойменно зарядженими площинами

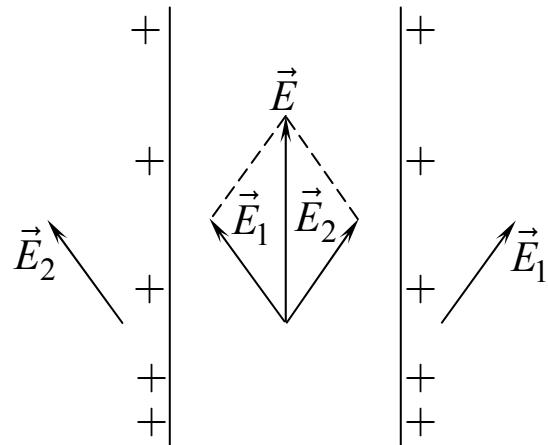


Рис. 5.7. Електричне поле між однойменно зарядженими площинами у випадку зменшення поверхневої густини заряду на них

При певному розподілі величини  $\sigma$  поле між однойменно зарядженими площинами може бути однорідним.

Аналогічна ситуація спостерігається, коли заряджена поверхня має форму циліндра. Поки вона заряджена рівномірно, поля всередині неї немає. Якщо поверхнева густина заряду зменшується в напрямку твірної, то електричне поле буде існувати й на поверхні, і всередині неї.

При певному розподілі електричного заряду, внутрішнє поле буде однорідним. Як показує теорія [225, с. 106], для цього випадку розподіл  $\sigma$  дається формулою (5.1).

Розглянемо провідник, по якому тече постійний струм. Оскільки в провіднику існує однорідне електричне поле, то на всій його поверхні знаходяться заряди, поверхнева густина яких спадає в напрямку вектора  $\vec{E}$ , рис. 5.8.

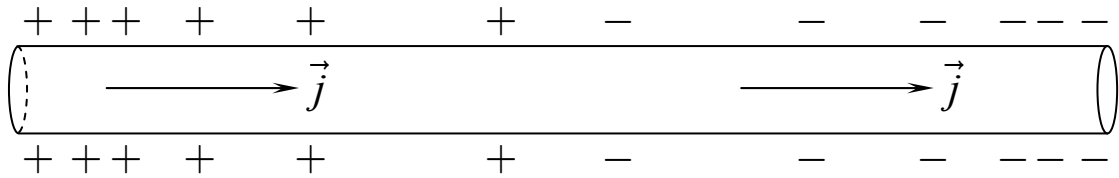


Рис. 5.8. Розподіл поверхневих зарядів по ППС, поверхнева густина заряду яких зменшується в напрямку струму

З'ясуємо, чому при виникненні в колі електричного струму, на поверхні провідника з'являються заряди та чому їх розподіл буде таким, що поле в провіднику однакового поперечного перерізу буде однорідним.

Припустимо, що у вакуумі на деякій відстані розташовані дві різнойменні заряджені кульки, що створюють електричне поле.

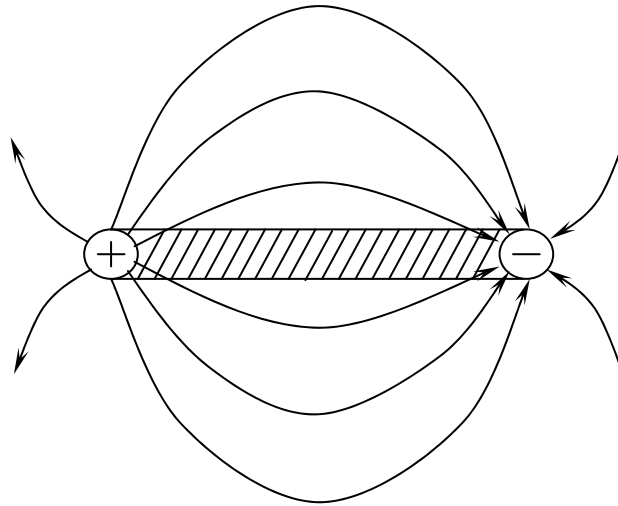


Рис. 5.9. Лінії напруженості електростатичного поля двох різнойменно заряджених куль.

Якщо миттєво заповнити весь простір провідним середовищем, то електричне поле викличе рух носіїв зарядів, і заряди на кульках нейтралізуються, що приведе до зникнення електричного поля. Якщо заряди кульок поповнювати, електричне поле змінюватися не буде. Структура поля не зміниться, оскільки розподіл зарядів не змінюється, нові заряди не утворюються.

Розглянемо тепер інший уявний дослід [40, с. 244; 42, с. 98; 208, с. 39]. Припустимо, що заряджені кульки миттєво з'єднують циліндричним провідником. Тоді в початковий момент частина силових ліній буде перетинати його поверхню, і на ній почнуть накопичуватися електричні заряди: позитивні – там, де напруженість поля в провіднику має нормальну складову, що спрямована до його поверхні, і негативні – там, де ця складова спрямована всередину поверхні.

Виникнення зарядів приведе до зміни структури поля всередині провідника та в просторі навколо провідника. Заряди будуть накопичу-

ватися до тих пір, поки силові лінії *всередині провідника* не змінять свою форму настільки, що будуть паралельні до його поверхні, і поле не стане однорідним, рис. 5.10.

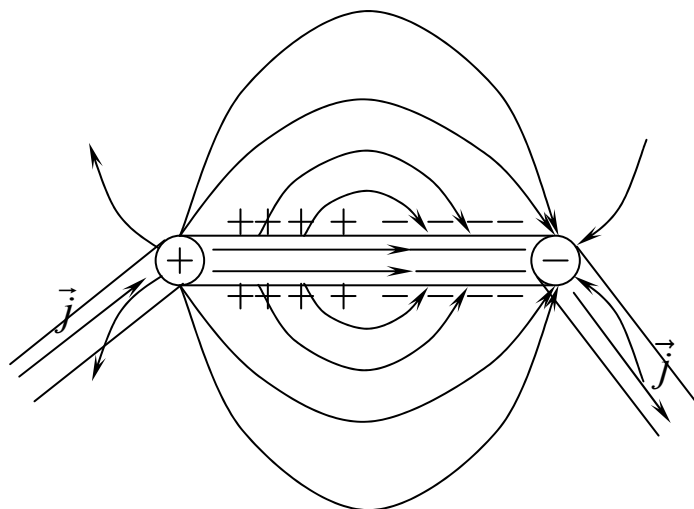


Рис. 5.10. Напрямок густини струму та напрям ліній напруженості електричного поля. Структура електричного поля в провіднику з постійним струмом та в навколишньому просторі після встановлення стаціонарного режиму

Струм, що виникає під дією поля, спричиняє появу нових зарядів, що змінює структуру поля.

Електричне поле всередині провідника прилаштується до цієї форми й стає однорідним.

Якщо зігнути провідник, то для того, щоб силові лінії всередині нього повторювали його форму, знадобиться новий розподіл зарядів.

Таким чином, при підключенні до джерела струму лінії передачі в сотні кілометрів її провідники заряджаються по всій довжині. Саме ці поверхневі заряди й створюють поле, що підтримує струм постійної сили на всіх ділянках кола, спрямовуючи силові лінії всередину провідника.

Стаціонарні електричні заряди, що розподілені по поверхні циліндричного провідника зі струмом з густиною  $\sigma(z)$ , формула (5.1), створюють електричне поле й у просторі навколо провідника.

Силові лінії поля починаються на ділянках, де розташовані позитивні заряди, закінчуються на ділянках з негативними зарядами. Тому зовні, на поверхні ППС нормальна складова вектора  $\vec{E}$  відмінна від нуля й визначається поверхневою густиною стаціонарних зарядів. Про напруженість на поверхні провідника можна стверджувати:

$$E_n^{зов} - E_n^{внут} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (5.6)$$

Відповідно до основної властивості потенційного електричного поля тангенціальна складова вектора  $\vec{E}$  на поверхні провідника залишається неперервною

$$E_{\tau}^{6H} = E_{\tau}^{30BH}, \quad (5.7)$$

а нормальна складова вектора  $\vec{E}$  зазнає розриву, оскільки всередині провідника  $E_n^{6H} = 0$ .

Тоді зовні провідника нормальна складова визначається густиною поверхневих зарядів

$$E_n^{30BH} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (5.8)$$

За значенням нормальної складової напруженості стаціонарного електричного поля, можна знайти розподіл стаціонарних зарядів

$$\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E_n^{30BH}. \quad (5.9)$$

Для металевого провідника  $E_{\tau} \ll E_n$ , тому що електропровідність  $\lambda$  металу велика, і тому силові лінії зовнішнього СЕППС направлені до поверхні провідника майже нормально, і це поле мало відрізняється від електростатичного.

Але нахил вектора  $\vec{E}$  біля поверхні провідника, який зумовлений  $E_{\tau}$ , має принципове значення: *тангенційна складова  $E_{\tau}$  разом з напруженістю магнітного поля визначає величину електромагнітної енергії, що впливається всередину ППС. Неперервність тангенційної складової  $E_{\tau}$  при переході через поверхню провідника на практиці використовується для визначення напруженості електричного поля всередині ППС.* Вимірюючи тангенційну складову  $E_{\tau}$  зовнішнього електричного поля, можна на основі (5.9) одержати значення вектора  $\vec{E}$  всередині провідника [127].

Якщо діаметр провідника достатньо малий, то стаціонарне поле в ньому буде практично однорідним, і не залежно від форми провідника його напруженість визначається за формулою:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l},$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів між кінцями ділянки провідника довжиною  $l$ .

Більш детально про методи вимірювання, моделювання стаціонарних електричних полів див. [208].

Розподіл зарядів і структура зовнішнього стаціонарного поля суттєво залежать від форми провідника. Будь-яка зміна форми провідника, по якому тече струм, супроводжується перерозподілом стаціонарних зарядів

на його поверхні, і перебудовою зовнішнього стаціонарного електричного поля, але при цьому змінюється тільки нормальна складова вектора  $\vec{E}$ .

Тому напруженість електричного поля в провіднику має на межі поділу ППС і діелектрика тільки дотичну складову, і силові лінії збігаються з поверхнею провідника. Можна сказати, що для стаціонарного електричного поля, що існує всередині провідника, поверхня провідника відіграє роль бар'єру, який спрямовує його силові лінії.

Якщо провідник має однакову площу поперечного перерізу, то стаціонарне електричне поле всередині цього провідника однорідне.

Таким чином, можна вважати, що в науково-методичній літературі достатньо детально **обґрунтований висновок про те, що заряджені частинки, які створюють однорідне стаціонарне електричне поле в циліндричному провіднику, розташовані на поверхні провідника** [40; 42; 153; 65; 216; 208; 178].

Але щодо питання про характер СЕППС та стан руху цих поверхневих зарядів, то в навчально-методичній літературі існують різні точки зору. Дійсно, наведемо декілька висловлювань щодо суті цього питання, узятих із відомих посібників.

*«Стаціонарне ЕППС всередині провідника створюється нерухомими, постійними в часі поверхневими зарядами. У цьому відношенні ЕППС за своєю природою є кулонівським полем – воно аналогічне електростатичному полю нерухомих зарядів, і має потенційний характер»* [153, с. 111].

Тобто, воно тільки аналогічне кулонівському (електростатичному), а по суті не є таким, хоча й «створюється нерухомими, постійними в часі поверхневими зарядами». І далі маємо майже прямо протилежне твердження:

*«Отже, постійний струм у провіднику неможливо підтримувати за допомогою одних лише кулонівських сил»* [153, с. 116].

А от в посібнику С. У. Гончаренко підкреслюється, що «...стаціонарне електричне поле істотно відрізняється від електростатичного» [42, с. 98]. Але в той же час, читаємо далі – вони (електростатичне поле та ЕППС) мають багато спільних властивостей, «обидва вони потенційні..., що свідчить про не замкнутість їхніх ліній: ці лінії починаються і закінчуються на зарядах або в безмежності» [42, с. 100].

Але моду в поясненні цього питання було задано у відомому підручнику Д. В. Сивухіна:

*«Таким чином, у разі стаціонарних струмів макроскопічні електричні заряди можуть знаходитися тільки на поверхні або в місцях неоднорідності провідного середовища. У цьому відношенні електричне поле стаціонарних струмів аналогічне електростатичному. Аналогія між цими полями йде ще далі.*

Якщо струми стаціонарні, то густина електричних зарядів в кожній точці простору не змінюється в часі, хоч і відбувається рух електри-

ки: на місце електричних зарядів, що відходять, безперервно надходять нові. Такі заряди, як показує дослід (а також рівняння Максвелла), створюють у навколишньому просторі таке ж кулонівське поле, що й нерухомі заряди тієї ж густини. Звідси витікає, що електричне поле стаціонарних струмів є полем потенційним.

Електростатичне поле є кулонівське поле нерухомих зарядів. У середині провідників при рівновазі зарядів воно рівне нулю. *Електричне поле стаціонарних струмів є також кулонівським полем, проте заряди, які його збуджують, знаходяться в русі. Тому поле стаціонарних струмів існує й усередині провідників»* [216, с. 177]. (Виділення в цитатах зроблені нами).

Але ж насправді ні досліди, ні рівняння Максвелла не показують і не можуть показати, що рухомі заряди створюють таке ж кулонівське поле, як і нерухомі заряди тієї ж густини.

Електричне поле рухомих заряджених частинок принципово відрізняється від поля нерухомих ЗЧ [124; 101] (див. також **Розділ 2**). По-перше, електричне поле РЗЧ не потенційне. По друге, нехтування навіть мізерними релятивістськими поправками у виразах для векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  електромагнітного поля РЗЧ при аналізі електромагнітних явищ приводить до «втрати» фізичного явища в теоретичному пізнанні [138; 142] (детальніше див. **Розділ 3**, п. 3.5).

**Тому твердження, що рухомі заряди створюють у навколишньому просторі таке ж кулонівське поле, що й нерухомі заряди тієї ж густини, є помилковим.**

Порівнюємо далі. У підручнику [153] говориться, що СЕППС створюється нерухомими зарядами, а в [216] навпаки, проводиться думка про те, що це поле створюється рухомими зарядами.

У монографії [208] вважається (усупереч твердженню «лінії напруженості починаються і закінчуються на зарядах, або в безмежності» [42, с. 100]), що силові лінії СЕППС всередині провідника, по якому протікає струм, не починаються на зарядах, які створюють це поле, хоча є його «джерелами», а проходять мимо них: «Силові лінії стаціонарного електричного поля усередині провідника, що несе струм, не виходять із зарядів, що створюють це поле і які є його «джерелами», а проходять повз них» [208, с. 40].

«Підкреслимо, що заряди, що покривають поверхню провідника, по якому тече постійний струм, виникають у результаті скупчення заряджених частинок, що беруть участь у процесі перенесення заряду і безперервно змінюють одні одних. Проте їх рух не змінює розподіл зарядів на поверхні провідника. Цей розподіл безперервно відновлюється в процесі протікання струму» [208, с. 40].

Тобто в посібнику [216] стверджується, що СЕППС не відрізняється від кулонівського поля нерухомих електронів такої ж густини, а в



[208], навпаки, стверджується, що це поле «мало відрізняється» від кулонівського, але хоч ці поверхневі заряди і є «джерелом» СЕППС силові лінії такого поля не починаються на цих зарядах, а проходять повз.

Якщо це поле хоч трохи відрізняється від кулонівського, то воно не може бути в принципі потенційним. Дійсно, при поясненні подібних явищ у всіх посібниках використовується модель провідника зі струмом, у якій позитивні іони нерухомі, а електрони провідності рухається з дрейфовою швидкістю. Оскільки електрон рухається, то напруженість його електричного поля визначається формулою (див. **Розділ 2**)

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}, \quad (5.10)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор проведений з миттєвого положення зарядженої частинки в дану точку поля,  $\theta$  – кут між радіус-вектором  $\vec{r}$  і вектором швидкості,  $V$  – швидкість руху зарядженої частинки,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $q$  – величина заряду.

І, як ми впевнилися, нехтування навіть мізерними релятивістськими ефектами при аналізі електромагнітних явищ приводить до «втрати» фізичного явища в теоретичному пізнанні [124; 112; 142]. Але поле, що описується формулою (5.10), є непотенційним.

Тоді як може сумарне електричне поле сукупності електронів бути потенційним, якщо поле кожного електрона окремо явно непотенційне?

Звичайно вважаємо, що принцип суперпозиції має місце.

У посібнику І. Є. Іродова повторюються тези посібника [216].

«Якщо струми стаціонарні, то розподіл електричних зарядів у провідному середовищі не змінюється в часі, хоч і відбувається рух зарядів: у кожній точці на місце зарядів, що відходять, безперервно надходять нові. Ці рухомі заряди створюють таке ж кулонівське поле, що і нерухомі заряди тієї ж конфігурації. Тому електричне поле стаціонарних струмів – поле потенційне... Електричне поле в стаціонарних струмів є також кулонівським полем, проте заряди, що його збуджують, знаходяться в русі. Тому поле  $\vec{E}$  у стаціонарних струмів існує й усередині провідників зі струмом» [65, с. 124].

Виділимо тепер основні положення наведених висловлювань.

1. У навчальній літературі мають місце прямо протилежні твердження щодо стану руху тих поверхневих зарядів, які створюють ЕППС. У більшості посібників наполегливо повторюється, що «відбувається рух зарядів: у кожній точці на місце зарядів, що відходять, безперервно надходять нові» [65; 216; 208].

Виходячи зі специфіки явища протікання електричного струму, потрібно вважати, на нашу думку, що якраз ці рухомі заряди й створюють електричне поле в провіднику зі струмом.

Тобто незважаючи на те, що розподіл поверхневих зарядів залишається незмінним у часі, цей розподіл зумовлений рухомими ЗЧ. Проте ця стаціонарність є динамічною – стаціонарність як наслідок руху ЗЧ.

У той же час у деяких посібниках вважається, що СЕППС всередині провідника створюється *«нерухомими, постійними в часі поверхневими зарядами»* [153].

2. Уважається, що ЕППС кулонівське, хоч і створюється рухомими зарядами [65; 216]. Тому ЕППС є потенційним. Звичайно проблеми не виникає, коли вважати, що заряди нерухомі [153].

Ці два положення несумісні між собою. Дійсно, електричне поле ЗЧ, що рухається рівномірно і прямолінійно, є непотенційним. Тоді залишається не зрозумілим як може сукупність рухомих ЗЧ створювати потенційне електричне поле. На наш погляд це протиріччя є основним в поясненні властивостей ЕППС у цитованих вище посібниках.

## **5.2. Релятивістська природа стаціонарного електричного поля провідника зі струмом**

Таким чином, з аналізу, проведеного в п. 5.1, випливає, що стосовно питання про характер СЕППС і стан руху поверхневих зарядів, які породжують СЕППС, у навчально-методичній літературі існують різні точки зору та наявні при цьому характерні суперечності й непослідовності.

Дійсно, слід погодитися з тим, що заряди, які знаходяться на поверхні провідника, по якому протікає струм, виникають у результаті накопичення заряджених частинок, що беруть участь у процесі переносу зарядів і які неперервно змінюють одна одну. Рух зарядів не змінює середнього значення макроскопічної поверхневої густини заряду на поверхні ППС.

Але як узгодити цей висновок з тим, що СЕППС є потенційним при цьому.

Якраз відсутність чіткої відповіді на це питання, як нам здається, і змушує твердити [42; 153; 65; 216; 208], що рухомі ЗЧ створюють таке ж кулонівське поле як нерухомі, тобто ЕППС – поле потенційне.

**Тобто в існуючих посібниках це протиріччя розв'язують просто: хоч ЗЧ, які створюють ЕППС, і рухаються, але їх поле залишається кулонівським, потенційним. І проблеми немає.**

Але ж як може сумарне електричне поле сукупності рухомих електронів провідності бути потенційним, якщо поле кожного окремого рухомого електрона явно непотенційне?

З іншого боку, якщо вважати електричне поле ППС непотенційним, то стає незрозумілою сама можливість, наприклад, вимірювання

напруги в колі постійного струму. А з практики відомо, що СЕППС є потенційним і тому на основі вимірювання різниці потенціалів на кінцях провідника довжиною  $l$  ми знаходимо тангенційну складову вектора  $\vec{E}$  на поверхні ППС

$$\frac{\Delta\varphi}{l} = E. \quad (5.11)$$

Спробуємо спростувати ці суперечності, використовуючи принцип відносності.

У роботах [124; 101; 132] (див. також **Розділ 2**) було показано, що із закону Кулона та принципу відносності випливає непотенційність електричного поля рухомої зарядженої частинки.

У свою чергу, закон електромагнітної індукції

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt},$$

являється наслідком непотенційності електричного поля РЗЧ та принципу відносності [101; 132; 100] (**Розділ 3**).

Виходячи з принципу суперпозиції, слід очікувати, що й електричні поля, які породжуються, наприклад, зарядженою ниткою, що рухається рівномірно вздовж своєї довжини, і лінійною процесією заряджених частинок (модель провідника з постійним струмом) є непотенційними. Тому є незрозумілою сама можливість, наприклад, вимірювання напруги в колі постійного струму.

**Дійсно, як може сумарне електричне поле сукупності рухомих електронів провідності бути потенційним, якщо поле кожного окремого рухомого електрону непотенційне? Звичайно вважається, що принцип суперпозиції має місце.**

Якщо загальноприйнята в навчанні модель провідника з постійним струмом адекватно передає основні риси електромагнітних явищ, пов'язаних з протіканням постійного струму по провідникам, то на фоні потенційності СЕППС повинна, взагалі кажучи, бути непотенційна складова поля постійного струму за величиною  $\approx \beta^2$ , де  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $v$  – дрейфова швидкість електронів провідності [124; 132].

Оцінимо величину непотенційності електричного поля лінійної процесії ЗЧ, та наскільки (у випадку лінійних провідників з постійним струмом) ця непотенційність електричного поля може проявлятися чи може бути виміряна експериментально. Розв'язання цього питання дозволить обґрунтувати та пояснити добре відомий експериментальний факт практичної електротехніки – визначення напруженості СЕППС усередині самого провідника з допомогою вимірювання спаду напруги між двома точками провідника з постійним струмом.

До того ж, загальні висновки, одержані нами в роботах [124; 125; 142; 132] (див. **Розділ 2** та **Розділ 3**) у методичних цілях необхідно проілюструвати на простому та прозорому прикладі, який може бути використаний як модель відповідного фізичного явища.

Тому знайдемо напруженість електричного поля в довільній точці простору, яке створюється рівномірно зарядженою ниткою (процесією заряджених частинок), що рухається з постійною швидкістю  $U$  вздовж своєї довжини, рис. 5.11.

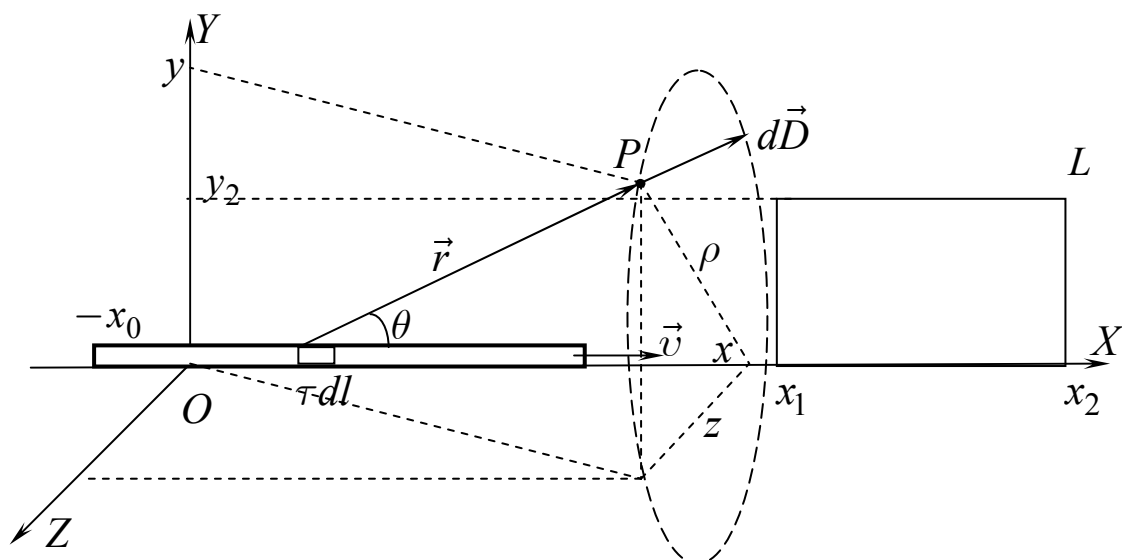


Рис. 5.11. Рівномірно заряджена нитка рухається з постійною швидкістю  $U$  уздовж своєї довжини

Нескінченне мале значення вектора  $\vec{D}$ ,  $d\vec{D}$ , у довільній точці простору  $P(x, y, z)$ , зумовлене рухомим елементарним зарядом  $dq = \tau \cdot dl$ , дорівнює [124; 138; 131; 139]:

$$d\vec{D} = \frac{dq(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{\tau dl(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi\left[(x-l)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)\right]^{3/2}}, \quad (5.12)$$

де  $\vec{r} = (x-l)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення елементарного заряду  $\tau dl$  в дану точку поля  $P$ ;  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $\theta$  –

кут між вектором  $\vec{r}$  та напрямком руху зарядженої нитки;  $\tau$  – лінійна густина заряду.

У тому випадку, коли розглядається ЕМП лінійного провідника з постійним струмом, то  $\tau$  – це лінійна густина заряду електронів провідності в лабораторній СВ.

$$\text{Тобто } \tau = \frac{q \cdot n_-^0 \cdot S}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ де } n_-^0 \text{ – концентрація електронів провідності}$$

у власній СВ;  $q$  – величина заряду електрону;  $S$  – площа поперечного перерізу ППС.

Знайдемо тепер самі компоненти електричного поля в довільний момент часу. Але слід зауважити, що межі інтегрування залежать від початкового положення нитки. Якщо ми вибрали систему координат так, як зображено на рис. 5.11, то межі інтегрування в момент часу  $t$  такі – від  $-x_0 + vt$  до  $l - x_0 + vt$ .

Наприклад, положенню лінійної процесії ЗЧ, зображеної на рис. 5.12, відповідають межі інтегрування від  $x_0 + vt$  до  $l + x_0 + vt$ . Надалі будемо межі позначати  $a$  та  $b$ , причому завжди  $b - a = l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$  коли мова йде про поле рухомої нитки. Але коли мова йде про модель ППС, то, очевидно,  $b - a = l_0$ .

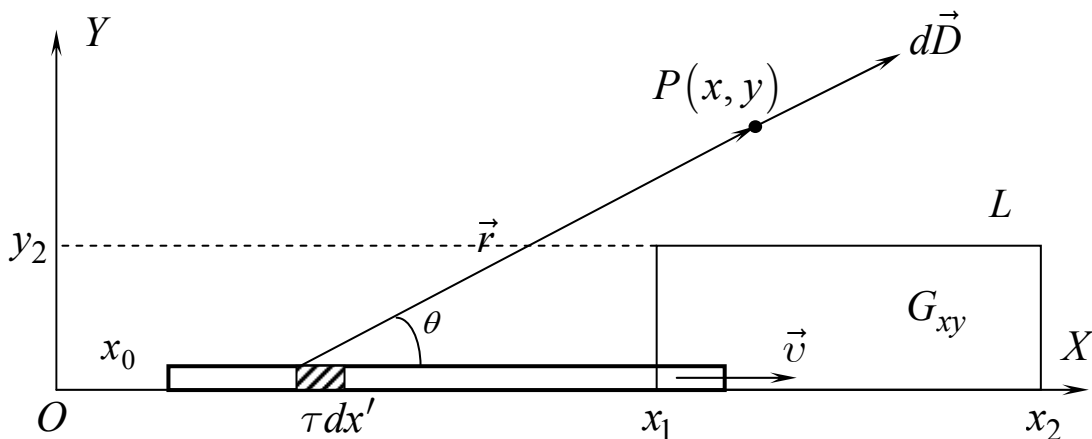


Рис. 5.12. ЕМП рухомої зарядженої нитки розглядається в площині  $XOY$

Використовуючи (5.12) та принцип суперпозиції, одержуємо

$$D_x = \int_a^b dD_x = - \int_a^b \frac{\tau (1 - \beta^2) \cdot u \cdot du}{4\pi [u^2 + \rho^2 (1 - \beta^2)]^{3/2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tau(1-\beta^2)}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{u^2 + \rho^2(1-\beta^2)}} \right]_a^b = \\
&= \frac{\tau(1-\beta^2)}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\left[ (x-b)^2 + \rho^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[ (x-a)^2 + \rho^2 \cdot (1-\beta^2) \right]^{1/2}} \right\}; \\
D_y &= \int_a^b dD_y = -\frac{\tau \cdot y(1-\beta^2)}{4\pi} \int_a^b \frac{du}{\left[ u^2 + \rho^2(1-\beta^2) \right]^{3/2}} = \\
&= -\frac{\tau \cdot y(1-\beta^2)}{4\pi} \left[ \frac{u}{\rho^2(1-\beta^2)\sqrt{u^2 + \rho^2(1-\beta^2)}} \right]_a^b = \\
&= \frac{\tau y}{4\pi(y^2 + z^2)} \left[ \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + \rho^2(1-\beta^2)}} - \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + \rho^2(1-\beta^2)}} \right]; \quad (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_z &= \frac{\tau \cdot z}{4\pi(y^2 + z^2)} \times \\
&\times \left[ \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + \rho^2(1-\beta^2)}} - \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + \rho^2(1-\beta^2)}} \right]. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Як відомо, диференційною умовою непотенційності будь-якого векторного поля, являється нерівність нулеві ротора вектора напруженості цього поля. Після нескладних, але кропітких підрахунків для  $rot\vec{D}$  маємо:

$$\begin{aligned}
rot\vec{D} &= \vec{j} \frac{\tau \cdot \beta^2 z \cdot (1-\beta^2)}{4\pi} K(x, y, z, t) - \\
&- \vec{k} \frac{\tau \beta^2 y(1-\beta^2)}{4\pi} \cdot K(x, y, z, t), \quad (5.15)
\end{aligned}$$

де

$$K(x, y, z, t) = \left[ \frac{1}{\left[ (x-b)^2 + \rho^2 (1-\beta^2) \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ (x-a)^2 + \rho^2 (1-\beta^2) \right]^{3/2}} \right]. \quad (5.16)$$

Таким чином,  $rot\vec{D}$  електричного поля відрізка струму довжиною  $l$  (рухомої зарядженої нитки довжиною  $l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}$ ), не дорівнює нулю.

Знайдемо циркуляцію вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , яке породжується провідником зі струмом довжиною  $l_0$ , уздовж контуру  $L$ , рис. 5.12.

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \iint_{G_{xy}} rot_z \vec{E} \cdot dS = \iint_{G_{xy}} rot_z \vec{E} \cdot dx dy = \frac{\tau \beta^2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left[ \left( -\ln|x-b| + \ln \left| (x-b) + \sqrt{(x-b)^2 + y^2 (1-\beta^2)} \right| \right) \right]_{x_1}^{x_2} + \left[ \left( \ln|x-a| - \ln \left| (x-a) + \sqrt{(x-a)^2 + y^2 (1-\beta^2)} \right| \right) \right]_{x_1}^{x_2}. \quad (5.17)$$

Бачимо, що при симетричній орієнтації контуру  $L$  відносно нитки,  $(x_1 - a = -(x_2 - b)$ , та  $x_2 - a = -(x_1 - b)$ ) циркуляція вектора  $\vec{E}$  дорівнює нулеві,  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ .

**Але в будь-якій точці простору поле вектора  $\vec{E}$  є вихровим.**

Аналізуючи ЕМП окремої рухомої ЗЧ [124] (див. Розділ 3, п. 3.5) одержали, що сумарна ЕРС у будь-якому контурі, яка зумовлена як непотенційністю електричного поля РЗЧ, так і явищем електромагнітної індукції, дорівнює нулеві. Виходячи з ПВ слід чекати подібної ситуації й у нашому випадку.

Тобто необхідно порівняти величини

$$rot_z \vec{D} = -\frac{\tau \beta^2 y (1-\beta^2)}{4\pi} K(x, y, z, t) \text{ та } -\epsilon_0 \frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Для цього знайдемо спочатку індукцію магнітного поля, яке породжується рухомою зарядженою ниткою. Скористаємося законом Біо-Савара в релятивістській формі [82; 112; 113; 105; 100] (Розділ 2, п. 2.5):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{\left[ (x-l)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right]^{3/2}};$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 i dl (1 - \beta^2) y}{4\pi \left[ (x-l)^2 + y^2 (1 - \beta^2) \right]^{3/2}} = \frac{-\mu_0 i du (1 - \beta^2) y}{4\pi \left[ u^2 + y^2 (1 - \beta^2) \right]^{3/2}}, \quad (5.18)$$

де  $(x-l) = u$ ,  $du = -dl$ ,  $i = \tau v$ .

Інтегруючи (5.18) за довжиною рухомої зарядженої нитки, одержуємо:

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot y} \cdot \left[ \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 (1 - \beta^2)}} - \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 (1 - \beta^2)}} \right].$$

Якщо в початковий момент часу лівий кінець стержня знаходився в початку координат нашої СВ, то межі інтегрування наступні:  $a = vt$ ,  $b = l + vt$ , де  $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ .

$$B_z(t) = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot y} \times \left[ \frac{x - vt}{\sqrt{(x - vt)^2 + y^2 (1 - \beta^2)}} - \frac{x - (l + vt)}{\sqrt{(x - (l + vt))^2 + y^2 (1 - \beta^2)}} \right]. \quad (5.19)$$

Тоді величина  $\frac{\partial B_z}{\partial t}$  дорівнює:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = K(x, y, z, t) \cdot \frac{\mu_0 \tau v^2 y (1 - \beta^2)}{4\pi}.$$

Таким чином, маємо рівність:

$$\text{rot}_z \vec{D} = -\frac{\tau \beta^2 y (1 - \beta^2)}{4\pi} \cdot K(x, y, z, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (5.20)$$

Тобто в будь-якій точці простору, у будь-який момент часу в околі ППС чи рухомої зарядженої нитки, непотенційне електричне поле **компенсується** вихровим електричним полем, зумовленим зміною індукції



магнітного поля в часі,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Тут  $\vec{B}(x, y, z, t)$  – індукція магнітного поля, яке породжується лінійною процесією ЗЧ (відрезком провідника з постійним струмом).

Таким чином, стає зрозумілою одна з особливостей механізму створення та існування потенційного СЕППС. У будь-якому разі ясно, чому при протіканні постійного струму по однорідному провіднику його електричне поле є потенційним, і тому вимірювання напруги на ділянці кола постійного струму дає можливість визначити напруженість СЕППС всередині провідника. І все ж незважаючи на те, що СЕППС створюється як поверхневими зарядами, так і рухомими ЗЧ, електричне поле кожної з них є непотенційним.

**Тобто процес протікання струму, процедуру вимірювання напруги й струму, пояснення фізичних явищ у цьому процесі неможливо несуперечливо пояснити й зрозуміти без польових уявлень і принципу відносності. ПВ пояснює основні властивості електромагнітних явищ, які спостерігаються всередині та навколо ППС.**

Якщо не враховувати релятивістські поправки у виразі для напруженості електричного поля РЗЧ та процесії заряджених частинок, то, можливо, стає зрозумілим потенційний характер СЕППС. Вислів «можливо, стає зрозумілим» означає, що пояснення цього явища в різних науково-методичних виданнях відображає суперечливість і непослідовність інтерпретації природи СЕППС як у рамках окремого посібника, так і при порівнянні цієї інтерпретації в різних літературних джерелах. Але тоді ми стикаємося з серйозними протиріччями з ПВ. Зокрема, контур з металевого дроту нагрівався б, якби він знаходився полі ППС.

Якщо враховувати релятивістські поправки і використовувати **точні вирази тільки для напруженості електричного поля  $\vec{E}$  РЗЧ, або процесії частинок**, то приходимо до висновку, що в просторі навколо ППС буде існувати непотенційне електричне поле. Це непотенційне електричне поле ППС, хоч і незначної величини, у принципі можна було б виміряти й спостерігати його прояви.

Якщо ж при цьому врахувати точний, релятивістський **вираз і для індукції** магнітного поля, то відбувається **компенсація** непотенційного електричного поля

Такі пояснення та уявлення створюють і формують цілісну й несуперечливу картину механізму протікання електромагнітних процесів в колі постійного струму.

Знову переконаємося, що тільки теорія може пояснити те, що вимірюється чи спостерігається у фізичних експериментах.

### 5.3. Об'ємний заряд провідника з постійним струмом та умова нейтральності провідника зі струмом

У більшості навчальних посібників з електромагнетизму [176; 65; 216; 227; 224; 234] стверджується, що в нерухомому провіднику зі струмом об'ємна густина заряду дорівнює нулю. Дійсно, це випливає із закону збереження заряду для постійних струмів

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (5.21)$$

і закону Кулона у формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (5.22)$$

З рівняння (5.21) та (5.22) одержуємо

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} (\lambda \cdot \vec{E}) = \operatorname{div} \left( \frac{\lambda \cdot \vec{D}}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \right) = 0, \quad (5.23)$$

де  $\vec{j}$  – густина струму,  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля всередині провідника з постійним струмом,  $\lambda$  – питома електропровідність матеріалу з якого виготовлений провідник.

Значить  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ , а тому об'ємна густина заряду ППС дорівнює нулю

$$\rho = 0. \quad (5.24)$$

Цей висновок справедливий при виконанні таких умов:

- 1)  $\lambda = \text{const}$ ;
- 2) якщо знехтувати дією власного магнітного поля ППС на електрони провідності (пінч-ефект) [225];
- 3) якщо знехтувати залежністю об'ємної густини заряду від швидкості руху певного розподілу заряду [108].

У відсутності об'ємного заряду всередині ППС при вище названих умовах без посилання на формули (5.21), (5.22) (5.23) можна впевнитися з міркувань, наведених у п. 5.1 та відповідних рисунків (рис. 5.1, 5.2).

Потрібно зазначити, що електричне поле як усередині, так і зовні ППС може бути зумовлене також пінч-ефектом.

Дійсно, якщо врахувати дію сили Лорентца з боку магнітного поля струму на електрони провідності (пінч-ефект), то із закону збереження заряду  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  та рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  одержуємо (оскільки  $\vec{j} = \lambda (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])$ )

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \vec{E}) = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\varepsilon \cdot \vec{v} \vec{j}}{c^2} = \rho. \quad (5.25)$$

Таким чином, провідник з струмом характеризується:

а) об'ємною густиною заряду ( $\varepsilon = 1$ ) [176; 108]

$$\rho = \frac{\varepsilon \cdot \vec{v} \vec{j}}{c^2} = \rho_- \frac{v^2}{c^2}, \quad (5.26)$$

де  $\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$  – об'ємна густина заряду електронів провідності в

системі відліку  $K$ , у якій провідник нерухомий,  $\rho_-^0$  – об'ємна густина заряду електронів провідності у власній СВ;

б) поверхневою густиною заряду [225, с. 322]

$$\sigma = \frac{r_0 j v}{2c^2} - \frac{j \left( \frac{\pi r_0^2 v}{c^2} - \frac{z}{\lambda} \right)}{4\pi \cdot r_0 \ln \frac{r_0}{a}}. \quad (5.27)$$

З методичною метою розв'яжемо цю задачу, використовуючи більш наочні інтегральні закони [91]. На рис. 5.13 зображенні поперечний переріз однорідного й циліндричного провідника та сили, що діють на електрони провідності в електромагнітному полі ППС.

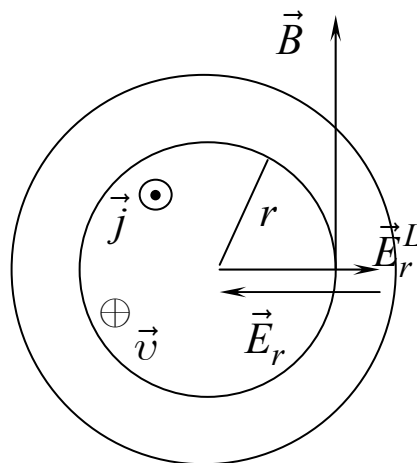


Рис. 5.13. Напруженості електричних полів провідника з постійним струмом, в яких рухаються електрони провідності.

Зображення подано в поперечному перерізі провідника

У власному магнітному полі ППС на електрони провідності діє сила Лорентца, яка направлена до осі провідника. Унаслідок скупчення електронів виникає електричне поле, що створюється цими електронами і яке протидіє й зрівноважує поле сили Лорентца. Тому концентрація електронів буде збільшуватися в напрямку до осі до тих пір, поки сила Лорентца не зрівноважиться електричною силою відштовхування.

Поле сили Лорентца чисельно дорівнює

$$E_r^L = \frac{F_L}{q} = vB = \frac{\mu\mu_0 v^2}{r} \int_0^r \rho_-(r) \cdot r dr, \quad (5.28)$$

де індукція магнітного поля  $B = \frac{\mu\mu_0 v}{r} \int_0^r \rho_-(r) \cdot r dr$  знаходиться з теорему про циркуляцію вектора  $\vec{B}$ .

Використовуючи симетрію задачі, електричне поле, що створюється на віддалі  $r$  від осі провідника об'ємною густиною заряду  $\rho$ , знаходимо з допомогою теорему Гаусса:

$$E_r = \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (5.29)$$

При рівновазі  $E_r^L = E_r$ , тому (у припущенні, що  $\rho_-(r) \neq f(r)$ ,  $\epsilon = \mu = 1$ ) одержуємо формулу (5.26)

$$\rho = \rho_- \frac{v^2}{c^2}.$$

Але є ще одне фізичне явище, яке в загальноприйнятій моделі ППС може приводити до виникнення додаткового електричного поля.

Це додаткове електричне поле зумовлене різницею у величинах густини зарядів сукупності електронів та іонів кристалічної ґратки внаслідок руху їх з різними швидкостями в довільній СВ [108; 234; 4; 127].

Для ясності нашої подальшої аргументації коротко нагадаємо релятивістську інтерпретацію взаємодії рухомої зарядженої частинки і ППС [234, с. 270–273; 4, с. 338; 118, с. 151–156; 127, с. 278–280].

Нехай у системі відліку  $K$  уздовж вісі  $OX$  знаходиться нерухомий ППС. Уздовж нього зі швидкістю  $\vec{V} = \vec{v}$  рухається електрон. Знайти силу, що діє на електрон у СВ  $K$  та у СВ  $K'$ .  $\vec{V}$  – швидкість руху СВ  $K'$  відносно СВ  $K$  (рис. 5.14).

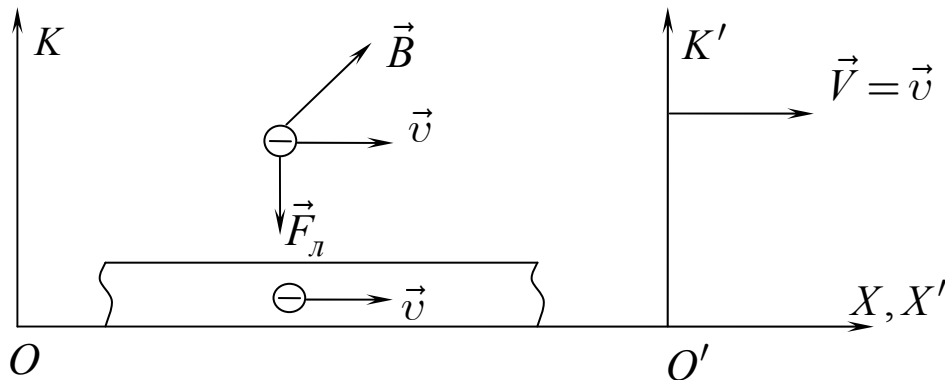


Рис. 5.14. Взаємодія електрона і ППС в СВ  $K$  і СВ  $K'$

Свідомо розглядаємо спрощену задачу, коли  $V = v$  з метою найбільш прозоро показати суперечливість поглядів щодо умови нейтральності ППС.

На електрон у СВ  $K$ , якщо не брати до уваги СЕППС та електричне поле, що створюється об'ємним зарядом при пінч-ефекті, діє тільки сила Лорентца

$$F_y = qvB_z = \frac{qv\mu_0 S \rho_- v}{2\pi a}, \quad (5.30)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу провідника;  $\rho_-$  – об'ємна густина заряду електронів провідності в СВ  $K$ ;  $a$  – віддаль зовнішнього електрона від провідника.

Електрон в СВ  $K'$  нерухомий, тому на нього може діяти сила тільки з боку деякого електричного поля. Якраз це поле в СВ  $K'$  створюється некомпенсованими густинами зарядів іонів та електронів провідності. Оскільки електрони в СВ  $K'$  нерухомі, а іони рухаються зі швидкістю  $V = v = v'$ , то густина заряду їх відповідно дорівнює

$$\rho'_- = \rho_-^0 = \rho_- \sqrt{1 - \beta^2}; \quad (5.31)$$

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.32)$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $\rho_-^0$ ,  $\rho_+^0$  – густини зарядів електронів провідності й позитивних іонів, відповідно, у власних системах відліку.

А тому об'ємна густина заряду ППС у СВ  $K'$  буде така

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \rho_- \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\rho_- \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.33)$$

тут використано умову нейтральності нерухомого ППС [227; 234; 4; 179]

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\rho_-. \quad (5.34)$$

Після того, як знайдемо напруженість електричного поля, що створюється об'ємним зарядом (5.33), для сили, що діє на нерухомий

електрон в СВ  $K'$ , одержимо  $F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , що й вимагає принцип

відносності (див. також **Приклад 4.12**).

Звичайно, швидкість дрейфу електронів провідності надзвичайно мала порівняно зі швидкістю світла. Але, як ми впевнилися, нехтування навіть мізерними релятивістськими ефектами при аналізі електромагнітних явищ приводить до «втрати» фізичного явища в теоретичному пізнанні [129; 124; 112] (див. також п. 3.5).

Мабуть, уперше на суперечливість умови нейтральності (5.34) звернуто увагу в роботі Г. В. Ніколаєва [193]: оскільки СВ  $K$  і СВ  $K'$  рівноправні, то при  $\vec{V} = \vec{v}$  завдяки симетричним умовам, якими визначається рух електронів і протонів відповідно в СВ  $K$  і в СВ  $K'$ , фізичні ситуації в цих СВ повинні бути однаковими.

У науково-методичній літературі запропоновано декілька варіантів розв'язання указаної суперечності:

1. «...фізичні властивості негативного і позитивного зарядів виявляються різними» [193]. Якщо електрон і протон в електромагнітних взаємодіях проявляють себе симетрично, то «ми вимушені визнати існування фізичної нееквівалентності нерухомої на поверхні масивного, що створює гравітаційне поле, тіла Землі лабораторної СВ по відношенню до будь-якої іншої СВ, яка рухається відносно неї» [193, с. 6].

2. Провідник зі струмом нейтральний у тій СВ, яка рухається зі швидкістю дрейфу електронів провідності [176, с. 92], тобто в СВ  $K'$ :

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = 0. \quad (5.35)$$

Аргументація авторів статті [176] така. Припустимо появу об'ємного заряду провідника зі струмом в СВ  $K'$  (5.33) і розглянемо взаємодію електронів провідності з полем цього об'ємного заряду. Через те, що в СВ  $K'$  на електрони провідності «магнітне поле не діє, і не існує другої сили, яка змогла б зрівноважити дію електричного поля об'ємного заряду» [176, с. 91], необхідно зажадати виконання (5.35).

Зробимо декілька критичних зауважень щодо останньої тези:

а. Насправді, з точки зору СВ  $K'$  немає чого зрівноважувати, бо, згідно, наприклад, з такою формулою перетворення проекції напруженості  $\vec{E}$  електромагнітного поля  $E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$  [118; 100] при пере-

ході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ ,  $E'_y = 0$  при  $\vec{V} = \vec{v}$ .

У системі відліку  $K$  напруженість поля об'ємного заряду  $E_y = E_r$  компенсується полем сили Лорентца  $E_r^L = v \cdot B_z$ . У СВ  $K'$

чисто електричне поле збільшується й стає рівним  $\frac{E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ , а «рухо-

ме» магнітне поле  $B_z$  створює в СВ  $K'$  електричне поле такої самої величини, але протилежного напрямку  $-\frac{v \cdot B_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ . Таким чином, і у

СВ  $K'$  знову все в рівновазі (як того й вимагає принцип відносності), і немає потреби «зрівноважувати дію електричного поля об'ємного заряду». А значить умова (5.35) некоректна.

**б.** Із умови нейтральності (5.35) випливає, що у СВ  $K$  об'єм нерухомого ППС заряджений. Тоді густина цього заряду з урахуванням (5.31), (5.32) та (5.35) дорівнює:

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = \rho_- \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (5.36)$$

Густина заряду (5.36) в точності дорівнює густині заряду, що з'являється при пінч-ефекті (див. формулу (5.26)) у нерухомому ППС [108; 176]. Але пінч-ефект і збільшення об'ємної густини заряду при русі будь-якої сукупності заряджених частинок – це різні фізичні явища. А автори [176] хотіли, мабуть, пояснити пінч-ефект релятивістськими ефектами.

**в.** У СВ  $K$  на зовнішній електрон, який рухається з швидкістю дрейфа вздовж провідника, крім сили Лорентца буде діяти й електрична сила з боку поверхневого заряду. Цей позитивний поверхневий заряд утворюється за рахунок переміщення частини електронів всередину провідника. «Якраз цей поверхневий заряд у СВ  $K'$  буде притягувати зовнішній нерухомий електрон» [176, с. 92]. Але у СВ  $K'$  і  $F'_L = 0$  (бо зовнішній електрон нерухомий в СВ  $K'$ ), і  $\rho' = 0$ , а значить, і поверхневий заряд рівний нулю. Очевидне порушення принципу відносності.

**г.** Спостерігається явне порушення фізичної відносності в розв'язку, пропонованому в [176].

Нагадаємо, що слід розрізняти фізичну відносність, як принцип «що стверджує існування відповідних явищ, і просте виконання вимоги коваріантності рівнянь при переході від однієї системи відліку до іншої» [237, с. 245]. Дійсно, уявимо собі в СВ  $K$  електрон, який рухається вздовж ППС з швидкістю дрейфа, і нерухомий протон.

Тоді в СВ  $K'$  маємо симетричну в кінематичному відношенню картину. Але аналіз сил, що діють на електрон і протон в обох СВ показує фізичну нееквівалентність ситуацій в СВ  $K$  і в СВ  $K'$  (див. нижче п. 5.4).

**3.** Умова нейтральності провідника [85]:

$$\rho_+^0 = -\rho_-^0. \quad (5.37)$$

Тоді нерухомий провідник зі струмом характеризується об'ємною густиною заряду [108; 85; 92; 90]:

$$\rho = \rho_+^0 - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \sqrt{1-\beta^2} - 1 \right). \quad (5.38)$$

**Наведемо міркування на користь умов (5.37) та (5.38):**

**а.** Дійсно, якщо справедлива умова (5.34),  $\rho_+^0 = -\rho_-$ , при протіканні струму, то це означає, що  $\rho_-^0 < \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_-$ .

Тобто, нерухома як ціле сукупність електронів провідності має меншу густину заряду, ніж густина заряду цієї ж сукупності електронів, але рухомої.

Тоді при  $\beta = 0$  (струм у провіднику відсутній)  $\rho_-^0 = \rho_- < \rho_+^0$ , тобто провідник без струму (після того, як виключили струм) буде заряджений позитивно:  $\rho_+^0 - \rho_-^0 = \rho_+^0 \left( 1 - \sqrt{1-\beta^2} \right)$ , причому величина цього заряду залежить від сили струму, що протікав раніше [85]?!  
**б.** Густина будь-якого розподілу заряду при переході від однієї СВ до іншої перетворюється за формулою  $\rho = \frac{\rho^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$  [127, с. 275; 118,

с. 150], де  $V$  – швидкість руху деякого розподілу зарядів з густиною  $\rho^0$ ,  $\rho$  – густина заряду у СВ, відносно якої рухається цей розподіл зарядів;

Тому й густини зарядів сукупності електронів та іонів при русі їх з довільною, але однаковою за величиною, швидкістю повинні збільшитися в одне й те саме число разів. Якщо провідник без струму нейтральний  $\rho_+^0 = -\rho_-^0$  (що природно), то чому після того, як з'явиться струм, і сукупність електронів, що рухаються при цьому з швидкістю  $v$ ,

описується, як відомо, густиною заряду  $\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ , ця густина  $\rho_-$

не стає більшою чисельно за  $\rho_+^0$ ?

**в.** Якщо ж густини сукупності електронів та іонів при русі з однаковою швидкістю змінюються по-різному, то провід без струму, який рухається, буде зарядженим з об'ємною густиною [108; 85; 90]:



$$\rho = \rho_+ - \rho_- = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right).$$

Але немає ніяких фізичних підстав вважати нерухомий (як і той, що рухається з постійною швидкістю) провідник без струму зарядженим.

г. Густина струму в СВ  $K$  дорівнює

$$j_x = \rho_- \cdot v.$$

А у СВ  $K'$  (див. рис. 5.14) струм зумовлений рухом тільки іонів з такою ж самою за величиною швидкістю, що й рух електронів провідності в СВ  $K$ .

Але густина струму в СВ  $K'$  є більшою  $j'_x = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}} > j_x$ , не-

зважаючи на те, що густини заряду й електронів, й іонів зростають однаково в СВ, відносно якої вони рухаються з рівними швидкостями.

Аналогічно ми знайдемо, що в СВ  $K'$  магнітне поле більше, ніж у

СВ  $K$ :  $B'_z = \frac{B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , але ж фізичні ситуації ідентичні (з точністю до

знаку рухомих і нерухомих заряджених частинок);

д. Одержуємо на основі умови нейтральності провідника зі струмом (5.34):

– у СВ  $K$  електричне поле відсутнє, а в СВ  $K'$  напруженість е-

лектричного поля дорівнює  $E'_y = \frac{\rho_- S \beta^2}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{1-\beta^2}}$ ;

– індукція магнітного поля в СВ  $K$   $B_z = \frac{\mu_0 \rho_- v \cdot S}{2\pi a}$ , а в СВ  $K'$

індукція магнітного полі в  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  разів більша, бо  $I' = \frac{I}{\sqrt{1-\beta^2}}$  не-

зважаючи на те, що іони в  $K'$ -системі рухаються з такою самою швидкістю (за величиною), як і електрони провідності в  $K$ -системі;

е. Порушення фізичної відносності при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  особливо чітко видно, якщо порівняти сили, що діють на електрон в СВ  $K$  (швидкість його  $v$ ) і на позитрон, який рухається в СВ  $K'$  зі швидкістю  $v' = v$  вздовж струму.

Традиційна точка зору для сили, що діє на електрон, дорівнює виразу (5.30), а сила, що діє на позитрон у СВ  $K'$  дорівнює

$$qvB'_z - qE'_y = 0,$$

хоч фізичні умови в системах  $K$  і  $K'$  однакові [96]. У цьому прикладі, здається, порушується можливість фізичної адаптації, яка «є вирішальною умовою реалізації фізичної відносності» [238, с. 8–9].

Зауважимо, що в статті [45] зроблена спроба проаналізувати подібну задачу, але оскільки, на наш погляд, вона містить деякий некоректний висновок і до того ж повторює наші багаторічної давності результати, слід нагадати взаємоузгоджене обґрунтування формул перетворення об'ємних густин заряду та струму при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  з допомогою формул перетворення компонент 4-струму та виходячи з фізичного змісту цих величин, у загальному випадку, коли  $V \neq v$  і в рамках кожної з умов нейтральності ППС (5.34) та (5.37) [108; 85; 100].

Отже, нехай у СВ  $K$  маємо компоненти 4-струму

$$s_1 = \rho_- v = j_x; s_2 = s_3 = 0; s_4 = ic\rho = 0, \quad (5.39)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ ;  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ;  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Тобто використовується умова нейтральності (5.34).

Тоді, згідно з формулами перетворення компонент 4-векторів [118, с. 150; 127, с. 274], компоненти 4-струму в СВ  $K'$  дорівнюють

$$s'_1 = \frac{j_x}{\sqrt{1-B^2}}; s'_2 = s'_3 = 0; s'_4 = ic\rho' = \frac{iBj_x}{\sqrt{1-B^2}}, \quad (5.40)$$

де  $B = \frac{V}{c}$ .

З (5.40) одержуємо

$$j'_x = \Gamma j_x; \rho' = \frac{Vj_x}{c^2} \Gamma,$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$ .

Струм з точки зору СВ  $K'$  зумовлений рухом іонів та електронів зі швидкостями  $V$  і  $v' = \frac{V-v}{1-B\beta}$  відповідно.

Тоді густина струму та густина заряду в ППС у СВ  $K'$  дорівнюють

$$j'_x = \frac{\rho_+^0 V}{\sqrt{1-B^2}} - \rho'_- v' = \Gamma j_x; \quad (5.41)$$

$$\rho' = \Gamma \rho_+^0 - \rho'_- = \frac{\rho_+^0 V v}{c^2} \Gamma = \Gamma \frac{Vj_x}{c^2}, \quad (5.42)$$

де  $\rho'_- = \gamma' \cdot \rho_-^0 = \Gamma \rho_- (1 - B\beta)$ ,  $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ .

Тобто виходячи з фізичного змісту густини струму та густини заряду, одержали такі ж самі значення  $j'_x$  (5.41) та  $\rho'$  (5.42), як і за допомогою формул перетворення компонент 4-струму.

Тепер, якщо припустити, що ППС у власній СВ характеризується об'ємною густиною заряду (5.38) і  $\rho'_+ = |\rho'_-| = \rho^0$ , то у СВ  $K$  компоненти 4-струму такі

$$s_1 = \rho_- v = j_x; s_2 = s_3 = 0; s_4 = ic\gamma\rho^0 \left( \sqrt{1 - \beta^2} - 1 \right), \quad (5.43)$$

де  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

А густина струму та густина заряду в СВ  $K'$ , згідно з формулами перетворення компонент 4-струму

$$j'_x = \rho^0 \gamma \cdot \Gamma \left( v + V - V\sqrt{1 - \beta^2} \right); \quad (5.44)$$

$$\rho' = \rho^0 \gamma \cdot \Gamma \left( \sqrt{1 - \beta^2} - B\beta - 1 \right). \quad (5.45)$$

Такий самий вираз для  $j'_x$  та  $\rho'$  одержимо, виходячи також із фізичного змісту цих величин, при умові, що провідник зі струмом у власній СВ «заряджений» з об'ємною густиною заряду (5.38).

Повертаємося до обговорення результатів роботи [45], де стверджується, що при наявності компенсації електричного поля рухомих електронів провідності електричним полем нерухомих іонів, аналіз взаємодії нерухомого в СВ  $K$  протона та ППС приводить до протиріччя з ПВ, бо при вказаній компенсації сила взаємодії цього протона і ППС дорівнює нулю. Але якщо перейти до іншої інерціальної СВ, то навіть при наявності вказаної компенсації рівнодійна сила дії на зовнішній протон уже не дорівнює нулю.

Якраз останнє неправильне.

Якщо в СВ  $K$   $F = 0$ , то й у будь-якій іншій СВ результуюча сила теж дорівнює нулю. Дійсно, у СВ  $K'$  на цей протон буде діяти і сила Лорентца, і сила з боку електричного поля, зумовленого об'ємним зарядом (5.33) (у СВ  $K$  має місце повна компенсація полів,  $\rho = 0$ ). Тоді, з урахуванням (5.41) та (5.42), результуюча сила, що діє на протон в довільній інерціальній СВ  $K'$ , дорівнює (рис. 5.15)

$$F'_p = F'_L - F'_E = qVB'_z - qE'_y = 0.$$

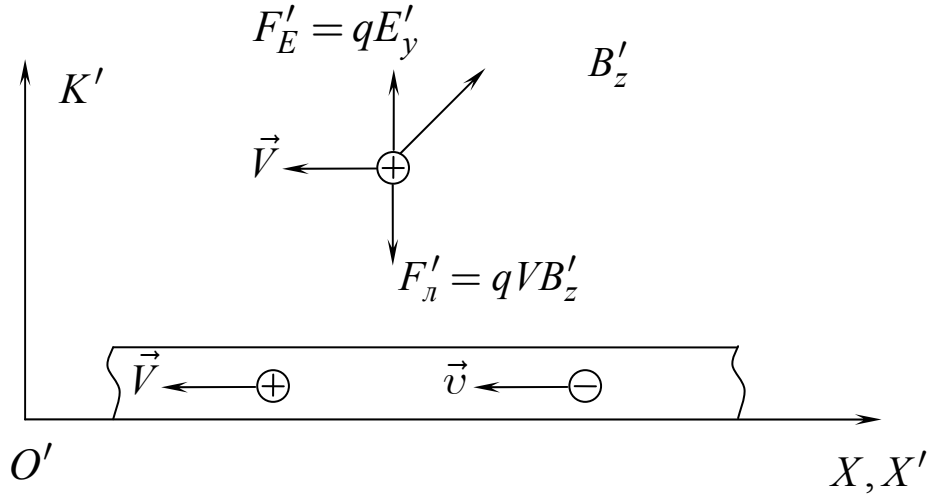


Рис. 5.15. Сили, які діють на протон в СВ  $K'$

Якщо ж припустити, що компенсація відсутня (як це зроблено нами раніше [85; 92; 90]), і на протон у СВ  $K$  діє сила  $F$  з боку рівномірно зарядженого, об'ємною густиною заряду (5.38), провідника зі струмом

$$F = qE_y = \frac{qS\rho^0\gamma \cdot (\sqrt{1-\beta^2} - 1)}{2\pi\epsilon_0 d},$$

то в будь-якій іншій СВ, як можна впевнитися, використовуючи (5.44) та (5.45),  $F'_p = \frac{F}{\Gamma}$ . До того ж навчальна задача, що аналізується в [45], розв'язана нами значно раніше в [85; 92].

Якщо прийняти умови (5.37), (5.38), то всі протиріччя, викладенні в пунктах **3а–3д** спростовуються.

Якщо умова (5.38) відповідає фізичній реальності, то не слід буквально розуміти слова «заряд провідника з струмом». Додаткове електричне поле ППС є результатом збільшення поперечної складової напруженості електричного поля рухомих заряджених частинок. Тоді можна говорити, що поле, зумовлене об'ємною густиною (5.38), – це суперпозиція поля лінійної сукупності нерухомих іонів і поля лінійної сукупності рухомих електронів провідності [81].

Можливо, умова (5.38) не має відношення до реальності через грубість моделі ППС, бо ми вважаємо, що електрона й іона підсистеми, в електромагнітних явищах зв'язаних з протіканням струму, ніяк не взаємодіють між собою, й існують як два незалежних лінійні ланцюжки зарядів. Але тоді треба пояснити: чому при будь-яких значеннях сили струму (при довільних значеннях  $\beta$ ), що протікає по провіднику, реалі-

зується дивна умова нейтральності  $\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , якщо у відсутнос-

ті струму  $\rho_+^0 = -\rho_-^0$ ?

Без уявлень електронної теорії важко пояснити чи навіть уявити механізм виникнення багатьох електродинамічних явищ, тому використання моделей необхідне. Але тоді слід ураховувати й усі ефекти, пов'язані з рухом електронів.

Зокрема при введенні поняття «магнітне поле» на основі аналізу взаємодії 2-х струмів нехтування електричною взаємодією струмів, є некоректним. З іншого боку, якщо така модель ППС далека від реальності (насправді й  $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$  за контуром, що лежить у площині провідника, й умова (5.38) некоректна), то як на основі такої моделі успішно пояснюється й релятивістська природа магнітного поля і безліч інших фізичних явищ?

А в методиці навчання фізики ця модель активно експлуатується. Можливо, ці апорії породжені не тільки недосконалістю моделі, а в першу чергу діалектикою самого процесу пізнання. Але й вивчення фізики повинне бути таким, щоб студент бачив ці суперечності, розумів необхідність появи їх і шукав шляхи їх подолання.

Тому при вивченні цього питання слід чітко формулювати задачу (яке явище аналізується, яка модель провідника з струмом розглядається). Слід показати суперечності, що виникають при аналізі й поля провідника зі струмом, і взаємодії рухомого, відносно провідника, протона та провідника зі струмом.

Таким чином, підведемо підсумок цього аналізу.

При проходженні постійного чи квазістаціонарного струму по металевому циліндричному провіднику у власній СВ виникає СЕППС, зумовлене поверхневими зарядами.

З урахуванням пінч-ефекту поверхнева густина зарядів визначається [225, с. 322] формулою (5.27).

Коли не враховується пінч-ефект і релятивістські зміни об'ємних густин заряду, то, як уже відзначалося, у власній СВ провідника зі струмом об'ємний заряд ППС  $\rho = 0$  (5.24).

Пінч-ефект в класичній моделі ППС, яка обговорюється нами, зумовлює об'ємну густина заряду (5.26).

З урахуванням релятивістських ефектів та за умови нейтральності (5.34) провідник зі струмом у власній системі відліку нейтральний.

**Але за умови нейтральності (5.37), запропонованої нами, у ВСВ провідник зі струмом слід вважати «зарядженим» з об'ємною густиною заряду (5.38).**

## 5.4. Релятивістський опис взаємодії між двома довгими провідниками зі струмами

У попередніх пунктах цього Розділу 5 показано, що ППС характеризується:

А) СЕППС, яке породжується зарядами, розподіленими по поверхні провідника;

Б) полем, яке створюється об'ємним зарядом пінч-ефекту, – й експериментально підтверджено існування цих електричних полів ППС.

Що стосується електричного поля, зумовленого виключно релятивістськими ефектами в зміні густин зарядів електронів провідності та зарядів іонів кристалічної ґратки, то прямих експериментальних підтверджень цього явища поки що немає. Але аналіз моделі ППС, яка широко використовується в методиці навчання фізики, на основі послідовного й систематичного використання методів СТВ неодмінно, безповоротно приводить до висновку, що у власній СВ провідник з постійним струмом характеризується об'ємною густиною заряду (5.38):

$$\rho = \rho_+^0 - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \sqrt{1-\beta^2} - 1 \right),$$

де  $\rho_0 = \rho_+^0 = -\rho_-^0$  – об'ємна густина заряду електронів провідності та іонів кристалічної ґратки у власних системах відліку;  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $v$  – дрейфова швидкість електронів провідності в ППС.

Існування об'ємних і поверхневих зарядів на ППС приводить до додаткових складових електромагнітної взаємодії між провідниками зі струмами.

Так, наприклад, урахування СЕППС в схемі на рис. 5.17 приводить до того, що між двома відрізками ППС електрична сила притягання між ними може бути більшою магнітної сили відштовхування [65, с. 172].

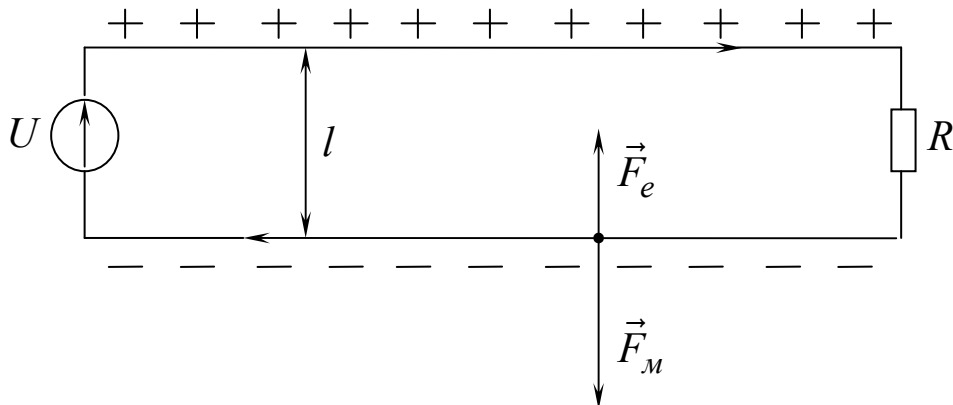


Рис. 5.17. Електромагнітна взаємодія двох паралельних провідників зі струмами [65]

А результуюча сила взаємодії між паралельними ППС буде дорівнювати нулю, якщо  $\frac{F_m}{F_e} = 1$ .

Ця умова буде виконуватися при  $R = R_0 = \frac{\ln \eta}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 360 \text{ Ом}$ ,

де  $\eta = \frac{l}{r}$ ;  $l$  – віддаль між проводами;  $r$  – радіус поперечного перерізу проводу;  $R$  – активний опір навантаження.

Якщо  $R < R_0$ , то  $F_m > F_e$  – провідники відштовхуються.

Якщо  $R > R_0$ , то  $F_m < F_e$  – провідники притягуються.

Таким чином, твердження, що провідники, по яких течуть струми протилежного напрямку, відштовхуються, справедливе лише тоді, коли електричною частиною взаємодії можна нехтувати, тобто при достатньо малому опорі  $R$  в схемі, що зображена на рис. 5.17.

«Крім того, вимірявши силу взаємодії між провідниками зі струмом (а сила завжди вимірюється як результуюча), ми не можемо, взагалі кажучи, визначити силу струму  $I$ . Це необхідно мати на увазі щоб уникнути непорозуміння» [65, с. 173].

У зв'язку з реформуванням системи шкільної та вищої освіти [52; 51; 50], переглядом змісту фізичної освіти [54; 241; 222], у зв'язку зі зростаючою роллю фізичних моделей і модельного експерименту в процесі навчання фізиці [18], точне й послідовне розв'язання електродинамічних моделей, які традиційно використовуються в учбовій літературі, набуває важливого значення для дидактики фізики.

Відомо, що точне урахування релятивістських поправок, не дивлячись на їх незначну величину в реальних фізичних ситуаціях, в описі взаємодії рухомих заряджених частинок є принципово важливими й необхідним.

Так, з вимог спеціальної теорії відносності до правил перетворення компонент сили при переході з однієї системи відліку в іншу (іншими словами з вимоги лоренцковаріантності рівнянь руху) витікає необхідність введення поняття «Магнітне поле» [129] (див. також **Розділ 2**).

Урахування релятивістських поправок у виразі напруженості електричного та індукції магнітного полів рухомої ЗЧ спільно з принципами СТВ приводять до необхідності існування явища електромагнітної індукції [124; 100; 133] (див. також **Розділ 3**).

У навчальній і науково-методичній літературі [178; 227; 200; 233] для ілюстрації фундаментальної властивості електромагнітного поля – відносності електричного і магнітного полів популярним є такий приклад.

Магнітна взаємодія рухомого заряду з іншими рухомими зарядами (з лінійним провідником, по якому протікає струм) представлена як суто електрична взаємодія завдяки релятивістським змінам в електричних полях рухомих ЗЧ (див. [200; 81; 94; 127; 90; 100]) (див. також п. 5.3 цього розділу).

Цей приклад ініціює спробу аналогічної інтерпретації взаємодії двох нескінченно довгих провідників зі струмами [94; 100, с. 219].

*Тобто, вважаючи, що ППС у ВСВ характеризується об'ємною густиною заряду (5.38), знайдемо силу взаємодії таких двох паралельних ППС, урахувуючи тільки магнітну складову та електричну, зумовлену релятивістським ефектом (5.38).*

Але спочатку опишемо взаємодію між двома ППС, моделі яких неприродно ідеалізовані.

При цьому розглядається наступна модель провідників зі струмами [178; 200; 209, с. 121–125]: у кожному провіднику є однакове число позитивних і негативних носіїв заряду, які рухаються з однаковими швидкостями в протилежних напрямках, рис. 5.18. Щоб обчислити силу, що діє на одиницю довжини одного з таких провідників з боку іншого в лабораторній системі відліку (ЛСВ)  $K$ , необхідно обчислити силу, що діє на позитивні носії заряду у власній системі відліку та на негативно ЗЧ в своїй ВСВ. Потім значення цих сил перерахувати згідно з формулами перетворення компонент сил [227, 100] у СВ  $K$ .

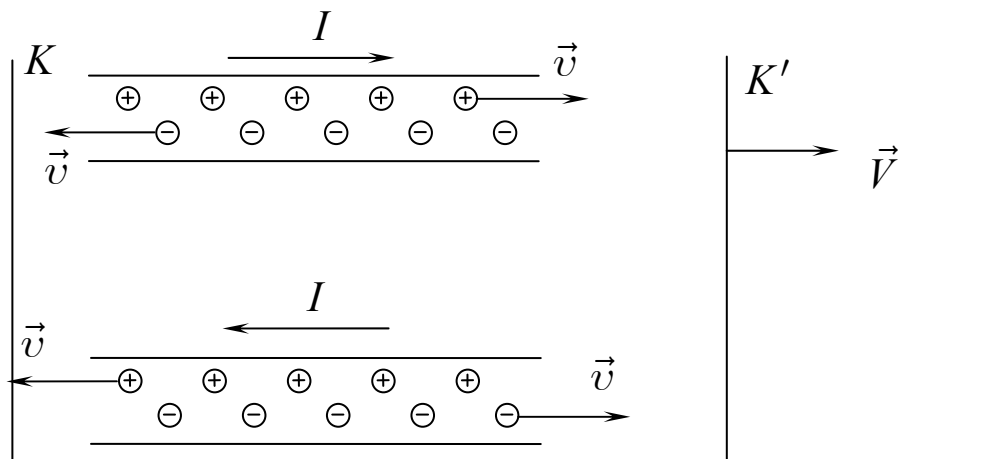


Рис. 5.18. Моделі двох ППС, у яких позитивні іони та електрони мають однакові за величиною, але протилежно направлені швидкості

А потім покажемо, що для моделі провідника зі струмом, яка в більшій мірі відповідає реальній ситуації, ніж та, що зображена на рис. 5.18, вираз для сили взаємодії двох паралельних ППС відрізняється від загальноприйнятого [94; 81] унаслідок того, що такі ППС характеризуються об'ємною густиною заряду релятивістського походження.

Але спочатку в **п.1** і **п.2** знайдемо силу взаємодії між струмами, моделі яких зображені на рис. 5.18.



**n.1.** Хай швидкості зарядів в СВ  $K$  дорівнюють  $\vec{v}$ , лінійна густина зарядів в ВСВ  $|\tau_0^+| = |\tau_0^-| = \tau_0$ . Ясно, що сили, що діють на позитивні та негативні носії заряду першого провідника в їх власних системах відліку, матимуть електричну природу. Електричне поле у ВСВ позитивних чи негативних носіїв заряду першого провідника зумовлене різною величиною лінійної густини позитивного й негативного зарядів другого провідника.

Тоді на позитивні заряди 1-го провідника в їх ВСВ, які розташовані на тій же довжині, що й у СВ  $K$  ( $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \beta^2}$ , де  $\beta = \frac{v}{c}$ ), діє сила з боку електричного поля 2-го провідника, що дорівнює:

$$F'_+ = \tau_0 \cdot \Delta l' \cdot E_2 = \tau_0 \cdot \Delta l' \cdot \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a}, \quad (5.46)$$

де  $\tau_2 = \tau_2^+ - \tau_2^- = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (\beta_2^+)^2}} - \tau_0 = \frac{2\tau_0\beta^2}{(1 - \beta^2)}$  – результуюча лінійна

густина заряду 2-го ППС з точки зору СВ, пов'язаної з позитивними носіями заряду 1-го ППС;  $\beta_2^+ = \frac{v_2^+}{c} = \frac{1}{c} \left( \frac{v + v}{1 + \beta^2} \right)$ ;  $a$  – відстань між струмами.

Оскільки потрібно знайти силу, що діє на довжину  $\Delta l$  провідника в СВ  $K$ , то остаточно маємо, урахувавши вираз для величини  $\tau_2$ , та  $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \beta^2}$ :

$$F'_+ = \frac{\tau_0^2 \cdot \beta^2 \cdot \Delta l}{\pi\epsilon_0 \cdot a (1 - \beta^2)^{3/2}}. \quad (5.47)$$

Така ж сама за величиною (через симетрію задачі) сила відштовхування  $F'_-$  діє й на негативні заряди 1-го провідника в їх ВСВ з боку електричного поля 2-го провідника.

Оскільки СВ, які пов'язані з носіями заряду 1-го провідника, мають швидкість  $v$  відносно СВ  $K$ , то сила, що діє на відрізок  $\Delta l$  в СВ  $K$  буде дорівнювати (згідно з формулами перетворення поперечних складових сили (1.20) [227; 100])

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - \beta^2} = (F'_+ + F'_-) \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \Delta l, \quad (5.48)$$

де сила струму  $I = \frac{2\tau_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

Таким чином, розглядаючи лише електричні сили, знайдено звичайний вираз для сили, що діє на довжину  $\Delta l$  одного з них з боку магнітного поля іншого ППС.

**n.2.** Цей же результат може бути отриманий шляхом знаходження сил, що діють на рухомі ланцюжки позитивних і негативних носіїв заряду 1-го провідника в магнітному полі створюваному 2-м струмом. Електричне поле другого ППС в СВ  $K$  відсутнє ( $E_2 = 0$ ) завдяки рівним, але протилежно направленим, швидкостям негативних і позитивних носіїв заряду.

Індукція магнітного поля, що створюється другим струмом в СВ  $K$  дорівнює

$$B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 \tau_0 v}{\pi \cdot a \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (5.49)$$

де  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1-\beta^2)}{r^3 (1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$  – закон Біо-Савара в релятивістській

формі [112] (див. також **Розділ 2**); тут  $\vec{r}$  – радіус-вектор проведений з миттєвого положення елемента струму  $\frac{\tau_0 dl}{\sqrt{1-\beta^2}}$  у дану точку поля;  $\theta$  –

кут між  $\vec{v}$  і  $\vec{r}$ .

Тоді сила, що діє на відрізок довжини  $\Delta l$  першого провідника з боку магнітного поля другого провідника, рівна:

$$F_y = 2 \cdot \frac{\tau_0 \cdot \Delta l}{\sqrt{1-\beta^2}} \left| [\vec{v}, \vec{B}_2] \right| = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \Delta l,$$

що, природно, збігається з виразом (5.48).

Пункти **n.1** і **n.2** є хорошою ілюстрацією застосування принципів СТВ для розрахунку конкретних фізичних моделей.

Було показано також, що необхідно враховувати релятивістські поправки й у законі Біо-Савара, і в електричних полях рухомих носіїв заряду.

Проте, як наголошувалося на початку, більш адекватна реальності буде модель провідника зі струмом, зображена на рис. 5.19. Тут позитивні носії заряду нерухомі (що відповідає нерухомим іонам кристалічної решітки провідника), а рухаються тільки електрони провідності з дрейфовою швидкістю  $\vec{v}$  відносно ЛСВ  $K$ .

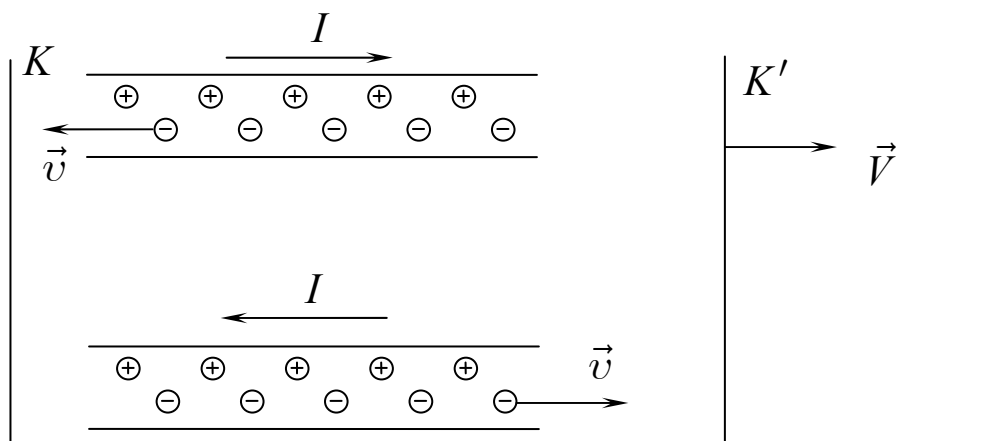


Рис. 5.19. Традиційна модель взаємодіючих провідників зі струмами. Уважається, що вони «заряджені» у ВСВ з об'ємною густиною заряду (5.38)

Припустимо, що провідник без струму нейтральний  $|\tau_0^+| = |\tau_0^-| = \tau_0$ ; це відповідає випадку, коли ланцюжок негативних носіїв заряду нерухомий щодо позитивного зарядженого ланцюжка іонів.

Знайдемо силу взаємодії двох ППС, моделі яких зображені на рис. 5.19, трьома способами. Кожен з цих способів ілюструє різні прояви електромагнітної взаємодії, різні описи ЕМ взаємодії в конкретному прикладі. При цьому ілюструється ПВ, методика його використання, показується інваріантність величини сили цієї взаємодії, підтверджується вірогідність одержаного результату та відмінність його від класичної формули.

**Перший спосіб.** Для знаходження сили взаємодії двох струмів, показаних на рис. 5.19, реалізуємо програму *n. 1*. Перейдемо в систему відліку (СВ  $K'$ ), пов'язану з електронами провідності першого провідника. Тоді на нерухомі в цій СВ електрони діє сила з боку електричного поля, зумовленого неоднаковим лорентцевим скороченням ланцюжків електронів та іонів другого провідника (це буде сила відштовхування):

$$F'_{-e} = E_2 \cdot \tau_0 \Delta l' = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \tau_0 \Delta l' = \frac{\tau_0^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot \sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \Delta l', \quad (5.49a)$$

$$\text{де } \tau_2 = \tau_2^- - \tau_2^+ = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(\beta_2^-)^2}} - \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)} - \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

результуюча лінійна густина заряду другого провідника у ВСВ електро-

нів провідності першого провідника;  $\beta_2^- = \frac{v_-}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2v}{1+\beta^2}$ .

А на нерухомі іони першого провідника в СВ  $K$  діятиме сила притягання, рівна

$$F_{+e} = \tau_0 \Delta l \cdot E_- = \tau_0 \Delta l \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 a} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (5.50)$$

$F'_{-e}$  – сила, яка діє на **нерухомі** в СВ  $K'$  електрони першого ППС. При перерахуванні її значення до СВ  $K$  як поперечної до швидкості руху, та враховуючи, що  $\Delta l' = \frac{\Delta l}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , одержуємо

$$\begin{aligned} F_{-e} &= F'_{-e} \sqrt{1-\beta^2} = \\ &= \frac{\tau_0^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot \sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \frac{\Delta l}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned}$$

Отже, для сумарної сили відштовхування між двома провідниками, яка приходить на довжину  $\Delta l = 1m$  одного з них в СВ  $K$ , маємо

$$F_y = F'_{-e} \sqrt{1-\beta^2} - F_{+e} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left( 1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}, \quad (5.51)$$

де сила струму тепер дорівнює  $I = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

Результат (5.51) може бути отриманий і за допомогою способу, запропонованого в [94; 81].

**Другий спосіб.** Насправді, на розподіл електронів першого провідника діють наступні сили з боку електронного та іонного розподілів другого провідника: електрична  $F_{-2,-1}^e$  і магнітна сили  $F_{-2,-1}^m$  з боку ланцюжка електронів та електрична сила з боку нерухомого ланцюжка іонів  $F_{+2,-1}^e$ .

На нерухомі іони першого провідника діють сили  $F_{-2,+1}^e$  і  $F_{+2,+1}^e$  відповідно в електричних полях, що створюються рухомими електронами та нерухомими іонами другого провідника.

Тому результуюча сила взаємодії, що приходить на одиницю довжини одного з них, дорівнює

$$\begin{aligned}
F_y &= F_{-2,-1}^m + F_{-2,-1}^e - F_{+2,-1}^e - F_{-2,+1}^e + F_{+2,+1}^e = \\
&= \frac{\mu_0 \tau_0 v}{2\pi a \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \\
&- \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a} \cdot \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \tau_0 + \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a} \tau = \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left( 1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}, \tag{5.52}
\end{aligned}$$

що збігається з (5.51).

**Третій спосіб.** Ще простіший спосіб знаходження сили взаємодії між «зарядженими» провідниками зі струмами полягає в обчисленні магнітної та електричної складових цієї взаємодії.

Дійсно

$$\begin{aligned}
F^m &= I \cdot \Delta l \cdot B_2 = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \Delta l \cdot \frac{\mu_0 \tau_0 v}{2\pi a \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0^2 \beta^2}{(1-\beta^2) 2\pi \epsilon_0 a}; \\
F^e &= \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \tau_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \Delta l; \\
F_y &= F^m + F^e = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left( 1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Якщо ми розглянемо взаємодію провідників зі струмами в рамках прийнятої моделі для однаково направлених струмів, рис. 5.20, то фігурні дужки у виразах (5.51) або (5.52) для сили взаємодії, як виявляється, дорівнюють [94, 81]:

$$\left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\}.$$

Тобто сила взаємодії паралельних ППС з однаково направленими струмами дорівнює

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\}. \tag{5.53}$$

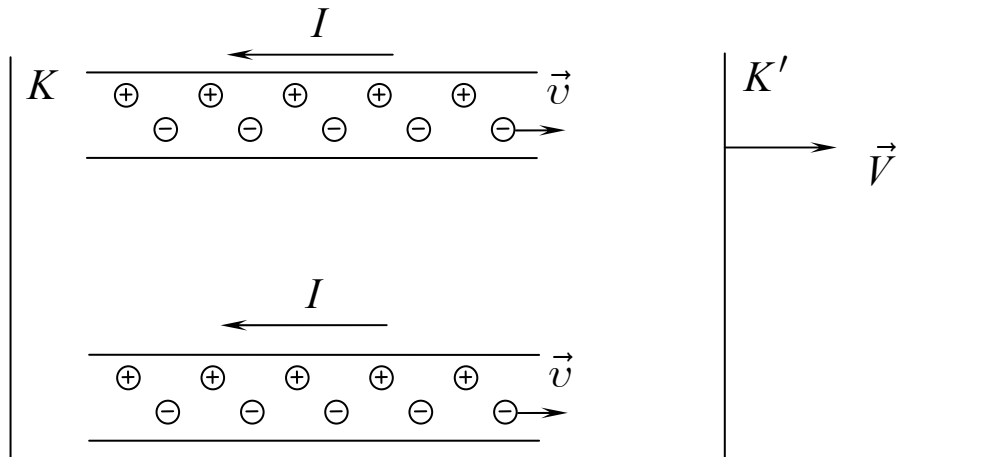


Рис. 5.20. До опису взаємодія двох ППС у моделі, у якій вони «заряджені» у ВСВ [94, 96, 100] (однаково направлені струми)

### Обговорення і висновки.

Отже, інтерпретуючи взаємодію 2-х провідників зі струмами, використання моделей яких (модель Друде-Лорентца) є традиційним і природним у методиках викладання електромагнетизму у вищій та середній школах, на основі послідовного релятивістського підходу й на основі загальних дидактичних принципів фундаментальності, послідовності та системності [23; 54; 241; 222] одержали вираз для сили взаємодії, що відрізняється від загальноприйнятого, формули (5.48) та (5.53).

Для значень поправочних коефіцієнтів

$$\left\{ \frac{2}{\beta^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right\}; \quad (5.54)$$

$$\left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\} \quad (5.55)$$

у формулах (5.51) і (5.53) для антипаралельних і паралельних струмів, відповідно, при  $\beta \ll 1$  (що в практичній електротехніці свідомо має місце),

розкладаючи в ряд  $\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$  з великою точністю одержуємо 1.

Графіки залежності поправочних коефіцієнтів (5.54) і (5.55) від швидкості дрейфу електронів провідності в ППС наведені в Додатку Б.

Ясно з попереднього (див. п. 5.3), що поява коефіцієнтів (5.54) і (5.55) у формулах для сили (5.51) і (5.53) обумовлено урахуванням релятивістських поправок в електричній взаємодії рухомих електронів.

Цю додаткову взаємодію, яка відповідає за множники (5.54) і (5.55), можна ще пояснити як взаємодію «заряджених» провідників зі струмами, оскільки в рамках прийнятої моделі і допущень, напруженість електричного поля провідника, по якому тече струм, дорівнює

$$E = E_- - E_+ = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad (5.56)$$

де  $E_0 = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 \cdot a}$ .

Це поле можна розглядати як створене негативно «зарядженим» тонким провідником з результируючою лінійною густиною заряду

$$\tau = \tau_- - \tau_+ = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \tau_0.$$

Здається, що слова «заряджений провідник зі струмом» не слід розуміти буквально, але на будь-яку заряджену частинку, що знаходиться зовні такого провідника, повинна діяти сила з боку поля, напруженість якого дається виразом (5.56).

Уважаємо, що електричне поле поза провідником зі струмом зумовлене, завдяки руху ланцюжка електронів, зростанням напруженості

електричного поля в  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  разів у поперечному напрямі порівняно з

напруженістю поля нерухомого заряду [200; 101; 117; 227].

І при цьому немає потреби говорити про «заряд провідника зі струмом». Адже коли розглядається взаємодія 2-х заряджених частинок у СВ, відносно якої вони рухаються в напрямі, перпендикулярному лінії, що їх сполучає, сила електричної взаємодії між ними зростає в

$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  разів, але при цьому не стверджується ж, що збільшення елек-

тричної сили зумовлене збільшенням величини заряду в  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  разів

у результаті його руху.

Ураховуючи вищенаведені зауваження щодо виразу «заряджений провідник зі струмом», звернемо увагу на ряд суперечливих одна одній точок зору з цього питання.

Загальноприйнята точка зору – нерухомий провідник зі струмом нейтральний в ВСВ [227; 234; 159], а умова нейтральності має вигляд (див. детальніше п. 5.3), формула (5.34):

$$\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\rho_+^0,$$

де  $\rho_+^0$  та  $\rho_-^0$  – об’ємні густини заряду позитивних іонів і електронів у власних СВ;  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $v$  – дрейфова швидкість руху електронів провідності.

Також є тривіальним положення й про те, що провідник без струму теж нейтральний. У ряді публікацій містяться сумніви у справедливості (5.34) [85; 193; 90; 176; 92] (див. п. 5.3).

У роботах [85; 90; 108] містяться додаткові аргументи на користь уявлення про «заряд провідника зі струмом» у ВСВ, там же наведено ряд прикладів успішно вирішуваних у рамках указаних уявлень (див. пп. 5.3 та 5.4).

Звичайно, модель ППС, про яку мовилося вище, далека від реальної фізичної ситуації.

Наприклад, залишаються абсолютно необґрунтовані (і незрозумілі) припущення про те, яким чином, і чому сили, які діють на електронну і йонну підсистему векторно додаються; чому не враховується взаємодія цих підсистем в рамках прийнятої моделі в межах кожного з провідників, і т. д.

Можливо, коефіцієнти (5.54) і (5.55) зумовлені якраз неадекватністю (невідповідністю) прийнятої моделі провідника зі струмом об’єктивній реальності.

У багатьох навчальних посібниках з електродинаміки [178; 227; 200; 209; 64; 234; 224] використовують моделі, подібні зображеним на рис. 5.18, рис. 5.19, рис. 5.20.

З їх допомогою обґрунтовують фундаментальні властивості електромагнітного поля й багато важливих законів електромагнетизму, ці моделі активно експлуатуються дидактикою. Тому й аналіз їх слід проводити, по можливості, до кінця й послідовно; але тоді з неминучістю слід прийняти результати (5.51), (5.53), (5.56).

У той же час очевидно, що основні риси електромагнітних явищ такою моделлю передаються досить добре.

Доречно провести порівняння. Зонна одноелектронна теорія провідності добре описує багато явищ у напівпровідниках, металах, хоча очевидно, що для адекватнішого опису необхідно використовувати багаточастинковий квантово-механічний формалізм; задача не одноелектронна, а по суті багаточастинкова.

Далі, ця задача (рис. 5.18) в ряді посібників використовується для того, щоб показати релятивістську природу МП [209, с. 122–125], [200, с. 172–178].

Але в цих посібниках використовується *надзвичайно ідеалізована модель ППС* (рис. 5.18), у якій позитивні й негативні носії заряду рухаються з однаковими швидкостями в протилежних напрямках.



І можливо, у чудових підручниках [200, 209] свідомо вибрана така модель провідника із струмом (див. рис. 5.18), яка через свою симетричність дозволяє уникнути розгляду питання про «заряд провідника зі струмом».

*Релятивістськи-інваріантний опис взаємодії між провідниками зі струмами.* Останнім часом у вітчизняній методичній періодиці з'являються статті [45; 44], зміст яких значною мірою повторює результати наших досліджень 20-річної давності [96; 94; 81; 85]. Крім того, вони містять і помилки в розрахунках моделей, що обговорюються. На цьому наголошувалося нами в [108]. Тому має сенс повернутися до цих питань і більш детально їх обговорити.

Було показано [96; 94; 81] (див. п. 5.3), що релятивістський аналіз (у рамках класичної електронної теорії, як це звичайно прийнято в посібниках з основ електродинаміки [234; 200; 224; 153; 216; 209]) взаємодії 2-х нескінченно довгих прямих провідників зі струмами, моделі яких зображені на рис. 5.20 та рис. 5.19, приводить до наступних виразів для сили, що припадає на одиницю довжини провідників, відповідно, для паралельних і антипаралельних струмів, (5.53), (5.51):

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a} \cdot \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\};$$

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a} \cdot \left\{ 2 \left( \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} \right) \right\},$$

де  $v$  – дрейфова швидкість електронів провідності в СВ  $K$ ;  $a$  – віддаль між провідниками з постійним струмом (ППС);  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $I = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$  – величина сили струму;  $\tau_0 = \rho_-^0 S$  – лінійна гу-

стина заряду;  $\rho_-^0$  – об'ємна густина заряду електронів провідності у власній системі відліку (ВСВ);  $S$  – площа поперечного перерізу ліній-

ного металевого провідника;  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Сила струму – це величина, що є комбінацією інших величин і через яку зручно, на електротехнічному рівні розуміння електромагнітних явищ, описувати як взаємодію ланцюжків рухомих заряджених частинок, так і магнітне поле, що супроводжує такі процесії ЗЧ. Просто зручно й не більше.

Відомо, що МП таких процесій ЗЧ породжується не струмами провідності, а струмами зміщення [121; 102; 140] (див. п. 2.6 **Розділу 2**), а індукція МП все ж може бути виражена через певну комбінацію вели-

чин, що характеризують рух ЗЧ (через так звану силу струму), і яка вимірюється в експериментах безпосередньо. Тому така увага в методиці й звертається на поняття «сила струму», хоча ця величина й не несе суттєвого фізичного змісту.

Тоді, якщо потрібно виразити силу взаємодії струмів через вихідні величини в нашій моделі, то формули (5.53) та (5.51) набувають вигляду:

$$F_y = \frac{\tau_0^2}{\pi \varepsilon_0 a} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right); \quad (5.57)$$

$$F_y = \frac{\tau_0^2}{\pi \varepsilon_0 a} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} \right). \quad (5.58)$$

Очевидно, що множники у фігурних дужках формул (5.53) і (5.51), та множники в дужках формул (5.57) і (5.58) при будь-яких значеннях сили струмів, які реально зустрічаються в практичній електротехніці, дуже мало відрізняються від одиниці. Наприклад, якщо по двох мідних провідниках діаметром 2 мм протікають струми  $\sim 120$  А, то дрейфова швидкість електронів у кожному провіднику  $\approx 0,3 \frac{см}{с}$ . Якщо віддаль

між струмами  $a = 3$  см, то, розкладаючи  $\sqrt{1 - \beta^2}$  у степеневий ряд, для сили взаємодії одержуємо

$$F = 10 \left\{ 1 \pm \frac{\beta^2}{4} \right\} \frac{дин}{см} \quad (5.59)$$

з точністю до величин другого порядку малості по  $\beta$ .

Знак « $\pm$ » у (5.59) відповідає однаково направленим струмам, а « $+$ » – протилежно направленим струмам. Відмінність (5.53) і (5.51) від класичного виразу  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$  настільки незначна й мізерна, що прямий

дослід з вимірювання сили взаємодії струмів не в змозі при сучасному рівні експериментальної техніки [218; 13], зареєструвати відмінність сил (5.57) та (5.58) від значення, що визначається класичним виразом.

Найбільш вагомим аргументом у доказі справедливості чи помилковості (5.57) та (5.58) є результати експерименту. Однак, наскільки відомо, такі спеціальні досліді не ставилися, а вся сукупність фактів цілком описується класичною формулою  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$ .

В той же час, оскільки поправочний множник  $\{1 \pm \frac{\beta^2}{4}\} \approx \{1 \pm 3 \cdot 10^{-23}\}$  мізерно мало відрізняється від одиниці, і оскільки чутливість наявної експериментальної техніки [218; 13] недостатня для спростування чи підтвердження формул (5.57) і (5.58), електротехнічне підтвердження виразу  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$  не можна розцінювати, як доказ помилковості (5.57) та (5.58).

Адже навіть при розгляді сил взаємодії між реальними провідниками зі струмами не враховують класичну електричну силу, зумовлену появою надлишкових поверхневих зарядів на поверхні цих провідників [265; 65]. Це, як правило, не обговорюється, тому що відношення цієї електричної сили взаємодії до суто магнітної сили взаємодії рівнобіжних струмів за порядком величини дорівнює  $\frac{F_e}{F_m} \approx 10^{-12}$  [265].

Серед теоретичних аргументів на користь справедливості деяких співвідношень варто вказати на вимогу їх релятивістської інваріантності [4; 199; 237]. Принцип відносності приводить до цілком визначених законів перетворення фізичних величин при переході з однієї ІСВ до іншої.

Покажемо для ситуації, зображеної на рис. 5.20, що вираз (5.53), наприклад, задовольняє формулам перетворення для сили [4; 227] (див. також формулу (1.20)).

Для знаходження сили взаємодії струмів в СВ  $K'$ , яка рухається відносно лабораторної системи відліку  $K$  вздовж осі  $OX$  зі швидкістю  $\vec{V}$ , необхідно знати струм і об'ємну густину заряду, якими характеризуються провідники в СВ  $K'$ . Очевидно, ці величини дорівнюють [85, 108, 91]:

$$\rho' = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{\rho_0 \left[ \frac{V \cdot v}{c^2} - 1 + \sqrt{1-\beta^2} \right]}{\sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}}. \quad (5.60)$$

$$I' = \left( \frac{\rho_+^0 V}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0 v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right) S = \frac{\rho_0 S \left[ v + V \sqrt{1-\beta^2} - V \right]}{\sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}},$$

де  $v$  – швидкість руху електронів провідності в СВ  $K$ ;  $S$  – площа поперечного перерізу провідника;  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $B = \frac{V}{c}$ ;  $v' = \frac{V-v}{1-B\beta}$  – швидкість електронів провідності в СВ  $K'$ .

Тоді напруженість електричного поля та індукція магнітного поля в СВ  $K'$ , відповідно, дорівнюють

$$E' = \frac{\tau'}{2\pi\epsilon_0 a} = \tau_0 \frac{\left[ \sqrt{1-\beta^2} - 1 + B\beta \right]}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}}, \quad (5.61)$$

$$B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 a} \frac{\left[ v + V\sqrt{1-\beta^2} - V \right]}{\sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}}, \quad (5.62)$$

де  $\tau_0 = \rho_0 S$  – лінійна густина заряду нерухомого ланцюжка заряджених частинок;  $|\rho_+^0| = |\rho_-^0| = \rho_0$ .

Величина об'ємної густини заряду  $\rho'$  і сила струму  $I'$  у СВ  $K'$  можуть бути також знайдені за формулами перетворення компонентів 4-струму, якщо складові 4-струму в системі відліку  $K$  визначити [85; 100]:

$$s_1 = \frac{\rho_-^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}; s_2 = s_3 = 0; s_4 = \rho_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Поля  $E'$  і  $B'_z$  можна також знайти й за допомогою формул перетворення компонент тензора електромагнітного поля [85; 84; 82; 112].

Сила взаємодії між струмами в СВ  $K'$ , яка припадає на довжину  $\Delta l \sqrt{1-B^2}$  і дорівнює  $F'_y = F'_A - F'_E$ , де  $F'_A$  – це сила Ампера, що діє на струм  $I'$  з боку поля  $B'_z$ ;  $F'_E$  – сила електричної взаємодії між струмами.

Тобто в СВ  $K'$  ми вимірюємо силу, що припадає на той же відрізок, що й у СВ  $K$  ( $\Delta l = 1\text{см}$ ), але в СВ  $K'$  довжина його рівна  $\Delta l \sqrt{1-B^2} = \sqrt{1-B^2}$ ; якщо ж брати відрізок довжиною  $\Delta l' = 1\text{см}$  за вимірами СВ  $K'$ , то замість (5.63) ми одержимо  $F'_y = F_y$ .

Отже, урахувавши (5.61) и (5.62), одержуємо [96; 94; 100, с. 223]:

$$\begin{aligned}
F'_y &= \sqrt{1-B^2} \left( \frac{\mu_0 I'^2}{2a\pi} - \frac{\tau'^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a} \right) = \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a} \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\} \sqrt{1-B^2}, \quad (5.63)
\end{aligned}$$

у повній згоді з формулами перетворення компонентів 4-сили (1.20).

Таким чином, маємо релятивістсько-інваріантний опис силової взаємодії. Аналогічно може бути знайдено, що рух ЗЧ в електричному й магнітному полях (5.61) та (5.62) описується релятивістсько-коваріантним рівнянням.

Однак ми знайдемо таке ж співвідношення між силами, що діють між провідниками в системах  $K$  і  $K'$  ( $F'_y = F_y \sqrt{1-B^2}$ ) і в рамках традиційного підходу, тобто вважаючи, що провідники зі струмом «заряджені» тільки в тій системі відліку, відносно якої вони рухаються.

*Опис взаємодії двох паралельних ППС в традиційній моделі.* Дійсно, у традиційній моделі вважається, як вже відзначалося, що у ВСВ провідник зі струмом нейтральний, «незаряджений», а умова нейтральності

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\rho_-.$$

Сила магнітної взаємодії у ВСВ між двома паралельними ППС, що приходиться на одиницю довжини одного з них у такій моделі ви-

$$\text{значається класичною формулою } F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}.$$

Знайдемо силу взаємодії між ними в СВ  $K'$ .

У системі  $K'$ , відносно якої струми переміщуються уздовж своєї довжини зі швидкістю  $V$ , крім магнітної взаємодії струмів, буде мати місце й електрична взаємодія, тому що кожен провідник зі струмом у цій СВ характеризується об'ємною густиною заряду [100, с. 236]

$$\rho' = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{Vv\rho_-^0}{c^2 \sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}} = \frac{Vj_x}{c^2 \sqrt{1-B^2}},$$

де  $j_x = \frac{v\rho_-^0}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$  – густина струму в СВ  $K$ , відносно якої провідник

зі струмом нерухомий;  $v$  – швидкість дрейфу електронів провідності в

цій же СВ;  $\beta = \frac{v}{c}$ ;  $B = \frac{V}{c}$ ;  $v' = \frac{V-v}{1-B\beta}$  – швидкість електронів провідності в СВ  $K'$ .

Умова нейтральності провідника зі струмом у ВСВ визначається співвідношенням (5.34). Тому результуюча сила, що діє на ділянку провідника довжиною  $\Delta l \sqrt{1-B^2}$  одного зі струмів з боку іншого, дорівнює:

$$F' = \frac{\mu_0 I'}{2a\pi} \cdot I' \Delta l \sqrt{1-B^2} - \frac{\tau'}{2a\pi \cdot \epsilon_0} \tau' \Delta l \sqrt{1-B^2} =$$

$$= \frac{\Delta l \sqrt{1-B^2} \cdot \left( \mu_0 I'^2 - \frac{\tau'^2}{\epsilon_0} \right)}{2a\pi} = \frac{\mu_0 I^2 \Delta l \cdot \sqrt{1-B^2}}{2a\pi},$$

де 
$$I' = \left( \frac{\rho_+^0 V}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0 v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right) S = \frac{S v \rho_-^0}{\sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}} = \frac{I}{\sqrt{1-B^2}},$$

$$\tau' = \rho' S = \frac{V \cdot I}{c^2 \cdot \sqrt{(1-B^2)}}$$
 – відповідно, сила струму в провіднику та

лінійна густина заряду на цьому провіднику в СВ  $K'$ .

Тобто, одержали необхідне співвідношення між силами  $F'$  і  $F$ :

$$F' = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким чином, щоб одержати релятивістсько-інваріантний опис взаємодії струмів у рамках традиційного підходу необхідно мати наступний закон перетворення струму:

$$I' = \frac{I}{\sqrt{1-B^2}},$$
 де  $I$  – величина струму в системі відліку  $K$ .

Останнє, як неважко бачити, забезпечується також і рівністю

$$|\rho_+^0| = |\rho_-^0 (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}|,$$

незважаючи на те, що і густина заряду електронів провідності, і густина заряду позитивних іонів змінюються за однаковим законом при переході

до системи  $K'$  ( $\rho_-^0 = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ ;  $\rho_+^0 = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}}$ ).

Відзначимо, що співвідношення  $I' = \frac{I}{\sqrt{1-B^2}}$  одержуємо відразу з

формул перетворення компонент 4-струму [127, с. 275] за умови  $s_4 = 0$  або виходячи з означення сили струму [142, с. 138] (див. також п. 5.3).

Така подвійність при розв'язанні цієї задачі в рамках однакового наближення (однаковий ступінь грубості прийнятих моделей) викликає подив.

Але чи маємо в обох випадках (у СВ  $K$  і в СВ  $K'$ ) справу з фізичною відносністю? Варто розрізнити фізичну відносність як принцип «що стверджує існування відповідних явищ у різних системах відліку, і простою вимогою коваріантності рівнянь при переході від однієї СВ до іншої» [237, с. 245]. Спробуємо розібратися в цьому.

Для цього розглянемо електромагнітне поле, що створюється провідником зі струмом, у двох системах відліку: системі  $K$  (лабораторній) і СВ, пов'язаній з електронами провідності, –  $K_e$ . У системі  $K_e$ , у рамках рішення, пропонованого нами, маємо ситуацію ідентичну (з точністю до знаку рухомих та нерухомих ЗЧ) до такої в системі  $K$ . Дійсно, у СВ  $K$  позитивні іони нерухомі, а електрони провідності рухаються зі швидкістю  $v$ . У СВ  $K_e$  електрони нерухомі, а іони рухаються зі швидкістю  $v$ . Тому напруженість електричного поля  $E$  та індукція магнітного поля  $B$  мають у системі  $K$  таку ж величину, як і в системі  $K_e$  у силу симетричності умов у системах  $K$  та  $K_e$ .

У рамках же традиційного розв'язку [227; 234; 4; 179] у системі  $K$  електричне поле відсутнє, тому що виконується умова нейтральності провідника зі струмом (5.34)

$$|\rho_-| = |\rho_+^0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}| = |\rho_+^0|.$$

А в системі  $K_e$ , навпаки, електричне поле не дорівнює нулю:

$$E_e = \frac{\rho_+^0 S v^2}{c^2 2\pi \cdot a \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.64)$$

де  $a$  – віддаль точки поля від процесії заряджених частинок (від ППС).

Індукція магнітного поля в системі  $K$  дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{\rho_-^0 v S}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

а в системі  $K_e$  індукція магнітного поля:

$$B_e = \frac{\mu_0 \rho_-^0 v S}{2a\pi(1-\beta^2)},$$

тому що струм у системі  $K_e$  виявляється рівним  $I_e = \frac{I}{\sqrt{1-\beta^2}}$  (див.

вище, або [127, с. 275; 100]) незважаючи на те, що цей струм зумовлений тільки рухом іонів з такою ж за величиною швидкістю  $v$ , як і швидкість електронів у системі  $K$ .

Ці висновки можна проілюструвати з допомогою таких рисунків.

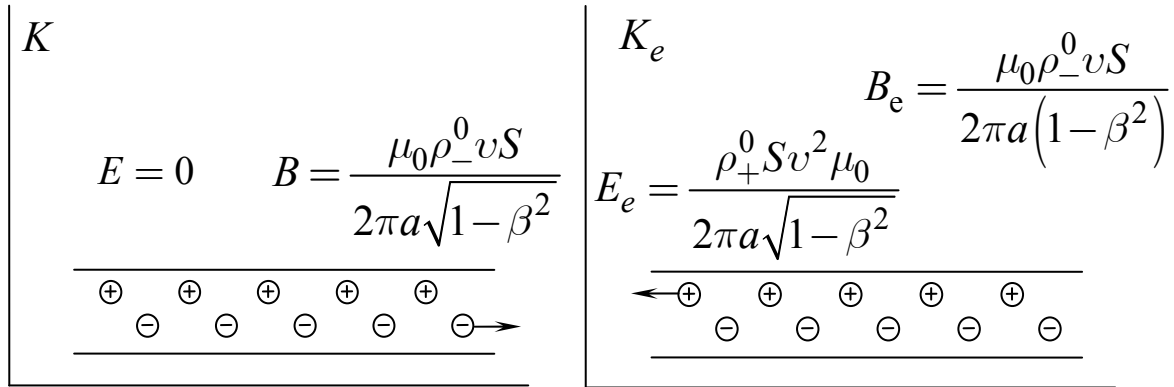


Рис. 5.21. ЕМП в СВ  $K$  та СВ  $K_e$  в традиційній моделі ППС

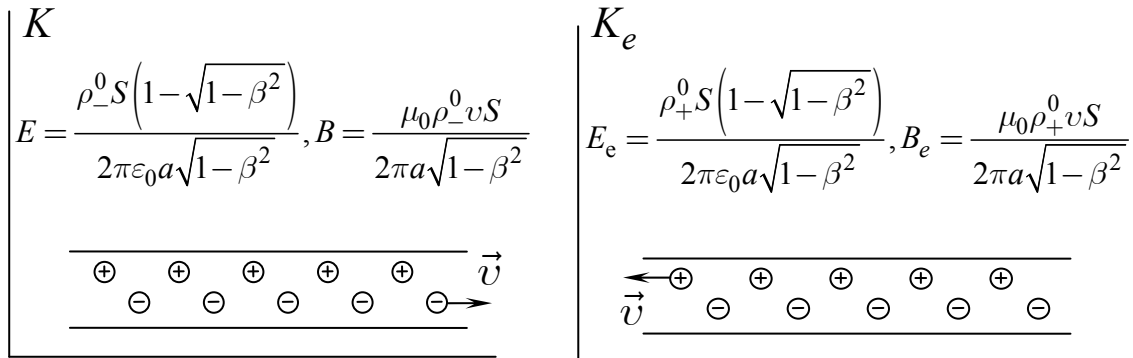


Рис. 5.22. ЕМП в СВ  $K$  та СВ  $K_e$  у моделі ППС, що аналізувалася нами в роботах [85; 108; 94; 96]

Системи  $K$  і  $K_e$  симетричні (ідентичні) з точністю до знаку ЗЧ, які рухаються в цих системах відліку. Очевидна нееквівалентність систем відліку  $K$  і  $K_e$  в моделі, яка широко використовується при вивченні електродинаміки.

З використанням умови нейтральності (5.37) маємо однакові характеристики ЕМП і в СВ  $K$  і у СВ  $K_e$ , рис. 5.22.

Порушення фізичної відносності особливо ясно видно при порівнянні сили, що діє на електрон, що рухається в системі  $K$  в напрямку



руху електронів провідності зі швидкістю  $v$ , рівною швидкості останніх, з одного боку, і сили діючої на позитрон у системі  $K_e$ , що рухається в цій системі відліку ( $K_e$ ) зі швидкістю  $v$  в напрямку руху іонів.

Маємо абсолютно ідентичні ситуації і в СВ  $K$ , і в СВ  $K_e$ . Традиційна точка зору дає для сили, що діє в СВ  $K$  на заряджену частинку із зарядом  $q$ :

$$F = qvB = qv \frac{\mu_0 \rho_-^0 v S}{2a\pi \sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.65)$$

А в системі  $K_e$  сила, що діє на позитрон, дорівнює:

$$F = qvB_e - qE_e = qv \cdot \frac{\mu_0 \rho_-^0 \cdot v \cdot S}{2a\pi(1-\beta^2)} - q \frac{\rho_+^0 S \cdot v^2}{c^2 2a\pi \cdot \varepsilon_0 \sqrt{1-\beta^2}} = 0, \quad (5.66)$$

незважаючи на те, що умови в системах  $K$  і  $K_e$  однакові (рис. 5.23). У цьому прикладі, здається, порушується можливість фізичної адаптації, що «є вирішальною умовою реалізації фізичної відносності» [238, с. 8, 9].

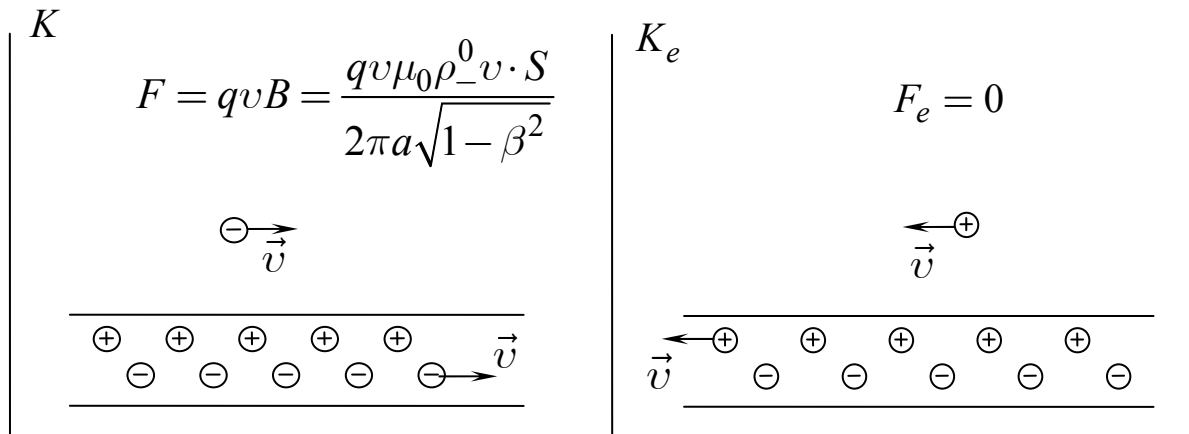


Рис. 5.23. Сила, що діє в ЕМП на електрон в СВ  $K$  та позитрон в СВ  $K_e$  у традиційній моделі ППС

Якщо ж прийняти модель провідника зі струмом, пропонувану нами [85; 94; 96; 108], то розв'язок цієї задачі в системах відліку  $K$  і  $K_e$  будуть тотожні (рис. 5.24) [108; 100].

Таким чином, при обговоренні релятивістського опису взаємодії двох ППС наведено ще декілька додаткових аргументів, основаних на принципах симетрії, простоти й певної краси.

Але для сили, що діє на одиницю довжини одного зі струмів, одержуємо, як уже відзначалося, погоджений розв'язок у рамках кожної з моделей.

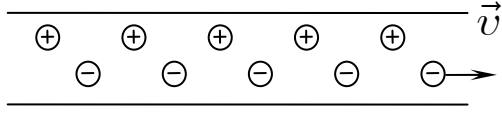
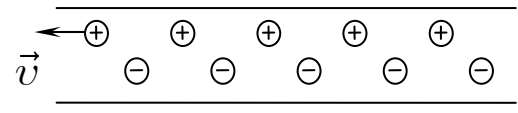
$K \quad F = \frac{\rho_-^0 S q (1 - \sqrt{1 - \beta^2})}{2\pi a \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}}$ <div style="text-align: center;"> <math>\ominus \rightarrow \vec{v}</math> </div> 	$K_e \quad F_e = \frac{\rho_+^0 S q (1 - \sqrt{1 - \beta^2})}{2\pi a \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}}$ <div style="text-align: center;"> <math>\leftarrow \oplus</math>  <math>\vec{v}</math> </div> 
--	---

Рис. 5.24. Сила, що діє в електричному полі на електрон в СВ  $K$  та позитрон у СВ  $K_e$  в моделі ППС, що обговорювалася нами в [85; 108; 94; 96]

### **Висновки до розділу 5**

1. Проведений аналіз навчально-методичної літератури щодо пояснення природи та властивостей СЕППС та стану руху тих поверхневих зарядів, які породжують СЕППС.

2. Виявлено, що протиріччя та суперечності в інтерпретації природи СЕППС стосуються стану руху поверхневих зарядів та потенційності чи непотенційності ЕППС.

3. З вихідних принципів знайдені вирази для напруженості електричних полів, що породжується лінійною процесією ЗЧ та рівномірно рухомою зарядженою ниткою й **показано, що ці поля непотенційні**.

4. Показана еквівалентність (у дану мить) ЕМП зарядженої нитки, що рухається рівномірно, та ППС такої ж довжини, дрейфова швидкість електронів провідності якого дорівнює швидкості руху нитки.

5. На основі ПВ спростовані деякі суперечності в інтерпретації потенційності СЕППС. Тобто в моделі ППС, яка широко використовується в дидактиці фізики, запропоноване пояснення дослідної неспостережуваності непотенційного електричного поля лінійної процесії ЗЧ.

6. Ще раз показано, що при аналізі будь-яких електродинамічних явищ використання нерелятивістських наближень (формул, виразів, співвідношень) є некоректним. Нехтування навіть мізерними релятивістськими ефектами при аналізі електромагнітних явищ приводить до «втрати» фізичного явища в теоретичному пізнанні [124; 138; 108; 142].

7. Проаналізовані фізичні причини, які можуть приводити до виникнення об'ємного заряду в металевому провіднику з постійним струмом.

8. Показано, що об'ємний заряд в ППС з'являється через пінч-ефект і в результаті релятивістських зміни густини заряду електронів провідності та іонів кристалічної ґратки при русі їх відносно довільної системи відліку.

9. Показано, що наявні в науково-методичній літературі пояснення причин появи «заряду провідника зі струмом» суперечливі й потребують уточнень.

10. Проведений критичний аналіз умови нейтральності ППС, яка прийнята в деяких посібниках з електродинаміки [227; 234] і яка пропонується в статті [176]. Показана їх суперечливість і некоректність у рамках загальноприйнятої моделі ППС.

11. Запропонована несуперечлива умова нейтральності ППС [85]

$$\rho_+^0 = -\rho_-^0,$$

згідно з якою нерухомий провідник зі струмом уже у ВСВ характеризується об'ємною густиною заряду, (5.38), [108; 85; 92; 90]

$$\rho = \rho_+^0 - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \sqrt{1-\beta^2} - 1 \right).$$

12. З методичною метою подано взаємоузгоджене обґрунтування формул перетворення об'ємних густин заряду і струму при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  з допомогою формул перетворення компонент 4-струму, та виходячи з фізичного змісту цих величин, у загальному випадку, коли

$$V \neq v \text{ і в рамках кожної з умов нейтральності ППС } \rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

та  $\rho_+^0 = -\rho_-^0$ .

13. Описані три способи знаходження сили взаємодії двох ППС, які «заряджені» у власній системі відліку.

14. На основі цих різних способів показано, що сила взаємодії паралельних ППС, яка припадає на одиницю довжини кожного з них, з однаково й протилежно один одному направленими струмами, відповідно, дорівнює, (5.53), (5.51)

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\};$$

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left( 1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}.$$

15. Таким чином, *релятивістський опис* взаємодії 2-х паралельних провідників зі струмами, використання моделей яких (модель Друде-Лорентца) є традиційним і природним у методиках викладання електромагнетизму у вищій та середній школах, на *основі загальних дидактичних принципів фундаментальності, послідовності та системності* [23;

54; 241; 222] ми одержали вираз для сили взаємодії, який відрізняється від загальноприйнятого,  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$ .

16. Показано, що використання неприродно ідеалізованих моделей ППС, які зустрічаються в деяких посібниках [200; 209], приводить до класичного виразу для сили взаємодії двох паралельних ППС,  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$ .

Можливо свідомо в цих посібниках вибрана така неприродно ідеалізована модель провідника зі струмом (див. рис. 5.18), яка через свою симетричність дозволяє уникнути розгляду питання про «заряд провідника зі струмом».

17. У багатьох навчальних посібниках з електродинаміки [178; 227; 200; 209; 64; 234; 224] використовують моделі, подібні зображенням на рис. 5.18, рис. 5.19, рис. 5.20.

З їх допомогою обґрунтовують фундаментальні властивості електромагнітного поля й багато важливих законів електромагнетизму, ці моделі активно експлуатуються дидактикою. Тому й аналіз їх слід проводити до кінця та послідовно на засадах спеціальної теорії відносності; **але тоді з неминучістю слід прийняти результати (5.51), (5.53), (5.56).**

18. Показано, що при переході від однієї системи відліку до іншої вирази для сили взаємодії між двома ППС з урахуванням релятивістського «заряду провідника зі струмом» перетворюються згідно з вимогами теорії відносності.

19. Показано також, що опис взаємодії двох паралельних ППС у традиційній моделі, коли у ВСВ провідник зі струмом нейтральний, «незаряджений», а умова нейтральності  $\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_-$ , є також

релятивістсько-інваріантним.

20. Інваріантність сили при переході з однієї СВ в іншу в межах традиційної моделі й моделі провідників зі струмом, запропонованої нами в [159; 201; 126; 219], і різні величини цієї сили зумовлені, відповідно, однаковою законом перетворення компонент тензора електромагнітного поля та різними значеннями його компонент (а в кінцевому рахунку різною величиною четвертої складової 4-струму) у кожній з моделей.

21. У результаті детального аналізу ЕМП, яке створюється ППС в традиційній і нашій моделі ППС, показано, що при використанні традиційної моделі ППС *порушується можливість фізичної адаптації, що «є вирішальною умовою реалізації фізичної відносності»* [238, с. 8–9].

22. Таким чином, при вивченні СТВ, електродинаміки та застосуванні методів СТВ слід розрізняти фізичну відносність, як принцип «що стверджує існування відповідних явищ у різних системах відліку, і про-

стою вимогою коваріантності рівнянь при переході від однієї СВ до іншої» [237, с. 245].

23. Може бути, що формули (5.51) і (5.53) не мають відношення до реальності через грубість моделі, яка їх породила. Але тоді треба пояснити, чому при будь-яких значеннях струму (при будь-яких значеннях величини  $\beta$ ), що протікає по провіднику, реалізується умова нейтральності:

$|\rho_+^0| = |\rho_-^0(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}|$ , якщо при відсутності струму  $|\rho_-^0| = |\rho_+^0|$ . Однак, це інше питання. Альтернативні точки зору на проблему «заряд провідника зі струмом» обговорювалися в роботах [85; 108; 176] та в пп. 5.3 і 5.4.

24. У методиці навчання фізики ця модель (рис. 5.19) активно експлуатується. Можливо ці апорії породжені не тільки недосконалістю моделі, а в першу чергу діалектикою самого процесу пізнання. Але й вивчення фізики повинне бути таким, щоб студент бачив ці суперечності, розумів необхідність появи їх і шукав шляхи їх подолання.

Тому при вивченні цього питання слід чітко формулювати задачу: яке явище аналізується, яка модель провідника зі струмом розглядається. Слід показати суперечності, що виникають при аналізі й поля провідника зі струмом, і взаємодії рухомого відносно провідника протона і провідника зі струмом.

25. Ми лише хотіли показати, що якщо бути послідовним і залишатися в згоді з принципом відносності в рамках прийнятого наближення, яке в дидактиці фізики часто використовується [227; 234; 200; 224; 153; 216; 209; 179] (див. також рис. 1, 2 роботи [94], або [127, с. 276–281], [100]), необхідно враховувати релятивістські поправки в електричному полі зарядів, що рухаються, («заряд провідника зі струмом»).

26. На основі дидактичних принципів науковості та методологічної спрямованості при вивченні електродинаміки, послідовності, зв'язку практичного досвіду з науковими положеннями нам вдається проілюструвати: «роботу» принципу відносності, принципу відповідності, сформулювати проблему вибору адекватної моделі, діалектику емпіричного й теоретичного в структурі фізичного знання і розуміння зв'язку теорії та експерименту.

І таким чином методику вивчення електродинаміки узгодити, скоординувати з методологією базової науки для формування в студентів світогляду й фізичного стилю мислення, уявлень про методи наукового пізнання.

27. Слід зазначити, що при описі взаємодії пропонованих моделей 2-х ППС ми не враховували інші фізичні причини появи додаткових взаємодій, крім тієї, що обговорюється і яка обумовлена сплюсненням електричного поля рухомої ЗЧ. А саме: електричну взаємодію між ППС, що виникає внаслідок появи на поверхні ППС поверхневих зарядів та електричну взаємодію, зумовлену пінч-ефектом в ППС [115].

## ДОДАТКИ

### Додаток А

**Формули перетворення проекцій сили при переході від однієї СВ до іншої.**

Виходячи із вимоги коваріантності рівняння руху при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  знайдемо формули, згідно з якими перетворюються компоненти сили при такому переході [178].

Для цього, згідно з означенням, запишемо спочатку компоненти сил в СВ  $K$  та СВ  $K'$ :

$$\begin{aligned} dp_x/dt &= F_x; \quad dp_y/dt = F_y; \quad dp_z/dt = F_z; \\ dp'_x/dt' &= F'_x; \quad dp'_y/dt' = F'_y; \quad dp'_z/dt' = F'_z. \end{aligned}$$

Використовуючи далі перетворення Лорентца та формули перетворення компонент імпульсу

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2) \cdot V}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z,$$

знаходимо

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left[ \frac{p'_x + (E'/c^2)V}{\sqrt{1 - B^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = \\ &= F'_x + \frac{Vv'_y/c^2}{1 + Vv'_x/c^2} F'_y + \frac{Vv'_z/c^2}{1 + Vv'_x/c^2} F'_z = \\ &= \frac{1}{1 + Vv'_x/c^2} \left\{ F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{v}') \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + Vv'_x/c^2} F'_y, \quad (\text{A.2})$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + Vv'_x/c^2} F'_z, \quad (\text{A.3})$$

де  $E'$  – повна енергія тіла в СВ  $K'$ ;  $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$  – швидкість тіла в СВ  $K'$ ;  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – швидкість цього ж тіла в СВ  $K$ .

$$\text{Ураховано також, що } \frac{dE'}{dt'} = \frac{dT'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{v}'.$$

У принципі, формулами (А.1), (А.2) та (А.3) питання вирішується.

**Але інколи важливо мати перетворення будь-якої компоненти сили з СВ  $K'$  в СВ  $K$ , у якій компоненти сили в СВ  $K$  були б виражені через швидкість  $v_x$  тіла, а не через швидкість цього тіла  $v'_x$  у СВ  $K'$ , як це відображено в (А.1), (А.2) та (А.3).**

З допомогою формул додавання швидкостей

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}$$

формула (А.1) набуває вигляду

$$F_x = F'_x + \frac{Vv_y/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_y + \frac{Vv_z/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z. \quad (\text{А.4})$$

Використовуючи прямі та обернені перетворення для ігрекової проекції швидкості

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-B^2}}{1-Vv_x/c^2},$$

перемножимо почленно ліві й праві частини цих рівностей та одержимо

$$\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right) \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) = 1 - B^2$$

Тоді з урахуванням останньої формули наші формули (А.2) та (А.3) набувають вигляду

$$F_y = \frac{1-Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_y; \quad (\text{А.5})$$

$$F_z = \frac{1-Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z. \quad (\text{А.6})$$

**Додаток Б**

*Графіки функцій*  $f_{\uparrow\downarrow}(v) = \left\{ \frac{2}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \right\}$ ,  $f_{\uparrow\uparrow}(v) = \left\{ 2 \left[ 1 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\beta^2} \right] \right\}$ , див. (5.54), (5.55)

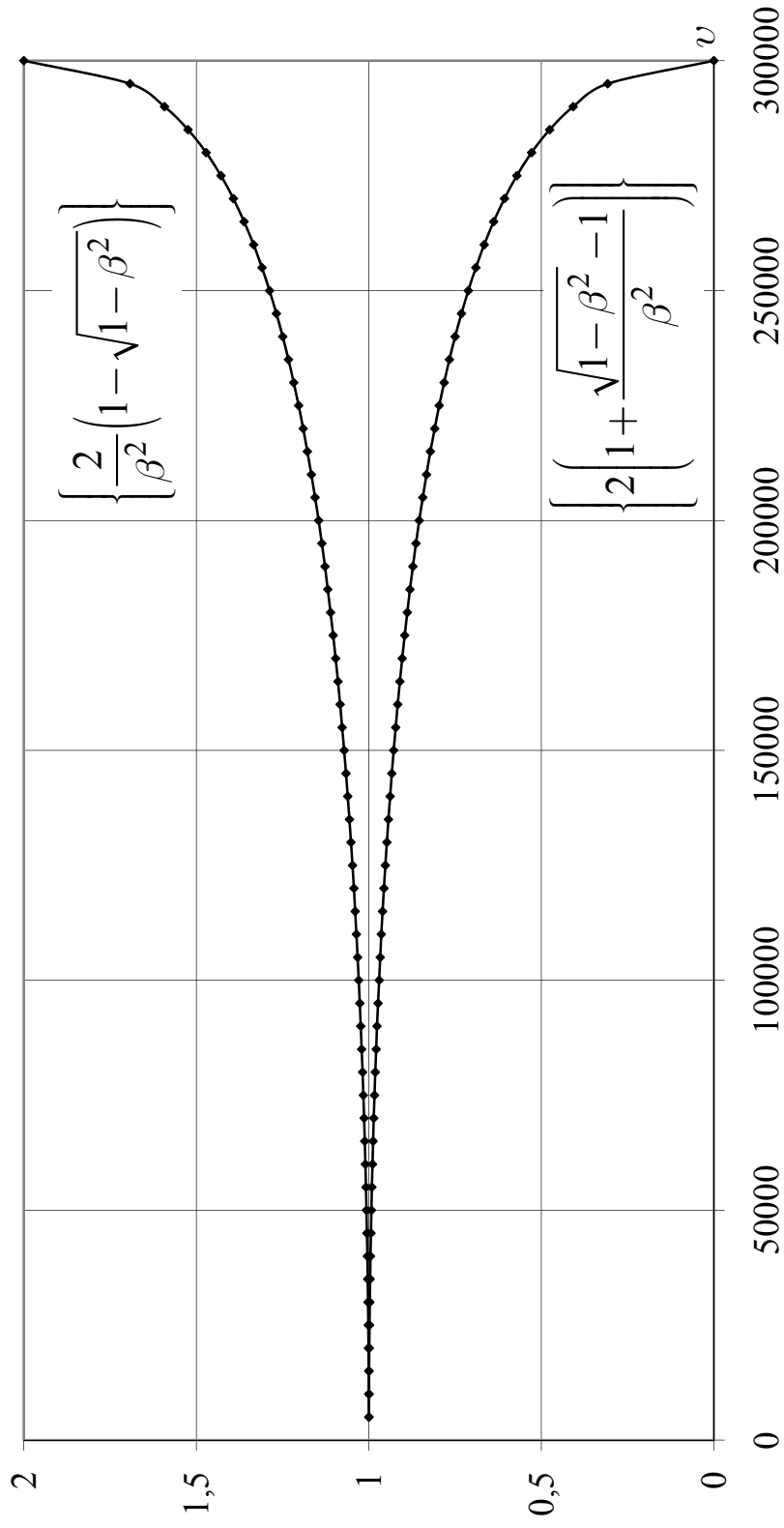


Рис. Б.1



## Додаток В

Графіки функцій, які часто зустрічаються у формулах релятивістської фізики

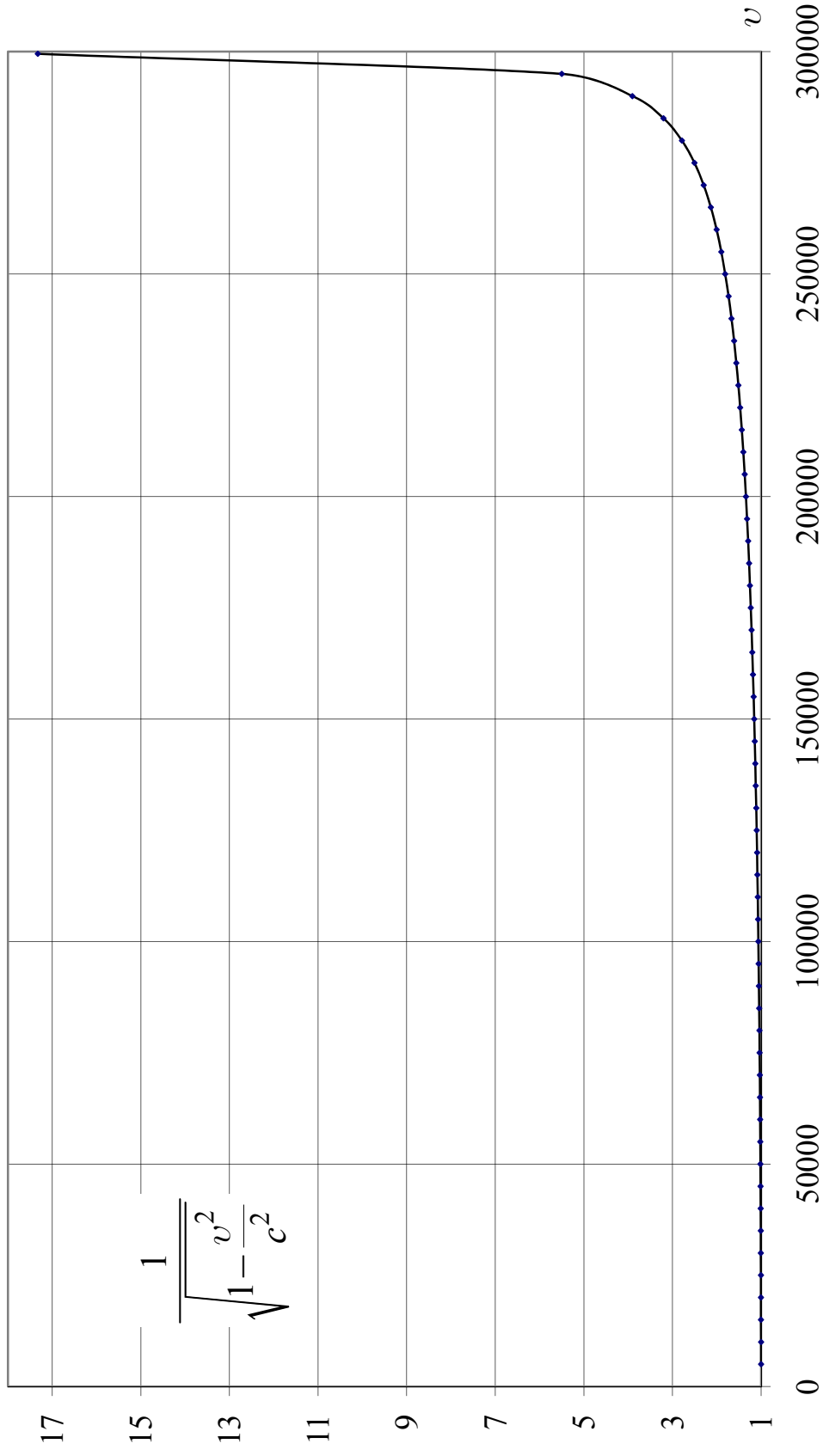


Рис. В.1

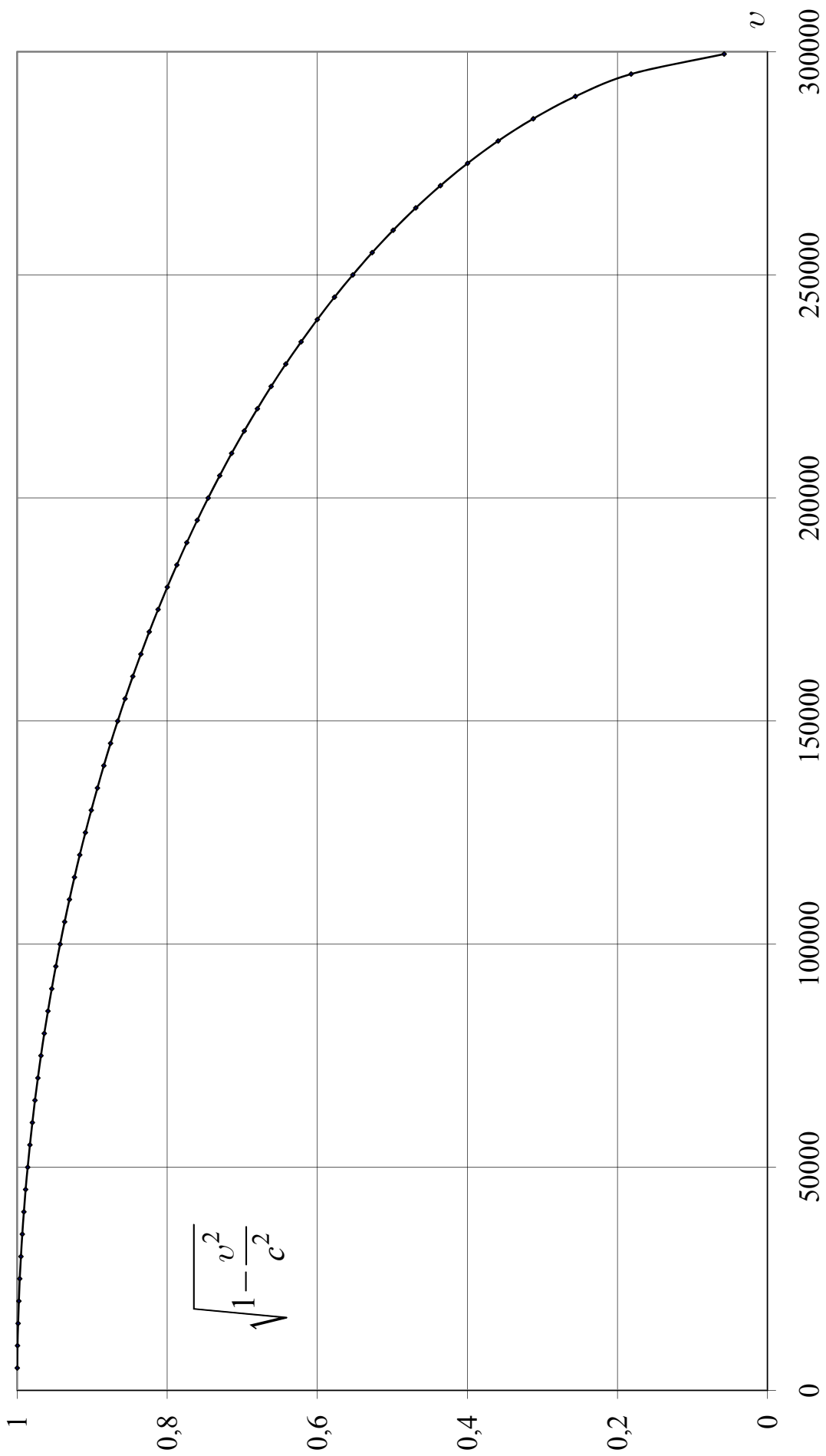


Рис. В.2

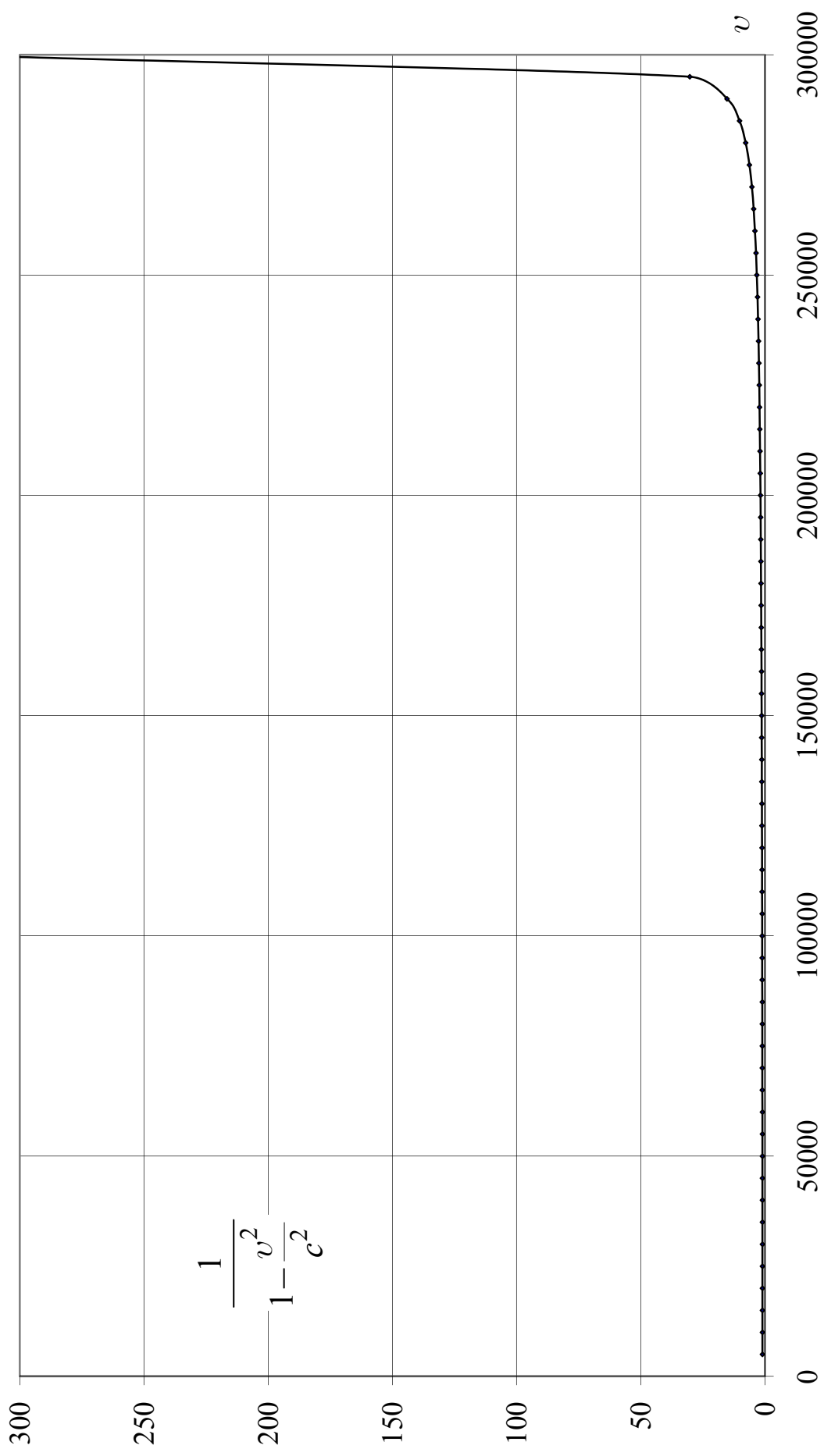


Рис. В.3

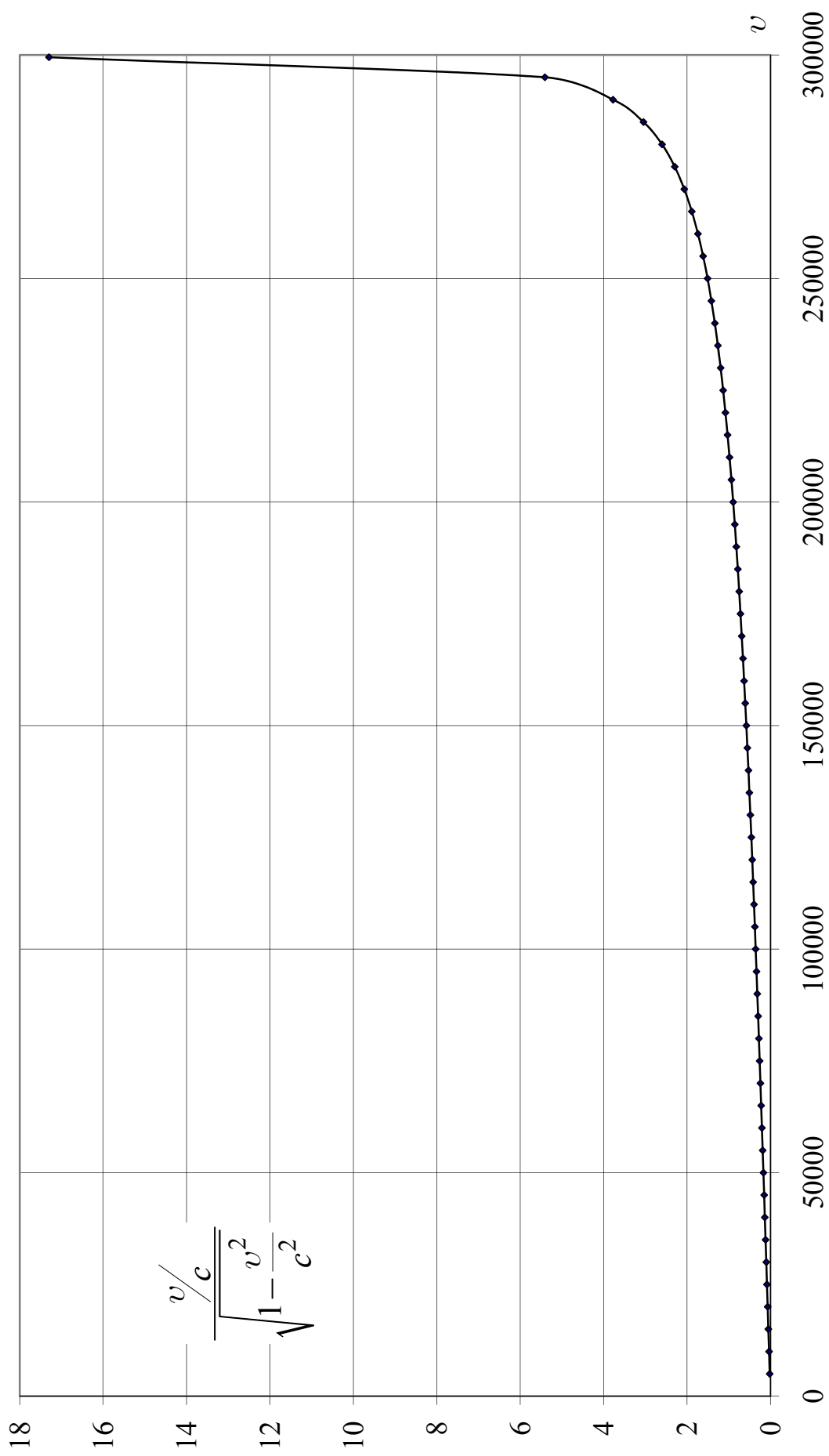


Рис. В.4

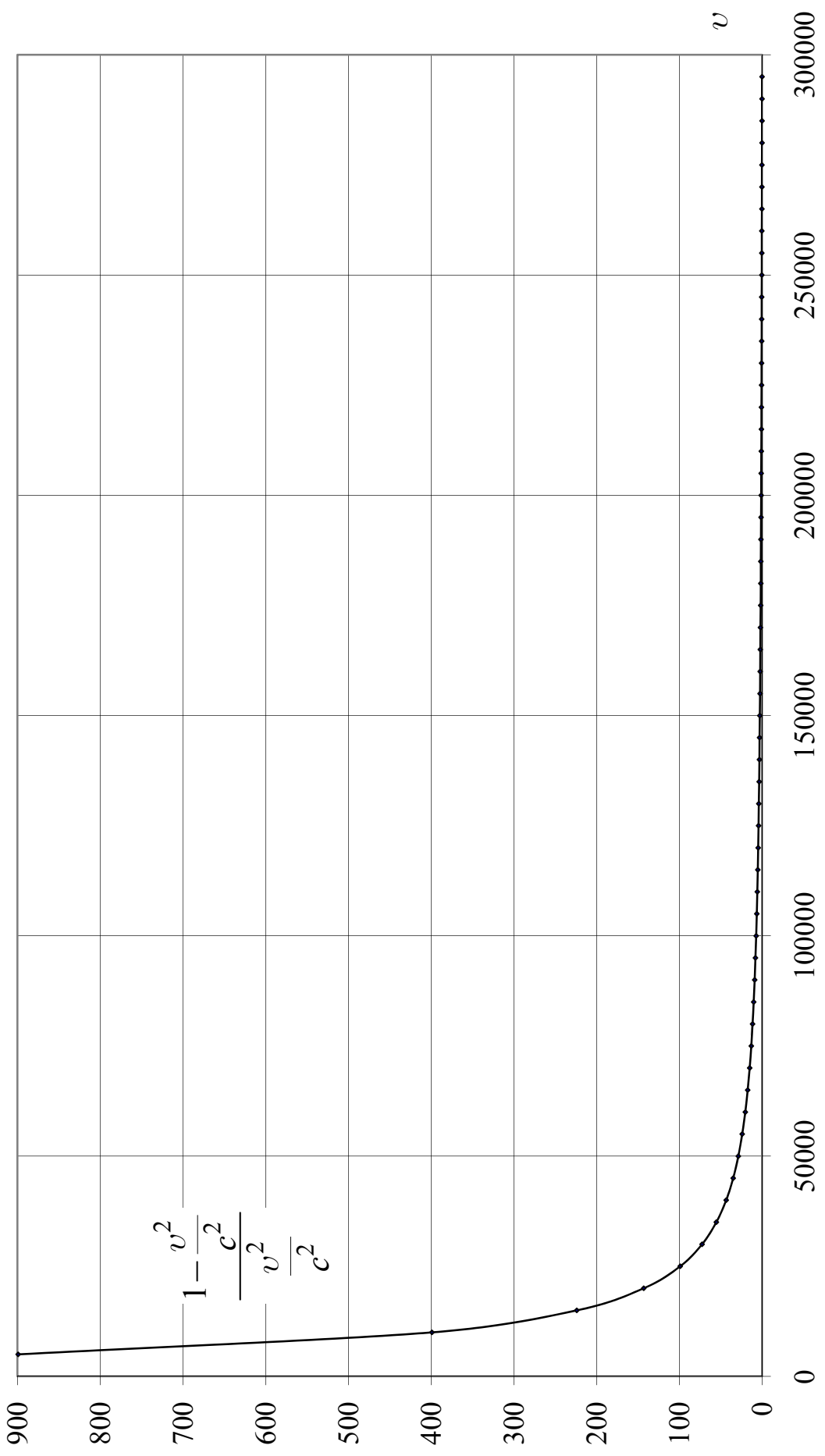


Рис. В.5

## ПІСЛЯМОВА

У роботі теоретично обґрунтовані основні закони електродинаміки на засадах спеціальної теорії відносності й дійсно фундаментального експериментального закону Кулона, розроблена науково-методична системи вивчення електродинаміки у вищих педагогічних навчальних закладах на послідовно релятивістських засадах, проведений критичний аналіз наявних у навчально-методичній літературі методик вивчення електродинаміки.

Показано, що традиційні методики вивчення електродинаміки переобтяжена зайвими «псевдофундаментальними» експериментальними законами. Фундамент електродинаміки – рівняння Максвелла – можуть бути обґрунтованими на основі значно меншого числа незалежних фундаментальних принципів. Згідно з А. Ейнштейном, «з двох теорій, що пояснюють сукупність достовірних дослідних фактів у певній галузі, перевагу слід віддати тій, яка вимагає менше незалежних припущень».

В основі безлічі проявів електромагнітних ефектів лежить невелике число фундаментальних принципів, і зокрема ПВ. Принцип відносності не є наслідком електромагнітних взаємодій (хоча історично саме так відбувалося становлення ПВ). Він сам є фундаментальним і основоположним при описі фізичної реальності. Ця ідея повинна пронизувати вивчення всіх розділів електродинаміки.

У цій методичній та методологічній концепціях вивчення електродинаміки закони Ампера, Біо-Савара, вираз для сили Лорентца, закон електромагнітної індукції **втрачають статус фундаментальних**, а є наслідками ПВ, принципу суперпозиції та закону Кулона.

Використання методології наукового пізнання при вивченні електромагнетизму в рамках нашої науково-методичної системи сприяє формуванню як фізичного стилю мислення, так і наукового світогляду.

Показано конкретне застосування принципів СТВ для фізичного аналізу багатьох електродинамічних задач; на засадах СТВ проведений фізичний і методичний аналіз значної кількості традиційних та оригінальних навчальних прикладів.

Відомо, що експериментальний і теоретичний методи пізнання у фізиці доповнюють один одного та сприяють розвитку й еволюції наукового знання. Ці методи знаходять конкретні втілення в такій науково-методичній системі вивчення електромагнетизму.

Програма Ейнштейна приваблює своєю красою, цілісністю, довершеністю, ліквідуючи фрагментарність знання й формуючи як фізичний стиль мислення, так і наукову картину світу. Аналіз електродинамічних модельних прикладів сприяє пізнанню сутності фізичних явищ.

Значне використання електродинамічних та комп'ютерних моделей (передбачене науково-методичною системою) ілюструє евристичну й дидактичну їх роль як у пізнанні, так і при вивченні електродинаміки.

У результаті власної навчальної діяльності в процесі аналізу таких моделей і задач у студентів формується фізичне мислення, розвивається критичне та образне мислення, підвищується (як свідчить наш досвід викладання електродинаміки) пізнавальна активність студентів завдяки новизні й нетрадиційній постановці завдань. Вони переконуються в тому, що в основі здавалося б різноманітних електромагнітних явищ лежить невелике число фундаментальних принципів, і усвідомлюють їх евристичну і методологічну значущість. При цьому реалізуються основні дидактичні функції, ілюструючи тим самим:

- принцип єдності фізичного знання;
- обґрунтованість концепції А. Ейнштейна, яка полягає в тому, що в основі фізики повинне лежати невелике число логічно незалежних основних понять і принципів, з яких логічним шляхом можна вивести інші другорядні поняття та співвідношення дисципліни: «Найважливіша мета будь-якої теорії полягає в тому, щоб цих основних елементів, що не зводяться до інших, було якомога менше, і щоб вони були якомога простіші, проте так, щоб це не виключало точного відображення того, що міститься в досліді... не пропустивши при цьому адекватного викладу чого-небудь, що міститься в досліді – ось головна мета будь-якої теорії» [258, с. 183];
- дидактичну реалізацію цієї «програми А. Ейнштейна» при вивченні електромагнетизму;
- застосування методів наукового теоретичного пізнання в дидактиці фізики для одержання нових науково-методичних результатів, і таким чином, показується роль і значення теоретичного пізнання;
- конкретну реалізацію дедуктивного методу;
- застосування фізичних принципів;
- пояснення механізму фізичних явищ (наприклад, механізм виникнення магнітного поля при проходженні електричного струму та ін.);
- процес формування критичного та фізичного мислення в студентів;
- діалектику емпіричного та теоретичного як в пізнанні, так і в навчанні;
- евристичне значення уявного експерименту та моделювання, бо одержані нові науково-методичні результати, які, таким чином, сприяють розкриттю природи фізичних явищ;
- застосування адекватного математичного апарату;
- адекватне сприйняття (засвоєння) фізичної термінології;
- роль і значення наближень у фізиці (принцип відповідності); показуючи, як утрачається сутність явища при нехтуванні релятивістськими поправками, хоча релятивістські ефекти настільки мізерні, що, здавалося б, не має ніякого сенсу їх враховувати, але якраз вони й відображають фізичну суть явища (**Розділ 2, Розділ 3**);

– широкі можливості для реалізації особистісно орієнтованого навчання, урахуваючи бажання й смаки студентів, дозуючи обсяг навчального матеріалу та керуючи їх навчально-науковою роботою.

Аналіз цих моделей підтвердив точку зору Ейнштейна про те, що тільки теорія визначає, що ж спостерігається в досліді. В. Гейзенберг так пояснює цю думку А. Ейнштейна: «Чи можна спостерігати дане явище чи ні – залежить від теорії. Саме теорія повинна встановити, що можна спостерігати, а що не можна» [34].

Усі дидактичні принципи вищої школи [23] також знаходять своє відображення в такій методиці.

Крім того, підтверджується та ілюструється фундаментальне положення, яке полягає в тому, що методологічні орієнтири, науково-методологічні засади творчості та результати наукових праць А. Ейнштейна співзвучні ідеям реформування вищої та середньої шкіл в Україні. А це значить, зокрема, що використання ідей СТВ і вивчення їх не просто бажані, а необхідні для того, щоб досягти мети, покликаної реорганізацією та реформуванням змісту фізичної освіти. «Розбудова системи освіти, її докорінне реформування, – наголошується в національній програмі «Освіта» (Україна XXI століття),— мають стати основою відтворення інтелектуального, духовного потенціалу народу, виходу вітчизняної науки, техніки й культури на світовий рівень, національне відродження, становлення державності та демократизації суспільства в Україні».

Створення методичної системи навчання електродинаміки на засадах генералізації знань навколо принципу відносності та поняття електромагнітного поля дозволяє розглядати всі розділи електродинаміки з єдиних позицій, методично поєднаних спільною ідеєю. Це сприятиме отриманню студентами узагальнених знань з електромагнетизму, систематизованих навколо спільного теоретичного ядра, полегшить усвідомлення як окремих законів електродинаміки, так і всього курсу електродинаміки в цілому, та сприятиме формуванню у свідомості студентів наукового стилю мислення та електромагнітної картини світу.

Послідовна реалізація цієї методичної системи дозволить проілюструвати використання методів наукового пізнання для одержання фізичних закономірностей, а не просто стверджувати «як показують досліді» для повідомлення готових законів і формул фізики.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акименко М. Методика вивчення явища електромагнітної індукції / М. Акименко, М. М. Дідович // Фізика та астрономія в школі. – 2001. – № 1. – С. 23–26.
2. Акчурин И. А. Эйнштейн и развитие понятия пространства / И. А. Акчурин, М. Д. Ахундов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 163–201.
3. Атанов Г.А. Деятельностный подход в обучении / Г. А. Атанов. – Донецк, «ЕАИ-пресс», 2001. – 160 с.
4. Беккер Р. Электронная теория / Р. Беккер. – Л. : ОНТИ, 1936. – 416 с.
5. Берштейн М. О письме Эйнштейна Жаку Адамару / М. Берштейн // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1967. – С. 30–44.
6. Благодаренко Л. Формування поняття «електромагнітне поле» при вивченні теми «Електромагнітні хвилі» в 11 класі / Л. Благодаренко // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 3. – С. 8–12.
7. Болотовский Б. М. О видимой форме бысто движущихся тел / Б. М. Болотовский // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1980–1981. – С. 142–168.
8. Болотовский Б. М. О видимой форме движущегося тела / Б. М. Болотовский // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1986–1990. – С. 279–328.
9. Болотовский Б. М. Оливер Хевисайд: мысли физика и расчеты математика / Б.М. Болотовский // Число и мысль. Сборник. Вып. 6 ; Под научной ред. академика Б.М. Кедрова. – М. : Знание, 1983. – С. 126–157.
10. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Современное состояние электродинамики движущихся сред (безграничные среды) / Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1974. – С. 179–275.
11. Борисенко А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. – М. : Высшая школа, 1966. – 252 с.
12. Брагинский В. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах / В. Б. Брагинский, А. Б. Манукин. – М. : Наука, 1974. – 152 с.
13. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами / В. Б. Брагинский. – М. : Наука, 1970. – 136 с.
14. Бредов М. М. Классическая электродинамика / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. – М. : Наука, 1985. – 400 с.
15. Бугаенко Г. А. О взаимосвязи электрического и магнитного полей / Г. А. Бугаенко // Фізика в школі. – 1971. – № 6. – С. 44–47.
16. Бугаенко Г. О. Про електричне і магнітне поля як форми прояву єдиного електромагнітного поля / Г. О. Бугаенко // Удосконалення форм і методів вивчення фізики : зб. статей. – К. : Радянська школа, 1982. – С. 79–83.
17. Бугайов О. І. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів : Фізика : 7–11 класи / О. І. Бугайов, Л. А. Закота, Д. Я. Костюкевич, М. Т. Мартинюк. – К. : Шкільний світ, 2001. – 96 с.
18. Бугайов О. І. Сучасний погляд на розвиток наочності навчання фізики / О. І. Бугайов // Вісник Чернігівського державного педагогічного універси-

- тету ім. Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 9. – Чернігів : ЧДПУ, 2001. – С. 5–8.
19. Будний Б. Є. Теоретичні основи формування в учнів системи фундаментальних фізичних понять : автореф. дис. ... докт. пед. наук : 13.00.02 – методика навчання фізики / Б. Є. Будний ; Укр. держ. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К. : 1997. – 50 с.
  20. Бурак В. І. Вивчення електромагнітної індукції на рівні її польового трактування у вищих навчальних закладах / В. І. Бурак, Є. І. Тіщенко, О. С. Мочеус // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. VII : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2008. – С. 210–214.
  21. Буряк В. К. Ідеї теорії відносності при вивченні електродинаміки / В. К. Буряк, О. А. Коновал, О. В. Сергеев // «Сучасні тенденції розвитку природничо-математичної освіти» : матеріали міжнар. конф. – Херсон : Вид-во Херсонського держ. пед. ун-ту, 2002. – С. 155–160.
  22. Буховцев Б. Б. Фізика : підруч. для 9 кл. серед. шк. \ Б. Б. Буховцев, Ю. Л. Климентович, Г. Я. Мякишев. – К. : Радянська школа, 1982. – 254 с.
  23. Бушок Г. Ф. Методика преподавания общей физики в высшей школе / Г. Ф. Бушок, Е. Ф. Венгер. – К. : Такі справи, 2000. – 415 с.
  24. Вакарчук І. О. Квантова механіка: Підручник. – 2-ге вид., доп. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 784с.
  25. Ванеев А. А. Преподавание физики в 9 классе : пособ. для учителей / А. А. Ванеев, Є. Д. Корж, В. П. Орехов. – 2-е изд., перераб. – М. : Просвещение. 1980. – 176 с.
  26. Венцковський С. О. Можливість використання новітніх технологій в умовах реалізації інноваційних методик / С. О. Венцковський, О. А. Коновал // Актуальні проблеми гуманітарної освіти: збірник наукових праць ; за заг. ред. д-ра пед. наук, проф. Г. П. Оникович та канд. фіз.-мат. н., проф. А. М. Ломаковича. – Київ-Кременець : РВЦ КОГП ім. Тараса Шевченка. – 2004. – С. 201–203.
  27. Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Е. Вигнер // Успехи физических наук. – 1968. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 535–546.
  28. Визгин В. П. Потенциалы и напряженности в теории электромагнитного поля / В. П. Визгин // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – С. 15–27.
  29. Вознюк С. Ю. Формування поняття «електромагнітне поле» на основі фундаментальних фізичних понять / С. Ю. Вознюк, В. І. Кульчицький // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – № 4. – С. 43–47.
  30. Вольштейн С. Л. Элементы Максвелловской электродинамики в школе / С. Л. Вольштейн. – Минск : Народная асвета, 1973. – 165 с.
  31. Воробьев И. И. Теория относительности в задачах / И. И. Воробьев. – М. : Наука, 1989. – 174 с.
  32. Выготский Л. С. Педагогическая психология / Л. С. Выготский ; под ред. В. В. Давыдова. – М. : Педагогика, 1991. – 480 с.

33. Гайдуков Г. Н., Абрамов А. А. Об интерпретации закона сохранения энергии при движении точечного заряда в однородном электрическом поле / Г. Н. Гайдуков, А. А. Абрамов // Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178. – №. 2. – С. 171–174.
34. Гейзенберг В. Теория, критика, философия / В. Гейзенберг // Успехи физических наук. – 1970. – Т. 102. – С. 303.
35. Гинзбург В. Л. О физике и астрофизике: Статьи и выступления / В. Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1985. – 400 с.
36. Глазунов А. Т. Методика преподавания физики в средней школе : Электродинамика нестационарных явлений. Квантовая физика : пособ. для учителя / А. Т. Глазунов, И. И. Нурминский, А. А. Пинский. – М. : Просвещение, 1989. – 272 с.
37. Голин Г. М. Вопросы методологии физики в курсе средней школы: кн. для учителя / Г. М. Голин. – М. : Просвещение, 1987. – 127 с.
38. Гончаренко С. У. Принцип фундаменталізації освіти / С. У. Гончаренко // Наукові записки. – Серія : Педагогічні науки. – Вип. 55. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. — С. 3–8.
39. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / С. У. Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 376 с.
40. Гончаренко С. У. Фізика, 10 кл. : пробн. навч. посіб. для ліцеїв та кл. природн.-наук. профілю / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 1998. – 445 с.
41. Гончаренко С. У. Фізика, 11 кл.: проб. навч. посіб. для ліцеїв та класів природничо-наукового профілю / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 1995. – 430 с.
42. Гончаренко С. У. Формування наукового світогляду учнів під час вивчення фізики : посібник для вчителя / С. У. Гончаренко. – К. : Рад. шк., 1990. – 208 с.
43. Грибанов Д. П. Философское мировоззрение Эйнштейна / Д.П. Грибанов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 7–45.
44. Грищук В. В. Врахування релятивістських ефектів при взаємодії між паралельними провідниками зі струмом / В. В. Грищук, М. Т. Мордовець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 23. – Чернігів : ЧДПУ, 2004. – С. 180–181.
45. Грищук В. В. Релятивістські ефекти при взаємодії електричних зарядів та струмів / В. В. Грищук, М. Т. Мордовець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 13 : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2002. – С. 180–181.
46. Грішнова О. Розвиток вищої освіти в Україні: тенденції, проблеми та шляхи їх вирішення / О. Грішнова // Вища школа. – 2001. – № 2-3. – С. 22–23.
47. Давиденко А. А. Методика розвитку творчих здібностей учнів у процесі навчання фізики (теоретичні основи) / А. А. Давиденко. – Ніжин : ТОВ Вид-во «Аспект поліграф», 2004. – 264 с.
48. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1966. – 228 с.
49. Державна національна програма «Освіта» (Україна 21 ст.). – К. : Освіта, 1993.
50. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Фізика та астрономія в школі. – 2004. – № 3. – С. 2–6.

51. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Освіта України. – № 1–2 (400), 20 січня 2004. – С. 1–13.
52. Державні стандарти базової і повної середньої освіти. Проект // Освіта України. – № 1–2 (400), 14 січня 2003. – С. 2–14.
53. Детлаф А. А. Курс фізики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : ВШ, 1999. – 771 с.
54. Дидактичні проблеми фізичної освіти в Україні : матеріали науково-практичної конференції. – Чернігів : Чернігівський державний педагогічний університет ім. Т. Г. Шевченка. 1998. – 174 с.
55. Дідович М. М. Систематизація знань учнів при формуванні поняття електромагнітного поля / М. М. Дідович, С. М. Мощенко // Дидактичні проблеми фізичної освіти в Україні : матеріали наук.-практ. конф. – Чернігів : ЧДПУ Т. Г. Шевченка. 1998. – С. 53–57.
56. Дідович М. М. Формування поняття вихрового електричного поля / М. М. Дідович // Фізика та астрономія в школі. – 2005. – № 4. – С. 30–32.
57. Електрика та магнетизм : навчально-методичний посібник для самостійної роботи / М. І. Шут, О. М. Сташкевич, А. В. Касперський, Т. Г. Січкарь ; за заг. ред. М. І. Шута. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. – 236 с.
58. Єчкало Ю. В. Деякі шляхи удосконалення методики викладання шкільного курсу фізики / Ю. В. Єчкало, О. А. Коновал, І. О. Теплицький // Вісник Житомирського державного педагогічного університету. – Вип. 14. – Житомир : РВВ ЖДПУ ім. І. Франка, 2004. – С. 72–75.
59. Єчкало Ю. В. Модернізація формування поняття «електромагнітне поле» / Ю. В. Єчкало, О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. 4 : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2004. – С. 173–177.
60. Желеховський А. В. Курс фізики. – Вип. 3 : Електрика. – Харків ; Київ : Держ. наук.-техн. вид-во України ; ОНТИ-НКТП, 1934. – 340 с.
61. Зисман Г. А. Курс общей физики / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – Т. II : Электричество и магнетизм. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
62. Зисман Г. А. Курс общей физики : в 3 т. / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – Т. III : Оптика, физика атомов и молекул, физика атомного ядра и микрочастиц. – М. : Наука, 1972. – 496 с.
63. Иродов И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – 6-е изд. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 312 с.
64. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1991. – 288 с.
65. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. – 4-е изд., испр. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 320 с. : ил.
66. Калапуша Л. Р. Моделювання при вивченні фізики / Л. Р. Калапуша. – К. : Рад. школа, 1982. – 158с.
67. Калашников С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М. : Наука, 1977. – 592 с.
68. Калашников С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М. : Наука, 1964. – 666 с.
69. Каменецкий С. Е. Электродинамика в курсе физики средней школы : пособие для учителей / С. Е. Каменецкий, И. Г. Пустыльник. – М. : Просвещение, 1978. – 127 с.

70. Каменецкий С. Е. Проблемы изучения основ электродинамики в курсе физики средней школы : автореф. дисс. ... докт. пед. наук : 13.00.02 – метод. препод. физики / С. Е. Каменецкий. – М. : 1978 – 44 с.
71. Каплун І. С. Імітаційне моделювання явища відносності електричного та магнітного полів / І. С. Каплун, О. А. Коновал // Комп'ютерне моделювання в освіті : матеріали Всеукраїнського науково-методичного семінару. – Кривий Ріг : КДПУ, 2005. – С. 33–34.
72. Каплун І. С. Комп'ютерне моделювання відносності електричного і магнітного полів / І. С. Каплун, О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. V : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2005. – С. 139–146.
73. Карцев В. П. Приключения великих уравнений / В. П. Карцев. – М : Знание, 1986.
74. Касперський А. В. Електрика та магнетизм. Збірник задач, вправ і тестів. Практикум : навч.-метод. посіб. для самостійної роботи / А. В. Касперський, І. Т. Богданов. – К. : Четверта хвиля, 2006. – 248 с.
75. Касперський А.В. Система формування знань з радіоелектроніки у середній та вищій школах / А. В. Касперський. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. – 325с.
76. Кемпфер Ф. Путь в современную физику : пер. с англ. Ю. Г. Рудого / Ф. Кемпфер : под ред. и с предисл. А. А. Гусева. – М. : Мир, 1972. – 375 с. : ил.
77. Кирсанов В. С. Максвелл: создание электромагнитной теории / В. С. Кирсанов // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – С. 62.
78. Кікоїн І. К. Фізика : підруч. для 9 кл. середн. шк. / І. К. Кікоїн, А. К. Кікоїн. – К. : Рад. шк., 1992. – 208 с.
79. Клименюк А. В. Методология и методика педагогического исследования. Постановка цели и задач исследования : учеб. пособ. / А. В. Клименюк, А. А. Калита, Э. П. Бережная. – К. : КГПИ им. А. М. Горького, 1988. – 100 с.
80. Коновал А. А. Вывод уравнения Максвелла для токов смещения / А. А. Коновал. – 9 с. – Стаття деп. в УкрНИИНТИ. № 2693-Ук88.
81. Коновал А. А. Дидактическое значение адекватных электродинамических моделей / А. А. Коновал, П. И. Самойленко, А. В. Сергеев // Среднее профессиональное образование : прил. к ежемесячному теоретическому и научн.-метод. журн. «СПО». – 2002. – № 4. – С. 136–145.
82. Коновал А. А. Закон Био-Савара для зарядов, движущихся с релятивистскими скоростями / А. А. Коновал // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освітній діяльності : зб. наук. пр. – Кривий Ріг : Вид. від. КДПУ, 1999. – С. 147–148.
83. Коновал А. А. Закон полного тока для зарядов, движущихся с релятивистскими скоростями / А. А. Коновал. – 9 с. – Стаття деп. в УкрНИИНТИ, № 1509-Ук89 от 6.06.89.
84. Коновал А. А. Замечание к закону Био-Савара / А. А. Коновал, В. П. Панов. – 10 с. – Стаття деп. в ВИНТИ, рег. № 4316-80.
85. Коновал А. А. Заряжен ли проводник, по которому протекает ток? / А. А. Коновал, В. П. Панов. – 12 с. – Стаття депонирована в ВИНТИ, рег. № 4318-80.

86. Коновал А. А. Магнитное поле как релятивистский эффект / А. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. I : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. КДПУ, 2001. – С. 173–175.
87. Коновал А. А. Модель управления процессом обучения физике: дидактический аспект / А. А. Коновал, П. И. Самойленко, А. В. Сергеев // Специалист. – 2003. – № 4. – С. 35–37.
88. Коновал А. А. Модель управления процессом обучения физике: психолого-педагогический аспект / А. А. Коновал, П. И. Самойленко, А. В. Сергеев // Специалист. – 2003. – № 3. – С. 27–28.
89. Коновал А. А. О методике введения понятия магнитного поля / А. А. Коновал. – Статья деп. в НИИПВШ №170-84.
90. Коновал А. А. О так называемом парадоксе Фейнмана / А. А. Коновал, В. П. Панов. – Статья деп. в ВИНТИ рег. № 4317-80.
91. Коновал А. А. О физических причинах возникновения электрического поля проводника с током / А. А. Коновал // Модульные технологии обучения в системе непрерывного профессионального образования (теория и практика) : сб. науч. тр. X Международной научно-методической конференции, Москва, 23–24 марта 2004 г. – Вып. 8. – Ч. 1 / ред. кол. : В. В. Осипов, П. И. Самойленко, Ю. В. Еремин, А. Е. Краснов, В. Д. Малкина, В. Ф. Дмитриева. – С. 171–178.
92. Коновал А. А. Об объемном заряде проводника с током / А. А. Коновал // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освітній діяльності : зб. наук. пр. – Кривий Ріг : Вид. від. КДПУ, 1999. – С. 143–146.
93. Коновал А. А. Психолого-педагогические условия подготовки учителя физики к реализации личностно-ориентированного обучения / А. А. Коновал, А. В. Сергеев // Сучасні технології в науці та освіті : зб. наук. пр. : у 3-х томах. – Т. 2. – Кривий Ріг : Вид. від. КДПУ, 2003. – С. 82-89.
94. Коновал А. А. Релятивистская интерпретация взаимодействия двух длинных токов / А. А. Коновал. – 12 с. – Статья деп. в УкрНИИНТИ, рег. № 4, Ук-Д84.
95. Коновал А. А. Релятивистская электродинамика и относительность электрического и магнитного полей : метод. пособ. / А. А. Коновал. – Кривой рог : КГПИ, 1978. – 24 с.
96. Коновал А. А. Релятивистски инвариантное описание взаимодействия 2-х токов / А. А. Коновал. – 10 с. – Статья деп. в УкрНИИНТИ, рег. № 1260 Ук-84 от 17.04.84.
97. Коновал О. А. Векторний добуток векторів в курсі фізики середньої школи / О. А. Коновал // Фізика та астрономія в школі. – 2004. – № 3. – С. 45–48.
98. Коновал О. А. Використання програмного модуля «Компонент» для моделювання відносності електричного і магнітного полів / О. А. Коновал, О. В. Вершинін, О. В. Зуєв // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г. Шевченка: зб. наук. пр. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 57. – Чернігів: ЧДПУ, 2008. – С. 189–195.
99. Коновал О. А. Відносність електричного і магнітного полів : Методичні аспекти / О. А. Коновал, Д. В. Рябоконт // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип 3 : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія

- та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – С. 154–167.
100. Коновал О. А. Відносність електричного і магнітного полів : монографічний навч. посіб. для студ. вищих навч. закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 248 с. : іл.
  101. Коновал О. А. Властивості і моделювання електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки / О. А. Коновал, О. В. Швидкий // Матеріали ІХ Всеукраїнської наукової конференції «Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики» // уклад. : М. І. Шут, Т. Г. Січкач. – К. : НПУ, 2004. – С. 52.
  102. Коновал О. А. Властивості струмів зміщення / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : у 3-х т. : зб. наук. пр. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НацМетАУ, 2002. – С. 138–145.
  103. Коновал О. А. Дидактичне та евристичне значення деяких моделей при вивченні електродинаміки / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 46. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2002. – С. 71–76.
  104. Коновал О. А. До питання про зміст та методику вивчення теми «Елементи теорії відносності» / О. А. Коновал // Зб. наук. пр. : спеціальний випуск / гол. ред. В. Г. Кузь. – К. : Наук. світ, 2003. – С. 236–242.
  105. Коновал О. А. Додаткові зауваження до закону Біо-Савара та методики його вивчення у курсі фізики ВНЗ / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 59. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2005. – С. 263–270.
  106. Коновал О. А. Дослід Трoutона-Нобля в системі парадоксів теорії відносності / О. А. Коновал, О. В. Швидкий // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. V : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2005. – С. 147–154.
  107. Коновал О. А. Еволюція поглядів щодо методики формування уявлень про електромагнітне поле у школярів / О. А. Коновал, Ю. В. Єчкало // Фізика та астрономія в школі. – 2004. – № 1. – С. 28–30.
  108. Коновал О. А. Електричне поле провідника зі струмом / О. А. Коновал // Зб. наук. пр. Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту. – Серія педагогічна : «Дидактика дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей». – Вип. 8. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПУ, інформ.-вид. від., 2002. – С. 265–275.
  109. Коновал О. А. Електромагнітна індукція при обертанні магнетиків / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 77. – Ч. 2. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – С. 208–214.
  110. Коновал О. А. Елементарне обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля / О. А. Коновал, Ю. В. Єчкало // Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова : зб. наук. ст. / укл. : П. В. Дмитренко, Л. Л. Макаренко, В. Д. Сиротюк. – Вип. LIII (53). – К. : НПУ, 2003. – С. 143–148.

111. Коновал О. А. Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки: навч. посіб для студ. вищ. пед. навч. закл. / О. А. Коновал ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. – 158 с. : іл.
112. Коновал О. А. Закон Біо-Савара в релятивістській формі / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія : Педагогічні науки. – Вип. 42. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2002. – С. 159–165.
113. Коновал О. А. Зауваження щодо методики вивчення закону Біо-Савара / О. А. Коновал // Особливості підготовки вчителів природничо-математичних дисциплін в умовах переходу школи на профільне навчання : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції / уклад. В. Д. Шарко. – Херсон : «Олді-Плюс», 2004. – С. 51.
114. Коновал О. А. Зміна в часі потоку векторного поля через рухому поверхню та фундаментальні закони електродинаміки / О. А. Коновал, М. А. Слюсаренко // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 46 : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2007. – С. 48–53.
115. Коновал О. А. Інноваційна методика вивчення теми «Магнітне поле» в фізико-математичних класах середніх навчальних закладів / О. А. Коновал // Вересень. – 2002. – № 4 (22). – С. 66–71.
116. Коновал О. А. Комп'ютерна програма для моделювання відносності електричного і магнітного полів / О. А. Коновал, О. В. Вершинін, О. В. Зуєв // Наукові записки. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 72. – Ч. 1. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2007. – С. 184–191.
117. Коновал О. А. Комп'ютерне моделювання електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки / О. А. Коновал, О. В. Швидкий // Комп'ютерне моделювання в освіті : матеріали Всеукраїнського науково-методичного семінару. – Кривий Ріг : КДПУ, 2005. – С. 37–38.
118. Коновал О. А. Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки / О. А. Коновал. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2006. – 202 с. : іл.
119. Коновал О. А. Методика застосування узагальненого закону електромагнітної індукції / О. А. Коновал, А. В. Касперський // Інновації в навчанні фізиці та дисциплін технологічної освітньої галузі: міжнародний та вітчизняний досвід : зб. наук. праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. – Серія педагогічна. – Кам'янець-Подільський: К-ПДПУ, ІВВ, 2008. – Вип. 14. – С. 143–147.
120. Коновал О. А. Методика побудови зображень в лівих середовищах / О. А. Коновал, Г. П. Половина, І. В. Тополя // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 36 : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2006. – С. 106–114.
121. Коновал О. А. Механізм виникнення магнітного поля при русі протонів / О. А. Коновал // Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін : Наук. зап. Рівненського держ. гуманіт. ун-ту : зб. наук.-метод. пр. – Вип. 4. – Рівне : РДГУ, 2002. – С. 123–125.



122. Коновал О. А. Моделювання струмів зміщення / О. А. Коновал, О. М. Степанюк // Сучасні технології в науці та освіті : зб. наук. пр. : у 3-х т. – Т. 3. – Кривий Ріг : Видавничий відділ КДПУ, 2003. – С. 50–54.
123. Коновал О. А. Необхідність використання деяких властивостей векторного добутку векторів в курсі фізики середніх навчальних закладів / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія : Педагогічні науки. – Вип. 46. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2002. – С. 148–156.
124. Коновал О. А. Непотенціальність електричного поля рухомої зарядженої частинки і закон електромагнітної індукції / О. А. Коновал // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 13. : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2002. – С. 192–195.
125. Коновал О. А. Обґрунтування рівнянь Максвелла на основі принципу відносності / О. А. Коновал // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету – Серія педагогічна : «Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії». – Вип. 9. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПУ, ІВВ, 2003. – С. 101–103.
126. Коновал О. А. Основи електродинаміки / О. А. Коновал. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2007. – 378 с.
127. Коновал О. А. Основи електродинаміки : навч. посіб для студ. вищ. пед. навч. закл. / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл.
128. Коновал О. А. Основні положення інноваційної методики вивчення електромагнетизму в ВНЗ та СНЗ / О. А. Коновал // Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. пр. – Вип. 5 / за заг. ред. д-ра пед. наук, проф. Буряка В. К. – Кривий Ріг : КДПУ, 2003. – С. 78–80.
129. Коновал О. А. Особливості методики формування поняття «магнітне поле» / О. А. Коновал // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 3. – С. 24–26.
130. Коновал О. А. Принцип близькодії і магнітне поле постійних струмів в курсі фізики ВНЗ / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 55. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2004. – С. 263–270.
131. Коновал О. А. Принцип відносності і електромагнітне поле рухомої зарядженої частинки / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. VI : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2006. – С. 258–262.
132. Коновал О. А. Принцип відносності і закон електромагнітної індукції / О. А. Коновал // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 23. – Чернігів : ЧДПУ, 2004. – С. 171–177.
133. Коновал О. А. Природа електромагнітної індукції / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. VII : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2008. – С. 207–209.

134. Коновал О. А. Реальність, істина та еквівалентні описи явищ в електродинаміці / О. А. Коновал // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. – Серія педагогічна : «Проблеми дидактики фізики та шкільного підручника фізики в світлі сучасної освітньої парадигми». – Вип. 12. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПУ, РВВ, 2006. – С. 117–120.
135. Коновал О. А. Релятивістська природа магнітного поля / О. А. Коновал // Всеукраїнська наук.-практ. конф. «Стратегічні проблеми формування змісту курсів фізики та астрономії в системі загальної середньої освіти» : тези доп. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – С. 77.
136. Коновал О. А. Релятивістський опис взаємодії між провідниками зі струмами / О. А. Коновал // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 30. – Чернігів : ЧДПУ, 2005. – С. 123–130.
137. Коновал О. А. Роль парадоксів у формуванні фізичного стилю мислення школярів / О. А. Коновал, Г. А. Шиліна // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 46 : у 2-х т. – Т. 1. – Чернігів : ЧДПУ, 2007. – С. 93–98.
138. Коновал О. А. Стаціонарне електричне поле постійного струму та принцип відносності / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 66. – Ч. 2. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2006. – С. 138–143.
139. Коновал О. А. Стаціонарне електричне поле провідника зі струмом як релятивістський ефект / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. VII : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2008. – С. 198–206.
140. Коновал О. А. Струми зміщення і магнітне поле постійних струмів / О. А. Коновал // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова : зб. наук. ст. / укл. П. В. Дмитренко, Л. Л. Макаренко, В. П. Сергієнко. – Вип. 48. – К. : НПУ, 2002. – С. 150–157.
141. Коновал О. А. Технологія вивчення електродинаміки на основі теорії відносності / О. А. Коновал, О.В. Сергєєв // Педагогічні науки : зб. наук. пр. – Вип. 32. – Ч. 2. – Херсон : Вид-во ХДУ, 2002. – С. 72–76.
142. Коновал О. А. Формування уявлень про відносність та взаємозв'язок електричного та магнітного полів при вивченні електромагнетизму / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія : Педагогічні науки. – Вип. 51. – Ч. 1. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2003. – С. 135–141.
143. Концепція 12-річної середньої загальноосвітньої школи // Освіта. – 2000. – 30 серпня – 6 вересня. – С. 3–6.
144. Концепція фізичної освіти у середній загальноосвітній школі України. – Київ: ІСДО, 1993.
145. Коршак Є. В. Фізика, 10 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Є. В. Коршак, О. І Ляшенко, В. Ф Савченко. – К. ; Ірпінь : ВТФ «Перун», 2003. – 312 с. : іл.

146. Коршак Є. В. Фізика, 9 кл. : пробний підруч. для загальноосвіт. шк. / Є. В. Коршак, О. І Ляшенко, В. Ф Савченко. – К. ; Ірпінь : ВТФ «Перун», 2000. – 232 с. : іл.
147. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – М. : ГОНТИ, 1939. – 265 с.
148. Краснов М. Л. Векторный анализ / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1978. – 160 с.
149. Кудрявцев П. С. История физики : у 2-х т. / П. С. Кудрявцев. – Т. 1. – М. : Гос. учеб.-педагог. изд-во Минпрос РСФСР, 1956. – 563 с.
150. Кудрявцев П. С. История физики : у 2-х т. / П. С. Кудрявцев. – Т. 2. – М. : Гос. учеб.-педагог. изд-во Минпрос РСФСР, 1956. – 487 с.
151. Кудрявцев П. С. Развитие теории электромагнитного поля / П. С. Кудрявцев // Очерки развития основных физических идей. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1959. – С. 236–262.
152. Кучерук І. М. Загальна фізика. Електрика і магнетизм : навч. посіб. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук ; за заг. ред. В. Й. Сугакова. – К. : Вища школа, 1990. – 367 с. : іл.
153. Кучерук І. М. Загальний курс фізики : у 3-х т. : навч. посіб. для студ. вищ. тех. і пед. закл. освіти / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик ; за ред. Кучерука І. М. – Т. 2 : Електрика і магнетизм. – К. : Техніка, 2001 – 452 с.
154. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
155. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
156. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1957. – 532 с.
157. Левашев А. Е. Движение и двойственность в релятивистской электродинамике / А. Е. Левашев. – Минск : Изд-во БГУ им. Ленина, 1979. – 224 с.
158. Левин М. Л. Максвелловский «Трактат об электричестве и магнетизме» / М. Л. Левин, М. А. Миллер // Успехи физических наук. – 1981. – Т. 135. – Вып. 3. – С. 425–440.
159. Левич В. Г. Курс теоретической физики : в 2-х т. / В. Г. Левич. – Т. 1. – М. : Наука, 1969. – 912 с.
160. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации : Современный анализ проблемы / А. А. Логунов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
161. Ляшенко О. І. Взаємозв'язок теоретичного та емпіричного в навчанні фізики : автореф. дис. ... докт. пед. наук : 13.00.04 – професійна педагогіка; 13.00.02 – методика навчання фізики / О. І. Ляшенко; Ін-т педагогіки і психології професійної освіти АПН України. – К. : 1996. – 50 с.
162. Ляшенко О. І. Формування фізичного знання в учнів середньої школи: логіко-дидактичні основи / О. І. Ляшенко. – К. : Генеза, 1996. – 128 с.
163. Льюис Марио. История физики / Марио Льюис. – М. : Мир, 1970. – 463 с.
164. Маклаков А. Г. Общая психология / А. Г. Маклаков. – СПб. : Питер, 2002. – 592 с. : ил.
165. Максвелл Д. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Д. К. Максвелл. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 687 с.

166. Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – 245 с.
167. Малинин А. Н. Методические вопросы теории относительности : сб. ст. / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во ЛГПИ, 2000. – 267 с. : ил.
168. Малинин А. Н. Методические основы изучения теории относительности в курсах физики средних общеобразовательных учреждений и педвузов : автореф. дисс. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / А. Н. Малинин ; Московский пед. ун-т. – М., 2000. – 65 с.
169. Малинин А. Н. Методы научного познания и физическая картина мира (в вопросах и ответах) / А. Н. Малинин. – Липецк : ЛГПУ, 2000. – 73 с.
170. Малинин А. Н. Методы физического познания (философский и дидактический аспекты) / А. Н. Малинин. – Тамбов : Изд-во ТГУ им. Г. Д. Державина, 1999. – 170 с.
171. Малинин А. Н. Теоретические модели физики / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во учебно-обр. центра ЛГПИ, 1999. – 117 с. : ил.
172. Малинин А. Н. Теория относительности в задачах и упражнениях / А. Н. Малинин. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.
173. Малинин А. Н. Элементы теории относительности и её физических приложений : учеб. пособ. для шк. и кл. с углубл. изуч. физики / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во ЛГПИ, 1995. – 278 с. : ил.
174. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л. И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 437 с.
175. Маркчев Н. Т. Сравнение различных форм системы уравнений Максвелла / Н. Т. Маркчев // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – С. 84–96.
176. Мартинсон М. Л. О плотности заряда внутри проводника с током / М. Л. Мартинсон, А. В. Недоспасов // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163. – № 1. – С. 91–92.
177. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособ. для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк. 1986. – 320 с.
178. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1983. – 463 с.
179. Матвеев А. Н. Электродинамика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1964. – 435 с.
180. Медведев Б. В. Начала теоретической физики / Б. В. Медведев. – М. : Наука, 1977. – 496 с.
181. Меерович М. И. Технология творческого мышления : практ. пособ. / М. И. Меерович, Л. И. Шрагина. – Мн. : Харвест ; М. : АСТ, 2000. – 432 с.
182. Меерович Э. А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике / Э. А. Меерович, Б. Э. Мейерович. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
183. Менумеров Р. М. К вопросу о взаимодействии элементов электрического тока / Р. М. Менумеров // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Вип. VI : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Вид. від. НМетАУ, 2006. – С. 263–267.

184. Мостепаненко А. М. «Дополнительность» физики и геометрии (Эйнштейн и Пуанкаре) / А.М. Мостепаненко // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. - С. 223-254.
185. Мощанский В. Н. Формирование мировоззрения учащихся при изучении физики / В. Н. Мощанский. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1989. – 192 с.
186. Мултановский В. В. Курс теоретической физики / В. В. Мултановский, А. С. Василевский. – М. : Просвещение, 1990. – 272 с.
187. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. ср. шк. / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев. – М. : Просвещение, 1977. – 319 с.
188. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. сред. шк. / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев – М. : Просвещение, 1988. – 260 с.
189. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 11 кл. ср. шк. / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев. – М. : Просвещение, 1991. – 254 с.
190. Немнюгин С. А. Turbo Pascal / С. А. Немнюгин. – СПб. : Издательство «Питер», 2001. – 496 с. : ил.
191. Несис Е. И. Методы математической физики / Е. И. Несис. – М. : Просвещение, 1977. – 199 с. : ил.
192. Николаев Г. В. Обоснование реальности существования аксиального магнитного поля движущегося заряда / Г. В. Николаев. – Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 528-79 Деп.
193. Николаев Г. В. Парадокс Фейнмана и асимметрия лабораторной и движущейся систем отсчета / Г. В. Николаев. – Статья деп. в ВИНТИ, рег. №1937-75.
194. Николаев Г. В. Токи смещения и радиальное магнитное поле движущегося заряда / Г. В. Николаев. – Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 3487-78 Деп.
195. Оконь В. Основы проблемного обучения / В. Оконь – М. : Просвещение, 1968. – 208 с.
196. Освітні технології: навч.-метод. посіб. / О. М. Пехота, А. З. Кіктенко, О. М. Любарська та ін. ; за заг. ред. О. М. Пехоти. – К. : А.С.К., 2001. – 256 с.
197. Очан Ю. С. Методы математической физики / Ю. С. Очан. – М. : Высшая школа, 1965. – 383 с.
198. Очан Ю. С. Сборник задач по методам математической физики / Ю. С. Очан. – М. : Высшая школа, 1967. – 195 с.
199. Пановский В. Классическая электродинамика / В. Пановский, М. Филиппс.– М. : ГИФМЛ, 1963. – 432 с.
200. Парселл Э. Электричество и магнетизм : учебное руководство : пер. с англ. / Э. Парселл ; под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1983. – 416 с. – (Берклиевский курс физики).
201. Пеннер Д. И. Электродинамика и теория относительности / Д. И. Пеннер, В. А. Угаров. – М. : Просвещение, 1980. – 271 с.
202. Пинский А. А. Релятивистские идеи в преподавании физики : автореф. дисс. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / А. А. Пинский ; Московский педагогический институт. – М., 1974. – 27 с.
203. Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. – М. : Атомиздат, 1973. – 332 с.

204. Програми для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. – Зб. № 2 / кол. авт. ; за заг. ред. М. І. Шкіля та Г. П. Грищенка. – К., 1992. – 144 с.
205. Психологія : підручник / Ю. Л. Трофімов, В. В. Рибалка, П. А. Гончарук та ін. ; за ред. Ю. Л. Трофімова. – К. : Либідь, 2001. – 560 с.
206. Реан А. А. Психология и педагогика / А. А. Реан, Н. В. Бордовская, С. И. Розум. – СПб. : Питер, 2001. – 432 с. : ил.
207. Розенбергер Ф. История физики / Ф. Розенбергер. – Ч. 3. – Вып. 1. – М. : Объединенное научно-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. – 301 с.
208. Рязанов Г. А. Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля / Г. А. Рязанов. – М. : Наука, 1966. – 208 с.
209. Савельев И. В. Курс общей физики : у 3-х т. / И. В. Савельев. – Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М. : Наука, 1978. – 480 с..
210. Савельев И. В. Основы теоретической физики : в 2 т. / И. В. Савельев. – Т. 1 : Механика и электродинамика. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
211. Савченко В. Ф. Конспекти лекцій з методики навчання фізики в старшій школі / В. Ф. Савченко, М. П. Бойко, М. М. Дідович та інші ; за ред. проф. Савченко В. Ф. – Чернігів : ЧДПУ, 2007. – 288 с.
212. Садовий М. І. Становлення та розвиток фундаментальних ідей дискретності та неперервності у курсі фізики середньої школи / М. І. Садовий. – Кіровоград : Прінт-Імідж, 2001. – 396 с.
213. Садовий М. І. Теоретичні та методичні основи становлення та розвитку фундаментальних ідей дискретності та неперервності в курсі фізики загальноосвітньої школи : автореф. дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / М. І. Садовий ; НПУ ім. М. П. Драгоманова. – К., 2001. – 37 с.
214. Садовий М. І. Теоретичні та методичні основи становлення та розвитку фундаментальних ідей дискретності та неперервності в курсі фізики загальноосвітньої школи : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / М. І. Садовий ; НПУ ім. М. П. Драгоманова. – К., 2001. – 534 с.
215. Сергеев А. В. Теория и эксперимент в историческом развитии физического познания / А. В. Сергеев // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. – Серія педагогічна : «Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії». – Вип. 9. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПУ, ІВВ, 2003. – С. 68–70.
216. Сивухин Д. В. Общий курс физики : у 5-и т. / Д. В. Сивухин. – Т. 3 : Электричество. – М. : Наука, 1977. – 688 с.
217. Сигалов Р. Г. Новые исследования движущих сил магнитного поля / Р. Г. Сигалов. – Ташкент : Фан, 1975. – 230 с.
218. Слабкий Л. И. Методы и приборы предельных измерений в экспериментальной физике / Л. И. Слабкий. – М. : Наука, 1973. – 272 с.
219. Слєпкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі : навч. посіб. / З. І. Слєпкань. – К. : Вища школа, 2005. – 239 с.
220. Смородинский Я. А. Границы квантовой электродинамики и точность мировых постоянных / Я. А. Смородинский // УФН. – 1968. – Т. 94. – Вып. 2. – С. 359–360.

221. Спасский Б. И. История физики : у 2-х ч. / Б. И. Спасский. – Ч. II. – М. : Высшая школа, 1977. – 309 с.
222. Стратегічні проблеми формування змісту курсів фізики та астрономії в системі загальної середньої освіти : тези доповідей на Всеукраїнській науково-практичній конференції. – Львів : Львівський національний університет ім. Івана Франка, 2002. – 87 с.
223. Сусь Б. А. Проблемы дидактики физики у вищій школі : наук.-метод. вид. : вид. 2-е, випр. і доп. / Б. А. Сусь, М. І. Шут. — К. : ВЦ «Просвіта», 2003. – 155 с.
224. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М. : Наука, 1966. – 624 с.
225. Терлецкий Я. П. Электродинамика : учеб. пособие для студ. физ. спец. ун-тов / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков. – М. : Высшая шк., 1990. – 352 с.
226. Тоннела Мари-Антуанет. Основы электромагнетизма и теории относительности / Мари-Антуанет Тоннела. – М. : Изд-во иностр. литер., 1962. – 483 с.
227. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
228. Удосконалення навчання фізики у вищій школі в умовах ступеневої освіти : матеріали III Всеукраїнської наукової конференції «Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики» – Ч. II. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 195 с.
229. Федорченко А. М. Теоретическая физика. Классическая электродинамика : учеб. пособие / А. М. Федорченко. – К. : Вища шк., Головное изд-во, 1988. – 280 с. : ил.
230. Федорченко А. М. Теоретична фізика : підручник : у 2 т. / А. М. Федорченко. – Т. 1 : Класична механіка і електродинаміка. – К. : Вища шк., 1992. – 535 с. : іл.
231. Федорченко А. М. Экспериментальные основы и математическая формулировка фундаментальных законов физики : учеб. пособ. / А. М. Федорченко. – К. : Вища школа, 1992. – 151 с.
232. Фейнберг Е. Л. Взаимосвязь науки и искусства в мировоззрении Эйнштейна / Е. Л. Фейнберг // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1977. – С. 187–213.
233. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. – Т. 6 : Электродинамика. – М. : Мир, 1966. – 343 с.
234. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: у 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 5 : Электричество и магнетизм. – М. : Мир, 1966. – 290 с.
235. Физическая энциклопедия : в 5-и т. / под ред. А. М. Прохорова. – Т. 5. – М. : Советская энциклопедия, 1998. – 691 с.
236. Фіцула М. М. Педагогіка: Навч. посіб. для студ. вищих пед. закл. освіти / М. М. Фіцула. – К. : Видавн. центр «Академія», 2002. – 528 с.
237. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М. : ФМЛ, 1963.
238. Фок В. А. Теория Эйнштейна и физическая относительность / В. А. Фок. – М. : Знание, 1967.

239. Фок В. А. Физические принципы теории тяготения Эйнштейна / В. А. Фок // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 255–267.
240. Франкфурт У. И. Специальная и общая теория относительности. Исторические очерки / У. И. Франкфурт. – М. : Наука, 1968. – 328 с.
241. Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики : матеріали 7 Всеукраїнської наукової конференції / Уклад. М. І. Шут, В. П. Сергієнко. – К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2002. – 167 с.
242. Холтон Дж. Эйнштейн и «решающий» эксперимент / Дж. Холтон // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104. – Вып. 2. – С. 297–316.
243. Хуторской А. В. Современная дидактика : учебник для вузов / А. В. Хуторской. – СПб. : Издательство «Питер». 2001. – 544 с.
244. Чайка В. Основы дидактики: тексты лекцій і завдання для самоконтролю : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закладів / В. Чайка. – Тернопіль : Астон, 2002. – 244 с.
245. Чолпан П. П. Фізика: підруч. / П. П. Чолпан. – К. : Вища шк., 2004. – 567 с. : іл.
246. Чудинов Э. М. А. Эйнштейн об отношении геометрии к реальности / Э. М. Чудинов // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1971. – С. 302–316.
247. Чудинов Э. М. Эйнштейн и Бриджмен / Э. М. Чудинов // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1974. – С. 335–350.
248. Чудинов Э. М. Эйнштейн и операционализм Бриджмена / Чудинов Э. М. // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 504–519.
249. Чудинов Э. М. Эквивалентные описания и проблема истины в физике / Э. М. Чудинов // Методологические проблемы физики : сборник статей. – М. : Знание, 1981. – С. 42-64. – (Новое в жизни, науке и технике. Сер. «Физика»; №1).
250. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла / И. С. Шапиро // Успехи физических наук. – 1972. – Т. 108. – Вып. 2. – С. 319–333.
251. Шахмаев Н. М. Физика : Молекулярная физика. Электродинамика / Н. М. Шахмаев, С. Н. Шахмаев, Д. Н. Шодиев. – М. : Просвещение, 1991. – 240 с.
252. Шпольский Э. В. Атомная физика : у 2-х т. / Э. В. Шпольский. – Т. 1 : Введение в атомную физику. – М. : Физматгиз, 1963. – 576 с. : ил.
253. Штепа М. І. Теорія відносності : навч. посібник / М. І Штепа. – К. : ІЗМН, 1996. – 84с.
254. Шут М. І. Психолого-педагогічні основи розуміння фізики / М. І. Шут, В. П. Сергієнко // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. – Серія педагогічна : «Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії». – Вип. 9. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПУ, ІВВ, 2003. – С. 52–54



255. Эйнштейн А. Влияние Максвелла на развитие представлений о физической реальности / А. Эйнштейн // Эйнштейновский сборник : сб. статей. – М. : Наука, 1966. – С. 7–11.
256. Эйнштейн А. О методе теоретической физики / Альберт Эйнштейн // Физика и реальность : сб. статей. – М. : Наука, 1965. – 359 с.
257. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. II. – М. : Наука, 1966. – 723 с.
258. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. IV. – М.: Наука, 1967. – 600 с.
259. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. I. – М. : Наука, 1965. – 700 с.
260. Яворский Б. М. Основы физики : в 2-х т. / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. Электродинамика. – М. : Наука, 1981. – 480 с.
261. Яворский Б. М. Основы физики : в 2-х т. / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – Т. 2. – М. : Наука, 1972. – 436 с.
262. Якиманская И. С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И.С. Якиманская. – М. : 1996.
263. Якиманская И. С. Личностно-ориентированный урок: планирование и технология проведения / И. С. Якиманская, О. С. Якунина // Директор школы. – 1998. – № 3.
264. Якиманская И. С. Требование к учебным программам, ориентированным на личностное развитие школьников / И. С. Якиманская // Вопросы психологии. – 1994. – № 2.
265. Morton N. Electric and magnetic forces between parallel-wire conductors / N. Morton // Phys. Educ. – 1979. – V. 14. – № 6. – С. 369–373.

УДК 538.3 (075)

ББК 22.33

К 64

**Коновал О. А.**

**К64**    **Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності** : монографія / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с. : іл. ISBN 978–966–177–047–7

У монографії поданий аналіз способів обґрунтування рівнянь Максвелла. Показано, що так звані фундаментальні експериментальні закони електродинаміки є наслідком принципів теорії відносності та закону Кулона. Пропонується нова наукова система інтерпретації фундаментальних законів електродинаміки, на основі якої розбудовується нова методична система навчання електродинаміки на засадах генералізації знань навколо принципу відносності та поняття електромагнітного поля.

Монографія розрахована на студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, учителів і викладачів фізики, науковців.

*Навчальне видання*

**Олександр Андрійович Коновал**

**Теоретичні та методичні основи  
вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності**

Монографія

Підписано до друку 26.03.2009.

Формат 60x84/16. Ум. др. арк. – 20,1. Обл.-вид. арк. – 21,0.

Тираж – 300 прим.

Видавництво ПП «Видавничий дім»

Свідоцтво ДК № 515 від 03.07.2001.

вул. Тухачевського, 26, м. Кривий Ріг, 50063

Друкарня СПД Щербенок С. Г.

Свідоцтво ДП 126-р від 12.10.2004.

вул. Рокоссовського, 5/3, м. Кривий Ріг, 50027