

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ З
ТЕМИ «СТЕПЕНЕВІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ»

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04. Середня освіта (Математика)
Леонової Діани Олегівни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Армаш Т. С.

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Леонова Діана Олегівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛІЧНІ ОСНОВИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ.....	7
1.1. Поняття узагальнення і систематизації знань у психолого педагогічній літературі та їх значення у вивченні математики.....	7
1.2. Особливості навчальної діяльності старшокласників на етапі узагальнення знань.....	14
1.3. Аналіз навчальної програми і підручників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення».....	18
Висновок до розділу 1.....	26
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ З ТЕМИ «СТЕПЕНЕВІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ».....	29
2.1. Методика узагальнення знань учнів у процесі вивчення степеневих виразів.....	29
2.2. Застосування вправ для узагальнення і систематизації наприкінці теми.....	35
2.3. Методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів.....	42
2.4 Системи завдань.....	46
Висновок до розділу 2.....	52
ВИСНОВКИ.....	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	61
ДОДАТКИ.....	64

ВСТУП

Актуальність дослідження. У сучасних умовах оновлення освітнього процесу важливого значення набуває формування в учнів умінь систематизувати й узагальнювати знання. Це особливо актуально в старшій школі, де вивчення математики вимагає не лише засвоєння окремих понять, а й вміння бачити взаємозв'язки між ними, формувати цілісне уявлення про розділи курсу. Тема «Степеневі вирази та їх перетворення» є однією з базових у шкільній програмі алгебри, оскільки закладає основу для подальшого вивчення складніших тем, таких як логарифми, показникові та степеневі функції.

Проте практика свідчить, що в учнів часто виникають труднощі при виконанні перетворень степеневих виразів, обчисленні виразів з різними основами та показниками, застосуванні властивостей степеня при розв'язуванні завдань. Це свідчить про недостатній рівень узагальнення та систематизації знань. Тому виникає об'єктивна потреба у розробці та впровадженні ефективних методичних підходів до формування відповідних умінь саме на етапі завершення вивчення цієї теми.

Актуальність теми також зумовлена необхідністю оптимізації процесу навчання в умовах нових державних освітніх стандартів, які орієнтують педагогів на розвиток у школярів критичного мислення, здатності аналізувати, узагальнювати та творчо застосовувати знання в нестандартних ситуаціях. Методика узагальнення і систематизації знань повинна сприяти не тільки кращому засвоєнню математичного матеріалу, а й розвитку загальнонавчальних умінь, що є ключовими компетентностями випускника сучасної школи.

Таким чином, дослідження методики узагальнення і систематизації знань старшокласників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення» є важливим як з

теоретичної, так і з практичної точки зору. Воно сприяє удосконаленню навчального процесу з математики, підвищенню ефективності навчання та підготовці учнів до подальшого засвоєння математичних знань на профільному рівні та у вищій школі.

Мета роботи полягає у тому, щоб покращити методику узагальнення і систематизації знань старшокласників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення» на базовому рівні вивчення математики.

Для виконання мети кваліфікаційної роботи були поставлені такі **завдання:**

1. Дослідити поняття узагальнення і систематизації знань у психолого педагогічній літературі та визначити особливості навчальної діяльності старшокласників на етапі узагальнення знань.
2. Дослідити значення узагальнення і систематизації знань у процесі вивчення математики.
3. Здійснити аналіз навчальної програми і підручників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення» та визначити методику узагальнення знань учнів у процесі вивчення степеневих виразів.
4. Запропонувати методику систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів.
5. Здійснити організацію педагогічного експерименту та проаналізувати ефективність методики узагальнення і систематизації знань.

Об'єктом дослідження є процес узагальнення і систематизації знань старшокласників з математики.

Предметом дослідження є методика узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Степеневі вирази та їх перетворення» на базовому рівні вивчення.

Методи дослідження.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розробці ефективної методики узагальнення і систематизації знань старшокласників з

теми «Степеневі вирази та їх перетворення». Запропоновані підходи, прийоми та вправи можуть бути використані вчителями математики в закладах загальної середньої освіти для підвищення рівня математичної підготовки учнів, розвитку їхнього логічного мислення і навичок самостійної роботи з навчальним матеріалом.

Матеріали дослідження можуть бути застосовані при розробці планів-конспектів уроків узагальнення та систематизації знань, під час підготовки старшокласників до зовнішнього незалежного оцінювання, а також у системі післядипломної педагогічної освіти для підвищення кваліфікації вчителів математики. Використання результатів роботи сприятиме більш ефективному засвоєнню навчального матеріалу та підвищенню загальної успішності учнів.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. Робота представлена на _ сторінках друкованого тексту, а також включає в себе _ джерело зі списку використаної літератури.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛІЧНІ ОСНОВИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ.

1.1. Поняття узагальнення і систематизації знань у психолого-педагогічній літературі

Узагальнення і систематизація знань є важливими складовими навчально-пізнавального процесу, які забезпечують глибоке засвоєння навчального матеріалу та формування цілісної картини світу в учнів. У психолого-педагогічній літературі ці поняття розглядаються як взаємопов'язані, але не тотожні. Узагальнення знань передбачає вміння виділяти істотні ознаки явищ, процесів або предметів та встановлювати між ними спільні риси. Систематизація ж є процесом впорядкування знань у певну логічну структуру, що сприяє їх більш глибокому осмисленню та ефективному використанню у практичній діяльності [2, с.45].

Психологи та педагоги підкреслюють, що узагальнення виникає як результат активного аналізу учнем навчального матеріалу, що сприяє формуванню абстрактного мислення. У ході узагальнення учень переходить від конкретного до загального, що дозволяє встановлювати зв'язки між новим і вже відомим матеріалом. Це не лише полегшує процес запам'ятовування, а й створює підґрунтя для формування теоретичних знань.

Проблема узагальнення і систематизації – давнішня гносеологічна, психологічна і педагогічна проблема. Систематизація ж тісно пов'язана з логічною діяльністю учнів. Вона вимагає не просто відтворення вивченого, а його впорядкування відповідно до певної логіки чи класифікації. Завдяки цьому знання перестають існувати як окремі фрагменти, а стають частиною цілісної системи. Саме систематизовані знання є основою для подальшого навчання, вирішення творчих завдань і розвитку пізнавальної самостійності учнів.

Узагальнення та систематизація знань, умінь і навичок є важливим чинником для кожного уроку, проте особливого значення цей процес набуває на уроках узагальнювального повторення, коли увага учнів зосереджується на найважливіших питаннях теми (розділу), взаємозв'язках між ними. Під узагальнювальним повторенням розуміють лише репродукцію засвоєного, а процес установлення зв'язків між окремими поняттями, вивченими в різний час, та засвоєння їх у певній системі [1, с.100].

Узагальнення – це процес в навчанні, що передбачає перехід від конкретних знань до більш загальних концептів і теоретичних понять. В психології цей процес розглядається як важлива складова розвитку абстрактного мислення, що дозволяє людині оперувати не тільки з окремими фактами, але й з їх загальними характеристиками та властивостями. У навчанні математики узагальнення забезпечує формування у учнів умінь виокремлювати суттєві ознаки явищ, пов'язувати їх із загальними принципами і теоремами.

Дитина, вивчаючи степеневі вирази, спочатку працює з окремими прикладами, але процес узагальнення дозволяє перейти до розуміння загальних властивостей степенів, наприклад, правил їх множення та ділення. Важливо, щоб учні зрозуміли, що ці правила працюють не тільки для конкретних чисел чи виразів, а й для всіх степеневих виразів в цілому.

Психолог Жан Піаже наголошував на важливості узагальнення як етапу когнітивного розвитку. Він описував, як діти на різних етапах розвитку формують здатність абстрагуватися від конкретних об'єктів і працювати з абстракціями, що є основою математичного мислення. Під час вивчення математики учні повинні навчитися знаходити спільні риси між різними прикладами та виділяти загальні закономірності [3, с.58].

Таблиця 1.1.

Характеристика видів узагальнення

Вид узагальнення	Сутність і область застосування
Первинні узагальнення	Здійснюються під час сприйняття (безпосереднього і опосередкованого) і усвідомлення навчального матеріалу. В результаті чого в пам'яті учнів утворюються загальні уявлення про предмети і явища, відбувається осмислення причинно послідовних і інших зв'язків у вивчених об'єктах, виявлення їх внутрішньої сутності.
Міжпонятійні (або урочні) узагальнення	Полягають у визначенні між виучуваними поняттями загальних і суттєвих ознак і властивостей, в переході від менш загальних до більш загальних понять, в об'єднанні засвоєних понять в системи, в розкритті зв'язків і відношень між елементами даної системи, розміщення їх у визначеному порядку і раціональній послідовності. У навчанні дає можливість вивчені на уроці поняття звести в єдину систему і веде до засвоєння відповідних теорій і важливих ідей. Здійснюється головним чином на спеціально виділеному етапі уроку.
Тематичні узагальнення	Забезпечують засвоєння цілої системи або циклу понять, вивчених протягом певного часу, які складають зміст розширених розділів програми.
Підсумкові узагальнення	Слугують для встановлення зв'язків і відношень між системами знань, засвоєними в процесі опанування цілого курсу, засвоєння цілісної системи знань за окремими галузями науки, здійснюються з близьких предметів (наприклад математики, фізики, хімії) на спеціальних уроках міжпредметного узагальнюючого повторення.

Джерело: [4]

Систематизація знань є процесом впорядкування матеріалу таким чином, щоб учні могли легко орієнтуватися в ньому, розуміти зв'язки між різними його частинами і застосовувати знання у нових ситуаціях. Систематизація передбачає не лише класифікацію матеріалу, але й встановлення логічних зв'язків між

різними елементами інформації, що допомагає сформувати цілісну картину навчального предмета.

У контексті вивчення степеневих виразів важливим аспектом є систематизація правил і властивостей, таких як властивості степенів при множенні та діленні. Учні повинні зрозуміти, як ці правила взаємопов'язані, і чому їх можна застосовувати до всіх степеневих виразів, незалежно від того, чи йдеться про числові значення або змінні.

У навчанні математики процеси узагальнення і систематизації є взаємодоповнюючими. Узагальнення допомагає учням переходити від конкретних прикладів до загальних понять і теорем, а систематизація дозволяє організувати ці знання в логічну і зрозумілу для учнів структуру. Разом ці процеси сприяють глибшому розумінню матеріалу та розвитку математичного мислення.

Коли учні вивчають степеневі вирази, спершу вони вивчають їх властивості через числові приклади, потім здійснюють узагальнення правил, таких як правило множення та ділення степенів. Після цього вони переходять до систематизації цих правил у вигляді таблиць або схем, що дозволяє швидко згадати потрібні властивості в будь-який момент [5, с.14].

Таке поєднання узагальнення і систематизації є важливим для розвитку інтелектуальних здібностей учнів, оскільки дозволяє їм не тільки механічно виконувати математичні операції, а й розуміти, чому ці операції працюють, і як їх можна застосовувати в нових ситуаціях. Це сприяє розвитку критичного мислення та здатності до самостійного вирішення задач.

Таким чином, у психолого-педагогічній науці узагальнення і систематизація розглядаються як ключові інтелектуальні дії, без яких неможливе ефективне навчання. Вони сприяють не тільки запам'ятовуванню матеріалу, а й розвитку критичного мислення, вміння аналізувати, робити висновки та застосовувати знання у нових ситуаціях. Саме тому важливо

приділяти особливу увагу формуванню в учнів цих умінь на всіх етапах навчального процесу.

Узагальнення та систематизація знань є ключовими процесами у формуванні глибокого розуміння навчального матеріалу. Вони лежать в основі розумової діяльності, яка дозволяє встановлювати важливі зв'язки між різними явищами. Особливо це важливо в математиці, де кожне нове поняття, теорема чи метод логічно пов'язані з попередніми. Якщо пропустити один з елементів цієї системи, стає важко зрозуміти наступні теми, тому системність навчання – основа його ефективності.

Узагальнення знань дозволяє учням не просто запам'ятовувати матеріал, а осмислювати його, виокремлюючи головне й істотне. Цей процес сприяє формуванню наукових понять і розвитку вміння бачити загальне в різних ситуаціях. Під час узагальнення та систематизації одночасно відбувається повторення вивченого, що допомагає закріпити знання, поглибити розуміння і вдосконалити навички. Учень має змогу проаналізувати матеріал у ширшому контексті, виділити найголовніше, що є основою навчального поступу.

Попри важливість цього етапу, узагальнююче повторення в школах часто недооцінюється. Його проводять або рідко, або обмежуються лише повторенням для закріплення знань. Причини цього – нестача часу, відсутність чіткої методики, брак узагальнюючих вправ у підручниках, слабка система міжтемних зв'язків. Проте добре організоване повторення значно підвищує ефективність навчання, розвиває мислення і вміння учнів застосовувати знання творчо [7].

Для шкільного курсу математики характерним є те, що багато понять не вводяться відразу в повному обсязі і змісті, а розширюються і збагачуються послідовно, в міру розвитку курсу.

Узагальнення в математиці передбачає виявлення спільних властивостей і закономірностей, що характерні для різних математичних об'єктів та операцій.

Наприклад, вивчаючи степеневі вирази, учні повинні зрозуміти основні властивості степенів, такі як правила множення та ділення степенів з однаковими основами, а також ознайомитися з властивостями степенів з від'ємними і дробовими показниками. В результаті розглядання цієї теми учні здобувають важливі навички узагальнення, оскільки вони навчаються застосуванню різних властивостей, які треба використовувати у різних видів виразів, і у вирішенні математичних задач.

Систематизація знань є таким же важливим етапом, оскільки вона дозволяє учням впорядкувати вивчений матеріал та зрозуміти, як між окремими поняттями та теоремами встановлюються логічні зв'язки. Наприклад, вивчаючи степеневі вирази, учні повинні навчитися правильно класифікувати типи степенів і розрізняти їхні властивості. Систематизація знань допомагає сформувати чітке уявлення про те, як кожне математичне поняття взаємодіє з іншими, і як його можна застосовувати в різних прикладах, що є основою для розглядання наступної теми [11].

Три рівні узагальнюючого повторення відображають поступове ускладнення процесів мислення, які здійснює учень у процесі навчання, і кожен із них виконує важливу функцію у формуванні повноцінної системи знань.

Узагальнення на рівні понять – це початковий рівень, на якому учні вчаться розрізняти та формулювати суттєві ознаки окремих понять. На цьому етапі важливо, щоб дитина зрозуміла не лише зміст терміну, а й уміла точно і логічно його пояснити. Учні набувають здатності будувати визначення на основі виділення головного, абстрагуючись від несуттєвого. Така робота особливо ефективна у молодшій та середній школі, коли відбувається активне формування понятійного апарату.

Узагальнення на рівні системи понять передбачає більш складну інтелектуальну діяльність. Тут учні повинні вміти встановлювати зв'язки між різними поняттями, зіставляти їх, аналізувати спільне й відмінне, а також

будувати логічну структуру знань. Важливим завданням на цьому рівні є виявлення ролі кожного поняття в загальній системі навчального курсу, що формує вміння працювати зі складною інформацією, бачити цілісну картину предметної області.

Узагальнення на рівні теорій – найвищий рівень узагальнення, який вимагає від учнів не лише володіння поняттями й системами понять, а й здатності осмислювати їх через призму фундаментальних ідей. Це рівень, на якому вивчене матеріал об'єднується у логічно завершені теоретичні конструкції. Учні вчаться інтегрувати знання з різних тем, пояснювати окремі факти на основі загальних закономірностей, будувати узагальнені моделі. Цей рівень характерний для старшої школи та вищої освіти, де вже сформоване аналітичне та критичне мислення. Саме тут закладається основа наукового стилю мислення, що є метою сучасної освіти.

Роль узагальнення та систематизації знань у навчанні математики полягає в тому, що вони допомагають учням не тільки засвоювати фактичний матеріал, але й розвивати логічне мислення та аналітичні здібності. Наприклад, учні, аналізуючи властивості різних степеневих виразів, мають можливість побачити, як працюють правила та властивості в конкретних випадках, а також як ці правила можна застосовувати до нових задач. Це дозволяє розвивати логічне мислення і підвищує здатність учнів до самостійного вирішення завдань.

Таке узагальнення і систематизація мають важливий вплив на розвиток когнітивних здібностей учнів. Вони дозволяють учням переходити від простих до більш складних математичних задач, що сприяє розвитку навичок самостійного пошуку рішень. Коли учні бачать зв'язки між різними поняттями та вміють узагальнювати інформацію, це допомагає їм не тільки в розв'язанні математичних задач, але й у вирішенні більш комплексних, міждисциплінарних проблем [13].

Важливо зазначити, що узагальнення і систематизація є основою для побудови математичної моделі, що дозволяє учням бачити реальний зміст тих чи інших математичних операцій і застосовувати їх у житті. Вивчення властивостей степеневих виразів, наприклад, відкриває перед учнями нові можливості для розв'язування задач з різних галузей математики і навіть інших наук, таких як фізика чи економіка, де степеневі вирази є важливими складовими для опису численних процесів.

1.2. Особливості навчальної діяльності старшокласників на етапі узагальнення знань

У процесі навчання старшокласники проходять етап узагальнення, під час якого вони повинні не тільки засвоїти нові знання, але й зрозуміти їх взаємозв'язок, виокремити загальні поняття, ознаки та властивості. Це важливий етап розвитку, який дозволяє учням застосовувати знання.

Однією з ключових особливостей цього етапу є розвиток здатності до *абстрактного мислення*. Старшокласники вчаться оперувати не тільки конкретними прикладами, але й теоретичними поняттями, що дозволяє їм робити узагальнення та знаходити загальні закономірності, які можна застосовувати до різних задач. Наприклад, вивчаючи степеневі вирази, учні мають змогу зрозуміти, як працюють правила множення та ділення степенів. Ці знання допомагають їм формулювати загальні принципи, які згодом використовуються для розв'язання нових задач [7].

Протягом вивчення також активно використовуються *активні методи навчання*, які стимулюють учнів до самостійного пошуку розв'язань та узагальнень. Наприклад, учитель може запропонувати учням порівняти множення степенів з однаковими основами з множенням степенів з різними

основами. Це допомагає учням виділити загальні властивості степенів і зрозуміти їх застосування у різних контекстах.

Самостійна робота учнів також є важливою складовою процесу узагальнення. Старшокласники можуть працювати з підручниками, довідниками, виконувати завдання, які потребують глибшого осмислення матеріалу та його узагальнення. Так, працюючи з різними типами задач на степеневі вирази, учні мають змогу порівнювати їх, визначати спільні властивості і формулювати загальні правила, що застосовуються при розв'язанні завдань.

Формами й методами узагальнення знань старшокласників вважають: [5]

- опорні конспекти у вигляді таблиць й схем,
- метод проектів,
- роботу із тестовими завданнями,
- розв'язування задач різного рівня складності,
- уроки узагальнення і систематизації знань.

Опорні конспекти у вигляді таблиць і схем є ефективним способом узагальнення знань, оскільки вони дозволяють структуровано подати великий обсяг інформації. Таблиці допомагають порівнювати, співвідносити, систематизувати дані, а схеми – встановлювати логічні зв'язки між поняттями. Такий підхід сприяє не лише кращому запам'ятовуванню, а й розвитку аналітичного мислення. Старшокласники, працюючи з візуальними матеріалами, вчаться виділяти головне, групувати інформацію за змістовими ознаками, що надзвичайно важливо для засвоєння складних тем.

Крім того, створення опорних конспектів стимулює активну пізнавальну діяльність. Учень не просто переписує матеріал, а переробляє його, виділяючи ключові моменти, добираючи форму подання, яка є найбільш зручною для запам'ятовування. Це розвиває навички самостійної роботи з інформацією, що є актуальним для сучасної освіти, орієнтованої на компетентнісний підхід.

Метод проектів як форма узагальнення знань забезпечує поглиблене осмислення теми через практичну діяльність. Під час виконання проектів учні не лише повторюють вивчений матеріал, а й шукають нову інформацію, аналізують, систематизують її та подають у вигляді певного продукту: презентації, дослідження, макету, тощо. Це сприяє розвитку навичок дослідницької діяльності, міжпредметних зв'язків і вмінню презентувати результати своєї роботи [9].

Особливо цінним у проектній діяльності є те, що учень працює самостійно або у співпраці з іншими, розвиваючи комунікативні навички, критичне мислення, уміння розв'язувати проблеми. Проекти допомагають інтегрувати знання з різних навчальних предметів, що дозволяє побачити їх практичне значення і місце у загальній картині світу. Така діяльність є дієвим засобом узагальнення, бо змушує учня осмислено повертатися до вже опрацьованого матеріалу.

Робота з тестовими завданнями є ще одним способом узагальнення знань, що дозволяє перевірити рівень засвоєння інформації у стислому та структурованому вигляді. Тестування охоплює основні теми, спрямоване на перевірку не тільки фактичних знань, а й вміння застосовувати їх у стандартних та нестандартних ситуаціях. Завдяки цьому формується навичка швидкого аналізу інформації та прийняття рішень.

Використання тестів як форми підсумкового контролю сприяє активізації уваги, логічного мислення, а також дозволяє учневі самостійно оцінити свої знання та виявити прогалини. Крім того, тестові завдання підготовлюють старшокласників до зовнішнього незалежного оцінювання, що є важливим етапом у системі загальної середньої освіти.

Розв'язування задач різного рівня складності дозволяє не тільки закріпити знання, а й виявити глибину їх засвоєння. Робота із задачами вимагає від учнів активного мислення, вміння застосовувати теоретичні знання на практиці,

аналізувати умови задачі, будувати логічні ланцюжки для пошуку відповіді. Завдання можуть бути як типові, що закріплюють основні навички, так і творчі, які стимулюють розвиток нестандартного мислення.

Такі вправи дозволяють здійснити диференційований підхід до навчання, оскільки учні можуть виконувати завдання відповідно до свого рівня підготовки. Застосування задач різної складності на уроках узагальнення і систематизації створює умови для поступового ускладнення навчальної діяльності, формування стійких знань і умінь, а також підвищення мотивації до навчання.

Уроки узагальнення і систематизації знань є спеціально організованими заняттями, мета яких — привести в систему вивчений матеріал, виявити та усунути прогалини в знаннях, підготувати учнів до контролю або завершення вивчення теми. На таких уроках застосовуються різні методи: бесіда, тестування, вправи, елементи гри, створення схем і таблиць, що дозволяє охопити навчальний матеріал комплексно та ефективно [10].

Проведення уроків узагальнення сприяє не лише повторенню матеріалу, а й глибшому його усвідомленню. Учні мають змогу систематизувати свої знання, визначити, що саме вони запам'ятали, а що потребує додаткового опрацювання. Це підвищує рівень їх навчальної самостійності, формує відповідальне ставлення до навчального процесу та готує до подальшого засвоєння нових знань.

Незважаючи на важливість самостійної роботи, роль вчителя на етапі узагальнення знань залишається надзвичайно важливою. Учитель повинен допомагати учням осмислити матеріал, ставити запитання, що стимулюють думки, а також коригувати помилки. Він має створювати умови для активної пізнавальної діяльності, допомагати учням формулювати загальні правила і принципи, що потім можна буде використовувати для розв'язування більш складних задач. У результаті, учні здобувають не лише знання, а й навички, які

дозволяють їм мислити більш критично, порівнювати різні варіанти розв'язку задач і застосовувати набуті знання при розгляданні нового матеріалу.

1.3. Аналіз навчальної програми і підручників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення»

Тема «Степеневі вирази та їх перетворення» посідає важливе місце у шкільному курсі математики, оскільки є логічним продовженням вивчення алгебраїчних виразів та операцій над ними. Ознайомлення учнів зі степенем та його властивостями формує підґрунтя для подальшого опанування алгебраїчних методів, розвитку логічного та абстрактного мислення. Степеневі вирази активно застосовуються не лише у шкільній математиці, але й у фізиці, хімії, інформатиці та економіці, що підкреслює їхню міжпредметну значущість.

Вивчення степеневих виразів у шкільному курсі математики відбувається поступово, починаючи з 5 класу і до 11 класу, з поетапним ускладненням змісту. У 5 класі учні вперше знайомляться з поняттям степеня натурального числа як скороченого запису багаторазового множення однакових множників. Вони дізнаються, що основа степеня показує число, яке множиться саме на себе, а показник степеня визначає кількість таких множників. Учні виконують прості обчислення на зразок $2^3=8$, $3^2=9$, $10^4=10000$, розуміють практичне застосування степеня під час обчислення площі квадрата чи об'єму куба. На цьому етапі формуються початкові уявлення, без детального вивчення властивостей степеня.

У 6 класі відбувається закріплення та розширення попередніх знань. Учні повторюють означення степеня з натуральним показником, опановують запис великих чисел у степеневій формі, знайомляться з показниковим записом великих і малих чисел у науковій нотації. Розглядається зв'язок між множенням

і діленням однакових основ, що створює передумови для подальшого вивчення властивостей степеня. Учитель підводить учнів до усвідомлення закономірностей, які в 7 класі будуть оформлені у вигляді правил.

У 7 класі тема «Степінь з натуральним показником» розглядається як окремий розділ алгебри. Учні засвоюють основні властивості степеня, вчаться виконувати тотожні перетворення степеневих виразів, спрощувати дроби, розкривати дужки, зводити подібні члени. Розглядаються степеневі вирази зі змінними, наприклад x^3 чи $2x^4y^2$, та формується вміння застосовувати правила у рівняннях і задачах. У 8 класі розширюється поняття степеня, вводяться нульовий і від'ємний показники, узагальнюються всі властивості на випадки з будь-якими цілими показниками. Учні виконують складніші перетворення виразів, працюють з буквено-числовими виразами, застосовують знання до наукової нотації чисел.

У 9 класі вивчається степінь із дробовим показником, що поєднує поняття степеня і кореня. Учні знайомляться з рівняннями виду $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, розв'язують завдання на перетворення та порівняння виразів, спрощення степеневих дробів, вчаться застосовувати ці знання у практичних прикладах з фізики та геометрії.

У 10 класі учні переходять до вивчення степеневих і показникових функцій, аналізують графіки функцій $y=x^n$ та $y=a^x$, досліджують їх властивості, зростання і спадання, а також застосування у математичному моделюванні реальних процесів.

У 11 класі відбувається узагальнення всіх знань про степінь, вводяться логарифми як обернені до показникових функцій, розглядаються практичні застосування степеневих і логарифмічних залежностей у задачах з економіки, фізики, біології та інформатики. Учні закріплюють вміння працювати з будь-якими видами степеневих виразів, виконують систематизацію знань і усвідомлюють значення степеня як фундаментального поняття сучасної алгебри.

Таблиця 1.2

Вивчення теми «Степеневі вирази»

Клас	Зміст навчання
5 клас	Ознайомлення зі степенем як повторюваним множенням.
6 клас	Закріплення поняття степеня, обчислення степенів натуральних чисел.
7 клас	Властивості степеня з натуральним показником, перетворення степеневих виразів.
8 клас	Нульовий і від'ємний показник, спрощення алгебраїчних виразів.
9 клас	Степінь із дробовим показником, зв'язок зі зведенням у корінь.
10 клас	Степеневі та показникові функції, графіки, показникові рівняння.
11 клас	Узагальнення понять степеня, логарифми, практичне застосування степеневих моделей.

Степеневі вирази (вирази зі степенями) та їх перетворення вивчаються в 10-11 класах в рамках теми «Степеневі функції», де детально розглядаються властивості степеневих функцій з довільним дійсним показником, а також їх застосування для розв'язання рівнянь, нерівностей та задач аналізу.

Аналіз навчальних програм показує, що засвоєння понять про степінь починається ще в середній школі та поступово ускладнюється у старших класах. На початкових етапах школярі знайомляться з натуральними показниками степеня та основними властивостями піднесення до степеня. Далі в програму включаються теми з від'ємними, цілими та раціональними показниками, а

також зведення виразів до стандартного вигляду. Така послідовність відповідає принципу наступності та системності математичної освіти.

У програмі з математики для 10–11 класів за стандартним рівнем тема «Степеневі вирази та їх перетворення» у прямому формулюванні не виділена. Змістові лінії стосуються в основному функцій, рівнянь та елементів початків аналізу, проте окремого розділу чи теми, присвяченої степеневим виразам, у тексті програми не зафіксовано. Це свідчить про більш спрощений характер курсу та його орієнтацію на загальноосвітні завдання, де складні алгебраїчні перетворення відходять на другий план [13].

Водночас відсутність теми «Степеневі вирази» у стандартному рівні не означає, що учні взагалі не працюють із подібними виразами. Окремі елементи їхнього застосування можуть з'являтися у завданнях із функцій чи рівнянь, однак це не є предметом системного опрацювання. Таким чином, учні отримують лише поверхневі знання, що забезпечують загальну математичну грамотність, але не дозволяють досягти глибокого рівня розуміння властивостей степеневих виразів і методів їхнього перетворення.

Що ж до профільного рівня, то програма передбачає спеціальну тему «Степенева функція», яка розрахована на 30 годин. У межах цієї теми учні знайомляться з означенням кореня n -го степеня та арифметичного кореня, вивчають їхні властивості й навчаються виконувати перетворення виразів, що містять корені. Далі розглядається степінь з раціональним показником, його властивості та методи перетворення виразів, у яких він присутній. Окрему увагу приділено поняттю степеневої функції, її властивостям та побудові графіка. Завершується вивченням ірраціональних рівнянь та нерівностей, у тому числі з параметрами, де застосовуються набуті знання про властивості степеневих і кореневих виразів.

Аналіз цієї програми показує, що профільний рівень надає учням більш глибоку та системну підготовку у сфері роботи зі степеневими виразами.

Вивчення теми структуровано таким чином, щоб поступово від елементарних понять (корінь, степінь з раціональним показником) перейти до складних завдань, пов'язаних із функціями та ірраціональними рівняннями. Це створює умови для розвитку логічного мислення, вміння аналізувати й узагальнювати інформацію, а також формує навички розв'язування нестандартних задач.

Крім того, акцент на побудові графіків і дослідженні властивостей степеневих функцій сприяє розвитку просторового й функціонального мислення учнів. Це важливо для профільного навчання, оскільки підготовка орієнтується на тих, хто планує пов'язати подальше навчання із точними чи природничими науками. Саме у цьому контексті тема «Степенева функція» стає не лише теоретичною основою, а й практичним інструментом для розв'язування широкого кола математичних задач [13].

Таким чином, на відміну від стандартного рівня, профільний курс забезпечує системне й глибоке опрацювання степеневих виразів та їхніх перетворень, поєднуючи алгебраїчні, функціональні та прикладні аспекти. Це робить його більш наближеним до сучасних вимог математичної освіти, орієнтованої на формування дослідницьких і прикладних компетентностей.

Важливим джерелом у навчальному процесі є підручники, які забезпечують не лише теоретичне пояснення, а й приклади застосування знань у різних ситуаціях. Сучасні підручники орієнтуються на компетентнісний підхід, що передбачає розвиток в учнів уміння самостійно аналізувати, узагальнювати та практично використовувати отримані знання. У розділах, присвячених степеневим виразам, подано широкий спектр вправ від найпростіших до творчих, що дозволяє враховувати індивідуальні особливості та рівень підготовки учнів.

У підручнику Г. П. Бевза, В. Г. Бевза, Н. Г. Владімірової (2018) розділ «Степенева функція» подано як другий великий блок курсу (орієнтовно стор. 79–130). У середині нього послідовно вводяться корені n -го степеня та їх

властивості, далі – функція $y = \sqrt[n]{x}$ і її графік, потім — степінь із раціональним показником та відповідні перетворення виразів, після чого переходять до власне степеневих функцій $y = x^a$ (властивості, графіки, порівняння показників), і завершують ірраціональними рівняннями та нерівностями, у тому числі з параметрами. Структуру і межі розділу підтверджують відкриті версії/перегляди підручника та супровідні матеріали: «Розділ 2. Степенева функція» зі змістом «§8 Корені n-го степеня; §9 Функція $y = \sqrt[n]{x}$; §10 Ірраціональні рівняння; § 11 Ірраціональні нерівності; § 12 Степені з раціональними показниками; §13 Степенева функція...» (стор. 79–129) і нумерацією вправ приблизно №396–725 для цього блоку [15].

Розкриваність теми тут глибока й методично «сходінками»: від означень і базових тотожностей до графічного аналізу й задач із параметрами. Теорію супроводжують добре підібрані приклади перетворень виразів із коренями та раціональними показниками і поступове ускладнення вправ: від обчислювальних і на доведення властивостей — до застосування методів до розв’язування ірраціональних рівнянь/нерівностей. Баланс між алгебраїчними перетвореннями та графічними ідеями збережено: після опанування $\sqrt[n]{x}$ і x^a учень регулярно використовує властивості монотонності, області визначення, парності/непарності та порівняння значень для обґрунтування кроків у рівняннях і нерівностях. Це гарно лягає на вимоги профільної програми «Тема 2. Степенева функція (30 год)» про формулювання означень, побудову графіків і вміння застосовувати властивості функцій до розв’язування ірраціональних задач.

Сильні сторони: логіка викладу «від кореня – до степеня – до функції – до рівнянь/нерівностей», різноманітні вправи, наявність задач із параметрами та

інтерпретацій через властивості функцій. Це реально формуватиме інструментарій для подальших тем аналізу й підготовки до ЗНО/НМТ старого формату та олімпіадних задач базового рівня. До зон, які можна було б підсилити, віднесу більшу кількість прикладів прикладних інтерпретацій степеневих залежностей (моделі з фізики/економіки) і чіткіші акценти на типових помилках у роботі з раціональними показниками (наприклад, умови коректності піднесення нерівності до парного степеня, відкидання коренів після піднесення до степеня). Загалом же розділ у Бевза відповідає профільним вимогам і дає повний, системний інструментарій зі «степеневої» тематики.

У книзі Істера розділ «Степенева функція» також є другим великим блоком у 10 класі. Зміст побудований так: [14]

- поняття кореня n -го степеня та арифметичного кореня, їхні властивості;
- функція $y = \sqrt[n]{x}$, її графік і властивості;
- степінь із раціональним показником, правила перетворення виразів;
- степенева функція $y = x^a$ для різних значень показника a ;
- ірраціональні рівняння та нерівності, у тому числі з параметрами.

Орієнтовно це сторінки 84-164. Структура і логіка викладу перегукуються з вимогами профільної програми: «Тема 2. Степенева функція (30 год)».

Розкриваність теми

У підручнику Істера акцент зроблено на чіткості формулювань і покрокових поясненнях. Теоретичний матеріал подано стисло, але достатньо насичено, з великою кількістю прикладів перетворення виразів із коренями та степенями з раціональним показником. Багато уваги приділено побудові та аналізу графіків степеневих функцій, включаючи випадки з від'ємними й дробовими показниками. Істер детально показує, як властивості степеневих

функцій застосовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Особливістю підручника є наявність узагальнюючих таблиць і схем, які допомагають структурувати правила й формули. Наприклад, властивості арифметичного кореня подані у вигляді зручних блоків, що полегшує запам'ятовування. Також трапляються вправи з підвищеною складністю — на доведення тотожностей та роботу з параметрами, які дають змогу тренувати аналітичне мислення.

Аналіз сильних і слабких сторін

Сильними сторонами підручника Істера є системність і наочність: пояснення короткі, але логічно завершені, з опорою на приклади й ілюстрації. У вправах є широкий діапазон завдань: від простих обчислень — до складних ірраціональних рівнянь з параметрами. Це відповідає профільному рівню і забезпечує підготовку до контрольних і ЗНО/НМТ.

До недоліків можна віднести меншу кількість прикладних задач (з фізики, економіки, інформатики), ніж у деяких інших підручниках. Також бракує акцентів на типових помилках учнів (наприклад, некоректне скорочення під коренем або порушення області визначення). Водночас сильна логічна побудова та добре підібрані вправи дозволяють сформувати у школярів цілісне бачення степеневих виразів та їх застосувань.

У підсумку, підручник Істера забезпечує ґрунтовне опрацювання теми «Степенева функція» і може вважатися одним із найбільш методично зручних для роботи у профільних класах.

Отже, тема степеневих виразів та їх перетворень є ключовою для розвитку математичної грамотності школярів. Її розгляд у навчальних програмах та підручниках має забезпечити учнів не лише формальними знаннями, а й практичними навичками, необхідними для подальшого вивчення складніших алгебраїчних і тригонометричних понять. Аналіз цих програм та навчальної

літератури дозволяє простежити, наскільки послідовно і системно організоване вивчення теми, а також визначити можливості для вдосконалення методики викладання.

Висновок до розділу 1

Узагальнення і систематизація знань розглядаються в психолого-педагогічній літературі як взаємопов'язані процеси, що забезпечують глибоке засвоєння навчального матеріалу та сприяють розвитку абстрактного мислення в учнів. Узагальнення дає змогу переходити від окремих фактів до загальних понять, встановлювати зв'язки між новим і вже відомим, а систематизація впорядковує знання в логічну структуру, що полегшує їх застосування в різних навчальних ситуаціях. Історичні джерела, зокрема праці Я. Коменського і К. Ушинського, наголошують на важливості цих процесів у формуванні міцних і цілісних знань.

У навчанні математики ці процеси особливо важливі. Наприклад, під час вивчення степеневих виразів учні спочатку знайомляться з окремими прикладами, далі узагальнюють правила, а згодом систематизують їх у зручну схему або таблицю. Таке поєднання узагальнення та систематизації сприяє глибшому розумінню матеріалу, розвитку логічного мислення та формуванню умінь працювати з абстракціями. В результаті учні не просто запам'ятовують правила, а навчаються свідомо їх використовувати, що є основою для подальшого навчання й інтелектуального розвитку.

На етапі узагальнення знань навчальна діяльність старшокласників набуває особливої глибини та змістовності. Учні не лише відтворюють вивчену інформацію, а й формують загальні поняття, виявляють закономірності, розвивають абстрактне мислення. Вони навчаються самостійно аналізувати, систематизувати знання та застосовувати їх у нових ситуаціях. Завдяки опорним конспектам, схемам, проектам, тестам та задачам різного рівня складності, школярі не просто запам'ятовують матеріал, а активно його осмислюють, що сприяє розвитку пізнавальної самостійності та аналітичного мислення.

Особливу роль у цьому процесі відіграє вчитель, який спрямовує діяльність учнів, створює умови для активної взаємодії з матеріалом, підтримує

і розвиває мотивацію до навчання. Саме на цьому етапі формується вміння узагальнювати, порівнювати, робити висновки – навички, що є основою подальшого навчального поступу. Таким чином, узагальнення знань – це не лише підсумковий, а й творчий етап навчання, що забезпечує глибоке засвоєння матеріалу та підготовку учнів до складніших інтелектуальних завдань.

Узагальнення та систематизація знань у процесі вивчення математики відіграють фундаментальну роль у формуванні цілісного уявлення про навчальний матеріал і розвитку логічного мислення. Вони допомагають учням не лише закріпити вже вивчене, а й осмислити його в ширшому контексті, встановлюючи зв'язки між поняттями, темами та теоріями. Таке навчання створює умови для розвитку здатності до аналітичного та критичного мислення, а також сприяє формуванню навичок самостійного оперування знаннями.

Залежно від рівня узагальнення – понять, систем понять чи цілих теорій – в учнів поступово формуються вміння визначати суттєві ознаки, аналізувати структуру знань і будувати логічні моделі. Особливо важливим є третій рівень, що притаманний старшій школі й вищій освіті, адже саме на ньому відбувається інтеграція знань і формування наукового стилю мислення. Таким чином, узагальнення та систематизація забезпечують глибоке розуміння математики й підвищують ефективність її вивчення.

Аналіз навчальних програм і підручників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення» дають підстави стверджувати, що ця тема має важливе значення у формуванні системних математичних знань учнів. Починаючи з основних понять у середніх класах і поступово розширюючи їх у старшій школі, учні оволодівають необхідними навичками для опрацювання складних виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей, а також застосування функціонального підходу. Її міжпредметний характер забезпечує практичну цінність, адже степеневі залежності зустрічаються у природничих та прикладних науках.

У програмах стандартного рівня спостерігається лише фрагментарне залучення елементів теми без системного опрацювання, що знижує глибину розуміння і залишає учнів на рівні загальних уявлень. Натомість у профільних курсах передбачено спеціальний розділ «Степенева функція», що охоплює 30 годин вивчення. Такий підхід дозволяє більш цілісно розкрити тему, починаючи від означення коренів і степенів з раціональними показниками і завершуючи розв'язуванням складних ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами. Це забезпечує наступність, системність та можливість формування компетентностей високого рівня.

У підручниках Г. та В. Бевзів розділ «Степенева функція» розкрито послідовно і методично виважено, з акцентом на поступовий перехід від простих до складних завдань. Вправи різного рівня складності, наявність задач з параметрами та баланс між алгебраїчними і графічними методами сприяють розвитку глибоких знань і навичок. У підручнику А. Істера тема також представлена системно, з чіткими поясненнями, схемами і таблицями для кращого засвоєння матеріалу. Його сильними сторонами є наочність і структурованість, проте певним недоліком виступає обмежена кількість прикладних задач, які могли б підсилити міжпредметні зв'язки.

Отже, аналіз навчальних програм і підручників показує, що успішність вивчення степеневих виразів та їх перетворень залежить від рівня навчання й обраних джерел. Стандартні програми обмежуються базовим ознайомленням, тоді як профільні створюють умови для глибокого засвоєння. Сучасні підручники, зокрема Бевза та Істера, забезпечують методичну основу для реалізації програмних вимог, але потребують подальшого збагачення прикладним матеріалом і наголошенням на типових помилках учнів. У комплексі це дозволяє не лише формувати математичні знання, а й розвивати логічне, аналітичне й функціональне мислення, що є необхідним для подальшої освіти й практичної діяльності.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ З ТЕМИ «СТЕПЕНЕВІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ»

2.1. Методика узагальнення знань учнів у процесі вивчення степеневих виразів

Узагальнення знань є важливою складовою процесу навчання математики, адже саме на цьому етапі відбувається систематизація засвоєного матеріалу, поглиблення розуміння понять і встановлення міжпредметних та внутрішньопредметних зв'язків. У процесі вивчення степеневих виразів це набуває особливого значення, оскільки учні опановують нові властивості чисел і дій, які є основою подальшого вивчення алгебри. Узагальнення допомагає учням не лише запам'ятати правила, а й зрозуміти їх логіку та практичне застосування.

Вивчення степеневих виразів передбачає опрацювання понять степеня з натуральним показником, його властивостей, а також навичок обчислення і перетворення виразів. Методика узагальнення знань у цьому процесі полягає у створенні системи вправ, завдань і ситуацій, які дозволяють учням побачити зв'язки між раніше вивченими темами, наприклад, множенням, діленням, діями з однаковими та різними основами. Такий підхід сприяє формуванню цілісного уявлення про математичні закономірності та підвищує рівень абстрактного мислення.

Особливу роль відіграє організація узагальнення знань через колективне обговорення, роботу з таблицями, схемами, графічними зображеннями. Це дозволяє активізувати пізнавальну діяльність учнів, формувати в них уміння аналізувати, порівнювати, робити висновки. Таким чином, методика узагальнення знань у процесі вивчення степеневих виразів спрямована на

розвиток логічного мислення, усвідомлене засвоєння матеріалу та підготовку учнів до розв'язування складніших алгебраїчних завдань.

Узагальнення знань учнів під час вивчення теми «Степеневі вирази» у підручнику Г. П. Бевза, В. Г. Бевза, Н. Г. Владімірової здійснюється поетапно, відповідно до логіки побудови розділу «Степенева функція». Методика узагальнення тут має чітку структурну послідовність і передбачає три основні етапи: підготовчий, систематизаційний і узагальнювально-практичний.

1. Підготовчий етап полягає у відновленні та актуалізації знань, необхідних для сприйняття нової теми. Учитель організовує повторення понять про натуральні степені, властивості множення одночленів, поняття квадратного кореня та дії з ним. Для цього доцільно використовувати усні вправи, короткі тести або фронтальні обговорення:

- Як знайти a^2 , a^3 ?
- Що означає запис $\sqrt{a}$?
- Які властивості має добуток і частка під коренем?

Такі запитання дають можливість учням пригадати базові правила, які надалі узагальнюються на випадок степенів із дробовими показниками.

2. Систематизаційний етап передбачає формування єдиного понятійного поля. Учитель демонструє зв'язок між операціями добування кореня і піднесення до степеня, поступово підводячи учнів до розуміння, що корінь — це окремий випадок степеня з раціональним показником:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

На цьому етапі використовуються вправи на порівняння та узагальнення, наприклад:

- порівняти $(a^{1/2})^2$ і a ;
- довести, що $(a^{1m/n})^n = a^m$;

– заповнити таблицю, у якій показано відповідність між записом виразу через корінь і через степінь.

Учитель підводить учнів до формулювання загальних властивостей степенів з раціональними показниками, записуючи їх у вигляді таблиці або схеми:

$$1. a^{\tau} * a^s = a^{\tau+s};$$

$$2. \frac{a^{\tau}}{a^s} = a^{\tau-s};$$

$$3. (a^{\tau})^s = a^{\tau s};$$

$$4. (ab)^{\tau} = a^{\tau} b^{\tau};$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^{\tau} = \frac{a^{\tau}}{b^{\tau}}.$$

Таке узагальнення подається не просто як набір правил, а як логічно пов'язана система, яка дозволяє виконувати різні перетворення степеневих виразів.

3. Узагальнювально-практичний етап спрямований на застосування узагальнених знань у різних видах діяльності. Учитель добирає завдання, які поєднують кілька понять або властивостей, наприклад:

- перетворення складних виразів із коренями та дробовими показниками;
- розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей;
- побудова та аналіз графіків функцій $y = x^{\tau}$, $y = \sqrt[n]{x}$

Для узагальнення доцільно використовувати **порівняльні таблиці** (наприклад, властивості функцій $y = x^2$, $y = x^{1/2}$, $y = x^{-1}$), графічні завдання (знайти спільні властивості всіх степеневих функцій з непарним показником) і практичні моделі (задачі, де степенева залежність відображає фізичне або економічне явище – наприклад, площа квадрата залежно від сторони, енергія залежно від швидкості, тощо).

Ефективним прийомом узагальнення є складання узагальнюючої таблиці «Властивості степеневих виразів і функцій», куди учні заносять види виразів,

їхні області визначення, властивості (зростання, спадання, парність), і приклади рівнянь, де вони застосовуються. Також важливо включати **алгоритмічні схеми** – наприклад, «Алгоритм розв’язування ірраціонального рівняння» або «Послідовність перетворень виразу з дробовим показником».

На завершальному етапі варто провести **узагальнюючий урок**, де використовуються комбіновані завдання: тестові запитання, вправи на доведення властивостей, побудову графіків і практичні приклади. Можна запропонувати учням виконати мініпроект або колективну схему зв’язків між основними поняттями теми («ступінь – корінь – функція – рівняння – нерівність»).

Отже, методика узагальнення знань при вивченні степеневих виразів у підручнику Бевза має цілісну дидактичну побудову: від актуалізації базових понять до глибокої інтеграції знань через практичне застосування. Вона ґрунтується на систематичному порівнянні, узагальненні властивостей, графічному аналізі та поступовому переході від часткового до загального, що забезпечує не лише свідоме засвоєння матеріалу, а й формування в учнів логіко-аналітичного мислення та вміння узагальнювати математичні закономірності.

Методика узагальнення знань у процесі вивчення степеневих виразів у підручнику О. С. Істера базується на послідовному переході від конкретних обчислювальних дій до систематизації властивостей і практичного застосування понять у функціональних та рівнянних задачах. Узагальнення здійснюється як цілеспрямований процес – через постійне повторення ключових понять у нових контекстах, використання схем, таблиць і графіків, що структурують матеріал і забезпечують його осмислення.

1. Підготовчо-орієнтаційний етап.

На початку розділу Істер організовує повторення матеріалу про степені з натуральними показниками, властивості піднесення до степеня, квадратні

корені та дії з ними. Учитель може використати вправи типу «знайди помилку» або «доповни рівність», щоб активізувати попередні знання учнів. Наприклад:

$$(\sqrt{a})^2 = ? ; (a^2)^{\frac{1}{2}} = ? ; a^{\frac{1}{3}} * a^{\frac{2}{3}} = ?$$

Такі вправи допомагають учням усвідомити зв'язок між діями піднесення до степеня і добування кореня. Уже на цьому етапі починається первинне узагальнення — учні відновлюють правила, які пізніше поширюються на випадок степенів із раціональними показниками.

2. Етап систематизації понять і властивостей.

Особливістю підручника Істера є використання **таблиць і схем**, які виступають засобом узагальнення. Наприклад, властивості арифметичного кореня подані у вигляді структурованих блоків:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Учитель може запропонувати учням доповнити або узагальнити ці схеми, встановлюючи аналогії з властивостями степенів. Таке зіставлення сприяє формуванню системного бачення: корінь і степінь розглядаються як єдині операції, що підкоряються спільним закономірностям.

На цьому етапі доцільно проводити вправи на **класифікацію виразів** (за типом показника, наявністю кореня, знаком основи), **заповнення таблиць властивостей і порівняння формул**, що створює умови для узагальнення на рівні понять. Наприклад, учні порівнюють властивості виразів a^n , a^{-n} , $a^{1/n}$, роблять висновки про область визначення та поведінку функцій при різних показниках.

3. Узагальнювально-аналітичний етап.

У підручнику Істера узагальнення реалізується також через **графічний підхід**. Учні будують графіки функцій $y=x^r$ для різних значень показника r

(цілого, дробового, від'ємного), спостерігаючи, як змінюється форма графіка залежно від показника. Після цього відбувається аналітичне узагальнення: формулюються властивості монотонності, парності, області визначення.

Учитель може запропонувати учням скласти **порівняльну таблицю**:

Значення показника, r	Приклад функції	Область визначення	Парність	Монотонність	Поведінка при $x \rightarrow 0$
$r = 2$	$y = x^2$	$\mathbb{R}$	парна	зростає на $[0; +\infty)$	$y \rightarrow \infty$
$r = 1/2$	$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	непарна	зростає	$y \rightarrow 0$
$r = -1$	$y = x^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	непарна	спадає	$y \rightarrow 0$

Така форма роботи допомагає учням систематизувати знання й візуально усвідомити закономірності зміни властивостей функцій залежно від показника степеня.

4. Узагальнення через розв'язування задач.

Істер широко застосовує завдання на доведення тотожностей та розв'язування ірраціональних рівнянь, що створює умови для глибокого узагальнення дій з виразами. Учитель може використовувати вправи типу:

- довести, що $\sqrt[3]{a^2} * \sqrt[3]{a} = a$;
- спростити $(a^{2/3})^{3/2}$;
- розв'язати $\sqrt{x+2} = x-2$

Такі завдання спонукають учнів застосовувати узагальнені властивості на практиці, перевіряти умови існування виразів і формувати логічне мислення.

5. Підсумкове узагальнення.

У кінці розділу Істер подає узагальнюючі таблиці та блоки «Запам'ятай головне», які допомагають учням структурувати матеріал. Учитель може організувати узагальнюючий урок із використанням карт знань або

інтелектуальних карт («mind map») на тему «Степінь – корінь – функція – рівняння – нерівність».

Під час такого уроку учні відновлюють основні властивості, демонструють їх застосування в задачах, а також аналізують типові помилки (наприклад, неправильне піднесення обох частин рівняння до парного степеня). Це дозволяє не лише закріпити знання, а й сформувати навички критичного мислення та самоперевірки.

Отже, методика узагальнення знань у підручнику Істера ґрунтується на логічно вибудованій системі навчання – від повторення й упорядкування понять до самостійного виведення властивостей і практичного застосування. Вона спирається на візуалізацію (таблиці, схеми, графіки), систематичне порівняння формул і вправи підвищеної складності. Такий підхід забезпечує не лише запам'ятовування матеріалу, а й глибоке розуміння системи степеневих виразів, що відповідає вимогам профільного рівня й готує учнів до самостійного узагальнення знань у подальших темах алгебри та аналізу.

4. Узагальнення через розв'язування задач.

Істер широко застосовує завдання на доведення тотожностей та розв'язування ірраціональних рівнянь, що створює умови для глибокого узагальнення дій з виразами. Учитель може використовувати вправи типу:

2.2. Застосування вправ для узагальнення і систематизації наприкінці теми

У процесі навчання важливим етапом є не лише засвоєння нового матеріалу, а й його узагальнення та систематизація. Саме на цьому етапі учні переходять від простого відтворення знань до їх свідомого використання у різних навчальних і життєвих ситуаціях. Узагальнення дає можливість побачити

логічні зв'язки між окремими поняттями, встановити закономірності, що формує цілісну систему знань із вивченої теми. Тому вправи, спрямовані на узагальнення, мають не лише навчальне, а й розвивальне значення, адже вони сприяють розвитку мислення, логіки, уваги та вміння робити висновки.

На етапі завершення теми саме вправи допомагають закріпити основні поняття, перевірити рівень їх засвоєння та підготувати учнів до подальшого вивчення складніших тем. Вони виступають ефективним засобом зворотного зв'язку між учителем і учнями, дозволяючи своєчасно виявити прогалини у знаннях та скоригувати процес навчання. Така робота стимулює пізнавальну активність школярів, сприяє формуванню в них навичок самоконтролю та самооцінювання.

Особливу роль на цьому етапі відіграє правильний добір вправ. Вони повинні бути різноманітними за формою, змістом і ступенем складності – від репродуктивних до творчих. Доцільно поєднувати усні, письмові, практичні, ігрові та проблемно-пошукові завдання. Завдяки цьому учні не лише закріплюють матеріал, але й вчаться застосовувати його в нових умовах, що є свідченням справжнього розуміння теми.

Узагальнення й систематизація знань наприкінці вивчення теми «Степенева функція» відіграють важливу роль у формуванні цілісного уявлення про властивості та закономірності цього виду функцій. На етапі закріплення навчального матеріалу учні не лише повторюють основні поняття, а й встановлюють між ними логічні зв'язки, вчаться застосовувати отримані знання у нових ситуаціях. Добір різноманітних вправ сприяє активізації пізнавальної діяльності, розвитку логічного мислення, формуванню вмінь порівнювати, узагальнювати, робити висновки. Саме через практичні завдання учні переходять від механічного запам'ятовування до глибокого розуміння сутності степеневих функцій та її місця серед інших типів функціональних залежностей.

1. «Віднови логічний ланцюг»

Розвиток послідовного (лінійного) мислення, уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, формування навички структурування інформації. Розвиває вміння встановлювати логічну послідовність понять і залежностей між властивостями функцій.

Процес узагальнення та систематизації. Вчитель готує набір фрагментів – тверджень, етапів процесу, формул або кроків розв'язання задачі – в розірваному (непорядковому) вигляді. Клас працює індивідуально або в групах: учні ранжують фрагменти у логічну послідовність і дають письмове або усне пояснення кожного переходу.

Під час цієї вправи відбувається узагальнення через вимогу побачити загальну структуру теми – учень порівнює одиничні факти й формує єдину послідовність. Систематизація реалізується в тому, що окремі поняття стають «зв'язаними вузлами» у ланцюзі: учень поєднує деталі в цілісну картину, аргументує логіку переходів.

Учні узагальнюють загальний алгоритм дослідження будь-якої функції, зокрема степеневі. Дії впорядковуються, що формує структуру «аналіз функції» як універсальний інструмент.

Процедура. 10–15 хв. на індивідуальну роботу + 10 хв. обговорення в парах. Варіанти: для сильних учнів – додати умовні «помилкові» фрагменти, які треба виключити; для слабших – надати підказки або частково відновлений ланцюг.

Приклад:

Учням дається набір тверджень у хаотичному порядку:

- 1 □. Побудувати таблицю значень.
- 2 □. Визначити область визначення.
- 3 □. Обрати показник степеня

4□. Побудувати графік степеневі функції

$$y=x^n$$

5□. Проаналізувати властивості (зростання, спадання, парність, нулі).

Завдання: розташувати етапи у правильній послідовності для дослідження степеневі функції.

2. «Кластер (інтелект-карта) підсумків теми»

Візуалізація знань, розвиток асоціативного та структурного мислення, зв'язування концептів у множинні відношення.

Як відбувається узагальнення та систематизація. Учні малюють центральне коло з назвою теми й від нього креслять «гілки» до підтем, ключових понять і прикладів. На кожній гілці додають підгілки – властивості, формули, приклади застосування. Процес змушує учня відокремити головне від другорядного (узагальнення) і розташувати елементи в ієрархії (систематизація).

Учні поєднують теоретичні знання в єдину картину, створюється схема теми – від основного поняття до його проявів і прикладів.

Після індивідуального створення карт учні обмінюються ними в парах і доповнюють: це сприяє інтеграції різних поглядів у єдину структуровану карту. Вчитель може підвести підсумки, показавши «еталонну» карту.

Процедура: 15–25 хв. + обмін 10 хв. Варіанти: цифрові карти для старших (наприклад, у презентації), великі ватмани для групової роботи.

Приклад:

У центрі аркуша – «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ».

Від неї гілки:

- визначення $\rightarrow y=x^n$;

- Види $\rightarrow$ додатній n , від'ємний n , парний, непарний;

- Графіки $\rightarrow$ приклади $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$;

- Властивості $\rightarrow$ зростання, парність, обмеженість;

3. «Поясни термін – навпаки» (фокус на поясненні й узагальненні)

Глибоке розуміння визначень, вміння формулювати узагальнення своїми словами, розвиток риторики та аргументації.

Як відбувається узагальнення та систематизація. Учням дають список ключових термінів. Завдання – не просто дати визначення, а пояснити його для аудиторії з різним рівнем знань (наприклад: «поясни 6-річці», «поясни однокласнику», «поясни науковцю»). Цей прийом змушує виділяти суттєве: щоб пояснити простими словами, потрібно узагальнити й відсікти зайве.

Систематизація відбувається через роботу з категоріями слухачів – учень структурує знання в залежності від глибини пояснення. На завершення клас обговорює різні рівні пояснень і обирає найбільш влучні формулювання.

Процедура: 10–20 хв. індивідуально + 15 хв. демонстрації. Варіанти: додати написання короткого «пояснювального конспекту» для кожного рівня.

Приклад:

Учні отримують терміни:

«степенева функція»,

«парна функція»,

«нуль функції»,

«зростання функції».

Завдання: пояснити ці поняття простою мовою так, щоб їх зрозумів молодший учень.

Наприклад:

«Степенева функція – це коли ми підносимо число xxx у степінь, і від цього залежить, як виглядає графік. Якщо показник парний, графік симетричний, а якщо непарний – він іде вгору з одного боку й вниз з іншого.»

4. «Підсумкова гра «Експертна панель» (рольова гра)»

Синтетичне мислення, комунікативні навички, критичне оцінювання, робота в команді.

Як відбувається узагальнення та систематизація: клас ділиться на «експертні команди» (кожна – спеціалісти в підтемі). Кожна команда готує доповідь з ключових висновків теми та рекомендацій. Потім влаштовується панель: команди по черзі презентують, інші ставлять питання, а вчитель або запрошені «модератори» ставлять проблемні питання. Учні мають реагувати, захищати позицію, наводити узагальнені аргументи.

Узагальнення відбувається в підготовчому етапі, коли команда вирішує, які висновки є найважливішими. Систематизація – у формуванні структури доповіді (вступ – основні положення – докази – висновки/рекомендації). Рольова форма підсилює мотивацію й дозволяє побачити тему з різних кутів; підсумкове обговорення дає можливість інтегрувати всі висновки в загальний систематизований висновок.

Процедура: підготовка 30–40 хв. або як домашнє завдання; захист 30–45 хв. Варіанти: можна залучити бали за стиль презентації й якість аргументації; для молодших – простіші ролі (спікер, доповідач, секретар).

Приклад:

Клас ділиться на 4 групи:

Група 1: досліджує функції з парними показниками;

Група 2: з непарними показниками;

Група 3: з від'ємними показниками;

Група 4: з дробовими показниками.

5. «Тематична матриця (таблиця узагальнення)»

Формування навички класифікації, порівняння, виділення головного; розвиток навичок короткого письмового викладу та системного бачення теми.

Як відбувається узагальнення та систематизація. Учням пропонується велика таблиця з колонками типу «поняття / визначення / ключова властивість / приклад / застосування / пов'язані поняття». Завдання заповнити рядки за ключовими елементами теми. Під час роботи учні повинні співвіднести термін з його суттю й практичним прикладом – це змушує їх узагальнювати: від конкретного прикладу переходити до абстрактного визначення.

Систематизація відбувається через структуру таблиці поняття розташовуються в чітких полях, що створює «картину знань» із виділеними зв'язками. По завершенні таблицю можна вивішувати на дошці й обговорювати, доповнюючи й коригуючи. Учні отримують узагальнену модель властивостей степеневих функцій залежно від показника.

Процедура: 20–30 хв. групової або індивідуальної роботи + презентація результатів. Варіанти: скоротити кількість колонок для молодших класів або додати колонку «помилки/омани» для продвинутого рівня.

Приклад:

Вид функції	Графік проходить через точку (1;1)?	Парність	Зростає/спадає	Область визначення	Область значень
$y=x^2$	Так	Парна	Зростає при x	$\mathbb{R}$	$y \geq 0$
$y=x^3$	Так	Непарна	Зростає на всій $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y=x^{-1}$	Так	Непарна	Спадає на кожному з проміжків	$x \neq 0$	$y \neq 0$

Отже, застосування вправ для узагальнення і систематизації знань наприкінці теми є необхідною складовою ефективного навчального процесу.

Воно забезпечує перехід від засвоєння окремих фактів до формування системного мислення, створює умови для підготовки учнів до підсумкового контролю та формування стійких навчальних умінь. Саме завдяки вправам цього типу знання стають міцними, усвідомленими та здатними до практичного використання.

2.3. Методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів

Методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів є важливою складовою навчання алгебри, оскільки саме ці вміння забезпечують учням базу для подальшого опанування складніших тем, зокрема рівнянь, нерівностей, функцій та елементів математичного аналізу. Степеневі вирази широко застосовуються у шкільному курсі математики, тому їх правильне розуміння та вміння виконувати перетворення мають не лише теоретичне, а й практичне значення.

Систематизація знань у процесі вивчення степеневих виразів сприяє узагальненню раніше засвоєного матеріалу та формуванню цілісного уявлення про властивості степеня, правила дій зі степенями та їх застосування у різних алгебраїчних перетвореннях. Вона дозволяє учням усвідомити логічні зв'язки між окремими темами, уникнути фрагментарності знань і забезпечити їх міцність та стійкість.

Формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів потребує використання спеціально дібраних методів і прийомів навчання, які забезпечують поєднання теоретичних знань із практичними навичками. Важливу роль у цьому процесі відіграють вправи різного рівня складності,

застосування проблемних ситуацій, елементів дослідницької діяльності, а також поступовий перехід від репродуктивної до творчої діяльності учнів.

Особливої актуальності набуває питання методики систематизації знань у контексті сучасних освітніх вимог, орієнтованих на формування ключових і предметних компетентностей. Ефективна організація цього процесу дозволяє не лише підвищити рівень навчальних досягнень учнів, а й розвинути їхнє логічне мислення, математичну культуру та здатність застосовувати отримані знання у практичній діяльності

Як раніше зазначалось систематизація знань грає ключову роль у формуванні узагальнених знань, а саме передбачає відтворенню опорних знань і їх застосуванню.

Оскільки методика систематизації знань має багато методів упорядкування знань з теми «Степеневі вирази та їх перетворення», то переглянемо найпростіший.

На початку пропонується пригадування поняття «Степеня - ...» та «Степеневі функції - ...».

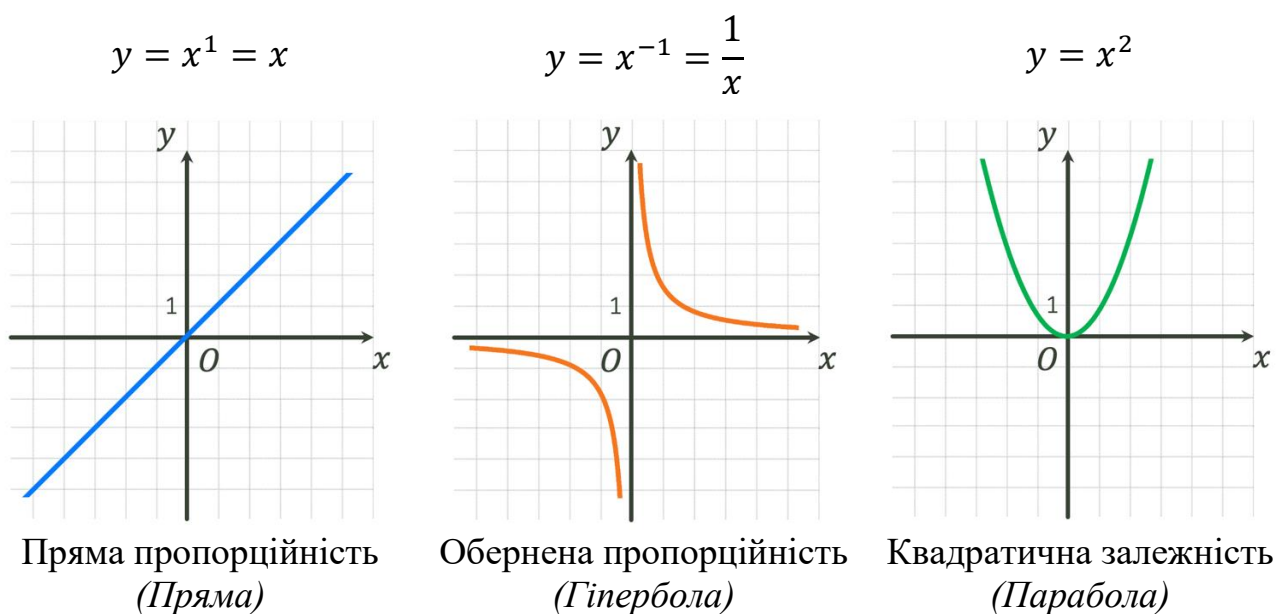


Рис. 2.1 – графіки степеневих функцій

Після перейти до пригадування схеми розв'язування рівнянь за допомогою таблиці:

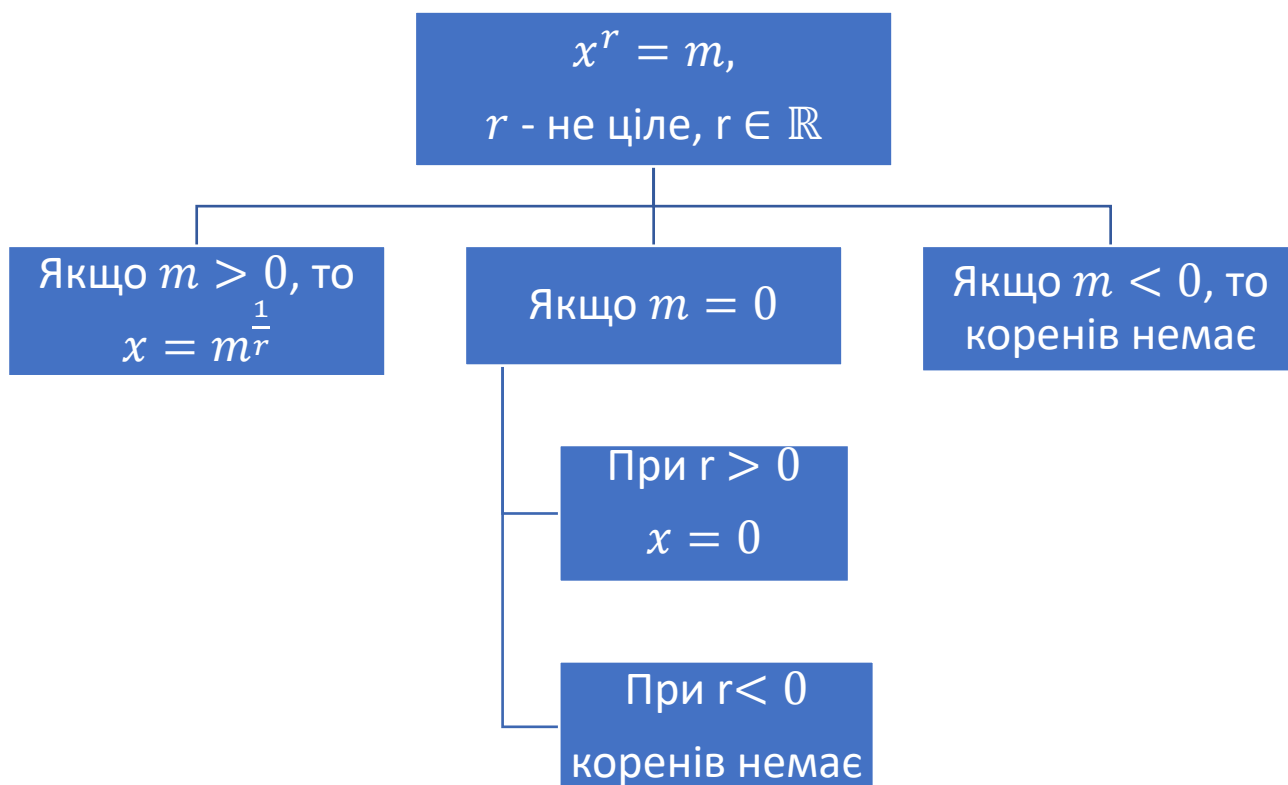


Рис. 2.2 – Схема розв'язування рівнянь

Тема «Степеневі вирази та їх перетворення» використовує широке коло знань, що забезпечує формуванню вмінь виконувати перетворення степеневих виразів.

Методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів ґрунтується на поступовому узагальненні теоретичних відомостей та їх закріпленні у процесі виконання практичних завдань. На першому етапі важливо актуалізувати опорні знання учнів про поняття степеня, його властивості, дії зі степенями з однаковими та різними показниками, а також перетворення числових і буквено-степеневих виразів. Це здійснюється за допомогою фронтального опитування, коротких усних вправ,

математичних диктантів, тестових завдань, що дозволяє виявити рівень підготовленості учнів і можливі прогалини у знаннях.

Наступним етапом є систематизація та узагальнення знань, яка передбачає встановлення логічних зв'язків між окремими правилами і властивостями степенів. Учням пропонується зіставляти різні властивості, пояснювати доцільність їх використання у конкретних ситуаціях, аналізувати типові помилки. Важливе значення має робота з узагальнюючими таблицями, схемами, алгоритмами виконання перетворень, що сприяє кращому розумінню послідовності дій і підвищує усвідомленість навчальної діяльності.

Формування практичних умінь виконувати перетворення степеневих виразів здійснюється через систему вправ різного рівня складності. Спочатку учні виконують тренувальні вправи за зразком, що сприяє відпрацюванню основних навичок. Далі пропонуються завдання на комбінування кількох правил одночасно, що розвиває вміння аналізувати вираз, обирати раціональний спосіб перетворення та перевіряти правильність отриманого результату. Доцільними є також творчі завдання, де учні самостійно складають вирази для перетворення або добирають приклади до певного правила.

Важливе місце в методиці займає використання прикладних і практико-орієнтованих задач, у яких степеневі вирази виступають як засіб розв'язування реальних або наближених до реальності ситуацій. Це сприяє формуванню в учнів мотивації до вивчення теми, розумінню практичного значення степеня та його перетворень. Крім того, застосування інтерактивних методів навчання, таких як робота в парах, групах, математичні ігри, використання інформаційно-комунікаційних технологій, підсилює активність учнів і робить процес засвоєння матеріалу більш ефективним.

Контроль і корекція сформованих умінь здійснюються шляхом проведення самостійних та контрольних робіт, тестових перевірок, взаємоперевірки й самооцінювання. Це дозволяє не лише перевірити рівень

засвоєння знань, а й сформувати в учнів відповідальність за результати власної навчальної діяльності. Систематичне повернення до вивчених правил і їх використання у різних темах курсу алгебри забезпечує міцність знань та стабільність сформованих умінь

Ефективна методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів сприяє розвитку логічного мислення, математичної грамотності та здатності учнів до самостійного розв'язування алгебраїчних задач. Вона створює необхідне підґрунтя для успішного засвоєння складніших тем шкільного курсу математики та формує в учнів впевненість у власних навчальних можливостях

2.4 Системи завдань

Система завдань є одним із провідних засобів формування, закріплення та перевірки навчальних досягнень учнів у процесі вивчення математики. Саме через виконання різноманітних вправ реалізується взаємозв'язок між теоретичними знаннями та практичними вміннями, забезпечується усвідомленість навчання і досягається стійкість засвоєння навчального матеріалу. Раціонально побудована система завдань сприяє активізації мислення учнів, розвитку їхньої пізнавальної діяльності та формуванню ключових математичних компетентностей.

У процесі навчання алгебри система завдань виконує не лише тренувальну, а й розвивальну, контролюючу та мотиваційну функції. Вона дозволяє поступово ускладнювати навчальну діяльність, переходячи від відпрацювання стандартних алгоритмів до розв'язування нестандартних, творчих і проблемних задач. Завдання, побудовані з урахуванням вікових особливостей учнів, сприяють розвитку логічного мислення, уміння аналізувати умову задачі, робити висновки та застосовувати знання в нових ситуаціях.

Особливе значення система завдань має у формуванні вмінь виконувати перетворення алгебраїчних виразів, зокрема степеневих. Саме через послідовність підібраних вправ учні засвоюють властивості степеня, навчаються раціонально використовувати правила дій зі степенями, уникати типових помилок і контролювати правильність своїх міркувань. Водночас система завдань забезпечує диференціацію навчання, дозволяючи враховувати рівень підготовки учнів та їхні індивідуальні можливості.

З точки зору сучасних освітніх підходів, система завдань має бути спрямована не лише на відтворення знань, а й на розвиток самостійності учнів, формування здатності до самоконтролю та самооцінювання результатів навчальної діяльності. Використання різнорівневих, прикладних, дослідницьких та інтерактивних завдань сприяє підвищенню мотивації до навчання й забезпечує ефективність засвоєння навчального матеріалу в умовах компетентнісного підходу.

№1

Розв'яжіть рівняння:

$$1) \quad x^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$2) \quad x^{\frac{3}{5}} = 2$$

$$3) \quad x^{-\frac{2}{3}} = 9$$

$$4) \quad x^{0,57} = 0$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^{\frac{1}{3}} &= 2 \\ \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 &= 2^3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^{\frac{3}{5}} &= 2 \\ \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} &= 2^{\frac{5}{3}} \\ x &= \sqrt[3]{2^5} \\ x &= \sqrt[3]{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x^{-\frac{2}{3}} &= 9 \\ \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} &= 9^{-\frac{3}{2}} \\ x &= (3^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad x^{0,57} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 3^{-3}$$

$$x = \frac{1}{27}$$

Відповідь: 1) $x = 8$; 2) $x = \sqrt[3]{32}$; 3) $x = \frac{1}{27}$; 4) $x = 0$

№2

Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

1) $y = 3 + x^3$

2) $y = (x - 2)^{-\frac{3}{2}}$

Розв'язання:

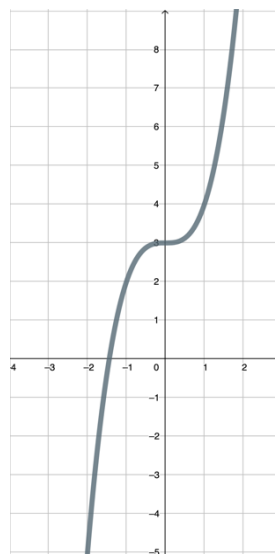
1) $y = 3 + x^3$

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

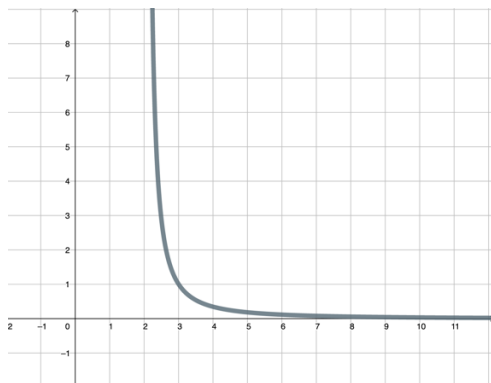
$$E(y) = (-\infty; +\infty).$$

Функція індиферентна.

Зростає на проміжку $x \in (-\infty; +\infty)$.



2)



$$y = (x - 2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$D(y) = (2; +\infty).$$

$$E(y) = (0; +\infty).$$

Функція спадна.

Спадає на проміжку $x \in (2; +\infty)$.

№3

Порівняйте числа:

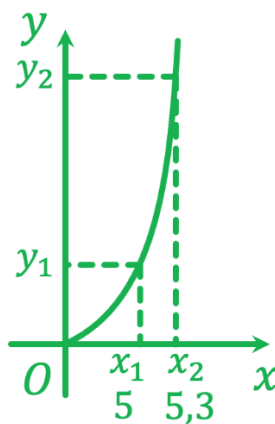
1) $5^{1,3}$ і $5,3^{1,3}$

2) $2,8^{-0,8}$ і $3^{-0,8}$

Розв'язання:

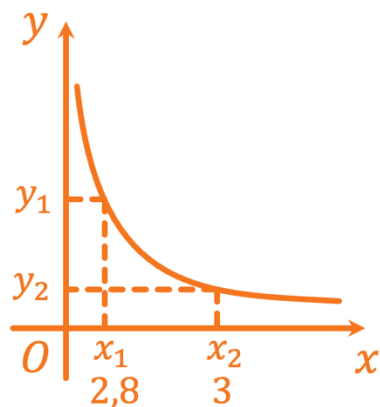
- 1) Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

$$5^{1,3} < 5,3^{1,3}$$



- 2) Більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

$$2,8^{-0,8} > 3^{-0,8}$$



$$\frac{5^{3,2} \times 2^{3,2}}{20^3} = \frac{20^{3,2}}{20^3} = 20^{0,2}$$

Розв'яжіть рівняння:

$$(x - 8)^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$x - 8 = 5^2$$

$$x - 8 = 25$$

$$x = 33$$

Скоротіть дріб:

$$\frac{x + 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5}$$

$$\frac{x + 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + 5)}{x^{\frac{1}{2}} + 5} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{m-n}{m^{0,5}-n^{0,5}}$$

$$\frac{m-n}{m^{0,5}-n^{0,5}} = \frac{(m^{0,5}-n^{0,5})(m^{0,5}+n^{0,5})}{m^{0,5}-n^{0,5}} = m^{0,5}+n^{0,5}$$

$$\frac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{5a-a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{5a-a^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-5\right)}{a\left(5-a^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}\left(5-a^{\frac{1}{2}}\right)}{a\left(5-a^{\frac{1}{2}}\right)} = -\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{m^{0,5}n-n^{0,5}m}{n^{1,5}m-m^{1,5}n}$$

$$\frac{m^{0,5}n-n^{0,5}m}{n^{1,5}m-m^{1,5}n} = \frac{m^{0,5}n^{0,5}(n^{0,5}-m^{0,5})}{nm(n^{0,5}-m^{0,5})} = \frac{1}{m^{0,5}n^{0,5}} = \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{mn}}$$

Знайдіть значення виразу:

$$8^{\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{2}} + 5^0$$

$$8^{\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{2}} + 5^0 = \sqrt[3]{8^2} : \sqrt{4^{-1}} + 1 = (\sqrt[3]{8})^2 : \sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{4}}{1} + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$\begin{aligned} \frac{6^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} + 4^0 &= \frac{\sqrt[4]{6^3}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} + 1 = \frac{(2 \cdot 3)^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^{-5}}} = \sqrt[4]{\frac{2^3}{2^{-5}}} \\ &= \sqrt[4]{2^{3-(-5)}} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a - b} \right) \cdot \left(\frac{1}{a - b} \right)^{-1}$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a - b} \right) \cdot \left(\frac{1}{a - b} \right)^{-1} &= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)} \right) \cdot (a - b) \\ &= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \end{aligned}$$

Спростіть вираз:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}, a \geq 0$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} = \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a}$$

Обчислити:

$$4x + x^2 - 5 - 2x^2 - 4x + 19$$

$$4x + x^2 - 5 - 2x^2 - 4x + 19 = -x^2 + 14$$

Система завдань у навчанні математики виступає важливим інструментом реалізації дидактичних цілей, забезпечуючи тісний зв'язок між теорією і практикою. Саме через продуману послідовність вправ відбувається не лише закріплення знань, а й формування стійких умінь і навичок, необхідних для успішного виконання алгебраїчних перетворень. Правильно організована система завдань сприяє глибшому розумінню навчального матеріалу та підвищенню якості засвоєння знань.

Використання різнорівневих завдань дозволяє реалізувати індивідуальний підхід до навчання, врахувати різний рівень підготовки учнів, їхні пізнавальні можливості та темп засвоєння матеріалу. Завдання, підібрані з урахуванням складності та спрямованості, створюють умови для поступового розвитку логічного мислення, уміння аналізувати, узагальнювати та робити обґрунтовані

висновки. Це сприяє формуванню впевненості учнів у власних навчальних можливостях.

Особливе значення система завдань має у процесі формування вмінь виконувати перетворення степеневих та інших алгебраїчних виразів. Саме через багаторазове, але осмислене виконання вправ учні навчаються раціонально застосовувати правила, уникати типових помилок і контролювати правильність власних дій. Поєднання тренувальних, комбінованих і творчих завдань дозволяє забезпечити не лише механічне відпрацювання навичок, а й розвиток математичного мислення.

Отже, система завдань є необхідною умовою ефективного навчального процесу, оскільки вона забезпечує комплексний розвиток учнів, формування їхніх предметних компетентностей і підготовку до подальшого вивчення складніших тем курсу алгебри. Її продумане використання підвищує мотивацію до навчання, активізує пізнавальну діяльність та сприяє досягненню сталих і якісних результатів у навчанні математики.

Висновок до розділу 2

Вивчення степеневих виразів передбачає опрацювання понять степеня з натуральним показником, його властивостей, а також навичок обчислення і перетворення виразів. Методика узагальнення знань у цьому процесі полягає у створенні системи вправ, завдань і ситуацій, які дозволяють учням побачити зв'язки між раніше вивченими темами, наприклад, множенням, діленням, діями з однаковими та різними основами. Такий підхід сприяє формуванню цілісного уявлення про математичні закономірності та підвищує рівень абстрактного мислення.

Особливу роль відіграє організація узагальнення знань через колективне обговорення, роботу з таблицями, схемами, графічними зображеннями. Це

дозволяє активізувати пізнавальну діяльність учнів, формувати в них уміння аналізувати, порівнювати, робити висновки. Таким чином, методика узагальнення знань у процесі вивчення степеневих виразів спрямована на розвиток логічного мислення, усвідомлене засвоєння матеріалу та підготовку учнів до розв'язування складніших алгебраїчних завдань.

На етапі завершення теми саме вправи допомагають закріпити основні поняття, перевірити рівень їх засвоєння та підготувати учнів до подальшого вивчення складніших тем. Вони виступають ефективним засобом зворотного зв'язку між учителем і учнями, дозволяючи своєчасно виявити прогалини у знаннях та скоригувати процес навчання. Така робота стимулює пізнавальну активність школярів, сприяє формуванню в них навичок самоконтролю та самооцінювання.

Отже, застосування вправ для узагальнення і систематизації знань наприкінці теми є необхідною складовою ефективного навчального процесу. Воно забезпечує перехід від засвоєння окремих фактів до формування системного мислення, створює умови для підготовки учнів до підсумкового контролю та формування стійких навчальних умінь. Саме завдяки вправам цього типу знання стають міцними, усвідомленими та здатними до практичного використання.

Методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів, розглянута у пункті 2.3, забезпечує цілісність і логічну впорядкованість навчального процесу. Вона спрямована не лише на засвоєння окремих правил, а й на усвідомлення взаємозв'язків між ними, що сприяє міцності знань і розвитку логічного мислення учнів. Поєднання узагальнення теоретичного матеріалу з практичною діяльністю створює умови для свідомого застосування набутих знань у різних навчальних ситуаціях.

Система завдань, охарактеризована у пункті 2.4, виступає практичним інструментом реалізації зазначеної методики. Саме через продуману сукупність вправ різного рівня складності здійснюється формування й удосконалення вмінь виконувати алгебраїчні перетворення, зокрема зі степеневими виразами. Різноманітність, варіативність і практична спрямованість завдань забезпечують активізацію пізнавальної діяльності учнів та врахування їхніх індивідуальних можливостей.

Отже, поєднання ефективної методики систематизації знань із науково обґрунтованою системою завдань є необхідною умовою якісного засвоєння навчального матеріалу з алгебри. Такий підхід сприяє формуванню стійких предметних компетентностей, розвитку самостійності та відповідальності учнів за результати власної навчальної діяльності, а також створює підґрунтя для успішного оволодіння подальшими темами курсу математики.

ВИСНОВКИ

У психолого-педагогічних дослідженнях узагальнення та систематизація знань визначаються як тісно пов'язані компоненти навчального процесу, що забезпечують глибоке осмислення навчального матеріалу та сприяють розвитку абстрактного мислення учнів. Узагальнення дає можливість переходити від поодиноких прикладів до загальних положень, встановлювати зв'язок між новими відомостями та вже засвоєними знаннями, тоді як систематизація допомагає впорядкувати отриману інформацію в логічно вибудовану структуру, що полегшує її подальше використання.

У процесі навчання математики узагальнення та систематизація мають особливу значущість. Так, під час вивчення степеневих виразів учні спочатку опрацьовують окремі приклади, потім формулюють відповідні правила, а на завершальному етапі впорядковують їх у вигляді схем, таблиць або алгоритмів. Поєднання цих двох процесів забезпечує глибше розуміння навчального матеріалу, сприяє розвитку логічного мислення та формуванню вмінь працювати з абстрактними поняттями. У результаті учні не лише механічно запам'ятовують правила, а опановують навички свідомого їх застосування, що є основою подальшого навчання та інтелектуального зростання.

На етапі узагальнення навчальна діяльність старшокласників набуває більшої змістовності та спрямованості на глибоке осмислення знань. Учні не обмежуються простим відтворенням інформації, а переходять до формування узагальнених понять, встановлення закономірностей і розвитку абстрактного мислення. Вони вчаться самостійно аналізувати навчальний матеріал, впорядковувати його та переносити засвоєні знання в нові навчальні ситуації. Широке використання схем, опорних конспектів, проєктів, тестів і задач різного рівня складності сприяє активному осмисленню навчального матеріалу, розвитку пізнавальної самостійності та аналітичного мислення школярів.

Провідну роль у процесі узагальнення відіграє вчитель, який організовує навчальну діяльність, створює умови для активної роботи з матеріалом, підтримує інтерес учнів та стимулює їхню навчальну мотивацію. Саме на цьому етапі формуються вміння робити узагальнення, співставляти факти, формулювати висновки – ті інтелектуальні вміння, що є основою подальшого навчального розвитку. Таким чином, узагальнення виступає не лише етапом підбиття підсумків, а й важливою творчою стадією навчання, що забезпечує глибоке засвоєння знань і підготовку учнів до розв’язування складніших інтелектуальних завдань.

Узагальнення та систематизація знань у навчанні математики виконують фундаментальну функцію у формуванні цілісного уявлення про зміст навчального предмета та розвитку логічного мислення. Вони допомагають не лише закріпити вже вивчений матеріал, а й осмислити його в ширшій системі знань, встановлюючи взаємозв’язки між поняттями, темами та теоретичними положеннями. Такий підхід створює сприятливі умови для формування аналітичного та критичного мислення, а також для набуття навичок самостійного оперування знаннями.

Залежно від рівня узагальнення – окремих понять, систем понять або цілих теорій – у школярів поступово формуються вміння виокремлювати суттєві ознаки, аналізувати структуру знань і будувати логічні моделі. Найбільш значущим є узагальнення на рівні теорій, характерне для старшої школи та вищої освіти, оскільки саме на цьому рівні відбувається інтеграція різномірних знань і формується науковий стиль мислення. Таким чином, процеси узагальнення й систематизації забезпечують глибоке розуміння математики та суттєво підвищують результативність її вивчення.

Дослідження навчальних програм і підручників з теми «Степеневі вирази та їх перетворення» свідчить про важливість цієї теми для формування системних математичних знань учнів. Починаючи з базових понять у середніх

класах і поступово поглиблюючи їх у старшій школі, учні набувають необхідних умінь для опрацювання складних виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей, а також використання функціонального підходу. Міжпредметний характер теми підкреслює її прикладну цінність, оскільки степеневі залежності широко застосовуються у природничих і технічних науках.

У навчальних програмах стандартного рівня тема подається переважно фрагментарно, без ґрунтового системного опрацювання, що знижує глибину її засвоєння та залишає учнів на рівні загальних уявлень. Натомість у профільних курсах передбачено окремий розділ «Степенева функція», на вивчення якого відведено значну кількість годин. Такий підхід дозволяє комплексно розглядати питання, починаючи з означення коренів і степенів із раціональними показниками та завершуючи розв'язуванням складних ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметрами. Це забезпечує безперервність, системність навчання та створює умови для формування математичних компетентностей високого рівня.

У підручниках Г. та В. Бевзів тема «Степенева функція» подана послідовно, методично продумано, з чітким переходом від елементарних до складніших завдань. Різномірні вправи, задачі з параметрами, поєднання аналітичних і графічних методів розв'язування сприяють ґрунтовному засвоєнню матеріалу та формуванню практичних умінь. У підручнику А. Істера ця тема також викладена системно, з використанням схем, таблиць і детальних пояснень, що забезпечує наочність і структурованість подачі матеріалу. Водночас певним недоліком є недостатня кількість прикладних задач, які могли б посилити міжпредметні зв'язки.

Таким чином, аналіз навчальних програм і підручників свідчить про те, що рівень засвоєння степеневих виразів та їх перетворень значною мірою залежить від профілю навчання та обраних навчальних джерел. Якщо стандартні програми орієнтовані переважно на ознайомлення з основами теми,

то профільні курси створюють умови для її поглибленого вивчення. Сучасні підручники, зокрема авторства Бевза та Істера, забезпечують міцну методичну основу для реалізації програмних вимог, однак потребують подальшого збагачення прикладними завданнями та акцентування уваги на типових помилках учнів. У цілому такий підхід сприяє не лише формуванню математичних знань, а й розвитку логічного, аналітичного та функціонального мислення, необхідного для подальшого навчання і практичної діяльності.

Вивчення степеневих виразів у шкільному курсі математики передбачає опанування учнями поняття степеня з натуральним показником, засвоєння його основних властивостей, а також формування навичок виконання обчислень і перетворень виразів. Узагальнення знань у межах цієї теми ґрунтується на системному доборі вправ, завдань і навчальних ситуацій, які дозволяють встановити зв'язки між різними математичними діями, зокрема множенням, діленням та операціями зі степенями з однаковими й різними основами. Такий підхід забезпечує формування цілісного уявлення про закономірності математики та сприяє розвитку абстрактного мислення учнів.

Вагоме значення у процесі узагальнення має організація спільної навчальної діяльності, використання наочних матеріалів, узагальнювальних таблиць, схем і графічних моделей. Це активізує пізнавальні процеси школярів, розвиває вміння зіставляти, аналізувати та робити обґрунтовані висновки. У результаті така методика сприяє не лише кращому засвоєнню навчального матеріалу, а й розвитку логічного мислення та підготовці учнів до розв'язування більш складних алгебраїчних задач.

На завершальному етапі опрацювання теми особлива увага приділяється вправам, які виконують функцію закріплення знань, перевірки рівня їх засвоєння та підготовки школярів до подальшого навчання. Вони також забезпечують ефективний зворотний зв'язок між учителем і учнями, що дає змогу своєчасно виявляти труднощі у засвоєнні матеріалу та вносити необхідні

корективи в освітній процес. Така діяльність сприяє зростанню пізнавальної активності учнів і формуванню навичок самоконтролю.

Застосування вправ для узагальнення й систематизації знань наприкінці вивчення теми є обов'язковою складовою результативного навчання. Воно забезпечує перехід від засвоєння окремих правил до формування цілісної системи знань, створює умови для якісної підготовки до підсумкового оцінювання та сприяє становленню стійких навчальних умінь. Саме завдяки такому підходу знання учнів набувають усвідомленого та практично орієнтованого характеру.

Методика систематизації знань і формування вмінь виконувати перетворення степеневих виразів, представлена у пункті 2.3, забезпечує логічну завершеність і послідовність навчального процесу. Вона орієнтована не лише на механічне запам'ятовування правил, а й на глибоке розуміння взаємозалежностей між ними, що позитивно впливає на міцність знань та розвиток логічного мислення школярів. Поєднання теоретичних узагальнень із практичною діяльністю створює передумови для свідомого використання знань у різних навчальних ситуаціях.

Система завдань, розкрита у пункті 2.4, є дієвим засобом реалізації зазначеної методики. Саме завдяки продуманій сукупності вправ різних рівнів складності відбувається формування та вдосконалення навичок виконання алгебраїчних перетворень, зокрема зі степеневими виразами. Варіативність, диференціація та практична спрямованість завдань сприяють активізації навчальної діяльності учнів і врахуванню їхніх індивідуальних можливостей.

Таким чином, поєднання результативної методики систематизації знань із науково обґрунтованою системою завдань виступає необхідною умовою якісного засвоєння змісту з алгебри. Такий підхід забезпечує формування стійких предметних компетентностей, розвиток самостійності учнів, відповідального ставлення до результатів власного навчання та створює надійну

основу для подальшого опанування більш складних тем шкільного курсу математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мартиненко С. М., Хоружа Л. Л. Загальна педагогіка: Навч. посіб. - К.: МАУП, 2002. 126 с.
2. Фіцула М. М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. К.: Видавничий центр «Академія», 2001. 421 с.
3. Бухлова Н. В. Діагностика і формування самоосвітньої компетентності учнів. К. :Шкільний світ, 2006. 127 с.
4. Беседін Б. Б., Гайдар С. О. Шляхи вдосконалення узагальнення та систематизації знань при вивченні алгебри в 7-9 класах : збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. Випуск 3, 2013. С. 140–144.
5. Богатинська Н. В., Голубєва С. Ф. Узагальнення й систематизація - джерело знань учнів. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць. Вип. 6. Т. 1, 2006. С. 103-107.
6. Комп'ютерно-орієнтована методика узагальнення і систематизації знань та вмінь в процесі навчання учнів геометрії: автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.02. Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова. Вид-во : Київ, 2005. 20 с.
7. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
8. Неліна О. Є. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів з алгебри як засіб активізації їх пізнавальної діяльності: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова. Київ, 2003. 20 с.
9. Розуменко А. О. Узагальнення та систематизація знань студентів при вивченні математичної статистики. Фізико-математична освіта (ФМО): науковий журнал. Випуск 2(12), 2017. С. 130-134
10. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К. : Зодіак – ЕКО, 2000. 512с.

11. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: підр. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. К. : Зодіак-ЕКО, 2006. 272 с.

12. В. І. Ключко, М. Б. Ковальчук Систематизація та узагальнення знань у навчанні математиці. URL: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjIs_nI3fOMAxXjJRAIHTrAOof0QFnoECBgQAQ&url=https%3A%2F%2Fsju.edu.ua%2Findex.php%2Fkosn%2Farticle%2Fdownload%2F448%2F457%2F1613&usg=AOvVaw1qBO9uJVBkTxik8mEcCEjK&opi=89978449 (дата звернення: 23.04.2025)

13. Навчальні програми для 10-11 класів URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 23.08.2025)

14. Істер О.С., Єрґіна О.В. Алгебра і початок аналізу: (профільний рівень): підруч. Для 10-кл. закл. заг. серед. освіти, Київ: Генеза, 2018, 448 с.

15. Бєвз Г.П., Бєвз В.Г., Владімірова Н.Г. Алгебра та початок аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. Закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018, 336 с.

16. Урок. «Степенева функція» URL: <https://naurok.com.ua/urok-stepeneva-funkciya-207871.html> (дата звернення: 2.11.2025)

17. Степенева функція та її властивості 10 клас URL: <https://naurok.com.ua/stepeneva-funkciya-ta-vlastivosti-10-klas-265859.html> (дата звернення: 23.10.2025)

18. Півошенко В.В. Історія розвитку поняття «функція» : матеріали всеукраїнська наукова конференція «математика у технічному університеті XXI сторіччя» (м. Вінниця, 15-16 травня, 2017 р.). Вінниця, 2016. С.50-53.

19. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. / 2 ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. – 582 с.

20. Фіцула М.М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. Київ : Видавничий центр „Академія”, 2007. 544 с.

21. Істер О.С., Математика: (алгебра і початок аналізу та геометрія рівень стандарту): підруч. Для 10-кл. закл. заг. серед. освіти, Київ: Генеза, 2018, 384 с.

22. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів середньої освіти, Гімназія, 2018 – 256 с.: іл.

ДОДАТКИ**Конспект уроку для 10 класу**

Тема уроку: Степенева функція

Мета уроку:

-систематизація та узагальнення матеріалу з теми «Степенева функція», застосування набутих знань до розв'язування задач, зокрема до розв'язування тестових вправ із ЗНО; сприяння формуванню і розвитку системних знань, самостійності у виборі форм і методів роботи;

-розвиток творчої активності та логічного мислення;

-виховання комунікативних якостей в процесі колективної роботи; виховання патріотичності.

Тип уроку: комбінований урок.

Обладнання: комп'ютер, мультимедійна дошка, роздаткові картки.

Хід уроку**I Організаційна частина**

Перевірка присутніх та готовність учнів до уроку

«Вважай нещасним той день чи той час, в якому ти не засвоїв нічого, нічого не додав до своєї освіти» Ян Амос Каменський

У – успіх...

Р – радість...

О – обдарованість...

К – компетентність...

II Перевірка домашнього завдання

1.Перевірити домашнє завдання в зошитах учнів.

2.Одним із пунктів домашнього завдання було розв'язати рівняння.

Зіставивши по порядку етапи розв'язання з клітинками таблиці, з відповідних букв можна скласти слово. Яке це слово?



«Математичне лото»

$2\sqrt[3]{X+1} - \sqrt[3]{X+1} - 6 = 0$	$X = 63$	$2t^2 - t - 6 = 0$
ОС	ИЙ	ГРА
$t_{1,2} = 2; -1,5$	$\sqrt[3]{X+1} = 2; \sqrt[3]{X+1} \neq -1,5$	$\sqrt[3]{X+1} = t$
Д	СЬК	ТРО

(проектується на дошку)

3.Хвилинка історії.(Доповідь учня)



**Михайло
Остроградський**
(1801-1862)

Михайлу Остроградському належить одне з найпочесніших місць в історії світової математичної науки.

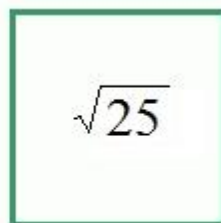
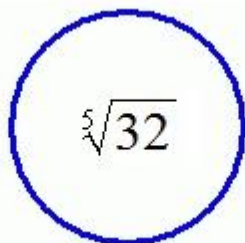
Непересічний талант, сміливий і гострий розум, висока математична ерудиція, знання сучасного природознавства дозволили Михайлу Васильовичу зробити першорядні відкриття в багатьох галузях математики і механіки.

Діапазон наукової творчості Остроградського надзвичайно широкий: диференціальне та інтегральне числення, алгебра, теорія чисел, диференціальна геометрія, теорія ймовірностей, математична фізика, варіаційне числення, аналітична механіка, теорія удару, балістика тощо. 200-річчя з дня народження славетного українського математика за рішенням ЮНЕСКО у 2001р. відзначила міжнародна наукова громадськість



III Актуалізація і корекція опорних знань.

1. Задача на увагу.



Для того, щоб добре працювати на занятті, потрібний відповідний настрій. Почнемо з задачі на увагу. Дивимось і запам'ятовуємо.

Декілька секунд учні дивляться на рисунок на слайді, а потім відповідають на запитання:

1. Перерахувати всі корені, які ви бачили.

2. У якій геометричній фігурі розміщений $\sqrt[5]{32}$? Обчисліть.

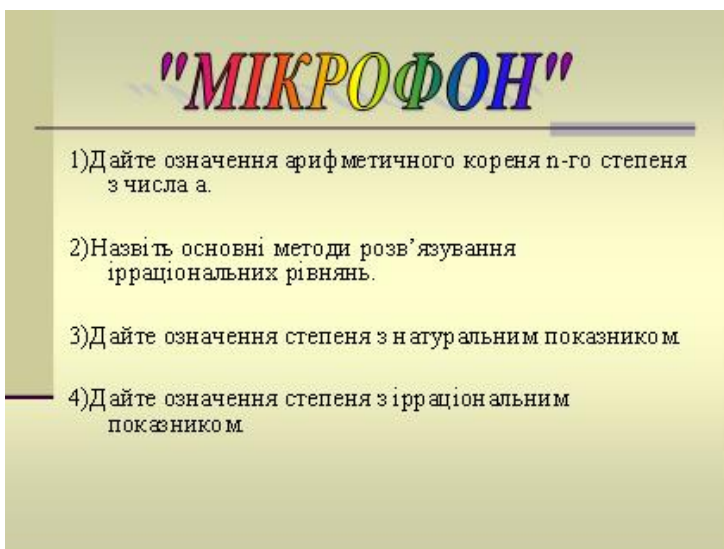
3. Квадратний корінь з якого числа знаходиться у квадраті?

4. Обчисліть $\sqrt{25}$

5. Обчисліть $\sqrt[3]{27}$

6. У якій геометричній фігурі він розміщений?

2. Бесіда (принцип «Мікрофону»):



"МІКРОФОН"

- 1) Дайте означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a.
- 2) Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь.
- 3) Дайте означення степеня з натуральним показником
- 4) Дайте означення степеня з ірраціональним показником

Вчитель: Повторимо основні формули степеневих функцій.

3. Гра «Влучний стрілець»

Запропоновано дев'ять завдань і дано дев'ять відповідей. Учні на місцях підбирають правильну відповідь. Самоперевірка (1 відповідь 0,5 балів)

Гра «Влучний стрілець»
(встановити відповідність)

1	$\sqrt[2x]{f(x)} = a, a \geq 0$	1	$\sqrt[nk]{a}$
2	$\sqrt[n]{a \cdot b}, a \geq 0, b \geq 0$	2	$-b \sqrt[2n]{a}$
3	$\sqrt[2k]{f(x)} = a, a < 0$	3	$b \sqrt[2n]{a}$
4	$\sqrt[2k+1]{f(x)} = a$	4	$f(x) = a^{2x}$
5	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$	5	$\sqrt[n]{a^k}$
6	$\sqrt[2n]{b^{2n} \cdot a}, b \geq 0, a > 0, n \in \mathbb{N}$	6	$\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$
7	$\sqrt[2n]{b^{2n} \cdot a}, b < 0, a > 0, n \in \mathbb{N}$	7	Коренів не має
8	$\sqrt[n]{a/b}, a \geq 0, b > 0$	8	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
9	$(\sqrt[n]{a})^k$	9	$f(x) = a^{2k+1}$

Відповіді: 14,28,37,49,51,63,72,86,95.

IV Повідомлення теми, мети, завдань уроку. Мотивація навчальної діяльності.

1. Мотивація навчальної діяльності.

Матеріальна єдність світу виявляється у взаємозв'язку різних процесів, що відбуваються у природі. Залежність шляху від часу, залежність площі квадрата від довжини сторони.

Поняття степенева функція є важливим поняттям курсу алгебри і початків аналізу, бо її властивості застосовують для розв'язування практичних задач, коли потрібно обчислювати параметри електричного кола змінного струму. Тому, ми сьогодні згадаємо і узагальнемо відомості про степеневу функцію.

2. Повідомлення теми.

22.12.2015

Класна робота
Тема уроку:
**СТЕПЕНЕВА
ФУНКЦІЯ**

МЕТА УРОКУ:

- Узагальнити та систематизувати знання про корені, степені з раціональним показником, ірраціональні рівняння;
- Закріпити навички виконання тотожних перетворень ірраціональних виразів та виразів, що містять степені з раціональним показником.

V Сприймання й усвідомлення учнями фактичного матеріалу, осмислення зв'язків і залежностей між елементами виучуваного.

1.Розв'язування тестових завдань першого рівня ЗНО.

(Розв'язування тестових завдань першого рівня ЗНО. Вибрати одну вірну відповідь.Самоперевірка 1 правильна відповідь 1 бал).

Тестові завдання першого рівня ЗНО

1. Спростіть вираз $\frac{b \cdot b^a}{b^4}$, де $b \neq 0$.

А	Б	В	Г	Д
b^a	b^3	b^4	b^2	b^3

2. Спростіть вираз $(a^8)^4 : a^2$, де $a \neq 0$.

А	Б	В	Г	Д
a^{12}	a^{10}	a^{22}	a^2	a^3

3. Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt[4]{30}$.

А	Б	В	Г	Д
(1;2)	(3;4)	(4;5)	(2; 3)	(5;6)

4. Запишіть числа $\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[4]{3}$ в порядку зростання.

А	Б	В	Г	Д
$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$	$\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[4]{3}$	$1, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, 1$	$\sqrt[4]{3}, 1, \sqrt[3]{2}$

5. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[3]{64}}{64}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{3}$	4	16

6. Серед чисел $a = \sqrt{5} - 2$; $b = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$; $c = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ укажіть усі додатні.

А	Б	В	Г	Д
$a; c$	$a; b$	$a; b; c$	a	c

Відповідь: 1) Д, 2) В, 3) Г, 4) В, 5) Б, 6) А.

2. Робота в групах.

Розв'яжіть рівняння:

(Учитель розділяє клас на групи і пропонує розв'язати рівняння)

Розв'яжіть рівняння

I група
 $\sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5}$

1 → $X = 5$
 2 → $X = 630$
 3 → інша відповідь

II група
 $\sqrt[3]{x+9} = x - 3$

1 → $X = 7$
 2 → $X = 0$
 3 → інша відповідь

III група
 $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$

1 → $X = 1$
 2 → $X = 4$
 3 → інша відповідь

IV Узагальнення і систематизація знань.

1. (Одночасно двоє учнів розв'язують вправи біля дошки)

Подайте вираз у вигляді степеня:

$$\frac{a^{-0.5} \cdot a^{3/2}}{a^{1.4} (a^{0.9})^{1/3}}$$

$$\frac{(b^{5/7})^{2.1} \cdot b^{-1.7}}{b^{1/4} \cdot b^{1/6}}$$

2. Учень біля дошки відновлює порядок перетворень, прикріплюючи кнопками листочки.

$$\frac{2((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{5})^2)}{\sqrt{a} - \sqrt{5}}; 2(\sqrt{a} + \sqrt{5}); \frac{2(a-5)}{\sqrt{a} - \sqrt{5}}; \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{5})(\sqrt{a} + \sqrt{5})}{\sqrt{a} - \sqrt{5}}; 2\sqrt{a} + 2\sqrt{5}$$

VI Підсумок уроку



•Підсумок уроку

1. Що на уроці було головним?
2. Що на уроці було цікавим?
3. Чому ми сьогодні навчилися?

VII Домашнє завдання.



Домашнє завдання

- Повторити Р.2, §10 – 12.
- Вправи 7(3,4), ст.178
- 3(3,4), ст.185

Підготуватись до контрольної роботи.

Ян Амос Каменський казав: «Вважай нещасним той день чи той час, в якому ти не засвоїв нічого, нічого не додав до своєї освіти». І я сподіваюся, що сьогоднішнє заняття і день, не був для вас нещасним і загубленим, тому що кожен з вас забрав з собою, щось нове, невідоме, цікаве, пізнавальне.

Урок з алгебри і початків аналізу, 10 клас

Тема уроку: Степенева функція, її властивості та графік

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань, вмінь і навичок

Мета уроку:

узагальнити і систематизувати вміння і навички учнів з теми «Степенева функція, її властивості і графік», тобто сприяти формуванню і розвитку системних знань, самостійності у виборі форм і методів роботи;

вміння будувати та читати графіки функцій сприятиме кращому розумінню практичних аспектів фінансових питань;

розвивати самостійність, творчу активність, логічне мислення, практичні навички застосування комп'ютерних застосунків; здатність відстоювати свої погляди; розвивати навички, що сприяють психологічному здоров'ю; самооцінка, самоконтроль, інтелектуальна активність, загальнокультурну та навчально-пізнавальну компетентність, інформаційну та комунікативну компетентність.

виховувати культуру математичних записів, старанність, інтерес до предмету, активізувати пізнавальну діяльність учнів; комунікативні якості в процесі колективної роботи; виховання патріотизму, любові до рідної української мови.

Обладнання: робочі листи, Інтернет-сервіс мультимедійних дидактичних вправ LearningApps, графічний редактор Desmos, магнітна дошка, роздатковий матеріал, презентація до уроку.

Очікувані результати:

після цього уроку учні зможуть визначати та називати графіки степеневої функції за типом числа у показнику степеню та аналог відомого графіка (парабола, гіпербола, гілка параболи, гілка гіперболи тощо), пояснити відмінності між графіками, а також використовувати їх властивості для порівняння чисел, які є складними для безпосереднього обчислення. Протягом уроку учні мають вдосконалити вміння користуватись інтернет-ресурсами для побудови графіків функцій.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний етап.

(Оголошення теми і мети, запис дати. Розподіл учнів на групи: «аналітики», «художники», «технічні експерти»).

Не опускайте рук, займіться математикою, і ви прозрієте душею ...

Михайло Пилипович Кравчук

Сьогодні на уроці ми візьмемо бика за рога та будемо на коні, не будемо блукати манівцями, щоб по закінченні уроку було білими нитками шито, що ми на сьомому небі від задоволення від роботи.

Отже, сьогодні ми маємо з вами повторити матеріал теми «Степенева функція та її властивості», вдосконалити вміння застосовувати отримані знання при розв'язуванні задач. На уроці нам знадобиться телефон для доступу до ресурсів.

У кожного з вас на парті лежить оціночний лист. За роботу на уроці та за правильну відповідь ви будете отримувати бали. Я буду вам повідомляти, а ваша задача не забути записати собі +1 бал. В кінці уроку порахуєте кількість балів.

Сьогодні на уроці важливо пам'ятати: $1,01^{365} = 37,8$; $0,99^{365} = 0,03$
(Мотиваційна хвилинка: роби на 1% в день більше і станеш розумнішим та успішнішим в 37,8 разів, але не допусти зменшення своїх вмінь та знань, недопрацьовуючи на 1% в день)

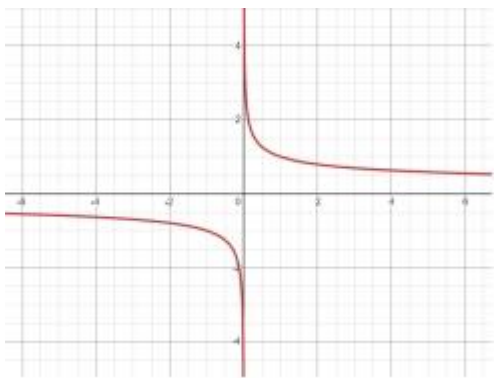
II. Актуалізація опорних знань. Перевірка домашнього завдання.

«Перевіримо домашнє завдання»

При виконанні домашнього завдання по варіантах мають бути наступні відповіді:

I варіант:

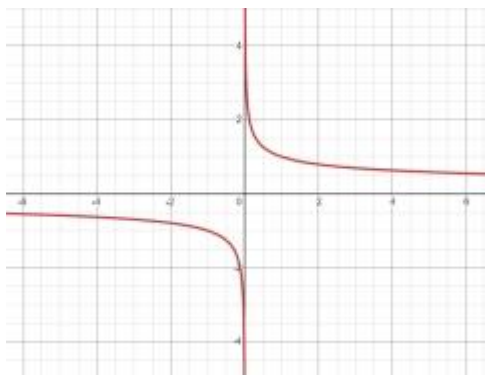
№ 1 (Б; Г; Д; А),



№ 2 $\alpha = -1/3$,

$$y = x^{-1/3}$$

№ 3 Відповідь: 4



II

варіант:

№ 1 (Г; А; Д; Б)

№ 2 $\alpha = -1/5$

$$y = x^{-1/5}$$

№ 3 Відповідь: 2

Працюємо по групах:

(групи отримують завдання)

№ 1 Група «Художники»

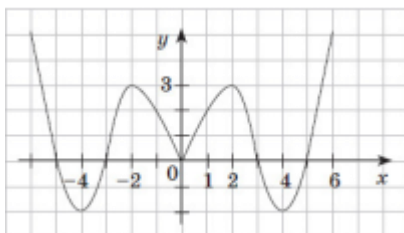
Відомо, що функція f непарна, нулі функції $x = -6$, $x = 0$, $x = \underline{\hspace{1cm}}$; найменшого значення, що дорівнює -2 , функція набуває при $x = -3$. Тоді при $x = 3$ функція набуває $\underline{\hspace{1cm}}$ значення, яке дорівнює $\underline{\hspace{1cm}}$. Функція спадає на проміжку $[-8; -3]$ і $\underline{\hspace{1cm}}$, зростає на проміжку $[-3; 0]$ і $\underline{\hspace{1cm}}$. Область визначення функції $x \in [-8; \underline{\hspace{1cm}}]$, множина значень функції $\underline{\hspace{1cm}}$.

Користуючись цими даними, накресліть ескіз графіка функції f .

№ 2 Група «Аналітики»

За графіком функції, який подано на рисунку,

опишіть усі її властивості.



1. $D(y)$

2. $E(y)$

3. Нулі:

4. $y > 0$

5. $y < 0$

6. Функція зростає на проміжках:

7. Функція спадає на проміжках:

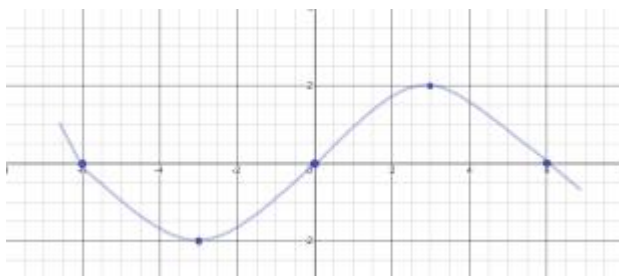
Поки працюють групи, ми маємо повторити типи графіків функцій, що ми вивчали, та їх основні властивості.

На робочих листах є таблиця, яку ми вже не один раз обговорювали. Але там бракує певних даних. Заповнимо таблицю і згадаємо графіки.

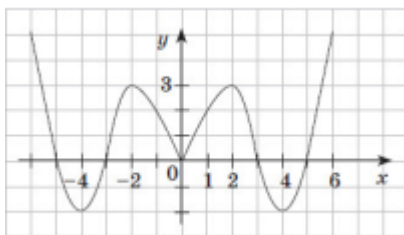
(показую графік, обговорюємо основні властивості та записуємо відсутні властивості в таблицю).

Звітують групи.

Група «Художники»



Група «Аналітики»



1. $D(y) = [-6; 6]$

2. $E(y) = [-2; 5]$

3. Нулі: -5; -3; 0; 3; 5

4. $y > 0$ на проміжку $[-6; -5) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (5; 6]$

5. $y < 0$ на проміжку $(-5; -3) \cup (3; 5)$

6. Функція зростає на проміжках: $[-4; -2]$, $[0; 2]$ $[4; 6]$

7. Функція спадає на проміжках: $[-6; -4]$, $[-2; 0]$, $[2; 4]$

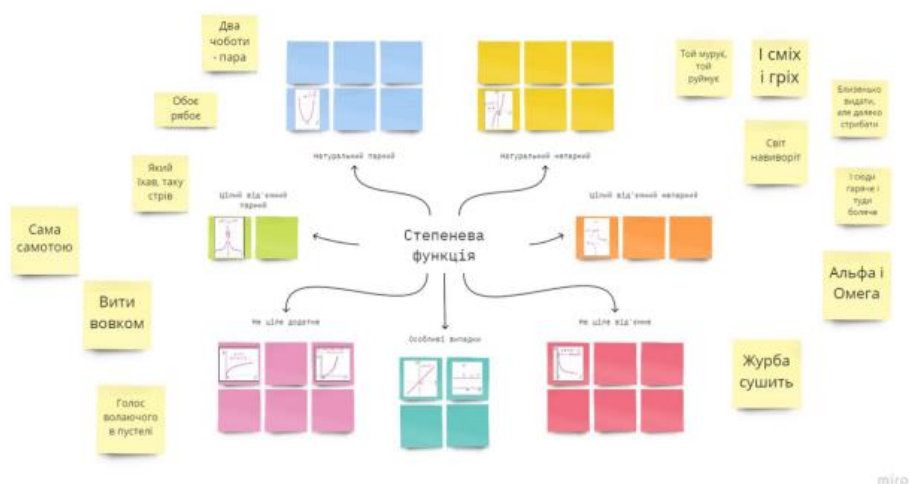
№ 3 Робота по групах (Групи: об'єднуються по дві партії)

Робота з робочими листами

На оборотній стороні листка ви маєте незвичний опис графіків степеневої функції за допомогою фразеології. Поєднайте графік з описом та поясніть чому саме так має бути, яку властивість функції ви використали.

Властивості функції можуть бути описані нестандартно.

(Завдання подається на дошці MIRO та в паперовому вигляді).



Яка багата українська мова,
Як тихе джерело вона бринить.
І ми йдемо до нього на розмову,
Коли нам радісно й коли болить.

...

Щоб образно, промовисто сказати,
Фразеологія спішить на поміч нам.
Перепони вона може подолати,
І так чарівно все розкаже вам.

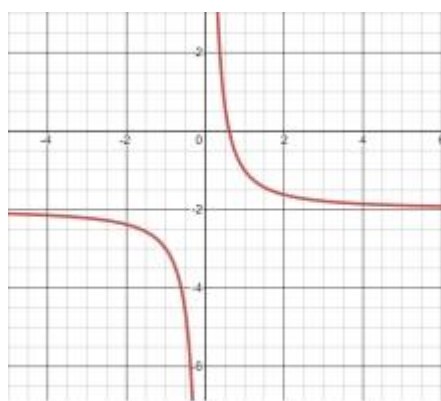
III. Фізкультхвилинка

Перед серйозною роботою треба розім'ятись.

IV. Розв'язування вправ.

«Практикум»)

Девіз етапу: «Не досить оволодіти премудрістю, потрібно також уміти користуватися нею». Цицерон



Самостійне розв'язування вправ 14, 16 у групі

I та 15, 17 у групі II. Обмін розв'язками. (по 2 представника груп презентують розв'язання на дошці)

№3. Побудувати схематично графіки функцій:

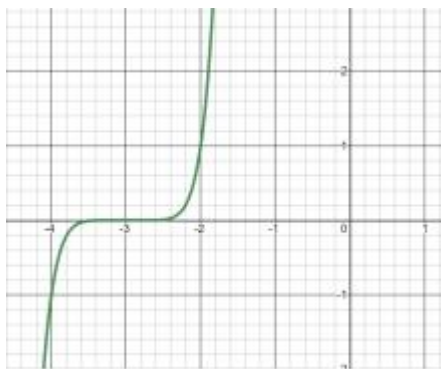
(по рядах)

$$1) y = x^{-\frac{7}{5}} y = x^{-\frac{7}{5}} - 2;$$

$$2) y = (x + 3)^7 y = (x + 3)^7;$$

$$3) y = x^{\frac{1}{4}} y = x^{\frac{1}{4}} + 1.$$

Назвати множину значень даних функцій.



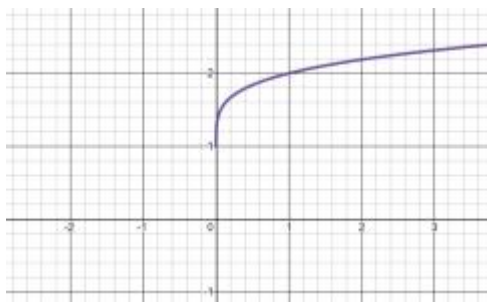
№ 4. Знайдіть значення функції $y = x^{\frac{1}{4}}$, якщо $x = \frac{1}{16}$. $x = \frac{1}{16}$.

(Відповідь: $y=0,5$)

$$2) y = x^{-\frac{1}{6}}.$$

№ 5. До області визначення якої з наведених функцій належить число 0?

$$a) y = x^{-7}, \quad б) y = x^{-8}, \quad в) y = x^{\frac{5}{9}}, \quad г) y = x^{-\frac{1}{6}}.$$



№ 6. Знайти область визначення функції:

$$1) y = (x - 5)^{-9} \quad y = (x - 5)^{-9}; \quad x \neq 5$$

$$2) y = (x + 14)^{\frac{3}{7}}; \quad 3) y = (x^2 - 25)^{\frac{1}{3}}$$

$x \in \mathbb{R}$,

$x \in \mathbb{R}$

№ 7. Функцію задано формулою $f(x) = x^{37}$

Порівняти :

- 1) $f(-6,7)$ і $f(4,3)$; 3) $f(-1,7)$ і $f(-1,5)$;
 2) $f(-1,3)$ і $f(0)$; 4) $f(0,3)$ і $f(0,9)$.

І для підсумку пропоную остаточно перевірити засвоєння теми проходженням квесту в застосунку LearningApps за посиланням:



Слова, що отримують після проходження квесту:

І чужому наuczайтесь, й свого не цурайтесь. (Т.Шевченко.)

Добре ми попрацювали.

Не kota в мішку купляли.

Учнів краще я узнала,

Ніби з плеч гора упала.

Ми взяли бика за роги,

Не звертали ми з дороги.

Піт нам заливає очі,

До роботи ми охочі.

Часу дарма не втрачали,

Гави ми не рахували,

Зразу ми взялись за діло

І робота закипіла.

Адже ми не ликом шиті,

Не гвіздком у тім'я биті,

В голові олія й смалець,

Не клади у рот нам палець.

Манна з неба не впаде,
 Шара в руки не прийде,
 Ми крутилися як білки,
 Працювали, наче бджілки.
 Глеки ми не розбивали,
 На ходу підметки рвали.
 Копитами землю рили,
 Що аж очі в нас горіли.

Домашнє практичне завдання.

За допомогою комп'ютерної програми Desmos онлайн побудуйте графіки функцій та заповніть таблицю.

№	Завдання	$y = x^{0.6}$	$y = x^{-0.5}$	$y = x^{-6}$
1.	Графік			
2.	$x=3$	$y=$	$y=$	$y=$
3.	$y=1,5$	$x=$	$x=$	$x=$
4.	Знайти наближений розв'язок рівняння	$x^{0.6} = 2$	$x^{-0.5} = -5$	$x^{-6} = 3$

Функцію задано формулою $f(x) = x^{-0.2}$. Розташуйте в порядку

зростання числа: $a = f\left(\frac{1}{3}\right)$, $b = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $c = f\left(\frac{1}{4}\right)$.

А. b, a, c . Б. a, b, c . В. c, a, b . Г. a, c, b .

Прощу вас озвучити ваші враження від нашої сумісної роботи одним-двома словами:

- Що цінного для себе ви взяли з цього уроку?

Додаткові завдання

4 (3 бали). Побудуйте схематично графік функції $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Порівняйте $f(9)$ і $f(7)$.

Функцію задано формулою $f(x) = x^{-0,2}$. Розташуйте в порядку

зростання числа $a = f\left(\frac{1}{3}\right)$, $b = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $c = f\left(\frac{1}{4}\right)$.

А. b, a, c . Б. a, b, c . В. c, a, b . Г. a, c, b .

6. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-\frac{3}{7}}$. Порівняйте $f(2,8)$ і $f(3,7)$.

А. $f(2,8) > f(3,7)$.

Б. $f(2,8) < f(3,7)$.

В. $f(2,8) = f(3,7)$.

Г. Порівняти неможливо.

7. Установіть відповідність між функцією (1–4) та її областю визначення (А–Д).

1	$y = x^8$	А	$(0; +\infty)$
2	$y = x^{-\frac{1}{2}}$	Б	$[0; +\infty)$
3	$y = x^{-5}$	В	$(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$
4	$y = x^{\frac{1}{3}}$	Г	$(-\infty; +\infty)$
		Д	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$