

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

**ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В НАВЧАННІ
МАТЕМАТИКИ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ**

Кваліфікаційна робота студента
групи МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04. Середня освіта (Математика)
Майбороди Яна Ігоровича
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Крамаренко Т. Г.

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Майборода Ян Ігорович, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

Вступ	4
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У НАВЧАННІ РОЗДІЛУ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»	6
1.1. Поняття та сутність ШІ, застосування в освіті	6
1.2. Методика навчання розділу «Похідна та її застосування»	15
1.3. Аналіз навчального матеріалу розділу «Похідна та її застосування» в підручниках для 10-11 класу щодо можливостей застосування ШІ	23
Висновки до першого розділу	38
РОЗДІЛ II. ПРАКТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У НАВЧАННІ РОЗДІЛУ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»	40
2.1. Педагогічні умови використання штучного інтелекту у навчанні математики	40
2.2. Використання ШІ при розв'язуванні та генеруванні задач розділу	49
2.3. Використання ШІ у процесі розробки та впровадження навчальних проєктів	63
Висновки до другого розділу	88
ВИСНОВКИ	91
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	95

ВСТУП

Сучасна освіта перебуває на етапі стрімкого розвитку, що зумовлено не лише зміною педагогічних підходів, а й активним впровадженням цифрових технологій. Одним із найперспективніших напрямів у цьому процесі є використання штучного інтелекту (ШІ), який поступово перетворюється з інноваційної новинки на реальний інструмент підвищення якості навчання.

Математика, як фундаментальна наука, що формує логічне, аналітичне та критичне мислення, особливо потребує ефективних методів викладання, які б не лише забезпечували засвоєння навчального матеріалу, а й розвивали вміння його застосовувати. Особливе місце в курсі математики 10 класу посідає тема "Похідна та її застосування" — ключовий розділ, що поєднує алгебраїчні знання з елементами математичного аналізу та відкриває перед учнями нові горизонти прикладного використання математичних знань.

Опанування цієї теми часто викликає труднощі через її абстрактність, складність та необхідність високого рівня математичної уяви. Тому виникає потреба у пошуку нових підходів до викладання, які могли б зробити навчання доступнішим, наочнішим та індивідуалізованим. Штучний інтелект, завдяки своїм аналітичним і адаптивним можливостям, здатен персоналізувати освітній процес, оперативно реагувати на рівень знань кожного учня та пропонувати відповідні задачі, пояснення або візуалізації.

Актуальність дослідження полягає в необхідності інтеграції інноваційних технологій у шкільний курс математики для підвищення ефективності навчання, особливо при вивченні таких складних тем, як похідна. Дослідження потенціалу ШІ в цьому контексті відкриває нові можливості для побудови гнучких та інтерактивних освітніх середовищ, що відповідають індивідуальним потребам учнів.

Об'єкт дослідження: освітній процес навчання математики у 10-11 класах на профільному рівні.

Предмет дослідження: використання інструментів штучного інтелекту під час навчання теми "Похідна та її застосування".

Мета дослідження:

Проаналізувати можливості застосування ШІ в навчанні теми "Похідна та її застосування" у 10-у класі та розробити рекомендації щодо його ефективного використання в освітньому процесі.

Для досягнення мети були поставлені такі *завдання*:

- Проаналізувати психолого-педагогічні аспекти вивчення теми "Похідна" в учнів старшої школи.
- Вивчити сучасні підходи до використання ШІ в освіті загалом та в математичній освіті зокрема.
- Оцінити можливості існуючих цифрових інструментів ШІ для вивчення теми "Похідна та її застосування".
- Провести експериментальне дослідження ефективності використання ШІ у процесі вивчення теми.
- Розробити рекомендації для вчителів щодо впровадження ШІ-інструментів у викладання математики.

Структура кваліфікаційної роботи обумовлена логікою дослідження і складається з таких частин: вступ, два розділи, висновки до розділів та загальні висновки, список використаних джерел.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

1.1. Поняття та сутність ШІ, застосування в освіті

Штучний інтелект (ШІ) вже декілька років як присутній в нашому суспільстві і активно ним використовується в найрізноманітніших сферах, зокрема в освіті, як вчителями так і учнями.

Загалом 76% опитаних учителів хоча б раз користувалися ШІ. 91% опитаних школярів знають про ШІ-сервіси, а 85% — хоча б раз їх використовували, третина з них робить це мінімум щотижня [22].

Для початку потрібно уточнити визначення того, що таке штучний інтелект, адже в сучасному інформаційному просторі цей термін нерідко використовується хибно. Деякі люди можуть вважати штучним інтелектом будь-яку автоматизовану систему, навіть якщо вона не відповідає основним характеристикам ШІ. Наприклад, багато хто сприймає таргетовану рекламу у соціальних мережах як прояв штучного інтелекту, хоча насправді вона базується на алгоритмах обробки великих даних та визначених правилах. Те саме стосується й автокорекції у смартфонах або голосових помічників, які, хоча і використовують деякі ШІ-технології, самі по собі не є повноцінним штучним інтелектом.

Проблеми використання ШІ в освіті висвітлює низка науковців, зокрема [5], [10], [13], [18], [19] [21], [24], [26] та ін.

В Європейському Союзі відповідно до Communication from the Commission to the European Parliament, the European Council, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions on Artificial Intelligence for Europe керуються наступним визначенням щодо «системи ШІ» (Artificial Intelligence (AI) systems): це системи програмного (та можливо апаратного) забезпечення, які розроблені людьми, що, з огляду

на складну мету, діють у фізичному або цифровому вимірі, сприймаючи навколишнє середовище через збір даних, інтерпретацію отриманих структурованих або неструктурованих даних, міркування на основі знань або обробку інформації, отриманої з цих даних, і прийняття рішення про найкращі дії для досягнення поставленої мети [24].

Сьогодні в світі відбувається четверта промислова революція (Індустрія 4.0), що характеризується інноваційним розвитком, впровадженням кіберфізичних систем, переходом на автоматизоване цифрове виробництво, кероване інтелектуальними системами в режимі реального часу, яке ґрунтується на штучному інтелекті, машинному навчанні, хмарних обчисленнях та Big Data [26].

Як ми бачимо, ШІ можуть виконувати майже нескінченну кількість задач, якщо мають достатню кількість даних для аналізу та прийняття рішень. Однак самі дані не є достатніми — важливо, як саме система їх обробляє, навчається на їхній основі та вдосконалює свої алгоритми. Способів надання й опрацювання цих даних існує багато, і саме від цього залежить ефективність штучного інтелекту в тій чи іншій сфері. Тому важливо розуміти, які підходи використовуються для навчання ШІ та як вони впливають на його можливості та обмеження.

Сьогодні існує велика кількість сервісів, що використовують технології штучного інтелекту, і кожен із них має своє цільове призначення. Наприклад, деякі ШІ-системи спеціалізуються на генерації зображень на основі текстового опису, дозволяючи створювати ілюстрації навіть без художніх навичок (як-от Midjourney чи DALL E). Інші – розпізнають об’єкти на фотографіях або відео та класифікують їх, що активно використовується, зокрема, в системах безпеки чи сортування вмісту. Є також сервіси, що перетворюють голос на текст або навпаки – генерують озвучення, наближене до людської мови, що особливо корисно у сфері доступності.

Це свідчить про надзвичайну різноманітність сфер застосування ШІ. Кожен такий сервіс створюється з урахуванням певної цільової функції – від

оптимізації часу користувача до підтримки складних рішень у науці чи промисловості. Відповідно, і методи реалізації таких сервісів можуть суттєво відрізнятися між собою: одні опираються на машинне навчання, інші – на методи глибинного навчання, ще інші – на гібридні підходи.

На цьому тлі особливої уваги заслуговує окремий клас сервісів – чат-боти, які будуть предметом подальшого аналізу в цій роботі. Їх характерною особливістю є здатність до діалогової взаємодії з користувачем у природній мові.

Такі системи, як-от ChatGPT або аналогічні мовні моделі, не лише відповідають на запити, а й здатні генерувати розгорнуті тексти, допомагати з пошуком рішень, формулювати рекомендації, пояснювати складні явища тощо. Саме ця гнучкість і універсальність роблять чат-боти зручним і доступним інструментом для використання в освітньому процесі, дослідницькій діяльності та побуті.

Чат-бот – це система штучного інтелекту, з якої користувачі взаємодіють через текст [5].

Головна перевага технології чат-ботів полягає в тому, що вона не вимагає особливої ІТ підготовки або фінансових вкладень. В першу чергу, чат-бот – це асистент, який допомагає охопити широку аудиторію і спростити роботу з нею в умовах онлайн навчання. Упровадження діалогу з чат-ботом може проводитися двома способами: пасивним і інтерактивним. Під пасивним мається на увазі опора на теоретичний матеріал (лекції, таблиці і т. д), заздалегідь заготовлений викладачем. Після закінчення часу на засвоєння теоретичного матеріалу (блок-пауза) починається інтерактивна фаза. Чат-бот може надіслати повідомлення, в якому буде міститися питання з вибором вірного варіанта відповіді (блок-ланцюжок), пов'язаний з навчальною темою.

Чат-бот є інструментом підтримки онлайн-навчання завдяки деяким перевагам:

- чат-боти ніколи не втраять терпіння і будуть постійно пропонувати допомогу учню, студенту;
- чат-боти пропонують унікальний спосіб взаємодії з користувачами за допомогою діалогу, який необхідний для процесу навчання;
- чат-боти зберігають історії спілкування з користувачем, що дозволяє їм у будь-який момент переглянути відповідь на раніше поставлене запитання;
- чат-боти допомагають користувачам бути залученими і мотивованими у процесі онлайн навчання, підказуючи їм, що робити, розважаючи їх в той же час інформуючи їх;—чат-боти ніколи не втомлюються і продовжують працювати кожен день протягом усього навчання [3, с.19].

За спостереженнями дослідників, існує п'ять типових способів застосування AIEd, як-от:

1. Інтелектуальне освітнє середовище. Створення освітнього середовища, яке використовує ІІІ для адаптації до потреб і здібностей здобувачів освіти.
2. Інтелектуальна підтримка процесу навчання. Використання ІІІ для надання індивідуальної підтримки та зворотного зв'язку в процесі навчання.
3. Інтелектуальна освітня оцінка. Використання ІІІ для оцінювання знань і навичок замовників освітніх послуг та надання рекомендацій для подальшого навчання.
4. Інтелектуальна допомога педагогам. Використання ІІІ для допомоги педагогам у плануванні навчальних занять, оцінці роботи здобувачів освіти та управлінні колективом.
5. Інтелектуальне освітнє управління та послуги. Використання ІІІ для управління освітніми системами та надання послуг, таких як рекомендації щодо вибору курсів і програм [7] [4, с.840].

Очевидно, що перші два пункти із зазначеного переліку здебільшого орієнтовані на потреби здобувачів освіти та передбачають їхню взаємодію з інтелектуальними системами для персоналізації процесу навчання. Натомість третій і четвертий пункти відкривають перспективи для безпосереднього залучення ШІ в діяльність педагогів.

Однією з практичних переваг є застосування ШІ для оцінювання навчальних результатів. Завдяки автоматизації цього процесу, можливо створювати завдання різного рівня складності, перевіряти правильність відповідей, надавати пояснення до помилок або рекомендації щодо повторного опрацювання матеріалу. Такі сервіси дозволяють оптимізувати рутинні етапи перевірки знань і забезпечити зворотний зв'язок для учнів у короткі терміни.

Ще одним важливим напрямом є використання ШІ як інструменту педагогічної підтримки. Зокрема, мова йде про можливість його залучення на етапах підготовки до занять, а саме — у створенні навчального контенту, формулюванні пояснень до нового матеріалу, доборі тематичних прикладів, завдань та вправ.

У межах практичної частини цієї роботи планується використання чат-бота на основі ШІ як допоміжного засобу під час планування уроків. Після попереднього створення загальної структури заняття, текст пояснення нового матеріалу буде надаватися системі ШІ для аналізу, редагування або вдосконалення. Такий підхід дозволяє оперативно адаптувати пояснення з урахуванням вікових, пізнавальних і когнітивних особливостей учнів, а також відповідно до тематики конкретного уроку.

Окрім того, ШІ буде задіяно для створення тематичних прикладів до матеріалу, що вивчається, а також — для генерації дидактичних вправ, тренувальних завдань та тестових запитань. У цьому контексті чат-бот функціонуватиме як засіб автоматизованої підтримки творчого процесу педагога, дозволяючи суттєво зекономити час і зосередитися на змістовній частині уроку.

На рис. 1.1. подано перелік того, де сьогодні застосовується штучний інтелект.

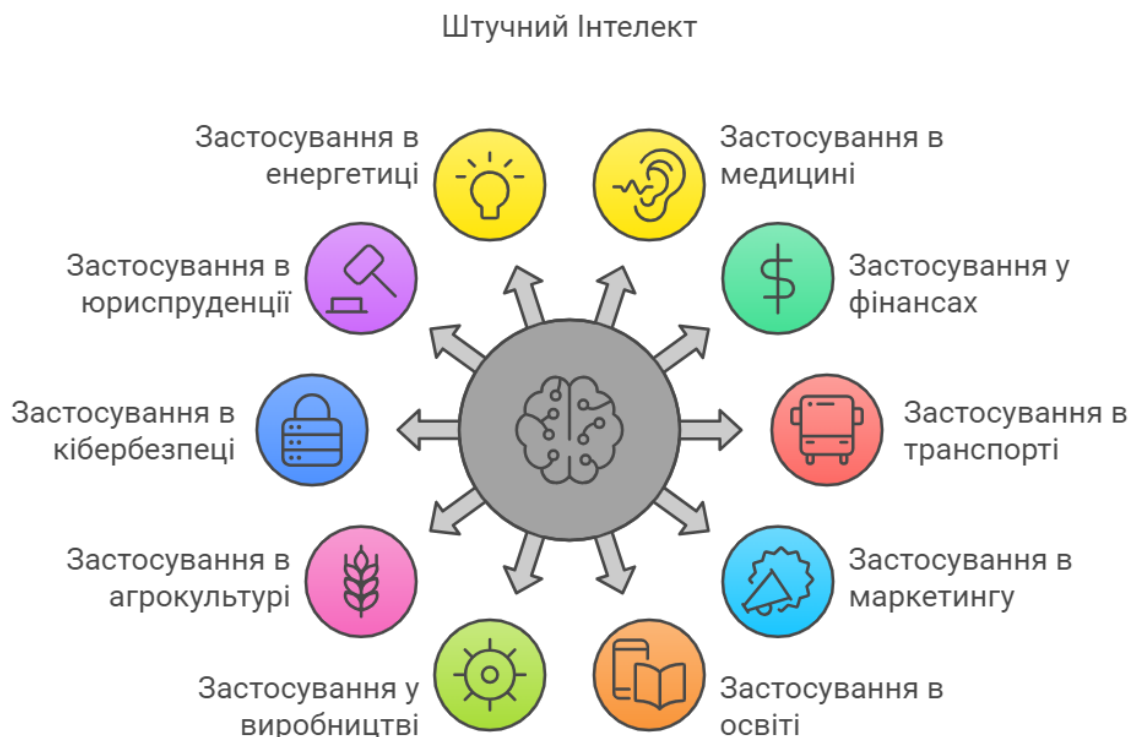


Рис.1.1. Галузі застосування ШІ.

- 1. Медицина:** діагностика, розробка ліків, персоналізована медицина.
- 2. Фінанси:** оцінка кредитних ризиків, автоматизовані торговельні операції, боротьба з шахрайством.
- 3. Транспорт:** автопілот для автомобілів, оптимізація логістики.
- 4. Маркетинг:** аналіз споживацької поведінки, реклама.
- 5. Освіта:** адаптивне навчання, віртуальні помічники, написання текстів, пошук інформації.
- 6. Виробництво:** автоматизація процесів, прогнозування обслуговування обладнання.
- 7. Агрокультура:** моніторинг стану врожаю, прогнозування врожайності.
- 8. Кібербезпека:** виявлення загроз, захист мереж, аналіз даних.
- 9. Юриспруденція:** аналіз юридичних документів, автоматизоване укладання контрактів, прогнозування результатів судових процесів.

10. Енергетика: оптимізація енергоспоживання, управління електромережами, прогнозування попиту на енергію.

ChatGPT (чат джі-пі-ті) – найпопулярніший інструмент штучного інтелекту у світі. Можливий доступ до ChatGPT без попередньої реєстрації. Безплатний доступ до ChatGPT – це чудова можливість ознайомитися з потужностями сучасного штучного інтелекту (ШІ). ChatGPT зручно та інтуїтивно зрозуміло спілкується з користувачем, відповідає на запитання, допомагає з різноманітними завданнями та навіть підтримує бесіду (Рис. 1.2). Для переходу до ChatGPT достатньо відкрити покликання – <https://chatgpt.com>

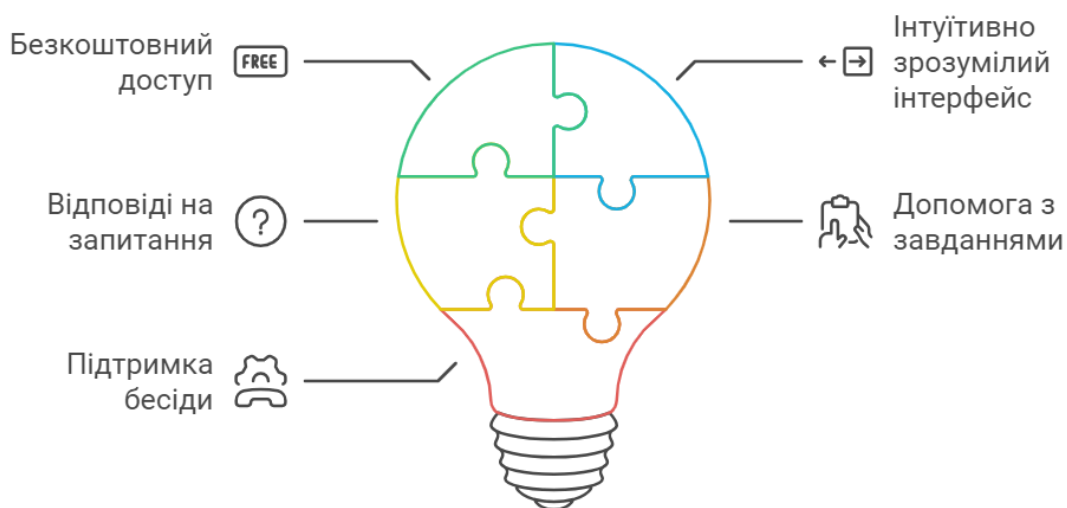


Рис. 1.2. Основні можливості ChatGPT.

Чому потрібно використовувати штучний інтелект у своєму житті, відповідає власне **ChatGPT**:

1. Економія часу: Автоматизація рутинних завдань, таких як сортування пошти, планування зустрічей чи підготовка звітів.
2. Продуктивність: Генерація ідей, написання текстів, створення дизайнів або навіть аналіз даних — усе це стає швидше та ефективніше.
3. Навчання та розвиток: ШІ допоможе знайти потрібну інформацію, розв'язати складні задачі та навіть вивчити нові навички чи мови.

4. **Особистий комфорт:** Розумні додатки з ШІ допомагають вести здоровий спосіб життя, планувати бюджет чи знаходити натхнення для творчості.

Штучний інтелект може стати справжньою знахідкою для генерації текстів. Ось декілька способів, як його можна використовувати: швидкі чернетки (написати основу для поста, статті чи листа за хвилини); креативні ідеї (отримувати унікальні заголовки, гасла чи концепції для контенту); редагування (покращувати граматику, стиль і читабельність своїх текстів); дослідження (ШІ допоможе знайти додаткову інформацію або створити структуру для тексту).

Штучний інтелект (ШІ) може зробити наше життя зручнішим, ефективнішим та цікавішим. Ось які переваги виокремлює **Gemini**, чому варто використовувати ШІ:

1. **Автоматизація рутинних завдань.** ШІ може взяти на себе повторювані та нудні завдання, звільняючи час користувача для більш важливих справ. Наприклад, розумні помічники можуть керувати календарем, надсилати електронні листи або замовляти продукти.

2. **Підвищення продуктивності.** Завдяки ШІ можна швидше обробляти інформацію, аналізувати дані та приймати кращі рішення. Це стосується як професійної діяльності, так і повсякденних завдань.

3. **Персоналізація досвіду.** ШІ допомагає створювати індивідуальні рекомендації, будь то фільми, музика, товари чи новини, що відповідають інтересам користувача.

4. **Доступ до інформації та знань.** ШІ може швидко знаходити та узагальнювати величезні обсяги інформації, роблячи знання доступнішими.

5. **Поліпшення здоров'я та безпеки.** У сфері медицини ШІ допомагає в діагностиці, розробці ліків та персоналізованому лікуванні. У побути системи безпеки на основі ШІ можуть контролювати дім.

6. **Творчість та розваги.** ШІ може генерувати зображення, музику, текст, допомагаючи у творчих проєктах або просто розважаючи.

7. Освіта та розвиток. ШІ-інструменти можуть адаптувати навчальні програми під індивідуальні потреби, надаючи персоналізований досвід навчання.

PM Copilot генерує кілька ідей для освітньої та навчальної платформи, зосередженої на математиці.

1. Адаптивні навчальні шляхи. Учні мають різний рівень розуміння та темп вивчення математики, що ускладнює створення універсальної навчальної програми. Ця функція пропонує персоналізовані навчальні шляхи, які адаптуються до прогресу та рівня розуміння кожного учня.

2. Інтерактивне вирішення проблем. Традиційні методи вирішення проблем можуть бути статичними та нецікавими. Ця функція пропонує інтерактивні, гейміфіковані вправи на вирішення проблем, які підвищують залученість та утримання інформації.

3. Зворотній зв'язок та підказки в режимі реального часу. Учні часто мають труднощі з математичними завданнями без негайного керівництва, що призводить до розчарування. Ця функція забезпечує миттєвий зворотний зв'язок та контекстуальні підказки, щоб допомогти учням зрозуміти помилки та ефективно навчатися.

4. Спільні навчальні простори. Учні втрачають можливості для навчання один одному в цифровому середовищі. Ця функція створює віртуальні простори, де учні можуть співпрацювати над математичними задачами та проєктами, сприяючи розвитку спільноти навчання.

5. Репетитор на базі штучного інтелекту. Не всі учні мають доступ до персональних репетиторів для отримання додаткової допомоги. Ця функція пропонує репетитора на основі штучного інтелекту, який надає персоналізовану допомогу та пояснення складних математичних понять.

6. Візуалізатор математичних концепцій. Абстрактні математичні поняття може бути важко зрозуміти лише за допомогою тексту. Ця функція використовує візуалізації та анімацію для ілюстрації складних математичних ідей, що сприяє розумінню.

7. Панель аналітики прогресу. Вчителям та учням потрібна інформація про прогрес у навчанні, щоб визначити сильні сторони та області для покращення. Ця функція надає детальну аналітику та звіти про успішність та прогрес учнів.

8. Гейміфіковані виклики та таблиці лідерів. Підтримувати мотивацію учнів до математики може бути складно. Ця функція пропонує ігрові завдання та таблиці лідерів для заохочення дружнього змагання та постійної участі.

9. Інтеграція з реальними додатками. Учні часто ставлять під сумнів актуальність математики в реальному житті. Ця функція пов'язує математичні поняття з реальними застосуваннями та сценаріями, демонструючи практичне використання та підвищуючи інтерес.

10. Вирішення проблем за допомогою голосової активації. Учні з різними уподобаннями у навчанні можуть отримати користь від інструментів слухового навчання. Ця функція дозволяє учням вирішувати математичні задачі за допомогою голосових команд, що враховує різні стилі навчання.

Звісно, важливо використовувати ШІ свідомо, розуміючи його можливості та обмеження.

1.2 Методика навчання теми «Похідна та її застосування»

Сучасний етап розвитку освіти в Україні характеризується фундаментальним переходом від знаннєво орієнтованої освітньої парадигми до компетентнісної. Навчання математики на профільному рівні набуває особливого значення, оскільки його мета полягає у забезпеченні свідомого й міцного оволодіння учнями математичною і ключовими компетентностями, які потрібні не лише у повсякденному житті, а й у майбутній професійній діяльності. Ця підготовка має бути достатньою для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, що передбачають значну математичну складову [28].

Відповідно до визначеної мети, компетентнісний підхід виступає головним орієнтиром шкільної математичної освіти. Його реалізація передбачає формування в учнів компетентностей як інтегрованого результату навчання, який органічно поєднує знання, уміння, досвід, цінності і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці. У цьому контексті математична компетентність розглядається як особистісна здатність, що інтегрує змістовно-інтелектуальну складову (знає і розуміє), рефлексивно-діяльнісну (уміє і застосовує) та мотиваційно-ціннісну (виявляє ставлення й оцінює). Важливо зазначити, що компетентнісного змісту навчальна діяльність школярів набуває саме під час самостійного перенесення засвоєних математичних знань і способів діяльності в область їх практичних застосувань [28].

Зміст навчання математики на профільному рівні має реалізувати три основні функції математичної освіти: власне математичну освіту, освіту за допомогою математики та спеціалізуючу функцію як важливий елемент професійної підготовки. Досягнення цих функцій вимагає формування цілісної системи компетентностей, до яких належать математичні (змістові, процесуально-операційні, дослідницькі, інформаційно-технологічні), надпредметні математичні та ключові компетентності.

Змістові компетентності передбачають, що учень має уявлення про ідеї та методи математики й усвідомлює її роль у пізнанні дійсного світу. Це вимагає володіння як формально-логічними знаннями, до яких належать означення, властивості та ознаки математичних об'єктів, так і оперативними знаннями, що включають методи, прийоми та способи діяльності. Важливою складовою є розуміння математичних формул і моделей як інструментів, що дають змогу описувати властивості об'єктів, процесів та явищ.

Процесуально-операційні компетентності виявляються у здатності учня зображувати математичні об'єкти, встановлювати і обґрунтовувати їхні властивості, а також класифікувати їх за певними ознаками. Учень повинен уміти обґрунтовувати математичні твердження, застосовувати означення та

властивості до розв'язування задач, вимірювати й обчислювати геометричні величини. Особливий акцент робиться на вмінні застосовувати математичні методи й прийоми у процесі розв'язування не лише суто математичних, а й практичних задач.

Дослідницькі компетентності є критично важливими для профільного рівня. Вони передбачають здатність учня висувати та перевіряти гіпотези, складати програми діяльності та передбачати її результати. Учень має навчитися приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної або ймовірнісної інформації, а також оцінювати правильність і раціональність розв'язаних задач, інтерпретуючи отримані результати з урахуванням конкретних умов дослідження.

Інформаційно-технологічні компетентності включають уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології у навчальній діяльності. Це означає здатність відшукувати і опрацьовувати математичну інформацію з різних джерел, таких як підручники, довідники та інтернет-ресурси, а також оцінювати здобуту інформацію, систематизувати й узагальнювати її для того, щоб робити правильні висновки.

Важливим завданням навчання на профільному рівні є вироблення надпредметних математичних компетентностей, зокрема міжпредметних та спеціалізуючих. Учень повинен розуміти значення математики для успішного вивчення інших дисциплін та повноцінної діяльності в різних сферах суспільного життя. Він має навчитися розпізнавати і формулювати проблеми, що виникають у змісті інших предметів або у сфері майбутньої професійної діяльності, і які можна розв'язати математичними методами, застосовуючи математичні моделі до вивчення фізики, інформатики, хімії, біології та інших наук.

Окрім предметних, зміст навчання має сприяти формуванню ключових компетентностей, визначених у Концепції «Нова українська школа». Особлива увага приділяється реалізації наскрізних ліній, таких як «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність»,

«Здоров'я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність». Ці лінії спрямовані на посилення мотивації та інтересу до навчання, а також на вироблення в учнів здатності застосовувати знання й уміння у реальних практичних ситуаціях, що досягається здебільшого під час розв'язування задач практичного змісту .

Формування окреслених компетентностей вимагає дотримання низки дидактичних і методичних вимог, серед яких першочерговою є посилення прикладної спрямованості змісту навчання. Це забезпечує цілісну соціально ефективну математичну підготовку та перенесення акцентів зі збільшення обсягу інформації на вироблення вмінь її використовувати. Учні мають усвідомити, що знати математику — це насамперед вміти її застосовувати .

Однією з найважливіших умов є вироблення стійкої мотивації та інтересу до набуття компетентностей. Учні повинні розуміти значення математичної освіти для освоєння нових технологій та сприймання наукових ідей. Ефективним способом мотивації є створення проблемних ситуацій, розв'язання яких вимагає ґрунтовних знань, а також систематичне використання історичного матеріалу, що стимулює потяг до наукової творчості та дає уявлення про математику як складову загальнолюдської культури.

Зміст навчального матеріалу повинен відповідати етапам пізнання, рухаючись від одиничного через особливе до загального, і далі від загального через логічне обґрунтування до практики. Такий підхід розвиває творчість учня, його активність та ініціативу, привчаючи до самостійного відкриття нових математичних фактів. Вивчення теоретичного матеріалу має спиратися на емпіричний досвід учня, що дозволяє з'ясувати суттєві ознаки понять і самостійно формулювати твердження .

Необхідною умовою успішного навчання є його діяльнісна спрямованість. Це передбачає постійне залучення учнів до різних видів навчально-пізнавальної діяльності та оволодіння способами міркувань. Важливо, щоб учень засвоював оперативні знання про те, як треба діяти в

конкретних ситуаціях. Доцільно надавати учням поради у вигляді правил або вказівок, а також навчати їх самостійно складати алгоритмічні приписи чи евристики.

Практико-орієнтована спрямованість змісту реалізується через формування вмінь застосовувати математичний апарат до розв'язування проблем, що виникають у техніці, технологіях та побуті. Дієвим засобом тут виступає метод математичного моделювання, який дозволяє розширити межі застосування математики. Учні мають оволодіти етапами цього методу, зокрема формалізацією, що передбачає перехід від реальної ситуації до її математичної моделі, та інтерпретацією отриманого розв'язку.

Навчання на профільному рівні також передбачає диференційований підхід, що враховує різні навчальні досягнення та пізнавальні особливості учнів. Це досягається варіюванням обсягу інформації та гнучкістю вимог. Суттєво збільшується частка самостійної діяльності учнів, де вчитель виконує функцію педагогічного супроводу. Організації самостійної роботи сприяють контрольні запитання, тести та систематизація навчального матеріалу у вигляді таблиць і схем.

Важливим аспектом є забезпечення інтенсивного навчання через систематичне використання програмно-педагогічних засобів. Вони дозволяють активізувати дослідницьку діяльність та посилити інтерес до предмета. У процесі використання таких засобів слід враховувати їхні можливості: інтегрованість, конструктивність, інтерактивність та візуалізацію. Це дає змогу учням самостійно формулювати означення, досліджувати властивості об'єктів та розвивати образне мислення.

Старшокласників доцільно ознайомлювати з інструментальними засобами наукового та інженерного призначення, такими як MathCad, MATLAB, Maple, Mathematica, які орієнтовані на здійснення числових та аналітичних обчислень. Використання програмних засобів робить доступнішим вивчення складних тем, таких як побудова графіків функцій, розв'язування систем рівнянь та знаходження площ фігур. Оскільки функції є

моделями багатьох реальних процесів, використання ІКТ для їх дослідження та візуалізації є вкрай важливим .

Сучасні технології навчання, такі як «Перевернуте навчання» та «Веб-квест», також відіграють значну роль. Вони дозволяють учням працювати у власному темпі, залучаючи ресурси інтернету для пошуку інформації та виконання завдань різної складності. Використання сервісів для організації дистанційного навчання та спільної роботи (наприклад, Google Classroom) сприяє ефективній комунікації та співпраці між учнями та вчителем .

Таким чином, теоретичні основи навчання математики на профільному рівні базуються на компетентнісній парадигмі, яка вимагає відходу від простої передачі знань до формування здатності їх ефективного застосування. Це досягається через посилення прикладної та діяльнісної спрямованості навчання, використання методу математичного моделювання, диференціацію та індивідуалізацію навчального процесу, а також широке впровадження інформаційно-комунікаційних технологій та сучасних програмних засобів [28].

Методика навчання теми «Похідна та її застосування» в рамках стандартного рівня передбачає формування у учнів не лише теоретичних знань, а й практичних навичок, необхідних для ефективного використання похідної при розв'язуванні задач різного рівня складності. Важливим аспектом є розуміння учнями фізичного та геометричного змісту похідної, здатність застосовувати її для опису реальних процесів, таких як механічний рух. Крім того, учні повинні оволодіти техніками диференціювання функцій, вміти знаходити швидкість зміни величин у точці, а також досліджувати функції на монотонність і екстремуми.

Згідно з чинною освітньою програмою, учні 10 класу мають засвоїти такі ключові елементи теми (табл. 1.1):

**Витяг з навчальної програми для вивчення теми
«Похідна та її застосування».**

Тема 3. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ 14 годин	
Учень/учениця: розуміє значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху; знаходить швидкість зміни величини в точці; кутівий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці; диференціює функції, використовуючи таблицю похідних і правила диференціювання; застосовує похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції, побудови графіків; знаходить найбільше і найменше значення функції; розв'язує нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.	Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Правила диференціювання. Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Після розгляду теми похідних у 10 класі, учні продовжують вивчення математичних тем у 11 класі

Наприклад, при вивченні поняття миттєвої швидкості доцільно пропонувати наступну задачу. Тіло рухається по координатній прямій за

законом $s(t) = t^2 + 3$ (переміщення вимірюється в метрах, час – у секундах). Знайдіть середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с; миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 1$ с. На нашу думку, дана вправа підходить для створення мотивації та введення нового поняття а також на базі цієї вправи відбувається ілюстрація нового поняття.

Під час розгляду наочного подання математичних фактів доцільно розглянути задачі, які приводять до поняття похідної. Серед них задача про миттєву швидкість. Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s(t)$, яка дозволяє визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають законом руху точки. Відомо, що $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ – закон рівноприскореного руху, де s_0 – координата точки на початку руху, v_0 – початкова швидкість, a – прискорення. Нехай, наприклад, $s_0 = 0, v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с². Тоді $s(t) = t^2 + t$. Зафіксувавши який-небудь момент часу t_0 і надавши аргументу в точці t_0 приріст Δt , тобто розглянувши проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs , де

$$\begin{aligned}\Delta s &= s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = (t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) - (t_0^2 + t_0) = \\ &= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.\end{aligned}$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t$, тобто

$v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t$. Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, то зрозуміло, що середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Чим менше Δt , тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0 . Іншими словами, якщо при $\Delta t \rightarrow 0$ значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають миттєвою швидкістю в момент часу t_0 . У

нашому прикладі, якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сеп}}(\Delta t)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Необхідно продемонструвати наочне представлення таких математичних фактів теми, як задача про дотичну до графіка функції, схема обчислення похідної, правила обчислення похідних, рівняння дотичної, ознаки зростання і спадання функції, точки екстремуму функції.

1.3 Аналіз навчального матеріалу теми «Похідна та її застосування» в підручниках для 10-11 класу щодо можливостей застосування ІІІ

Підручники, залежно від рівнів навчання математики (стандарту, академічного, профільного), різняться інформаційною і інтелектуальною ємністю, діагностико-прогностичною спрямованістю та соціальною ефективністю, а також способами упорядкування матеріалу, ступенем узагальнення знань, співвідношеннями між теоретичними і емпіричними знаннями. Компетентнісно орієнтований зміст підручників має відповідати вимогам, які передбачають: відповідність шкільної математичної освіти суспільно-економічним запитам держави; врахування особливостей навчальної діяльності учнів на різних рівнях змісту; посилення практично-діяльнісної і творчої складових змісту освіти; пріоритет розвивальної функції навчання; відповідність навчальних текстів етапам пізнання; науковість і прикладну спрямованість змісту.

Тема «Похідна та її застосування» за навчальною програмою вивчається в 10 класі. Однак, за відсутністю можливості забезпечити учнів навчальними матеріалами з даної теми, ця тема може вивчатися в 11 класі.

МОН для вивчення алгебри і початків аналізу в 11-х класах загальноосвітніх навчальних закладів на профільному рівні рекомендує, як основні навчальні підручники Алгебра 11 (автори: Є.Н. Нелін, О.Є. Долгова); Алгебра. 11 клас (автори: А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір); Алгебра і початки аналізу (автори: Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова); Алгебра і початки аналізу (автори: М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара).

Ці підручники створено відповідно до Державного стандарту та програми з математики для академічного та профільного рівнів загальноосвітніх навчальних закладів.

Структура підручника «Алгебра 10 клас» [17]. Підручник є дворівневим, текст якого передбачає можливість організації навчального процесу в класах як академічного так і профільного рівнів вивчення математики.

Темі «Похідна та її застосування» відповідає один із параграфів підручника. Прикладні задачі наявні в пунктах: поняття похідної (всього 2 задачі, що становить 6,6 % всіх завдань представлених у цьому пункті); правила обчислення похідних (5 задач – 13,2 %); найбільше і найменше значення функції на відрізку (2 задачі – 6 %); друга похідна, поняття опуклості (3 задачі – 18,75 %).

Нами було проведено логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» за підручником «Алгебра 10 клас» [16].

При аналізі теоретичного матеріалу було встановлено нові та базові поняття, факти, способи діяльності. Автор знайомить учнів з задачами що призводять до поняття похідної, геометричним та механічним змістом похідної; формує такі способи діяльності як складання рівняння дотичної до графіка функції, знаходження проміжків зростання і спадання функції, пошук найбільшого і найменшого значення функції.

Таблиця 1.2

Етапи проведення аналізу	Результати
1. Формулювання твердження	У тих точках, у яких є диференційованими функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційованою функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. Встановлення виду твердження	Складене твердження. Кон'юнктивна структура
3. Виділення роз'яснювальної частини	Для двох диференційованих функцій
4. Виділення умови	Диференційовні функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Умова проста
5. Виділення вимоги	Диференційовна функція $y = f(x) + g(x)$. Вимога проста
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Похідна суми дорівнює сумі похідних

Під час логіко-математичного аналізу формулювання означень нових понять теми, визначено вид означення та характеристичні властивості. Можна зазначити, що більшість означень автор пропонує через найближчий рід, це такі означення понять, як похідна функції в точці, диференційована функція, диференціювання функції, точка максимуму функції, точка мінімуму функції, точка екстремуму функції, критичні точки. Також у даному підручнику наявні означення інших видів: конструктивні, символічні та описові. Запропоновано орієнтовну будову системи вправ для введення нових понять. Вправи підручника співвіднесено до наступних видів: вправи для створення мотивації та введення нового поняття, вправи, що

забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та вмінь, вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та побудову об'єктів, які мають ці властивості, вправи на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться, вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять в обсяг нового поняття, вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення.

Схеми-орієнтири проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичних тверджень представлено у таблицях. Наведемо приклад аналізу структури формулювання теореми [похідна суми]

Проведено логіко-математичний аналіз системи вправ підручника, призначених для формулювання способу діяльності. Вправи підручника на основні способи діяльності було згруповано в таблицю за такими критеріями: відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності; відпрацювання послідовностей операцій, які входять у спосіб діяльності; застосування способу. Наведемо приклади вправ, що входять до кожної з цих категорій для такого способу діяльності, як знаходження похідної функції в точці. Вправа на відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності: 7.10. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо: 1) $f(x) = \frac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$. Вправи на відпрацювання послідовності операцій, які входять в спосіб діяльності: 7.6. Обчисліть значення похідної функції f в точці x_0 : 1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$. Такі задачі належать до рівня відтворення (1-го класу). У підручниках для профільного рівня навчання наявні задачі прикладного змісту на застосування способу діяльності: 7.23. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2$. Знайдіть $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

«Алгебра 10 клас» - підручник є дворівневим, матеріал призначений для академічного і профільного рівнів. Складається з 5 розділів, кожен із яких містить параграфи та підпункти. Особливістю даного підручника є те,

що основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі довідкових таблиць на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та способів діяльності з цим матеріалом у формі спеціальних орієнтирів для розв'язування завдань.

Під час введення поняття похідної в підручниках Є.П. Неліна та ін. А.Г. Мерзляка та ін. розглядають задачі, які призводять до поняття похідної, а саме, задача про миттєву швидкість та задача про дотичну до графіка функції.

Таблиця 1.3

Основні формули, що містять похідну

$\omega(t) = \varphi'(t)$	Кутова швидкість	Похідна від кута повороту
$a(t) = \omega'(t)$	Кутове прискорення	Похідна від кутової швидкості
$I(t) = q'(t)$	Сила струму	Похідна від кількості електричного заряду
$N(t) = A'(t)$	потужність	Похідна від роботи
$C(t) = Q'(t)$	Теплоємність	Похідна від кількості тепла
$P(t) = V'(t)$	Продуктивність праці	Похідна від об'єму продукції

Г.П. Бевз та ін. пропонує фізичний зміст похідної окремо від геометричного, спочатку учні опрацьовують похідну як кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції, а далі знайомляться з фізичним змістом похідної. Позитивним є те що на вивчення фізичного змісту у підручнику відведено окремий параграф, у якому представлені прикладні задачі фізичного змісту, а саме: задачі на знаходження швидкості, прискорення, потужності, сили струму, продуктивність праці тощо. Для ілюстрації фізичного змісту похідної автор наводить, як приклад, таку задачу: «Як відомо, вільне падіння тіла відбувається за законом $s = \frac{g}{2}t^2$, де постійна $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ - його прискорення. З якою швидкістю тіло рухається в

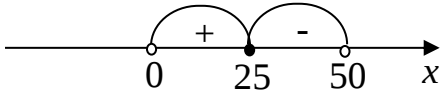
момент t після початку падіння». Також Г. П. Бевз пропонує основні формули, що містять похідну:

У підручнику при поясненні теми «Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку» представлено задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функції. У підручнику представлено детальну схему та приклад у вигляді таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функції

Схема	Приклад
1. Одну з величин, яку потрібно знайти (або величину, зо допомогою якої можна дати відповідь на запитання задачі), позначити через x (і за змістом задачі накласти обмеження на x).	Є дріт довжиною 100 м. Потрібно огородити ним прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки. Нехай ділянка має форму прямокутника $ABCD$ зі стороною $AB=x$ (м). The diagram shows a rectangle with vertices labeled A (top-left), B (top-right), C (bottom-right), and D (bottom-left). The top side AB is labeled with the letter 'x'. Ураховуючи, що дріт буде натягнуто по периметру прямокутника, одержуємо: $2AB + 2BC = 100$, або $2x + 2BC = 100$, звідси $BC = 50 - x$ (м). Оскільки довжина кожної сторони прямокутника – додатне число, то $0 < x < 50$.

2. Величину, про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x.	Площа прямокутника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2.$
3. Дослідити одержану функцію на найбільше або найменше значення (найчастіше за допомогою похідної)	Дослідимо функцію $S(x)$ за допомогою похідної. Похідна $S'(x) = 50 - 2x$ існує при всіх дійсних значеннях x (отже, $S(x)$ – неперервна функція на заданому проміжку). $S'(x) = 0, 50 - 2x = 0, x = 25$ – критична точка. Знак $S'(x)$  У точці $x = 25$ $S'(x) = 50 - 2x$ змінює знак з плюса на мінус, отже, $x = 25$ – точка максимуму. Ураховуємо, що неперервна функція $S(x)$ має на заданому інтервалі $(0;50)$ тільки одну точку екстремуму $x = 25$ і це точка максимуму. Тоді на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці $x = 25$.
4. Упевнитись, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.	Отже, площа огороженої ділянки буде найбільшою, якщо сторони прямокутника будуть завдовжки: $AB = x = 25(\text{м}), BC = 50 - x = 25(\text{м})$, тобто коли ділянка матиме форму квадрата зі стороною 25 м.

Також учням пропонується до розгляду детальне розв'язання наступної задачі: Із круглої колоди вирізають брус із прямокутним перерізом найбільшої площі. Знайдіть розміри перерізу бруса, якщо радіус перерізу колоди дорівнює 25 см [9]. Таку задачу можна віднести до третього класу компетентностей, на рівень міркувань. Всього прикладних задач з даної теми у підручнику – 4, що становить 23,5% всіх завдань представлених у цьому пункті.

У підручнику при викладенні теми «Найбільше та найменше значення функції» представлено розв'язання наступної задачі: «Є квадратний лист жерсті зі стороною 60 см. Знайдіть розміри квадратів, які треба вирізати в кутах даного листа, щоб з отриманої заготовки зробити коробку найбільшого обсягу». Всього прикладних задач з даної теми у підручнику – 6, що становить 15,8% всіх завдань представлених у цьому параграфі.

На основі аналізу розглядуваних підручників ми склали таблицю системи вправ підручника, які спрямовані на забезпечення прикладної спрямованості.

Отже проаналізувавши зміст навчального матеріалу з теми «Похідна та її застосування» у навчальних підручниках, можна зробити висновок, про недостатню кількість прикладних задач у даних підручниках, Пояснення нового матеріалу яскраво та лаконічно, за допомогою таблиць, представлено у підручниках з приводу забезпечення прикладної спрямованості, то підручник містить більшу кількість прикладних задач фізичного змісту та на знаходження найбільшого та найменшого значення. Отже для забезпечення прикладної спрямованості при вивченні теми «Похідна та її застосування» радимо не обмежуватися одним підручником, а готувати цікаві прикладні задачі залежно від профілю навчання, індивідуальних особливостей та інтересів учнів, аби зробити математику цікавою та необхідною для подальшої професійної діяльності.

Таблиця 1.6

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручників, що спрямовані на забезпечення прикладної спрямованості

		Алгебра (Є.П. Нелін та ін.)	Алгебра (А.Г. Мерзляк та ін.)	Алгебра (Г.П. Бевз та ін.)
Механічний зміст похідної	швидкість	3 с 28, 9, 10 с 30	7.24,7.25, 8.15,8.16, 8.25,8.26, 8.27,14.16	841,844,846, 847,848,849, 850,851,852, 853,855,858, 863,866, 867.
	прискорення		14.14, 14.15.	842,847,854, 856, 864.
	продуктивність праці			843,860.
	потужність			845.
	сила струму			861,862.
Знаходження найбільшого і найменшого значення функції, неперервної на відрізку.		7, 9 с. 90, 11, 17 с.91.	13.27, 13.28	813,814,824, 826,831,834.

Логіко-математичний аналіз теми:

Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)
: підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – Київ : Генеза,
2018 [21]

Витяг з програми був представлений в попередньому пункті, тому тут він повторюватись не буде.

Таблиця 1.7

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Границя, неперервність функції в точці, похідна функції, дотична до графіка функції, ознаки сталості, спадання чи зростання функції, екстремуми функції, критичні точки, окіл точки.	похідні найпростіших функцій, правила диференціювання	Обчислення границі функції в точці, знаходження приросту функції/аргументу, знаходження похідних, розв'язування задач на знаходження похідних фізичного та геометричного змісту, диференціювання за допомогою таблиці похідних, визначення проміжків зростання/спадання чи сталості функції, пошук екстремумів функції.
Базові	Функції, тригонометрія, властивості функцій (Область визначення, область значень, нулі, проміжки знакосталості)	Таблиця значень тригонометричних функцій, формули тригонометрії, властивості елементарних функцій	Побудова графіків елементарних функцій, знаходження області визначення/значень функції, розв'язування тригонометричних рівнянь/нерівностей, перетворення графіків функцій.

Таблиця 1.8

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристична властивість
Границя	Число A називають <i>границею функції</i> $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться так число $\delta > 0$, що для всіх $x \neq x_0$ таких, що $ x - x_0 < \delta$, справджується нерівність: $ f(x) - A < \varepsilon$.	Символьне
Неперервність функції в точці	Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0 , якщо	Символьне

	вона визначена в цій точці і виконується рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.	
Похідна функції	Границю відношення приросту функції Δf у точці x_0 до приросту аргументу Δx , коли $\Delta x \rightarrow 0$, називають <i>похідною функції</i> $y = f(x)$ у точці x_0 .	Символьне
Дотична до графіка функції	Дотичною в точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$ називають граничне положення січної, що проходить через цю точку, коли $\Delta x \rightarrow 0$.	Символьне
Зростаюча функція	Функцію називають <i>зростаючою</i> на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.	Описове
Спадаюча функція	Функцію називають <i>спадаючою</i> на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.	Описове
Екстремуми функції	Точки максимуму і мінімуму разом називають <i>точками екстремуму</i> функції, а значення функції в цих точках – <i>екстремумами функції</i> .	Описове
Критичні точки	<i>Критичними точками</i> називають внутрішні точки області визначення, у яких похідна не існує або дорівнює нулю.	Описове
Окіл точки	<i>Околом</i> точки x_0 називають будь-який проміжок, що містить цю точку.	Описове

Таблиця 1.9

Орієнтовна будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння текстового значення
Поняття						
Границя	17.1	17.5, 17.9	17.11, 17.15		17.17	
Неперервність функції в точці	17.3	17.7	17.13		20.11	
Похідна функції	18.3	18.9	18.13, 18.15, 18.16, 18.18		18.19, 20.1-20.9,	20.17, 20.19, 20.21, 20.23, 20.41, 20.43
Дотична до графіка функції						
Зростаюча функція	21.1, 21.3	21.5, 21.9	21.11	21.1, 21.3	21.17	
Спадаюча функція	21.1, 21.3	21.5, 21.9	21.11	21.1, 21.3	21.17	
Екстремуми функції	22.1	22.3, 22.4	22.7, 22.9	22.1, 24.1	22.11, 22.13, 24.3, 24.11, 24.17	24.5, 24.7, 24.13, 24.15
Критичні точки	21.7	21.13	21.23, 21.25	22.1		
Окіл точки						

Теорема 1 (ознака сталості функції). Функція $y = f(x)$ є сталою на проміжку $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.

Таблиця 1.10

Логіко-математичний аналіз структури формулювання математичних тверджень

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Функція $y = f(x)$ є сталою на проміжку $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.
2. Встановлення виду твердження	
3. Виділення роз'яснювальної частини	Тоді і тільки тоді, коли
4. Виділення умови	$f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.
5. Виділення вимоги	Функція $y = f(x)$ є сталою на проміжку $(a;b)$
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо для кожного x із проміжку $(a;b)$ $f'(x) = 0$, то функція $y = f(x)$ є сталою на цьому проміжку.

Теорема 2 (ознака зростання, спадання функції). Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці проміжку $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a;b)$. Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці проміжку $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a;b)$.

Таблиця 1.11

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці проміжку $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a;b)$. Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці проміжку $(a;b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a;b)$.
2. Встановлення виду твердження	
3. Виділення роз'яснювальної частини	Якщо, то
4. Виділення умови	Похідна в кожній точці проміжка є додатньою/від'ємною

5. Виділення вимоги	Функція зростає/спадає на вказаному проміжку
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Функція $y = f(x)$ зростає/спадає на $(a;b)$ тоді тільки тоді, коли $f'(x)$ є більшою/меншою за 0 при будь-якому аргументу із даного проміжка.

Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю:

$$f'(x_0) = 0$$

Таблиця 1.12

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю
2. Встановлення виду твердження	
3. Виділення роз'яснювальної частини	Якщо, то
4. Виділення умови	В точці екстремуму існує похідна
5. Виділення вимоги	Ця похідна дорівнює нулю
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Значення функції в точці екстремуму, в якій є похідна, дорівнює нулю

Теорема (достатня умова екстремуму). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 та:

- 1) $f(x) > 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;
- 2) $f(x) < 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$;

Таблиця 1.13

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 та: 1) $f(x) > 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$; 2) $f(x) < 0$ на проміжку $(a; x_0)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(x_0; b)$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$;
2. Встановлення виду твердження	
3. Виділення роз'яснювальної частини	Якщо, то
4. Виділення умови	Функція є неперервною в певній точці, функція є додатньою/від'ємною на певному проміжку до цієї точки, а похідна функції є від'ємною/додатньою на тому ж проміжку, але вже після данної точки.
5. Виділення вимоги	Точка є максимумом/мінімумом.
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Для того, щоб точка була максимумом/мінімумом функції, ця функція має бути додатньою/від'ємною на певному проміжку обмеженому цією точкою, а похідна цієї функції вже на проміжку після цієї точки бути від'ємною/додатньою.

Висновки до першого розділу

Проведене дослідження засвідчує, що використання штучного інтелекту у навчанні теми «**Похідна та її застосування**» є перспективним напрямом удосконалення сучасного освітнього процесу. ШІ має значний потенціал як для підтримки учнів у засвоєнні складного математичного матеріалу, так і для оптимізації діяльності педагога.

1. Штучний інтелект стає важливою частиною освітнього середовища, забезпечуючи доступність персоналізованого навчання, адаптивних систем і швидкого зворотного зв'язку. Високий рівень використання ШІ учнями та вчителями підтверджує необхідність інтеграції цифрових інструментів у навчальний процес.

2. Чат-боти та мовні моделі, такі як ChatGPT, мають особливу цінність у математиці, оскільки вони здатні:

- пояснювати складні поняття доступною мовою;
- генерувати приклади, вправи й задачі;
- допомагати у створенні навчальних матеріалів;
- здійснювати аналіз та вдосконалення текстів пояснень;
- адаптувати навчальну інформацію до рівня конкретного учня.

3. Методика навчання похідної передбачає необхідність не лише технічних навичок диференціювання, а й розуміння її фізичного та геометричного змісту. Використання ШІ підсилює дидактичні можливості вчителя, зокрема у візуалізації, доборі прикладних задач і створенні індивідуальних траєкторій навчання.

4. Аналіз підручників показав, що структурований матеріал з теми «Похідна» може бути успішно доповнений сервісами ШІ: від створення тренувальних вправ до симуляцій дослідження функцій. Це робить навчання більш інтерактивним і наочним.

5. Використання ШІ сприяє формуванню в учнів:

- глибшого розуміння математичних понять;
- вищої навчальної мотивації;

- уміння працювати з сучасними інструментами цифрової грамотності;

- навичок самостійного навчання.

6. Для вчителя ШІ є важливим інструментом педагогічної підтримки, що дозволяє:

- економити час під час планування уроків;

- автоматизувати процес створення дидактичних матеріалів;

- швидше перевіряти виконані завдання;

- формувати диференційовані та індивідуальні навчальні маршрути.

Загалом, дослідження підтверджує, що **інтеграція ШІ у вивчення теми «Похідна та її застосування» підвищує ефективність навчання**, робить процес зрозумілішим і доступнішим для учнів різного рівня підготовки. Штучний інтелект є потужним засобом модернізації математичної освіти та важливою умовою розвитку компетентностей учнів у цифрову епоху.

РОЗДІЛ II. ПРАКТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

Методика навчання похідної передбачає необхідність не лише технічних навичок диференціювання, а й розуміння її фізичного та геометричного змісту. Використання ШІ підсилює дидактичні можливості вчителя, зокрема у візуалізації, доборі прикладних задач і створенні індивідуальних траєкторій навчання.

2.1. Педагогічні умови використання штучного інтелекту у навчанні математики

Сучасний етап цифровізації освіти характеризується стрімким зростанням інвестицій у технології штучного інтелекту, що підтверджується рекордним збільшенням фінансування генеративного сегмента цієї галузі у 2023 році вдсятеро. Прогнозується, що до 2029 року обсяг світового ринку штучного інтелекту в освіті сягне 43 мільярдів доларів, що свідчить про незворотність інтеграційних процесів та необхідність системної підготовки закладів освіти до роботи в нових умовах. Ефективність впровадження таких інструментів, як ChatGPT, Copilot, Claude, Gemini та інших, у навчання математики на профільному рівні неможлива без створення комплексу спеціальних педагогічних умов, які охоплюють методологічні, технологічні та регуляторні аспекти організації освітнього середовища.

Ключовою педагогічною умовою є забезпечення адаптивності та глибокої персоналізації навчального контенту, що стає можливим завдяки здатності генеративних моделей аналізувати великі масиви освітніх даних. Використання штучного інтелекту дозволяє автоматично адаптувати навчальні матеріали відповідно до індивідуального рівня знань, стилю навчання та пізнавальних інтересів здобувачів освіти, що є критично важливим для профільного рівня, де учні мають різні траєкторії розвитку .

Системи на основі штучного інтелекту здатні в режимі реального часу аналізувати успішність учнів та пропонувати індивідуалізований контент, що значно підвищує ефективність навчання порівняно з традиційними уніфікованими підходами. Така персоналізація сприяє оптимізації навчальних планів, дозволяючи викладачу зосередитися на складних аспектах математичної теорії, тоді як рутинне відпрацювання навичок може координуватися адаптивними алгоритмами.

Невід'ємною умовою успішного навчання є формування високого рівня цифрової компетентності як у викладачів, так і у здобувачів освіти, оскільки ефективність використання генеративних моделей безпосередньо залежить від уміння правильно формулювати запити та інтерпретувати результати. Викладачі повинні володіти навичками роботи з різними генеративними системами, розуміти принципи їх функціонування та, що найважливіше, усвідомлювати обмеження цих технологій, щоб уникати ризиків некритичного сприйняття згенерованої інформації. Відсутність належної цифрової грамотності створює бар'єри для ефективного використання інструментів штучного інтелекту, тому необхідним є впровадження спеціальних освітніх програм для підготовки педагогів до роботи з цими інноваційними засобами.

Особливої уваги потребує умова забезпечення контролю якості та вірогідності навчального контенту, оскільки генеративні моделі, працюючи на основі ймовірнісного прогнозування, можуть створювати матеріали, що містять фактологічні помилки, неточності або спотворені дані. У контексті викладання математики, де точність є абсолютним пріоритетом, ризик отримання хибних доведень теорем чи неправильних розв'язків задач є неприпустимим, тому педагог повинен виступати в ролі верифікатора, який здійснює ретельну перевірку згенерованого контенту перед його використанням у навчальному процесі. Для мінімізації цих ризиків доцільно використовувати автоматизовані системи контролю якості та навчати

здобувачів освіти методам перевірки інформації через авторитетні джерела та бази даних.

Розглянемо, як висвітлює педагогічні умови використання штучного інтелекту у навчанні математики О. О. Гриб'юк. Цей висновок сформований на основі ґрунтовного аналізу статті [28].

Ефективність впровадження технологій штучного інтелекту в освітній процес з математики на профільному рівні безпосередньо залежить від створення комплексу педагогічних умов, які забезпечують методичну доцільність та дидактичну виваженість використання цих інструментів. Сучасні дослідження підкреслюють, що поняття «штучний інтелект» в освіті слід розглядати як набір алгоритмів та програмних правил, з використанням яких комп'ютер лише імітує деякі когнітивні функції людини, а не замінює їх [28]. Тому першочерговою педагогічною умовою є чітке розуміння вчителем та учнями ролі штучного інтелекту як допоміжного інструментарію, який покликаний звільнити час педагога для безпосередньої роботи з учнями, а не виступати в ролі електронного спостерігача чи замінильника спілкування [28].

Критично важливою умовою є забезпечення педагогічно виваженого використання засобів штучного інтелекту, що передбачає врахування їхніх технічних обмежень та недосконалості. Емпіричні дані свідчать про те, що навіть популярні генеративні моделі, такі як ChatGPT та спеціалізовані сервіси на кшталт MathGPTPro, демонструють незадовільні результати при розв'язуванні математичних задач, особливо тих, що вимагають глибокого аналізу або містять нестандартні формулювання [28]. Наприклад, експериментальні перевірки показали, що MathGPTPro здатен правильно розв'язати лише частину запропонованих завдань, а ChatGPT часто припускається помилок навіть у базових алгоритмах, що робить їхню точність недостатньою для використання без ретельної верифікації [28]. Тому обов'язковою умовою є попередня експертна оцінка вчителем правильності, повноти та швидкості обчислення математичних виразів, які

здійснюються за допомогою штучного інтелекту, а також критичне ставлення до результатів, отриманих учнями [28].

Ще однією вагомою умовою є методична підготовка вчителя до використання специфічних інструментів штучного інтелекту, призначених саме для математичної освіти. Вчитель повинен орієнтуватися у функціоналі та дидактичних можливостях різноманітних засобів, таких як MathGPTPro для розв'язування задач з алгебри та аналізу, Alpha Geometry для опрацювання олімпіадних геометричних задач, GeoGebra для динамічного моделювання та візуалізації, а також Photomath та Socratic для покрокового пояснення алгоритмів розв'язання [28]. Виважений добір цих засобів дозволяє реалізувати дослідницький підхід у навчанні, коли учні використовують штучний інтелект не для отримання готової відповіді, а для перевірки власних гіпотез, моделювання математичних ситуацій або аналізу даних [28].

Забезпечення мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів через використання штучного інтелекту виступає окремою педагогічною умовою. Штучний інтелект може бути використаний для створення проблемних ситуацій, генерації дослідницьких завдань та моделювання реальних сценаріїв, де учні виступають у ролі експертів, які мають оцінити правильність рішень, запропонованих нейромережею [28]. Такий підхід стимулює критичне мислення, оскільки учні змушені аналізувати помилки штучного інтелекту, шукати контрприкладів та аргументувати свою позицію, що перетворює процес навчання з пасивного споживання інформації на активний дослідницький пошук [28]. Крім того, штучний інтелект може слугувати інструментом для персоналізації навчання, адаптуючи складність завдань до рівня підготовки конкретного учня та надаючи миттєвий зворотний зв'язок, що сприяє підтримці інтересу до предмета [28].

Важливою умовою є також дотримання етичних норм та принципів академічної доброчесності при використанні штучного інтелекту. Бездумне використання таких технологій учнями може призвести до втрати навичок

самостійного мислення та нездатності розв'язувати задачі без допомоги нейромереж [28]. Тому педагог повинен формувати в учнів культуру використання цифрових помічників, наголошуючи на тому, що штучний інтелект не володіє емоційним інтелектом, емпатією та розумінням моральних аспектів, а його відповіді базуються лише на статистичній обробці великих масивів даних, які можуть містити неточності або упередження [28]. Ефективність використання індивідуальної траєкторії навчання, рекомендованої штучним інтелектом, прямо залежить від якості та достовірності інформації, якою оперує система, тому уникнення прийняття помилкових рішень на основі неперевірених даних є критично важливим аспектом навчального процесу [28].

Організаційно-технічною умовою є інтеграція засобів штучного інтелекту в систему управління освітнім процесом для виконання рутинних операцій, що дозволяє вчителю зосередитися на творчій та індивідуальній роботі з учнями. Штучний інтелект може брати на себе функції перевірки типових завдань, аналізу помилок, створення планів уроків та розробки критеріїв оцінювання, виступаючи у ролі «конструктора уроків» [28]. Водночас, вчитель повинен пам'ятати про необхідність захисту персональних даних учнів та уникати ситуацій, коли алгоритми штучного інтелекту приймають рішення, що можуть негативно вплинути на освітню траєкторію дитини без участі людини [28]. Таким чином, педагогічно доцільне використання штучного інтелекту вимагає від вчителя постійного професійного розвитку, критичного осмислення можливостей нових технологій та збереження пріоритету живого педагогічного спілкування [28].

Важливою організаційно-педагогічною умовою є дотримання принципів академічної доброчесності та етичних норм використання штучного інтелекту в освітньому середовищі. Доступність інструментів, здатних автоматично виконувати завдання, значно підвищує ризики академічного плагіату та може призвести до поверхневого засвоєння матеріалу здобувачами освіти, якщо вони використовуватимуть ці технології

для уникнення власних інтелектуальних зусиль . Тому необхідним є розробка та впровадження чітких нормативних рамок і етичних кодексів, які регламентують використання штучного інтелекту, а також трансформація методів оцінювання в бік перевірки критичного мислення та глибини розуміння, а не лише кінцевого результату виконання завдання.

Забезпечення інтерактивності освітнього процесу виступає ще однією важливою умовою, яка реалізується через використання чат-ботів, віртуальних симуляторів та інтелектуальних навчальних систем. Генеративний штучний інтелект дозволяє створювати інтерактивні цифрові середовища, де здобувачі можуть отримувати миттєвий зворотний зв'язок, ставити уточнювальні запитання та отримувати пояснення складних тем у зручному для них темпі . Використання таких інструментів сприяє візуалізації складних математичних даних та понять, що робить навчання більш наочним і зрозумілим, підвищуючи залученість здобувачів до навчально-пізнавальної діяльності.

Економічна ефективність та оптимізація часових ресурсів викладача є умовою, що забезпечує сталість впровадження інновацій. Автоматизація процесу розробки навчальних матеріалів, тестових завдань та сценаріїв занять за допомогою штучного інтелекту дозволяє значно скоротити витрати часу на підготовку до уроків, звільняючи ресурс педагога для індивідуальної роботи зі студентами та творчого пошуку. Штучний інтелект здатен брати на себе рутинні завдання з перевірки робіт, аналізу типових помилок та генерації варіантів завдань, що підвищує загальну продуктивність педагогічної праці.

Нарешті, важливою умовою є технічна та методична інтеграція інструментів штучного інтелекту в наявну екосистему закладу освіти, зокрема в платформи управління навчанням (LMS). Це передбачає створення відповідної інфраструктури, яка дозволяє безшовно поєднувати традиційні методи навчання з цифровими інструментами, забезпечуючи цілісність освітнього процесу. Системне дотримання окреслених педагогічних умов —

методологічних, технологічних та регуляторних — дозволяє мінімізувати ризики, пов'язані з використанням штучного інтелекту, та максимально реалізувати його потенціал для підвищення якості математичної освіти на профільному рівні.

Нижче подано системний опис педагогічних умов, які забезпечують ефективне, безпечне й результативне використання штучного інтелекту у навчанні математики учнів 12–16 років. Це умови, що стосуються вчителя, учня, організації навчання та технологій.

Педагогічні умови використання ШІ у навчанні математики

1. Підготовленість учителя до застосування ШІ

Ефективне використання можливе лише тоді, коли вчитель:

- володіє базовими знаннями про можливості та обмеження ШІ;
- уміє інтегрувати інструменти ШІ у завдання з алгебри, геометрії, логіки;
- здатен оцінювати коректність розв'язань, які пропонує ШІ, і використовувати їх як дидактичний матеріал;
- формує в учнів навички критичного мислення щодо відповідей, отриманих від ШІ.

Педагогічна суть: ШІ не замінює учителя, а вчитель виступає модератором, наставником і гарантом якісного освітнього процесу.

2. Формування в учнів цифрової грамотності та вміння працювати зі ШІ

Учні повинні:

- розуміти, що ШІ може помилятися;
- вміти ставити запитання для отримання точних відповідей;
- оцінювати правильність математичних розв'язань;
- використовувати ШІ як інструмент, а не як спосіб уникнення навчання.

Педагогічна суть: учень має бути активним суб'єктом навчання, а не пасивним отримувачем розв'язань.

3. Дидактичне обґрунтування використання ІІІ

Використання ІІІ має відповідати:

- цілям уроку (пояснення, тренування, самостійна робота, диференціація);
- віковим особливостям учнів;
- змісту теми (напр., у геометрії — для візуалізації, в алгебрі — для генерації прикладів).

Правильні сценарії:

- ІІІ як персональний репетитор для тренування навички.
- ІІІ для візуалізації складних абстрактних понять.
- ІІІ для створення адаптивних індивідуальних маршрутів навчання.

Неправильні сценарії:

- Заміна ІІІ виконання домашніх завдань замість учня.
- Використання без дидактичної мети («щоб просто було»).

4. Інтерактивність і діяльнісний підхід

Використання ІІІ має бути вбудоване у діяльність учня, а не у пасивне сприймання:

- завдання, де учень порівнює своє розв'язання з відповіддю ІІІ;
- робота з помилками, які спеціально генерує ІІІ;
- аналіз альтернативних способів розв'язання, запропонованих ІІІ.

Педагогічна суть: учень навчається через взаємодію, аналіз, рефлексію.

5. Персоналізація та диференціація навчання

ІІІ робить навчання індивідуалізованим, якщо:

- учитель використовує адаптивні платформи для визначення рівня підготовки;
- завдання автоматично підбираються під темп і стиль учня;
- учні отримують індивідуальні підказки та коментарі.

Педагогічна суть: кожний учень отримує підтримку на своєму рівні, але під контролем учителя.

6. Забезпечення безпеки та етичності використання ІІІ

Школа та вчитель мають:

- дотримуватися правил конфіденційності даних учнів;
- використовувати безпечні та педагогічно перевірені інструменти;
- навчати учнів відповідальному та етичному використанню ІІІ;
- мінімізувати ризики академічної недоброчесності.

7. Систематична інтеграція ІІІ в навчальний процес

ІІІ ефективний, коли:

- використовується регулярно, а не «від випадку до випадку»;
- інтегрується в різні етапи навчання: мотивацію, пояснення,

практику, оцінювання;

- поєднується з традиційними формами навчання.

Педагогічна суть: ІІІ стає природною частиною освітнього процесу.

8. Розвиток метакогнітивних навичок

Важливо, щоб учні навчилися:

- аналізувати, чому ІІІ пропонує саме таке розв'язання;
- оцінювати його логіку;
- рефлексувати власні помилки.

Педагогічна суть: ІІІ використовується не для отримання відповіді, а для розвитку мислення.

9. Технічне та організаційне забезпечення

Необхідні умови:

- доступ до інтернету та пристроїв;
- наявність безпечних платформ;
- технічна підготовка вчителів;
- підтримка адміністрації та освітньої політики закладу.

Отже, педагогічні умов використання ІІІ у навчанні математики можна звести до трьох головних блоків:

1. Підготовка учня і вчителя

Цифрова грамотність, критичне мислення, навички роботи з ІІІ.

2. Дидактична якість та методичне обґрунтування

Відповідність цілям навчання, інтеграція у діяльнісний підхід, персоналізація.

3. Етичні й організаційні аспекти

Безпека, академічна доброчесність, системність, технічна готовність школи.

2.2. Використання ШІ при розв'язуванні та генеруванні задач розділу

Сучасні дослідження підтверджують, що генеративний штучний інтелект (ГШІ) виступає потужним інструментом автоматизації розробки освітнього контенту, що дозволяє суттєво оптимізувати процес підготовки задачного матеріалу для уроків математики. Використання таких систем, як ChatGPT, Copilot або Claude, дає змогу викладачу значно скоротити часові та фінансові витрати на створення унікальних наборів вправ, тестових завдань та контрольних робіт, забезпечуючи при цьому їх високу варіативність [1]. Технології глибокого навчання та нейронних мереж дозволяють автоматизувати не лише текстову складову задач, а й розробку графічних та мультимедійних супроводжуючих матеріалів, що є критично важливим для візуалізації математичних понять [19].

Особливої уваги заслуговує потенціал ГШІ у створенні адаптивних задач, які динамічно змінюються відповідно до рівня підготовки учня. Системи на основі штучного інтелекту здатні аналізувати великі обсяги даних про успішність здобувачів освіти та на основі цього формувати персоналізовані рекомендації й завдання, що відповідають індивідуальним потребам та стилю навчання кожного учня [19]. Це дозволяє реалізувати на практиці принцип диференційованого підходу: для учнів, які потребують додаткової практики, система генерує серію однотипних тренувальних вправ, тоді як для більш підготовлених здобувачів пропонуються задачі підвищеної складності або дослідницького характеру [19].

Крім текстових задач, мультимодальні можливості сучасних систем (наприклад, Midjourney, DALL-E або Stable Diffusion) дозволяють генерувати унікальні візуальні матеріали для геометричних задач або ілюстрації до прикладних математичних проблем, що значно покращує сприйняття абстрактного матеріалу [19]. Водночас, впровадження автоматизованої генерації задач вимагає від учителя ретельного контролю якості, оскільки існує ризик створення контенту з неточностями або викривленими фактами, що зумовлює необхідність обов'язкової верифікації згенерованих матеріалів перед їх використанням у класі [19].

Разом з тим, ефективність використання штучного інтелекту при розв'язуванні математичних задач значною мірою залежить від обраного інструментарію та методики роботи з ним. Експериментальні дослідження, проведені Я. О. Чканою та співавторами (2025), підтверджують, що спеціалізовані чат-боти, такі як Mathos AI (раніше відомий як MathGPTPro), демонструють вищу ефективність у навчанні математики порівняно з універсальними моделями завдяки своїй адаптивності та здатності надавати покрокові інструкції.

Результати опитування студентів-математиків засвідчили, що 97,6% з них активно використовують інструменти ШІ для пошуку розв'язків, однак рівень довіри до отриманих результатів варіюється. Лише 7,2% респондентів повністю довіряють відповідям ШІ, тоді як більшість (59,5%) здійснюють логічний аналіз та порівнюють результати з альтернативними джерелами [1130, 1256]. Це підкреслює необхідність формування в учнів навичок критичного оцінювання згенерованого контенту.

Дослідження також виявило, що ефективність взаємодії з ШІ залежить від типу задачі. При розв'язуванні **репродуктивних задач** (наприклад, обчислення інтегралів методом підстановки) Mathos AI, як правило, правильно ідентифікує ключові елементи та обирає коректний метод [1297]. Однак у випадку нестандартних запитів або **креативних задач** (наприклад, обчислення границі суми через інтеграл) система може пропонувати як

правильні, так і хибні стратегії, або навіть «галюцинувати», вигадуючи неіснуючі методи. Зокрема, було зафіксовано випадки, коли чат-бот пропонував геометричний підхід для обчислення невизначеного інтеграла, що є математично некоректним, або не міг виправити помилку в тригонометричному рівнянні навіть після прямої вказівки користувача.

Ці факти вказують на те, що використання ШІ при розв'язуванні задач вимагає від учня активного залучення процедур **критичного мислення**: оцінки доцільності обраного методу, перевірки обґрунтованості кожного етапу та аналізу правильності кінцевого результату. У такому контексті ШІ виступає не як джерело готових відповідей, а як інтелектуальний тренажер, що дозволяє виявляти концептуальні похибки та експериментувати з різними стратегіями розв'язання.

Розглянемо добірку **практико-орієнтованих задач** для розділу «*Похідна та її застосування*», які можна використати на уроках математики у 10–11 класах. Ці задачі згенерував ChatGPT у відповідь на наш запит. Вони пов'язані з реальними ситуаціями, технікою, економікою, природничими науками та повсякденним життям. Позитивно те, що зазначається умова завдання, подаються до кожної задачі по три завдання. Зокрема третє завдання з відкритою відповіддю, що стимулює учнів до роздумів та здійснення дослідження.

1. Швидкість та рух (фізика + математика)

Ситуація: Автомобіль рухається за законом ($s(t)=3t^2+2t$) (км).

Завдання:

1. Знайдіть миттєву швидкість авто через 4 с: ($v(t)=s'(t)$).
2. Визначте, у який момент швидкість становитиме 30 км/год.
3. Як зміниться результат, якщо авто стартує не з місця, а з певної початкової швидкості?

2. Економіка: максимізація прибутку

Ситуація: Підприємець виготовляє сувеніри. Функція прибутку:
($P(x)=50x - 0,5x^2 - 200$), де (x) — кількість виробів.

Завдання:

1. Знайдіть, при якому (x) прибуток максимальний.
2. Обчисліть цей найбільший прибуток.
3. Зробіть висновок щодо доцільності розширення виробництва.

3. Медицина: зміна температури ліків

Ситуація: Температура підігрітої вакцини після вилучення з термокамери змінюється за формулою ($T(t)=20 + 15e^{-0,4t}$).

Завдання:

1. Знайдіть швидкість охолодження через 5 хв.
2. Чи перевищить температура 30°C протягом перших 10 хв?
3. Поясніть результат із точки зору збереження якості вакцини.

4. Бізнес-аналітика: попит і ціна

Ситуація: Попит на товар описується функцією ($q(p)=1000 - 40p$).
Виробник хоче знати, наскільки чутливий попит до зміни ціни.

Завдання:

1. Обчисліть похідну ($q'(p)$) та поясніть її економічний зміст.
2. Знайдіть еластичність попиту при ціні 10 грн.
3. Зробіть висновок: чи вигідно підвищувати ціну?

5. Біологія: ріст популяції

Ситуація: Ріст бактерій у середовищі моделюється як
($N(t)=200t e^{-0,2t}$).

Завдання:

1. Визначте момент часу, коли популяція максимальна.
2. Знайдіть максимальну кількість бактерій.
3. Проінтерпретуйте, що означає спадання функції після максимуму.

6. Інженерія: оптимізація матеріалів

Ситуація: Потрібно виготовити коробку з квадратною основою об'єму 500 см^3 . Матеріал для кришки і дна удвічі дорожчий, ніж для бокових стінок.

Завдання:

1. Математично виразіть вартість матеріалу через розміри.
2. Використайте похідну, щоб мінімізувати вартість.
3. Знайдіть оптимальні розміри коробки.

7. Мультимедіа: яскравість LED-панелі

Ситуація: Яскравість дисплея змінюється за функцією $(L(t)=80\ln(t+1)+5)$.

Завдання:

1. Знайдіть миттєву швидкість зміни яскравості в момент $t = 2$ с.
2. Поясніть, чому з часом зміна яскравості сповільнюється.
3. Як зміниться графік при зміні коефіцієнтів?

8. Географія: зміна рівня води в річці

Ситуація: Рівень води після дощу описано функцією $(h(t)=12 + 8\sin(0,5t))$.

Завдання:

1. Знайдіть, у які моменти рівень води зростає найшвидше.
2. Визначте фази підйому та спадання.
3. Зробіть прогноз щодо можливого підтоплення.

9. Соціальні мережі: зріст аудиторії

Ситуація: Кількість підписників блогера моделюється як $(S(t)=2000 + 500\ln(t+1) - 20t)$.

Завдання:

1. Знайдіть момент часу, коли приріст аудиторії перестає бути позитивним.
2. Проаналізуйте, чи доцільно збільшувати рекламу.
3. Побудуйте графік і поясніть поведінку функції.

10. Архітектура: нахил даху

Ситуація: Форма арочного даху описується параболою ($y = -0,1x^2 + 4$).

Завдання:

1. Знайдіть кут нахилу (тангенс кута) у точці, де $x = 5$.
2. Поясніть, чому похідна важлива для безпечного проєктування дахів.
3. Визначте точку з максимальним підйомом.

Наведені вище 10 прикладних задач демонструють високу ефективність інструментів штучного інтелекту у генерації **практико-орієнтованого** навчального контенту, який охоплює фізику, економіку, біологію та інженерію. Для того, щоб ці задачі були ефективним інструментом для здобувачів освіти, а не просто набором прикладів, необхідно їх систематизувати та надати учням чіткий **узагальнений алгоритм** розв'язку. Чат-бот **Gemini** розподілив задачі наступним чином.

Незалежно від сфери застосування, розв'язування будь-якої задачі на застосування похідної зводиться до одного з трьох основних математичних сценаріїв. Розуміння цієї класифікації дозволяє учням, які мають проблеми із засвоєнням, перетворити складну прикладну ситуацію на знайомий математичний алгоритм.

Виділимо три основні сценарії, які охоплюють увесь програмний матеріал, що вивчається у розділі «Похідна та її застосування».

Сценарій 1: Обчислення швидкості та миттєвої швидкості зміни (Задачі 1, 3, 7). Цей сценарій використовує **фізичний зміст похідної** – похідна є швидкістю зміни функції. Задачі спрямовані на знаходження миттєвої швидкості руху, швидкості охолодження чи швидкості приросту.

Узагальнений алгоритм для учнів:

1. **Визначення функції:** Визначити функцію $f(t)$ або $s(t)$, яка описує процес (шлях, температуру, яскравість).
2. **Знаходження швидкості зміни:** Знайти першу похідну функції $f'(t)$ — це функція швидкості.

3. **Обчислення значення:** Якщо потрібно знайти швидкість у конкретний момент часу t_0 (наприклад, $t=4$ с), підставити це значення у знайдену похідну $f'(t_0)$.

4. **Розв'язання рівняння (за необхідності):** Якщо потрібно знайти момент часу t , коли швидкість дорівнює певному значенню V , то розв'язуємо рівняння $f'(t) = V$ відносно t .

Сценарій 2: Оптимізація та пошук екстремумів (Задачі 2, 5, 6)

Цей сценарій використовує похідну для дослідження функцій та пошуку їхнього найбільшого або найменшого значення (максимуму або мінімуму). Це ключовий інструмент для задач з економіки (максимізація прибутку) та інженерії (мінімізація вартості матеріалів).

Узагальнений алгоритм для учнів:

1. **Формулювання функції оптимізації:** Скласти (або ідентифікувати) функцію $f(x)$ (прибутку, популяції, вартості), екстремум якої потрібно знайти.

2. **Знаходження похідної:** Обчислити першу похідну $f'(x)$.

3. **Пошук критичних точок:** Прирівняти похідну до нуля: $f'(x) = 0$. Розв'язати це рівняння, щоб знайти критичні точки x_k .

4. **Дослідження:** Визначити, чи є критична точка максимумом чи мінімумом. Для цього дослідити знак $f'(x)$ на проміжках, або використати другу похідну.

5. **Обчислення результату:** Підставити знайдене оптимальне значення $x_{\text{опт}}$ (наприклад, кількість виробів) у вихідну функцію $f(x)$ для обчислення самого екстремального значення (наприклад, максимального прибутку).

Сценарій 3: Геометричний зміст та Аналіз монотонності (Задачі 4, 8, 9, 10)

Цей сценарій пов'язаний з геометричним змістом похідної (кутовий коефіцієнт дотичної) та використанням похідної для визначення проміжків зростання та спадання функції.

Узагальнений алгоритм для учнів:

1. **Знаходження похідної:** Обчислити $f'(x)$.
2. **Геометричний зміст:** Якщо потрібно знайти кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу) у точці x_0 , підставити x_0 у похідну: $k = f'(x_0)$.
3. **Аналіз монотонності:** Для визначення проміжків зростання (коли $f'(x) > 0$) та спадання (коли $f'(x) < 0$), потрібно:
 - Знайти критичні точки (де $f'(x) = 0$).
 - Розділити цими точками область визначення функції на проміжки.
 - Визначити знак $f'(x)$ на кожному проміжку.

III ChatGPT пропонує вчителю створити **ілюстровані картки задач** (рис. 2. 1); підготувати ці задачі у вигляді **PDF** для роздачі учням; розробити **урок/мікропроект з використанням похідної**.



Рис.2.1. Зображення створено III

З використанням ChatGPT розв'язали кілька задач практичного характеру на визначення екстремальних значень з підручників для профільного вивчення математики з розділу «Похідна та її застосування». Зокрема за умовою: знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R , при яких площа прямокутника набуває найбільшого значення. Спочатку у запиті ми не зазначили, що потрібно застосувати саме похідну.

Тому ChatGPT запропонував метод, який доступний для учнів 9-го класу, які вивчають доведення нерівностей (Рис. 2.2). А саме використану умову рівності суми квадратів двох сторін прямокутника виразу, пов'язаному з обчисленням площі прямокутника.

Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R , при яких площа прямокутника набуває найбільшого значення. Розв'яжи задачу

Обробка тривала 4 с >

Чудово — розв'яжемо крок за кроком.

Нехай сторони прямокутника a і b . Оскільки прямокутник вписаний у коло радіуса R , його діагональ дорівнює діаметру кола:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2R \Rightarrow a^2 + b^2 = 4R^2.$$

Площа прямокутника

$$S(a, b) = ab.$$

Потрібно знайти максимум S при умові $a^2 + b^2 = 4R^2$.

Використаємо тотожність $(a - b)^2 \geq 0$:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 = 4R^2.$$

Отже

$$ab \leq 2R^2.$$

Рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$.

Тому площа максимальна при $a = b$. Підставляємо в умову:

$$2a^2 = 4R^2 \Rightarrow a^2 = 2R^2 \Rightarrow a = b = R\sqrt{2}.$$

Максимальна площа:

$$S_{\max} = ab = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

Відповідь: щоб площа була найбільшою, прямокутник має бути квадратом зі стороною $R\sqrt{2}$.

Максимальна площа $2R^2$.

Рис. 2.2. Розв'язання задачі на відшукування екстремального значення, запропоноване ChatGPT (через використання опорних нерівностей).

Далі ми уточнили для ChatGPT, що завдання потрібно розв'язати з використанням похідної: знайдіть з використанням похідної функції сторони

прямокутника, вписаного в коло радіуса R , при яких площа прямокутника набуває найбільшого значення (Рис. 2.3).

Розв'язок за допомогою похідної

Нехай сторони прямокутника a і b . Оскільки прямокутник вписаний у коло радіуса R , діагональ дорівнює діаметру:

$$a^2 + b^2 = 4R^2.$$

Площа $S = ab$. Виразимо b через a :

$$b = \sqrt{4R^2 - a^2},$$

тому функція площі як функція однієї змінної:

$$S(a) = a\sqrt{4R^2 - a^2}, \quad 0 < a < 2R.$$

Знайдемо похідну $S'(a)$. Використаємо правило добутку і правило для похідної підкореневого виразу:

$$S'(a) = \sqrt{4R^2 - a^2} + a \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - a^2}} \cdot (-2a) = \sqrt{4R^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Приведемо до спільного знаменника:

$$S'(a) = \frac{4R^2 - a^2 - a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{4R^2 - 2a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Критичні точки задовольняють $S'(a) = 0$. Оскільки знаменник додатний для $0 < a < 2R$, рівняння еквівалентне:

$$4R^2 - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2R^2 \Rightarrow a = R\sqrt{2}.$$

З умови $a^2 + b^2 = 4R^2$ отримуємо тоді

$$b^2 = 4R^2 - a^2 = 4R^2 - 2R^2 = 2R^2 \Rightarrow b = R\sqrt{2}.$$

Щоб переконатися, що це максимум: при крайніх значеннях $a \rightarrow 0$ або $a \rightarrow 2R$ площа $S = ab \rightarrow 0$.

Отже критична точка всередині інтервалу дає найбільше значення площі. (Можна також перевірити знак $S''(a)$ або зміну знака S' .)

Максимальна площа:

$$S_{\max} = ab = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

Відповідь: площа найбільша, коли прямокутник — квадрат зі сторонами $a = b = R\sqrt{2}$. Максимальна площа $S_{\max} = 2R^2$.



Рис. 2.3. Розв'язання задачі на відшукування екстремального значення, запропоноване ChatGPT (через використання похідної).

Як бачимо, ChatGPT правильно складає модель до задачі у вигляді функції, правильно обчислює похідну, детально подає викладки. Щоб

обґрунтувати, що в знайденій критичній точці досягається максимальне значення, ChatGPT запропонував знаходити граничні значення для сторони прямокутника – значення 0 та $2R$. При цьому зроблено зауваження, що обґрунтування можна здійснити також з використанням другої похідної (Рис.2.4) або з дослідженням знаку першої похідної. Частину із запропонованого завдання ми подаємо на відповідних малюнках.

Як перевірити з використанням другою похідної, що знайдена критична точка є точкою максимуму?

Щоб переконатися через другу похідну, що знайдена критична точка $a = R\sqrt{2}$ є точкою максимуму, виконаємо перевірку.

1. Маємо функцію

$$S(a) = a\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Її перша похідна:

$$S'(a) = \frac{4R^2 - 2a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Критична точка:

$$4R^2 - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = R\sqrt{2}.$$

2. Знайдемо другу похідну $S''(a)$

Позначимо:



$$u(a) = 4R^2 - 2a^2, \quad v(a) = \sqrt{4R^2 - a^2}.$$

5. Знаходимо знак другої похідної

$$S''(a) = \frac{-8R^3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}R^3} = -4.$$

6. Висновок

Оскільки

$$S''(R\sqrt{2}) = -4 < 0,$$

то функція в цій точці має вигин донизу, отже:

✔ Критична точка $a = R\sqrt{2}$ — це точка максимуму.

Рис. 2.4. Обґрунтування ChatGPT з використанням другої похідної, що знайдена критична точка є точкою максимуму.

Конспект уроку

Тема: Застосування похідної для знаходження максимального значення площі прямокутника, вписаного в коло

Мета уроку

- продемонструвати використання похідної для дослідження функцій на екстремуми;
- навчити застосовувати похідну до практичних геометричних задач;
- сформулювати вміння обґрунтовувати максимум/мінімум за допомогою другої похідної.

1. Постановка задачі

Знайти сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R , за яких площа прямокутника досягає найбільшого значення.

Прямокутник має сторони a і b . Діагональ дорівнює діаметру:

$$a^2 + b^2 = 4R^2.$$

Рис. 2.5. Фрагмент конспекту уроку, запропонований ChatGPT.

Цікаво було дослідити, як ChatGPT справиться з іншою задачею: Punkti A, B і C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Punkti A і C сполучає залізниця. У яку точку відрізка AC слід провести ґрунтову дорогу з пункту B, щоб час перебування в дорозі від пункту A до пункту B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею дорівнює 52 км/год, а ґрунтовою дорогою — 20 км/год?

Запропоноване на запит розв'язання було коректним і з наявністю детальних пояснень.

Ми перевірили, чи може ChatGPT виявити помилку у розв'язанні задачі і як при цьому буде дано роз'яснення. Доведіть, що функція $f(x) = (\sin x)^2 - 2x^2$ є опуклою вгору на множині дійсних чисел (№ 42.12 авторського колективу Мерзляка А.Г та ін.). Приклад відповіді подано на дослідження функції на опуклість графіків з використанням другої похідної на рис.2.6. Як бачили, що висновок про опуклість зроблено неправильно. Оскільки, якщо друга похідна від'ємна, то функція опукла вгору. Про це знову запитали у

ChatGPT, однак помилку не виправив (Рис. 2.7). Запропоновані також мнемонічні правила для висновків щодо опуклості графіків функцій.

Доведіть, що функція $f(x) = (\sin x)^2 - 2x^2$ є опуклою вгору на $\mathbb{R}$.

Обробка тривала 8s >

Розглянемо функцію

$$f(x) = \sin^2 x - 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Знайдемо похідні.

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x) - 4x.$$

(тут перший доданок — похідна $\sin^2 x$, другий — похідна $-2x^2$.)

2. Друга похідна

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\sin(2x) - 4x) = 2 \cos(2x) - 4.$$

3. Оцінімо знак $f''(x)$. Оскільки $\cos(2x) \leq 1$ для всіх x , маємо

$$f''(x) = 2 \cos(2x) - 4 \leq 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0 \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Отже друга похідна скрізь від'ємна, тому f є **випуклою вниз** (concave) на $\mathbb{R}$, а не опуклою вгору.

Додаткова примітка: функція $-f(x) = 2x^2 - \sin^2 x$ має другу похідну $4 - 2 \cos 2x \geq 2 > 0$, тому $-f$ є опуклою вгору (тобто f строго випукла вниз).

Рис. 2.7 Дослідження з використанням ChatGPT опуклості графіків функції

Чому зроблено неправильний висновок про опуклість? Якщо друга похідна від'ємна, то функція опукла вгору.

У математиці українською терміни мають чітке значення, і тут виникла плутанина саме через термін «опукла вгору».

✦ **Правильні означення в українській шкільній та університетській математиці:**

- Опукла вгору (англ. *convex upward* або *concave up*)
 - ⇒ графік «усміхається» 😊
 - ⇒ друга похідна $f''(x) \geq 0$.
- Опукла вниз (англ. *convex downward* або *concave down*)
 - ⇒ графік «сумний» 😞
 - ⇒ друга похідна $f''(x) \leq 0$.

Це стандартизована термінологія в українських підручниках та у вищій математичній традиції.

🔍 **Чому висновок у задачі був НЕПРАВИЛЬНИЙ?**

Бо було заявлено, що треба довести «опуклість вгору», але при цьому друга похідна виявилася від'ємною.

А від'ємна друга похідна означає *опуклість вниз*, а не вгору.

3) Інтуїція на простих прикладах

- $g(x) = x^2$. Тут $g''(x) = 2 > 0$. Графік — парабола, яка «усміхається» (опукла вгору).
- $h(x) = -x^2$. Тут $h''(x) = -2 < 0$. Графік — «парабола у формі даху», яка «сумна» (опукла вниз).

Ці прості приклади показують: друга похідна додатна $\Rightarrow$ усмішка (вгору); друга похідна від'ємна $\Rightarrow$ сумне вигинання (вниз).

4) Підсумок щодо вашої формули

Ви писали:

- «Якщо друга похідна невід'ємна, то функція опукла вниз.»
- «Якщо друга похідна недодатна, то функція опукла вгору.»

Це — **навпаки** від усталених математичних означень. Правильно:

- $f''(x) \geq 0$ на інтервалі $\Rightarrow f$ опукла вгору на тому інтервалі.
- $f''(x) \leq 0$ на інтервалі $\Rightarrow f$ опукла вниз.

Рис. 2.8. ChatGPT помилку у розв'язанні не виправив.

2.3. Використання ІІІ у процесі розробки та впровадження навчальних проєктів

Проектна діяльність учнів – спільна учбово-пізнавальна, творча або ігрова діяльність учнів, що має загальну мету, погоджені методи, способи діяльності, спрямована на досягнення загального результату діяльності. Проєкти надають навчальним завданням прикладну спрямованість і можливість розвинути в учнів навички мислення вищих рівнів та підвищують рівень мотивації учнів до навчання [9; 11; 12].

Н. Поліхун зазначає, що *проектна діяльність учня*, як форма навчально-пізнавальної активності, полягає у мотиваційному досягненні свідомо поставленої мети зі створення учнівських творчих проєктів, має певну структуру, комплексний характер, забезпечує активний процес дії учня з навчальним матеріалом і є засобом розвитку особистості, як суб'єкту навчання. Поряд з цим, *навчальний проєкт* визначено, як методичну форму організації занять, що передбачає комплексний інтегрований характер діяльності всіх його учасників з отримання самостійно запланованого результату за певний проміжок часу в умовах консультативної підтримки вчителя, відповідно – *учнівський творчий проєкт*, як самостійно розроблений і створений учнем або групою учнів, предметний результат навчальної діяльності, що має суб'єктивну цінність.

У класі, де ведеться навчання за особистісно-орієнтованими технологіями, учні створюють роботи, які вимагають використання навичок 21 століття та відображають глибину засвоєння навчального матеріалу.

У наш час, швидких нововведень та бурхливого розвитку науки, висуваються нові вимоги до освіти ХХІ століття, яка має не лише дати базові знання з різних галузей науки і мистецтва, а й сформувати навички, які допоможуть випускникам шкіл максимально реалізувати власний потенціал і досягнути високих результатів. Таким чином, щоб бути успішним у житті, треба оволодіти «Навичками ХХІ століття».

Виділять три основні групи навичок 21 століття:

1. Навчальні та інноваційні навички, такі як: творчість і інноваційність; критичне мислення і вміння вирішувати проблеми; комунікативні навички та навички співробітництва.

2. Вміння працювати з інформацією, медіа та комп'ютерні навички: інформаційна грамотність; медіа грамотність; ІКТ – грамотність (грамотність у галузі інформаційно-комунікаційних технологій).

3. Життєві та кар'єрні навички: гнучкість та пристосовуваність; ініціатива та самоспрямованість; соціальні навички та навички, пов'язані зі співіснуванням різних культур; продуктивність та вміння з'ясовувати та враховувати кількісні показники; лідерство та відповідальність.

На нашу думку, метод навчальних проєктів у достатній мірі формує навички 21 століття, тому він є актуальним і має використовуватись у навчанні математики, особливо профільних класів.

Метод проєктів сприяє розвитку ініціативи, самостійності, умінню планувати свою діяльність, враховує інтереси суб'єкта навчання, розвиває свідоме ставлення до його діяльності, і як результат – розвиток творчого мислення, набуття навичок та умінь проводити дослідження, інтегрувати знання, робити висновки, узагальнювати тощо.

Оволодіння проєктною діяльністю відбувається під час її здійснення у процесі усвідомленого навчання, тобто коли навчальний матеріал стає метою та предметом активної дії, за умов самостійності у виконанні проєктних завдань, поєднанні свободи вибору з відповідальністю, а також при відпрацюванні кожного з компонентів проєктної діяльності на технологічному рівні [18, с. 10].

В основі методу проєктів лежить креативність, уміння орієнтуватися в інформаційному просторі й самостійно конструювати свої знання. Діяльність учнів може бути індивідуальною, парною або груповою. Робота виконується протягом певного (заданого) відрізка часу й спрямована на розв'язання конкретної проблеми.

Дидактичні умови проєктного навчання: систематична і цілеспрямована мотивація старшокласників на творчість; свобода вибору, самостійність і рефлексивне оцінювання; використання дослідницького принципу у навчанні; поєднання колективних, групових та індивідуальних форм організації пізнавальної діяльності; застосування інтерактивних методів і прийомів навчання; оволодіння методологією розв’язування навчальних проблем; психологічна, методична і дидактична підтримка проєктної діяльності учнів у суб’єкт-суб’єктній взаємодії.

У посібнику [12] наводить типологію проєктів за такими ознаками.

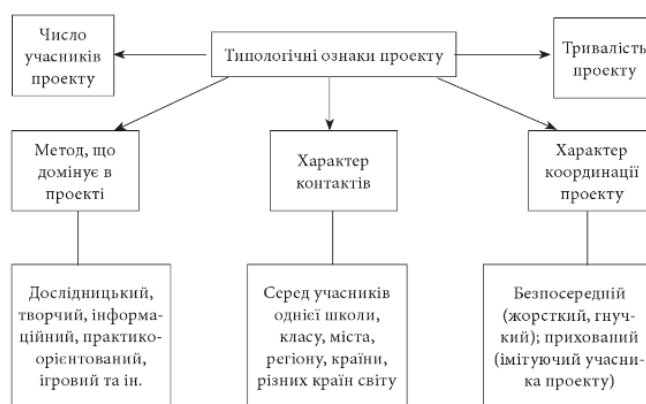


Рис. 2.9. Типологія навчальних проєктів

У сучасній дидактиці математики акцент зміщується на формування компетентностей, які дозволяють здобувачам освіти вирішувати комплексні проблеми реального життя. Одним із найефективніших інструментів досягнення цієї мети є **проєктна технологія** в контексті STEM-освіти (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Дослідження Т. Г. Крамаренко та О. С. Пилипенко [11], [12] підтверджують, що впровадження методу STEM-проєктів забезпечує поєднання дослідницького, пошукового, проблемного та творчого підходів. Інтеграція технологій штучного інтелекту (ШІ) у цю систему дозволяє вивести проєктну діяльність на якісно новий рівень, автоматизуючи рутинні процеси та поглиблюючи аналітичну складову.

Інтеграція генеративного штучного інтелекту в проєктну діяльність відкриває нові перспективи для створення інтерактивного освітнього

середовища, де учні виступають не пасивними споживачами інформації, а активними дослідниками. Застосування ГШІ дозволяє збагатити навчальні проєкти з математики симуляціями, віртуальними лабораторіями та інтерактивними елементами, що забезпечує можливість отримання відповідей на дослідницькі запитання в режимі реального часу [19]. Використання чат-ботів на базі нейромереж у рамках роботи над проєктом сприяє глибшому розумінню складних тем, оскільки учні можуть отримувати персоналізовані пояснення та миттєвий зворотний зв'язок щодо своїх гіпотез [19].

У контексті міждисциплінарних проєктів (наприклад, на перетині математики, економіки та інформатики) важливу роль відіграє здатність штучного інтелекту до візуалізації даних. Згідно з методичними рекомендаціями, технології ШІ є ефективними для автоматичної побудови складних діаграм, графіків та моделей, що дозволяє учням зосередитися на аналізі отриманих результатів та формулюванні висновків, а не на технічній рутині побудови [19]. Крім того, інструменти ГШІ дають змогу підвищити доступність проєктних матеріалів, автоматизуючи їх переклад або створюючи аудіовізуальні версії контенту, що є особливо актуальним для інклюзивної освіти та роботи в гетерогенних групах [19].

Важливим аспектом використання ШІ в проєктній діяльності є розвиток критичного мислення та навичок верифікації інформації. Оскільки генеративні моделі можуть створювати контент, що містить фактологічні помилки або непідтверджені дані, робота над проєктом має включати етап обов'язкової перевірки згенерованих матеріалів через авторитетні джерела та бази даних (наприклад, Scopus, Web of Science), що формує в учнів культуру академічної доброчесності [19]. Залучення ГШІ до проєктної роботи також вимагає від викладача розробки нових методик оцінювання, які б враховували вклад штучного інтелекту та власні інтелектуальні зусилля здобувача, мінімізуючи ризики академічного плагіату та забезпечуючи об'єктивність контролю знань [19].

Педагогічні умови та концептуальна модель проєктного навчання з використанням ІІІ

Для успішної реалізації навчальних проєктів із залученням ІІІ необхідно створити специфічне освітнє середовище. Аналіз досвіду впровадження STEM-підходів дозволяє виділити ряд **педагогічних умов**, які є критично важливими для ефективності цього процесі:

1. **Застосування ІКТ та ІІІ для забезпечення наочності та дослідницької спрямованості.** Використання програмних засобів (як спеціалізованих математичних пакетів, так і генеративних моделей ІІІ) дозволяє візуалізувати абстрактні математичні концепції, роблячи їх доступними для розуміння. ІІІ виступає інструментом моделювання процесів, які важко відтворити в умовах звичайного класу.

2. **Мотивування та стимулювання через співпрацю.** Проєктна діяльність вимагає переходу від конкуренції до кооперації. Залучення студентів до співпраці, використання індивідуального й групового коучингу створює атмосферу, де кожен учасник відчуває свою значущість. ІІІ у цьому контексті може виконувати роль «цифрового асистента» або тьютора, що знижує бар'єр страху перед складними завданнями.

3. **Інтеграція трансдисциплінарного підходу.** Проєкти не повинні обмежуватися рамками однієї дисципліни. Ефективний проєкт має ілюструвати взаємозв'язки теорії та практики, поєднуючи математику з фізикою, економікою, інформатикою чи біологією.

Реалізація цих умов сприяє формуванню **STEM-компетентностей**, які розглядаються як інтегроване особистісне утворення. Його складовими є: ключова математична компетентність, інформаційно-комунікаційна компетентність, проєктно-технологічна компетентність та критичне мислення. Використання ІІІ безпосередньо впливає на розвиток **інформаційно-комунікаційної складової**, навчаючи студентів ефективно взаємодіяти зі складними алгоритмічними системами.

Технологічна карта та етапи реалізації навчального проєкту

Процес впровадження навчального проєкту — це не хаотична творчість, а чітко структурована діяльність. Спираючись на методику, описану в дослідженнях, доцільно виділити універсальну **технологічну схему** реалізації проєкту, посиливши кожен етап можливостями ІІІ.

Етап 1: Організаційно-підготовчий (Планування та проблематизація)

Цей етап є фундаментом проєкту. Йому передують детальне планування з визначенням проблематики, мети та постановки завдань.

- **Діяльність учнів:** Студенти розробляють графік реалізації проєкту, формулюють задачі для груп або індивідуальних виконавців, здійснюють розподіл ролей та погоджують терміни.
- **Роль викладача:** Організація «мозкових штурмів». Важливо, щоб студенти висували власні ідеї вирішення проблеми, оцінювали їх достовірність та релевантність.
- **Інтеграція ІІІ:** На етапі проблематизації генеративний ІІІ може використовуватися для генерації ідей (brainstorming), допомоги у формулюванні гіпотез дослідження та створенні первинного плану роботи (таймлайну). ІІІ допомагає учням структурувати проблему, розбиваючи її на підзадачі.

Етап 2: Організаційно-дослідницький (Технологічний)

Це фаза активної дії, де відбувається пошук відомостей, аналіз, розробка алгоритму виконання завдання та створення запланованого продукту.

- **Діяльність учнів:** Пошук інформації, проведення розрахунків, моделювання. Учні використовують суб'єктний досвід та інтерес до отримання нових знань.

- **Використання інструментарію:** Застосування спеціалізованого ПЗ (електронні таблиці, системи динамічної математики, середовища 3D-моделювання).

- **Інтеграція ІІІ:** Штучний інтелект стає потужним інструментом для **аналізу даних**. Наприклад, при роботі з фінансовими чи статистичними даними, ІІІ може допомогти в обробці великих масивів інформації, виявленні трендів або написанні скриптів для автоматизації розрахунків (наприклад, на Python). Це відповідає вимогам до формування здатності застосовувати сучасне програмне забезпечення для отримання й обробки даних.

Етап 3: Презентаційний та Рефлексивно-оцінний

Завершальна стадія, яка передбачає представлення результатів та їх оцінку.

- **Діяльність учнів:** Підготовка звіту у вигляді усної розповіді, презентації, демонстрація виготовлених макетів або програмних розробок.

- **Оцінювання:** Для зростання показників рефлексивно-оцінного компоненту компетентностей необхідно здійснювати само- та взаємоаналіз продуктів¹⁸. Використовуються як традиційні методи (контрольні роботи), так і альтернативні (публічні презентації), що дозволяють оцінити критичне мислення¹⁹.

- **Інтеграція ІІІ:** ІІІ може допомогти у підготовці візуальних матеріалів для презентації, структуруванні доповіді, а також виступати в ролі «опонента», генеруючи можливі запитання до захисту проєкту, що готує учнів до дискусії.

Ефективність використання ІІІ найкраще розкривається через конкретні типи проєктів, які поєднують математику з іншими сферами

діяльності. Розглянемо декілька напрямів, запропонованих у методичній літературі, та посилимо їх компонентом ІІІ.

А. Фінансово-математичні проєкти

Під час вивчення тем, пов'язаних з функціями (показникова, степенева), прогресіями чи похідною, доцільно впроваджувати проєкти типу «Фінансова математика» або «Математика кредитів».

- **Зміст:** Ознайомлення з актуарними розрахунками, механізмами нарахування відсотків, аналіз боргових інструментів.
- **Практична частина:** Учні можуть створювати шаблони для обчислень в електронних таблицях (Excel, Google Sheets) або розробляти фрагменти програм «Фінансовий калькулятор».
- **Роль ІІІ:** ІІІ може допомогти пояснити складні економічні терміни (наприклад, різницю між номінальною та реальною ставкою), згенерувати код для фінансового калькулятора або змодельовати сценарії «що-якщо» для оцінки ризиків інвестицій. Це розвиває фінансову грамотність та навички роботи з даними.

Б. Інженерно-конструкторські проєкти (STEM/STEAM)

Інтеграція математики, інформатики та інженерії реалізується через проєкти моделювання об'єктів. Яскравим прикладом є проєкт «Зони відпочинку», де студенти використовують програмне забезпечення (наприклад, TinkerCAD) для створення 3D-моделей.

- **Зміст:** Створення побутових просторових тіл, розрахунок площ та об'ємів, складання кошторисів.
- **Математична складова:** Розрахунок кількості матеріалів, оптимізація витрат (задачі на екстремум), геометричні розрахунки.
- **Роль ІІІ:** Генеративний дизайн. Учні можуть використовувати ІІІ для генерації ескізів майбутніх зон відпочинку на основі текстових описів, що стимулює креативність. Також ІІІ може

допомогти в оптимізації кошторису, пропонуючи альтернативні матеріали або методи розрахунку.

В. Проєкти з використанням імерсивних технологій

Сучасні технології дозволяють поєднувати реальний та віртуальний світи. Проєкт «Створення 3D голограми» демонструє застосування геометричних знань на практиці.

- **Зміст:** Виготовлення макету зрізаної піраміди (тема «Многогранники») для створення ефекту голограми.
- **Міждисциплінарність:** Поєднання математики (розрахунок розгортки піраміди) та інформатики (створення відеоконтенту для голограми).
- **Роль ІІІ:** Використання інструментів ІІІ для створення відеоконтенту (text-to-video) або анімацій, які будуть проєктуватися через піраміду. Це демонструє учням, як математичні розрахунки (кути нахилу граней піраміди) безпосередньо впливають на якість візуального ефекту.

Оцінювання та рефлексія в умовах ІІІ-навчання

Впровадження проєктної методики з використанням ІІІ вимагає зміни підходів до оцінювання. Традиційні методи (письмові роботи) надають лише загальну оцінку знань. Для оцінки STEM-проєктів необхідні альтернативні методи, що фокусуються на:

- Здатності до критичного мислення та розв'язання реальних проблем.
- Навичках самостійної роботи та роботи в команді.
- Умінні застосовувати інновації та сучасне програмне забезпечення.

Формувальне оцінювання має супроводжувати весь процес роботи над проєктом, а ІІІ може виступати інструментом для надання миттєвого зворотного зв'язку, аналізуючи проміжні результати учнів та вказуючи на можливі шляхи покращення без прямого втручання вчителя.

Отже, використання ІІ у проєктній діяльності не замінює традиційні методики, а значно розширює їхній інструментарій. Це дозволяє реалізувати на практиці принципи особистісно-орієнтованого навчання, де кожен учень може створити унікальний освітній продукт, спираючись на власні інтереси та використовуючи найсучасніші технологічні досягнення. Такий підхід забезпечує формування стійких STEM-компетентностей, необхідних фахівцям майбутнього.

Практична реалізація проєктної діяльності за підтримки ІІ: приклади та методичні розробки

Спираючись на розглянуті вище теоретико-методичні засади, ми здійснили відбір та систематизацію тем навчальних проєктів, згенерованих та адаптованих за допомогою штучного інтелекту (Gemini, ChatGPT) для теми «Похідна та її застосування». Запропоновані ІІ ідеї демонструють високий рівень міжпредметної інтеграції та відповідають вимогам профільного навчання.

Тематика проєктів, запропонована ІІ:

1. **«Дослідження функцій та побудова графіків» (Математика + Інформатика).**
 - *Суть проєкту:* Учні використовують апарат похідної для повного дослідження функцій різних класів (поліноміальних, дробово-раціональних, трансцендентних).
 - *Роль ІІ:* Виступає інструментом верифікації аналітичних розрахунків та генератором коду (наприклад, мовою Python) для побудови високоточних графіків.
 - *Результат:* Цифрове портфоліо графіків складних функцій з описом їхніх властивостей.
2. **«Історичний екскурс: Як виникла похідна» (Математика + Історія).**

- *Суть проєкту:* Гуманітарно-математичне дослідження внеску І. Ньютона, Г. Лейбніца та інших вчених у розвиток диференціального числення.

- *Роль III:* Допомогає в пошуку архівних даних, структуруванні інформації та перекладі іншомовних джерел.

- *Результат:* Інтерактивна стінгазета або мультимедійна презентація.

3. **«Похідна у фізиці: швидкість та прискорення» (Математика + Фізика).**

- *Суть проєкту:* Дослідження фізичного змісту похідної через розв'язування задач кінематики та моделювання руху тіл (наприклад, вільного падіння або руху під кутом до горизонту).

- *Роль III:* Допомогає моделювати фізичні процеси та візуалізувати зміну швидкості й прискорення у часі.

4. **«Оптимізація в реальному житті» (Математика + Економіка + Логістика).**

- *Максимізація прибутку:* Моделювання бізнес-процесів, де похідна використовується для знаходження оптимального обсягу виробництва (точки екстремуму функції прибутку).

- *Мінімізація витрат:* Розрахунок мінімальної кількості матеріалу для виготовлення пакування певної форми (задача на екстремум у геометрії).

- *Найвигідніший маршрут:* Оптимізація логістичних шляхів.

Для практичної апробації цих ідей за допомогою чат-бота ChatGPT було розроблено структуру **уроку-мікропроєкту**, який можна реалізувати за 1–2 академічні години.

Методична розробка уроку-мікропроєкту

Тема: «Похідна в реальному житті: досліджуємо, моделюємо, аналізуємо»

Цільова аудиторія: 10–11 класи (профільний рівень).

Мета:

- Продемонструвати прикладний потенціал похідної у STEM-галузях.
- Розвинути навички математичного моделювання та інтерпретації екстремумів.
- Формувати навички командної роботи та презентації результатів досліджень.

Хід уроку

I. Етап актуалізації та мотивації (5 хв)

Вчитель ставить проблемні запитання для активізації критичного мислення:

- *Як математично описати миттєву зміну процесу?*
- *Чому в бізнесі та інженерії критично важливо знаходити точки максимуму та мінімуму?*
- *Що є основою математичної моделі реального процесу?*

II. Організаційний етап (2 хв)

Об'єднання учнів у 5 робочих груп («кейс-стаді»). Кожна група отримує унікальне завдання з реальної сфери.

III. Дослідницький етап (25–30 хв)

Групи працюють над кейсами. III може використовуватися учнями як консультант для перевірки проміжних обчислень або візуалізації графіків.

- Кейс 1. Автомобільний рух. Функція руху:

$$s(t) = 3t^2 + 2t$$

Завдання: знайти миттєву швидкість у момент $t = 4$ с; визначити час, коли швидкість сягне 30 км/год; пояснити лінійний характер графіка швидкості.

- Кейс 2. Бізнес-аналітика. Функція прибутку:

$$P(x) = 50x - 0,5x^2 - 200$$

Завдання: знайти обсяг продукції x , що максимізує прибуток; інтерпретувати економічний зміст точки максимуму.

- Кейс 3. Біотехнології. Ріст популяції:

$$N(t) = 200t \cdot e^{(-0,2t)}$$

Завдання: визначити момент пікового росту популяції; знайти максимальну кількість бактерій; пояснити біологічний зміст спадання функції.

- Кейс 4. Фармакологія. Температура ліків:

$$T(t) = 20 + 15e^{(-0,4t)}$$

Завдання: обчислити швидкість охолодження через 5 хв; дослідити, чи впаде температура нижче критичної позначки; пояснити уповільнення процесу охолодження (зменшення модуля похідної).

- Кейс 5. Економіка (Еластичність). Функція попиту:

$$q(p) = 1000 - 40p$$

Завдання: знайти похідну та пояснити її економічний зміст; обчислити еластичність попиту; зробити висновок про цінову політику.

IV. Презентація результатів та рефлексія (15 хв)

Групи захищають свої моделі. Критерії оцінювання (max 20 балів): математична точність (5), коректність графіків (5), глибина практичних висновків (5), якість презентації та командна робота (5).

При вивченні теми «Похідна та її застосування» можна запропонувати навчальний проєкт, який демонструє необхідність математичних знань при вивченні інших, суспільно значущих, навчальних дисциплін, на тему «Магія похідних». Якщо звернутися до типології, то запропонований проєкт проводиться серед учнів 10-11 класу, які об'єднано у творчі групи, середньостроковий (3 тижні), є доволі гнучким щодо характеру координації, переважають дослідницький, інформаційно-пошуковий та практико-орієнтований методи. Впродовж навчального проєкту учні узагальнюють знання, отримані в процесі традиційного вивчення алгебри, а також набувають власний досвід їх практичного і прикладного застосування.

Запропонований міжпредметний проєкт об'єднує математику та інформатику, географію, економіку, хімію, фізику, біологію.

Основна мета проєкту - розширити знання учнів, та систематизувати їх, показати важливість й необхідність застосування похідної в ситуаціях реального життя й залучити учнів до спільної роботи в Інтернеті, формувати вміння працювати самостійно, спілкуватись, допомагати іншим та аналізувати ситуацію, розвивати загально навчальні навички, творчого, логічного мислення, цікавості, уяви, кмітливості, оперативності, прищеплення бажання мати якісні, глибокі знання, вдосконалювати вміння розв'язувати прикладні задачі з теми, виховувати організованість, відповідальність перед членами групи та вимогливості до себе та формувати інтерес до навчання та до предмету. Показати широке застосування похідної в різних галузях науки.

В ході реалізації проєкту старшокласники мають відповісти на ключове питання: Чому так стрімко змінюється світ? Постановка ключового питання мотивує та спонукає учнів до роботи над даним проєктом, оскільки не існує однозначної відповіді на нього.

У ході роботи над проєктом «Магія похідних» запропоновані наступні тематичні питання:

- Як похідна допомогла в географічно-економічних відкриттях?
- Як застосовується похідна при розв'язанні задач пов'язаних із швидкістю?
- Чи можна за допомогою похідної знайти продуктивність життєдіяльності популяції?
- Як за допомогою похідної знайти швидкість хімічної реакції?

Тематичні запитання пов'язані безпосередньо з проєктом та сприяють дослідженням для пошуку відповіді на ключове запитання. Постановка запитань, що інтригують та зацікавлюють, – ефективний засіб заохочення учнів глибоко думати над значенням матеріалу, що вивчається. Коли учні

зустрічаються із запитаннями, відповіді на які їх справді цікавлять, вони стають вдумливішими і допитливішими, серйозніше ставляться до навчання.

На підготовчому етапі реалізації проєкту визначають тему, мету і завдання проєкту. Учитель обговорює разом з учнями план проєкту, створює сайт проєкту, де висвітлює посилання на корисні джерела інформації. Рекомендує сторінку на сайті для онлайн консультацій, вчитель пропонує учням пройти вхідне опитування у вигляді діаграм, переконатися, що учні попередньо мають відповідні навички роботи з MS Word, MS PowerPoint, MS Publisher, пошуковими серверами, інформацією в Інтернеті. Вчитель створює презентацію, у якій продумує творчу назву проєкта, ключові, тематичні та змістові запитання, продумує кількість груп учнів, їх назви та можливі напрямки дослідження.

Для проєкту «Магія похідних» учні об'єднуються у наступні групи: "Мандрівні економісти" – досліджують використання похідної в економічній-географії, друга група "Послідовники Ейнштейна" – досліджують застосування похідної в фізиці, третя група "Алхіміки" – застосування похідної в хімії та четверта група "Діти-Землі" – досліджують застосування похідної в біології. Результати досліджень подають у вигляді учнівської презентації, створюють публікацію в режимі Publisher або онлайн-ресурсу Canva та представляють результати дослідження на сторінці Веб-сайту проєкту.

Було створено приклади учнівських робіт для кожної творчої групи.

Другий етап включає в себе пошук та аналіз відомостей. Перший тиждень виконання проєкту – пошуково-дослідницький - учні збирають інформацію, аналізують її, висувають гіпотези та перевіряють їх. У ході виконання проєкту учні використовуватимуть Інтернет не лише для пошуку інформації, але й оформлення результатів та організації спільної роботи. Переважними засобами, що використовуватимуться, будуть Інтернет-браузери та засоби для організації спільної роботи – блоги, wiki, чати, Skype,

диск Google та соціальні мережі та засоби для представлення результату – wiki, документи Google, блоги.

Розглянемо більш детально прикладні задачі розв'язані кожною групою. Групою «Мандрівні економісти» було поставлено за мету розглянути задачі з економіки які розв'язуються за допомогою похідної. Обчислити продуктивність праці під час кожної години роботи, за умови, що об'єм продукції y на протязі робочого дня задано функцією $y = -2t^3 + 10t^2 + 50t - 16$, t - час (год). Неможна було не розглянути прикладні задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення. На підприємстві виготовляють продукцію одного виду. Витрати на виробництво x одиниць продукції виражається функцією $V(x) = x^3 - 30x^2 - 160x + 900$ (у грн.), а дохід, отриманий від реалізації (загальна вартість продукції) $D(x) = 80x - 6x^2$ (у грн.). Визначити скільки продукції треба виготовити, щоб прибуток був максимальний.

Група «Послідовники Ейнштейна» з'ясували визначення похідної у фізиці: швидкість матеріальної точки, миттєва швидкість як фізичний зміст похідної, миттєве значення сили змінного струму, миттєве значення електрорушійної сили електромагнітної індукції, максимальна потужність. Та запропонували і розв'язали наступні задачі:

1. Кут повороту тіла навколо осі змінюється в залежності від часу t за законом $f(t) = 0,1t^2 - 0,5t + 0,2$. Знайдіть кутову швидкість обертання тіла в момент часу $t_1 = 20$ с.

2. Матеріальна точка рухається за законом $S(t) = 2t^2 + 7t$ (S вимірюється у метрах, t – в секундах). Знайти час t (у секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 60 м/с.

3. Швидкість v тіла, що рухається у вертикальному напрямку, змінюється за законом $V = 9 - 10t$ (м/с). Визначити швидкість тіла в момент приземлення, якщо воно в початковий момент знаходилося на висоті 2 м від землі.

4. Тіло кинуте вертикально вгору рухається за законом $h(t) = 6t - t^2$ (h – у метрах, t – у секундах). У який момент часу тіло досягне найбільшої висоти і яке буде її значення в цей момент?

Групою «Алхіміки» було розглянуто прикладну задачу: нехай кількість речовини, що вступив в хімічну реакцію задається залежністю: $p(t) = \frac{t^2}{2} + 3t - 3$ (моль), знайти швидкість хімічної реакції через 3 секунди. Творча група «Діти Землі» розглянули біологічну задачу: нехай популяція бактерій в момент t (с) налічує $x(t)$ особин, $x(t) = 3000 + 10t^3 + 100t^2$ знайти швидкість росту популяції: а) в довільний момент t , б) в момент $t = 1$ с, $t = 2$ хв.

Протягом виконання проєкту вчитель спостерігає за роботою учнів та консультує їх, у разі виникнення непередбачених ситуацій. На другий тиждень виконання проєкту учні обирають спосіб представлення результатів, попередньо ознайомившись з формою оцінювання електронної публікації, веб-сайту презентації, буклету, шаблонами для учнівської презентації, та створюють презентацію для захисту результату, також вони мають розробити буклет та представити результати на сторінці веб-сайту.

На третьому тижні відбувається захист учнівських проєктів. Учні кожної групи представляють свої розробки, та звітують про дослідження щодо застосування похідної у різних галузях науки.

Навчання, побудоване на проєктному підході, допомагає враховувати індивідуальні навчальні потреби учнів та їх інтереси. Проєкти вимагають від учнів вибору змісту, процесу дослідження та оформлення результатів. Вони також допомагають учням вивчити тему більш глибоко, застосувати нові навички, зокрема навички критичного мислення, вдосконалити вже отримані навички, створити нові продукти та презентувати їх так, щоб проявити себе.

Розглянемо приклади проєктів, запропоновані III для реалізації під час вивчення застосування похідної (Gemini)

- **"Дослідження функцій та побудова графіків"**: Проєкт, у якому учні використовують похідну для повного дослідження різних типів функцій (парність, непарність, нулі функції, екстремуми, монотонність, асимптоти) та подальшої побудови їхніх точних графіків. Результатом може бути презентація або цифрове портфоліо графіків складних функцій.

- **"Історичний екскурс: Як виникла похідна"**: Гуманітарно-математичний проєкт. Учні досліджують історію виникнення поняття похідної, внесок Ньютона, Лейбніца та інших вчених. Результатом може бути історична доповідь, стінгазета або презентація про розвиток диференціального числення.

Ці проєкти допомагають учням побачити **практичну цінність** математики та розвивають їхні дослідницькі навички.

Під час вивчення теми **"Похідна та її застосування"** з учнями 10-го класу можна реалізувати різноманітні **навчальні проєкти**, які поєднують математичну теорію з практичними, дослідницькими та міжпредметними завданнями.

- **"Похідна у фізиці: швидкість та прискорення"**: Учні досліджують фізичний зміст похідної, використовуючи її для знаходження миттєвої швидкості та прискорення руху тіл. Проєкт може включати розв'язування задач із кінематики, моделювання руху об'єктів або аналіз реальних фізичних процесів (наприклад, падіння тіла).

- **"Оптимізація в реальному житті"**: Цей проєкт передбачає пошук найбільших та найменших значень функцій для вирішення практичних завдань. Приклади тем:

- **"Максимізація прибутку"**: Учні моделюють бізнес-ситуації та використовують похідну для визначення оптимального обсягу виробництва, який принесе найбільший прибуток.

- **"Мінімізація витрат"**: Розрахунок мінімальної кількості матеріалу, необхідного для виготовлення об'єкта певної форми та об'єму (наприклад, банки, коробки).

- **"Найвигідніший маршрут":** Пошук найкоротшого часу або відстані доставки товарів, використовуючи концепції оптимізації.

На прохання до ChatGPT, ШІ пропонує розробити урок/мікропроект з використанням похідної.

Нижче подано **готовий міні-проект / урок** із використанням похідної для учнів 10–11 класів. Він містить мету, етапи роботи, завдання для груп, критерії оцінювання та кінцевий продукт. Можеш використовувати його як повний конспект або як проєкт на 1–2 уроки.

Міні-проект: «Похідна в реальному житті: досліджуємо, моделюємо, аналізуємо»

Тривалість: 1–2 уроки (45–90 хв). **Форма роботи:** групова + індивідуальна. **Результат:** постер/презентація/інфографіка з аналізом реальної задачі через похідну

Мета проєкту

1. Показати практичне застосування похідної в техніці, економіці, біології та повсякденному житті.
2. Розвинути вміння математичного моделювання.
3. Навчити учнів інтерпретувати значення похідної та екстремумів.
4. Сформувати навички командної роботи та презентації результатів.

Ключові запитання

- Як похідна допомагає зрозуміти, як швидко щось змінюється?
- Чому у багатьох життєвих ситуаціях важливо знайти максимум або мінімум?
- Що потрібно для побудови математичної моделі реального процесу?

Хід уроку

1. Актуалізація (5 хв)

Учитель демонструє короткий приклад (картка, яку ми створили, або інший візуальний кейс) та запитує:

- Що означає «миттєва швидкість»?
- Чому важливо знати не тільки значення функції, а і те, як вона змінюється?
- Де в житті потрібно знаходити максимум або мінімум?

Учні пропонують варіанти: прибуток бізнесу, температура ліків, рівень води, оптимальні розміри упаковки тощо.

2. Об'єднання в групи (2 хв)

Клас поділяється на 4–5 груп, кожна отримує свій реальний кейс.

3. Розподіл завдань (20–30 хв)

Кожна група отримує кейс-картку з реальної сфери (нижче — готові варіанти). Завдання:

1. Записати математичну модель процесу (дана або потрібно обрати з варіантів).
2. Обчислити похідну та пояснити її зміст.
3. Знайти екстремуми, якщо потрібні.
4. Побудувати графіки (на ноутбучі/телефоні або на папері).
5. Підготувати коротку презентацію (постер/слайд/усне пояснення).

Готові кейси для груп

Кейс 1. Автомобільний рух

$$s(t)=3t^2+2t$$

Знайти миттєву швидкість через 4 с.

Визначити, коли швидкість перевищить 30 км/год.

Пояснити, чому графік швидкості — лінія, а шляху — парабола.

Кейс 2. Бізнес: максимізація прибутку

$$P(x)=50x-0,5x^2-200$$

Знайти максимум функції.

Пояснити, що означає точка максимуму для підприємця.

Побудувати графік «кількість — прибуток».

Кейс 3. Біологія: ріст популяції бактерій

$$N(t)=200t e^{-0,2t}$$

Визначити момент найбільшого росту.

Знайти максимальну кількість бактерій.

Пояснити спадання популяції після піку.

Кейс 4. Охолодження ліків

$$T(t)=20+15e^{-0,4t}$$

Знайти швидкість охолодження через 5 хв.

Визначити, чи температура впаде нижче 25°C за 10 хв.

Пояснити, чому швидкість зміни з часом зменшується.

Кейс 5. Попит та ціна

$$q(p)=1000-40p$$

Похідна попиту та її зміст.

Обчислити еластичність при ціні 10 грн.

Зробити економічний висновок.

4. Презентація результатів (10–15 хв)

Кожна група презентує:

- математичну модель,
- графік,
- інтерпретацію похідної,
- висновки.

Учасники ставлять запитання одне одному.

5. Рефлексія (5 хв)

Учитель запитує:

- Що виявилось найскладнішим — обчислення чи інтерпретація?
- Де ви можете використати ці знання поза школою?
- Який кейс був найближчий до реального життя?

6. Оцінювання

Критерії (по 5 балів за кожний):

1. Математична точність (похідна, екстремум).

2. Правильність побудови графіка.
3. Практичний висновок.
4. Командна робота та презентація.

Максимум — 20 балів.

🎯 Результат проекту

- учні створюють власний математичний аналіз реального процесу;
- працюють у команді;
- бачать реальну цінність похідної;
- створюють готовий продукт (постер, презентація, інфографіка).

Розглянемо приклад задачі для профільного вивчення математики, яка може дати старт для навчального проекту.

Окрім мікропроектів, III демонструє високу ефективність у створенні комплексних задач з параметрами, які вимагають побудови складної математичної моделі. Наведемо приклад такої задачі, згенерованої для поглибленого вивчення теми «Екстремуми функцій» у контексті фінансової математики.

Задача (інвестиційне моделювання). *Задачі, розв'язування яких потребує побудову математичної моделі.*

Задача 4. Капітал у 1 мільярд грошових одиниць можна покласти в банк під 50% річних або інвестувати у підприємство, при цьому ефективність вкладу очікується у розмірі 100%, а витрати задані квадратичною залежністю. На прибуток накладається податок в $p\%$. При яких значеннях p вклад в підприємство є більш ефективним, ніж розміщення капіталу в банку?

Розв'язання.

1. Побудова математичної моделі

Нехай x (млрд. грош. одиниць) інвестується в підприємство, а $(1 - x)$ розміщується під відсотки. Тоді розміщений капітал, через рік, визначається за формулою складних відсотків, дорівнюватиме

$(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$, а капітал вкладений в підприємство, визначається за формулою $x\left(1+\frac{100}{100}\right) = 2x$. Оскільки за умовою задачі витрати задаються квадратичною залежністю, то вони будуть складати ax^2 , тобто прибуток від вкладу в підприємство $C = 2x - ax^2$. Податки становлять $(2x - ax^2)\frac{p}{100}$, тобто чистий прибуток буде дорівнювати $\left(1 - \frac{p}{100}\right)(2x - ax^2)$. Загальна сума через рік складатиме $A(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + \left(1 - \frac{p}{100}\right)(2x - ax^2) = \frac{3}{2} + \left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]x - a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x^2$. Отже економічна задача зводиться до математичної задачі знаходження максимального значення функції на проміжку $[0,1]$.

7. Дослідження математичної моделі

Знайдемо максимуму функції $A(x)$ на проміжку $[0,1]$.

1) Знаходимо похідну $A'(x)$:

$$A'(x) = 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} - 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x.$$

2) Знаходимо критичні точки: $A'(x) = 0$;

$$2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} - 2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)x = 0; \quad x = \frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}.$$

3) Знаходимо другу похідну

$$A''(x) = -2a\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

$$4) \quad A''\left(\frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}\right) = -2a\left(1 - \frac{p}{100}\right) < 0, \quad \text{отже } x - \text{ точка}$$

максимуму.

Щоб $x_0 \in [0,1]$, необхідно аби виконувалась умова

$$0 < 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} < 1 \text{ розв'язавши нерівність, маємо } p < 25.$$

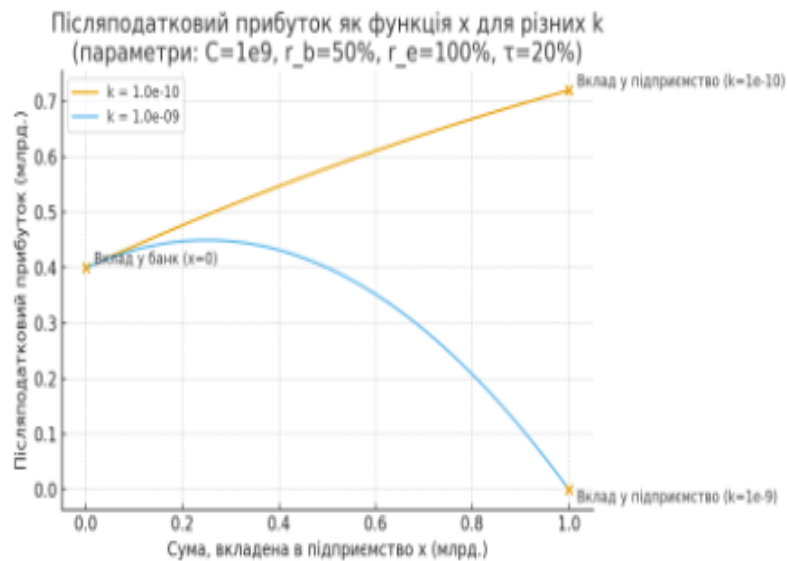
Таким чином, якщо $p > 25$, то вигідніше нічого не вкладати у підприємство та розмістити весь капітал у банку.

Якщо $p < 25$, то можна показати, що при $x = \frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$

$$A\left(\frac{2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1 - \frac{p}{100}\right)}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1 - \frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$

тобто вклад в підприємство є вигіднішим ніж чисте розміщення під відсотки.

3. Інтерпретація. Переведемо результат з математичної мови на мову вихідної задачі. На прибуток накладається податок в $p\%$. При $p < 25\%$ вклад в підприємство є більш ефективним, ніж розміщення капіталу в банку. При значеннях $p > 25\%$ вигідніше нічого не вкладати у підприємство та розмістити весь капітал у банку.



Чудово — сформулюю математичну модель і покажу чисельну ілюстрацію.

Математична модель (українською)

Нехай початковий капітал $C = 10^9$ (1 мільярд). Позначимо:

- x — сума, вкладена в підприємство ($0 \leq x \leq C$);
- $C - x$ — сума, вкладена в банк;
- річна ставка в банку $r_b = 0,50$ (50%);
- очікувана (валова) ефективність підприємства $r_e = 1,00$ (100%);
- квадратичні витрати підприємства $= kx^2$, де $k > 0$ — параметр;
- ставка податку на прибуток τ (наприклад, $\tau = 0,20 = 20\%$).

Прибуток підприємства до оподаткування: $xr_e - kx^2$.

Прибуток банку до оподаткування: $(C - x)r_b$.

Рис. 2.10. Відповідь III. Створення моделі до задачі.

При розв'язуванні цієї задачі в учнів можуть виникнути проблеми на етапі побудови математичної моделі, оскільки потрібно володіти економічним апаратом, пам'ятати формулу складних відсотків.

Після оподаткування (якщо податок однаково застосовується до обох видів прибутку) загальний післяподатковий прибуток:

$$\Pi(x) = (1 - \tau)[xr_e - kx^2 + (C - x)r_b].$$

Умова, коли вклад в підприємство кращий за вклад у банк (для повного вкладення всього капіталу)

Порівняймо два варіанти: весь капітал у банку ($x = 0$) і весь капітал в підприємстві ($x = C$).

- При $x = 0$: $\Pi_{\text{банк}} = (1 - \tau)Cr_b$.
- При $x = C$: $\Pi_{\text{підпр}} = (1 - \tau)(Cr_e - kC^2)$.

Порівняння $\Pi_{\text{підпр}} > \Pi_{\text{банк}}$ дає (скоротимо множник $1 - \tau > 0$):

$$Cr_e - kC^2 > Cr_b \implies r_e - kC > r_b \implies k < \frac{r_e - r_b}{C}.$$

Підставляючи $r_e = 1,0$, $r_b = 0,5$, $C = 10^9$, отримуємо поріг

$$k < \frac{0,5}{10^9} = 5 \cdot 10^{-10}.$$

Отже, якщо квадратичний коефіцієнт витрат k менший за $5 \cdot 10^{-10}$, то вклад всього капіталу в підприємство дає більший післяподатковий прибуток, ніж розміщення всього капіталу в банку. Інакше (при більших k) вклад у банк кращий.

Цю умову можна легко інтерпретувати: через великий розмір C навіть невеликий квадратичний коефіцієнт дає великі абсолютні витрати kC^2 , тому поріг для k виходить дуже малим.

Ілюстрація (графік)

Я побудував графік функції $\Pi(x)$ (післяподатковий прибуток) як функції x для двох прикладів k :

- $k = 1 \cdot 10^{-10}$ (менше за поріг) — тут вклад у підприємство вигідніший при великих x ;
- $k = 1 \cdot 10^{-9}$ (більше за поріг) — тут прибуток від підприємства швидко падає через квадратичні витрати.

(Графік показано вище: по осі абсцис — x в мільярдах, по осі ординат — післяподатковий прибуток у мільярдах.)

Рис. 2.11. Відповідь ІІІ. Запропоноване пояснення до задачі.

При розв'язуванні цієї задачі учні часто стикаються з труднощами саме на етапі переходу від текстової умови до математичної формули $A(x)$. Штучний інтелект у такому випадку може виступати як тьютор, пропонуючи

навідні запитання («Як записати прибуток після податку?», «З чого складається загальна сума?») або перевіряючи коректність складеного рівняння, не надаючи одразу готової відповіді.

Короткі рекомендації та зауваження

1. Якщо податок τ застосовується по-різному до різних видів доходу, рівняння потрібно скоригувати — множник $1 - \tau$ перестане скорочуватися, і поріг може змінитися.
2. Якщо замість повного вкладення потрібна оптимальна частка x (максимум $\Pi(x)$), можна знайти похідну:

$$\Pi'(x) = (1 - \tau)(r_e - 2kx - r_b),$$

і розв'язати $\Pi'(x) = 0$ для x , при цьому перевірити крапки на межах 0 і C . (За бажанням можна дописати розв'язок з обґрунтуванням максимуму/мінімуму.)

Якщо хочете, може:

- підготувати пояснення з обчисленням оптимальної x та перевіркою другою похідною;
- побудувати додаткові графіки для різних значень τ або для випадку, коли r_e або r_b змінні;
- оформити це як коротку роздатку/картку для уроку.

Який із варіантів робити далі? 

Рис. 2.12. Відповідь ІІІ. Окремі рекомендації та зауваження до розв'язування задачі.

Висновки до другого розділу

Узагальнюючи результати дослідження практичних аспектів впровадження технологій штучного інтелекту в процес навчання математики на профільному рівні, варто наголосити, що цей процес є складним та багатограним явищем, яке вимагає від педагогічної спільноти дотримання цілої низки взаємопов'язаних педагогічних умов. Насамперед, проведений аналіз засвідчив, що ефективність інтеграції цифрових інтелектуальних інструментів неможлива без забезпечення належного рівня цифрової компетентності всіх учасників освітнього процесу, оскільки і вчителі, і учні повинні не лише володіти технічними навичками роботи з нейромережами, а й розуміти принципи їх функціонування та обмеження.

Особливої ваги набуває умова забезпечення адаптивності навчального контенту, яка реалізується через здатність генеративних моделей

підлаштовуватися під індивідуальні потреби здобувачів освіти, проте це вимагає від педагога постійного контролю якості та вірогідності згенерованих матеріалів, адже, як показали експериментальні дані, навіть найсучасніші системи можуть припускатися фактичних помилок. У цьому контексті надзвичайно важливим є дотримання принципів академічної доброчесності, що передбачає формування в учнів культури відповідального використання цифрових помічників, де штучний інтелект виступає не як засіб уникнення інтелектуальних зусиль, а як потужний інструмент для глибшого розуміння предмету. Роль вчителя при цьому зазнає суттєвих трансформацій, еволюціонуючи від традиційного транслятора знань до фасилітатора та ментора, який спрямовує дослідницьку діяльність учнів і допомагає їм критично оцінювати отриману інформацію.

В ході дослідження було розроблено та обґрунтовано методику використання штучного інтелекту при розв'язуванні та генеруванні задач з теми «Похідна та її застосування», яка продемонструвала, що технології штучного інтелекту можуть виступати ефективним засобом для автоматизації створення варіативних задач, візуалізації складних математичних моделей та надання персоналізованих підказок у режимі реального часу. Важливо відзначити, що порівняльний аналіз різних інструментів дозволив дійти висновку про те, що спеціалізовані математичні сервіси, такі як Mathos AI або GeoGebra, демонструють значно вищу ефективність та точність у навчанні математики порівняно з універсальними мовними моделями, хоча й вони потребують обов'язкової верифікації отриманих результатів.

Окремим вагомим результатом роботи стала розробка системи навчальних проєктів із залученням штучного інтелекту, таких як «Дослідження функцій», «Фінансова математика» та «Зони відпочинку», які реалізують трансдисциплінарний підхід і дозволяють поєднати математичні знання з інформатикою, економікою та фізикою. Практична апробація показала, що інтеграція інструментів штучного інтелекту у проєктну

діяльність дозволяє не лише автоматизувати рутинні обчислення, звільняючи час для творчого пошуку, але й суттєво поглибити аналітичну складову навчання та підвищити мотивацію учнів через створення унікальних освітніх продуктів.

1. ІІІ є дієвим інструментом підсилення навчання теми «Похідна». Штучний інтелект демонструє високу ефективність у генерації практико-орієнтованих задач різних галузей (фізика, економіка, біологія, інженерія); побудові математичних моделей і поясненні етапів розв'язання; створенні візуалізацій, карток, конспектів, навчальних матеріалів і міні-проектів; підтримці учнівської дослідницької діяльності. ІІІ дає змогу урізноманітнювати навчальний контент, робити його сучасним і наближеним до реальних ситуацій.

2. Ефективність використання ІІІ залежить від виконання певних педагогічних умов: підготовленість учителя, його здатність бути модератором, контролером якості та критичним оцінювачем відповідей ІІІ; цифрова грамотність учнів, уміння ставити запитання, перевіряти відповіді та мислити критично; дидактична доцільність, тобто використання ІІІ не заради інструменту, а для досягнення конкретних цілей навчання; персоналізація та диференціація навчального процесу; дотримання етичності та безпеки даних; систематична інтеграція, а не випадкове використання.

3. Задачі, згенеровані ІІІ, показали практичну цінність, але потребують педагогічного контролю

4. Систематизація задач дозволяє учням краще опановувати тему

5. ІІІ є ефективним інструментом у проєктному навчанні

6. ІІІ полегшує моделювання складних практичних задач

7. Головна цінність ІІІ — не автоматизація відповіді, а розвиток мислення учнів. Правильно організоване використання ІІІ формує автономність учнів, їхню здатність логічно мислити, шукати закономірності та працювати з реальними проблемами.

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати проведеного кваліфікаційного дослідження, присвяченого проблемі використання штучного інтелекту в навчанні математики на профільному рівні підготовки, можна констатувати, що в умовах стрімкої цифрової трансформації суспільства та переходу до четвертої промислової революції ця тематика набуває виняткової актуальності. У роботі було здійснено глибокий аналіз сутності та сучасного стану впровадження технологій штучного інтелекту в освітній простір, що дало змогу визначити його як стратегічний інструмент модернізації математичної освіти, який відкриває нові горизонти для реалізації принципів адаптивного навчання та забезпечення індивідуалізації освітніх траєкторій учнів старшої школи.

У ході дослідження було проведено детальний логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» та відповідних підручників для 10–11 класів, який засвідчив, що попри наявність ґрунтовної теоретичної бази, існуючі навчальні матеріали потребують значного посилення прикладної спрямованості та візуалізації, що, як було доведено, може бути ефективно реалізовано саме за допомогою засобів штучного інтелекту. Теоретичне обґрунтування основ навчання математики на профільному рівні в умовах компетентнісного підходу дозволило стверджувати, що використання інтелектуальних систем сприяє формуванню цілісної системи компетентностей, включаючи не лише предметні математичні, такі як процесуально-операційні та змістові, але й ключові, зокрема інформаційно-цифрову та дослідницьку, що є необхідною передумовою для успішної професійної самореалізації випускників у майбутньому.

Важливим здобутком роботи стало визначення та обґрунтування комплексу педагогічних умов ефективного використання штучного інтелекту, серед яких чільне місце посідають методична готовність учителя до роботи з новими технологіями, сформована цифрова грамотність учнів, забезпечення високого рівня інтерактивності навчання та неухильне

дотримання етичних норм. Особливий акцент у дослідженні було зроблено на необхідності розвитку критичного мислення учнів та навичок оцінювання результатів роботи генеративних моделей, оскільки сліпа довіра до алгоритмів може призвести до негативних наслідків через можливі фактологічні помилки в роботі систем.

Практична значущість дослідження полягає у розробці методичних рекомендацій щодо використання штучного інтелекту для генерації навчальних задач, створення інтерактивних сценаріїв уроків та реалізації STEM-проектів, що дозволяє трансформувати традиційний процес навчання з репродуктивного на дослідницький, де учень виступає активним суб'єктом пізнання, а штучний інтелект — його інтелектуальним партнером та потужним інструментом моделювання. Результати дослідження переконливо підтверджують, що інтеграція штучного інтелекту в освітній процес сприяє підвищенню мотивації учнів до вивчення математики, покращує розуміння абстрактних математичних понять через їхню наочну візуалізацію та стимулює розвиток навичок самостійної роботи. Водночас, у роботі наголошується на тому, що, незважаючи на всі переваги технологій, штучний інтелект не може і не повинен замінити вчителя, а залишається лише потужним допоміжним засобом, ефективність застосування якого безпосередньо залежить від методичної майстерності та професіоналізму педагога.

У результаті проведеного аналізу теоретичних положень та практичних прикладів використання штучного інтелекту (ШІ) у навчанні розділу «Похідна та її застосування» встановлено низку положень, що визначають його дидактичний потенціал та обмеження.

По-перше, доведено, що інструменти штучного інтелекту є ефективним засобом підтримки навчання математичного аналізу, оскільки забезпечують генерацію широкого спектра практико-орієнтованих задач, створення візуальних пояснень, побудову математичних моделей та адаптивний добір навчального матеріалу. Використання ШІ сприяє підвищенню доступності

абстрактних понять, зокрема фізичного, геометричного та прикладного змісту похідної.

По-друге, визначено, що результативність інтеграції ІІІ у навчальний процес безпосередньо залежить від дотримання системи педагогічних умов. Ключовими серед них є: підготовленість учителя до роботи зі штучним інтелектом; достатній рівень цифрової грамотності учнів; дидактична обґрунтованість застосування інструментів ІІІ; забезпечення персоналізації навчання; дотримання етичних та безпекових норм; систематичне, а не епізодичне включення ІІІ у структуру уроку. Встановлено, що лише комплексне виконання цих умов забезпечує підвищення якості математичної освіти.

По-третє, результати аналізу показали, що хоча ІІІ здатний правильно виконувати математичні обчислення та будувати логічно послідовні розв'язання, він інколи допускає концептуальні помилки (наприклад, під час визначення опуклості функцій), що зумовлює необхідність контролю з боку педагога. Таким чином, роль учителя полягає не в заміні математичних процедур, а в експертній оцінці, корекції та методичному спрямуванні роботи з ІІІ.

По-четверте, систематизація широкого набору прикладних задач, згенерованих ІІІ, засвідчила можливість їх структурування за трьома універсальними сценаріями: задачами на швидкість зміни, задачами на пошук екстремумів та задачами на геометричний зміст похідної і дослідження монотонності. Така класифікація є методично цінною, оскільки формує в учнів цілісне бачення розділу та полегшує перенесення знань у нові ситуації.

По-п'яте, доведено, що інструменти штучного інтелекту мають значний потенціал у проєктно-орієнтованому навчанні. Використання ІІІ на всіх етапах реалізації навчальних проєктів — від генерації ідей до оформлення результатів — сприяє формуванню компетентностей ХХІ століття, зокрема критичного та творчого мислення, інформаційної

грамотності, уміння працювати в команді та здійснювати міжпредметні дослідження. Проаналізовані приклади, зокрема проєкт «Магія похідних», демонструють, що ШІ істотно розширює можливості реалізації міждисциплінарних завдань.

По-шосте, встановлено, що ШІ є ефективним інструментом підтримки математичного моделювання. Інтелектуальні системи здатні допомагати учням на складних етапах формалізації текстових задач, інтерпретації результатів і переведення математичного висновку на мову прикладної ситуації. Це особливо важливо для задач економічного, фізичного та технічного змісту.

Узагальнюючи викладене, можна стверджувати, що штучний інтелект виступає потужним педагогічним інструментом, який за умови науково обґрунтованої інтеграції сприяє глибшому засвоєнню змісту розділу «Похідна та її застосування», підвищує ефективність навчального процесу та забезпечує розвиток ключових компетентностей здобувачів освіти. Водночас використання ШІ не може повністю замінити професійну діяльність учителя, оскільки потребує критичного оцінювання, методичного супроводу та педагогічної відповідальності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Clevermaths*. URL: <http://clevertouch.com.ua/uk/software/clevermaths.html> (дата звернення 03.01.2025)
2. *Desmos*. URL: <https://www.desmos.com/calculator?lang=> (дата звернення 03.01.2025)
3. *GeoGebra*. URL: <https://www.geogebra.org/> (дата звернення 03.01.2025)
4. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владімірова, Н. Г.. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2018. 336 с.
5. Використання штучного інтелекту в освіті: як не порушити академічну доброчесність [Вебінар]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=qWEjbmPhQsU> (дата звернення: 5.09.2025).
6. Воротникова І. П. Професійний розвиток вчителів природничої та математичної галузей з використання штучного інтелекту. Електронне наукове фахове видання “Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету”, 2023. №15, С. 18–34. URL: <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2023.152>
7. Закон України «Про освіту». URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19?find=1&text=%D1%96%D0%BD%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D0%B7#w1_1 (дата звернення: 05.12.2024).
8. Закон України «Про повну загальну середню освіту». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text> (дата звернення: 05.12.2024).
9. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2019. – 444 с. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/3315>
10. Клочко О. Розвиток критичного мислення майбутніх вчителів інформатики та математики з використанням засобів штучного інтелекту. Modern information technologies and innovation methodologies of education in

professional training methodology theory experience problems. 2024. №72, 14-26.
URL: <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-72-14-26>

11. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Використання STEM-підходів у навчанні математики студентів закладів фахової передвищої освіти. Актуальні питання природничо-математичної освіти. Суми : Сумський держ. пед. ун-тет, 2023. С. 74-83. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/9160>

12. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Математика в STEMі : навч.-метод. посіб. Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2023. 274 с. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7849>

13. Лукашова Т., Друшляк М. Штучний інтелект як засіб розвитку критичного мислення майбутніх учителів математики. Фізико-математична освіта, 2023. №38(5), С. 18–25. URL: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-5-003>

14. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда та ін. Київ : УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.

15. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2018.

16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти – Х.: Гімназія, 2019. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/439-algebra-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakr-11-klas.html> (дата звернення 30.06.2025)

17. Нелін, Є. П.. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 328 с.

18. Паламар Світлана, Науменко Марина. Штучний інтелект в освіті: використання без порушення принципів академічної чесності.

Освітологічний дискурс, 1 (44). 2024. С. 68-83. URL: <https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/48609/>

19. Папач О. І., Мельнійчук В. В., Антонова В. А. Використання генеративного штучного інтелекту для розробки навчальних матеріалів у цифровому освітньому середовищі. Педагогічна Академія: наукові записки. 2025. №16. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15079712>

20. Подолянчук В. В., Мінтій І. С. Переваги та недоліки використання штучного інтелекту в освітньому процесі. Штучний інтелект у науці та освіті (AISE 2024): матеріали Міжнар. наук. конф. (Київ, 1-2 березня 2024 р.) [Електронний ресурс]. [упоряд: А. Яцишин, В. Матусевич, В. Коваленко]. Київ : УкрІНТЕІ, 2024. С. 225-227.

21. Психологічні аспекти використання штучного інтелекту у навчанні математики: огляд закордонних публікацій. Дидактика математики: теорія, досвід, інновації, 2024. 1, 81-88. URL: <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-1-81-88>.

22. Результати всеукраїнського дослідження про перспективи ІІІ в загальній середній освіті. Офіційний сайт МОН України. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/news/2023/12/20/Vseukranske_doslidzhennya.vykorystannya.20.12.2023.pdf (дата звернення: 5.09.2025)

23. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. Київ: Академвидав, 2018. 287 с.

24. Стойка М., Петечук Ю. Використання штучного інтелекту при викладанні математики. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Педагогіка. Соціальна робота». 2025. №2(55), 104–110. URL: <https://doi.org/10.24144/2524-0609.2024.55.104-110>

25. Толочко Світлана, Годунова Анастасія. Теоретико-методичний аналіз закордонних практик використання штучного інтелекту в освіті й науці. Вісник науки та освіти . № 7(13) (2023). URL: <https://perspectives.pp.ua/index.php/vno/article/view/5765>

26. Штучний інтелект у вищій освіті: ризики та перспективи інтеграції: матеріали всеукраїнського науково-педагогічного підвищення кваліфікації, 1 липня – 11 серпня 2024 року. – Львів – Торунь : Liha-Pres, 2024. 328 с. URL: https://cuesc.org.ua/images/informlist/Maket%20advanced_training_OLA.pdf (дата звернення: 5.09.2025)
27. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/712224/> (дата звернення: 5.09.2025)
28. Гриб'юк О.О. Використання технологій штучного інтелекту вчителями математики в процесі дослідницького навчання для мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів: виклики, загрози та перспективи Педагогічна інноватика: сучасність та перспективи. 2024 № 4. URL: <https://journals.uzhnu.uz.ua/index.php/ped/article/view/1017>