

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

**РОЗВИТОК УМІНЬ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ
РІВНЯНЬ І ЇХ СИСТЕМ**

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04. Середня освіта (Математика)
Горбатенко Дар'ї Олегівни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Армаш Тетяна Сергіївна

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ.....	8
МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА ВМІНЬ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ	8
1.1. Математичні компетентності. Особливості компетентнісного підходу.	8
1.2. Методи навчання математики, що забезпечують набуття математичних компетентностей.....	21
1.3. Класифікація задач та прийоми їх вирішення за допомогою рівнянь і систем рівнянь як компетентність.	26
1.3.1 Класифікація задач за категоріями	26
1.3.2 Прийоми розв’язування задач за допомогою рівнянь і систем рівнянь ...	27
1.3.3 Основні методи розв’язання систем рівнянь.....	28
1.3.4 Переваги використання рівнянь і систем рівнянь у розв’язуванні задач.	28
РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	29
2.1 Методика формування математичних компетентностей у процесі розв’язання рівнянь та їх систем.....	31
2.1.1 Метод конкретної ситуації.....	31
2.1.2 Метод евристичних питань	37
2.1.3 Дослідницький метод	40
2.1.4 Метод проєктів	43
2.2 Класифікація задач та методичні приклади їх розв’язання	48
ВИСНОВКИ.....	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	57

ВСТУП

У сучасних умовах розвитку освіти в Україні та світі особлива увага приділяється формуванню ключових компетентностей учнів, які забезпечують їхню успішну соціалізацію, готовність до викликів ХХІ століття та здатність застосовувати знання у реальних життєвих ситуаціях. Математика, як одна з базових дисциплін, відіграє ключову роль у розвитку логічного мислення, аналітичних здібностей та вміння вирішувати проблеми. Однак сучасна освітня практика в Україні стикається з низкою викликів, пов'язаних із викладанням математики, зокрема у контексті формування в учнів умінь розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і їх систем.

Однією з основних проблем є недостатній рівень мотивації учнів до вивчення математики, що часто зумовлено абстрактним характером викладу матеріалу та відірваністю завдань від практичних потреб. Традиційні методи викладання, які зосереджуються на механічному запам'ятовуванні алгоритмів, не завжди сприяють розвитку критичного мислення та вміння застосовувати математичні знання у нестандартних ситуаціях. Зокрема, розв'язування задач за допомогою рівнянь і їх систем вимагає не лише знання математичних формул, але й уміння аналізувати умову задачі, моделювати реальні ситуації, обирати оптимальний метод розв'язання та перевіряти отримані результати.

У контексті реформування освіти, зокрема впровадження Нової української школи (НУШ), акцент робиться на компетентнісний підхід, який передбачає розвиток в учнів здатності застосовувати знання у практичних ситуаціях, співпрацювати у команді та самостійно знаходити рішення [22]. Проте, як показують дослідження [3], значна частина учнів стикається з труднощами у формуванні цих умінь, особливо коли йдеться

про задачі, що вимагають використання рівнянь і їх систем. Це зумовлено як недостатньою кількістю практико-орієнтованих завдань у навчальних програмах, так і обмеженим використанням сучасних педагогічних технологій, таких як проблемне навчання, проєктна діяльність чи інтеграція цифрових інструментів.

Ще однією проблемою є нерівномірний рівень підготовки вчителів до реалізації компетентнісного підходу у викладанні математики. Часто педагоги потребують додаткових методичних ресурсів і професійної підтримки для впровадження інноваційних методик, які б сприяли розвитку в учнів умінь аналізувати, моделювати та вирішувати задачі. У цьому контексті актуальність теми наукової роботи полягає у необхідності розробки ефективних педагогічних стратегій і методичних підходів, які б сприяли формуванню в учнів умінь розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і їх систем, а також розвитку їхньої математичної компетентності.

Формування математичних компетентностей учнів є однією з основних цілей сучасної освітньої системи. У контексті глобальних змін у суспільстві, включаючи технологічний прогрес, збільшення вимог до кваліфікації робочої сили та зростання необхідності в аналітичному мисленні, математична грамотність стає ключовою навичкою для успішної адаптації в умовах сучасного життя. Знання математики, зокрема вміння розв'язувати складні рівняння та нерівності, такі як показникові, не лише забезпечує базовий рівень компетентностей, а й сприяє розвитку критичного мислення, логіки та здатності приймати зважені рішення [5].

Таким чином, дослідження розвитку умінь учнів розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і їх систем є **актуальним** з огляду на потреби сучасної освіти, зокрема в контексті формування ключових компетентностей, подолання проблем у викладанні математики та забезпечення практичної спрямованості навчання.

У цьому контексті важливу роль відіграє компетентнісний підхід, який орієнтований на розвиток здатності учнів застосовувати математичні знання у реальних життєвих ситуаціях. Зокрема, це стосується не тільки вміння розв'язувати різні види рівнянь та нерівностей, що є основою для розуміння багатьох прикладних задач, а й принципового підходу до пошуку математичного рішення реальних задач. Такий підхід дозволяє не лише підвищити рівень математичної грамотності, але й сприяти формуванню в учнів навичок критичного мислення, що є необхідними для їхньої подальшої успішної професійної та особистісної реалізації. Однією з причин низького рівня засвоєння матеріалу є недостатня увага до компетентнісного підходу в навчанні математики, що включає розвиток не тільки знань, але й умінь, навичок і цінностей, необхідних для застосування математичних знань у реальних життєвих ситуаціях. Крім того, сучасна освіта вимагає інтеграції новітніх технологій у навчальний процес, зокрема програмних засобів, які можуть значно підвищити ефективність формування математичних компетентностей [18]. Все вище зазначене зумовило вибір теми кваліфікаційної роботи «Розвиток умінь учнів розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і їх систем» та обумовило її актуальність.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та розробити окремі компоненти методичної системи навчання старшокласників, спрямовані на ефективне формування математичних компетентностей та умінь учнів при розв'язуванні задач за допомогою рівнянь і їх систем.

Завдання дослідження, які необхідно виконати для досягнення мети:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну і методичну літературу, вивчити педагогічний досвід з теми дослідження для розкриття методичних та теоретичних основ розвитку математичних

- компетентностей та умінь учнів у контексті розв'язання задач за допомогою рівнянь та їх систем;
2. Розробити термінологічний апарат дослідження, зокрема уточнити трактовки таких понять: математична компетентність, математичне уміння, компетентнісний підхід, ключова компетентність та ін.;
 3. Виділити математичні компетентності та вміння, яких старшокласники повинні набути та визначити шляхи їх набуття в процесі вивчення методик, алгоритмів та послідовностей розв'язування задач за допомогою рівнянь та їх систем;
 4. Розробити методику навчання, яка сприяє набуттю математичних компетентностей, формуванню умінь та навичок розв'язання задач за допомогою рівнянь і їх систем;
 5. Створити систему задач, яка спрямована на підвищення рівня вмінь старшокласників розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і їх систем.

Об'єкт дослідження: процес формування математичних компетентностей та вмінь учнів під час розв'язування задач та у змістовій лінії «Рівняння» при вивченні курсу алгебри і початків аналізу в старшій школі.

Предмет дослідження: методика навчання розв'язуванню задач за допомогою рівнянь і систем рівнянь, спрямована на формування математичних компетентностей старшокласників.

Методи дослідження: *теоретичні* – аналіз та узагальнення інформації з навчально-методичної та психолого-педагогічної літератури щодо проблеми дослідження, історичний метод та порівняння підручників з точки зору можливостей для набуття математичних компетентностей учнів; *емпіричні* – моделювання освітнього процесу згідно розроблюваної методики; спостереження за діяльністю вчителя та процесом формування

математичних компетентностей учнів у навчанні алгебри і початків аналізу, аналіз педагогічного досвіду та напрацювань вчителів математики для набуття математичних компетентностей, проведення бесід з вчителями та учнями.

Практичне значення полягає в тому, що розроблена методика, матеріали та методичні рекомендації, орієнтовані на формування математичних компетентностей учнів у процесі вирішення прикладних задач та використання рівнянь і систем рівнянь як методу вирішення цих задач, можуть бути використані вчителями математики в їхній практичній професійній діяльності, учнями старшої школи для самостійного та подальшого набуття математичних компетентностей, а також студентами у процесі виробничої практики у закладах середньої освіти.

Структура та обсяг роботи: робота складається зі вступу, теоретичного і практичного розділів, висновків, списку використаних джерел,

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА ВМІНЬ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

1.1. Математичні компетентності. Особливості компетентнісного підходу.

У сучасних умовах реформування освітньої системи України, згідно з Концепцією Нової української школи (НУШ), математична компетентність є однією з ключових, що опановують учні на всіх етапах здобуття освіти. Основи нової моделі освіти, закріплені в Законі України «Про освіту» від 5 вересня 2017 року № 2145-VIII, передбачають впровадження компетентнісного підходу до навчання. Цей підхід узгоджується з рекомендаціями Європейського Парламенту та Ради ЄС щодо основних компетентностей для навчання впродовж усього життя (від 18 грудня 2006 року № 2006/962/ЄС) та відповідає актуальним потребам суспільства [32; 35].

Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти, ухваленим постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року № 898, математична компетентність охоплює не лише засвоєння математичних знань і розуміння теоретичних положень, а й уміння використовувати ці знання на практиці — для критичного аналізу інформації, розв'язання життєвих задач, та розвитку аналітичного мислення. Її формування є невід'ємною частиною освітнього процесу, оскільки сприяє розвитку логічного мислення, культури міркувань і здатності до самостійного прийняття рішень [14].

Математична компетентність охоплює п'ять взаємопов'язаних складових: мотиваційну, когнітивну, діяльнісну, ціннісно-рефлексивну та емоційно-вольову. Кожен із компонентів є невід'ємною частиною цілісної системи, яка не може функціонувати ізольовано.

- Мотиваційна складова визначає внутрішню готовність і прагнення здобувача освіти до опанування математичних знань. Йдеться про інтерес до

предмета, усвідомлення його значущості, бажання розвивати власні здібності та застосовувати математику у практичних ситуаціях. Мотивація є рушійною силою навчання: саме вона спонукає учня долати труднощі, шукати нові способи розв'язання задач і вдосконалювати власний досвід.

- Когнітивна складова передбачає володіння теоретичними та прикладними знаннями. Учень має розуміти основні математичні поняття, закони, формули, моделі, а також бачити їх зв'язок із реальними процесами.

- Діяльнісна складова охоплює практичні уміння й навички: виконання розрахунків, аналіз даних, побудову моделей, застосування геометричних і стохастичних понять. Учень має бути здатним розв'язувати як типові, так і нестандартні задачі, використовуючи математичні методи. Саме ця складова показує, що знання не залишаються теоретичними, а перетворюються на інструмент діяльності.

- Ціннісно-рефлексивна складова виражає усвідомлення значущості математики для особистого розвитку, соціального та професійного життя. Учень розуміє, що математичні знання допомагають у прийнятті рішень, плануванні, аналізі інформації. Важливою є здатність до самоспостереження й самооцінки: учень оцінює власні успіхи, бачить прогалини й прагне до самовдосконалення.

- Емоційно-вольова складова пов'язана з умінням керувати емоціями у процесі навчання, адекватно реагувати на труднощі та невдачі. Учень має проявляти наполегливість, силу волі й цілеспрямованість у розв'язуванні задач. Ця складова формує стійкість до стресу, здатність працювати в умовах обмеженого часу чи складних завдань, що є важливим для майбутньої професійної діяльності.

Таким чином, математична компетентність — це не лише знання й уміння, а цілісна система, що поєднує мотивацію, когнітивний розвиток, практичну діяльність, ціннісне ставлення та емоційно-вольову готовність. Її

формування забезпечує підготовку учня до активної участі в суспільному житті, подальшого навчання та професійної самореалізації.

У сучасній педагогіці поняття «математична компетентність» розглядається водночас як базова предметна та ключова компетентність. У рекомендаціях Європейської довідкової системи наголошується на її значенні як базової компетентності в галузі природничих наук і техніки. У документі «Ключові компетентності для навчання впродовж життя» математична компетентність визначається як здатність ефективно застосовувати арифметичні дії у повсякденному житті, а також розвивати логічне й просторове мислення за допомогою формул, моделей, графіків тощо.

Математична компетентність розглядається як складова ширшого поняття «компетентність», що охоплює здатність ефективно застосовувати набуті знання у різних життєвих та професійних ситуаціях, використовуючи критичне мислення й аналітичні навички.

За визначенням Н. М. Бібік, математична компетентність належить до базових міжпредметних компетентностей, які формуються у процесі навчання та проявляються у повсякденних життєвих контекстах. У класифікації О. В. Овчарук вона трактується як функціональна компетентність, спрямована на розв'язання прикладних задач і практичне використання математичних знань.

У працях українських педагогів попередніх років математична компетентність розглядалася як функціональна, що охоплює інтелектуальні навички, логічне та системне мислення, здатність до просторового уявлення й математичного моделювання. Такий підхід підтверджує її належність до ключових компетентностей, адже він передбачає використання знань і навичок у широкому спектрі життєвих ситуацій.

Важливим є також розмежування понять «компетенція» та «компетентність». Під компетенцією зазвичай розуміють сферу повноважень чи прав, тоді як компетентність означає рівень підготовленості, кваліфікації та здатності ефективно діяти. У математичному контексті компетенція

тракується як здатність користуватися набутим досвідом, а компетентність — як успішне досягнення результатів навчання завдяки цій здатності.

Проблеми структури та сутності понять «компетенція» і «компетентність» у сфері освіти досліджували Н. М. Бібік, Н. В. Кузьміна, Дж. Равен, С. П. Бондар, С. У. Гончарук, І. В. Родигіна. Визначення цих термінів також було запропоновано міжнародними організаціями — ЮНЕСКО, Європейським Союзом та Міжнародною комісією Ради Європи, що сприяло формуванню єдиної термінологічної бази для освітніх досліджень.

Загальні аспекти ключових компетентностей знайшли послідовне висвітлення у роботах Л. Л. Сушенцевої, Т. С. Лобанової, Л. С. Ващенко, О. В. Овчарук та С. Г. Кравець, що дозволяє детальніше зрозуміти структуру та функціонування цих понять у контексті освітніх стандартів. Загалом, математична компетентність є складовою ширшого поняття «компетентність» — здатність застосовувати знання у різних ситуаціях, володіння навичками критичного мислення для аналізу та раціонального використання інформації.

Н. М. Бібік визначає математичну компетентність як одну із ключових, що базуються на знаннях та вміннях, здобутих у процесі навчання. Вона належить до надпредметних базових компетентностей, які проявляються у різних контекстах, інтегруючи знання та вміння з інших сфер [2, с. 21].

У публікації класифікації ключових компетентностей О. В. Овчарук, математична входить до блоку функціональних компетентностей. Цей підхід акцентує увагу на її практичній цінності для вирішення задач і проблем у професійному житті [28; 29].

На початковому етапі досліджень українські педагоги розглядали математичну компетентність як різновид функціональної, що включала складові інтелектуального розвитку: здатність застосовувати логіку, математичні знання й вміння, системне мислення, навички просторового уявлення та математичного моделювання, а також вміння розв'язувати

складні логічні й математичні конструкції [30]. Водночас її характеристика дає підстави визначати математичну компетентність як ключову, адже функціональність полягає у готовності особистості використовувати набуті протягом життя знання й навички для розв'язання широкого спектра життєвих завдань у різних сферах діяльності.

Наукові дослідження засвідчують, що терміни «компетенція» та «компетентність» мають різні значення. Компетенція зазвичай трактується як коло повноважень чи прав, тоді як компетентність пов'язується з рівнем обізнаності, кваліфікації та авторитетності особистості. У сфері математичної освіти обидва поняття відіграють важливу роль у визначенні її якості. Компетенцію можна розуміти як можливість учня застосовувати набуті знання й досвід математичної діяльності, тоді як компетентність означає здатність ефективно реалізувати ці можливості та досягати поставлених навчальних цілей.

Розглянемо складові математичної компетентності особистості за С. А. Раковим [34]:

1. Процедурна компетентність – здатність учня розв'язувати типові математичні задачі, застосовувати відомі алгоритми, правила та формули. Вона відображає рівень володіння стандартними прийомами й методами, необхідними для виконання базових навчальних і практичних завдань. Напрямки її набуття:
 - використовувати на практиці алгоритми розв'язання типових задач;
 - відтворювати контекст задач, що виникають в індивідуальній та соціальній практиці та зводяться до типових задач;
 - систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміти розпізнавати типову задачу або зводити повну задачу до типової;
 - використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язання типових задач (підручники, довідники, інтернетресурси).

2. Логічна компетентність – уміння будувати міркування, робити висновки, доводити твердження, застосовувати закони логіки у процесі розв’язання задач. Напрямки її набуття:

- знати і використовувати на практиці поняттєвий апарат дедуктивних теорій (поняття (визначення понять, їх наочний смисл, обсяг, властивості, межі застосування, відношення між поняттями), висловлювання, предикати, логічні операції, аксіоми і теореми, доведення теорем, контрприклад до теорем тощо);
- будувати, удосконалювати та використовувати на практиці власну систему математичних уявлень на основі понятійного апарату дедуктивних теорій;
- відтворювати дедуктивні доведення теорем і доведення правильності процедур розв’язання типових задач;
- проводити дедуктивні обґрунтування правильності розв’язання задач і шукати логічні помилки у хибних дедуктивних міркуваннях;
- використовувати математичну та логічну символіку на практиці в оформленні математичних текстів.
- Технологічна компетентність – здатність використовувати сучасні інформаційні технології та математичні інструменти (програми, калькулятори, комп’ютерні моделі) для аналізу й розв’язання задач. Напрямки її набуття: розв’язувати типові задачі з використанням основних типів професійного математичного програмного забезпечення;

4. Дослідницька компетентність – це здатність учня самостійно ставити проблему, висувати гіпотези, будувати математичні моделі та перевіряти їх на практиці. Напрямки її набуття:

- формулювати (ставити) математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач;
- будувати аналітичні та інформаційні (комп’ютерні) моделі задач;

- висувати та емпірично перевіряти справедливність гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення, тощо), а також на власний досвід досліджень;
- інтерпретувати результати, отримані формальними методами, у термінах вихідної предметної області;
- систематизувати отримані результати: досліджувати межі застосування отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, а також модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики, інформатики, тощо.

5. Методологічна компетентність – це здатність учня усвідомлювати й застосовувати загальні методи математичної діяльності, розуміти принципи побудови математичних знань та їх структуру. Вона включає вміння обирати адекватні методи розв'язання задач, аналізувати правильність і доцільність застосованих способів, порівнювати різні підходи та робити узагальнення. Напрямки її набуття:

- володіти методологією дослідження індивідуально та суспільно значущих задач математичними методами та за допомогою засобів ІКТ;
- розуміти переваги та обмеженість математичних методів, оцінювати на практиці їх ефективність;
- володіти методологією використання професійних математичних пакетів комп'ютерної алгебри та динамічної геометрії для дослідження математичних задач, розуміти переваги та обмеженість використання пакетів комп'ютерного моделювання в галузі математики, оцінювати на практиці їх ефективність;
- аналізувати ефективність розв'язання задач математичними методами та за допомогою засобів ІКТ;
- формулювати математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих проблем;

- рефлексувати власний досвід розв'язання задач і подолання перешкод із метою постійного вдосконалення власної методології проведення досліджень [34].

Таким чином, математичну компетентність можна визначити як інтегративну здатність особистості, що поєднує математичні знання, уміння, навички та досвід математичної діяльності з особистісними якостями, які забезпечують прагнення, готовність і здатність розв'язувати проблеми та завдання, що виникають у реальних життєвих ситуаціях і потребують застосування математичних методів. Важливим аспектом є усвідомлення значущості як самого предмета, так і результатів діяльності.

Сучасні освітні реформи в Україні характеризуються переходом від традиційної знаннєвої парадигми до компетентнісної. У Концепції Нової української школи ключовим інструментом реалізації цього підходу визначено зміщення акценту з накопичення фактів на розвиток умінь і навичок, необхідних для успішної діяльності в різних сферах життя. Такий підхід орієнтує навчальний процес на формування цілісної системи основних компетентностей особистості, що забезпечує її готовність до самостійного мислення, творчої діяльності та прийняття рішень у нестандартних ситуаціях.

У сфері математичної освіти це означає відхід від інформаційно-накопичувальної моделі, де головним було засвоєння нормативно визначених знань і алгоритмів, та перенесення акценту на розвиток здатності учнів застосовувати індивідуальний досвід і досягнення у практичних, життєвих і творчих контекстах. Компетентнісний підхід у навчанні математики сприяє глибшому розумінню матеріалу, формує критичне мислення, підвищує мотивацію до навчання та забезпечує готовність учнів використовувати математичні знання у реальних ситуаціях.

Водночас упровадження компетентнісного підходу супроводжується низкою викликів. Воно потребує суттєвої адаптації навчальних програм, перегляду методологічних засад викладання, підвищення кваліфікації

педагогів та розробки нових інструментів оцінювання. Особливу складність становить визначення рівня сформованості компетентностей, адже традиційна система оцінювання не завжди здатна адекватно відобразити розвиток умінь, навичок і ціннісних орієнтацій учнів.

Таким чином, компетентнісний підхід у сучасній українській освіті, зокрема у викладанні математики, є не лише зміною методики, а й глибинною трансформацією освітньої парадигми, яка спрямована на підготовку учня до активної участі в суспільному житті та професійній самореалізації.

У сфері математичної освіти С. Д. Максименко наголошує, що формування математичних компетентностей безпосередньо пов'язане зі здатністю учнів опановувати способи мислення, необхідні для розв'язання різноманітних задач. Учений підкреслює, що навчальний процес має передбачати поступове ускладнення завдань та включення практичних вправ, які стимулюють розвиток творчого й логічного мислення. Такий підхід забезпечує не лише засвоєння знань, а й формування в учнів уміння ефективно застосовувати їх у навчальній та життєвій діяльності. [26].

Р. В. Павелків наголошує на комплексному характері мислення, підкреслюючи, що у процесі розв'язування задач учні постійно переходять від одного прийому мислення до іншого. Така динаміка забезпечує гнучкість і адаптивність пізнавальної діяльності, дозволяючи учням ефективно реагувати на різні типи завдань.

У цьому контексті О. В. Скрипченко акцентує увагу на функціонально-операційному компоненті мислення, який охоплює базові операції аналізу та синтезу. Саме вони визначають результативність навчання, адже забезпечують здатність учнів розкладати складні проблеми на елементи та інтегрувати отримані знання у цілісну систему.

І. С. Якиманська у своїх дослідженнях підкреслює важливість активізації продуктивної діяльності учнів шляхом створення умов для оволодіння прийомами розумової роботи. Це сприяє не лише якісному

засвоєнню навчального матеріалу, але й розвитку аналітичного та критичного мислення, що є основою для формування компетентностей у різних галузях.

М. Й. Варій та М. М. Фіцула здійснили класифікацію мисленнєвих операцій, серед яких систематизація, класифікація, аналіз, синтез, узагальнення, абстрагування та конкретизація. Вони запропонували методику поетапного формування цих операцій у навчальному процесі, наголошуючи на ролі вправ і задач, які сприяють упорядкуванню знань та розвитку здатності учнів до логічних міркувань.[5].

В аспекті системного підходу до мислення В. М. Осинська поділяє прийоми розумової діяльності на такі два типи: алгоритмічного та евристичного характеру. Вона зазначає, що вчитель повинен навчати учнів не лише виконувати, стандартні алгоритми, а й знаходити творчі рішення нетипових задач.

Українські науковці також внесли значний вклад у розробку проблем компетентнісного підходу. Наприклад, робоча група у складі: Н. М. Бібік,

Л. С. Ващенко, О. І. Локшина, О. І. Овчарук, Л. І. Паращенко, О. І. Пометун та С. М. Трубачова під керівництвом О. Я. Савченко запропонувала перелік ключових компетентностей, які включають навчальну, громадянську, загальнокультурну, інформаційну та інші компетентності, що формуються у процесі навчання та життєвої діяльності учнів [36].

Компетентнісний підхід у навчанні математики ґрунтується на інтеграції розумових операцій у навчальну діяльність, що забезпечує не лише засвоєння знань, а й розвиток мислення як інструменту пізнання. Українські науковці зробили вагомий внесок у дослідження механізмів формування математичного мислення, завдяки чому було створено ефективні методики навчання, орієнтовані на розвиток ключових компетентностей учнів. Ці концепції сприяють підготовці школярів до успішної адаптації у сучасному суспільстві, де важливими є не лише знання, а й уміння їх застосовувати.

Сутність компетентнісного підходу полягає у формуванні в учнів комплексного набору знань, умінь, навичок, смислових орієнтацій та досвіду діяльності, необхідних для успішної особистісної й соціально значущої активності в реальних умовах життя. Він передбачає перетворення навчального процесу на практично орієнтований: учні не просто накопичують інформацію, а навчаються використовувати її у різних життєвих ситуаціях, розвиваючи критичне мислення, творчість та здатність до самостійного прийняття рішень.

У такій парадигмі акцент у цілепокладанні зміщується з цілей учителя на потреби учня, що відповідає сучасним вимогам освіти. Важливо пам'ятати, що завдання педагога полягає не у підготовці майбутніх професійних математиків, навіть серед найобдарованіших учнів, а у формуванні всебічно розвиненої особистості. Ця робота здійснюється у тісній співпраці з учителями інших предметів, адже компетентнісний підхід передбачає міжпредметну інтеграцію та узгодженість освітніх впливів.

Таким чином, компетентнісний підхід є суттєвим кроком до нової якості математичної освіти, яка поєднує академічну ґрунтовність із практичною спрямованістю, забезпечуючи підготовку учня до активної участі у суспільному житті та професійній самореалізації.

Основні складові компетентнісного підходу:

- I. *Цілепокладання.* Компетентнісний підхід до цілепокладання у навчанні математики передбачає орієнтацію на потреби учня, а не лише на завдання вчителя. Він спрямований на формування здатності застосовувати знання й уміння у практичних життєвих ситуаціях, інтегруючи міжпредметні зв'язки та розвиваючи критичне й творче мислення. Цілі навчання включають не лише засвоєння матеріалу, а й розвиток ціннісних орієнтацій, досвіду діяльності та готовності діяти самостійно. Такий підхід забезпечує індивідуалізацію освітнього процесу, співпрацю між

учителями різних предметів і формування всебічно розвиненої особистості, що відповідає вимогам сучасної освіти.

- II. *Зміст освіти.* Компетентнісний підхід до змісту освіти передбачає його спрямованість не лише на засвоєння предметних знань, а й на формування ключових компетентностей, що забезпечують готовність учня діяти в реальних життєвих ситуаціях. Він інтегрує міжпредметні зв'язки, практичну спрямованість та діяльнісний компонент, поєднуючи знання з уміннями, навичками й ціннісними орієнтаціями. Такий зміст освіти враховує індивідуальні особливості учнів, стимулює розвиток критичного й творчого мислення та формує досвід діяльності, необхідний для успішної соціальної й професійної самореалізації.
- III. *Оцінювання результатів навчання.* Оцінювання результатів навчання в межах компетентнісного підходу спрямоване не лише на перевірку засвоєних знань, а й на визначення рівня сформованості ключових умінь, навичок та здатності застосовувати їх у практичних ситуаціях. Воно має враховувати індивідуальні досягнення учнів, їхній прогрес у розвитку критичного мислення, творчості та самостійності, що забезпечує більш об'єктивне й цілісне відображення освітніх результатів.

Педагогічні технології. Педагогічні технології в межах компетентнісного підходу спрямовані на організацію навчального процесу так, щоб учні не лише засвоювали знання, а й набували досвіду їх практичного застосування. Вони поєднують інтерактивні методи, проектну та дослідницьку діяльність, використання інформаційно-комунікаційних технологій і диференційоване навчання. Такий підхід забезпечує розвиток ключових компетентностей, формує критичне й творче мислення та сприяє становленню всебічно розвиненої особистості.

У процесі впровадження компетентнісного підходу трансформуються й принципи організації освітнього процесу. До ключових принципів та критеріїв цього підходу належать:

1) Впорядкованість навчальної діяльності учнів.

Методи навчання мають відповідати змісту й характеру завдань, а також умовам їх виконання. Важливим є раціональне розведення у часі та просторі різних навчально-виховних впливів, що забезпечує узгодженість дій усіх педагогів, які працюють з конкретним класом. Ефективна організація навчання передбачає гармонійне поєднання навчальної та позанавчальної діяльності учнів і вчителів, а також відповідність результатів навчання поставленим цілям і завданням.

2) Формування єдиного колективу.

Педагогічний колектив має діяти як спільнота однодумців, здатних до самоаналізу та творчої співпраці. В учнівському середовищі необхідно розвивати колективну самосвідомість і формувати відчуття спільності («почуття школи»). Шкільний колектив функціонує на основі правил, традицій і звичаїв, що підтримуються всіма учасниками освітнього процесу.

Наявність сформованого єдиного колективу:

- педагогічний колектив повинен діяти як союз однодумців, здатних до самоаналізу і творчої діяльності;
- в учнівському середовищі необхідно розвивати колективну самосвідомість і створювати відчуття спільноти («почуття школи»);
- шкільний колектив має жити за встановленими правилами, традиціями і звичаями, що підтримуються усіма учасниками освітнього процесу.

3) Інтегрованість навчально-виховних впливів.

Зусилля педагогів мають бути спрямовані на розробку та реалізацію єдиного підходу до навчання, який забезпечує безперервність виховного впливу. Освітній процес включає як систематичну роботу над технікою виконання математичних дій, так і періоди підвищеної творчої активності, коли учні застосовують набуті знання для розв'язання прикладних і міжпредметних завдань.

Отже, компетентнісний підхід у навчанні математики спрямований на формування здатності учнів не лише засвоювати знання, а й застосовувати їх у практичних ситуаціях, розвивати аналітичне мислення та навички вирішення проблем. Він відповідає вимогам сучасного світу, де важливо орієнтуватися в інформаційному просторі й адаптуватися до змін, забезпечуючи підготовку школярів до активного, свідомого та успішного життя в суспільстві.

1.2. Методи навчання математики, що забезпечують набуття математичних компетентностей

Процес формування математичних компетентностей неможливий без використання різноманітних методів навчання, які допомагають учням не лише засвоювати знання, але й розвивати вміння аналізувати, мислити критично та вирішувати проблеми. Важливо враховувати, що кожен з методів має свої переваги та може використовуватися на різних етапах навчання для досягнення найкращих результатів.

Методи навчання можна умовно розділити на активні та інтерактивні. Активні методи спрямовані на розвиток індивідуального мислення учня, тоді як інтерактивні методи орієнтовані на групову роботу та співпрацю.

Активні методи навчання:

1. Метод конкретної ситуації

Метод конкретної ситуації навчає учнів самостійно аналізувати і вирішувати різноманітні математичні проблеми. Учні не тільки розв'язують

задачі, але й вчать створювати свої власні завдання, що стимулює їхню креативність та здатність до глибокого розуміння матеріалу. Наприклад, розбір кількох способів розв’язання однієї задачі дозволяє учням розвивати гнучкість мислення та здатність адаптувати свої знання до різних контекстів.

2. Метод інциденту

Цей метод полягає в залученні учнів до участі в олімпіадах, конкурсах та інших змаганнях, де вони стикаються з нестандартними задачами та стресовими ситуаціями. Метод інциденту допомагає учням розвивати стійкість до стресу, а також вчить їх швидко адаптуватися до нових умов і знаходити ефективні рішення в обмежений час.

3. Метод мозкового штурму

Мозковий штурм – це метод, що стимулює учнів до генерації якомога більшої кількості ідей щодо вирішення певної проблеми. Цей підхід розвиває у них здатність швидко реагувати на запитання, висувати гіпотези та критично оцінювати запропоновані рішення. У процесі мозкового штурму учні розвивають також комунікативні навички, оскільки обговорення варіантів у групі є важливим елементом цього методу.

4. Метод занурення

Метод занурення створює умови, в яких учні повністю зосереджуються на вирішенні поставлених задач. Такий підхід дозволяє їм глибоко зануритися в матеріал, що сприяє кращому його засвоєнню та практичному застосуванню. Учні розвивають навички концентрації, аналізу та вирішення проблем, що є ключовими для успішного вивчення математики.

5. Метод евристичних питань

Цей метод полягає в тому, що учитель ставить перед учнями питання, на які немає очевидних відповідей, спонукаючи їх самостійно шукати рішення. Це розвиває в учнів аналітичні здібності, вміння будувати логічні ланцюжки, порівнювати різні варіанти та робити висновки. Важливою

складовою цього методу є можливість учнів формулювати власні запитання та досліджувати їх.

6. Дослідницький метод

Орієнтований на самостійне вирішення учнями поставлених перед ними проблем. Вчитель формулює проблему, яку учні повинні вирішити, використовуючи самостійно обрані методи та підходи. Цей метод сприяє розвитку критичного мислення, самостійності та здатності до глибокого аналізу ситуації. Учні отримують досвід проведення досліджень, що є важливим для формування навичок, необхідних для успішного навчання в подальшому.

7. Метод проєктів

Метод проєктів надає учням можливість самостійно або в групах розробляти та реалізовувати проєкти, що спрямовані на вирішення певних проблем або вивчення нових тем. Це стимулює учнів до творчого мислення, допомагає розвивати навички планування, дослідження та комунікації. Крім того, проєктна діяльність сприяє формуванню лідерських якостей, вміння працювати в команді та брати на себе відповідальність за результати спільної роботи. Математика в проєктній діяльності учнів слугує інструментом пізнання світу і засобом розвитку їхнього мислення та інтелектуальних здібностей. Вона також сприяє формуванню графічних, алгоритмічних та мовленнєвих навичок, допомагає структуровано й лаконічно викладати матеріал, полегшує візуалізацію, систематизацію й узагальнення знань через використання схем, таблиць і формул.

Інтерактивні методи навчання передбачають активну участь учнів у навчальному процесі через взаємодію з учителем і між собою. Ці методи орієнтовані на розвиток комунікативних навичок, вміння працювати в групі та самостійно приймати рішення.

1. Рольові ігри

Рольові ігри сприяють розвитку в учнів вміння викладати свої думки, враховувати думки інших та спільно приймати рішення. У процесі таких ігор учні вчаться не лише розв'язувати математичні задачі, але й ефективно спілкуватися, що є важливою частиною їхньої соціалізації.

2. Частково-пошуковий (евристичний) метод

Цей метод заохочує учнів до самостійного мислення та вирішення пізнавальних завдань під керівництвом учителя. Учні навчаються створювати та вирішувати проблемні ситуації, аналізувати їх, робити висновки, що сприяє розвитку їхніх когнітивних навичок та критичного мислення.

3. Метод проблемного викладу знань

Цей метод є перехідним між виконавчою та творчою діяльністю. У співпраці з учителем учні відкривають для себе нові знання, розвивають аналітичні здібності та здатність до самостійного мислення. Учні вчаться не просто запам'ятовувати інформацію, а й розуміти її сутність, застосовувати знання в нових ситуаціях.

4. Кейс-метод

Цей метод передбачає розбір конкретних виробничих або життєвих ситуацій, що дозволяє учням застосовувати свої знання на практиці. Учні формують вміння аналізувати реальні ситуації, приймати рішення та обґрунтовувати свої дії, що сприяє розвитку їхньої здатності до самостійного мислення.

5. Кооперативний метод

Цей метод використовується при роботі в групах, де учні спільно вирішують задачі, обмінюються ідеями та допомагають один одному в навчанні. Кооперативний метод сприяє розвитку комунікативних навичок, вміння працювати в команді та відповідальності за спільний результат.

Таким чином, поєднання активних та інтерактивних методів навчання створює сприятливі умови для формування математичних компетентностей у

школярів. Використання цих методів дозволяє учням не лише засвоювати математичні знання, але й розвивати вміння, необхідні для успішного застосування цих знань у реальному житті.

Методи навчання в дидактиці є важливим аспектом організації освітнього процесу. Вони визначають способи взаємодії між вчителем та учнями з метою досягнення навчальних цілей. За характером навчальної пізнавальної діяльності учнів серед методів навчання традиційно виділяють:

- *Пояснювально-ілюстративний метод* - використовується для введення нових понять, вивчення аксіом, теорем та розв'язування задач. Він допомагає учням засвоїти основні теоретичні положення, що стають фундаментом для подальшого навчання. Для цього методу ефективні вправи на виділення суттєвих ознак поняття і усвідомлення несуттєвих властивостей, що дозволяє учням краще зрозуміти матеріал.
- *Репродуктивний метод* - спрямований на закріплення нового матеріалу та перевірку його засвоєння. Учні відтворюють засвоєний матеріал через виконання вправ за зразком або алгоритмом. Цей метод допомагає формувати базові знання та вміння, які є необхідними для успішного вирішення більш складних задач.
- *Метод доцільних задач* - застосовується для кращого розуміння учнями нового матеріалу через підготовчі задачі, які допомагають їм «відкрити» нові поняття або теореми самостійно. Цей метод сприяє глибшому розумінню теми, оскільки учні самостійно формулюють означення та доведення.

Вибір методу навчання залежить від поставлених цілей, змісту навчального матеріалу, а також від вікових особливостей учнів. Правильне застосування методів навчання сприяє підвищенню пізнавальної активності, розвитку самостійності учнів та їх інтересу до навчання, а також формуванню в них вмінь використовувати набуті знання на практиці.

1.3. Класифікація задач та прийоми їх вирішення за допомогою рівнянь і систем рівнянь як компетентність.

Розв'язування задач за допомогою рівнянь і їх систем є одним із ключових методів у навчанні математики, що сприяє розвитку аналітичного мислення, логіки та вміння моделювати реальні ситуації. Цей підхід дозволяє учням не лише знаходити правильні відповіді, але й формувати математичну компетентність, яка є важливою для вирішення практичних і теоретичних проблем. У даній роботі розглядаються класифікація задач, що розв'язуються за допомогою рівнянь і систем рівнянь, основні прийоми їх вирішення, а також переваги цього методу в контексті педагогіки математики.

1.3.1 Класифікація задач за категоріями

Задачі, які розв'язуються за допомогою рівнянь і систем рівнянь, можна класифікувати за кількома критеріями, залежно від їх змісту, рівня складності та математичного апарату, що застосовується. Основні категорії включають:

1. За типом рівнянь:

- Лінійні рівняння (наприклад, задачі на рух, роботу, відсотки).
- Квадратичні рівняння (наприклад, задачі на площі, геометричні параметри).
- Раціональні, ірраціональні або показникові рівняння (задачі з економіки, логістики).

2. За змістом:

- Арифметичні задачі (наприклад, задачі на числа, пропорції, суміші).
- Геометричні задачі (наприклад, обчислення параметрів фігур, відстаней).
- Фізичні задачі (наприклад, задачі на рух, роботу, енергію).

- Економічні задачі (наприклад, задачі на витрати, прибуток, відсотки).

3. За кількістю невідомих:

- Задачі з однією невідомою (розв'язуються одним рівнянням).
- Задачі з двома або більше невідомими (вимагають складання системи рівнянь).

4. За рівнем складності:

- Базові (вимагають прямого застосування формул).

Складні (включають комбінацію різних типів рівнянь або нестандартний підхід до моделювання).

1.3.2 Прийоми розв'язування задач за допомогою рівнянь і систем рівнянь

Розв'язування задач за допомогою рівнянь і систем рівнянь передбачає використання структурованого алгоритму, який включає наступні етапи:

1. Аналіз умови задачі:

- Визначення відомих і невідомих величин.
- Виділення ключових зв'язків між змінними.

2. Вибір невідомих:

- Позначення невідомих величин через змінні (наприклад, (x) , (y)).
- У задачах із кількома невідомими важливо чітко визначити, що саме позначає кожна змінна.

3. Складання рівняння або системи рівнянь:

- Формулювання математичної моделі на основі умов задачі.
- Для задач із кількома невідомими складається система рівнянь, яка відображає всі зв'язки між змінними.

4. Розв'язання рівняння або системи рівнянь:

- Для одного рівняння: спрощення, перенесення членів, знаходження кореня.

- Для систем рівнянь: використання методів підстановки, додавання/віднімання, графічного методу або матричних методів (для складних систем).
- Приклад: для системи $\{ 2x + y = 5; x - y = 1; \}$ можна використати метод додавання, щоб отримати $(3x = 6)$, звідки $(x = 2)$, а потім знайти $(y = 1)$.

5. Перевірка та інтерпретація результатів:

- Перевірка відповідності отриманих значень умові задачі.
- Формулювання відповіді у контексті задачі (наприклад, вказівка одиниць вимірювання).

1.3.3 Основні методи розв'язання систем рівнянь

- Метод підстановки: Одна змінна виражається через іншу і підставляється в інше рівняння.
- Метод додавання/віднімання: Рівняння додаються або віднімаються для усунення однієї зі змінних.
- Графічний метод: Використовується для знаходження точки перетину графіків рівнянь (ефективний для наочності).
- Матричний метод: Застосовується для складних систем із великою кількістю змінних, використовуючи матриці та визначники.

1.3.4 Переваги використання рівнянь і систем рівнянь у розв'язуванні задач

Обґрунтувати використання рівнянь і систем рівнянь як методу розв'язування задач можна з декількох точок зору:

1. Універсальність методу:

- Рівняння та системи рівнянь дозволяють розв'язувати задачі різного типу (арифметичні, геометричні, економічні тощо), що робить цей метод універсальним інструментом у математиці.

2. Розвиток аналітичного мислення:

- Процес складання рівнянь вимагає аналізу умови задачі, виділення суттєвих зв'язків і побудови математичної моделі, що сприяє розвитку логічного та критичного мислення.

3. Практична спрямованість:

- Використання рівнянь дозволяє моделювати реальні життєві ситуації (наприклад, розрахунок витрат, планування маршрутів), що відповідає компетентнісному підходу в освіті.

4. Чіткість і структурованість:

- Алгоритм розв'язання задач за допомогою рівнянь є чітким і структурованим, що полегшує навчання учнів і допомагає уникнути помилок.

5. Можливість перевірки:

- Отримані розв'язки можна перевірити, підставивши значення у вихідні рівняння, що підвищує впевненість учнів у правильності своїх дій.

6. Підготовка до складніших математичних концепцій:

- Робота з рівняннями та системами рівнянь формує базу для вивчення вищої математики, зокрема алгебри, математичного аналізу та програмування.

Отже, застосування рівнянь та систем рівнянь як методу розв'язування задач виступає дієвим інструментом у навчанні математики, адже воно сприяє формуванню ключових компетентностей учнів. Класифікація задач допомагає педагогам упорядковувати навчальний матеріал, а чітко визначені способи їх розв'язання забезпечують системність і структурованість освітнього процесу. Універсальність цього методу, його здатність розвивати аналітичне мислення та практична спрямованість роблять його особливо важливим у реалізації компетентнісного підходу. Перспективним напрямом подальших досліджень є створення методичних рекомендацій для вчителів щодо ефективної

інтеграції даного методу у навчальний процес із використанням сучасних педагогічних технологій.

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Методика формування математичних компетентностей у процесі розв'язання рівнянь та їх систем

У сучасній методиці навчання математики важливим є не лише добір задач, а й спосіб їх подання та розв'язання. Одні й ті самі математичні моделі можуть бути використані по-різному залежно від методу організації навчальної діяльності. Саме тому доцільно розглядати задачі не лише за типами рівнянь, а й за методами роботи з ними, що дозволяє формувати різні групи компетентностей учнів.

У цьому пункті подано приклади задач, які реалізуються через різні методи навчання: метод конкретної ситуації; евристичний метод; дослідницький метод; метод проєктів.

Такий підхід забезпечує:

комплексність у формуванні математичних, практичних, соціальних та дослідницьких компетентностей;

міжпредметність, адже задачі інтегрують математику з фізикою, економікою, екологією, біологією;

мотивацію, оскільки учні бачать практичну значущість математики у власному житті;

гнучкість мислення, бо кожен метод пропонує різні стратегії розв'язання.

2.1.1 Метод конкретної ситуації

Метод конкретних ситуацій посідає важливе місце у сучасній педагогіці, адже він поєднує теоретичні знання з практичним їх застосуванням у реальних або змодельованих умовах. Його використання активізує навчальний процес, робить учнів учасниками аналізу проблеми та пошуку рішень, а не пасивними слухачами.

Завдяки цьому методу формується аналітичне мислення, здатність працювати з інформацією, виділяти головне й аргументувати власну позицію. Крім того, він сприяє розвитку життєвих компетентностей – уміння приймати рішення в умовах невизначеності, працювати в команді, комунікувати та співпрацювати.

Гнучкість і міждисциплінарність методу дозволяють застосовувати його в різних галузях – від математики й економіки до історії та педагогіки, що робить його одним із найефективніших інструментів сучасної освіти.

Задача 1

Тема: Лінійні функції та їх графіки.

Компетентності, які формує:

- Уміння моделювати реальні фінансові ситуації через рівняння
- Навички аналізу функцій та порівняння вартості
- Критичне мислення при виборі оптимального розв'язання

Задача: Шкільний медіапроект обирає між двома тарифами на хмарне сховище:

Тариф А: абонплата 300 грн/міс + 2 грн за кожний гігабайт понад 100 ГБ.

Тариф В: абонплата 180 грн/міс + 3 грн за кожний гігабайт понад 50 ГБ.

Запитання:

1. Знайди обсяг використання (ГБ) за місяць, при якому плата за тарифи буде однаковою (точка байдужості).
2. Для якого обсягу використання тариф А дешевший? Для якого дешевше тариф В?
3. Інтерпретуй отримані значення: який тариф обрати за прогнозованого споживання.

Розв'язання: Нехай x — обсяг використання (ГБ) за місяць.

Запиши вартість обох планів як лінійні функції:

$$C_A(x) = 300 + 2(x - 100)$$

$$C_B(x) = 180 + 3(x - 50)$$

Питання 1: $C_A(x) = C_B(x)$

$$300 + 2(x - 100) = 180 + 3(x - 50)$$

$$300 + 2x - 200 = 180 + 3x - 150$$

$$2x + 100 = 3x + 30$$

$$x = 70$$

Якщо $x < 70$: $\rightarrow$ Тариф В дешевший.

Якщо $x > 70$: $\rightarrow$ Тариф А дешевший.

Інтерпретація

- Якщо прогнозоване споживання менше 70 ГБ на місяць $\rightarrow$ вигідніше брати Тариф В.
- Якщо прогнозоване споживання більше 70 ГБ на місяць $\rightarrow$ вигідніше брати Тариф А.
- Якщо використання близько 70 ГБ $\rightarrow$ обидва тарифи однакові, можна обирати за іншими критеріями (зручність, додаткові послуги).

Задача 2

Тема: Системи лінійних рівнянь з двома змінними.

Компетентності, які формує:

- Вміння складати систему рівнянь на основі умов задачі
- Навички інтерпретації результатів у контексті реального попиту
- Соціально-економічна грамотність

Задача: На шкільний фестиваль продають два типи квитків: стандарт і преміум. Загалом продали 420 квитків. Стандарт коштує 150 грн, преміум — 300 грн. Дохід склав 78 000 грн.

Запитання:

1. Знайди x і y .
2. Перевір, чи узгоджуються значення з реалістичним попитом (частка преміум).
3. Як зміниться система при новій ціні 270 грн за преміум?

Розв'язання: Нехай x — кількість стандартних квитків, y — преміум. Склади систему:

$$\begin{cases} x + y = 420 \\ 150x + 300y = 78000 \end{cases}$$

$$x = 420 - y$$

$$150 * (420 - y) + 300y = 78000$$

$$63000 - 150y + 300y = 78000$$

$$150y = 15000$$

$$y = 100$$

$$x = 320$$

Отже продали 320 звичайних і 100 преміум квитків, що виглядає цілком реалістично.

При ціні 270 грн за преміум:

$$\begin{cases} x + y = 420 \\ 150x + 270y = 78000 \end{cases}$$

$$63000 - 150y + 270y = 78000$$

$$120y = 15000$$

$$y = 125$$

$$x = 295$$

Отже кількість преміум квитків збільшиться.

Задача 3

Тема: Системи рівнянь. Задачі на суміші та концентрації.

Компетентності, які формує:

- Уміння застосовувати математику в хімії
- Навички роботи з відсотками та концентраціями
- Міжпредметна інтеграція

Задача: Лаборантам треба приготувати 1 л розчину з концентрацією 25%. Є два розчини: 15% і 40%.

Розв'язання: Нехай x — об'єм 15%-го розчину, y — об'єм 40%-го, y мл.

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 15x + 40y = 25 * 1000 \end{cases}$$

$$x = 1000 - y$$

$$15(1000 - y) + 40y = 25 * 1000$$

$$15000 - 15y + 40y = 25000$$

$$25y = 10000$$

$$y = 400_{\text{мл}}$$

$$x = 600_{\text{мл}}$$

Задача 4

Тема: Експоненціальні рівняння. Логарифми.

Компетентності, які формує:

- Уміння працювати з експоненціальними моделями
- Навички застосування логарифмів для розв'язання рівнянь
- Фінансова грамотність

Задача: Фонд класу інвестує 20 000 грн під 12% річних, капіталізація щорічна. Мета — 35 000 грн.

Розв'язання: Використай формулу складних відсотків:

$$35000 = 20000 * (1 + 0,12)^t$$

$$(1,12)^t = 1,75$$

$$t = \frac{\ln 1,75}{\ln 1,12}$$

$$t = 4,94 \approx 5 \text{ років}$$

Задача 5

Тема: Експоненціальні функції та рівняння.

Компетентності, які формує:

- Уміння застосовувати експоненціальні рівняння до фізичних процесів
- Навички роботи з параметрами моделі
- Критичне мислення щодо обмежень моделі

Задача: Напій охолоджується в кімнаті з температурою $T = 22^{\circ}\text{C}$.

Початкова температура $T_0 = 80^{\circ}\text{C}$. Через 10 хв температура $T_k = 50^{\circ}\text{C}$.

Знайти час досягнення 30°C

Модель: Закон охолодження Ньютона:

$$T(t) = T + (T_0 - T)e^{-kt}$$

Спершу знайди k з рівняння:

$$50 = 22 + (80 - 22)e^{-10k}$$

$$e^{-10k} = \frac{28}{48}$$

$$e^{-10k} = 0,4828$$

$$-10k = \ln 0,4828$$

$$k = 0,0728$$

Потім розв'яжи щодо t із:

$$30 = 22 + (80 - 22)e^{-0,0728t}$$

$$-0,0728t = \ln 0,1379$$

$$t \approx 27,3$$

Відповідь: 28 хвилин

Задача 6

Тема: Тригонометричні функції.

Компетентності, які формує:

- Уміння застосовувати тригонометрію до практичних задач
- Навички роботи з кутами та відношеннями
- Просторове мислення

Задача: Проектор висить на висоті 6 м. Потрібно освітити центр сцени, що на відстані 7 м по горизонталі від опори. Знайти кут нахилу променя до горизонталі. Чи не перевищує кут технічні обмеження кріплення (наприклад до 40°)

Розв'язання: Використай тригонометричне співвідношення:

$$\tan \theta = \frac{6}{7}$$

$$\theta = \tanh^{-1} \frac{6}{7}$$

$$\theta = 40^\circ$$

2.1.2 Метод евристичних питань

Метод евристичних питань є одним із найефективніших засобів активізації пізнавальної діяльності учнів, адже він спонукає їх самостійно відкривати нові знання, формулювати гіпотези та знаходити способи розв'язання задач. На відміну від традиційного пояснення, цей метод ґрунтується на постановці продуманих запитань, які ведуть учнів від відомого до невідомого, від простого до складного.

Такий підхід формує навички критичного та творчого мислення, розвиває вміння аналізувати умови, робити висновки та перевіряти їх на практиці. Крім того, метод евристичних питань сприяє розвитку дослідницьких компетентностей, адже учні не отримують готових алгоритмів, а самі конструюють їх у процесі пошуку. Це робить навчання більш осмисленим, мотивуючим і наближеним до реальних потреб сучасної освіти.

Задача 1

Тема: Експоненціальні рівняння. Логарифми.

Задача: Банк пропонує вклад у 10 000 грн під 12% річних із щорічною капіталізацією. Через скільки років вклад зросте до 20 000 грн?

Евристичні питання:

Що означає “капіталізація відсотків”?

Як записати формулу для суми вкладу через t років?

Яке рівняння отримаємо для невідомого t ?

Чому тут потрібно використати логарифм?

Як інтерпретувати отриманий результат у реальному житті?

Компетентності:

- Математичні: побудова моделі складних відсотків, використання логарифмів для знаходження невідомої змінної.
- Фінансова грамотність: розуміння капіталізації відсотків, оцінка строків подвоєння вкладу.
- Дослідницькі: побудова та перевірка моделі, обґрунтування вибору математичного інструменту.
- Критичне мислення: аналіз реалістичності моделі, зіставлення з практикою банківських продуктів.
- Інформаційно-цифрові: використання калькулятора чи програм для обчислень і візуалізації.
- Комунікативні: пояснення результату зрозумілою мовою, аргументування вибору.
- Моделювання реальних процесів: переклад життєвої ситуації у математичну форму.

Задача 2

Тема: Квадратні рівняння. Задачі на рух.

Задача: М'яч кинули під кутом до горизонту зі швидкістю 20 м/с. Потрібно знайти час, коли він знову буде на висоті 5 м.

Евристичні питання:

Яке рівняння описує висоту тіла при русі під дією сили тяжіння?

Чому це рівняння є квадратичним?

Які змінні відомі, а які невідомі?

Чому можуть бути два розв'язки?

Як пояснити фізично кожен із них?

Компетентності:

- Математичні: побудова й аналіз квадратичної моделі висоти $h(t)$, розв'язання квадратного рівняння, інтерпретація двох коренів у часі.
- Фізичні: застосування рівнянь руху з прискоренням вільного падіння, розуміння параметрів (початкова швидкість, кут, прискорення g), зв'язок моделі з реальним польотом.

- Дослідницькі: визначення відомих/невідомих змінних, постановка рівняння для заданої висоти, перевірка коренів на фізичну адекватність (часи > 0 , у межах польоту).
- Критичне мислення: пояснення, чому виникає квадратичність (вертикальна складова руху), чому з'являються два розв'язки (висота досягалася на підйомі й на спуску), відбір релевантного часу за контекстом.

Задача 3

Тема: Тригонометричні функції. Практичні застосування.

Задача: Сходи довжиною 5 м приставлені до стіни так, що їх нижній кінець стоїть на відстані 3 м від стіни. Знайти кут нахилу сходів до землі.

Евристичні питання:

Який трикутник утворюється?

Які сторони відомі?

Яку тригонометричну функцію можна використати?

Як скласти рівняння для кута?

Як перевірити результат (чи реалістичний кут)?

Компетентності:

- Математичні: застосування тригонометричних функцій у практичних ситуаціях; побудова рівняння для кута нахилу; перевірка результату на реалістичність.
- Практичні: уміння використовувати математику для вирішення побутових і технічних задач; орієнтування у просторі, оцінка безпечності конструкцій.
- Дослідницькі: постановка запитань (які сторони відомі, яку функцію застосувати); вибір оптимального способу розв'язання; інтерпретація отриманого результату.
- Критичне мислення: аналіз відповідності математичного результату реальній ситуації; оцінка, чи кут є практично можливим і безпечним.
- Комунікативні: пояснення розв'язання зрозумілою мовою; аргументування вибору функції та методу.

Задача 4

Тема: Лінійні рівняння, пропорції.

Витрати води у школі

Задача: У школі встановлено 20 кранів. Якщо кожен протікає зі швидкістю 0,2 л/хв, то скільки літрів води буде втрачено за добу? Як зміниться результат, якщо відремонтувати половину кранів?

Компетентності: математичні (обчислення), екологічна грамотність, практичні (бережливе ставлення до ресурсів).

Задача 5

Тема: Раціональні рівняння, фізика.

Теплоізоляція класу

Задача: Вікно має площу 4 м^2 , коефіцієнт теплопередачі — $2,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Якщо різниця температур між класом і вулицею становить 15°C , то яка кількість тепла втрачається за годину?

Компетентності: математичні (робота з формулами), міжпредметні (фізика), екологічні (енергозбереження).

Задача 6

Тема: Системи лінійних рівнянь.

Розподіл часу на підготовку

Задача: Учень має 12 годин для підготовки до трьох предметів: математики, фізики та історії. Він вирішив витратити на математику вдвічі більше часу, ніж на історію, а на фізику — стільки ж, як на математику. Скільки годин він витратить на кожен предмет?

Тема: Системи лінійних рівнянь.

Компетентності: математичні (системи рівнянь), організаційні (планування часу), критичне мислення.

2.1.3 Дослідницький метод

Дослідницький метод у навчанні математики спрямований на формування в учнів уміння самостійно відкривати нові знання через

постановку проблеми, висування гіпотез, побудову математичної моделі та її перевірку на практиці.

Він активізує пізнавальну діяльність, розвиває критичне мислення та навички аналізу, а також показує, що математичні поняття мають безпосереднє застосування у реальних життєвих ситуаціях.

Саме тому задачі, подані нижче, орієнтовані на дослідницький пошук і демонструють практичну цінність математики.

Задача 1

Тема: Експоненціальні рівняння. Логарифми.

Задача: Учні досліджують, як змінюється час подвоєння вкладу залежно від відсоткової ставки.

Проблема: “За якої ставки вклад у 10 000 грн подвоїться за 5 років?”

Учні самі складають рівняння:

$$20000 = 10000 * (1 + r)^5$$

Досліджують різні значення r , знаходять потрібну ставку.

Висновок: чим більша ставка, тим швидше відбувається подвоєння.

Задача 2

Тема: Квадратні рівняння.

Задача: Дослідити, як змінюється час падіння тіла з висоти h залежно від прискорення вільного падіння g .

Учні складають рівняння:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Висувають гіпотезу: “Чим більше g , тим менший час падіння”.

Перевіряють для різних значень h і g .

Висновок: підтверджують закономірність.

Задача 3

Тема: Тригонометричні функції.

Задача: Дослідити, як змінюється кут нахилу панелей залежно від широти місцевості.

Учні складають рівняння:

$$\theta = 90^\circ - \alpha$$

Перевіряють для різних широт (Київ, Одеса, Львів).

Висновок: чим північніше місцевість, тим більший кут нахилу.

Задача 4

Тема: Ірраціональні рівняння, пропорції.

Задача: Учні мають карту з масштабом. Завдання виміряти відстань між містами, перевести її у реальні кілометри, перевірити за онлайн-картою.

Компетентності: математичні (масштаб, пропорції), географічні, практичні (орієнтування).

Задача 5

Тема: Логарифмічні рівняння.

Ситуація: Учні вимірюють інтенсивність звуку різних джерел (розмова, музика, дзвінок).

Завдання: Використати формулу логарифмічного рівняння для визначення рівня шуму

$$L = 10 * \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

порівняти результати.

Компетентності: математичні (логарифми), міжпредметні (фізика), практичні (оцінка впливу шуму).

Задача 6

Тема: Системи рівнянь, комбінаторика.

У школі є кілька класів і обмежена кількість кабінетів.

Завдання: Учні мають скласти модель розкладу так, щоб уникнути накладок.

Компетентності: математичні (моделювання систем), організаційні (планування часу), соціальні (координація роботи).

2.1.4 Метод проєктів

Метод проєктів у навчанні математики орієнтований на практичну діяльність учнів, яка поєднує здобуття знань із їхнім застосуванням у реальних або наближених до життя ситуаціях. Він передбачає постановку проблеми, самостійний пошук шляхів її розв'язання, створення продукту (проєкту) та його презентацію.

Такий підхід формує дослідницькі, комунікативні та соціальні компетентності, розвиває критичне мислення й уміння працювати в команді. Задачі, що подані далі, демонструють можливості методу проєктів у математиці та показують його практичну цінність для учнів.

Проект “Шкільна їдальня”

Назва проєкту: “Шкільна їдальня: оптимальне меню”

Тема: Системи лінійних рівнянь. Задачі на пропорції та оптимізацію.

Мета:

навчити учнів застосовувати системи рівнянь для моделювання реальних ситуацій;

розвивати навички планування та аналізу;

формувати здоров'язбережувальну та фінансову грамотність.

Проблемна ситуація

Учні мають скласти меню для класу так, щоб загальна вартість обіду не перевищувала 200 грн, калорійність була не менше 2500 ккал.

У їдальні є два варіанти страв:

Комплекс А: 50 грн, 600 ккал.

Комплекс В: 80 грн, 1000 ккал.

Етапи роботи учнів

Формулювання проблеми: Як скласти меню, щоб воно було і дешевим, і поживним?

Висунення гіпотез: Яке співвідношення страв може підійти?

Складання системи рівнянь/нерівностей: Учні записують умови задачі.

Розв'язання: Знаходять допустимі значення x і y .

Перевірка: Чи відповідає результат умовам (вартість ≤ 200 грн, калорійність ≥ 2500 ккал)?

Презентація: Учні представляють своє меню класу.

Компетентності, що формуються:

математичні: уміння складати й розв'язувати системи рівнянь та нерівностей.

дослідницькі: постановка проблеми, висунення гіпотез, перевірка результатів.

соціальні: робота в групі, прийняття рішень, презентація.

практичні: фінансова грамотність, здоров'язбережувальна компетентність.

Проект “Екскурсія”

Методичний сценарій рольової гри

Тема: Лінійні рівняння та системи рівнянь. Практичні застосування.

Назва гри: “Організація класної екскурсії”

Мета:

навчити учнів застосовувати рівняння та системи рівнянь для розрахунків;

розвивати комунікативні та соціальні навички;

формувати фінансову грамотність і відповідальність.

Ролі учнів

Організатор екскурсії — відповідає за планування маршруту та кількість учасників.

Бухгалтер — складає кошторис, рахує витрати на транспорт і квитки.

Учні-учасники — пропонують варіанти, перевіряють, чи вистачає бюджету.

Контролер — перевіряє правильність розрахунків і відповідність умовам.

Ситуація:

Клас планує екскурсію. Транспорт коштує 3 000 грн. Квиток до музею — 120 грн з учня. Загальний бюджет — 6 600 грн.

Питання: Скільки учнів може поїхати на екскурсію?

(завдання можна ускладнити, додати ще один музей, знижки кожному третьому відвідувачу, тощо)

Математична модель:

Нехай x — кількість учнів.

$$3000 + 120x = 6600$$

Хід гри

Вступ (5 хв): Учитель пояснює ролі та роздає картки.

Постановка проблеми (5 хв): Організатор озвучує умови: транспорт + квитки = бюджет.

Робота в ролях (10 хв):

Бухгалтер складає рівняння.

Учні пропонують різні значення x .

Контролер перевіряє, чи відповідає рівняння бюджету.

Розв'язання (10 хв):

$$\text{Рівняння: } 3000 + 120x = 6600.$$

$$120x = 3600.$$

$$x = 30.$$

Отже, на екскурсію може поїхати 30 учнів.

Презентація результатів (5 хв): Учні представляють кошторис і пояснюють, як дійшли до висновку.

Рефлексія (5 хв):

Що було найскладніше?

Як допомогли ролі у вирішенні задачі?

Де ще можна застосувати такий підхід?

Очікувані результати

Учні вміють складати рівняння з реальної ситуації.

Вміють інтерпретувати результат у практичному контексті.

Розвивають навички співпраці, комунікації та відповідальності.

Проект “Шлях до школи”

Конспект уроку (метод проєктів + рольова гра)

Тема: Оптимальний маршрут до школи

Мета:

навчальна: навчити учнів застосовувати лінійні рівняння та системи рівнянь для моделювання реальних ситуацій;

розвивальна: розвивати критичне мислення, уміння аналізувати й порівнювати варіанти;

виховна: формувати навички планування часу, відповідальність за власний вибір.

1. Організаційний момент

Учитель: “Сьогодні ми працюємо над проєктом, який стосується кожного з вас. Ми дослідимо, як обрати найкращий маршрут до школи — пішки чи автобусом.”

Учні об’єднуються у групи, отримують ролі.

2. Постановка проблеми

Учитель пропонує ситуацію:

“Відстань до школи — 6 км. Учень може йти пішки зі швидкістю 4 км/год або їхати автобусом зі швидкістю 40 км/год, але чекати автобус 15 хв. Який варіант швидший?”

Учні формулюють мету проєкту: скласти математичну модель маршруту та визначити оптимальний варіант.

Ролі:

Аналітик руху — складає рівняння для часу руху пішки та автобусом.

Економіст часу — порівнює результати, враховує очікування автобуса.

Еколог — оцінює вплив вибору на довкілля (пішки — екологічно, автобус — витрати пального).

Менеджер рішень — презентує висновок групи.

Хід гри:

Аналітик складає рівняння:

Економіст часу порівнює: автобус швидший.

Еколог додає аргумент: пішки — корисно для здоров'я, екологічно.

Менеджер рішень узагальнює: вибір залежить від пріоритетів (час чи екологія).

4. Дослідницький етап

Учні моделюють інші варіанти:

якщо відстань 2 км — який варіант швидший?

якщо чекати автобус 30 хв — чи зміниться вибір?

Будують таблицю: відстань → час пішки → час автобусом → оптимальний варіант.

Формулюють висновки.

5. Презентація результатів

Кожна група презентує свій проєкт:

“Для коротких відстаней вигідніше йти пішки.”

“Якщо автобус затримується, пішки може бути швидше.”

“Пішки — екологічно, автобус — економія часу.”

6. Рефлексія

Учитель: “Що було найскладніше у вашій ролі? Як ви приймали рішення?”

Учні діляться досвідом: аналітик — про розрахунки, економіст — про порівняння, еколог — про екологічні аспекти, менеджер — про узагальнення.

Формується висновок: математика допомагає приймати рішення у повсякденному житті.

Компетентності, що формуються:

Математичні: складання рівнянь, робота з пропорціями, аналіз даних.

Практичні: планування часу, вибір оптимального рішення.

Соціальні: командна робота, комунікація, презентація результатів.

Дослідницькі: постановка проблеми, побудова моделі, перевірка гіпотез.

Розглянуті приклади задач показують, що використання різних методів навчання математики — методу конкретних ситуацій, евристичних питань, дослідницького методу та методу проєктів — забезпечує комплексний розвиток учнів.

Кожен із методів має власні переваги: кейс-метод наближає математику до реальних життєвих проблем; евристичні питання формують уміння самостійно відкривати знання; дослідницький метод розвиває навички моделювання та перевірки гіпотез; метод проєктів інтегрує математику з іншими сферами та формує соціальні компетентності.

У сукупності вони створюють багатогранний освітній простір, де математика постає не лише як система формул, а як інструмент для розум

2.2 Класифікація задач та методичні приклади їх розв'язання

Задачі, які розв'язуються за допомогою рівнянь та їх систем, займають особливе місце у навчанні математики, адже вони поєднують теоретичні знання з практичним застосуванням і формують ключові математичні компетентності. Різноманітність таких задач дозволяє розвивати в учнів уміння моделювати реальні процеси, аналізувати умови, знаходити оптимальні способи розв'язання та інтерпретувати отримані результати.

Для ефективної організації навчального процесу важливо класифікувати задачі за типом рівнянь, змістом, кількістю невідомих та рівнем складності. Така класифікація створює основу для розробки методики навчання, яка сприяє поступовому формуванню навичок і забезпечує системний підхід до розвитку математичних компетентностей.

Класифікація за типом рівнянь є найбільш релевантною для розробки методики навчання, спрямованої на формування умінь і навичок розв'язання задач з наступних причин:

- Прямий зв'язок із математичним апаратом

Учні одразу бачать, які саме рівняння застосовуються (лінійні,

квадратичні, показникові тощо), і можуть тренувати конкретні методи розв'язання. Це робить навчання більш структурованим.

- Універсальність

Один і той самий тип рівнянь використовується в задачах різного змісту: економічних, фізичних, геометричних. Тому класифікація за типом рівнянь дозволяє охопити широкий спектр прикладів без дублювання.

- Методична зручність

Викладач може будувати навчальні блоки поступово: від простих лінійних рівнянь до складних систем чи показникових. Це відповідає принципу «від простого до складного».

- Формування компетентностей

Така класифікація допомагає учням усвідомити, що різні типи рівнянь — це інструменти для моделювання реальних процесів. Вони вчаться вибирати потрібний апарат залежно від задачі.

- Легкість у контролі та оцінюванні

Завдання можна групувати за типом рівнянь, що дає можливість чітко перевіряти засвоєння кожного виду математичних методів.

Ця класифікація дозволяє не лише систематизувати задачі, а й чітко показати учням, які математичні інструменти застосовуються для розв'язання різних проблем. Саме тому доцільно перейти до конкретних прикладів задач, які демонструють практичне використання цієї класифікації та її значення у формуванні компетентностей.

1. Лінійні рівняння

- Задача на рух: Автобус виїхав із міста о 9:00 зі швидкістю 60 км/год. Через 30 хвилин із того ж міста виїхала легкова машина зі швидкістю 90 км/год. Через скільки годин машина наздожене автобус?
- Задача на роботу: Один робітник виконує завдання за 12 годин, інший — за 8 годин. За скільки годин вони виконають завдання разом?

- Задача на відсотки: Клас зібрав 4 500 грн на екскурсію. 40% суми витратили на транспорт, решту — на квитки. Скільки коштують квитки?

2. Квадратні рівняння

- Задача на площу: Площа квадрата дорівнює 196 см^2 . Знайти його сторону.
- Задача на геометрію: Висота рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а основа — 16 см. Знайти бічну сторону.
- Задача на рух тіл: М'яч підкинули вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Через який час він буде на висоті 15 м?

3. Раціональні рівняння

- Задача на потік: Човен пливе за течією річки 24 км за 3 години, а проти течії — 18 км за 3 години. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.
- Задача на пропорції: Два робітники виконують завдання: перший за 6 годин, другий за 9 годин. За скільки годин вони виконають завдання разом?

4. Ірраціональні рівняння

- Задача на геометрію: Діагональ квадрата дорівнює 10 см. Знайти його сторону.
- Задача на відстань: Відстань між двома точками $A(3;x)$ і $B(7;1)$ дорівнює 10. Знайти x .

6. Логарифмічні рівняння

- Задача на хімію: Визначити рН розчину, якщо концентрація іонів водню дорівнює 10^{-4} моль/л.
- Задача на фінанси: Вклад у 5 000 грн під 10% річних із щорічною капіталізацією. Через скільки років сума зросте до 8 000 грн?

7. Системи рівнянь

- Задача на суміші: Є два розчини: 10% і 30%. Як приготувати 500 мл розчину з концентрацією 20%?

- Задача на економіку: Продали 300 квитків: стандартні по 200 грн і VIP по 350 грн. Загальний дохід — 80 000 грн. Скільки квитків кожного типу було продано?
- Задача на оптимальний маршрут: Автобус і потяг рухаються назустріч один одному. Відстань між ними — 180 км. Автобус рухається зі швидкістю 60 км/год, потяг — 90 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться?

Класифікація задач за рівнем складності є важливим інструментом організації навчального процесу, адже вона дозволяє вибудувати поступове засвоєння матеріалу — від простих вправ до комплексних дослідницьких завдань.

Такий підхід забезпечує диференціацію навчання, враховує індивідуальні можливості учнів та створює умови для формування як базових технічних навичок, так і високорівневих компетентностей, пов'язаних із критичним мисленням та моделюванням реальних процесів.

Завдяки цьому математика постає не лише як набір формул, а як система інструментів для розв'язання задач різної складності та практичної спрямованості.

Переваги класифікації за рівнем складності:

- Поступовість навчання

Учні рухаються від простих задач до складніших, що відповідає принципу «від простого до складного».

- Диференціація навчання

Легко врахувати різний рівень підготовки учнів: базові задачі для закріплення знань, складні — для розвитку дослідницьких умінь.

- Формування впевненості

Виконання базових задач створює відчуття успіху, а поступове ускладнення мотивує до подальшого навчання.

- Методична гнучкість

Викладач може комбінувати задачі різного рівня складності залежно від теми, часу уроку чи освітніх цілей.

Таким чином, класифікація за рівнем складності дозволяє вибудувати навчальний процес як поступове сходження від простих вправ до комплексних дослідницьких задач. Це створює умови для формування як базових, так і високорівневих компетентностей. Далі розглянемо конкретні приклади задач, які демонструють можливості такого підходу.

1. Базові задачі (пряме застосування рівнянь)

- Задача на рух

Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. За який час він подолає 180 км?

(рівняння: $60t = 180$)

- Задача на відсотки

У банку поклали 2000 грн під 10% річних. Яка буде сума через рік?

(рівняння: $2000 + 0.1 \cdot 2000 = x$)

- Арифметична задача

Знайти число, якщо його подвоєне значення на 5 більше за 17.

(рівняння: $2x + 5 = 17$)

2. Складні задачі (комбінація методів, системи рівнянь)

- Задача на суміші

Є два розчини кислоти: 20% і 50%. Скільки літрів кожного потрібно змішати, щоб отримати 10 л розчину з концентрацією 30%?

(система рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0.2x + 0.5y = 0.3 \cdot 10 \end{cases}$$
)

- Геометрична задача

У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 13 см, один катет на 5 см більший за інший. Знайти катети.

(рівняння: $a^2 + (a + 5)^2 = 13^2$)

- Фізична задача

Тіло кинути вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Через який час воно буде на висоті 15 м?

(рівняння: $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 15$) $\rightarrow$ квадратичне рівняння з двома розв'язками.

Базові задачі формують технічні навички роботи з рівняннями. Складні задачі розвивають уміння моделювати, працювати з системами та інтерпретувати результати.

Розподіл задач за рівнем складності показує поступовість навчання та можливість диференціації для учнів із різним рівнем підготовки. Водночас важливим є й інший критерій — кількість змінних, що використовуються у задачі.

Саме він дозволяє побачити, як від простих рівнянь з однією невідомою учні переходять до систем рівнянь, які моделюють більш складні процеси та взаємозв'язки. Така класифікація відкриває нові можливості для формування компетентностей, адже задачі з кількома змінними вимагають глибшого аналізу умов і розвитку дослідницьких навичок.

1. Задачі з однією змінною

- Арифметична задача

Знайти число, якщо його утричі збільшене значення дорівнює 24.

(рівняння: $3x = 24$)

- Задача на відсотки

Після знижки у 20% ціна товару становить 400 грн. Якою була початкова ціна?

(рівняння: $0.8x = 400$)

- Фізична задача

Тіло падає з висоти 20 м. За який час воно досягне землі?

(рівняння: $\frac{gt^2}{2} = 20$)

2. Задачі з двома і більше змінними

- Задача на суміші

Є два розчини солі: 10% і 30%. Скільки літрів кожного потрібно взяти, щоб отримати 20 л розчину з концентрацією 25%?

(система:
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 0.1x + 0.3y = 0.25 \cdot 20 \end{cases}$$
)

- Економічна задача

Два робітники виконують завдання разом за 6 годин. Перший може виконати його сам за 10 годин. За скільки годин виконає завдання другий?

(система:
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$
)

- Геометрична задача

Периметр прямокутника дорівнює 30 см, а його площа — 56 см². Знайти сторони прямокутника.

(система:
$$2(a + b) = 30, ab = 56$$
)

Класифікація задач, що розв'язуються за допомогою рівнянь і систем рівнянь, дозволяє вибудувати цілісну методику навчання, яка враховує різні рівні складності, змістові напрями та математичний апарат.

Такий підхід забезпечує поступове формування компетентностей: від базових умінь застосовувати формули до складних навичок моделювання реальних процесів.

Завдяки цьому учні не лише опановують техніку розв'язання рівнянь, а й розвивають аналітичне мислення, дослідницькі здібності та здатність застосовувати математику у практичних життєвих і професійних ситуаціях.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі здійснено комплексне дослідження розвитку умінь учнів розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і систем рівнянь, що є ключовою складовою математичної компетентності. На основі аналізу психолого-педагогічної та методичної літератури визначено роль рівнянь як універсального інструмента математичного моделювання, здатного забезпечити перехід учнів від арифметичного до алгебраїчного способу мислення. Особливу увагу у роботі приділено класифікації задач та методам їх розв'язування, що формують структурований і послідовний підхід до навчання алгебри.

У другому розділі розроблено методику навчання математики, спрямовану на формування математичних компетентностей учнів старшої школи через розв'язання задач за допомогою рівнянь та їх систем.

Здійснено класифікацію задач за типом рівнянь, змістом, кількістю змінних та рівнем складності, що дозволило систематизувати навчальний матеріал і визначити шляхи його практичного застосування. Наведені приклади задач продемонстрували можливості інтеграції математики з іншими дисциплінами та її значення для розвитку критичного мислення, дослідницьких умінь і здатності застосовувати знання у реальних ситуаціях.

Розроблено приклади задач, що відповідають різним методам навчання — методу проєктів, методу конкретних ситуацій, евристичному та дослідницькому. Ці приклади показують, як математика інтегрується з фізикою, економікою, геометрією та життєвими контекстами.

Методично створено фрагменти розробок уроків, які демонструють можливості застосування методу проєктів у реальному навчальному процесі та сприяють розвитку критичного мислення, дослідницьких умінь і здатності застосовувати знання у практичних ситуаціях.

Запропонована методика підтвердила ефективність компетентнісного підходу, оскільки забезпечує поступове формування навичок — від базових технічних умінь до складних дослідницьких компетентностей. Отримані

результати можуть бути використані у практиці викладання математики в старшій школі та слугувати основою для подальших досліджень у галузі методики навчання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 2009. – 367 с.
2. Бібік Н. М. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: б-ка з освіт. політ. / Н. М. Бібік та ін. К. : К.І.С., 2004. 112 с.
3. Бібік, Н. М. Нова українська школа: концептуальні засади реформування середньої школи. Київ: Міністерство освіти і науки України 2016. 5 с.
4. Брончук Ю. В. Методика використання сервісу LearningApps для створення інтерактивних навчальних додатків/ Ю. В. Брончук. // Методичний вісник. Інформаційно-методичний збірник. – Рівне, 2017. – №1. – С. 40-46
5. Білецький П. В. Шляхи формування математичної компетентності учня. Математика в школах України. 2010. № 28 (жовт.). С. 2–5
6. Варій. М. Й. Загальна психологія: підручник [для студентів вищих навчальних закладів] / М. Й. Варій – [3-тє вид.]. – Київ : Центр учбової літератури, 2009. – 1007 с.
7. Гавриш І. В. Теоретико-методологічні основи формування готовності майбутніх учителів до інноваційної професійної діяльності : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра. пед. наук: 13.00.04. Луганськ, 2006. 44 с.
8. Головань М. С. Компетенція та компетентність: порівняльний аналіз понять / М. С. Головань // Педагогічні науки: теорія, історія,

інноваційні технології. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2011. – № 8(18). – с. 224-234.

9. Головань М.С. Компетенція та компетентність: семантикотермінологічний дискурс / Микола Головань // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця. Матеріали II міжвузівської науково-практичної конференції 1-2 грудня 2011 р. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2011. – с. 22-23.
10. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М. С. Головань // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 20012» : матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р., м. Суми): У 3-х частинах. Частина 1 / Упорядник Чашечникова О. С. : Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. – 36-38 с.
11. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура. Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. 2014. № 1. С. 35–39
12. Горошко Ю. В. Інформаційне моделювання у підготовці учителів математики та інформатики : монографія. Чернігів : Лозовий В. М., 2012. 367 с.
13. Даниленко Л. І. Педагогічні інновації та інноваційні педагогічні технології: сутність і структура. Нові технології навчання. – Київ : Наук.-метод. центр вищ. освіти, 2005. Вип. 40. С. 270–273
14. Дубасенюк О. А. Інновації в сучасній освіті. Інновації в освіті: інтеграція науки і практики : зб. наук.-метод. праць.– Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2014. С. 12–28

15. Державний стандарт базової середньої освіти : Постанова Кабінету Міністрів України; Стандарт, Вимоги від 30.09.2020 № 898 // База даних «Законодавство України» / Верховна Рада України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/898-2020-%D0%BF> (дата звернення: 17.11.2024)
16. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. - К.: Техніка, 1997. – 304 с.
17. Зайцева Л. І. Елементарна математична компетентність. Дошкільне виховання. 2004. № 7. С. 12–15
18. Запорожченко Т. П. Використання інформаційно-комунікативних технологій як необхідна умова формування математичної компетентності майбутнього вчителя початкових класів. Актуальні проблеми сучасної дошкільної та початкової освіти в умовах інноваційної перебудови. Чернігів : ЧНПУ, 2013. С 43–46
19. Запорожченко Т. П. Перспективи використання електронного методичного комплексу «Методика навчання математичної освітньої галузі» у процесі формування математичної компетентності майбутнього вчителя початкової школи. Теорія і практика використання системи навчання Moodle : тези доп III Міжнар. наук.практ. конф. [«MoodleMoot Ukraine 2015», (Київ, 21-22 трав. 2015 р.) / Київ. нац. ун-т буд-ва і архітектури. Київ : КНУБА, 2015. С. 21
20. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2009. № 2. С. 165–174
21. Істер О.І. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. Київ: Генеза, 2019. – 304 с.

22. Кириєвський В.В., Крамаренко Т.Г., Семеріков С.О., Шокалюк С.В. «Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики» / м. Кривий Ріг, вид-во Кириєвського, 2009. – 316 с.
23. Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти “Нова українська школа” на період до 2029 року: Розпорядження Кабінету Міністрів України від 14 грудня 2016 р. № 988-р. Офіційний вісник України. 2017. № 1. С. 84.
24. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Г. С. Костюк. – К.: Рад. школа, 1989. – 608 с.
25. Крамаренко Т. Г. Використання дистанційних технологій навчання у підготовці майбутнього вчителя математики. Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. праць / гол. ред. проф. В. К. Буряк. Кривий Ріг : КДПУ, 2010. Вип. 27. С. 249–255
26. Локшина О. І. Тенденції розвитку змісту шкільної освіти в країнах Європейського Союзу : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : 13.00.01. Київ, 2011. 40 с.
27. Максименко С.Д., Соловієнко В.О. Загальна психологія : Навч. посібник. – К.: МАУП, 2000. – 256 с.
28. Нічуговська Л. І. Формування професійної компетентності в системі математичної підготовки студентів економічного профілю. Дидактика математики: проблеми і дослідження. Донецьк : Фірма ТЕАН, 2003. Вип. 20. С. 3–12
29. Овчарук О. В. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи : б-ка з освіт. політики / під. заг. ред. О. В. Овчарук. Київ : К.І.С., 2004. 112 с.

30. Овчарук О. В. Розвиток компетентнісного підходу : стратегічні орієнтири міжнародної спільноти. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи. К. : «К.І.С.», 2004. 112 с.
31. Пометун О. І. Дискусія українських педагогів навколо питань запровадження компетентнісного підходу в українській освіті / О. В. Овчарук // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / під заг. ред. О. В. Овчарук. – К. 2004. – 111 с.
32. Пометун О. І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.метод, посібн. / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко; За ред. О. І. Пометун. — К.: В.С.К., 2003. — 192 с.
33. Про освіту : Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII // База даних «Законодавство України» / Верховна Рада України.
URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/2145-19> (дата звернення: 17.11.2024)
34. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія / Раков С. А. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
35. Раков С.А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія освіти // Математика в школі. – 2007. – № 5. С. 2–8
36. Рекомендація 2006/962/ЄС Європейського Парламенту та Ради (ЄС) "Про основні компетенції для навчання протягом усього життя" від 18 грудня 2006 року : Рекомендації; Європейський Союз від 18.12.2006 № 2006/962/ЄС // База даних «Законодавство України» / Верховна Рада України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/go/994_975 (дата звернення: 17.11.2024)

37. Савченко О. Я. Уміння вчитися – ключова компетентність молодшого школяра: посібник / О. Я. Савченко. – К.: Педагогічна думка, 2014. – 176 с.
38. Сафонова І. Я. Формування математичної компетентності у старшокласників / І. Я. Сафонова // Актуальні проблеми державного управління, педагогіки та психології. – 2013. – Вип. 2. – С. 397-402.
39. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. - К.: Зодіак-Еко, 2000. — 512 с.
40. Старша школа зарубіжжя: організація та зміст освіти / за ред. О. І. Локшиної. – К.: СПД Богданова А.М., 2006. —228 с.
41. Ткаченко О., Кожевнікова М. Формування компетентностей на уроках математики//Математика в школах України. – Х., 2014. – №6. – С.2-3
42. Требик О. С. Організація навчання математики як загальноосвітньої дисципліни студентів коледжів з використанням інформаційнокомунікаційних технологій : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02. Київ, 2015. 20 с.
43. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики: монографія / Юрій Васильович Триус. — Черкаси: БрамаУкраїна, 2005. — 400 с.
44. Шинкаренко Л. В. Математична компетентність як результат математичної підготовки майбутніх соціологів : Науковий вісник ПНПУ ім. К. Д. Ушинського, 2012. № 9. — С.68-72