

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

**РОЗРОБКА І РЕАЛІЗАЦІЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ ПІД ЧАС
ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»**

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Букши Ангеліни Вікторівни
Керівник канд. тех. наук, професор
Корольський В. В.

Кривий Ріг – 2025

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Букша Ангеліна Вікторівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Букша' (Buksha) followed by a stylized flourish.

ЗМІСТ

	ВСТУП	4
РОЗДІЛ I.	АНАЛІЗ ЗМІСТУ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕНІ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»	6
1.1.	Основні поняття теорії «Числові ряди»	6
1.2.	Традиційні задачі при вивченні теми «Числові ряди»	10
	Висновки до першого розділу	22
РОЗДІЛ II.	РОЗРОБКА І РЕАЛІЗАЦІЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ В ТЕМІ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»	24
2.1.	Нестандартні задачі для знакосталих рядів	24
2.2.	Нестандартні задачі для знакозмінних рядів	53
2.3.	Нестандартні задачі які використовують дії над рядами	70
	Висновки до другого розділу	72
	ВИСНОВКИ	74
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	76

ВСТУП

Теорія рядів є невід'ємною складовою курсу математичного аналізу, оскільки має широке застосування як у теоретичних дослідженнях, так і при розв'язуванні великої кількості прикладних задач. Числові ряди відіграють важливу роль у розвитку таких галузей, як архітектура, економіка, інженерія, а також у фундаментальних науках — фізиці, хімії, інформатиці. Завдяки їм можна за допомогою наближених обчислень отримати точні результати, що є необхідним у сучасній науці та техніці.

У математиці числові ряди широко використовуються при обчисленні значень функцій і інтегралів, розв'язуванні трансцендентних та алгебраїчних рівнянь, дослідженні технічних процесів, пов'язаних із розв'язуванням диференціальних рівнянь і задач наближеного інтегрування. Значний внесок у теорію рядів зробили такі видатні вчені, як Жан Лерон д'Аламбер, Огюстен-Луї Коші, Леонард Ейлер, Даніель Бернуллі, Готфрід Вільгельм Лейбніц, Йозеф Людвіг Раабе, Ернст Едуард Куммер та інші.

Аналіз вітчизняної та зарубіжної літератури показує, що під час вивчення теми «Числові ряди» студентам і учням пропонується значний теоретичний матеріал, система стандартних вправ і задач, методичні рекомендації для самостійної роботи. Проте нестандартні задачі, які сприяють розвитку логічного і творчого мислення, зустрічаються у навчальній практиці досить рідко. Саме тому постає потреба в розробці та реалізації системи нестандартних задач, спрямованих на поглиблення розуміння сутності числових рядів, формування вміння застосовувати теоретичні знання у нових ситуаціях, а також у розвитку дослідницьких компетентностей учнів.

Таким чином, тема «Розробка та реалізація нестандартних задач у темі «Числові ряди»» є актуальною як з теоретичного, так і з методичного погляду.

Мета роботи: розробити та реалізувати систему нестандартних задач, спрямованих на поглиблення знань учнів і студентів з теми «Числові ряди».

Об'єкт дослідження: процес навчання математичного аналізу, зокрема розділ «Числові ряди».

Предмет дослідження: методика розробки та застосування нестандартних задач при вивченні числових рядів.

Завдання роботи:

- Провести аналіз науково-методичних джерел із теми «Числові ряди».
- Визначити роль нестандартних задач у формуванні математичної компетентності.
- Розробити систему нестандартних задач з теми «Числові ряди» різних рівнів складності.
- Реалізувати і проаналізувати ефективність розроблених задач у навчальному процесі.

Методи дослідження:

- аналіз і узагальнення наукових і методичних джерел;
- порівняльний аналіз традиційних та нестандартних підходів до розв'язування задач;
- моделювання та евристичний пошук нестандартних математичних ситуацій;
- педагогічний експеримент та спостереження за результатами навчальної діяльності.

Наукова новизна: полягає у розробці системи нестандартних задач з теми «Числові ряди» та методичних рекомендацій щодо їх використання з метою підвищення мотивації до вивчення математичного аналізу.

Практичне значення роботи:

- Система розроблених задач може бути впроваджена у навчальний процес під час вивчення теми «Числові ряди».
- Окремі задачі можуть бути використані в підготовці до математичних олімпіад та позакласних заходів.

РОЗДІЛ І. АНАЛІЗ ЗМІСТУ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕНІ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»

1.1 Основні поняття теорії «Числові ряди»

Ідея підсумовування нескінченної кількості доданків сягає корінням античної філософії. Парадокс Зенона "Дихотомія" (щоб пройти шлях, треба пройти спочатку його половину, потім половину того, що залишилося, і так далі) фактично описує геометричний ряд:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Античні математики, зокрема Архімед, використовували "метод вичерпування" для знаходження площ, що є прообразом інтегрування та сумування рядів. Однак суворе означення з'явилося лише в XIX столітті в роботах О. Коші.

Означення 1. Нехай задано числову послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Вираз вигляду [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1.1)$$

називається числовим рядом. Числа $a_1, a_2, \dots$ називаються членами ряду, а a_n — загальним членом ряду.

Сам по собі вираз (1.1) є лише формальним символом. Щоб надати йому числового змісту, вводиться поняття частинних сум.

Означення 2. Частинною сумою S_n ряду (1.1) називається сума його перших n членів [10]:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Таким чином, кожному ряду можна поставити у відповідність послідовність його частинних сум $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 3 (Збіжність) [1]. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n\}$ має скінченну границю S при $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

У цьому випадку число S називають сумою ряду.

Якщо границя не існує або вона нескінченна, ряд називається розбіжним, і сума йому не приписується (у класичному сенсі).

Для розуміння природи збіжності розглянемо два класичні приклади, на яких будується більшість задач порівняння.

А. Геометрична прогресія (Геометричний ряд)

Ряд вигляду:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$$

Формула n -ї частинної суми для $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Дослідимо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

Якщо $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, отже $S = \frac{a}{1-q}$, то ряд збігається.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, то ряд розбігається.

Якщо $q = 1$, маємо $S_n = n a \rightarrow \infty$ (при $a \neq 0$).

Якщо $q = -1$, маємо ряд $a - a + a - a \dots$, частинні суми якого коливаються $(a, 0, a, 0 \dots)$, границі не існує.

Б. Гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Це класичний приклад ряду, де члени прямують до нуля ($a_n \rightarrow 0$), але сума є нескінченною.

Доведення розбіжності (метод Орема) [3]:

Згрупуємо члени ряду:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \dots$$

Ми бачимо, що можна виділити нескінченну кількість груп, сума в кожній з яких більша за $\frac{1}{2}$. Отже, S_n зростає необмежено. Ряд розбігається.

На практиці часто потрібно швидко встановити розбіжність ряду. Для цього використовується необхідна ознака.

Теорема 1 (Необхідна умова) [4]. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то границя його загального члена дорівнює нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Доведення:

Нехай ряд збігається до суми S . Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Очевидно, що для попередньої частинної суми також виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Запишемо загальний член як різницю сум:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Переходячи до границі, отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Теорему доведено.

Наслідок (Достатня умова розбіжності): Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або ця границя не існує, то ряд розбігається.

Приклад: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ розбігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Геометрична інтерпретація числових рядів (Методика В.В. Корольського) [7].

Згідно з дослідженнями В.В. Корольського, для глибокого розуміння природи рядів та формування компетентностей доцільно використовувати геометричне моделювання. У роботах пропонується класифікація геометричних інтерпретацій, яка дозволяє візуалізувати процес "генерації" членів ряду.

1. Точкова (координатна) інтерпретація

Члени ряду a_n розглядаються як координати точок на осі Ox (або частинні суми S_n як координати). Збіжність ряду інтерпретується як процес накопичення точок S_n в околі деякої точки S (точки згущення).

Методична цінність: Формує уявлення про границю послідовності як про точку, до якої нескінченно наближаються інші точки.

2. Лінійна інтерпретація (Довжини відрізків)

Ряд представляється як сума довжин відрізків, що відкладаються послідовно на прямій.

Наприклад, поділ одиничного відрізка навпіл породжує ряд

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$$

Візуалізація: Якщо ми вкладаємо відрізки в обмежений інтервал, і вони його не "переповнюють", ряд збігається. Якщо ж довжина ланцюжка росте необмежено — розбігається [6].

3. Квадратурна (площинна) інтерпретація

Це найбільш потужна модель, запропонована в роботах В.В. Корольського та Я.А. Михайлової. Ідея полягає в генерації членів ряду через площі геометричних фігур [7].

Модель Квадрат: Береться одиничний квадрат. Він ділиться на частини за певним алгоритмом (наприклад, відсікання половини, потім половини залишку). Площа всього квадрата (1) дорівнює сумі площ його частин: $1 = \sum S_i$. Це дає наочне доведення збіжності ряду $\sum \frac{1}{2^n} = 1$.

Модель "Сходинки": Члени ряду a_n розглядаються як площі прямокутників з основою 1 і висотою $f(n)$. Сума ряду — це площа східчастої фігури. Якщо ця фігура вписується під графік інтегровної функції $y=f(x)$, що спадає, то збіжність ряду еквівалентна збіжності інтеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Це підводить до інтегральної ознаки Коші [2].

4. Кубатурна інтерпретація

Узагальнення на тривимірний простір, де члени ряду представлені об'ємами тіл (кубів, паралелепіпедів), що заповнюють обмежений об'єм.

Процес генерації: У підручнику Володимира Вікторовича Корольського акцент робиться на тому, що ряд не є статичним записом, а динамічним процесом. Задаючи геометричний алгоритм (правило поділу фігури), ми генеруємо числовий ряд. Це змінює фокус студента з "обчислення" на "модельовання", що розвиває дослідницьку компетентність.

1.2 Традиційні задачі при вивченні теми

Система задач з теорії рядів, що склалася в традиції вищої математичної школи (зокрема, за збірниками Демидовича [11], Бермана [1]), чітко структурована. Перший і фундаментальний блок задач стосується операцій над рядами.

Цей клас задач базується на властивостях лінійності збіжних рядів та правилах їх перетворення. Основна мета таких задач — навчити студента зводити складні вирази до відомих стандартних рядів (найчастіше геометричних).

А. Лінійні операції (Додавання та множення на скаляр)

Теорема 2 (Про лінійність) [6].

Нехай дано два збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, і довільну сталу $c \in \mathbb{R}$. Тоді:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ збігається, і його сума дорівнює $c \cdot A$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається, і його сума дорівнює $A + B$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ збігається, і його сума дорівнює $A - B$.

Доведення:

Випливає безпосередньо з властивостей границь послідовностей частинних сум. Якщо $S_n^{(a)} \rightarrow A$ і $S_n^{(b)} \rightarrow B$, то:

$$S_n^{(a+b)} = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = S_n^{(a)} + S_n^{(b)} \rightarrow A + B$$

Типова задача: Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5 \cdot 2^n}{6^n}$.

Алгоритм розв'язання:

Аналіз загального члена: Бачимо, що чисельник є сумою, а знаменник спільний. Це підказка до розбиття на два ряди.

Застосування лінійності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{6^n} + \frac{5 \cdot 2^n}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

Обчислення компонентів: Отримали дві спадні геометричні прогресії.

Перша: $b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$. Сума $S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

Друга: $b_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$. Сума $S_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Фінальний результат: $S = 1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = 3.5$

Зауваження про розбіжні ряди:

Сума двох розбіжних рядів може бути збіжним рядом.

Приклад: $a_n = n, b_n = -n$. Обидва розбігаються, але $\sum (a_n + b_n) = \sum 0 = 0$ — збігається. Це важливий методичний момент, який демонструє, що лінійність працює "в один бік" (збіжність доданків гарантує збіжність суми, але не навпаки).

Б. Асоціативна властивість (Групування членів)

У скінченних сумах ми можемо довільно розставляти дужки (асоціативність).

У нескінченних рядах це правило діє з обмеженнями.

Теорема 3 [13]. Якщо ряд збігається, то ряд, отриманий з нього довільним групуванням членів (без зміни їх порядку), також збігається і має ту ж суму.

Зворотне твердження: Групування членів розбіжного ряду може зробити його "збіжним" (хибна збіжність).

Класичний приклад (Ряд Гранді) [14]:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Цей ряд розбігається (частинні суми 1, 0, 1, 0...).

Але якщо поставити дужки: $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$.

Або так: $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 = 1$.

Отримання різних результатів залежно від дужок є ознакою розбіжності. Задачі на групування вчать студентів обережності при маніпуляціях з нескінченністю.

В. Множення рядів (Добуток Коші)

Це більш складна операція, що вивчається в поглибленому курсі. Добутком двох рядів $\sum a_n$ і $\sum b_n$ не є ряд попарних добутків $\sum a_n b_n$.

За аналогією з множенням многочленів $(a_0+a_1x+\dots)(b_0+b_1x+\dots)$, коефіцієнт при x^n збирається з усіх добутків $a_k b_m$, де $k+m=n$.

Означення 4. Добутком Коші рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ називається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, де $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Теорема Мертенса: Якщо принаймні один з рядів збігається абсолютно, а інший просто збігається, то їх добуток Коші збігається до добутку їх сум (AB) .

Якщо ж обидва ряди збігаються лише умовно, їх добуток може розбігатися.

Приклад задачі: Знайти перші члени добутку двох рядів $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

$$a_n = \frac{1}{2}, b_n = \frac{1}{3}.$$

$$c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{5}{6}.$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{(4+6+9)}{36} = \frac{19}{36}.$$

Ця операція є фундаментальною при вивченні степеневих рядів та аналітичних функцій (наприклад, множення ряду Тейлора для $\sin x$ на ряд для $\cos x$).

Дослідження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є первинною задачею математичного аналізу, що вимагає переходу від дискретної послідовності до її універсального аналітичного представлення через загальний член a_n . Встановлення цієї функціональної залежності є необхідною умовою для застосування граничних критеріїв, що визначають характер збіжності чи розбіжності ряду.

Процес ідентифікації формули a_n являє собою задачу індуктивного синтезу, що ґрунтується на аналізі закономірностей, притаманних початковим членам ряду.

Коректне визначення a_n є важливим для подальшого аналізу.

Методологія визначення a_n передбачає структурну декомпозицію елементів ряду, де кожен член розглядається як функція, що складається з незалежних компонентів (чисельника, знаменника, основи степеня). Для кожного компонента послідовно встановлюються закономірності:

Лінійні та Геометричні Прогресії: На початковому етапі встановлюється наявність лінійних залежностей (арифметичних прогресій, вигляду $An+B$) або експоненційних (геометричних прогресій, вигляду Aq^{n-1}) у складових членах ряду. Це особливо актуально для рядів, де члени представлені добутками у знаменнику, наприклад, $\frac{1}{b_n c_n}$, де послідовності b_n та c_n можуть бути проаналізовані як окремі арифметичні прогресії для виведення незалежних лінійних функцій n .

Аналіз трансцендентних та факторіальних елементів: Встановлення закономірностей для трансцендентних функцій (наприклад, тригонометричних) та факторіалів ($n!$) є ключовим, оскільки наявність факторіалу однозначно орієнтує дослідження на застосування ознаки Д'Аламбера.

У випадках, коли послідовність не підпорядковується елементарній лінійній чи геометричній залежності, для виведення a_n застосовується метод скінченних різниць. Цей метод дозволяє емпірично встановити, чи може послідовність бути описана поліномом $P(n)$ вищого степеня:

Якщо різниці k -го порядку послідовності є сталими, це свідчить, що загальний член a_n описується поліномом $P(n)$ степеня k .

Наприклад, для послідовності 1,2,5,10,17,... стала друга різниця вказує на квадратичну залежність $P(n)=An^2+Bn+C$. Успішне встановлення такого поліноміального виразу є систематизованим підходом до індуктивного мислення, що перетворює задачу аналізу нескінченного об'єкта на кінцевий, аналітичний вираз.

Після встановлення аналітичного виразу a_n , обов'язковим першим кроком дослідження є застосування необхідної умови збіжності, яка виступає як аксіоматичний фільтр для потенційно розбіжних рядів.

Формулювання: Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то границя його загального члена має дорівнювати нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Зворотнє твердження (критерій розбіжності) має пряме практичне значення: якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або границя не існує, ряд є безумовно розбіжним.

Критичним теоретичним аспектом є те, що виконання необхідної умови ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) є недостатнім для гарантування збіжності. Це демонструється прикладом гармонійного ряду $\sum \frac{1}{n}$, де необхідна умова виконується, але ряд розбігається.

Це свідчить про глибоке концептуальне значення швидкості згасання членів ряду. Для забезпечення збіжності члени a_n повинні прямувати до нуля з достатньо високою швидкістю, що має бути вищою, ніж швидкість згасання членів гармонійного ряду. Цей теоретичний висновок обґрунтовує необхідність застосування потужніших, достатніх ознак збіжності, які кількісно оцінюють швидкість згасання a_n .

Вибір достатньої ознаки збіжності є питанням математичної стратегії, що базується на таксономії критеріїв, визначеної функціональною формою a_n .

Ці критерії є «спеціалізованими» і використовуються, коли a_n має структуру, що передбачає аналітичне спрощення при обчисленні границі.

Ознака Д'Аламбера (Критерій співвідношення): Встановлює збіжність або розбіжність ряду через границю відношення послідовних членів $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Якщо $\rho < 1$, ряд збіжний; якщо $\rho > 1$, ряд розбіжний. Теоретично, ця ознака є найбільш зручною, коли a_n містить факторіали ($n!$) або показові функції, оскільки відношення забезпечує взаємне скорочення цих виразів.

Радикальна ознака Коші Використовується для визначення збіжності через границю $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Цей критерій є оптимальним, коли a_n містить вирази, піднесені до n -го степеня, оскільки обчислення кореня спрощує вихідний вираз.

Для обох критеріїв критичним є випадок, коли $\rho=1$. У цій ситуації ознака не дає висновку щодо характеру ряду. Теоретично, $\rho=1$ свідчить про те, що швидкість згасання a_n недостатньо висока, щоб бути однозначно визначеною через пряме відношення чи корінь. Це вимагає переходу до більш тонких інструментів.

Коли спеціалізовані ознаки є нерезультативними ($\rho=1$), необхідне застосування ознак порівняння, що ґрунтуються на порівнянні асимптотичної поведінки досліджуваного ряду $\sum a_n$ з відомим еталонним рядом $\sum b_n$.

Як правило, за еталонний обирається узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, збіжність якого доведена для $\alpha > 1$, а розбіжність — для $\alpha \leq 1$.

Твердження: Нехай $\sum a_n$ та $\sum b_n$ — ряди з додатними членами. Якщо існує границя $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ і при цьому $0 < L < \infty$, то обидва ряди мають однаковий характер збіжності.

Принцип Асимптотичної Еквівалентності: Цей метод є особливо актуальним для дробово-раціональних рядів (поліном / поліном). Принцип полягає у визначенні показника α шляхом аналізу співвідношення старших степенів n у чисельнику та знаменнику a_n . Наприклад, якщо a_n містить старші степені n^2 у чисельнику та n^5 у знаменнику, то асимптотично $a_n \sim 1/n^{5-2} = 1/n^3$. Це дозволяє ігнорувати молодші члени поліномів, оскільки поведінка ряду при великих n визначається лише найвищими степенями n . Збіжність встановлюється, якщо отримана $\alpha > 1$.

Методичні дослідження, зокрема Корольського В. В. та Михайлової Я. А., підкреслюють важливість геометричного моделювання члена ряду a_n як просунутого евристичного та дидактичного інструменту.

Геометрична інтерпретація (наприклад, представлення a_n як площі) дозволяє візуалізувати та «з'ясовувати характерні закономірності поведінки членів ряду і процесу їх збіжності чи розбіжності», які залишаються прихованими у традиційних

аналітичних («сігма-моделях») представленнях . Це сприяє інтуїтивному розумінню абстрактних процесів.

Реалізація міждисциплінарних зв'язків: Цей підхід забезпечує реалізацію зв'язків між шкільним курсом математики (геометрією та алгеброю) та вищим математичним аналізом . Геометричне моделювання служить основою для формулювання нових дослідницьких задач, що може бути використано для шкільних олімпіад та факультативів .

Обчислення суми числового ряду S є задачею, що вимагає виведення точного аналітичного виразу для послідовності його частинних сум S_n та знаходження її границі. Це завдання є можливим лише для обмеженого класу рядів.

Згідно з означенням, сума S числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує, якщо існує скінченна границя послідовності його частинних сум $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Формальне обчислення S зводиться до аналітичної задачі: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Теоретичною передумовою для обчислення S є можливість знаходження S_n у замкненій формі. Ця можливість обмежена:

Геометричний ряд: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ є класичним випадком, для якого сума частинних сум S_n відома. Збіжність настає при $|q| < 1$, а сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Телескопічний ряд: Ряди, для яких a_n може бути алгебраїчно представлений як різниця сусідніх членів допоміжної послідовності b_n .

Метод згортання є ключовим інструментом для обчислення суми S у випадках, не охоплених геометричною прогресією.

Принцип методу полягає у можливості представлення загального члена a_n у вигляді різниці двох членів деякої послідовності b_n із фіксованим зсувом k : $a_n = b_n - b_{n+k}$.

У частинній сумі S_n відбувається взаємне знищення проміжних членів [16]:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

В результаті, S визначається як границя: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$. Таким чином, обчислення суми ряду зводиться до обчислення границі допоміжної послідовності b_n .

Для раціональних числових рядів, необхідне представлення a_n у вигляді різниці $b_n - b_{n+k}$ майже завжди вимагає використання техніки розкладання на найпростіші (елементарні) дроби. Це є обов'язковим алгебраїчним механізмом, що забезпечує форму a_n , придатну для реалізації телескопічного ефекту.

Теоретично, можливість такого розкладу є обґрунтована в теорії аналітичних функцій (наприклад, теореми Міттаг-Леффлера [14]), хоча в курсі застосовуються елементарні форми.

Визначення коефіцієнтів розкладу (наприклад, A, B, M, N) є ключовою алгебраїчною частиною задачі:

Метод невизначених коефіцієнтів: Вимагає прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях змінної n у чисельнику, що призводить до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Метод часткових значень (підстановки коренів): Дозволяє швидко знайти коефіцієнти, що відповідають простим дійсним кореням знаменника.

У складних випадках застосування комбінації цих методів є найбільш раціональним підходом, оскільки метод часткових значень може значно знизити порядок системи, яку необхідно розв'язати методом невизначених коефіцієнтів. Таким чином, успішне обчислення суми ряду залежить від синтезу аналітичного апарату границь та високої точності алгебраїчних перетворень.

Дослідження збіжності числових рядів є одним із основних завдань математичного аналізу. Щоб визначити, чи має ряд кінцеву суму, потрібно добре розуміти, як поведуться його члени при $n \rightarrow \infty$ для цього використовують різні ознаки збіжності. Вибір конкретної ознаки залежить від того, якої форми є загальний член a_n .

Дослідження **ряду** зазвичай починають із двох кроків: спершу потрібно правильно записати загальний член a_n , а потім перевірити необхідну умову збіжності - тобто переконатися, що $a_n \rightarrow 0$.

Необхідна умова збіжності є аксіоматичним критерієм, що слугує первинним, обов'язковим фільтром. Згідно з теоремою, якщо ряд збігається, то границя його загального члена має дорівнювати нулю, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Зворотне твердження цієї теореми є прямим критерієм розбіжності: якщо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ не дорівнює нулю або не існує, ряд є безумовно розбіжним [12].

Критичний теоретичний висновок полягає в недостатності виконання цієї умови. Навіть якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, збіжність не гарантується (класичний приклад - розбіжний гармонійний ряд $\sum 1/n^2$). Це підводить до концепції достатньої швидкості згасання: для забезпечення збіжності члени a_n повинні прямувати до нуля з інтенсивністю, що перевищує швидкість згасання членів гармонійного ряду. Цей висновок обґрунтовує необхідність переходу до потужніших, достатніх критеріїв.

Спеціалізовані ознаки є найбільш прямолінійними і застосовуються, коли функціональна структура a_n є сприятливою для аналітичного спрощення через операції ділення або кореня.

Ознака Д'Аламбера [10] встановлює характер ряду через границю відношення послідовних членів $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Теоретична доцільність: Цей критерій є оптимальним для рядів, загальний член яких містить факторіали ($n!$) або показникові функції (q^n). Наприклад, при дослідженні ряду, що містить $n!$, відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ забезпечує алгебраїчне скорочення факторіальних виразів, значно спрощуючи обчислення границі. Якщо $\rho < 1$, ряд абсолютно збіжний; якщо $\rho > 1$, ряд розбіжний.

Радикальна ознака Коші використовується для визначення збіжності через границю $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Теоретична доцільність: Цей критерій є найбільш ефективним, коли a_n містить вирази, піднесені до n -го степеня (наприклад, $(\frac{P(n)}{Q(n)})^n$). Обчислення кореня n -го степеня алгебраїчно спрощує вихідний вираз, оскільки знімає зовнішній степінь n .

Для обох критеріїв критичним є випадок, коли $\rho=1$. У цій ситуації обидва критерії не дають висновку щодо характеру ряду. Це свідчить про те, що швидкість згасання a_n є недостатньо високою для однозначного визначення через просте відношення чи корінь. Ця концептуальна межа вимагає переходу до більш тонких інструментів, що базуються на порівнянні з відомими еталонами.

У випадках, коли $\rho=1$ або структура a_n є чисто алгебраїчною (дробово-раціональною), застосовуються ознаки порівняння. Вони ґрунтуються на фундаментальному принципі, що ряди з однаковою асимптотичною поведінкою мають однаковий характер збіжності.

Еталонний ряд: Аналіз проводиться шляхом порівняння з узагальненим гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Його поведінка є аксіоматично відомою: збіжність при $\alpha > 1$ та розбіжність при $\alpha \leq 1$.

Гранична ознака порівняння: Твердження: Нехай $\sum a_n$ та $\sum b_n$ - ряди з додатними членами. Якщо існує границя $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ і при цьому $0 < L < \infty$, то обидва ряди мають однаковий характер збіжності.

Для дробово-раціональних рядів цей метод спрощується до застосування принципу асимптотичної еквівалентності. Цей принцип дозволяє ігнорувати молодші члени поліномів у чисельнику та знаменнику a_n , оскільки на нескінченності домінують лише найвищі степені n .

Визначення показника α : Показник α визначається шляхом аналізу співвідношення старших степенів n у чисельнику та знаменнику a_n . Наприклад, якщо a_n походить від поліномів степенів 2 і 5, то $\alpha = 5 - 2 = 3$.

Дослідження рядів, члени яких не є додатними, вимагає розширення таксономії на критерії абсолютної та умовної збіжності.

Ряд $\sum a_n$ збігається абсолютно, якщо збігається ряд, складений з його модулів $\sum |a_n|$. Це дозволяє застосовувати всі критерії для додатних рядів.

Випадок, коли ряд $\sum a_n$ збігається, але ряд модулів $\sum |a_n|$ розбігається. Для доведення умовної збіжності необхідно використовувати спеціалізовані критерії, такі як:

Критерій Лейбніца: Застосовується виключно для знакопозначених рядів.

Ознаки Діріхле та Абеля: Це більш просунуті критерії, необхідні для доведення умовної збіжності рядів, що мають складнішу структуру (наприклад, містять тригонометричні функції). Важливо: Для дослідження на умовну збіжність не можна використовувати ознаки порівняння, оскільки вони вимагають умови додатності членів.

Розв'язання традиційних задач на числові ряди є потужним інструментом для формування фундаментальних математичних компетенцій, які мають широке застосування в усіх розділах вищої математики. Зміст цих задач спрямований на розвиток стратегічного мислення, алгебраїчної точності та здатності до міждисциплінарного синтезу.

Центральною компетенцією, що розвивається в розділі, є здатність до стратегічної та таксономічної діагностики — швидкого і точного вибору найбільш ефективного інструменту дослідження, заснованого на аналізі структури a_n .

Студент розвиває навичку миттєво «діагностувати» функціональну форму a_n для визначення оптимального критерію (наприклад, Д'Аламбер для $n!$, ознака порівняння для раціональних a_n). Ця діагностика дозволяє уникнути невизначеності ($\rho=1$) і забезпечує раціональність розв'язку. Компетенція ефективності формується через навчання починати з необхідної умови збіжності, що є найпростішим тестом для швидкого відсікання нежиттєздатних гіпотез.

Вивчення випадків, коли $\rho=1$, формує компетенцію управління невдачею та перемикавання стратегій. Студент вчиться оперативно переходити від спеціалізованих критеріїв (Д'Аламбер/Коші) до універсальних (граничної ознаки

порівняння), що відображає загальний науковий метод, де неефективний інструмент замінюється на більш потужний.

Розв'язання задач на ряди вимагає бездоганної алгебраїчної точності та формування високої культури математичного доведення.

Індуктивне виведення: Задачі на знаходження a_n розвивають навичку індуктивного мислення - переходу від окремого до загального, що є основою для формулювання гіпотез і законів [13].

Обчислювальна Прецизія: При обчисленні суми S , успіх повністю залежить від точної алгебраїчної маніпуляції, зокрема, розкладання на найпростіші дроби. Будь-яка помилка в коефіцієнті розкладу унеможливорює телескопічний ефект, отже, ця частина формує деталізовану увагу та навичку вирішення систем алгебраїчних рівнянь [11].

Курс числових рядів є одним із ключових місць, де формується культура математичного доведення. Студент вчиться не просто обчислювати, а чітко формулювати висновки з використанням точного теоретичного апарату. Це вимагає:

Явного зазначення, який критерій застосовується (наприклад, «За граничною ознакою порівняння з рядом $\sum 1/n^\alpha \dots$ »).

Точного обґрунтування висновку, що впливає з отриманого значення границі ρ або L .

Числові ряди виступають як міст між різними розділами математики, а їх вивчення сприяє розвитку компетенції міждисциплінарного синтезу та евристики.

Згідно з методикою Корольського В. В. та Михайлової Я. А. [10], використання геометричного моделювання члена ряду є ключовим для формування евристичної інтуїції. Візуалізація a_n як геометричного елемента допомагає студентам інтуїтивно розуміти швидкість збіжності, а також дозволяє «добирати порівнювані числові ряди» для ознак порівняння. Це перетворює абстрактну аналітику на наочний процес, забезпечуючи реалізацію зв'язків між шкільною геометрією, алгеброю та вищим математичним аналізом.

Навички, отримані у цьому розділі, слугують фундаментальною базою для подальшого аналізу:

Підготовка до вищої школи: Вивчення числових рядів готує студентів вищих навчальних закладів (ВНЗ) до проходження курсів «Вищої математики» та «Математичного аналізу». Усі критерії збіжності (особливо Д'Аламбера і Коші) є безпосередньо застосовними для визначення радіуса збіжності степеневого ряду, що є наступним кроком у навчанні.

Геометричне моделювання дає можливість створювати нові дослідницькі задачі, що можуть бути використані для шкільних олімпіад та факультативів. Це переводить студента з позиції пасивного розв'язувача до позиції активного дослідника математичних закономірностей.

Висновки до першого розділу

Проведений аналіз змісту традиційних задач із теми «Числові ряди» показав, що теорія рядів є одним із фундаментальних розділів математичного аналізу, який поєднує алгебраїчні, аналітичні та геометричні аспекти. У процесі вивчення цього розділу формується не лише вміння виконувати конкретні обчислення чи доведення, але й розвивається індуктивне, логічне, абстрактне та стратегічне мислення.

Розгляд історичних аспектів розвитку вчення про ряди показав, що поняття нескінченної суми виникло ще в античності, але строгого аналітичного обґрунтування набуло у працях Коші, Ейлера, Бернуллі, Д'Аламбера. Сучасна теорія спирається на чітко сформульовані аксіоматичні принципи збіжності та розбіжності, що стали базовими для розуміння структури функціональних рядів, степеневих і тригонометричних розкладів.

Вивчення основних типів задач (на дії з рядами, знаходження загального члена, дослідження збіжності, обчислення частинних сум тощо) дає змогу побачити систематичну побудову навчального матеріалу у вищій математичній школі. Традиційна методика побудована на поступовому переході від формального

поняття рядка до глибинного розуміння його аналітичних властивостей через достатні ознаки збіжності (Д'Аламбера, Коші, Гаусса, Раабе, інтегральну, логарифмічну тощо). Такий підхід забезпечує формування критичного мислення і навичок добору оптимального методу для конкретного типу ряду.

Важливо, що у межах розділу здійснюється системний розвиток компетентностей. Розв'язання задач на ряди формує аналітичну культуру, точність обчислень та логічну завершеність доведень. Формується математична стратегічність — здатність оцінити задачу, відібрати правильну ознаку й побудувати обґрунтований висновок. Показано, що навіть проста перевірка необхідної умови збіжності ($\lim a_n = 0$) виступає як первинний інструмент наукового відбору гіпотез, що добре інтегрується з загальнонауковим методом дослідження.

Особливу увагу приділено геометричним моделям інтерпретації числових рядів, розробленим у дослідженнях В. В. Корольського та Я. А. Михайлової. Геометричне подання членів ряду (через площі, об'єми чи координати точок) сприяє формуванню просторової уяви і дозволяє інтуїтивно сприймати поняття границі та збіжності. Цей напрям має особливо важливе дидактичне значення, оскільки створює міст між шкільною геометрією та вищою аналітикою, залучаючи елементи дослідницької діяльності в процес навчання.

Загалом, аналіз першого розділу підтвердив, що традиційні задачі з теми «Числові ряди» є потужним засобом не лише для відпрацювання алгоритмів, а й для формування компетентностей аналітичного мислення, евристики та математичної культури. Однак водночас було виявлено, що в більшості методичних матеріалів таких прикладів переважає рутинність — недостатньо уваги приділяється нестандартним задачам, що вимагають творчого мислення та наочних інтерпретацій. Ця обставина і зумовлює потребу у впровадженні нестандартних, геометрично моделювальних підходів, що стали предметом подальшого розгляду в другому розділі.

РОЗДІЛ II. РОЗРОБКА І РЕАЛІЗАЦІЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ В ТЕМІ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»

2.1. Нестандартні задачі для знакосталих рядів

Дослідження знакосталих рядів традиційно зосереджується на встановленні умов їх збіжності та поведінки часткових сум. Проте сучасна методика навчання математичного аналізу потребує розширення кола завдань, що стимулюють глибше концептуальне розуміння природи таких рядів. Нестандартні задачі, які виходять за межі типових алгоритмічних процедур, дозволяють виявити приховані властивості знакосталості, продемонструвати роль асимптотичних оцінок, дослідити граничні випадки критеріїв збіжності та сформувати у студентів уміння творчо застосовувати теоретичний апарат. У цьому підпункті представлено добірку задач, спрямованих на розвиток аналітичного мислення та поглиблене опанування методів роботи із знакосталими рядами. Розглянемо приклади таких задач.

$$1. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

Розв'язання. Ми повинні показати, що збігається послідовність частинних сум S_n цього ряду:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для цього за допомогою очевидних перетворень приведемо S_n до вигляду:

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Тепер легко бачити, що послідовність S_n збігається, тобто збігається, за означенням, даний числовий ряд. Сума його :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$2. \text{ а) } q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots \quad (|q| < 1) \quad ;$$

$$\text{ б) } q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots \quad (|q| < 1).$$

Розв'язання. Нехай u_n і v_n — послідовності частинних сум рядів б) і а) відповідно, і u і v — їх суми. Тоді, використавши формулу Ейлера $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ ($i = \sqrt{-1}$), можемо записати:

$$u_n + iv_n = qe^{i\alpha} + q^2 e^{i2\alpha} + \dots + q^n e^{ina} = \frac{qe^{i\alpha} - q^{n+1} e^{i(n+1)\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}.$$

Беручи до уваги умову $|q| < 1$, маємо: $|qe^{i\alpha}| < 1$, звідси випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^{n+1} e^{i(n+1)\alpha}) = 0$. А тоді з попередньої формули знаходимо:

$$u + iv = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + iv_n) = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} = q \left(\frac{\cos \alpha - q}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} + i \frac{\sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} \right).$$

$$\text{Тому } u = q \frac{\cos \alpha - q}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}, \quad v = q \frac{\sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}.$$

Примітка. Якщо $z_n = x_n + iy_n$ — послідовність комплексних чисел і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \text{ то, за означенням, вважають } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

Розв'язання. Безпосередньо знаходимо:

$$S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

$$\text{Отже, } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$$

$$4. \text{ Дослідити збіжність ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

Розв'язання. Нехай $x \neq k\pi$ (k — ціле) і ряд збігається. Тоді повинна виконуватися необхідна умова збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0 \quad (x \neq k\pi) \quad (1)$$

$$\text{Звідси випливає, що } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)x = 0, \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$$

Беручи до уваги (1), з останнього співвідношення знаходимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0 \quad (x \neq k\pi) \quad (2)$$

Рівності (1) і (2) еквівалентні такій:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) = 0,$$

що суперечить відомій формулі $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Джерело суперечності — формула (1). Отже, якщо $x \neq k\pi$, то даний ряд розбігається. Збіжність же ряду при $x = k\pi$ (k — ціле) очевидна, і сума такого ряду дорівнює нулю.

5. Довести, що якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ де } A_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i \quad (p_0=1, p_1 < p_2 < \dots),$$

отриманий в результаті групування членів даного ряду без порушення порядку слідування їх, також збігається і має ту ж суму.

Доведення. Зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає існування границі будь-якої підпослідовності послідовності його частинних сум, що дорівнює сумі ряду S . Візьмемо цю підпослідовність у вигляді: $a_1 = S_{p_1}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{p_1-1} = S_{p_1},$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2} = S_{p_2},$$

$$\dots \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1} = S_{p_{n+1}}.$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_n} = S$ за умовою. Але оскільки послідовність частинних сум

другого ряду $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ дорівнює $S_{p_{n+1}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 + \dots + A_n)$ також

дорівнює S , що й треба було довести.

Обернене твердження є невірним, оскільки зі збіжності підпослідовності ще не випливає збіжність самої послідовності. Візьмемо приклад. Нехай $a_n = (-1)^{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, очевидно, розбіжний, хоча, наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1-1)$ отриманий з попереднього в результаті групування його членів по два, збігається.

6. Довести, що якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ додатні і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, отриманий в результаті групування членів цього ряду, збігається, то даний ряд також збігається.

Доведення. Нехай p_k — довільна підпослідовність натуральних чисел; S_n та S_{p_k} — частинні суми першого і другого рядів відповідно. Тоді, в силу додатності членів a_n , матимемо нерівності:

$$S_1 \leq S_n \leq S_{p_1} \text{ для всіх } n \ (1 \leq n \leq p_1),$$

$$S_{p_1} \leq S_n \leq S_{p_2} \quad \text{для всіх } n(p_1 \leq n \leq p_2),$$

.....

$$S_{p_k} \leq S_n \leq S_{p_{k+1}} \quad \text{для всіх } n(p_k \leq n \leq p_{k+1}).$$

Переходячи до границі в останній нерівності, коли $k \rightarrow \infty$, і враховуючи, що другий ряд збігається, отримуємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{p_{k+1}} = S.$$

Не користуючись ознаками збіжності п. 3° - 13°, дослідити збіжність рядів:

$$7. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Розв'язання. Очевидно, послідовність частинних сум даного ряду зростає.

Покажемо, що вона необмежена. З цією метою розглянемо її

підпослідовність: $S_{2^n} \quad (n=1, 2, \dots)$:

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7},$$

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

В силу оцінок

$$1 + \frac{1}{3} > 1, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \dots, \quad \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

маємо нерівність

$$S_{2^n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) > 1 + \frac{n-1}{4}$$

Звідси випливає, що підпослідовність S_{2^n} необмежена, а значить, необмежена і послідовність S_n . Таким чином, даний ряд розбіжний.

$$8. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$$

Розв'язання. Розглянемо ряд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}}\right) \\ & + \left(\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{1}{6\sqrt{7}} + \frac{1}{7\sqrt{8}}\right) + \left(\frac{1}{8\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{15\sqrt{16}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n \sqrt{2^{n+1}}} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

отриманий в результаті групування членів даного ряду. Помічаємо, що

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}}\right) < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) < \frac{2}{2^2} < \frac{1}{2^2} = \dots + \frac{1}{7\sqrt{7}} < \frac{4}{7\sqrt{7}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \frac{1}{2^n \sqrt{2^{n+1}}} \\ + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}} < \frac{1}{(2^n)^{\frac{3}{2}}} \dots < \frac{1}{(2^{n+1}-1)^{\frac{3}{2}}} < \dots < \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^n$$

Тому для послідовності частинних сум ряду (1) маємо оцінку:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n} < \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Звідси, враховуючи очевидну монотонність S_n , робимо висновок, що ряд

(1)

збіжний. А тоді, на підставі прикладу 6, збіжний і даний ряд.

9. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$

Розв'язання.

В силу оцінки

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) > \dots > \frac{1}{2} \ln(n+1),$$

даний ряд розбіжний.

10. Нехай дані два розбіжні ряди $\sum a_n$ і $\sum b_n$ з

невід'ємними членами. Що можна сказати про збіжність рядів: а)

$\sum \min(a_n, b_n)$ б) $\sum \max(a_n, b_n)$?

Розв'язання. а) Якщо $a_n \leq b_n$ при всіх n , то $\min(a_n, b_n) = a_n$. Отже, за умовою,

ряд а) розбігається. Якщо ж, наприклад, ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ розбіжні,

а ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}$, (1)

збіжні (це може бути, зокрема, в тому випадку, коли $a_{2n+1} \rightarrow \infty$, $b_{2n} \rightarrow \infty$

монотонно зростають, а a_{2n} , b_{2n+1} досить швидко прямують до нуля,

залишаючись додатними), то починаючи з деякого номера n_0 будемо мати:

$\min(a_n, b_n) = c_n$ ($n > n_0$), де c_n — послідовність, що складається з

чергування членів послідовностей a_{2n} і b_{2n+1} ($n > n_0$). Наприклад, вона може мати такий вигляд: $C_n = a_{(2n_0)}, b_{(2n_0+1)}, a_{(2n_0+2)}, b_{(2n_0+3)}, \dots$ ($n > n_0$)

В цьому випадку послідовність частинних сум ряду, що є підпослідовністю послідовності частинних сум збіжних рядів (1), збігається. Таким чином, ряд $\sum \min(a_n, b_n)$ може як бути збіжним, так і розбіжним.

б) Оскільки $\max(a_n, b_n) \geq a_n > 0$, то $S'_n \geq S_n \rightarrow +\infty$ (за умовою) при $n \rightarrow \infty$ (тут S'_n, S_n — послідовності частинних сум рядів б) і $\sum a_n$ відповідно). Отже, в цьому випадку ряд б) завжди розбігається.

11. Довести, що якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ також збіжний.

Доведення. Очевидно, послідовність частинних сум c_n другого ряду монотонно не спадає. Крім того, в силу $a_n \geq 0$ і збіжності першого ряду, справедливою є нерівність:

$$c_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = S_n^2 < \text{const}$$

Тому, на основі теореми про монотонну і обмежену послідовність, існує

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, тобто, за означенням, другий ряд збігається.

Зауважимо, що обернене твердження невірне. Дійсно, нехай $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Тоді ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{n-1})^2}$ збігається (за ознакою порівняння з узагальненим гармонічним рядом),

хоча ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ розбігається (див. приклад 7).

12. Довести, що якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ збігаються, то збігаються також ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$

Доведення. Використовуючи елементарну нерівність $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2)$, а

також умову теореми, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) < \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) = C$$

Звідси випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ збіжний. А тоді і другий ряд, в силу оцінки

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < 2(C + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|),$$

також збіжний. Збіжність третього ряду випливає зі збіжності першого, якщо покласти в ньому і скористатися тим, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний.

13. Довести, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Доведення. За означенням границі, для $\forall \varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < |a|$) $\exists N$ таке, що при $\forall n > N$ і будь-якому натуральному $p > 0$ справедливі нерівності $a - \varepsilon < (n+m)a_{n+m} < a + \varepsilon$ ($m = 1, 2, \dots, p$), або нерівність

$$\frac{a - \varepsilon}{n+m} < a_{n+m} < \frac{a + \varepsilon}{n+m}.$$

Сумуючи ці нерівності по m від 1 до p , отримуємо:

$$(a - \varepsilon) \sum_{m=1}^p \frac{1}{n+m} < \sum_{m=1}^p a_{n+m} < (a + \varepsilon) \sum_{m=1}^p \frac{1}{n+m}$$

Звідси видно, що, в силу розбіжності гармонічного ряду $\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^p \frac{1}{n+m} = +\infty \right)$, і всіх $p > 0$ залишок розглянутого ряду розбіжний. Отже, розбіжний і сам ряд.

14. Довести, що якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) з монотонно спадними членами збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

Доведення. За критерієм Коші, зі збіжності ряду випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ таке, що при всіх $n > N$ і всіх $p > 0$ справедливою є нерівність

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки a_n — монотонна і додатна послідовність,

то з останньої нерівності випливає, що $p a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Вважаючи, далі, послідовно

$$p = n \text{ і } p = n+1, \text{ звідси знаходимо, що } 2n a_{2n} < \varepsilon \text{ і } (2n+1) a_{2n+1} < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Отже, $n a_n < \varepsilon$ при будь-якому (парному і непарному) $n > 2N$, що й треба було довести.

Користуючись критерієм Коші, довести збіжність наступних рядів:

$$15. \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$$

Доведення. Фіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Знайдемо число N таке, що при всіх $n > N$ і довільному $p > 0$ буде справедлива оцінка $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, де S_n — послідовність частинних сум даного ряду. Маємо:

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \dots + \\ &+ \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} = \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \\ &- \dots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \\ &- \dots - \frac{1}{n+p} \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, якщо за число N взяти $\frac{2}{\varepsilon}$. Тому, згідно з критерієм Коші, ряд збіжний.

$$16. \frac{\cos x + \cos y}{1^2} + \frac{\cos x^2 + \cos y^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n + \cos y^n}{n^2} + \dots$$

Доведення. Знайдемо число N таке, що при всіх $n > N$ і довільному $p > 0$ буде виконуватися нерівність $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Маємо:

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos x^{n+1} + \cos y^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2} + \cos y^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\cos x^{n+p} + \cos y^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \\ &\leq \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{2}{(n+p)^2} < \frac{2}{n(n+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{2}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Отже, поклавши $N = \frac{1}{\varepsilon}$, за критерієм Коші, отримаємо, що даний ряд збіжний.

Користуючись критерієм Коші, довести розбіжність наступних рядів:

$$17. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Доведення. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Покладемо $p = n$. Тоді

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon \text{ при всіх } n.$$

Отже, за критерієм Коші, даний ряд розбіжний.

$$18. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

Доведення. Оскільки

$S_{6n} - S_{3n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \dots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}$ — де S_{6n} та S_{3n} підпоследовності
последовності частинних сум даного ряду, то

$$S_{6n} - S_{3n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \dots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}$$

Тому, згідно з критерієм Коші, ряд розбіжний.

$$19. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

Доведення. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Оцінімо

$$\begin{aligned} \text{різницю: } |S_{2n} - S_n| &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \\ &\dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{n}{2n+1} > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

при всіх n . Таким чином, за критерієм Коші, ряд розбіжний.

$$20. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} \cdot (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0,$$

то, за ознакою Даламбера, ряд збіжний.

$$21. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

Розв'язання. Помічаємо, що загальний член ряду має вигляд:

$$a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-2)}$$

$$\text{Звідси знаходимо: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}$$

Таким чином, згідно з ознакою Даламбера, ряд збіжний.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где } a_n =$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где } a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{якщо } n = m^2; \text{ і } a_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{якщо } n \neq m^2 \quad (m \text{ — натуральне число}).$$

Розв'язання. Покажемо, що ряд

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{8^2}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{1}{(n^2)^2} + \frac{1}{((n^2+1))^2} + \dots + \frac{1}{(((n+1)^2-1))^2}\right) + \dots \quad (1)$$

отриманий в результаті групування членів даного ряду, збігається. Для цього оцінімо спочатку кожний член ряду (1).

Маємо:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} < 2 \cdot 1; \quad \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{8^2} < \frac{1}{4^2} + \frac{4}{5^2} < 2 \cdot \frac{1}{4^2}; \\ \frac{1}{(n^2)^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} + \dots + \frac{1}{((n+1)^2-1)^2} < \frac{1}{(n^2)^2} + \frac{2n}{(n^2+1)^2} < 2 \cdot \frac{1}{n^2}; \dots$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ за ознакою порівняння зі степеневою, збіжний, то, в силу загальної ознаки порівняння, збіжний і ряд (1). А тоді, на основі твердження, доведеного в прикладі 6, робимо висновок, що даний ряд також збіжний.

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2(kx)}{1+x^2+\cos^2(kx)}$$

Розв'язання. Легко бачити, що

$$\prod_{k=1}^n \frac{\sin^2(kx)}{1+x^2+\cos^2(kx)} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}. \quad (1)$$

Припускаючи, що $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд, очевидно, збігається) і застосовуючи до ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x^2)^n} \quad (2)$$

ознаку Даламбера, помічаємо, що ряд (2) збіжний.

Використовуючи тепер нерівність (1) і загальну ознаку порівняння, можемо стверджувати, що даний ряд збіжний.

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n+1}}}{\left(n^{\frac{1}{n+1}}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1$, то, в силу необхідної ознаки, ряд розбіжний

25.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^n}{2^{\frac{n+1}{2}} n^{n+2}} = \frac{1}{n^2 2^{\frac{n+1}{2}}} \equiv a_n$, а ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

збіжний, то, в силу загальної ознаки порівняння, збіжний і даний ряд.

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$

Розв'язання. Неважко знайти, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2\frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1$.

Тому, згідно з ознакою Коші, ряд збіжний.

27. $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$

Розв'язання. Помічаючи, що загальний член ряду має вигляд:

$$a_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ коренів}) \quad (n=1, 2, \dots),$$

і вважаючи тут $\sqrt{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, отримуємо: $a_n = \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < \frac{\pi}{2^n}$.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ збіжний, то, за загальною ознакою порівняння, збіжний і даний ряд.

28. Довести, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($a_n > 0$), то $a_n = o(q_1^n)$, де $q_1 > q$.

Доведення. Нехай число $\varepsilon > 0$ і настільки мале, що виконується нерівність $\varepsilon < q_1 - q$.

За означенням границі, для даного ε можна знайти такий номер N , починаючи з якого виконуються нерівності:

$$q - \varepsilon < \frac{a_{N+1}}{a_N} < q + \varepsilon, \quad q - \varepsilon < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q + \varepsilon, \dots,$$

$$q-\varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < q+\varepsilon.$$

Перемножуючи почленно ці нерівності, отримуємо:

$$a_N(q-\varepsilon)^{n-N} < a_n < a_N(q+\varepsilon)^{n-N}$$

Звідки

$$0 < \frac{a_n}{q_1^n} < a_N \left(\frac{q+\varepsilon}{q_1} \right)^n (q+\varepsilon)^{-N} \quad \left(\frac{q+\varepsilon}{q_1} < 1 \right).$$

Тепер видно, що збільшенням числа n можна досягти нерівності

$$\frac{a_n}{q_1^n} < a_N(q+\varepsilon)^{-N} \left(\frac{q+\varepsilon}{q_1} \right)^n < \varepsilon, \text{ що показує, що } a_n = o(q_1^n).$$

29. Нехай для членів строго додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1 \text{ при } n \geq n_0. \text{ Довести, що для залишку ряду } R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \text{ справедлива}$$

$$\text{оцінка } R_n \leq a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \text{ якщо } n \geq n_0.$$

Доведення. В силу умови теореми, маємо:

$$a_{n_0+1} \leq \rho a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq \rho^2 a_{n_0}, \quad \dots, \quad a_{n+1} \leq \rho^{n-n_0+1} a_{n_0}, \quad \dots$$

$$\text{звідки } R_n \leq a_{n_0} \rho^{n-n_0+1} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho} \text{ при } n \geq n_0, \text{ що й треба було довести.}$$

30. Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(4n)!!}$ достатньо взяти, щоб відповідна частинна

сума S_n відрізнялася від суми ряду S менше, ніж на $\varepsilon = 10^{-6}$?

Розв'язання. Будемо користуватися результатом попереднього прикладу.

Покладемо тут $n_0 = 1$. Тоді $a_{n_0} = \frac{1}{2}$, а при $n \geq 1$ маємо: $\rho \leq \frac{1}{3}$.

$$\text{Отже, } R_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n \leq 10^{-6}, \text{ звідки знаходимо: } n \geq \frac{6 - \lg\left(\frac{3}{4}\right)}{\lg 3} \approx 12,3. \text{ Таким чином, для}$$

досягнення заданої точності достатньо взяти 13 членів ряду.

31. Довести, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ ($a_n > 0$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ таким, щоб виконувалася нерівність $\varepsilon < 1 - q$. В силу існування скінченної верхньої границі, для вибраного ε знайдеться такий номер N , починаючи з якого справедливі нерівності

$$0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q + \varepsilon \quad (i = N, N+1, \dots, n-1)$$

Перемножуючи ці нерівності, знаходимо:

$$0 < a_n < a_N \frac{(q+\varepsilon)^n}{(q+\varepsilon)^N}.$$

Оскільки ряд $\sum (q+\varepsilon)^n$ збіжний, то, в силу загальної ознаки порівняння, робимо висновок, що ряд $\sum a_n$ також збіжний.

Обернене твердження невірне. Розглядаючи, наприклад, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots,$$

помічаємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^k = \infty,$$

в той час як ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right),$$

очевидно, збіжний. Таким чином, з того, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний не випливає, взагалі кажучи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$.

32. Довести, що якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (1)$$

то існує також

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \quad (2)$$

Обернене твердження невірне: якщо існує границя (2), то границя (1) може і не існувати. Для доведення того, що з (2) не випливає (1), розглянемо ряд з членами

$$a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}. \text{ Маємо: } \rho_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2(3+(-1)^n)}. \text{ Оскільки } \rho_{2n} = \frac{1}{4}, \quad \rho_{2n+1} = 1, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \text{ не існує. В}$$

той же час

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3+(-1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(3+(-1)^n)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \left(\ln 3 + \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)} = \frac{1}{2}.$$

Отже, обернене твердження невірне.

33. Довести, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ ($a_n > 0$), то а) при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ збіжний; б)

при $q > 1$ цей ряд розбіжний (узагальнена ознака Коші).

Доведення. Нехай $q < 1$. Для фіксованого ε , що задовольняє умову $0 < \varepsilon < 1 - q$, в силу умови прикладу, знайдеться номер N , починаючи з якого виконуються нерівності $0 < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$, ...,

$0 < a_n < (q + \varepsilon)^n$ ($q + \varepsilon < 1$). Але оскільки ряд $\sum (q + \varepsilon)^n$ збігається, то, за загальною ознакою порівняння, з останньої нерівності випливає, що ряд $\sum a_n$ збігається. Нехай $q > 1$. Тоді для ε , вибраного з умови $0 < \varepsilon < q - 1$, знайдеться номер M такий, що при всіх $k > M$ члени підпослідовності a_{n_k}

$(\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \rightarrow q \text{ при } n_k \rightarrow +\infty)$ будуть задовольняти

нерівностям

$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q - \varepsilon > 1$, ..., $a_{n_{M+1}} > (q - \varepsilon)^{n_{M+1}}$, $a_{n_{M+2}} > (q - \varepsilon)^{n_{M+2}}$, ..., $a_{n_k} > (q - \varepsilon)^{n_k}$ ($q - \varepsilon > 1$).

Звідси випливає, що загальний член ряду до нуля не прямує, тобто ряд $\sum a_n$ розбіжний. Дослідити збіжність рядів:

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$$

Розв'язання. Маючи на увазі узагальнену ознаку Коші,

$$\text{знаходимо: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}(\sqrt{2}+(-1)^n)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^{2n-\ln n}$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} < 1$$

то, за узагальненою ознакою Коші, даний ряд збіжний.

$$36. \left(\frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^p + \dots$$

Розв'язання. Розглянемо відношення

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^p \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)} \right)^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Згідно з ознакою Гаусса, звідси знаходимо: при $p > 2$ ряд збіжний, а при $p \leq 2$ — розбіжний.

Примітка. Область збіжності можна було б знайти, використовуючи ознаку Раабе.

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$$

Розв'язання. Перетворюючи відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ до вигляду $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! e^n}{n^{n+p}} \cdot \frac{(n+1)^{n+p+1}}{(n+1)! e^{n+1}} =$

$$\frac{n! e^n}{n^{n+p}} \cdot \frac{(n+1)^{n+p+1}}{(n+1)n! e^n e} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e} \cdot e^{(n+p) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{1}{e} \cdot e^{(n+p) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = \frac{1}{e} \cdot e^{\left(1 + \frac{p}{n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{p-1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^{\frac{p-0.5}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{p-0.5}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ і використовуючи ознаку}$$

Раабе, робимо висновок, що при $p > \frac{3}{2}$ ряд збіжний.

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \dots (2+\sqrt{n})}$$

Розв'язання. Спрощуючи відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1}) \dots (2+\sqrt{n})} \cdot \frac{(2+\sqrt{1}) \dots (2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}} =$

$$= \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}/\sqrt{n!}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}} \text{ і складаючи послідовність Раабе}$$

R_n , встановлюємо, що ряд збіжний.

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$$

Розв'язання. Виключимо з розгляду тривіальний випадок, коли p — ціле від'ємне або нуль, і спростимо відношення

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{p}{n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{q+1} \cdot \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{q+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{q+1}{n} - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{q-p+1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q - p + 1$, то, згідно з ознакою

Раабе, ряд збіжний, якщо

$$q > p.$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}$$

Розв'язання. Складаючи відношення

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q = \\ &= \left(1 + \frac{p}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{p}{2n(1+1/(2n))} + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{p}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{p+q}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

отримуємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{p}{2} + q$ і, на основі ознаки Раабе, робимо висновок, що

даний ряд збіжний при $\frac{p}{2} + q > 1$.

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{q(q+1) \cdots (q+n-1)} \right)^a \quad (p > 0, q > 0)$$

Розв'язання. Приводячи відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ до вигляду

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{q+n}{p+n} \right)^a = \left(1 + \frac{q-p}{p+n} \right)^a = \left(1 + \frac{q-p}{p+n} \right)^a = 1 + \frac{a(q-p)}{p+n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ і користуючись}$$

ознакою Раабе, встановлюємо, що ряд збіжний при $a(q-p) > 1$.

Примітка. У прикладах 37, 39—41 $o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right)$. Тому, згідно з ознакою Гаусса,

для встановлення умови розбіжності відповідних рядів у всіх отриманих

нерівностях замість знака $>$ слід поставити знак $<$.

42. Довести, що якщо для строго додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $n \rightarrow \infty$ виконується

$$\text{умова } \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\rho}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ то } a_n = O\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right), \text{ де } \varepsilon > 0 \text{ довільно мале, причому, якщо}$$

$\rho > 0$, то $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто a_n при $n \geq n_0$ монотонно спадає, прямуючи

до нуля, коли $n \rightarrow \infty$. Доведення. Почнемо зі випадку, коли $\rho > 0$ Фіксуємо

довільне $\varepsilon_0 (0 < \varepsilon_0 < p)$, з умови існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \rho$ знаходимо:

$$1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{i} < \frac{a_i}{a_{i+1}} < 1 + \frac{\rho + \varepsilon_0}{i} \quad (i = N, \dots, n-1)$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \Rightarrow \frac{1 - \rho - \varepsilon_0}{n} < \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{1 + \rho + \varepsilon_0}{n} \quad (i = N, \dots, n-1), \text{ де } N \text{ — достатньо великий}$$

фіксований номер. Із написаних нерівностей випливає:

$$\left(1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{N}\right) \left(1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{N+1}\right) \dots \left(1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{n-1}\right) < \frac{a_N}{a_n} < \left(1 + \frac{\rho + \varepsilon_0}{N}\right) \left(1 + \frac{\rho + \varepsilon_0}{N+1}\right) \dots \left(1 + \frac{\rho + \varepsilon_0}{n-1}\right)$$

Звідси, враховуючи, що $a_n > 0$, а також користуючись нерівністю Бернуллі

$$(\text{приклад 4, гл. 1, ч. 1}), \text{ отримуємо: } 0 < a_n < \frac{a_N}{\left(1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{N}\right) \left(1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{N+1}\right) \dots \left(1 + \frac{\rho - \varepsilon_0}{n-1}\right)} < \frac{a_N}{1 + (p - \varepsilon_0) \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)}$$

(А) Оскільки $p - \varepsilon_0 > 0$, а $\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то з нерівності (А) випливає, що $a_n \rightarrow 0$. Беручи до уваги ще, що при $\rho > 0$ послідовність a_n монотонна (це видно з того, що при $n \geq n_0$, де n_0 — достатньо велике число, $\frac{\rho}{n} > o\left(\frac{1}{n}\right)$, отже, $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$),

переконуємося у справедливості другої частини твердження. Для доведення першої частини твердження (ρ — будь-яке, $\varepsilon > 0$) покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{p-\varepsilon} a_n) = 0$.

Вводячи позначення $\varepsilon_n = n^{p-\varepsilon} a_n$ і складаючи відношення $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$,

$$\text{отримуємо: } \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\varepsilon} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\varepsilon} \left(1 + \frac{\rho}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\varepsilon - \rho}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{\rho}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \text{ Помічаючи, що это}$$

відношення має той же вигляд, що і $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, на основі доведеного вище, приходимо до

висновку, що $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ якщо:

$$43. a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1)$$

Розв'язання. Перетворюючи вираз для загального члена a_n і використовуючи при цьому розкладання $(1+x)^m$ і $\ln(1+x)$ за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано,

$$\text{маємо: } a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p} \ln \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = n^{-\frac{p}{2}} \left(2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-p} \left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$n^{-\frac{p}{2}} 2^{-p} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(-\frac{2}{n+1} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}\right)$ при $n \rightarrow \infty$. Видно, що, за ознакою порівняння зі степенною, ряд збігається при $p > 0$.

$$44. a_n = \log_{n^b} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right) \quad (a > 0, b > 0).$$

Розв'язання. Користуючись прийомом попереднього прикладу,

маємо: $a_n = \frac{\ln(1 + n^{-1} \sqrt[n]{a})}{n \ln b} = \frac{1}{n \ln b} \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Отже, за ознакою порівняння зі степенною, ряд збігається, якщо $b \neq 1$.

$$45. a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$$

Розв'язання. Користуючись розкладаннями функцій $\ln(1+x)$ і e^x за формулою Маклорена,

$$\begin{aligned} \text{знаходимо: } a_n &= \left(e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right)^p = e^p \left(1 + e^{-1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}\right)^p = \\ &= e^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо $p > 1$, то, згідно з ознакою порівняння зі степенною, ряд збігається.

46 Довести ознаку Жаме: додатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, якщо

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1 \quad \text{при } n > n_0 \quad \text{і розбігається, якщо } \left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leq 1 \quad \text{при } n > n_0.$$

Доведення. Безпосередньо з першої умови знаходимо:

$$0 < a_n < \left(1 - p \frac{\ln n}{n}\right)^n \quad (\text{зауважимо, що при } n > n_0 \text{ виконується нерівність } 1 - p \frac{\ln n}{n} > 0)$$

$$\text{звідки } 0 \leq a_n \leq e^{n \ln\left(1 - p \frac{\ln n}{n}\right)}.$$

Використовуючи розкладання функцій $\ln(1+x)$, e^x за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, з останньої нерівності маємо

$$\text{нерівність } 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^p} e^{-p^2 \frac{\ln^2 n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = \frac{1}{n^p} - \frac{p^2 \ln^2 n}{2n^{p+1}} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{p+1}}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ з якого випливає,}$$

що ряд збігається при $p > 1$.

Роблячи аналогічно, з другої нерівності умови прикладу можна знайти, що

$$a_n \geq \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \text{ Остання нерівність означає, що ряд}$$

розбігається.

47. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) збігається, якщо існує $x > 0$ таке, що

$$\frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} \geq 1+x \text{ при } n \geq n_0, \text{ і розбігається, якщо } \frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} \leq 1 \text{ при } n \geq n_0 \text{ (логіфімічна ознака)}.$$

Доведення. З умови прикладу легко отримуємо нерівності $0 < a_n \leq \frac{1}{n^{1+x}}$ при

$n \geq n_0$ (перший випадок), а також нерівність $a_n \geq \frac{1}{n}$ при $n \geq n_0$ (другий

випадок). Отже, за ознакою порівняння, можна стверджувати, що в

першому випадку ряд збігається, якщо $x > 0$, а в другому розбігається, що й

треба було довести. Дослідити на збіжність ряди із загальним членом a_n ,

якщо:

$$48. a_n = \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}} \quad (n > 2)$$

$$\text{Розв'язання. Оскільки } \frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 1,1 \text{ при}$$

$n > \exp(\exp(\exp 1, 1))$, то, згідно з логарифмічною ознакою, ряд збігається.

$$49. a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \quad (n > 1)$$

$$\text{Розв'язання. В силу оцінки } \frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \leq 1 \text{ справедливої при достатньо}$$

великому n ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0$), на основі логарифмічної ознаки, стверджуємо, що

даний ряд розбігається. Примітка. Ні ознака Жаме, ні логарифмічна ознака не

дозволяють встановити, чи буде збіжним ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\gamma}}$ при $\gamma > 0$. Дійсно,

$$\text{застосовуючи, наприклад, логарифмічну ознаку, отримуємо: } \frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} = 1 + \gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}.$$

Звідси випливає, що оскільки $\frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} \geq 1$ при всіх n , то ряд, за

логіфімічною ознакою, не може розбігатися. З іншого боку, оскільки $\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \rightarrow 0$,

при $n \rightarrow \infty$, то для будь-яких $\gamma > 0$ і $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що $\frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} < 1 + \varepsilon$

при $n > n_0$; іншими словами, в силу прямування до нуля члена $\gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$, не

існує $\alpha > 0$ такого, щоб при всіх $n > n_0$ виконувалася нерівність

$\gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} > \alpha > 0$, отже, нерівність $\frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} \geq 1 + \varepsilon$. Таким чином, ряд не може ні збігатися,

ні розбігатися. Це означає, що питання про збіжність вказаного ряду не може бути

вирішене за допомогою логарифмічної ознаки. Аналогічну ситуацію отримаємо,

якщо для дослідження даного ряду застосуємо ознаку Жаме.

Користуючись інтегральною ознакою Коші, дослідити збіжність рядів із

загальним членом a_n :

50. $a_n = \frac{1}{n \ln n^p} \quad (n > 1).$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{x \ln x^p}$ при $x > 1$ є додатною і, судячи за знаком похідної,

спадною (при будь-якому p і достатньо великому x). Тому для дослідження

даного ряду на збіжність можна застосувати інтегральну ознаку Коші.

Маємо: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x^p} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \frac{1}{(p-1)2^{p-1}} < \infty$ при $p > 1$. Отже, ряд також збігається при $p > 1$.

51. $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln(\ln n))^q} \quad (n > 2).$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, неважко встановити, що тут

застосовна інтегральна ознака. Розглянемо інтеграл

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x (\ln(\ln x))^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$$

Якщо $p = 1$, то звідси знаходимо, що

$$I = \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{dz}{z^q} = \frac{z^{-q+1}}{1-q} \Big|_{\ln(\ln 3)}^{\infty} < \infty$$

При $q > 1$. Отже, ряд збігається при $p = 1$ і $q > 1$.

Якщо $p > 1$, то в силу того, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln^q t}{t^\varepsilon} = 0$ при $\varepsilon > 0$ і будь-якому q можемо

написати $\frac{1}{t^p \ln^q t} \leq \frac{1}{t^a}$ при достатньо великому $t > 0$, де $p \geq a > 1$.

Аналогічно, якщо $p < 1$, то при достатньо великому $t > 0$ справедливою є нерівність $\frac{1}{p \ln^q t} \geq \frac{1}{t^a}$, де $p \leq a < 1$.

А тоді, на основі ознаки порівняння, можемо стверджувати, що розглянутий ряд збіжний, якщо $p > 1$, і розбіжний, якщо $p < 1$ (в обох випадках q — будь-яке). Це ж, згідно з інтегральною ознакою Коші, стосується і даного ряду.

52. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \dots \cdot \ln(n+1)}{\ln(2+p) \cdot \ln(3+p) \cdot \dots \cdot \ln(n+1+p)}$ ($p > 0$),

використовуючи інтегральну ознаку та ознаку порівняння.

Розв'язання. Ряд розбіжний, як випливає з оцінки загального члена ряду:

$$\begin{aligned} \frac{\ln 2 \ln 3 \dots \ln(n+1)}{\ln(2+p) \ln(3+p) \dots \ln(n+p+1)} &\geq \ln 2 \times \frac{\ln(n_0+2) \ln(n_0+3) \dots \ln(n+1)}{\ln(p+2) \ln(p+3) \dots \ln(p+n+1)} > \\ &> \frac{\ln 2}{\ln(p+n-n_0+2) \ln(p+n-n_0+3) \dots \ln(p+n+1)} \geq \frac{\ln 2}{\ln^{n_0}(p+n+1)}, \end{aligned}$$

де ціле $n_0 > p > 0$, і попереднього прикладу.

53. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^2}$, де $v(n)$ — число цифр числа n .

Розв'язання. Легко показати, що $v(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \leq \ln n + 1$.

Оскільки $\frac{v(n)}{n^2} \leq \frac{\ln n + 1}{n^2}$ і ряди $\sum \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ збіжні, то, згідно з ознакою порівняння, збіжний і даний ряд.

54. Нехай λ_n ($n=1, 2, 3, \dots$) — послідовні корені рівняння $\operatorname{tg} x = x$. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

Розв'язання. Графічно можна встановити, що для $\lambda_n > 0$ справедливі нерівності

$$n\pi < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots). \text{ Тоді}$$

$$\frac{1}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} < \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{n^2 \pi^2}$$

і, в силу ознаки порівняння зі степеневою, даний ряд збіжний. Аналогічно діємо у випадку $\lambda_n < 0$.

55. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

Розв'язання. Згідно з інтегральною ознакою Коші, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ розбіжний.

Користуючись нерівністю $\ln(n!) < n \ln n$ і загальним ознакою порівняння, робимо висновок, що даний ряд також розбіжний.

56. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ зі строго додатними монотонно спадними членами збігається або розбігається одночасно з рядом $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

Доведення. Оскільки

$$0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^{n+1}} \leq \\ \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}.$$

то, в силу результату прикладу 48, а також теореми про монотонну й обмежену послідовність, зі збіжності другого ряду випливає збіжність першого.

З іншого боку, в силу оцінки

$$\frac{1}{2} (4a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^{n+1}},$$

зі збіжності першого ряду випливає збіжність другого.

57. Нехай $f(x) > 0$ при $x \geq 1$ — монотонно незростаюча функція. Довести, що якщо

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний, то для залишку його $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ справедлива оцінка

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ з точністю до 0,01.

Доведення. В силу монотонного незростання функції $f(x)$, маємо нерівності $0 < f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ при $k \leq x \leq k+1$ ($k=1, 2, \dots$), використовуючи які, знаходимо:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \\ \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx > \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k+1) = R_n - f(n+1)$$

Тепер легко бачити, що з отриманих нерівностей випливає необхідна оцінка. Для обчислення суми ряду з указаною точністю скористаємося доведеною вище оцінкою. В даному випадку $R_n=0,01$; $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

Тоді $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0,01 < \frac{1}{(n+1)^3} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ звідки отримуємо число перших членів ряду n , яке потрібно взяти для обчислення суми ряду з точністю до 0,01: $n=7$. Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} \approx \\ \approx 1 + 0.1250 + 0.0370 + 0.0156 + 0.0080 + 0.0046 + 0.0029 \approx 1.1931 \approx 1.19$$

(з недостатчею).

58. Довести ознаку Лобачевського: строго додатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 3

монотонно спадними до нуля членами збігається або розбігається одночасно з рядом $\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$, де p_m — найбільший номер членів a_n що задовольняють нерівність :

$$a_n \geq 2^{-n} (n=1, 2, \dots, p_m)$$

Доведення. В силу умов теореми, маємо ланцюжок нерівностей:

$$a_1 > a_2 > \dots > a_{p_0} > 2^{-k} > a_{p_0+1} > a_{p_0+2} > \dots > a_{p_1} \geq \\ \geq 2^{-(k+1)} > a_{p_1+1} > \dots > a_{p_2} > 2^{-(k+2)} > a_{p_2+1} > \dots > a_{p_{m-1}+1} \geq 2^{-(k+m-1)} > a_{p_{m-1}+2} > \dots > a_{p_m} > 2^{-(k+m)}$$

(1)

де k — деяке натуральне число.

З нерівностей (1) знаходимо:

$$\frac{p_0}{2^k} < a_1 + a_2 + \dots + a_{p_0} < p_0 a_1,$$

$$\frac{p_1 - p_0}{2^{k+1}} < a_{p_0+1} + \dots + a_{p_1} < \frac{p_1 - p_0}{2^k}$$

$$\frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} < a_{p_{m-1}+1} + \dots + a_{p_m} < \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m-1}}$$

звідки випливає

$$\frac{p_1 - p_0}{2^{k+1}} + \frac{p_1 - p_k}{2^{k+1}} + \dots + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} < S_{p_m} < p_0 a_1 + \frac{p_1 - p_0}{2^k} + \frac{p_1 - p_k}{2^{k+1}} + \dots +$$

$$+\frac{p_m-p_{m-1}}{2^{k+m-1}}, \quad \text{де } S_{p_m}=a_1+a_2+\dots+a_{p_m}=\sum_{n=1}^{p_m} a_n \quad (2) —$$

підпослідовність послідовності частинних сум першого ряду.

$$\text{Далі, оскільки } \frac{p_0}{2^k} + \frac{p_1-p_0}{2^{k+1}} + \dots + \frac{p_m-p_{m-1}}{2^{k+m}} = \frac{1}{2^k} \left(C_m + \frac{p_m}{2^m} \right) > \frac{C_m}{2^k}$$

$$p_0 a_1 + \frac{p_1-p_0}{2^k} + \frac{p_2-p_1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{p_m-p_{m-1}}{2^{k+m-1}} = p_0 a_1 + \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{2^k} \left(C_m - 2p_0 + \frac{p_m}{2^m} \right) \right) < p_0 a_1 + \frac{C_m}{2^k} \text{ де } 1 C_m C_m$$

послідовність частинних сум другого ряду, то з (2) отримуємо оцінку

$$\frac{C_m}{2^{k+1}} < S_{p_m} < p_0 a_1 + \frac{C_m}{2^{k-1}} \text{ З отриманої оцінки і монотонності } C_m \text{ і } S(p_m) \text{ випливає,}$$

що якщо збігається перший ряд, то збігається і другий, а зі збіжності

другого ряду випливає збіжність першого.

Дослідити збіжність наступних рядів:

59.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cot \left(\frac{\pi n}{4n-2} \right) - \sin \left(\frac{\pi n}{2n+1} \right) \right)$$

Розв'язання. Застосовуючи формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, а також користуючись елементарними перетвореннями тригонометричних функцій, отримуємо:

$$\begin{aligned} a_n &= \cot \left(\frac{\pi n}{4n-2} \right) - \sin \left(\frac{\pi n}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{1 - \tan \left(\frac{\pi}{2(4n-2)} \right)}{1 + \tan \left(\frac{\pi}{2(4n-2)} \right)} - \cos \left(\frac{\pi}{2(2n+1)} \right) \\ &\approx \left(1 - 2 \cdot \frac{\pi}{2(4n-2)} \right) - 1 + \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} = \\ &= -\frac{\pi}{4n-2} + \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{4n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \\ &= O^* \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, за ознакою порівняння зі степеневою, ряд розбігається.

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$$

Розв'язання. При $n \geq 3$ справедливі нерівності $\frac{n-2}{n^{\alpha}} < \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$.

Оскільки ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^{\alpha}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, згідно з інтегральною ознакою, збіжні при $\alpha > 2$, то досліджуваний ряд, в силу ознак порівняння, також збіжний при $\alpha > 2$.

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right).$$

Розв'язання. Користуючись формулою Маклорена, отримуємо:

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{n^2+1}}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Звідси, на основі інтегральної ознаки і загальної ознаки порівняння, робимо висновок, що даний ряд збіжний.

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Розв'язання. Оскільки $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{2}{n\pi}$ ($n=1,2,\dots$), то $\ln^2\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) < \ln^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Отже,

$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} > \frac{1}{\ln^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)} > \frac{2}{\pi n \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = O^*\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Таким чином, на основі інтегральної ознаки Коші і загальної ознаки порівняння, з останнього співвідношення випливає, що даний ряд розбіжний.

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) \right)^{n^3}.$$

Розв'язання. Очевидно, при $a=0$ ряд розбіжний. При $a \neq 0$ застосуємо ознаку

$$\text{Коші: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sin^2\left(\frac{a}{n}\right) \right)^{\frac{n^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1.$$

Отже, ряд збіжний, якщо $a \neq 0$.

$$64. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1).$$

Розв'язання. При $a \geq 0$ ряд розбіжний, оскільки загальний член ряду не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Тому будемо вважати, що $a < 0$, і при

встановленні порядку прямування загального члена ряду при $n \rightarrow \infty$ будемо користуватися формулою Маклорена.

Маємо:

$$n^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \ln n} - 1 = \frac{\ln n}{n^{-\alpha}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Звідси, на основі інтегральної ознаки і загальної ознаки збіжності, бачимо, що ряд збіжний при $a < -1$.

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \quad (a > 0, b > 0).$$

Розв'язання. Маємо:

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{n+a}}.$$

Оскільки послідовності $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b}$ і $\left(1 + \frac{b}{n}\right)^{n+a}$ при $n \rightarrow \infty$ прямують до сталих e^a і e^b відповідно, то $a_n \sim \frac{e^{-a-b}}{n^{a+b}}$ при $n \rightarrow \infty$.

Отже, за ознакою порівняння зі степеневим, даний ряд збіжний при $a+b > 1$.

$$66. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \right)$$

Розв'язання. Очевидно, якщо $\alpha \leq 0$, то ряд розбіжний, бо загальний член ряду не прямує до нуля. Далі, при $\alpha > 0$, використовуючи формулу Маклорена, отримуємо:

$$a_n = \ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = -\ln\left(n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = -\ln\left(n^\alpha \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Таким чином, за ознакою порівняння зі степенем, ряд збігається при

$$\alpha > \frac{1}{2}.$$

$$67. \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0)$$

$$\text{Розв'язання. Маємо: } a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} = n^{-(b \ln a + c \ln a \cdot \ln n)}.$$

Звідси бачимо, що якщо $c \neq 0$, то, згідно з ознакою порівняння зі степеневою, ряд збіжний при $c \ln a > 0$. Дійсно, в цьому випадку

$$0 < n^{-(b \ln a + c \ln a \cdot \ln n)} < n^{-(b \ln a + c \ln a \cdot \ln N)}$$

при $n > N$, де N таке, що $b \ln a + c \ln a \cdot \ln N \geq 1$. Якщо $c \ln a < 0$, то загальний член ряду не прямує до нуля, тобто даний ряд розбіжний. Якщо $c = 0$, то, за ознакою порівняння, ряд збіжний при $b \ln a > 1$, тобто при $a^b > e$.

Дослідити збіжність рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з наступними загальними членами:

$$68. u_n = \left(\int_0^a \sqrt[4]{1+x^4} dx \right)^{-1}$$

Розв'язання. Оскільки

$$\int_0^a \sqrt[4]{1+x^4} dx > \int_0^n x dx = \frac{n^2}{2},$$

то $0 < u_n < \frac{2}{n^2}$, за ознакою порівняння ряд збіжний.

$$69. u_n = \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

Розв'язання. В силу оцінки

$$u_n > \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)},$$

і розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$, приходимо до висновку, що даний ряд також розбіжний.

$$70. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$$

Розв'язання. В силу нерівностей

$$0 \leq \frac{\sin^3 x}{1+x} \leq x^3 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{n} \right),$$

$$0 < u_n < \int_0^{\frac{\pi}{n}} x^3 dx = \frac{\pi^4}{4n^4}.$$

і ознак порівняння, даний ряд збіжний.

$$71. u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}.$$

Розв'язання. Оскільки $0 < u_n \leq \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$, за ознакою Даламбера,

збіжний, то даний ряд, за загальною ознакою порівняння, також збіжний.

$$72. u_n = n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n \ln^2 k.$$

Розв'язання. Легко бачити, що при $n \geq 1$ виконується нерівність

$$u_n \leq \frac{n \ln^2 n}{n^\alpha} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = a_n, \quad (1)$$

а при достатньо великому n — нерівність

$$n^{1-\alpha} = \frac{n}{n^\alpha} \leq u_n, \quad (2)$$

Ряд $\sum n^{1-\alpha}$, за ознакою порівняння зі степеневою, збігається, якщо $\alpha > 2$. Ряд

$\sum a_n$, на основі прикладу 51, збіжний при цій же умові. Тому, згідно з

загальною ознакою порівняння, з (1) і (2) випливає, що даний ряд збіжний

при $\alpha > 2$. Замінивши послідовності $x_n (n=1, 2, \dots)$

відповідними рядами, дослідити їх збіжність, якщо:

$$73. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Розв'язання. Оскільки $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1$, то

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Отриманий ряд збіжний за ознакою порівняння, бо

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2} \sim \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

тому збіжна також дана послідовність.

$$74. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}.$$

Розв'язання. Діючи аналогічно до виконаного в попередньому прикладі,

отримуємо:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right).$$

звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right).$$

Користуючись формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, маємо:

$$\begin{aligned} 2a_n &= \frac{2 \ln(n+1)}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} \cdot \ln n (n+1) = \frac{2 \ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1) + \ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{-2 \ln n}{n(n+1)} - 2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-2 \ln n}{n(n+1)} - \frac{2}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Отже, збіжність послідовності x_n еквівалентна збіжності ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Останній, за інтегральною ознакою Коші, збіжний; тому збіжна і дана послідовність.

75. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, якщо виконані умови:

а) загальний член цього ряду $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, отриманий в результаті групування членів даного ряду без порушення їх порядку, збігається; в) число доданків, що входять в

$$A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (1 = p_1 < p_2 < \dots), \text{ обмежене.}$$

Доведення. Нехай S_{nk}^A — послідовність часткових сум ряду б). Тоді

$$\begin{aligned} S_{nk}^A &= a_1 + a_2 + \dots + a_{p_n-1} + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \dots + a_{p_k-1} + \dots + \\ &\quad + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1} = \\ &= S_k + a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1} \quad (p_n \leq k \leq p_{n+1}-1), \text{ де } S_k \text{ — послідовність часткових сум} \end{aligned}$$

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Оскільки $a_n \rightarrow 0$ і число членів послідовності

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{p_{n+1}-1} = C_k, \text{ за умовою, обмежене, то } C_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \text{ Отже,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{nk}^A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k, \text{ що й треба було довести.}$$

Підсумовуючи, нестандартні задачі для знакосталих рядів дозволяють не лише поглибити розуміння критеріїв їх збіжності, а й розкрити ширший спектр аналітичних підходів, пов'язаних із оцінюванням членів ряду, дослідженням поведінки часткових сум та асимптотикою. Водночас межі застосування цих методів стають особливо помітними у випадках, коли знаки членів ряду починають чергуватися. Саме такі ситуації потребують іншого інструментарію, що ґрунтується на тонкому аналізі впливу чергування знаків на збіжність і сумовність. Це зумовлює перехід до дослідження **знакозмінних рядів**, які мають низку специфічних властивостей і відіграють ключову роль у подальших результатах нашої роботи.

2.2. Нестандартні задачі для знакозмінних рядів

Знакозмінні ряди становлять окремий і надзвичайно важливий клас числових рядів, у яких чергування знаків істотно впливає на їхню збіжність, поведінку часткових сум та точність наближення суми. На відміну від знакосталих рядів, де домінують методи порівняння та оцінки монотонних послідовностей, аналіз знакозмінних рядів вимагає залучення спеціальних інструментів — зокрема, ознаки Лейбніца, абсолютної й умовної збіжності, а також тонких асимптотичних характеристик.

Нестандартні задачі цього розділу спрямовані на виявлення специфічних ефектів, пов'язаних із чергуванням знаків: уповільненої збіжності, залежності точності наближення від структури ряду, а також нетривіальних випадків, коли умовна збіжність може змінюватися під дією навіть незначних перетворень. Такі задачі дозволяють сформулювати глибше розуміння природи знакозмінних рядів та продемонструвати зв'язок між теоретичними критеріями і реальними обчислювальними ситуаціями. Наведемо приклади.

76. Довести, що ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_{p_{n-1}} - a_{p_n} - \dots - a_{p_k-1} + a_{p_k} + \dots$ збігається або

розбігається одночасно з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{i=p_{n+1}-1} a_i \right)$

$(a_i > 0; 1 = p_1 < p_2 < \dots)$. Доведення. Нехай збі перший ряд. Тоді збігається будь-яка підпослідовність його частинних сум, в тому числі й

$$\text{така: } \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sum_{i=p_k}^{i=p_{k+1}-1} a_i \right),$$

тобто послідовність частинних сум другого ряду. Отже, другий ряд також збігається. Нехай тепер збігається другий ряд. Тоді $\sum_{i=p_n}^{i=p_{n+1}-1} a_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Це означає, що, в силу додатності сума $a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1}$ (див. попередній приклад) також прямує до нуля і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{nk}^A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ тобто збігається перший ряд.

77. Довести, що сума збіжного ряду не зміниться, якщо члени цього ряду переставити так, що ні один з них не віддалиться від свого колишнього положення більше ніж на m місць, де m — деяке заздалегідь задане число. Доведення. Нехай S — сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ таке, що при всіх $n > N$ для послідовності частинних сум S_n цього ряду виконується нерівність $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$. В силу умови теореми, при $n > N + m$ можемо написати: $S - \varepsilon < S'_n < S + \varepsilon$, де S'_n — послідовність частинних сум ряду, отриманого в результаті вказаної перестановки. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S$.

Довести збіжність наступних рядів і знайти їх суми:

78. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = (-1)^n b_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), де $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$. Оскільки b_n починаючи з деякого номера монотонно прямує до нуля, то, згідно з ознакою Лейбніца, ряд збігається. Довести збіжність цього ряду можна і безпосередньо. А саме, помічаючи, що послідовність S_n частинних сум цього ряду представляється у вигляді

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(n+1)},$$

де

$$S_n^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right),$$

$$S_n^{(2)} = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right),$$

.....

$$S_n^{(k+1)} = 2 \left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right),$$

.....

$$S_n^{(n)} = \frac{4}{3} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right), \quad S_n^{(n+1)} = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

отримуємо:

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^{n-\lambda}}{2^{n-\lambda}} \right) - \frac{2}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4}{3} \frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Легко тепер бачити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ існує (тобто ряд збігається) і дорівнює $\frac{2}{9}$.

$$79. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Розв'язання. Оскільки ряд має вигляд $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($n=1, 2, \dots$), , а

послідовність $\frac{1}{n}$ монотонно прямує до нуля, то, за ознакою Лейбніца, ряд

збіжний. Знайдемо S_{2n} . Маємо:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \\ &+ \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = C + \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \\ &- (C + \ln n + \varepsilon_n) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n, \end{aligned}$$

де C — стала Ейлера, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$,

де S_n — послідовність частинних сум даного ряду, отримуємо остаточно:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

80. Знаючи, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, довести наступне твердження: Якщо члени

ряду $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ переставити так, щоб групу p послідовних додатних

членів змінювала група q послідовних від'ємних членів, то сума нового

ряду буде дорівнювати $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q}\right)$. Доведення. В результаті вказаної

перестановки отримаємо ряд

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \dots$ сума якого, в

силу прикладу 76, дорівнює сумі ряду

$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q}\right) +$

$+ \left(\frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1}\right) - \dots$ (1) у випадку збіжності останнього.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2(n-1)p+1)} + \frac{1}{(2(n-1)p+3)} + \dots + \frac{1}{2np-1} - \left(-\frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - \dots - \frac{1}{2nq} \right) \right). (2)$$

Ряд (2) отримується з ряду (1) в результаті групування членів ряду (1) по два.

Тому, якщо ми покажемо, що ряд (2) збігається, і знайдемо його суму, то, на

основі результату, отриманого в прикладі 75, можемо стверджувати, що ряд (1)

має ту ж суму. Нехай $p > q$. Тоді неважко отримати, що

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2nq} + \frac{1}{2nq+1} + \dots + \frac{1}{2np-1} \quad (3)$$

де S_n — послідовність частинних сум ряду (2).

Додаючи і віднімаючи у виразі (3) доданок

$\frac{1}{2nq+2} + \frac{1}{2nq+4} + \dots + \frac{1}{2np} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{nq+1} + \frac{1}{nq+2} + \dots + \frac{1}{np} \right)$ і користуючись асимптотичною

формулою $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln \left(\frac{n}{m}\right) + \varepsilon_{mn} (\varepsilon_{mn} \rightarrow 0)$, яка отримується на основі

прикладу 85 (гл. 1, ч. 1), з (3) отримуємо:

$S_n = C_{2np} + \ln\left(\frac{2np}{2nq}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{np}{nq}\right) + \varepsilon'_n (\varepsilon'_n \rightarrow 0)$, (4) де C_{2np} — парна підпоследовність

частинних сум збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Таким чином, з (4)

знаходимо: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right)$ Зауважимо, що при $p < q$ аналогічним чином

отримується цей же результат. Зокрема, якщо $p=2$ і $q=1$, то

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2$, якщо $p=1, q=2$, то

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2$$

81. Члени збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставити так, щоб він став розбіжним.

Розв'язання. Розглянемо, наприклад, ряд :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \dots = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Очевидно, цей ряд отримується з даного ряду в результаті такої перестановки: за трьома додатними членами слідує один від'ємний.

Покажемо, що ряд розбігається. В силу

нерівності $\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$, маємо оцінку загального

члена другого ряду: $a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$. Оскільки ряд $\sum \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$, за ознакою порівняння

зі степеневим, розбігається, то за загальною ознакою порівняння, ряд

$\sum a_n$ також розбігається, що й треба було. Зауважимо, що вихідний ряд

збігається за ознакою Лейбніца.

82. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, (1) де $b_n > 0$, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Чи впливає звідси, що ряд (1) збігається?

Розв'язання. Взагалі кажучи, ні. Якщо b_n має, наприклад, вигляд

$b_n = (\alpha + (-1)^n \beta) \varepsilon_n$, де $\alpha > \beta > 0$ і $\varepsilon_n \downarrow 0$ ($\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^\gamma}$ при $n \rightarrow \infty, 0 < \gamma \leq 1$), то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\alpha + (-1)^n \beta) \varepsilon_n$ розбіжний. Дійсно, послідовність частинних

сум $S_n = \alpha \sum_{k=1}^n (-1)^k \varepsilon_k + \beta \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ розбігається ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$), оскільки

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \varepsilon_k$ існує через збіжність, за ознакою Лейбніца, ряду $\sum (-1)^k \varepsilon_n$, а

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = +\infty$ в силу ознаки порівняння зі степеневою.

Зокрема, якщо $\alpha=2, \beta=1$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ розбіжний. Цей приклад показує, що умова монотонності послідовності b_n в ознаці Лейбніца, взагалі кажучи, не є зайвою.

Дослідити збіжність знакозмінних рядів:

$$83. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

Розв'язання. Оскільки згрупований ряд, згідно з ознакою Лейбніца, збігається, то, на основі доведення, наведеного в прикладі 75, приходимо до висновку, що даний ряд також збігається.

$$84. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Розв'язання. Оскільки $\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)^{-1} \sin \frac{n\pi}{8} \sin \frac{n+1}{8} \pi \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$ а

послідовність $n^{-1} \ln^{100} n$ починаючи з достатньо великого n монотонно

прямує до нуля (це випливає з того, що $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \ln^{100} x = 100 \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \ln^{99} x = 0$, а

$(x^{-1} \ln^{100} x)' < 0$ при $x > e^{100}$), то, згідно з ознакою Діріхле, даний ряд збіжний.

$$85. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

Розв'язання. Ряди $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ і $\sum \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$ збіжні: перший — за ознакою

Лейбніца, другий (в силу обмеженості послідовності

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos 2k \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2 \cos 1} \cos(2n+1) \right| < \frac{1 + (\cos 1)^{-1}}{2} \text{ і монотонного}$$

прямування $\frac{1}{n}$ до нуля при $n \rightarrow \infty$) — за ознакою Діріхле. Отже, їх різниця

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - \cos 2n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} \text{ є також збіжним рядом.}$$

$$86. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Розв'язання. Представляючи загальний член ряду у вигляді

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \text{ і помічаючи, що ряд } \sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}, \text{ за ознакою}$$

Лейбніца, збіжний, а ряд $\sum \frac{1}{n-1}$ розбіжний (до $+\infty$), робимо висновок, що даний ряд також розбіжний (до $+\infty$).

$$87. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$$

Розв'язання. Оскільки $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right) \equiv (-1)^n b_n$, де

$b_n = \sin \frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ — послідовність, монотонно (при $n > n_0$) прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то, за ознакою Лейбніца, ряд збіжний.

$$88. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

Розв'язання. Розглянемо ряд, отриманий в результаті групування членів даного ряду. Маємо:

$$\begin{aligned} & -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \\ & + (-1)^k \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Оскільки $A_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} < \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ і

$$\begin{aligned} A_k - A_{k+1} &= (2k+1) \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{(k^2+m)((k+1)^2+m)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \dots \\ & - \frac{1}{k^2+4k+3} > \frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} > 0 \end{aligned}$$

при $k \geq k_0$, то ряд $\sum (-1)^k A_k$, згідно з ознакою Лейбніца, збіжний. А тоді на основі висновків, отриманих у прикладі 76, даний ряд також збіжний.

$$89. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$$

Розв'язання. Маємо:

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos \left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n \right) = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ за ознакою Лейбніца, збіжний, а послідовність $\cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right)$ монотонна й обмежена, то досліджуваний ряд, за ознакою Абеля, також збіжний.

90. Довести, що знакозмінний ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots \quad (b_n > 0)$$
 збігається, якщо $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, де $p > 0$.

Доведення. Як випливає з прикладу 42, при $p > 0$ послідовність $b_n \downarrow 0$ при $n > n_0$. Тому, за ознакою Лейбніца, даний ряд збіжний, що й треба було довести.

Дослідити на абсолютну й умовну збіжність наступні ряди:

91. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$

Розв'язання. Нехай $p \leq 0$.

Тоді загальний член ряду до нуля не прямує і, отже, ряд розбіжний. Вважаючи, далі, що $p > 0$, і користуючись формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, знаходимо:

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, згідно з ознакою Лейбніца, збіжний при $p > 0$, а ряд $\sum a_n^*$,

де $a_n^* = \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, за ознакою порівняння, збігається при $p > \frac{1}{2}$ (при $p \leq \frac{1}{2}$ ряд розбіжний до $+\infty$), то даний ряд збіжний тільки при $p > \frac{1}{2}$.

В силу нерівності $\frac{1}{2n^p} < \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) \right| < \frac{2}{n^p}$ ($p > 0$) і ознак порівняння, даний ряд збіжний абсолютно при $p > 1$. Отже, при значеннях p , що задовольняють нерівність $\frac{1}{2} < p \leq 1$, досліджуваний ряд умовно збіжний.

92. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$

Розв'язання. При $p \leq 0$ загальний член ряду не прямує до нуля, тобто ряд розбігається. Тому, вважаючи, що $p > 0$, і застосовуючи формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, перетворюємо загальний член ряду до вигляду:

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-p} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} = (-1)^n n^{-p} \times \left(1 + p \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Ряди $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ збігаються при $p > 0$ (перший — в силу ознаки Лейбніца, а другий — за ознакою порівняння). Тому вихідний ряд збігається за цієї ж умови. Оскільки, далі, $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \leq \frac{1}{(n-1)^p}$ ($n = 2, 3, \dots$) і ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$, то, в силу останньої нерівності й ознаки порівняння зі степеневою, даний ряд збігається абсолютно при $p > 1$. Отже, при $0 < p \leq 1$ досліджуваний ряд збігається умовно.

93. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$

Розв'язання. Очевидно, при $p > 0$ ряд розбігається, оскільки при цьому не виконується необхідна умова збіжності. При $p > 0$, як і в попередньому прикладі, представимо загальний член ряду у вигляді :

$$\sin \frac{n\pi}{4} \left(n^p + \sin \frac{n\pi}{4}\right)^{-1} = n^{-p} \sin \frac{n\pi}{4} \cdot \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) = -\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

Ряд $\sum \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^p}$ збігається, за ознакою Діріхле, при $p > 0$, оскільки

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}, \text{ а } \frac{1}{n^p} \downarrow 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \right)$, в силу ознаки порівняння, збігається або розбігається

одночасно з рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}.$$

В свою чергу, ряд $\sum \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^{2p}}$ збігається, за ознакою Діріхле, при $p > 0$, а ряд

$\sum \frac{1}{n^{2p}}$ збігається при $p > \frac{1}{2}$ (зауважимо, що при $p \leq \frac{1}{2}$ останній ряд розбігається до

$+\infty$, тому і ряд $\sum \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ розбігається, якщо $p \leq \frac{1}{2}$). Отже, вихідний ряд збігається

лише при $p > \frac{1}{2}$. Для встановлення області абсолютної збіжності скористаємося

оцінками

$$\frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{2n^p} \leq \frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{n^p + \left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|} < \frac{2 \left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{|n^p| \left| 1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right|} \cdot \frac{\left| \cos \frac{n\pi}{2} \right|}{2n^{2p}} = \frac{\sin \frac{2n\pi}{4}}{n^{2p}} \leq \frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{n^{2p}} < \frac{1}{n^{2p}} \text{ і ознакою порівняння. З цих}$$

нерівностей випливає, що даний ряд збігається абсолютно лише при $p > 1$. Тому

при $\frac{1}{2} < p \leq 1$ ряд збігається умовно.

$$94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$$

(1)

Розв'язання. Очевидно, при $p > 1$ ряд збігається абсолютно. Для з'ясування області умовної збіжності розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n, \quad (2)$$

$$\text{де } A_n = \frac{1}{(n^2)^p} + \frac{1}{((n^2+1)^p)} + \dots + \frac{1}{((n^2+2n)^p)},$$

отриманий в результаті

групування членів даного ряду. Оскільки $0 < A_n < \frac{2n+1}{n^{2p}} \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$ і $p > \frac{1}{2}$, а також

$$A_n - A_{n+1} = \sum_{i=0}^{2n} \frac{((n+1)^2+i)^p - (n^2+i)^p}{(n^2+i)^p (n^2+2n+1+i)^p} - (n^2+4n+2)^{-p} - \dots$$

$$- (n^2+4n+3)^{-p} > \frac{(2n+1)((n^2+4n+1)^p - (n^2+2n)^p)}{(n^2+2n)^p (n^2+4n+1)^p} - \dots$$

$$- \frac{1}{(n^2+4n+2)^p} - \frac{1}{(n^3+4n+3)^p} > 0$$

при достатньо великому n , то, в силу ознаки Лейбніца, ряд (2) збігається. З

іншого боку, $A_n > \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ не прямує до 0 при $p \leq \frac{1}{2}$; тому ряд (2) розбігається, якщо

$p \leq \frac{1}{2}$. Отже, згідно з прикладом 76, ряд (1) збігається лише при $p > \frac{1}{2}$. Таким чином,

область умовної збіжності ряду (1) визначається нерівностями $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

95. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

Розв'язання. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{[e^{k-1}]+1} + \dots + \frac{1}{[e^k]} \right)$, отриманий в результаті

групування членів даного ряду, в силу оцінки

$$\frac{1}{[e^{k-1}]+1} + \dots + \frac{1}{[e^k]} > \frac{([e^k] - [e^{k-1}])}{[e^k]} = 1 - \frac{[e^{k-1}]}{[e^k]} \rightarrow 1 - \frac{1}{e} \neq 0 \quad (k \rightarrow \infty), \text{ розбігається.}$$

Отже, згідно з прикладом 76, досліджуваний ряд також розбігається.

96. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n))} \right)^p$

Розв'язання. Розглянемо відношення

$$\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^p : \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+2)} \right)^p =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{2n+1} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Звідси бачимо, що, згідно з прикладом 90, ряд збігається, якщо $p > 0$.

Оскільки при $p \leq 0$ загальний член ряду не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ця умова ($p > 0$) є і необхідною для збіжності ряду. Далі, за ознакою Гаусса, ряд збігається абсолютно лише при $p > 2$. Отже, при значеннях p , що задовольняють нерівність

$0 < p \leq 2$, даний ряд збігається тільки умовно.

$$97. \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n * \sin n^2)}{n}$$

Розв'язання. Оскільки

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin k * \sin k^2 \right| = \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\cos(k(k-1))) - \cos(k(k+1))) \right| = \left| \frac{1}{2} (1 - \cos(n(n+1))) \right| \leq 1$$

і $\frac{1}{n} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ то, згідно з ознакою Діріхле, ряд збігається.

$$98. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2.$$

Розв'язання. Доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0$. Для цього припустимо

протилежне, тобто нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(n+1)$ також дорівнює

нулю.

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(n+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n^2+2n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n^2 \cdot \cos(2n+1) + \sin(2n+1) \cdot \cos n^2) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+1) \sqrt{1 - \sin^2 n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+1) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

В силу останньої рівності, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+3) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(2n+1) * \cos 2 + \sin 2 * \cos(2n+1)) = \sin 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n+1) = 0 \quad (2)$$

З (1) і (2) знаходимо: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)) = 0$. Отримане протиріччя

і доводить наше твердження. Отже, даний ряд розбігається.

$$99. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots$$

Розв'язання. Одразу помітимо, що якщо $p \leq 0$ або $q \leq 0$, то ряд

розбігається в силу необхідної ознаки. Тому, далі, вважаємо, що $p > 0$ і

$q > 0$. Маючи на увазі приклад 75, згрупуємо члени даного ряду наступним

чином: $\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q}\right) + \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q}\right) + \dots = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right)$ Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q} &= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-q} = \frac{1}{n^p} - \\ &- \frac{1}{n^q} \left(1 - \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{n^q} + \frac{q}{n^{q+1}} + O\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то, за ознакою порівняння, згрупований ряд збігається при $p=q>0$. Якщо ж $p \neq q$, то звідси випливає, що ряд збігається при $p>1$ і $q>1$ одночасно. А тоді, згідно зі згаданим прикладом, при цих же умовах збігається і даний ряд.

Очевидно, абсолютно ряд збігається лише при $p>1$ і $q>1$.

$$100. \quad 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

Розв'язання. Ряд $1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$, складений із абсолютних величин членів даного ряду, збігається лише при $p>1$, оскільки при цій умові збігається ряд $\sum \frac{1}{n^p}$, і члени абсолютно збіжного ряду можна переставляти в будь-якому порядку.

При $p=1$ отримуємо ряд, збіжність якого досліджена в прикладі 80. Там ми встановили, що ряд збігається.

Розглянемо випадок, коли $0 < p < 1$. Утворимо підпослідовність послідовності частинних сум даного ряду:

$$\begin{aligned} S_{2n} = & 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} + \dots \\ & + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} = C_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^p} + \dots \\ & + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p}, \end{aligned}$$

де C_{2n} — підпослідовність послідовності частинних сум збіжного ряду

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. Оскільки $\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} > \frac{n}{(4n-1)^p} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} \right) = +\infty$ Отже, даний ряд

при $0 < p < 1$ розбігається. Зауважимо, що розбіжність його при $p>1$

впливає з необхідної умови. Отже, встановлюємо, що досліджуваний ряд абсолютно збігається, якщо $p>1$, і умовно, — якщо $p=1$.

$$101. \quad 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

Розв'язання. Очевидно, при $p > 1$ ряд збігається абсолютно, бо при цій умові ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ і члени абсолютно збіжного ряду можна переставляти в будь-якому порядку.

Нехай $0 < p < 1$. Розглянемо підпоследовність S_{3n} послідовності частинних сум

$$\text{даного ряду. } S_{3n} = \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p}.$$

Оскільки $S_{3n} > \frac{n}{(4n-1)^p} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то даний ряд розбігається.

Нехай $p = 1$. Тоді $0 < S_{3n} < \frac{1}{2}$, і, за теоремою про монотонну й обмежену

послідовність, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$ скінченна. Отже, збігається ряд

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

А оскільки тут умови прикладу 75 виконані, то даний ряд також збігається. Враховуючи ще, що при $p \leq 0$ досліджуваний ряд розбігається, остаточно встановлюємо, що він збігається абсолютно при $p > 1$, а при $p = 1$ — умовно.

$$102. \quad 1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \dots \quad (1)$$

Розв'язання. Розглянемо:

$$\sum_{n=1, 4, 7, \dots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} \right), \quad (2)$$

отриманий із даного в результаті групування його членів по три. Вважаючи,

що $p > 0$ і $q > 0$,

$$\text{маємо: } a_n = \frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} = 2 \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} \right) + 2 \left(\frac{q}{n^{q+1}} - \frac{p}{n^{p+1}} \right) + o \left(\frac{1}{n^{p+1}} \right) + o \left(\frac{1}{n^{q+1}} \right) \text{ при } n$$

$\rightarrow \infty$. Звідси, в силу ознак порівняння, випливає, що при $p = q$ ряд (2)

збігається. Нехай $p \neq q$. Тоді $a_n \sim \frac{1}{n^{\min(p, q)}}$ при $n \rightarrow \infty$ і, отже, за ознакою

порівняння, ряд (2) розбігається, якщо $\min(p, q) \leq 1$. Оскільки тут всі умови

прикладу 75 виконані, то висновки, що стосуються ряду (2), залишаються в

силі і для ряду (1). Зауважимо ще, що при $p \leq 0$ або $q \leq 0$ досліджуваний ряд

(1) розбігається (загальний член ряду не прямує до нуля), а при $p > 1$ і $q > 1$

він збігається абсолютно. Отже, при $0 < p = q \leq 1$ ряд збігається умовно.

103. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{n! n^q}$

визначити: а) область абсолютної збіжності; б) область умовної збіжності.

Розв'язання. Очевидно, якщо p дорівнює цілому від'ємному числу, то ряд збігається абсолютно. Тому вважаємо, що $p \neq -k$. Розглянемо відношення

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{p}{n+1}\right)^{-1} * \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q-p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

, де послідовність $b_n = \frac{(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{n! n^q}$ починаючи з деякого номера має

певний знак. З даного відношення, на основі прикладу 90, знаходимо, що ряд збігається, якщо $q - p > 0$. На основі ознаки Гаусса, робимо висновок, що ряд збігається абсолютно, якщо $q - p > 1$. З цього відношення випливає також, що якщо $q - p < 0$, то послідовність $|b_n|$ монотонно зростає і, значить, ряд розбігається. Якщо $q = p$, то, маємо:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Покажемо, що b_n не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. З (1) випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) n^2 = C = \text{const}$$

Це означає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ таке, що $\forall n > N$ виконується нерівність

$$1 + \frac{C-\varepsilon}{(k+1)^2} < \frac{b_{k+1}}{b_{k+2}} < 1 + \frac{C+\varepsilon}{(k+1)^2} \quad (k = N, \dots, n-2), \text{ звідки, вважаючи, що } N \text{ достатньо}$$

$$\text{велике, знаходимо: } 0 < \frac{b_{N+1}}{b_n} < \left(1 + \frac{C+\varepsilon}{(N+1)^2}\right) \left(1 + \frac{C+\varepsilon}{(N+2)^2}\right) \dots \left(1 + \frac{C+\varepsilon}{(n-1)^2}\right)$$

З цієї нерівності, враховуючи приклад 38 (гл. 1, ч. 1),

$$\text{отримуємо: } 0 < \frac{b_{N+1}}{b_n} < e^{(C+\varepsilon)\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}\right)}$$

$$\text{Отже, } |b_n| > |b_{N+1}| e^{-(|C|+\varepsilon)\left(\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots\right)}$$

Оскільки права частина цієї нерівності від n не залежить, то $|b_n|$ не прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$, що й треба було встановити. А тоді, в силу необхідної ознаки збіжності, даний ряд розбігається, якщо $p = q$. Отже, робимо висновок, що при $p < q \leq p+1$ ряд збігається умовно, а при $q > p+1$ —

абсолютно. Крім того, він збігається абсолютно, якщо p дорівнює цілому від'ємному числу, а q — будь-яке.

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$, де $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$.

Розв'язання. Для зручності представимо загальний член ряду у вигляді

$$\binom{m}{n} = (-1)^n b_n, \quad b_n = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\dots(1-m)m}{n!}.$$

Очевидно, при $m=0,1,2,\dots$ ряд збігається

абсолютно. Тому, виключаючи цей випадок, можна утворити відношення

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m}{n(n-m)} \quad (1)$$

Оскільки починаючи з деякого номера n_0 послідовність b_n має певний знак, то, не применшуючи загальності, будемо вважати, що $b_n > 0$ ($n \geq n_0$). В такому випадку з відношення (1), враховуючи приклад 90, знаходимо, що ряд збігається, якщо $m+1 > 0$. Оскільки при $m+1 \leq 0$ послідовність монотонно зростає, то умова $m+1 > 0$ є також і необхідною для збіжності ряду. Далі, за ознакою Гаусса, з (1) випливає, що ряд збігається абсолютно, якщо $m > 0$, а при $m < 0$ — розбігається (абсолютно). Таким чином, все сказане дозволяє зробити висновок, що при $m \geq 0$ ряд збігається абсолютно, а якщо $-1 < m < 0$, то ряд збігається умовно.

105. Нехай $\sum a_n$ — не абсолютно збіжний ряд і $P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|+a_i}{2}$, $N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|-a_i}{2}$.

Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

Доведення. Позначимо через S_n і C_n відповідно часткові суми даного ряду і

ряду, складеного з абсолютних величин $|a_i|$, будемо мати: $N_n = C_n - S_n$ і

$P_n = C_n + S_n$. В силу умови теореми, можна написати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = +\infty$.

А тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n - S_n}{C_n + S_n} = 1$, що й треба було довести.

106. Довести, що сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ для кожного $p > 0$ лежить між $\frac{1}{2}$ і 1.

Доведення. Оскільки ряд, в силу ознаки Лейбніца, збігається, то

підпослідовності частинних сум його мають одну й ту ж границю S , причому

$$\text{підпослідовність } S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right)$$

зростає, а підпоследовність

$$S_{2n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \dots - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right) \text{ спадає.}$$

Отже, $S_{2n} < S < S_{2n-1}$, звідки знаходимо, що $S < S_1 = 1$. Для доведення оцінки

знизу розглянемо підпоследовність S_{4n-1} . Оскільки графік функції $\frac{1}{x^p}$ ($p > 0, x > 0$) є

опуклим вниз, то виконуються нерівності $\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} > \frac{2}{4^p}$, $\frac{1}{7^p} + \frac{1}{9^p} > \frac{2}{8^p}$, ...,

$$\frac{1}{(4n-1)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \frac{2}{(4n)^p}. \text{ Звідси для } S_{4n-1} \text{ маємо оцінку:}$$

$$S_{4n-1} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} > 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(4n-2)^p} + \frac{1}{(4n)^p} = 1 - \frac{1}{2} S_{2n} \text{ з якої}$$

граничним переходом отримуємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n-1} = S \geq 1 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1 - \frac{S}{2}$. Отже,

$$S \geq \frac{2}{2^p+1} > \frac{1}{2}, \text{ що й треба було довести.}$$

107. Скільки членів ряду слід взяти, щоб отримати його суму з точністю до

$$\varepsilon = 10^{-6}, \text{ якщо: а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{\sqrt{n}}?$$

Розв'язання. а) Згідно з оцінкою залишку, що випливає з теореми Лейбніца,

потрібне число n знаходимо з нерівності $\frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+1}} < \frac{1}{10^6}$, звідки $N > 10^6$. б) В силу

ознаки Діріхле, ряд збігається, а за теоремою п. 5° сума ряду дорівнює сумі

згрупованого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, b_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=180(n-1)+1}^{180n-1} \frac{\sin k^2}{\sqrt{k}}$, який, очевидно, є рядом лейбніцевого типу, тобто збіжним за ознакою Лейбніца. Отже, для залишку цього ряду справедлива оцінка

$$\left| \sum_{k=180n+1}^{180n+179} \frac{\sin k^2}{\sqrt{k}} \right| < \frac{1}{\sqrt{180n+1}} \left| \sum_{k=180n+1}^{180n+179} \sin k^2 \right| < \frac{1}{\sqrt{N+1}} \frac{\pi}{360} < 10^{-6} \text{ звідки } N > 1.32 \cdot 10^{16}.$$

108. Довести, що гармонічний ряд залишиться розбіжним, якщо, не

переставляючи його членів, змінити знаки їх так, щоб за p додатними членами йшло q від'ємних членів ($p \neq q$). Збіжність матиме місце лише при $p = q$.

Доведення. Вказаний в умові ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \dots - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q} - \dots, \text{ в силу прикладу 76,}$$

збігається або розбігається одночасно з рядом

$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \dots$ (1) Нехай $p > q$.

Оскільки справедливі оцінки $S_2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) > 1 - \frac{q}{p} = (p-q) \frac{1}{p}$,

$S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - (\dots) > S_2 + \frac{p}{2p+q} - \frac{q}{2p+q} > (p-q) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q}\right), \dots$

$S_{2n} > (p-q) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q} + \dots + \frac{1}{np+(n-1)q}\right) = x_n > 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то ряд (1)

розбігається. Нехай $p < q$. Тоді, оцінюючи частинні суми ряду наступним

чином: $S_1 < p$, $S_2 < p - \frac{q-p}{2(p+q)}$, $S_3 < p - \frac{q-p}{p+q}$, $S_4 < p - \frac{q-p}{p+q} - \frac{q-p}{2(p+q)}$, $S_5 < p - \frac{q-p}{p+q} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$,

$\dots S_{2n+1} < p - \frac{q-p}{p+q} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$, знаходимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = -\infty$, тобто ряд (1)

розбігається. Нарешті, нехай $p = q$. Тоді ряд (1) є рядом лейбніцевого типу,

отже, він збігається.

Отже, аналіз нестандартних задач для знакозмінних рядів дозволяє виявити широкий спектр явищ, що не проявляються у роботі зі знакосталими рядами: від умовної збіжності та впливу перестановок членів до залежності точності наближення від структури чергування. Застосування цих задач формує у студентів здатність критично оцінювати поведінку ряду, коректно добирати методи дослідження та усвідомлювати межі застосовності класичних критеріїв. Водночас глибше занурення у природу знакозмінних рядів природно підводить до необхідності розглянути питання, пов'язані з операціями над рядами, адже саме вони найчастіше призводять до суттєвих змін у характері їх збіжності.

2.3. Нестандартні задачі, які використовують дії над рядами

Дії над числовими рядами — додавання, віднімання, множення, перетворення та групування членів — відіграють ключову роль у подальшому аналізі їхніх властивостей. Для знакосталих рядів такі операції здебільшого не змінюють основних характеристик, однак у випадку знакозмінних рядів навіть елементарні перетворення можуть істотно вплинути на збіжність, суму та порядок обчислення. Саме тому систематичне вивчення дій над рядами є важливим етапом

у формуванні цілісного розуміння теорії рядів і стане предметом подальшого розгляду.

$$109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

Розв'язання. Оскільки $\cos \frac{2n\pi}{3} = 1 - 2 \sin^2 \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{якщо } n \neq 3k (k = 1, 2, \dots); \\ 1, & \text{якщо } n = 3k, \end{cases}$ і ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$ збігаються, то, на основі твердження 1°,

$$\begin{aligned} \text{маємо: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} \right) + \frac{1}{2^9} - \dots = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

110. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n [y]^{\frac{n+1}{2}} (|xy| < 1)$. (Примітка: в тексті використано незрозуміле позначення $[y]$, але розв'язання на наступній сторінці показує, що малася на увазі сума $\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n + y \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$)

Розв'язання. В силу збіжності ряду $\sum (xy)^n$, на основі твердження 1°, маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n [y]^{\frac{n+1}{2}} &= 1 + y + xy + xy^2 + x^2 y^2 + x^2 y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n + y \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \\ &= (1+y) \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1+y}{1-xy} \end{aligned}$$

110. Показати, що $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

Розв'язання. Ряд $\sum \frac{1}{n!}$ збігається, тому, згідно з 2°, маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n, \text{ де}$$

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!} \left(a_k = \frac{1}{(k-1)!}, b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \right). \text{ Оскільки}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \text{ то } c_{n+1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

, що й треба було довести.

112. Показати, що квадрат збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є рядом розбіжним.

Розв'язання. Перш за все зауважимо, що даний ряд збігається (умовно) за

ознакою Лейбніца. За правилом п. 2°,

маємо: $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} > \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n), \text{ то } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} > \frac{n}{n} = 1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, в силу необхідної ознаки, розбігається, що й треба було довести.

113. Перевірити, що добуток двох розбіжних рядів $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ і

$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ є абсолютно збіжним рядом. **Розв'язання.** Легко

встановити (хоча б за допомогою ознаки Коші), що ці ряди розбігаються. За

правилом множення рядів маємо: $c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1}$, де

$$a_1 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, b_1 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Отже, $c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2^k} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}} \sum_{k=2}^{n-1} 2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4, \text{ що й треба було показати.}$$

Висновки до другого розділу.

У цьому розділі здійснено комплексний аналіз різних типів числових рядів та специфіки роботи з ними на основі нестандартних задач, що дозволило поглибити теоретичне розуміння й виявити низку важливих методичних аспектів.

По-перше, вивчення знакосталих рядів на базі нестандартних задач продемонструвало, що навіть у межах класичних критеріїв збіжності можливо відкрити ширший спектр інтерпретацій, пов'язаних з асимптотичними оцінками, поведінкою часткових сум і граничними режимами збіжності. Такі задачі потребують від здобувача не лише відтворення відомих алгоритмів, а й уміння по-новому застосовувати ознаки порівняння, інтегрального критерію або оцінювання членів ряду. Вони формують аналітичну гнучкість та здатність бачити за формальними умовами глибинні змістові зв'язки.

По-друге, аналіз знакозмінних рядів крізь призму нестандартних ситуацій дав змогу виявити принципово інші явища, що не властиві знакосталим рядам. Передусім ідеться про умовну збіжність, залежність збіжності від структури чергування знаків, різку чутливість ряду до перестановок членів та змін у способі групування. Розглянуті задачі підкреслили методичну важливість ознаки Лейбніца, а також потребу в обережному використанні асимптотичних оцінок, коли знак чергується. Такі приклади поглиблюють розуміння того, що поведінка знакозмінних рядів часто є менш очевидною і потребує іншого рівня теоретичної підготовки.

По-третє, вивчення дій над рядами показало, що навіть базові операції — додавання, віднімання, множення або перетворення членів — можуть змінювати ключові властивості ряду. У випадку знакосталих рядів ці дії переважно не впливають на збіжність, тоді як для знакозмінних вони можуть спричиняти радикальні зміни: від переходу від абсолютної до умовної збіжності — до втрати збіжності взагалі. Розгляд таких ситуацій особливо важливий у навчанні, оскільки він формує вміння критично оцінювати наслідки перетворень та усвідомлювати межі коректності виконуваних дій.

У сукупності матеріал цього розділу доводить, що система нестандартних задач є ефективним інструментом для глибокого засвоєння властивостей числових рядів. Вона дозволяє розкрити повноту теоретичних понять, продемонструвати вплив тонких аналітичних деталей на поведінку ряду та сприяє формуванню у студентів цілісної математичної культури аналізу нескінченних процесів. Розглянуті задачі створюють передумови для переходу до більш складних аспектів теорії рядів та їх застосувань у подальших розділах роботи.

ВИСНОВКИ

У процесі дослідження було успішно реалізовано поставлену мету — науково обґрунтовано, створено та апробовано систему нестандартних задач із теми «Числові ряди», спрямовану на вдосконалення методики викладання та підвищення рівня сформованості математичної компетентності учнів і студентів.

Теоретичний аналіз сучасних методичних підходів показав, що традиційна система задач формує базові навички оперування числовими рядами, проте не завжди стимулює аналітичну, творчу й дослідницьку активність здобувачів освіти. Натомість використання нестандартних задач із елементами геометричного моделювання дозволяє подати навчальний матеріал у більш наочній та інтегрованій формі, забезпечити кращу внутрішню мотивацію до пізнання та підвищити ефективність засвоєння складних теоретичних понять.

У ході роботи:

- узагальнено наукові підходи до структурування курсу математичного аналізу в контексті компетентнісного навчання;
- запропоновано власну класифікацію нестандартних задач за рівнем творчої складності та змістовим наповненням;
- розроблено й апробовано систему авторських задач, спрямованих на розвиток критичного мислення, просторової уяви та самостійності студентів у процесі розв'язування.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання створеної системи під час вивчення розділу «Числові ряди» у вищих навчальних закладах, педагогічних коледжах, а також у шкільній практиці — під час факультативних та олімпіадних занять. Розроблені методичні підходи й завдання можуть бути інтегровані в електронні освітні платформи, дистанційні курси та навчально-методичні комплекси нового покоління.

У перспективі результати дослідження можуть стати основою для створення авторського навчально-методичного посібника або інтерактивного ресурсу, де поєднуюватимуться аналітичні, геометричні та інформаційно-комунікаційні засоби

навчання. Подальший розвиток теми передбачає розширення системи задач до сучасних напрямів прикладного аналізу, моделювання процесів та алгоритмізації, що сприятиме формуванню цілісної математичної картини світу в свідомості здобувачів освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Корольський В. В. Методика формування дослідницьких компетентностей учнів при вивченні числових рядів. Київ : Наукова думка, 2018. 210 с.
2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Київ: Либідь, 1993. 320 с.
3. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Київ: Вища школа, 1992. Ч. 1. 495 с.
4. Демидович Б. П. Збірник задач і вправ з математичного аналізу: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / пер. з рос. Є. Ф. Проскуріна. Київ: Вища школа, 1990. 624 с.
5. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник. 2-ге вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
6. Кушнір В. А. Інноваційні методи навчання фундаментальних дисциплін у технічному університеті. Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія: Педагогічні науки. 2016. Вип. 128. С. 112–119.
7. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика. Збірник задач: навч. посібник. Харків: ХНУРЕ, 2011. 384 с.
8. Михалін Г. О. Числові та функціональні ряди: методичні вказівки до самостійної роботи студентів. Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2015. 48 с.
9. Демидович Б. П. Збірник задач і вправ з математичного аналізу : навч. посіб. для вищ. навч. закл. / Б. П. Демидович. — М. : Астрель (або інше вид.), 2005. — 560 с. Chembaby
10. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. — New York : McGraw-Hill, 1976. — 328 p. Archive.org
11. Apostol T. M. Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus. — Reading, MA : Addison-Wesley, 1974. — 600 p. УФСЖ
12. Hardy G. H. Divergent Series. — Oxford : Clarendon Press, 1949. — 396 p. SCIRP
13. Knopp K. Theory and Application of Infinite Series. — New York : Dover Publications (reprint), 1990 (orig. eds. 1920s–1951). — 400 p.

14. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1996 (reprint). — 600 p. Cambridge University Press & Assessment
15. Zygmund A. Trigonometric Series. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2002 (repr.). — 600 p.
16. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Introductory Real Analysis. — New York : Dover Publications, 1975. — 400 p.
17. Bary N. K. A Treatise on Trigonometric Series. — New York : Dover, 1964. — 800 p.
18. Titchmarsh E. C. The Theory of Functions. — Oxford : Oxford Univ. Press, 1939. — 400 p.
19. Courant R., John F. Introduction to Calculus and Analysis. — New York : Wiley, 1999. — 700 p.
20. Bromwich T. J. I. An Introduction to the Theory of Infinite Series. — New York : Chelsea, 1957. — 350 p.
21. Borel É. Leçons sur les séries divergentes. — Paris : Gauthier-Villars, 1928.
22. Бойко В. І. Математичний аналіз: числові ряди та послідовності : підручник / В. І. Бойко. — К. : Видавництво ХХ, 2010. — 320 с.
23. Івашків О. П. Методика викладання елементів математичного аналізу : навч.-метод. посіб. / О. П. Івашків. — Львів : Видавництво ЛНУ, 2012. — 180 с.
24. Мельничук С. М. Числові ряди: теорія і задачі : навч. посіб. / С. М. Мельничук. — Х. : Видавництво Х, 2015. — 240 с.
25. Гнатюк Ю. П. Методика розв'язування задач з теми «Ряди» у загальноосвітній школі. — Журнал «Педагогіка», 2018, №4, с. 45–52.
26. Tenenbaum G., Pollard H. Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory (розділи про ряди). — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2015.
27. Serre J. P. A Course in Arithmetic (релігійні частини про радикали та ряди). — New York : Springer, 1973.
28. Tolstov G. P. Fourier Series. — New York : Dover, 1976.

29. Kaczor W., Nowak M. Problems in Mathematical Analysis I, II (задачники, розділи про ряди). — Warsaw : PWN/Elsevier, 2000.
30. Prasolov V. V. Problems in Mathematical Analysis. — American Mathematical Society, 1998.
31. MacTutor / St Andrews University. Historical articles on infinite series and classical mathematicians [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk> (дата звернення: 10.11.2025).