

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

ПРОЄКТНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ
АНАЛІЗУ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-24

ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності

014.04. Середня освіта (Математика)

Матвєєвої Анни Юріївни

Керівник: кандидат пед. наук, доцент,
завідувач кафедри математики та методики її
навчання

Бобилєв Дмитро Євгенович

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Матвеева Анна Юріївна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.



ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ПРОЄКТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ЯК ТЕОРЕТИЧНА ПРОБЛЕМА.....	7
1.1. Визначення та класифікація освітніх проєктних технологій.....	7
1.2. Застосування проєктних технологій у навчанні алгебри та початків аналізу	12
1.3. Характеристика профільного рівня математичної освіти.....	19
Висновки до розділу 1.....	28
РОЗДІЛ 2. ПРАКТИКА РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОЄКТНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ	31
2.1. Зміст та форми проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу	31
2.2. Методи застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу	39
2.3. Організація процесу застосування проєктних технологій на профільному рівні математичної освіти	50
Висновки до розділу 2.....	53
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	59
ДОДАТКИ.....	68

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. У контексті реалізації Закону України «Про освіту» (2017) та Закону України «Про повну загальну середню освіту» (2020), які визначають компетентнісний підхід як основу сучасної освітньої парадигми, традиційні методики викладання математики потребують суттєвої модернізації. Відповідно до статті 12 Закону «Про освіту», заклади освіти зобов'язані формувати ключові компетентності здобувачів освіти, серед яких математична компетентність, уміння вчитися впродовж життя, ініціативність і підприємливість.

Проектні технології навчання, передбачені статтею 30 Закону «Про повну загальну середню освіту» як одна з форм організації освітнього процесу, створюють оптимальні умови для реалізації компетентнісного підходу у викладанні алгебри та математичного аналізу на профільному рівні.

Застосування проектних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу на профільному рівні математичної освіти дає можливість реалізувати вимоги Державного стандарту базової та повної загальної середньої освіти щодо формування наскрізних умінь (критичне мислення, креативність, ініціативність, здатність конструктивно керувати емоціями, оцінювати ризики, приймати рішення, розв'язувати проблеми); забезпечити профільність навчання відповідно до статті 10 Закону «Про повну загальну середню освіту», що передбачає поглиблене вивчення окремих предметів та орієнтацію на продовження освіти або професійну діяльність у певній галузі знань; визначити та реалізувати міждисциплінарні зв'язки між математикою та іншими освітніми галузями (природничою, технологічною, інформатичною), що відповідає принципу інтегрованого навчання, закріпленому в освітньому законодавстві; надає можливість реалізувати педагогічну свободу вчителя (стаття 54 Закону «Про освіту») у виборі інноваційних методів, форм і засобів навчання, зокрема проектних технологій; підготувати здобувачів освіти до продовження навчання

у закладах вищої освіти за спеціальностями галузі знань «Природничі науки» та «Інформаційні технології», що є одним із завдань профільної середньої освіти.

Аналіз досліджуваної проблеми та вивчення сучасного стану застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу на профільному рівні уможливив виявлення низки *суперечностей* між:

сучасними вимогами до застосування проєктних технологій у навчанні алгебри та початків аналізу та недостатньою їхньою розробленістю для профільного рівня математичної освіти;

– потужним потенціалом математичної підготовки українських вчителів й недостатнім застосуванням засобів проєктних технологій для підвищення рівня математичної підготовки учнів;

– наявним досвідом застосування проєктних технологій у навчанні алгебри та початків аналізу та відсутністю рекомендацій щодо адаптації методики на профільному рівні математичної освіти.

Необхідність подолання означених суперечностей та вдосконалення процесу застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу на профільному рівні відповідно до сучасних вимог, а також недостатня теоретична й практична розробленість проблеми зумовлюють вибір теми дослідження **«Застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу на профільному рівні»**.

Мета дослідження - узагальнити теоретичні ідеї щодо застосування та ефективності проєктних методів у вивченні основ алгебри та аналізу для практичного застосування на професійному рівні математичної освіти.

Завдання дослідження:

1) Проаналізувати теоретичні основи проєктного навчання, надати визначення та розкрити класифікації освітніх проєктних технологій.

2) Дослідити застосування проєктних технологій у навчанні алгебри та початків аналізу та схарактеризувати профільний рівень математичної освіти.

3) Розкрити зміст та форми застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу.

4) Визначити методи та процес організації застосування проєктних технологій на профільному рівні математичної освіти.

Об'єкт дослідження – проєктні технології у навчанні алгебри і початків аналізу.

Предмет дослідження – теорія та практика впровадження проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу на профільному рівні.

Для виконання поставлених завдань були використані наступні *методи* дослідження:

1) *теоретичні методи*: аналіз та синтез педагогічної, методичної та математичної літератури з проєктного навчання та математичної освіти; порівняльний аналіз існуючих підходів до проєктного навчання в математичній освіті; систематизація та узагальнення теоретичних основ проєктних технологій;

2) *емпіричні методи*: педагогічне спостереження за освітнім процесом під час впровадження проєктних технологій; педагогічний експеримент для перевірки ефективності проєктних підходів; анкетування та опитування учнів і вчителів щодо досвіду проєктного навчання; інтерв'ю з вчителями та учнями для збору якісних даних; тестування для оцінки математичних знань і навичок до та після впровадження; аналіз документації навчальної програми, планів уроків та портфоліо учнів.

3) *математичні методи*: кількісний аналіз експериментальних даних (результати тестів, рівень виконання завдань); статистична обробка результатів (середні значення, стандартне відхилення, кореляційний аналіз); графічне представлення даних для візуалізації результатів.

Практичне значення результатів дослідження. Результати дослідження мають безпосереднє практичне застосування в різних аспектах математичної освіти. Вчителі спеціалізованих математичних шкіл, ліцеїв, гімназій та класів з поглибленим вивченням математики отримують доступ до детальних описів проєктів, інструкцій з реалізації, критеріїв оцінювання та організаційних стратегій, спеціально розроблених для тем з алгебри та аналізу, що дозволяє їм негайно впроваджувати проєктні підходи у свій навчальний процес,

дотримуючись вимог навчальної програми та часових обмежень. Навчальні заклади можуть використовувати результати дослідження для вдосконалення своїх спеціалізованих математичних програм, розробки шкільних або районних проєктних ініціатив та модернізації свого підходу до математичної освіти відповідно до сучасних педагогічних стандартів. Матеріали, розроблені в ході дослідження, слугують цінними ресурсами для підготовки майбутніх вчителів у педагогічних університетах та для програм професійного розвитку, семінарів та навчальних тренінгів, тим самим впливаючи як на сучасне, так і на майбутні покоління викладачів математики.

Дослідження сприяє розробці навчальних програм на інституційному, регіональному рівнях, формує освітню політику щодо інноваційних методів викладання математики та забезпечує основу для розробки підручників та навчальних матеріалів, що включають проєктні підходи.

РОЗДІЛ 1

ПРОЄКТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ЯК ТЕОРЕТИЧНА ПРОБЛЕМА

1.1. Визначення та класифікація освітніх проєктних технологій

Концепція проєктного навчання стала одним із найпомітніших педагогічних підходів у сучасній освіті. Розуміння теоретичних основ, визначень та класифікацій освітніх проєктних технологій є необхідним для їх ефективного впровадження в математичну освіту, особливо на спеціалізованому рівні.

Теоретичні основи проєктного методу в освіті ґрунтуються на основі прогресивних педагогічних теорій, розроблених Джоном Дьюї, що були систематично розроблені Вільямом Хердом Кілпатріком у 1910-1920-х роках. Філософія Дьюї наголошувала на зв'язку освіти з реальним життям та заохоченні активної участі учнів. Кілпатрік визначив проєкт як «цілеспрямовану діяльність, що відбувається в соціальному середовищі», наголошуючи на автономії учнів та внутрішній мотивації [58]. В останні десятиліття ХХ століття проєктне навчання переживає ренесанс, підкріплений конструктивістськими теоріями навчання, які наголошують на побудові знань через активну участь, соціальну взаємодію та автентичне вирішення проблем [61; 30; 60].

Технологія освітніх проєктів є методом навчання, що передбачає систему за допомогою якої учні набувають знань і навичок через тривалий процес дослідження, побудований навколо складних, автентичних питань і ретельно розроблених продуктів або презентацій [65; 35; 17]. Це визначення підкреслює кілька ключових характеристик освітніх проєктних технологій:

- тривалий термін роботи над проєктом,
- дослідницький характер діяльності учнів,
- автентичність і складність вирішуваних проблем,
- конкретні результати, що демонструють навчання учнів.

Такий підхід змінює роль вчителя з передавача знань на фасилітатора та наставника, тоді як учні беруть на себе більшу відповідальність за своє навчання [7]. У математичній освіті проєктна технологія дозволяє учням досліджувати математичні поняття, взаємозв'язки та застосування їх через тривале дослідження, часто пов'язуючи абстрактні математичні ідеї з реальними контекстами або іншими академічними дисциплінами [13].

Освітні проєкти мають кілька визначальних характеристик, які відрізняють їх від інших навчальних заходів [31; 22]:

- цілеспрямованість та орієнтація на результат гарантують, що кожен проєкт починається з чітко визначеної мети або проблеми, яка стимулює дослідження учнів та створює внутрішню мотивацію до навчання;
- автономність та ініціативність учнів дозволяють їм приймати важливі рішення щодо напрямку, методів та презентації свого проєкту, тоді як вчителі забезпечують структуру та керівництво;
- тривалість, що розтягується на тижні або місяці, дозволяє учням глибоко зануритися в математичний матеріал, стикатися з викликами та долати їх, а також отримувати складні результати;
- міждисциплінарні зв'язки спираються на знання з різних галузей, ілюструючи актуальність математичних понять за межами математичного класу;
- практична спрямованість та актуальність у реальному світі пов'язують абстрактні математичні поняття з конкретними проблемами або явищами, які учні вважають значущими;
- конкретні продукти або результати, такі як дослідницькі звіти, презентації, математичні моделі або мультимедійні матеріали, демонструють здатність учнів синтезувати знання та ефективно комунікувати складні ідеї.

Освітні проєкти можна класифікувати за різними критеріями, кожен з яких пропонує різні перспективи щодо розробки та реалізації проєктів. Розуміння цих класифікацій допомагає вчителям обирати відповідні типи проєктів для конкретних освітніх цілей, змістовних областей та груп учнів. Найважливіші

системи класифікації враховують домінуючий тип діяльності, зміст предметної області, тривалість, кількість учасників та педагогічні цілі [21; 34].

Класифікуючи проєкти за домінуючою діяльністю [3], виділяють кілька важливих типів, які відображають різні підходи до вивчення математики.

Дослідницькі проєкти зосереджуються на дослідженні математичних явищ, вивченні закономірностей, формулюванні та перевірці гіпотез, а також на формуванні висновків на основі доказів. У галузі алгебри та аналізу дослідницькі проєкти можуть передбачати дослідження властивостей певних класів функцій, вивчення збіжності рядів або аналіз взаємозв'язків між алгебраїчними та геометричними представленнями. Ці проєкти розвивають наукове мислення та дослідницькі навички, поглиблюючи розуміння математики.

Прикладні або практичні проєкти наголошують на використанні математичних знань для вирішення реальних проблем, таких як розробка математичних моделей для практичних ситуацій, створення алгоритмів для аналізу даних або розробка рішень інженерних проблем за допомогою обчислення. Ці проєкти демонструють математику як практичний інструмент і розвивають здатність учнів переносити математичні знання в нові контексти.

Інформаційні проєкти зосереджуються на зборі, аналізі та представленні інформації про конкретні математичні теми або історію математичних ідей, розвитку інформаційної грамотності та поглибленні розуміння математики як культурного та інтелектуального досягнення.

Креативні проєкти акцентують увагу на уяві та художньому вираженні через такі види діяльності, як створення візуальних представлень математичних ідей, розробка освітніх ігор або створення відеороликів, що пояснюють аналітичні методи.

Класифікація за змістом предметної області розрізняє моно-проєкти та міждисциплінарні проєкти [69; 45].

Моно-проєкти залишаються в межах самої математики, досліджуючи теми з алгебри або аналізу без істотної інтеграції інших дисциплін. Наприклад,

дослідження поведінки раціональних функцій або вивчення технік інтегрування є моно-проектом, зосередженим виключно на математичному змісті.

На відміну від цього, міждисциплінарні проекти інтегрують математику з одним або кількома іншими предметами, такими як фізика, економіка, інформатика або біологія. Ці проекти ілюструють зв'язки між математикою та іншими галузями, показуючи, як математичні поняття застосовуються в різних сферах. Проект моделювання зростання населення інтегрує математику з біологією, а аналіз проблем економічної оптимізації пов'язує математику з економікою.

Тривалість є ще одним важливим критерієм класифікації проектів [46; 5], оскільки часові рамки значно впливають на дизайн та складність проекту.

Міні-проекти зазвичай тривають від одного до трьох уроків і зосереджуються на відносно вузьких темах або конкретних навичках, надаючи вступ до проектного навчання без значних часових затрат.

Короткострокові проекти тривають кілька тижнів, що дозволяє провести ґрунтовне дослідження, залишаючись в межах типової структури семестру. Багато проектів з алгебри та аналізу належать до цієї категорії, наприклад, комплексні дослідження сімейств функцій або застосування диференціальних рівнянь до конкретних контекстів.

Довгострокові проекти тривають місяці або цілі навчальні роки, що дозволяє глибоко досліджувати складні теми і особливо підходить для високомотивованих студентів спеціалізованих математичних програм, які можуть займатися розширеним математичним моделюванням, оригінальними дослідженнями або комплексними творчими проектами.

Соціальна організація проектної роботи, що відображається в класифікації за кількістю учасників, значно впливає на співпрацю та індивідуальну відповідальність. Так вважають Триус Ю. В., Герасименко І. В. [43], та учасники Всеукраїнської науково-практичної конференції щодо особливостей навчання природничо-математичних дисциплін у профільній школі [32].

Індивідуальні проєкти залучають окремих студентів до незалежного дослідження, розвиваючи самокерування та особисту відповідальність, і добре підходять для високомотивованих студентів, які переслідують конкретні інтереси.

Парні проєкти передбачають співпрацю двох студентів протягом усього процесу реалізації проєкту, забезпечуючи соціальну підтримку та зберігаючи значну індивідуальну відповідальність, що є особливо ефективним для студентів, які тільки починають проєктне навчання.

Групові проєкти залучають команди з трьох до шести студентів до спільних досліджень, розвиваючи навички командної роботи та комунікації, дозволяючи розподілити роботу для складних досліджень та створюючи можливості для навчання у однолітків.

Колективні або класні проєкти передбачають роботу всього класу над спільними цілями, тоді як окремі студенти або невеликі групи беруть на себе відповідальність за конкретні компоненти, вирішуючи складні проблеми, що вимагають різноманітних знань.

Нарешті, проєкти можна розрізняти за *основними педагогічними цілями*, які визначають загальний підхід до розробки та оцінювання [2].

Проєкти з розвитку компетентностей зосереджуються на розвитку конкретних навичок, таких як математичне моделювання, написання доказів або використання технологій для математичних досліджень, надаючи пріоритет розвитку навичок в автентичних контекстах.

Проєкти з освоєння змісту наголошують на глибокому розумінні конкретних математичних понять через розширене дослідження, застосування та пояснення, допомагаючи учням розвинути всебічне та міцне розуміння конкретних тем.

Інтеграційні проєкти мають на меті синтезувати знання та навички з різних галузей, допомагаючи учням побачити зв'язки всередині математики або між математикою та іншими галузями, тим самим розвиваючи цілісне розуміння та здатність до перенесення знань, що є необхідними для просунутого математичного мислення.

Впровадження проєктних технологій у математиці вимагає балансу між математичною строгістю та доступністю, забезпечення структури при одночасному дотриманні автономії, а також дотримання вимог навчальної програми при проведенні автентичних досліджень. Ці проблеми досліджено у працях таких науковців як: Thomas J. W. [75], Boaler [47], Schoenfeld [70], Hiebert et al. [55]. В алгебрі та основах аналізу учні можуть досліджувати сімейства функцій, моделювати реальні явища, вивчати проблеми оптимізації або досліджувати історичний розвиток математичного аналізу. Ці системи класифікації забезпечують основу для розробки різноманітних проєктних завдань, що відповідають множинним освітнім цілям і розвивають комплексні математичні компетенції, необхідні для поглибленого вивчення та кар'єри в математиці та суміжних галузях.

1.2. Застосування проєктних технологій у навчанні алгебри та початків аналізу

Застосування проєктних технологій у викладанні алгебри та основ аналізу є значною методологічною інновацією, яка враховує як абстрактний характер математичних дисциплін, так і необхідність розвитку спеціалізованого рівня навичок мислення. У цьому розділі розглядаються особливості, можливості та виклики, пов'язані із впровадженням проєктного навчання в цих фундаментальних галузях математики.

Проблеми застосування проєктних технологій у викладанні алгебри та основ аналізу досліджувались у працях таких зарубіжних Thomas J. W. [75], English & Gainsburg [52], Holm [56], De Lange [50] та вітчизняних дослідників Тарасенкова Н. А. [41], Слєпкань З. І. [39], Бесєдін Б., Кириченко А. [3].

Алгебра та основи аналізу є основними компонентами спеціалізованої математичної освіти, що забезпечують необхідні концептуальні основи та аналітичні інструменти для просунутої математичної роботи. Ці галузі характеризуються високим рівнем абстракції, суворими логічними структурами

та широким використанням символічних операцій, що відрізняє їх від більш конкретних або візуально інтуїтивних галузей математики. Абстрактний характер алгебраїчних структур та аналітичних понять відкриває як унікальні можливості, так і особливі виклики для проєктного навчання.

Вивчення алгебри на спеціалізованому рівні охоплює різні теми, включаючи поліноміальні рівняння та нерівності, системи рівнянь, функції та їх властивості, послідовності та ряди, а також елементи теорії чисел [26; 4].

Аналіз знайомить учнів з фундаментальними поняттями меж, неперервності, диференціювання та інтегрування, а також їх застосуванням. Ці теми традиційно викладаються шляхом систематичного представлення визначень, теорем та методів розв'язання, а учні практикують розв'язання задач за допомогою вправ зростаючої складності [9]. Хоча такий підхід ефективно розвиває процедурну вправність та ознайомлення зі стандартними типами задач, він може неадекватно вирішувати питання розвитку концептуального розуміння, творчих здібностей до розв'язання задач та усвідомлення значущості та сили математичних ідей.

Як вважають Krajcik & Blumenfeld [61] та автори «Нової української школи» [30] проєктні технології пропонують додаткові підходи, які можуть збагатити традиційне навчання, залучаючи учнів до розширеного дослідження, пов'язуючи абстрактні поняття зі значущими контекстами та розвиваючи дослідницькі та комунікативні компетенції поряд з математичними знаннями. Виклик полягає в розробці проєктів, які зберігають математичну строгість і відповідають вимогам навчальної програми, одночасно надаючи автентичні можливості для досліджень, спрямованих на учнів, та творчого вирішення задач. Успішна реалізація вимагає ретельної уваги до специфічних характеристик алгебраїчного та аналітичного змісту та продуманої інтеграції проєктної роботи з іншими методами навчання. Застосування проєктних технологій у викладанні алгебри та основ аналізу.

Алгебра надає багаті можливості для різних типів проєктної роботи, які можуть поглибити концептуальне розуміння та продемонструвати силу та

застосовність алгебраїчного мислення [49; 4]. Дослідницькі проекти з алгебри можуть включати дослідження властивостей конкретних сімейств функцій, таких як вивчення поведінки раціональних функцій з різними типами асимптот, вивчення впливу параметрів на графіки та властивості поліноміальних функцій або аналіз взаємозв'язку між алгебраїчними та геометричними представленнями квадратичних функцій [10]. Учні можуть формулювати гіпотези на основі конкретних прикладів, перевіряти ці гіпотези на додаткових випадках і намагатися довести або уточнити свої гіпотези. Такі дослідження розвивають математичне мислення та навички доведення, одночасно формуючи глибоке розуміння функціональних взаємозв'язків.

Прикладні проекти можуть пов'язувати алгебраїчні поняття з реальними явищами та практичним вирішенням проблем [12]. Учні можуть розробляти математичні моделі, використовуючи різні типи функцій для представлення даних з фізики, економіки, біології або соціальних наук, аналізуючи, наскільки різні типи функцій відповідають спостережуваним закономірностям, та інтерпретуючи параметри в контексті. Проекти можуть включати задачі оптимізації, де учні використовують алгебраїчні методи для знаходження максимальних або мінімальних значень у практичних ситуаціях, таких як максимізація прибутку, мінімізація витрат або оптимізація параметрів проектування. Ці застосування демонструють алгебру як потужний інструмент для розуміння та вирішення реальних проблем, одночасно розвиваючи здібності учнів до математизації реальних ситуацій.

Історичні та інформаційні проекти можуть досліджувати розвиток алгебраїчних ідей та методів, вивчаючи, як різні культури та математики сприяли розвитку алгебраїчних знань [57; 54]. Учні можуть досліджувати еволюцію символічної нотації, історичний розвиток методів розв'язання поліноміальних рівнянь або внесок конкретних математиків, таких як аль-Хорезмі, Вієт або Галуа [59; 74]. Ці проекти допомагають учням розуміти математику як людську діяльність з культурними та історичними вимірами, що потенційно збільшує зацікавленість та оцінку математичних ідей.

Творчі проєкти дозволяють учням висловлювати алгебраїчні поняття за допомогою різних засобів масової інформації та інноваційних підходів [73; 68]. Учні можуть створювати візуальні або інтерактивні представлення функціональних перетворень, розробляти освітні ігри, що зміцнюють розуміння рівнянь і нерівностей, створювати відеоролики, що пояснюють алгебраїчні поняття для конкретної аудиторії, або розробляти художні твори, що включають математичні закономірності та взаємозв'язки. Ці проєкти залучають різноманітні таланти та навчальні уподобання, вимагаючи при цьому глибокого розуміння математичного змісту для ефективної комунікації та представлення.

На основі праць Бурда М. І., Колесник Т. В. [9], Бурда М. І. [8] можна зауважити, що основи аналізу пропонують особливо багатий матеріал для проєктного навчання, оскільки фундаментальні поняття меж, похідних та інтегралів пов'язані з численними застосуваннями та піднімають цікаві теоретичні питання.

Дослідницькі проєкти можуть досліджувати поведінку послідовностей та рядів, вивчати критерії збіжності, аналізувати конкретні приклади з цікавими властивостями або досліджувати взаємозв'язки між різними типами збіжності. Учні можуть досліджувати властивості похідних, наприклад, вивчати функції з незвичайними диференціальними характеристиками, досліджувати взаємозв'язок між диференційованістю та неперервністю або досліджувати застосування теореми про середнє значення [19].

Проєкти з інтеграції можуть зосереджуватися на порівнянні різних методів інтеграції, дослідженні невластивих інтегралів та їх збіжності або дослідженні геометричних та фізичних інтерпретацій визначених інтегралів.

Прикладні проєкти з аналізу часто пов'язані з фізикою, інженерією та іншими науками, де диференціальне числення надає необхідні інструменти для моделювання та аналізу [19; 16]. Учні можуть моделювати рух за допомогою похідних та інтегралів, аналізуючи реальні дані з фізичних експериментів або спортивних досягнень.

Проекти можуть включати задачі оптимізації, що вимагають методів математичного аналізу, такі як пошук оптимальних форм для контейнерів, проектування ефективних маршрутів транспортування або максимізація видобутку стійких ресурсів. Застосування до темпів змін у різних контекстах - зростання населення, хімічні реакції, економічні тенденції - надають значущі контексти для розуміння похідних.

Проекти з інтеграції можуть включати обчислення площ, об'ємів, роботи або інших величин, визначених через накопичення, з застосуваннями, що варіюються від інженерного проектування до теорії ймовірностей.

Історичні проекти можуть простежувати розвиток математичного аналізу, досліджуючи внески Ньютона та Лейбніца, вивчаючи ранні передбачення ідей математичного аналізу Архімедом або середньовічними математиками, або досліджуючи XIX ст., коли Коші, Вейерштрас та інші вчені зробили аналіз більш строгим [51; 48]. Ці дослідження висвітлюють концептуальні виклики, пов'язані з розробкою строгих основ диференціального числення, і допомагають студентам оцінити ретельне міркування, необхідне для математичної точності.

Філософські проекти можуть досліджувати фундаментальні питання про нескінченність, нескінченно малі величини та природу безперервної зміни, які мотивували значну частину історичного розвитку аналізу [11; 64].

Міждисциплінарні проекти природно впливають з аналізу завдяки його широкому застосуванню. Фізика надає численні контексти, де диференціальне числення є необхідним, від кінематики та динаміки до електромагнетизму та термодинаміки. Економіка використовує похідні для граничного аналізу та оптимізації, а біологія застосовує диференціальні рівняння для моделювання популяцій та фізіологічних процесів. Зв'язки з інформатикою включають чисельні методи, алгоритми оптимізації та обчислювальні підходи до математичного аналізу. Проекти, які автентично інтегрують аналіз з цими галузями, допомагають учням розуміти математику як живий інструмент для наукової та практичної роботи, а не як ізольований академічний предмет.

Як вважають науковці Величко В. Є., Федоренко О. Г., Хорішко Д. С. [14], Бойко І. С., Оракбаєв Д. [7] впровадження проєктних технологій в алгебрі та аналізі вимагає ретельного педагогічного планування, щоб проєкти ефективно підтримували навчальні цілі, зберігаючи при цьому математичну цілісність. Вчителі повинні враховувати, як проєкти вписуються в навчальну програму, забезпечуючи, щоб проєктна робота доповнювала, а не замінювала необхідне пряме навчання та практику. Баланс між структурованим вивченням фундаментальних понять і навичок та відкритим проєктним дослідженням має вирішальне значення, особливо з огляду на послідовний і кумулятивний характер математичних знань.

При розробці проєктів необхідно враховувати відповідний рівень математичної строгості та точності, що очікується на спеціалізованому рівні. Хоча проєкти повинні давати можливість учням проявити творчість та самостійність, вони також повинні відповідати стандартам математичної правильності, чіткості визначень, логічного мислення та належного використання математичної мови та нотації [17; 27]. Вчителі повинні надавати підтримку, яка допомагає учням дотримуватися цих стандартів, одночасно забезпечуючи значну незалежність та можливість приймати рішення [35; 62]. Це може включати надання чітких критеріїв математичної якості, пропонування моделей відмінної математичної комунікації та надання формувального зворотного зв'язку протягом усього процесу реалізації проєкту.

Як вважають Larmer et al. [65], Бахтіярова Х. Ш., Арістова А. В. та ін. [2] оцінювання математичних проєктів представляє особливі виклики, оскільки вчителі повинні оцінювати як математичний зміст, так і навички процесу, такі як формулювання проблеми, методологія дослідження та ефективність комунікації. Розробка комплексних критеріїв, що охоплюють різні аспекти якості проєкту, допомагає забезпечити справедливе та послідовне оцінювання, одночасно повідомляючи учням про очікування. Оцінювання повинно враховувати як індивідуальний внесок, так і спільні досягнення в групових проєктах, підтримуючи відповідальність та сприяючи кооперативному навчанню.

Управління часом є практичним викликом, оскільки проєкти вимагають значного часу в класі та періодів самостійної роботи [14]. Вчителі мають ретельно планувати, коли і як впроваджувати проєкти в академічний календар, враховуючи темп навчання, графік іспитів та інші академічні зобов'язання учнів. Міні-проєкти та короткострокові проєкти можуть бути більш доцільними для висвітлення конкретних тем, тоді як довгострокові проєкти можуть слугувати підсумковим досвідом, що інтегрує різні концепції та навички, розвинені протягом семестру або року.

Як вважає Моторіна В. Г. [28] диференціація є важливою при реалізації проєктів у класах з різними здібностями та інтересами учнів. Хоча спеціалізовані класи з математики зазвичай складаються з учнів, які досягають відносно високих результатів, існують значні відмінності в інтересах, стилях навчання та конкретних сильних сторонах. Надання вибору тем, методів та форматів презентації проєктів дозволяє учням займатися сферами, що їх цікавлять, працюючи на відповідному рівні складності. Вчителі можуть надавати різні рівні підтримки та допомоги на основі індивідуальних потреб, забезпечуючи, щоб усі учні могли повноцінно брати участь у проєктній роботі.

Технології проєктів не слід розглядати як заміну традиційного навчання математики, а скоріше як його доповнення та збагачення. Можна сказати, що ефективне навчання математики на спеціалізованому рівні інтегрує кілька педагогічних підходів, кожен з яких сприяє різним аспектам математичного розвитку [55; 47]. Традиційне навчання залишається необхідним для введення нових понять, демонстрації технік та побудови систематичних знань. Структурована практика розвиває процедурну вільність та навички вирішення проблем. Обговорення та спільне вирішення проблем розвивають математичні комунікативні здібності та знайомлять учнів з різноманітними підходами до вирішення проблем. Отже, проєкти додають автентичні контексти для застосування знань, розширюють можливості для дослідження та творчості, а також сприяють розвитку навичок дослідження та презентації.

Синергія між різними підходами до навчання підвищує загальну ефективність навчання. Поняття, представлені за допомогою традиційного навчання, стають об'єктами більш глибокого дослідження в проєктах. Навички, розвинені за допомогою практики, знаходять значуще застосування в контексті проєктів. Дослідження, проведені під час проєктів, можуть піднімати питання, що мотивують до подальшого систематичного вивчення. На думку науковців Lesh & Zawojewski [67], English & Sriraman [53] така інтеграція створює багате та різноманітне навчальне середовище, яке відповідає різним освітнім цілям та залучає учнів з різними навчальними уподобаннями та сильними сторонами.

Вчителі, які розробляють проєктні підходи в алгебрі та аналізі, повинні ретельно планувати, як проєкти пов'язані з іншими навчальними заходами та розширюють їх. Проєкти можуть бути розміщені в різних точках навчальної послідовності: на початку, щоб викликати інтерес і мотивацію до нових тем, в середині, щоб поглибити розуміння і дослідити застосування нещодавно вивчених понять, або в кінці, щоб узагальнити і закріпити знання з декількох тем. Конкретне розміщення залежить від цілей проєкту, характеру математичного змісту, а також потреб і особливостей конкретних груп учнів [44].

1.3. Характеристика профільного рівню математичної освіти

Спеціалізований рівень математичної освіти є окремим освітнім напрямом, що розроблений для учнів з підвищеним інтересом, здібностями та мотивацією до математики. Розуміння специфічних особливостей цього рівня освіти є необхідним для розробки відповідних педагогічних підходів, включаючи ефективне впровадження проєктних технологій у викладанні алгебри та основ аналізу.

Згідно із Законом України «Про повну загальну середню освіту» [18], профільне навчання є «способом організації освітнього процесу та диференціації змісту освіти у закладах загальної середньої освіти III ступеня за рахунок змін у

структурі, змісті, обсязі та організації навчання відповідно до здібностей, інтересів і потреб здобувачів освіти» (стаття 1).

Спеціалізована математична освіта - це освітні програми та заклади, що забезпечують поглиблене, інтенсивне навчання математики для учнів, які демонструють виняткові математичні здібності або сильний інтерес до вивчення математичних дисциплін. Цей рівень освіти існує в різних організаційних формах, включаючи спеціалізовані математичні школи, ліцеї, гімназії з математичним профілем та спеціалізовані класи в загальноосвітніх школах. Основною метою спеціалізованої математичної освіти є надання збагаченого та прискореного навчального плану, що розвиває поглиблені математичні знання, складні навички вирішення проблем та дослідницькі компетенції, необхідні для вищої освіти в галузі математики, природничих наук, інженерії, інформатики та суміжних дисциплін.

Спеціалізований рівень принципово відрізняється від загальної математичної освіти як за глибиною та широтою охоплення змісту, так і за темпом навчання, педагогічними підходами та освітніми цілями. Тоді як загальна математична освіта має на меті надати всім учням функціональну математичну грамотність та базові навички вирішення проблем, застосовні в повсякденному житті та різних професіях, спеціалізована математична освіта переслідує більш амбітні цілі розвитку глибокого концептуального розуміння, математичної креативності, суворого логічного мислення та підготовки до професійної математичної роботи. Ця відмінність визначає структуру навчальної програми, методи викладання, практику оцінювання та загальне навчальне середовище в спеціалізованих математичних програмах.

На спеціалізованому рівні характеризується значно більшим обсягом і глибиною математичного змісту порівняно з програмами загальної освіти. Учні вивчають математику значно більше годин на тиждень, зазвичай від п'яти до восьми годин, порівняно з трьома-чотирма годинами в загальних програмах. Це збільшення часу дозволяє охопити теми, які є необов'язковими або відсутніми в загальних навчальних планах. Згідно з Типовою освітньою програмою для

закладів загальної середньої освіти III ступеня [42], профільне вивчення математики включає такі розділи як: «Числа і вирази», «Рівняння, нерівності та їх системи», «Функції», «Початки математичного аналізу», «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики».

Окрім збільшення кількості, спеціалізована навчальна програма підкреслює якісні відмінності в підході до математичного змісту. Теми досліджуються з більшою математичною строгістю, включаючи ретельну увагу до визначень, теорем та доказів. Учні займаються теоретичними аспектами математики, розуміючи не лише як застосовувати процедури, але й чому ці процедури працюють та як будуються і перевіряються математичні знання. Навчальна програма включає більш складні задачі, що вимагають творчого мислення, багатоетапного міркування та синтезу понять з різних математичних областей. Часто зустрічаються нестандартні задачі та задачі олімпійського типу, що розвивають у студентів здатність підходити до незнайомих ситуацій та розробляти нові стратегії вирішення.

Спеціалізована навчальна програма також наголошує на зв'язках всередині математики та між математикою й іншими дисциплінами. Учні знайомляться з темами, що висвітлюють єдність математичних знань, бачать, як поняття з алгебри пов'язані з геометрією, як дискретна та неперервна математика доповнюють одна одну, і як абстрактні теоретичні розробки дають змогу практичного застосування. Міждисциплінарні зв'язки, зокрема з фізикою, інформатикою та економікою, отримують особливу увагу, демонструючи математику як живий інструмент для наукової та практичної роботи, а не як ізольований академічний предмет.

Учні, які навчаються за спеціалізованими математичними програмами, зазвичай виявляють характеристики, що відрізняють їх від загальної учнівської популяції та створюють особливі можливості та виклики для навчання. Ці учні, як правило, демонструють сильну схильність до абстрактного мислення та логічного міркування, виявляючи здатність комфортно працювати з символічними представленнями, формальними визначеннями та дедуктивними

аргументами. Вони часто виявляють внутрішню мотивацію до вивчення математики, займаючись математичними проблемами та дослідженнями, що виходять за межі обов'язкових робіт, з щирого інтересу, а не лише через зовнішні винагороди чи вимоги.

За дослідженнями Krutetskii [63], Sheffield [71], Sriraman [72] Однак учні, які спеціалізуються на математиці, також демонструють значну різноманітність у своїх сильних сторонах, інтересах, стилях навчання та освітніх цілях. Деякі учні виявляють себе в обчислювальних та алгоритмічних аспектах математики, тоді як інші тяжіють до теоретичної та доказової роботи. Деякі віддають перевагу конкретним, орієнтованим на застосування задачам, тоді як інші насолоджуються абстрактним концептуальним дослідженням. Деякі учні прагнуть до кар'єри в чистій математиці або теоретичній фізиці, тоді як інші мають намір застосовувати математичні знання в інженерії, інформатиці, економіці або інших галузях. Ця різноманітність вимагає диференційованих педагогічних підходів, які враховують різноманітні інтереси та сильні сторони, зберігаючи при цьому належним чином високі стандарти для всіх учнів.

Соціальні та психологічні характеристики учнів, які спеціалізуються на математиці, також заслуговують на увагу. Ці учні часто сильно ідентифікують себе зі своїми математичними здібностями та інтересами, що може бути як мотивуючим, так і потенційно обмежуючим, якщо математичні труднощі загрожують самооцінці. Конкурентна атмосфера, яка іноді виникає в спеціалізованих програмах, може стимулювати досягнення, але також може викликати тривогу або підривати спільне навчання. Вчителі повинні створювати навчальне середовище, яке ставить перед учнями відповідні виклики, одночасно підтримуючи здорове ставлення до помилок, труднощів та спільних досліджень як необхідних елементів математичного розвитку.

Як вважає Schoenfeld [70], Кузьмінський А. І., Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А. [23] викладання на спеціалізованому рівні вимагає педагогічних підходів, адаптованих до конкретних особливостей навчальної програми та учнів. Хоча традиційне навчання залишається важливим для введення нових понять і

демонстрації технік, баланс зміщується в бік більш орієнтованих на учнів і дослідницьких методів порівняно із загальною математичною освітою. Вчителі часто використовують підходи, засновані на вирішенні проблем, де учні борються зі складними завданнями перед прямим навчанням, відкриваючи поняття та методи через кероване дослідження [16; 20]. Сократівське опитування та математична дискусія відіграють важливу роль, а вчителі сприяють дослідженню ідей за допомогою ретельно підібраних питань, а не просто презентують інформацію.

Як вважають Schoenfeld [70], Кузьмінський А. І., Тарасенкова Н. А. [23], Акуленко І. А. [1] роль вчителя в спеціалізованій математичній освіті виходить за межі передачі змісту і включає наставництво та керівництво у розвитку математичного мислення [7]. Вчителі моделюють математичні практики, такі як формулювання проблем, створення гіпотез, побудова доказів та критичний аналіз аргументів. Вони допомагають учням розвивати метакогнітивні навички, навчаючи їх контролювати власне розуміння, виявляти прогалини або плутанину та застосовувати відповідні стратегії вирішення проблем. Вони заохочують математичну допитливість та незалежність, підтримуючи учнів у реалізації інтересів, що виходять за межі стандартної навчальної програми, через незалежні проєкти, підготовку до конкурсів або поглиблене читання.

Педагогічні підходи на спеціалізованому рівні наголошують на розвитку математичних комунікативних навичок, як письмових, так і усних [38]. Учні вчаться чітко і точно формулювати математичні ідеї, будувати строгі аргументи, критично оцінювати міркування та презентувати результати різних аудиторій. Значна увага приділяється спільній навчальній діяльності, під час якої учні часто працюють в парах або невеликих групах над складними завданнями, навчаючись на прикладах своїх колег та їхніх підходах до вирішення завдань, одночасно розвиваючи навички командної роботи, необхідні для професійної математичної діяльності.

Практики оцінювання в спеціалізованій математичній освіті відображають ширший спектр цінних результатів порівняно із загальною освітою [29; 24]. Хоча

процедурні навички та точність обчислень залишаються важливими, оцінювання також включає оцінку концептуального розуміння, вміння будувати докази, креативність у вирішенні задач та математичну комунікацію. Зазначимо, що вчителі використовують різноманітні методи оцінювання, включаючи традиційні іспити, математичні есе або завдання з написання доказів, набори задач з нестандартними завданнями, усні іспити, на яких студенти пояснюють своє міркування, та оцінювання на основі проєктів, що оцінює розширені дослідження. Таке різноманіття підходів до оцінювання забезпечує більш комплексне уявлення про навчання учнів та сприяє розвитку різноманітних математичних компетентностей [22; 15].

Спеціалізований рівень математичної освіти переслідує освітні цілі, що виходять за межі оволодіння змістом, на якому наголошується в загальних програмах. Основною метою є розвиток глибокого концептуального розуміння фундаментальних математичних ідей, а не лише вміння користуватися процедурами та алгоритмами. Як вважають Сафонова І. Я. [36], Коваль Л. В., Скворцова С. О. [20], учні повинні розуміти логічну структуру математики, як визначення, аксіоми, теореми та доведення пов'язані з побудовою математичних знань, і чому математичні твердження є істинними, а не просто тим, що вони стверджують [27]. Ця концептуальна глибина дозволяє гнучко застосовувати знання в нових ситуаціях і забезпечує основу для поглибленого вивчення математики.

Розвиток математичного мислення та навичок вирішення задач є ще однією центральною метою. На думку Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А. [4] учні повинні набути загальних евристичних методів і стратегій вирішення проблем, які можна застосовувати в різних математичних контекстах, таких як вивчення особливих випадків, пошук закономірностей, робота в зворотному напрямку або переформулювання проблем [17; 33]. Вони повинні розвинути математичну інтуїцію, яка направляє початкові підходи до проблем і допомагає оцінити правдоподібність гіпотез або рішень. Вони повинні навчитися наполегливо вирішувати складні проблеми, терпіти невизначеність і

розчарування, зберігаючи впевненість у своїй кінцевій здатності знайти рішення або зрозуміти труднощі.

Спеціалізована математична освіта спрямована на розвиток дослідницьких навичок та схильності до математичних досліджень [66; 33]. Учні повинні навчитися формулювати математичні питання, систематично проводити дослідження, формулювати та перевіряти гіпотези, будувати докази або контр-приклади та ефективно повідомляти про результати. Вони повинні розуміти математику як живу дисципліну, в якій постійно генеруються нові знання, а не як фіксований масив встановлених фактів. Вони повинні розвивати цікавість до математичних явищ та впевненість у своїй здатності самостійно досліджувати питання.

Підготовка до поглибленого вивчення та професійної діяльності в галузі математики та суміжних галузях є основною метою спеціалізованої освіти [26; 1]. Учні мають набути базових знань, технічних навичок, мисленнєвих здібностей та робочих навичок, необхідних для успішного навчання на університетських математичних програмах та подальшої кар'єри, що вимагає високого рівня математичних знань. Це включає не тільки оволодіння конкретним змістом, а й розвиток стратегій навчання, навичок управління часом, вміння працювати з абстрактним та технічним матеріалом, а також розуміння того, як математика пов'язана з різними застосуваннями та іншими дисциплінами.

Спеціалізований рівень математичної освіти існує в межах різних організаційних структур, які формують освітній досвід. Спеціалізовані математичні школи, що обслуговують учнів усього міста або регіону, зазвичай відбирають учнів за допомогою конкурсних вступних іспитів і забезпечують інтенсивне навчання математики поряд із потужними програмами з суміжних наук. Ці заклади часто розвивають особливу математичну культуру з традиціями участі в конкурсах, дослідницьких проєктах та зв'язками з університетами та математичними науково-дослідними установами.

Математичні ліцеї або гімназії в рамках більших освітніх систем зазвичай пропонують спеціалізовані програми для учнів старших класів середньої школи, часто поєднуючи вищу математику з підготовкою з природничих наук, забезпечуючи шляхи до наукових і технічних університетських програм. Спеціалізовані класи в загальноосвітніх школах дозволяють учням інтенсивно вивчати математику, залишаючись у звичному шкільному середовищі, хоча вони можуть мати менше ресурсів і менш розвинену математичну культуру, ніж спеціалізовані установи.

Інституційний контекст впливає не тільки на навчальну програму та викладання, а й на культуру однолітків, формування ідентичності учнів та зв'язки з ширшими математичними спільнотами. Спеціалізовані установи часто сприяють участі учнів у математичних олімпіадах та конкурсах, серіях лекцій та семінарах в університетах, дослідницьких проєктах із викладачами університетів, а також літніх математичних таборів або програмах. Ці можливості розширюють навчання за межі класу та допомагають учням розвивати ідентичність математиків та зв'язки з математичними спільнотами, що підтримують постійну зацікавленість у цій дисципліні.

На думку науковців Кузьмінський А. І., Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А. [23], Семенець С. П. [37] впровадження відповідної освіти на спеціалізованому рівні пов'язане з низкою викликів, які вимагають постійної уваги [37]. Підтримка належного балансу між прискоренням і глибиною є постійним викликом, оскільки тиск з боку необхідності охопити великий обсяг матеріалу може суперечити цілям розвитку глибокого розуміння та навичок вирішення проблем. Вчителі мають протистояти спокусі пожертвувати глибиною заради охоплення матеріалу, забезпечуючи, щоб учні набували міцних концептуальних основ, навіть просуваючись по матеріалу швидше, ніж у загальних програмах.

Підтримка учнів у рамках спеціалізованих програм вимагає диференціації, незважаючи на відносно однорідний відбір учнів з високими досягненнями [20; 40]. Індивідуальні відмінності в конкретних сильних сторонах, стилях навчання, інтересах та темпі навчання вимагають гнучких педагогічних підходів, які

дозволяють учням йти різними шляхами, дотримуючись при цьому загальних високих стандартів. Проєктне навчання та інші підходи, орієнтовані на учнів, можуть надати цінні можливості для диференціації в рамках спеціалізованих навчальних програм [28].

Як вважає Лов'янова І. В. [25] створення здорового навчального середовища, яке забезпечує баланс між конкуренцією та співпрацею, є постійним викликом. Хоча конкуренція може мотивувати до досягнень і забезпечувати цінну підготовку до математичних олімпіад та вступу до університету, надмірний акцент на конкурентному порівнянні може підірвати спільне навчання, створити нездорову тривогу або змусити учнів занадто вузько визначати успіх. Вчителі повинні свідомо культивувати норми, які цінують співпрацю, відзначають різноманітні форми математичних досягнень і розглядають помилки та труднощі як природні складові навчання, а не як ознаки неадекватності.

Поєднання абстрактного математичного змісту зі значущими контекстами та застосуваннями допомагає учням оцінити актуальність і силу математичних ідей, зберігаючи при цьому теоретичну глибину, характерну для спеціалізованих програм. Проєктні технології пропонують цінні підходи для досягнення цього зв'язку, дозволяючи учням застосовувати математичні знання до реальних проблем, одночасно розвиваючи дослідницькі та комунікативні компетенції, необхідні для професійної математичної роботи. Продумана інтеграція проєктного навчання з іншими методами навчання може підвищити якість та ефективність спеціалізованої математичної освіти, сприяючи розвитку всебічно розвинених осіб, які володіють математичними знаннями та готові до поглибленого навчання та різноманітних кар'єрних шляхів.

Висновки до 1 розділу

Теоретичний аналіз, представлений у розділі 1, є основою для розуміння та реалізації проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарної аналітики як педагогічної інновації.

Дослідження показує, що проєктне навчання, яке бере свій початок у прогресивних педагогічних філософіях Джона Дьюї та було систематично розвинуте Вільямом Хердом Кілпатріком на початку XX ст., змінилося, на ґрунтовній основі конструктивістських теорій навчання, що наголошують на побудові знань через активну участь, соціальну взаємодію та вирішення реальних проблем.

Показано, що технології освітніх проєктів є методом навчання, що передбачає систему, за допомогою якої учні набувають знань і навичок через тривалий дослідницький процес, побудований навколо складних, автентичних питань і ретельно розроблених продуктів або презентацій. Такий підхід трансформує роль вчителя з передавача знань на фасилітатора, тоді як учні беруть на себе більшу відповідальність за своє навчання.

Показано, що характерними рисами освітніх проєктів є цілеспрямованість та орієнтація на результат, автономність та ініціативність учнів, тривалий термін, що дозволяє глибоко зануритися в математичний контент, міждисциплінарні зв'язки, практична значущість, що демонструють здатність учнів синтезувати знання та ефективно комунікувати складні ідеї.

Наведено системи класифікації, що надають основу для розуміння різноманітності підходів до проєктів. Проєкти класифікують за типом домінуючої діяльності (дослідницька, прикладна/практична, інформаційна або творча), тематичною сферою (моно-проєкти проти міждисциплінарних проєктів), тривалістю (міні-проєкти, короткострокові або довгострокові проєкти), соціальною організацією (індивідуальні, парні, групові або колективні проєкти) та основними педагогічними цілями (розвиток компетентностей, оволодіння змістом або інтеграційні проєкти).

Показано, що застосування проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарної аналітики має специфічні виклики. Абстрактний характер алгебраїчних структур та аналітичних понять створює особливий контекст для проєктного навчання.

Визначено, що дослідницькі проєкти можуть досліджувати властивості сімейств функцій, послідовностей і рядів або похідних та інтегралів, розвиваючи наукове мислення та дослідницькі навички; прикладні проєкти пов'язують алгебраїчні та аналітичні поняття з реальними явищами у фізиці, інженерії, економіці та інших науках; історичні та інформаційні проєкти простежують розвиток математичних ідей, допомагаючи учням розуміти математику як людську діяльність у межах культурних та історичних вимірів; креативні проєкти дозволяють учням висловлювати математичні поняття за допомогою різних засобів масової інформації та інноваційних підходів тощо.

Доведено, що впровадження проєктних технологій в алгебрі та аналізі вимагає ретельного педагогічного планування. Вчителі мають: збалансовувати математичну строгість і точність, що очікуються на спеціалізованому рівні, з можливостями для творчості та автономії; оцінювати математичний зміст, навички формулювання проблеми, ефективність комунікації; впливати на управління часом, оскільки проєкти вимагають значного часу в класі та періодів самостійної роботи; проводити диференціацію, що необхідно під час впровадження проєктів у класах з різноманітними здібностями та інтересами учнів.

Схарактеризовано спеціалізований рівень математичної освіти, що показує, що він принципово відрізняється від загальної математичної освіти як за глибиною і широтою охоплення змісту, так і за темпом навчання, педагогічними підходами та освітніми цілями. Спеціалізована математична освіта переслідує такі цілі: розвиток глибокого концептуального розуміння, математичної креативності, суворого логічного мислення та підготовку до професійної математичної роботи. Учні спеціалізованого рівня зазвичай демонструють сильну схильність до абстрактного мислення та логічного

міркування, внутрішню мотивацію до вивчення математики та відданість продовженню навчання в галузі математики або суміжних наук.

Показано, що навчальна програма на спеціалізованому рівні характеризується значно більшим обсягом і глибиною математичного змісту, при цьому учні вивчають математику від п'яти до восьми годин на тиждень, порівняно з трьома-чотирма годинами в загальних програмах. Існують якісні відмінності у підході до математичного змісту, де теми досліджуються з більшою математичною строгістю, включаючи ретельну увагу до визначень, теорем і доказів.

Доведено, що проєктні технології слід розглядати як доповнення та збагачення традиційного навчання. Ефективне викладання математики на спеціалізованому рівні інтегрує педагогічні підходи, що сприяють різним аспектам математичного розвитку. Обговорення та спільне вирішення проблем розвивають математичні комунікативні здібності. Проєкти додають автентичні контексти для застосування знань, розширюють можливості для дослідження та творчості, а також сприяють розвитку навичок дослідження та презентації. Така інтеграція створює багате та різноманітне навчальне середовище, що відповідає різним освітнім цілям та залучає учнів з різними навчальними уподобаннями до створення навчальних проєктів.

РОЗДІЛ 2

ПРАКТИКА РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОЄКТНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ

2.1 Зміст та форми застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу

Оскільки проєктне навчання є освітньою технікою, розробленою для того, щоб дати змогу учням здобувати знання через практику, тісно пов'язану з реальними життєвими ситуаціями, та розвивати конкретні навички та компетенції шляхом організації проблемно-орієнтованих навчальних досліджень, воно вимагає систематичного та поступового моделювання рішень проблемних сценаріїв. Такі ситуації вимагають від учнів участі в дослідницьких зусиллях з метою дослідження та розробки шляхів створення проєктів, забезпечення їхньої безпеки та аналізу результатів.

Важливим завданням є структурування **змісту** проєкту та визначення результатів на кожному етапі.

Щоб застосувати структуровану методологію проєкту до викладання алгебри та елементарної аналітики, ми класифікуємо проєкти відповідно до такої схеми:

пріоритетним видом діяльності – творчі (ПРОЄКТ 2: «Алгебра - корінь n -го ступеня 2». Назва проєкту: «Дизайн саду: Використання n -го коренів для створення ідеальних квадратних та кубічних клумб»; ПРОЄКТ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь». Назва проєкту: «Пошук скарбів: Розв'язання рівнянь з квадратним коренем»; ПРОЄКТ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі». Назва проєкту: «Проектування мосту: аналіз паралельності та перетину сталевих балок»; ПРОЄКТ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі». Назва проєкту: «Геологічні шари: Пошук ліній розломів між шарами гірських порід»);

Приклад творчого завдання:

Практична частина

Побудова 3D-моделі геологічного розрізу

Матеріали:

- Картон або пінопласт (для шарів)
- Ножиці та клей
- Маркери (3 різні кольори)
- Лінійка
- Нитки або дріт (для ліній розломів)

Інструкція:

1. Створіть систему координат на великому аркуші картону (основа)
2. Виріжте три площини з кольорового картону:
 - Коричневий - Вапняк (шар А)
 - Жовтий - Пісковик (шар Б)
 - Синій - Сланець (шар В)
3. Розташуйте шари згідно з результатами аналізу:
 - Паралельні шари - на відповідній відстані
 - Шари що перетинаються - під кутом
4. Позначте лінії розломів червоними нитками або маркером
5. Додайте підписи:
 - Рівняння кожного шару
 - Відстані між паралельними шарами
 - Рівняння ліній розломів
6. Зробіть легенду з віком кожного шару

(Додаток Ж)

пошукові (ПРОЄКТ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня». Назва проєкту: «Проектування підвісного мосту: Сила n -х коренів у кабельній техніці»; ПРОЄКТ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями». Назва проєкту: «Математика теслярства: Спрощення вимірювань за допомогою коренів»;

ПРОЄКТ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня». Назва проєкту: «Фотолабораторія: Розуміння степенів та коренів як показників ступеня»; ПРОЄКТ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів». Назва проєкту: «Гонка вантажівок МАЗ: коли швидкості збігаються?»).

Наприклад:

Замовлення 2: Фото для виставки

Вихідні дані:

- Оригінал: $3 \text{ см} \times 5 \text{ см}$ (площа = 15 см^2)
- Потрібна площа: 135 см^2

Завдання 2.1: Знайдіть коефіцієнт збільшення площі

Завдання 2.2: Обчисліть масштаб:

$$\text{Масштаб} = (\text{коефіцієнт площі})^{\frac{1}{2}}$$

Завдання 2.3: Перетворіть у радикальну форму та обчисліть

(Додаток Г)

за предметно-змістовною сферою інтересів – екологічні (ПРОЄКТ 2: «Алгебра - корінь n-го ступеня 2». Назва проєкту: «Дизайн саду: Використання n-го коренів для створення ідеальних квадратних та кубічних клумб»);

Уявіть, що ви хочете створити квадратні та кубічні клумби у своєму шкільному саду. Якщо ви знаєте площу квадратної клумби, як ви знайдете довжину сторони? Якщо ви знаєте об'єм кубічної кашпо, як ви знайдете довжину ребра? Ось тут нам і допоможуть коріння! (Додаток Б)

комп'ютерні (ПРОЄКТ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня». Назва проєкту: «Фотолабораторія: Розуміння степенів та коренів як показників ступеня»);

Замовлення 4: Серія фото для колажу

Вам потрібно створити 3 версії одного фото:

Фото А: Масштаб = $16^{\frac{1}{4}}$

Фото Б: Масштаб = $27^{\frac{1}{3}}$

Фото В: Масштаб = $32^{\frac{2}{5}}$

Завдання 4.1: Обчисліть кожен масштаб (покажіть обчислення!)

(Додаток Г)

політехнічні (ПРОЄКТ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня». Назва проєкту: «Проектування підвісного мосту: Сила n -х коренів у кабельній техніці»; ПРОЄКТ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі». Назва проєкту: «Проектування мосту: аналіз паралельності та перетину сталевих балок»; ПРОЄКТ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі». Назва проєкту: «Геологічні шари: Пошук ліній розломів між шарами гірських порід»; ПРОЄКТ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів». Назва проєкту: «Гонка вантажівок МАЗ: коли швидкості збігаються?»);

Наприклад:

Учні досліджуватимуть властивості коренів n -го ступеня та арифметичних коренів через практичне застосування розрахунків натягу троса в проектуванні підвісних мостів, розвиваючи розуміння того, як ці математичні концепції забезпечують безпеку конструкції. (Додаток А)

художні (ПРОЄКТ 2: «Алгебра - корінь n -го ступеня 2». Назва проєкту: «Дизайн саду: Використання n -го коренів для створення ідеальних квадратних та кубічних клумб»; ПРОЄКТ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь». Назва проєкту: «Пошук скарбів: Розв'язання рівнянь з квадратним коренем»; ПРОЄКТ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями». Назва проєкту: «Математика теслярства: Спрощення вимірювань за допомогою коренів»);

Наприклад:

Завдання 1: Карта скарбів

На аркуші А4 створіть координатну площину:

1. Накресліть осі X та Y (від 0 до 25)
2. Позначте всі 5 точок з таблиці
3. З'єднайте точки лініями по порядку
4. Позначте:
 - Червона точка СТАРТ (0, 0)
 - Синя точка СКАРБ (остання точка)

- Жовта точка - небезпечні місця (де були сторонні корені)

Оформлення:

- Намалюйте острів, пальми, море
- Підпишіть кожну точку номером
- Додайте компас (північ-південь)

(Додаток Д)

за участю в розробці – індивідуальні (ПРОЄКТ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня». Назва проєкту: «Проектування підвісного мосту: Сила n -х коренів у кабельній техніці»; ПРОЄКТ 2: «Алгебра - корінь n -го ступеня 2». Назва проєкту: «Дизайн саду: Використання n -го коренів для створення ідеальних квадратних та кубічних клумб»; ПРОЄКТ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь». Назва проєкту: «Пошук скарбів: Розв'язання рівнянь з квадратним коренем»);

парні (ПРОЄКТ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями». Назва проєкту: «Математика теслярства: Спрощення вимірювань за допомогою коренів»; ПРОЄКТ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня». Назва проєкту: «Фотолабораторія: Розуміння степенів та коренів як показників ступеня»),

групові (ПРОЄКТ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі». Назва проєкту: «Проектування мосту: аналіз паралельності та перетину сталевих балок»; ПРОЄКТ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі». Назва проєкту: «Геологічні шари: Пошук ліній розломів між шарами гірських порід»; ПРОЄКТ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів». Назва проєкту: «Гонка вантажівок МАЗ: коли швидкості збігаються?»);

за терміном виконання проєкти були *короткочасними*, що передбачало їх виконання впродовж уроку, а також *середньої тривалості*, які виконувались упродовж 2-3 днів;

Прикладом короткочасних проєктів є ПРОЄКТ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня» учні вирішують завдання впродовж уроку та будують графіки. Художні проєкти, наприклад, ПРОЄКТ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у

просторі» є проєктами середньої тривалості – практичну частину з конструювання макету можна дати як домашнє завдання.

за рівнем реалізації предметних зв'язків всі наші проєкти були міжпредметними;

за формою презентації (захисту) – стендові або макетні (ПРОЄКТ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня». Назва проєкту: «Фотолабораторія: Розуміння степенів та коренів як показників ступеня»; ПРОЄКТ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі». Назва проєкту: «Проектування мосту: аналіз паралельності та перетину сталевих балок»; ПРОЄКТ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі». Назва проєкту: «Геологічні шари: Пошук ліній розломів між шарами гірських порід»);

Наприклад:

Завдання 2: Довідкова картка законів степенів

На картці А5 створіть:

Лицьова сторона:

ЗАКОНИ СТУПЕНІВ	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(ab)^n = a^n b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$	

Зворотна сторона:

- Покрокові приклади
- Таблиця часто використовуваних степенів
- Ваші власні приклади

Завдання 3: Дизайн фото-колажу

На аркуші А3 створіть макет колажу:

1. Намалюйте 6 прямокутників (фото) різних розмірів

2. Позначте кожне фото:

- Оригінальний розмір
- Масштаб (у вигляді $a^{\frac{m}{n}}$)
- Фінальний розмір

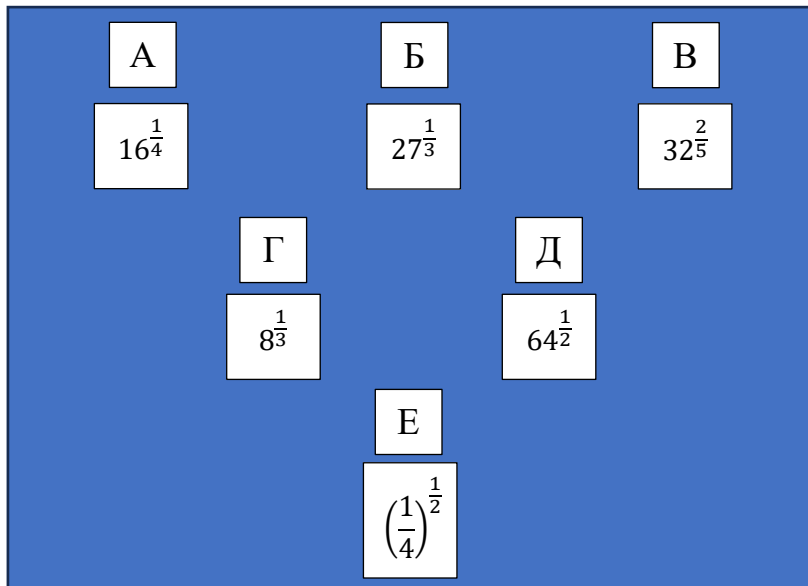
3. Використайте масштаби з Частини 4

4. Кольорове кодування:

- Синій - Оригінальний розмір
- Зелений - Збільшені фото
- Червоний - Зменшені фото

5. Додайте всі обчислення з боку або знизу

Схема колажу:



(Додаток Г)

мультимедійні (ПРОЄКТ 1: «Алгебра - корінь n-го ступеня». Назва проєкту: «Проектування підвісного мосту: Сила n-х коренів у кабельній техніці»; ПРОЄКТ 2: «Алгебра - корінь n-го ступеня 2». Назва проєкту: «Дизайн саду: Використання n-го коренів для створення ідеальних квадратних та кубічних клумб»; ПРОЄКТ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями». Назва проєкту: «Математика теслярства: Спрощення вимірювань за допомогою коренів»; ПРОЄКТ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів». Назва проєкту: «Гонка вантажівок МАЗ: коли швидкості збігаються?»);

Прикладом даного завдання є:

Графічне представлення:

Учні створюють графік, що показує зв'язок між висотою провисання та навантаженням, використовуючи різні n -ті корені. (Додаток А)

творчі (ПРОЄКТ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь». Назва проєкту: «Пошук скарбів: Розв'язання рівнянь з квадратним коренем»).

Ми опишемо найпоширеніші типи проєктів у сфері досліджень: творчі проєкти та дослідницькі проєкти.

Дослідницькі проєкти вимагають ретельно продуманої структури, чітко визначених цілей, теми дослідження, що має практичне значення для всіх учасників, соціальної значущості та ретельно спланованої методології, включаючи експериментальні підходи до обробки результатів. Вони суворо дотримуються логіки дослідження і мають відповідну структуру: визначення теми дослідження, демонстрація її актуальності, визначення цілей, предмета і цільової аудиторії, завдань і методів, а також формулювання пропонуваного підходу до вирішення проблеми.

Натомість творчі проєкти не мають детальної структури для спільної діяльності. Натомість вони побудовані навколо кінцевого результату, логіки спільних зусиль та інтересів учасників. Очікуваний результат та форма його презентації - чи то рукописний журнал, колективний колаж, фільм, вечірній захід чи свято - узгоджуються заздалегідь. Потім відповідно розробляються сценарії, плани та макети журналів, альбомів чи газет.

Слід зазначити, що ми пропонуємо *рефлексійні питання та додаткові завдання* для кожного проєкту, щоб прояснити тему дослідження.

Ми стверджуємо, що надання рефлексійних питань втілює предметну орієнтацію методології реалізації проєкту, оскільки і учні, і вчителі стають учасниками, які коригують діяльність під час виконання проєкту. Питання, призначені для керівництва рефлексією, слугують засобом управління навчальною та пізнавальною діяльністю учнів. Надаючи інформацію про результати, ці питання вдосконалюють процес набуття знань, допомагаючи

учням оцінювати власні досягнення та встановлювати критерії оцінювання. Це сприяє формуванню, розвитку та застосуванню дослідницьких навичок. Зрештою, цілі та завдання реалізації проєкту матимуть особисте значення для кожного учня.

Наведемо приклади таких запитань:

- Чому інженери використовують кубічні корені саме для оптимальних розрахунків провисання?
- Як властивості арифметичних коренів забезпечують точність розрахунків у критично важливих для безпеки застосуваннях?
- Що станеться зі стійкістю мосту, якщо ми використовуватимемо квадратні корені замість кубічних у формулі провисання?
- Як обмеження області визначення арифметичних коренів (невід'ємні підкорінники) пов'язане з фізичними обмеженнями в інженерії?

Приклад додаткового завдання:

Порівняти обчислювальну ефективність різних методів розрахунку коренів.
(Додаток А)

Оптимізація: Якщо дошки продаються по $\sqrt{75}$ см, скільки таких дошок потрібно для всіх полиць?

Дизайн: Створіть власну полицю з 4 рівнями, де всі виміри - це корені, які спрощуються до виразів з $\sqrt{2}$. (Додаток В)

Дослідження: як змінюється розмір файлу при зміні лінійних розмірів фото?

Творче завдання: створіть рекламний плакат фотолабораторії з прикладами масштабування

Програмування: напишіть формулу в Excel для автоматичного розрахунку масштабу

Зв'язок з геометрією: дослідіть, як змінюється периметр при масштабуванні площі. (Додаток Г)

2.2. Методи застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу

На основі теоретичних висновків, представлених у розділі 1, ми пропонуємо, щоб послідовність застосування дизайнерських технік у викладанні алгебри та елементарного аналізу визначалася відповідно до етапів реалізації проєкту:

- Визначення проблеми (ідентифікація завдання, що потребує вирішення);
- Вибір методів дослідження;
- Реалізація проєкту;
- Аналіз отриманих даних;
- Узагальнення та оформлення кінцевих результатів;
- Формулювання висновків.

Відповідно, завдання реалізації проєкту на кожному етапі є такими:

1. Етап дослідження - визначення теми проєкту, аналіз проблеми, постановка цілей та прогнозування потенційних результатів проєкту;

2. Етап аналізу - аналіз вхідної інформації (визначення оптимальних методів досягнення цілей проєкту, встановлення алгоритмів діяльності, планування роботи, виконання запланованих кроків);

3. Етап реалізації - виконання проєктних технік;

4. Етап презентації - систематизація результатів, підготовка та проведення презентацій, «захист» проєкту;

5. Етап контролю - аналіз результатів, оцінка якості проєкту, рефлексія.

Кожен етап реалізації методології проєкту відповідає конкретним підходам до дослідження.

Так, на *етапі дослідження* застосовуються такі методи: визначення теми проєкту; аналіз проблеми; постановка цілей; визначення дослідницьких завдань, що впливають із зазначеної проблеми; визначення потенційних результатів проєкту. Слід зазначити, що завдання та методи для етапу пошуку проєкту встановлює викладач, який знайомить студентів з темою проєкту.

Під час *етапу аналізу* проєкту викладач знайомить студентів з темою проєкту. На основі спостережень, обговорень, інтересів студентів та розуміння

їхніх базових знань викладач оцінює їхню готовність до виконання завдань проєкту.

Наприклад: у ПРОЄКТІ 1: «Алгебра - корінь n-го ступеня», ПРОЄКТІ 2: «Алгебра - Корінь n-го ступеня 2» та ПРОЄКТІ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів» передбачається самостійна робота учнів для закріплення вивченого матеріалу за темою, визначаються проблемні питання для корегування подальших дій у навчанні.

У ПРОЄКТІ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь», ПРОЄКТІ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі» та ПРОЄКТІ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі» було запропоновано провести опитування за темою під час ознайомлення учнів з проєктом для кращого розуміння їми тематики роботи.

Також у ПРОЄКТІ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями» та ПРОЄКТІ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня» завдання мають бути з'ясовані у період проведення бесіди, а також залучення до виконання роботи вчителя. Це сприяє сумісному опрацюванню практичних елементів проєкту для формування в учнів кращого розуміння роботи над проєктом а також наступних робіт за темою.

Учні, на етапі аналізу проводять аналіз вхідної інформації, шукають оптимальні методи реалізації мети проєкту, вибудовують алгоритм власної діяльності, планування роботи та виконання запланованих кроків.

Етап реалізації проєкту передбачає застосування методів відповідних меті проєкту.

Так, у ПРОЄКТІ 1: «Алгебра - корінь n-го ступеня» запропоновано обрати такі методи: аналіз, методи спрощення та графічне представлення або моделювання (за допомогою комп'ютерних технологій).

Тобто на заняттях для з'ясування рівня знань учнів ми вивчали такі формули:

Правило	Приклад
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7^4} = 7^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{4}{5}} = 7^{\frac{1+4}{5}} = 7^1 = 7$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{3125}{5}} = \sqrt[4]{625} = 5$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[6]{4})^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3 \cdot 2]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$	$\sqrt[9]{7^{18}} = \sqrt[9]{7^{2 \cdot 9}} = 7^2 = 49$
$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(\sqrt[5]{2})^5 = 2$
$\sqrt[k]{a^k} = a $ Якщо k – парне натуральне число $\sqrt[m]{a^m} = a$ Якщо m – непарне натуральне число	$\sqrt[8]{(-2)^8} = -2 = 2$

У ПРОЄКТІ 2: «Алгебра - Корінь n-го ступеня 2» доцільно було використати аналіз, розрахунок, методи спрощення та створення таблиць результатів.

Для практичних завдань на уроці з даної теми пропонувались такі завдання (уроки було розроблено окремо як частину виробничої педагогічної практики):

Легкий рівень:

- $\sqrt{49} = ?$
- $\sqrt[3]{8} = ?$
- $\sqrt[4]{16} = ?$
- $\sqrt{121} = ?$
- $\sqrt[3]{64} = ?$

Середній рівень:

- $\sqrt[3]{(125 \times 8)} = ?$
- $\sqrt{(144 \div 4)} = ?$
- $\sqrt[4]{(16 \times 16)} = ?$
- $\sqrt[3]{1000} = ?$

У ПРОЄКТІ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями» також доцільно використовувати методи спрощення, моделювання, закріплення матеріалу за допомогою створення тематичних карток.

Для робіт за цією темою також пропонується розглянути таблицю квадратів:

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$
$51^2 = 2601$	$61^2 = 3721$	$71^2 = 5041$	$81^2 = 6561$	$91^2 = 8281$
$52^2 = 2704$	$62^2 = 3844$	$72^2 = 5184$	$82^2 = 6724$	$92^2 = 8464$
$53^2 = 2809$	$63^2 = 3969$	$73^2 = 5329$	$83^2 = 6889$	$93^2 = 8649$
$54^2 = 2916$	$64^2 = 4096$	$74^2 = 5476$	$84^2 = 7056$	$94^2 = 8836$
$55^2 = 3025$	$65^2 = 4225$	$75^2 = 5625$	$85^2 = 7225$	$95^2 = 9025$
$56^2 = 3136$	$66^2 = 4356$	$76^2 = 5776$	$86^2 = 7396$	$96^2 = 9216$
$57^2 = 3279$	$67^2 = 4489$	$77^2 = 5929$	$87^2 = 7569$	$97^2 = 9409$
$58^2 = 3364$	$68^2 = 4624$	$78^2 = 6084$	$88^2 = 7744$	$98^2 = 9604$
$59^2 = 3481$	$69^2 = 4761$	$79^2 = 6241$	$89^2 = 7921$	$99^2 = 9801$
$60^2 = 3600$	$70^2 = 4900$	$80^2 = 6400$	$90^2 = 8100$	100^2 $= 10000$

У ПРОЄКТІ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня» було запропоновано методи моделювання або графічного представлення вимірювань, аналіз та закріплення матеріалу за допомогою створення тематичних карток.

На уроці пропонується розкрити тему за допомогою проєкту та додаткових пояснень, наприклад:

Радикальна форма	Експоненціальна форма	Приклад
------------------	-----------------------	---------

$\sqrt{x}$	$x^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
$\sqrt[3]{x}$	$x^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
$\sqrt[4]{x}$	$x^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$
$\sqrt[n]{x}$	$x^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = 2$

Перетворіть у радикальну форму:

а) $x^{\frac{1}{2}}$

г) $b^{\frac{3}{4}}$

б) $a^{\frac{1}{3}}$

д) $m^{\frac{5}{2}}$

в) $y^{\frac{2}{3}}$

е) $n^{\frac{4}{5}}$

Застосування законів степенів:

а) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

г) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^4$

б) $y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$

д) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

в) $\frac{a^4}{a^4}$

У ПРОЄКТІ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь» було запропоновано застосувати аналіз, створення блок-схем вирішення, графічне представлення вимірювань та створення таблиць результатів.

Прикладами додаткових проєктів для розгляду теми можуть бути:

1. $\sqrt{x} = 5$

2. $\sqrt{x+3} = 7$

3. $\sqrt{2x-1} + 3 = 6$

Приклад розв'язання такого рівняння:

$$\sqrt{2x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4$$

Відповідь: $x = 4$

У ПРОЄКТІ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі» було обрано такі методи: аналіз, моделювання та створення таблиць результатів.

Для практичних завдань та пояснень теоретичної частини на уроці з даної теми пропонувались такі завдання:

Пряму в 3D-просторі можна задати:

- Точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку вона проходить
- Вектором напрямку $d = (a, b, c)$, який показує напрямок прямої

Параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{де } t - \text{параметр (будь-яке число)}$$

Дві прямі паралельні, якщо їхні вектори напрямків пропорційні.

Якщо прямі не паралельні, перевіряємо, чи лежать вони в одній площині.

Формула: Обчислюємо мішаний добуток векторів:

$$M_0 M_1 \cdot (d_1 \times d_2) = 0$$

- Якщо результат $= 0 \rightarrow$ компланарні $\rightarrow$ перетинаються
- Якщо результат $\neq 0 \rightarrow$ мимобіжні

Приклад рішення завдань такого типу:

Визначте, чи паралельні прямі:

Пряма 1: напрямок $(3, -6, 9)$

Пряма 2: напрямок $(1, -2, 3)$

$$(3; -6; 9) = 3 \cdot (1; -2; 3) \text{ тобто прямі – паралельні.}$$

У ПРОЄКТІ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі» долучно використовувати методи класифікації, моделювання та створення таблиць результатів.

Для робіт за цією темою необхідно опрацювати з учнями такі формули та означення:

Площину в 3D-просторі можна задати загальним рівнянням:

$$Ax + By + Cz = D$$

де:

- A, B, C - координати нормального вектора $n = (A, B, C)$
- D - вільний член
- Нормальний вектор - це вектор, перпендикулярний до площини

Приклад: Площина $2x + 3y + z = 12$ має нормаль $n = (2, 3, 1)$

Типи взаємного розміщення площин:

Тип	Умова	Ознака
Збігаються	Це одна й та сама площина	$n_1 = k \cdot n_2$ і $D_1 = k \cdot D_2$
Паралельні	Не перетинаються ніколи	$n_1 = k \cdot n_2$ але $D_1 \neq k \cdot D_2$
Перетинаються	Утворюють пряму лінію	$n_1 \neq k \cdot n_2$

Якщо площини перетинаються, вони утворюють пряму лінію.

Метод 1: Векторний добуток

- Напрямний вектор лінії: $s = n_1 \times n_2$
- Потім знаходимо будь-яку точку на лінії

Метод 2: Система рівнянь

- Розв'язуємо систему з двох рівнянь площин
- Виражаємо дві змінні через третю (параметр t)

Відстань між паралельними площинами розраховується за формулою:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Векторний добуток:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Скалярний добуток: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Довжина вектора: $|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

У ПРОЄКТІ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів» запропоновано використовувати методи аналізу, графічного представлення результатів вимірювання або моделювання (за допомогою комп'ютерних технологій).

Було використано формули:

Математично: $v(t) = S'(t)$ = похідна функції руху

Фізичний зміст:

- $S(t)$ - де знаходиться об'єкт

- $v(t) = S'(t)$ - як швидко він рухається
- $a(t) = v'(t) = S''(t)$ - як швидко змінюється швидкість (прискорення)

Основні правила диференціювання:

Функція	Похідна	Приклад
$f(t) = c$ (константа)	$f'(t) = 0$	$(5)' = 0$
$f(t) = t^n$	$f'(t) = n \cdot t^{n-1}$	$(t^3)' = 3t^2$
$f(t) = c \cdot t^n$	$f'(t) = c \cdot n \cdot t^{n-1}$	$(4t^3)' = 12t^2$
$f(t) = g(t) + h(t)$	$f'(t) = g'(t) + h'(t)$	$(t^3 + 5)' = 3t^2 + 0$

Правила диференціювання:

$$(c)' = 0$$

$$(c \cdot f(t))' = c \cdot f'(t)$$

$$(t^n)' = n \cdot t^{n-1}$$

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t)$$

Кінематичні співвідношення:

$$v(t) = S'(t) \text{ - швидкість}$$

$$a(t) = v'(t) = S''(t) \text{ - прискорення}$$

Розв'язування квадратного рівняння:

$$at^2 + bt + c = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Презентаційний етап передбачає якісну обробку отриманої інформації, що супроводжують аналітичні процедури (порівняння, класифікація, аналіз причинно-наслідкових зв'язків тощо).

Інструментарій обробки та оцінювання отриманих даних репрезентує:

найпростіші математичні формули: спрощення виразів, прості математичні дії зі ступенями та коренями, використання теорем та правил щодо розташування прямих або площин у просторі тощо. Використання комп'ютерної техніки вимагає застосування методів математичної обробки інформації, методів статистики – багатовимірною угруповання, коректного переходу від математичного запису до реалізації в електронному варіанті тощо; - методи шкалювання (порядкові й рахункові шкали).

Тобто для кожного з проєктів було представлено шкалу оцінювання:

Критерій	Бали
Правильність розрахунків висоти провисання	2
Правильність розрахунків натягу троса	2
Правильність застосування властивостей арифметичних коренів	2
Якість та точність графіків	2,5
Повнота відповідей на питання для рефлексії	2
Оформлення роботи та презентація	1,5
Всього	12

(Додаток А)

У ПРОЄКТІ 1: «Алгебра - корінь n-го ступеня», ПРОЄКТІ 2: «Алгебра - Корінь n-го ступеня 2», ПРОЄКТІ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями» та ПРОЄКТІ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня» доцільно було застосувати методи спрощення та властивостей коренів та степенів.

А саме:

ЧАСТИНА 2: Додавання спрощених вимірів

Завдання 2.1: Знайдіть загальну ширину всіх полиць

Загальна ширина = (ширина верхньої) + (ширина середньої) + (ширина нижньої)

Загальна ширина = $\sqrt{3}$ + $\sqrt{3}$ + $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ см

ЧАСТИНА 3: Спрощення додаткових вимірів

Завдання 3.1: Спростіть:

- Висоту бічної стінки: $\sqrt{80} = ?$
- Товщину полиці: $\sqrt{12} = ?$
- Відстань між полицями: $\sqrt{45} = ?$

(Додаток В)

У ПРОЄКТІ 1: «Алгебра - корінь n-го ступеня», ПРОЄКТІ 4: «Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня» та ПРОЄКТІ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів» було запропоновано метод реалізації графічного етапу проєкту з використанням комп'ютера.

А саме:

Завдання 2: Побудуйте графіки швидкості

На другій координатній площині побудуйте:

- Синя крива: $v_1(t) = 12t^2$
- Червона лінія: $v_2(t) = 36t$

Позначте:

- Точки перетину (коли $v_1 = v_2$)
- Зелені пунктирні вертикальні лінії в моменти t , коли швидкості рівні

Завдання 3: Створіть комбінований графік

Об'єднайте обидва графіки на одному плакаті з поясненнями.

(Додаток К)

У ПРОЄКТІ 5: «Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь», ПРОЄКТІ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі» та ПРОЄКТІ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі» проєктах доцільно було використовувати метод розробки візуальної моделі завдання (створення макету, мапи тощо).

Наприклад:

Практична частина (побудова 3D-моделі)

Матеріали:

- Палички (шпажки) або соломинки для коктейлів
- Пластилін або зубочистки для з'єднань
- Картон для основи
- Маркери (різні кольори)

Інструкція:

1. Виберіть одну пару балок зі свого аналізу
2. Створіть систему координат на картоні
3. Побудуйте балки за допомогою паличок
4. Позначте кольором:
 - Червоний - паралельні балки
 - Синій - балки що перетинаються

- Зелений - мимобіжні балки

5. Додайте підписи з координатами точок та векторами

(Додаток Е)

Після впровадження необхідних якісних та кількісних процедур результати мають бути зібрані та підготовлені для презентації.

У презентаціях можуть використовуватись *графічні форми* – статистичні таблиці, діаграми, моделі, графіки; *комп'ютерні форми* – бази даних, результати обробки даних, графіки тощо; математичні форми – таблиці зі значеннями тощо.

Наприклад: у презентації ПРОЄКТУ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня» учні могли застосувати такі графічні та комп'ютерні форми: створення моделей з картону або інших матеріалів, створення карток з тематичними записами до проєкту, написання програм (коду) для візуалізації завдання тобто представлення графіків залежності (швидкості, провисання тощо).

Закінчується презентаційний етап «захистом» проєкту.

Під час *етапу контролю* проводиться узагальнення даних та оцінка їх коректності для формування висновків щодо результатів реалізації проєкту. У педагогічній практиці основні форми висновків є такими: *графічні формати* — статистичні таблиці, діаграми, різні перерізи, моделі, схеми тощо; *комп'ютерні формати* — бази даних, результати обробки даних тощо.

Наприклад, у ПРОЄКТІ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі» доцільно запропонувати створити макет мосту з підручних матеріалів для візуального представлення понять: паралельні прямі, мимобіжні прямі та прямі що перетинаються. У ПРОЄКТІ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня» та ПРОЄКТІ 8: «Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів» учні мають створити програму для візуалізації графіків залежностей провисання мосту та швидкостей руху автомобілів відповідно.

2.3. Організація процесу застосування проєктних технологій на профільному рівні математичної освіти

Процес організації проєктних методів навчання в контексті математичної освіти вимагає, щоб під час реалізації проєкту сприяти оптимальній та цілеспрямованій взаємодії між учасниками освітнього процесу відповідно до професійних стандартів та особливостей математичної освіти. Це вимагає організації.

Варто зазначити, що в практичному застосуванні проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарного аналізу *зворотній зв'язок* між викладачами та учнями займає важливе місце. Це тісно пов'язано з тим, наскільки учні розуміють інформацію, що передається під час навчального процесу. Зворотний зв'язок надає інформацію про педагогічну якість реалізації проєкту, що охоплює своєчасне отримання інформації, аналіз цієї інформації вчителем для визначення відповідних коригувань у процесі навчання та подальшу оцінку ефективності реалізації проєкту учнями.

Правильно та своєчасно організований зворотний зв'язок допомагає учням усунути недоліки, стимулює процес самостійного навчання та підвищує інтерес до виконання проєкту; він сприяє розвитку навичок дослідження та пошуку, а також полегшує набуття математичних та міждисциплінарних знань.

На рівні математичної освіти основними формами зворотного зв'язку між учнями та вчителями є: усні опитування (презентації, сесії запитань і відповідей, семінари тощо), письмовий контроль (відповіді, розв'язування задач, вправи, графічні завдання тощо), аналіз документів та практичні завдання.

Так, у ПРОЄКТІ 5: «Алгебра – Розв'язання ірраціональних рівнянь» доцільно використовувати усне опитування як частину гри з пошуком скарбу, а у ПРОЄКТІ 3: «Алгебра - Перетворення виразів з коренями» учні у межах покрокового семінару мали обговорювати з учителем можливі кроки вирішення завдання, обирати відповідні формули та властивості коренів та ступенів.

У ПРОЄКТІ 1: «Алгебра - корінь n -го ступеня» та ПРОЄКТІ 2: «Алгебра - Корінь n -го ступеня» учні мають самостійно вирішити проблематику проєкту та виконати вправи за темою.

Наприклад:

Покрокове рішення:

Крок 1: Розрахунок оптимальної висоти провисання

$$h = d \sqrt[3]{\frac{w}{k}} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{450}{2700}} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = 120 \cdot \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{6}} \approx 120 \cdot 0.55 \approx 66 \text{ м}$$

Крок 2: Застосування властивостей арифметичних коренів

Використання властивості: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[3]{\frac{450}{2700}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 5 \cdot 10}{9 \cdot 3 \cdot 100}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3 \cdot 10}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{30}}$$

Крок 3: Розрахунок натягу троса

$$T = 450 \cdot \frac{\sqrt{120^2 + 16 \cdot 66^2}}{8 \cdot 66} = 450 \cdot \frac{\sqrt{14400 + 69696}}{528} = 450 \cdot \frac{\sqrt{84096}}{528} \approx 450 \cdot \frac{290}{528} \approx 247 \text{ кН}$$

(Додаток А)

Також можна давати додаткові завдання для кращого розуміння матеріалу, наприклад:

$$1. a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = a^2$$

$$2. \frac{b^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = b^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = b^1 = b$$

$$3. \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^8 = x^{\frac{1}{4} \cdot 8} = x^2$$

$$4. \left(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}\right)^6 = x^{\frac{1}{2} \cdot 6} y^{\frac{1}{3} \cdot 6} = x^3 y^2$$

$$5. \frac{m^{\frac{2}{5}}}{m^{-\frac{1}{5}}} = m^{\frac{2}{5} - (-\frac{1}{5})} = m^{\frac{3}{5}}$$

$$6. \left(a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{-1} b^3 = \frac{b^3}{a}$$

$$7. (x^{-3})^{\frac{1}{3}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$8. \left(p^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{2}}\right)^6 = p^4 q^3$$

$$9. \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}} = a^1 b^{-1} = \frac{a}{b}$$

$$10. \left(x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}\right)^3 = x^1 y^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

$$11. \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$12. \sqrt[3]{a^4 b^2} = a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}$$

$$13. \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^1 = a$$

$$14. \left(x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x^1 y^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{y}$$

ПРОЄКТ 6: «Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі» та
ПРОЄКТ 7: «Геометрія - Положення двох площин у просторі» демонструють
виконання учнями самостійної роботи, такої як створення макетів.

Наприклад:

Практична частина (побудова 3D-моделі)

Матеріали:

- Палички (шпажки) або соломинки для коктейлів
- Пластилін або зубочистки для з'єднань
- Картон для основи
- Маркери (різні кольори)

Інструкція:

1. Виберіть одну пару балок зі свого аналізу
2. Створіть систему координат на картоні
3. Побудуйте балки за допомогою паличок
4. Позначте кольором:
 - Червоний - паралельні балки
 - Синій - балки що перетинаються
 - Зелений - мимобіжні балки
5. Додайте підписи з координатами точок та векторами
(Додаток Е)

Висновки до 2 розділу

У розділі 2 представлено приклади практичної реалізації проєктних технологій у викладання алгебри та елементарного аналізу на спеціалізованому рівні математичної освіти. Продемонстровано, як теоретичні принципи, досліджені у розділі 1, можуть бути систематично застосовані в освітній практиці.

Показано, що проєктні методи, як освітні технології, спрямовані на набуття учнями знань у тісному зв'язку з реальним життям й вимагають систематичного та послідовного моделювання ситуацій вирішення проблем. Така діяльність вимагає від учнів актуалізації пошукових зусиль, спрямованих на дослідження та розробку шляхів створення проєктів, їх захист та аналіз результатів.

Доведено, що структурування змісту проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарного аналізу було здійснено шляхом розподілу проєктів за

різними формами подання матеріалу. Було розроблено та реалізовано вісім різних проєктів, класифікованих за типом пріоритетної діяльності (творчі та дослідницькі проєкти), тематичною сферою інтересів (екологічні, комп'ютерні, політехнічні та художні проєкти), участю в розробці (індивідуальні, парні та групові проєкти), термінами реалізації (короткострокові та середньострокові проєкти), рівнем міждисциплінарних зв'язків (усі проєкти були міждисциплінарними) та формату презентації (плакати, мультимедіа та творчі презентації).

Надано характеристики найпоширеніших типів проєктів - дослідницьких та творчих. Показано, що дослідницькі проєкти вимагають добре продуманої структури, чітко визначених цілей, актуальності теми дослідження для всіх учасників, соціальної значущості та продуманих методів, включаючи експериментальні підходи до обробки результатів. Творчі проєкти - не мають детально розробленої структури спільних дій учасників, будують структуру, підпорядковану кінцевому результату, логіці спільної діяльності та інтересам учасників, при цьому учасники заздалегідь домовляються про заплановані результати та форму їх презентації.

Визначено, що включення питань для рефлексії та додаткових завдань для кожного проєкту демонструє предметну орієнтацію у впровадженні проєктних технологій, коли учні стають учасниками корекційної діяльності разом із вчителями у процесі реалізації проєкту. Питання, спрямовані на рефлексію, стають засобами управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів, надаючи інформацію про її результати, коригуючи процес засвоєння знань та допомагаючи в оцінюванні особистих результатів, що забезпечує формування, розвиток та актуалізацію дослідницьких навичок. Цілі та завдання реалізації проєкту стають особисто значущими для кожного учня.

Доведено, що застосування проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарного аналізу має чітку послідовність: визначення проблеми, вибір методів дослідження, реалізація проєкту, аналіз даних, оформлення кінцевих результатів та висновки. Ця послідовність відповідає п'яти етапам проєктної

роботи: дослідницький етап (визначення теми, аналіз проблеми, постановка мети, визначення ймовірних результатів), аналітичний етап (аналіз вхідної інформації, пошук оптимальних методів, побудова алгоритму діяльності, планування роботи), практичний етап (виконання проєктної технології), презентаційний етап (форматування результатів, підготовка та проведення презентації, захист проєкту) та контрольний етап (аналіз результатів, оцінка якості проєкту, рефлексія).

ВИСНОВКИ

Дослідження проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарного аналізу на спеціалізованому рівні математичної освіти дозволяє зробити такі висновки:

1. Проаналізовано теоретичні основи проєктного навчання, надано його визначення, розкрито класифікації освітніх проєктних технологій.

Встановлено, що проєктне навчання є значною педагогічною інновацією, що ґрунтується на прогресивних освітніх філософіях Джона Дьюї та Вільяма Герда Кіпатріка. Освітні проєктні технології визначаються як метод навчання, що включає систему, за допомогою якої учні набувають знань та навичок через тривалий дослідницький процес, побудований навколо складних, автентичних питань та ретельно розроблених продуктів або презентацій. Цей підхід трансформує традиційні взаємозв'язки вчителя та учня на уроці, позиціонуючи вчителів як посередників та наставників, а учні беруть на себе більшу відповідальність за своє навчання.

Визначено та досліджено кілька систем класифікації освітніх проєктів, відповідно до яких проєкти можна класифікувати за: домінуючим типом діяльності (дослідницька, прикладна/практична, інформаційна, творча), предметною областю (моно-проєкти проти міждисциплінарних проєктів), тривалістю (міні-проєкти, короткострокові, довгострокові проєкти), соціальною організацією (індивідуальні, парні, групові, колективні проєкти) та основними педагогічними цілями (розвиток компетенцій, опанування змісту, інтеграційні проєкти).

2. Досліджено застосування проєктних технологій у навчанні алгебри та початків аналізу та схарактеризовано профільний рівень математичної освіти.

Показано, що спеціалізований рівень математичної освіти принципово відрізняється від загальної математичної освіти глибиною та широтою охоплення змісту, темпом навчання, педагогічними підходами та освітніми цілями. Учні цього рівня зазвичай вивчають математику від п'яти до восьми годин на тиждень порівняно з трьома-чотирма годинами за загальними

програмами, що дозволяє охоплювати ширший круг тем та досліджувати їх з більшою математичною ретельністю.

Показано, що проєктні підходи в алгебрі дозволяють учням брати участь у дослідницьких проєктах, що вивчають властивості сімейств функцій, раціональних функцій з різними типами асимптот та зв'язки між алгебраїчними та геометричними представленнями. Прикладні проєкти пов'язують алгебраїчні поняття з реальними явищами у фізиці, економіці, біології та соціальних науках за допомогою математичного моделювання, задач оптимізації та аналізу даних. В елементарному аналізі дослідницькі проєкти досліджують поведінку послідовностей та рядів, властивості похідних та методи інтегрування. Прикладні проєкти моделюють рух, вирішують задачі оптимізації, що вимагають методів числення, та обчислюють площі, об'єми та інші величини, визначені шляхом накопичення.

Схарактеризовано профільний рівень математичної освіти, де учні демонструють схильність до абстрактного мислення та логічних міркувань, внутрішню мотивацію до вивчення математики та прагнення до поглибленого вивчення математики або суміжних галузей. Також учні демонструють різноманітність своїх сильних сторін, інтересів, стилів навчання та освітніх цілей, що вимагає диференційованих педагогічних підходів, які мають враховувати ці різноманітні характеристики. Викладання на цьому рівні вимагає педагогічних підходів, адаптованих до конкретної навчальної програми та характеристик студентів, зі зміщенням до методів, більш орієнтованих на учня, включаючи проблемні підходи, сократівські питання, математичні дискусії та спільну навчальну діяльність.

3. Розкрито зміст та форми застосування проєктних технологій у навчанні алгебри і початків аналізу.

Структуровано зміст проєктних технологій шляхом розробки та класифікації проєктів відповідно до різних форм представлення матеріалу. Структура змісту охоплює проєкти, розподілені за пріоритетним типом діяльності (творча та дослідницька), предметно-змістовною сферою інтересів

(екологічна, телекомунікаційна, політехнічна, художня), участю в розробці (індивідуальна, парна, групова), термінами реалізації (короткострокові та середньострокові), рівнем міжпредметних зв'язків (усі проекти були міжпредметними) та форматом презентації (постер, мультимедіа, креативні презентації).

Схарактеризовано дослідницькі та творчі проекти як найпоширеніші типи, що розкриває їхні особливості. Дослідницькі проекти вимагають продуманої структури, визначених цілей, актуальності теми дослідження, соціальної значущості та продуманих експериментальних методів. Творчі проекти, не маючи детальної заздалегідь розробленої структури, підпорядковуються кінцевим результатам та інтересам учасників, із заздалегідь визначеними результатами та формами представлення.

Кожен проект містить рефлексивні питання та додаткові завдання, що сприяють суб'єкт-суб'єктній орієнтації у впровадженні проектних технологій, перетворюючи учнів на учасників корекційної діяльності разом з вчителями.

4. Визначено методи та процес організації застосування проектних технологій на профільному рівні математичної освіти.

Розроблено вісім проектів, що охоплюють фундаментальні теми алгебри (п-ті корені, перетворення виразів з коренями, перетворення з раціональними показниками ступеня, розв'язання ірраціональних рівнянь) та геометрії (паралельність та перетин прямих у просторі, положення двох площин у просторі, аналіз руху транспортного засобу).

Описано застосування проектних технологій, що відповідає визначеній п'яти-етапній послідовності: дослідницький етап (визначення проблеми, вибір методів дослідження), аналітичний етап (аналіз вхідної інформації, пошук оптимальних методів, побудова алгоритму діяльності), практичний етап (виконання проектної технології з використанням аналізу, методів спрощення, графічного представлення, моделювання, розрахунків, створення таблиць результатів), презентаційний етап (форматування результатів, підготовка та проведення презентації, захист проекту з використанням графічних та комп'ютерних форм)

та контрольний етап (узагальнення даних, формулювання висновків, оцінка якості проєкту, рефлексія).

Доведено, що організація процесу застосування проєктних технологій на спеціалізованому рівні визначає оптимальну та цілеспрямовану взаємодію між учасниками освітнього процесу через впроваджені механізми зворотного зв'язку. Правильно організований зворотний зв'язок спрямовує учнів на усунення недоліків, активізує самопроцеси, стимулює інтерес до завершення проєкту та сприяє формуванню дослідницьких та пошукових навичок.

Показано, що основні організаційні форми, що забезпечують ефективний зворотний зв'язок, включають усне опитування (звіти, перегляд відповідей, дискусійні семінари), письмовий контроль (відповіді на запитання, вирішення проблем, виконання вправ), аналіз документів та практичну роботу.

Показано, що продумане впровадження проєктних технологій у викладанні алгебри та елементарного аналізу на спеціалізованому рівні математичної освіти успішно вирішує подвійну проблему: збереження математичної точності та застосування математичних методів у реальному світі. Розроблена система проєктів забезпечує практичну основу для вчителів, які прагнуть збагатити спеціалізовану математичну освіту за допомогою інноваційних педагогічних підходів, що готують учнів до поглибленого вивчення та різноманітних кар'єрних шляхів у математиці та суміжних науках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І. А. (2020) Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект): монографія. 2-е вид. Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. 460 с.
https://www.researchgate.net/publication/381118638_Kompetentnisno-orientovana_metodicna_pidgotovka_majbutnogo_vcitela_matematiki_profilnoi_skoli_teoreticnij_aspekt_monografia
2. Бахтіярова Х. Ш., Арістова А. В. та ін. (2017) Інноваційні технології навчання: Навчальний посібник. Київ: НТУ. 172 с.
<https://ukreligieznavstvo.wordpress.com/2019/01/18/itn/>
3. Беседін Б., Кириченко А. (2021) Організація проектої діяльності на уроках математики як спосіб розвитку пізнавальної компетентності учнів.
<http://gnvp.ddpu.edu.ua/article/view/245403>
4. Бевз В. Г., Бевз Г. П. (2019) Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу (профільний рівень). Київ: Освіта. 304 с.
https://new-book.com.ua/shop/bevz-g-p-algebra-i-poch-analizuprofil-riven11-kl-pidruchnyk-nova-progr-isbn-978-966-983-065-4-vd-osvita/?srsltid=AfmBOooVUkLm4jpPeW9NDwO-RcUuRtF4Vb97kN_BCXD7XHkUolWViGfo
5. Бібік Н. М. (редактор) (2017) Нова українська школа: порадник для вчителя. Київ: Плеяди. 206 с.
<https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
6. Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А. (2014) Методика викладання математики в початкових класах: навч. посібник. 4-те вид. Тернопіль: Навчальна книга--Богдан. 345 с.
https://library.udpu.edu.ua/library_files/423477.pdf
7. Бойко І. С., Оракбаєв Д. (2019) Застосування інноваційних технологій на урок математики та в позаурочний час. УДПУ ім. П. Тичини. Українсько-туркменський вісник. Візаві, 85-88 с.
<https://dspace.udpu.edu.ua/handle/123456789/11393>
8. Бурда М. І. (2019) Геометрія: підручник для 11 класу (профільний рівень). Київ: Освіта. 60 с.
<https://pidruchnyk.com.ua/1246-geometriya-11-klas-burda.html>
9. Бурда М. І., Колесник Т. В. (2011) Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу (профільний рівень). Київ: Освіта. 336 с. <https://pidruchnyk.com.ua/402-matematika-burda-kolesnik-malovaniy-taraskova-10-klas.html>

- 10.Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. (2015) Геометрія: підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Освіта. 208 с.
<https://undip.org.ua/library/heometriia-7-klas-pidruchnyk/>
- 11.Бурцева О. (2025) Тестові завдання з алгебри та початків аналізу як дидактичний засіб навчання математики. 8 с.
https://www.researchgate.net/publication/397201447_TESTOVI_ZAVDANNA_Z_ALGEBRI_TA_POCHATKU_ANALIZU_AK_DIDAKTICNIJ_ZASIB_NAVCANNA_MATEMATIKI
- 12.Васильєва Д. В. (2018) Математичні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів. *Проблеми сучасного підручника*, (21), 83–91 с.
<https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/713472/1/10.pdf>
- 13.Вдовенко В. В. (2013) Формування дослідницької компетентності учнів на уроках математики. Журнал: Математика у школах України, випуск №34-36, Харків: Ранок. 2-7 с.
<https://dspace.cusu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/c58010fa-6ecd-4323-ab2e-6f2add6ac88c/content>
- 14.Величко В.Є., Федоренко О.Г., Хорішко Д.С. (2024) Інноваційні технології навчання на уроках математики. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ, Випуск 14, 97-105 с.
http://dspace.ddpu.edu.ua/ddpu/bitstream/123456789/884/1/ZNPFMFDSPU_2024_pp_097-105.pdf
- 15.Волкова Н. П. (2018) Педагогіка: посібник. 4-е вид. Київ: Академвидав. 618 с.
<https://pedagogy.lnu.edu.ua/departments/pedagogika/library/volkova.pdf>
- 16.Глобін О. І., Бурда М. І. та ін. (2015) Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: методичний посібник. Київ: Педагогічна думка 245 с.
<https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/08/POSIBNYK-Kompetentnisno-orientovana-metodyka-navchannia-matematyky-v-osnovniy-shkoli.pdf>
- 17.Гриб'юк О. О. (2017) Проектно-дослідницька діяльність в процесі навчання математики учнів загальноосвітнього навчального закладу. 20 с.
<https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/707780/1/Hrybiuk-stattia-proektno-dosl-npu-2017%2B.pdf>
- 18.Закон України «Про повну загальну середню освіту» від 16 січня 2020 року № 463-IX. Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20>
- 19.Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 клас: профільний рівень (2014). Київ: Центр навчально-методичної літератури. 424 с.
<https://osvita.ua/school/certification/textbook/39952/>

20. Коваль Л. В., Скворцова С. О. (2011) Методика навчання математики: теорія і практика: підручник для студентів за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання». 2-ге вид. Харків: Принт-Лідер. 544 с.
<https://studfile.net/preview/2227326/>
21. Коломієць А. М. (2002) Можливості новітніх інформаційних технологій у підготовці педагогічних кадрів. 8 с.
<https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/11a93242-6233-4cf6-bb90-ae1db142ac39/content>
22. Крамаренко Т. В. (2015) Компетентнісно орієнтоване навчання математики: теорія і практика: монографія. Кривий Ріг: КДПУ. 364 с.
https://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/3381/1/%D0%9A%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B8_%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%82%D0%B0%D0%B2%D0%B0_2019.pdf
23. Кузьмінський А. І., Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А. (2009) Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики: монографія. Черкаси: Вид. від ЧНУ. 320 с.
https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=eNbIHsgAAAAJ&citation_for_view=eNbIHsgAAAAJ:zYLM7Y9cAGgC
24. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Ріжняк Р. Я. (2008) Інноваційні методи навчання математики: науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка. 148 с.
https://phm.cuspu.edu.ua/images/vstup/olimpiadi/posibniki/09_%D0%86%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%86%D1%96%D0%B9%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8_%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8.pdf
25. Лов'янова І. В. (2012) Диференціація змісту навчання математики у профільній старшій школі. Суми, 2012. – 542 с.
<https://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/2343>
26. Лов'янова І. В., (2014) Теоретико-методичні засади навчання математики у профільній школі. Черкаси. 648 с.
<https://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/2363>
27. Матяш О. І. (2013) Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії: монографія. Вінниця: Нілан-ЛТД. 450 с.
<https://dspace.vspu.edu.ua/items/f70afc8d-ba6a-4f50-9843-296bdf53466c>

- 28.Моторіна В. Г. (2012) Технологія підготовки вчителя математики до уроку: Навчальний посібник. Х.: ХНПУ. 320 с.
<https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/e9a9a8e8-25ba-416a-a05e-8474f3baa797/content>
- 29.Нелін Є. П. (2018) Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу (профільний рівень). Харків: Ранок. 272 с.
<https://shkola.in.ua/1613-algebra-10-klas-nelin-2018.html>
- 30.Нова українська школа: Концептуальні засади реформування середньої школи (2016) МОН України. Київ. 40 с.
<https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
- 31.Онопрієнко О. В. (2017) Проектна діяльність у початковій школі. 78 с.
https://base.kristti.com.ua/wp-content/uploads/2017/09/Proektna_diyalnist.pdf
- 32.Особливості навчання природничо-математичних дисциплін у профільній школі. Збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції. (2010), м. Херсон, 124 с.
<https://ekhsuir.kspu.edu/server/api/core/bitstreams/f4b05f38-5269-45e6-ae47-f2aa1d8e8fb4/content>
- 33.Раков С. А. (2005) Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія. Х.: Факт. 360 с.
<https://repository.sspu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/00237fd1-f0c8-44be-aa41-7ca8f19a737d/content>
- 34.Рудницька Н. Ю. (2019) Проектні технології на уроках математики в початковій школі / Підготовка майбутніх фахівців у контексті становлення нової української школи: компетентнісний підхід»: збірник наукових праць. Житомир: ФОП «Н.М.Левковець», 80-84 с.
https://eprints.zu.edu.ua/30208/1/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%82_%D0%A0%D1%83%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8C%D0%BA%D0%B0.PDF
- 35.Руденко Н. М. (2015) Інтерактивне навчання на уроках математики в початковій школі. Початкова школа: №12. - 45-48 с.
https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/12557/1/N_Rudenko_Inter_navch_na_ur_mat_em_Pochatkova_sh.pdf
- 36.Сафонова І. Я. (2013) Формування математичної компетентності старшокласників. Вип. 2. - С. 397-402 с.
http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=apdytp_2013_2_87

37. Семенець С. П. (2008) Методика навчання математики в профільній школі: навчальний посібник. Житомир: ЖДУ. 108 с.
https://eprints.zu.edu.ua/2750/1/%D0%A0%D0%9D-%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D0%9D%D0%9C_1_%D0%B4%D1%80%D1%83%D0%BA.pdf
38. Скворцова С. О., Онопрієнко О. В. (2019) Методика навчання інтегрованого курсу «Математика» в 1-2 класах ЗЗСО на засадах інтегративного і компетентнісного підходів: навч.-метод. посіб. Харків: Ранок. 354 с.
[https://interactive.ranok.com.ua/upload/file/!!!!!!!!!!!!!!ukr2/metodyka%20navchann%D1%96a%20matematyky%20u%201%E2%80%932%20klasakh%20ZZSO%20na%20zasadakh%20intehratyvnoho%20i%20kompetentnisnoho%20pidkhodiv%20\(Skvortsova%20S_%20O_,%20Onopriienko%20O_V_\)%20.pdf](https://interactive.ranok.com.ua/upload/file/!!!!!!!!!!!!!!ukr2/metodyka%20navchann%D1%96a%20matematyky%20u%201%E2%80%932%20klasakh%20ZZSO%20na%20zasadakh%20intehratyvnoho%20i%20kompetentnisnoho%20pidkhodiv%20(Skvortsova%20S_%20O_,%20Onopriienko%20O_V_)%20.pdf)
39. Слєпкань З. І. (2006) Методика навчання математики: підручник. К.: Вища школа. 582 с.
https://method.ucoz.ua/load/istorija_matematiki/metodika_prepodavaniya_matematiki/slepkan_z_i_quot_metodika_navchannja_matematiki_quot_2006r/10-1-0-39
40. Сліпченко О. І. (2025) Диференційовний підхід у навчанні математики 164-170 с.
<https://eprints.zu.edu.ua/43855/1/1.pdf>
41. Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Лов'янова І. В., Сердюк З. О. (2017) Організація навчання математики у старшій профільній школі: монографія / за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси. 14 с.
<https://eprints.cdu.edu.ua/884/>
42. Типова освітня програма для закладів загальної середньої освіти III ступеня (Наказ МОН України від 12.08.2021 № 963). Режим доступу
<https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>
43. Триус Ю. В., Герасименко І. В. (2010) Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у ВНЗ: проблеми, стан і перспективи. Черкаси: ЧНУ. 14 с.
<https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/f2124313-7642-46fb-849b-e0b52448a679/content>
44. Barron, B., & Darling-Hammond, L. (2008). Teaching for meaningful learning: A review of research on inquiry-based and cooperative learning. In L. Darling-Hammond, B. Barron, P. D. Pearson, A. H. Schoenfeld, E. K. Stage, T. D. Zimmerman, G. N. Cervetti, & J. L. Tilson, Powerful Learning: What We Know About Teaching for Understanding (pp. 11-70). San Francisco: Jossey-Bass. 296 p.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED539399.pdf>
45. Barron, B., Schwartz, D. L., Vye, N. J., Moore, A., Petrosino, A., Zech, L., & Bransford, J. D. (1998). Doing with understanding: Lessons from research on

- problem-and project-based learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 7(3-4), 271-311.
<https://www.jstor.org/stable/1466789>
46. Bell, S. (2010) Project-based learning for the 21st century: Skills for the future. *The Clearing House*, 83(2), 39-43.
<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00098650903505415>
47. Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and Their Impact on Student Learning* (Revised and Expanded Edition). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 209 p.
https://anggtwu.net/tmp/boaler_experiencing_school_mathematics.pdf
48. Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover Publications. 346 p.
<https://archive.org/details/the-history-of-the-calculus-carl-b-boyer>
49. Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A cross-cultural comparative perspective. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 5-15.
https://www.researchgate.net/publication/225645324_The_development_of_students'_algebraic_thinking_in_earlier_grades
50. De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49-97). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 915 p.
<https://www.semanticscholar.org/paper/Using-and-Appling-Mathematics-in-Education-Lange/a002b74c7164031a5ff769afe30df0696e85b325>
51. Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag. 351 p.
<https://d-nb.info/942127064/04>
52. English, L. D., & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp. 313-335). New York: Routledge. 700 p.
<https://www.teachingcouncil.ie/assets/uploads/2024/03/Problem-Solving-in-a-21st-Century-Mathematics-Curriculum-English-L.D.-Gainsburg-J.-2016.pdf>
53. English, L. D., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 263-290). Berlin: Springer. 680 p.
https://www.researchgate.net/publication/42424472_Theories_of_Mathematics_Education_Seeking_New_Frontiers

54. Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 452 p.
https://books.google.de/books/about/History_in_Mathematics_Education.html?id=EX7fiunN4akC&redir_esc=y
55. Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann. 194 p.
https://community.csusm.edu/pluginfile.php/41613/mod_resource/content/0/Making%20Sense.pdf
56. Holm, M. E. (2011). Project-based instruction: A review of the literature on effectiveness in prekindergarten through 12th grade classrooms. *InSight: Rivier Academic Journal*, 7(2), 1-13.
https://www.researchgate.net/publication/329000774_PROJECT-BASED_INSTRUCTION_A_Review_of_the_Literature_on_Effectiveness_in_Pre_kindergarten_through_12th_Grade_Classrooms
57. Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics: An Introduction* (2nd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley. 878 p.
<https://www.math.mcgill.ca/darmon/courses/history/katz.pdf>
58. Kilpatrick, W. H. (1918). The project method. *Teachers College Record*, 19(4), 319-335.
<https://www.education-uk.org/documents/kilpatrick1918/index.html>
59. Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Vol. 1-3). New York: Oxford University Press. 1238 p.
https://www.hlevkin.com/hlevkin/90MathPhysBioBooks/mathHistory/KLINE_MathematicalThoughtFromAncientToModernTimes3.pdf
60. Knoll, M. (1997). The project method: Its vocational education origin and international development. *Journal of Industrial Teacher Education*, 34(3), 59-80.
https://www.researchgate.net/publication/243768523_The_project_method_Its_vocational_education_origin_and_international_development_1997
61. Krajcik, J. S., & Blumenfeld, P. C. (2006). Project-based learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 317-334). Cambridge: Cambridge University Press. 644 p.
https://knilt.arcc.albany.edu/images/4/4d/PBL_Article.pdf
62. Krajcik, J. S., & Czerniak, C. M. (2014). *Teaching Science in Elementary and Middle School: A Project-Based Approach* (4th ed.). New York: Routledge. 424 p.
https://www.researchgate.net/publication/326562023_Teaching_Science_in_Elementary_and_Middle_School_A_Project-Based_Learning_Approach

63. Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* (J. Teller, Trans.; J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University of Chicago Press. 416 p.
https://archive.org/details/psychologyofmath0000krut_17b1
64. Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books. 493 p.
https://pages.ucsd.edu/~rnunez/COGS252_Readings/Preface_Intro.PDF
65. Larmer, J., Mergendoller, J., & Boss, S. (2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*. Alexandria, VA: ASCD. 210 p.
<https://files.ascd.org/staticfiles/ascd/pdf/siteASCD/publications/books/Setting-the-Standard-for-PBL-sample-chapters.pdf>
66. Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (Eds.). (2013). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. Rotterdam: Sense Publishers. 416 p.
<https://alrajehsite.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/01/d8a7d984d8a7d8a8d8afd8a7d8b9-d981d98a-d8aad8afd8b1d98ad8b3-d8a7d984d8b1d98ad8a7d8b6d98ad8a7d8aa-d984d984d985d988d987d988d8a8d98ad986.pdf>
67. Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing. 1328 p.
https://www.researchgate.net/publication/228592604_Problem_Solving_Modeling_and_Local_Conceptual_Development
68. Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ750778.pdf>
69. Railsback, J. (2002). *Project-Based Instruction: Creating Excitement for Learning*. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory. 20 p.
<https://educationnorthwest.org/sites/default/files/projectbased.pdf>
70. Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 398 p.
https://www.researchgate.net/profile/Alan-Schoenfeld-2/publication/247374625_Reflection_on_Doing_and_Teaching_Mathematics/links/54409cef0cf21227a11bb36d/Reflection-on-Doing-and-Teaching-Mathematics.pdf
71. Sheffield, L. J. (Ed.). (1999). *Developing Mathematically Promising Students*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 284 p.
https://archive.org/details/developingmathem0000unse_f0c4

72. Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations: The problem-solving experiences of four gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151-165.
https://www.researchgate.net/publication/254120784_Mathematical_Giftedness_Problem_Solving_and_the_Ability_to_Formulate_Generalizations_The_Problem-Solving_Experiences_of_Four_Gifted_Students
73. Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 41(1-2), 13-27.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ848493.pdf>
74. Stedall, J. (2011). *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra*. Zürich: European Mathematical Society. 238 p.
https://www.researchgate.net/publication/267092921_From_Cardano's_Great_Art_to_Lagrange's_Reflections_Filling_a_Gap_in_the_History_of_Algebra
75. Thomas, J. W. (2000) A review of research on project-based learning. San Rafael, CA: Autodesk Foundation. 46 p.
https://tecfa.unige.ch/proj/eteach-net/Thomas_researchreview_PBL.pdf

ДОДАТОК А

ПРОЄКТ 1: Алгебра - корінь n-го ступеня

Форма: Дослідження (індивідуальне)

Зміст: Математичне моделювання в інженерії

Назва проєкту: «Проектування підвісного мосту: Сила n-х коренів у кабельній техніці»

Мета навчання:

Учні досліджуватимуть властивості коренів n-го ступеня та арифметичних коренів через практичне застосування розрахунків натягу троса в проектуванні підвісних мостів, розвиваючи розуміння того, як ці математичні концепції забезпечують безпеку конструкції.

Математична основа:

У проектуванні підвісних мостів зв'язок між довжиною троса (L), прольотом (d) та висотою провисання (h) включає n-ті корені:

Формула натягу троса: $T = w \frac{\sqrt{(d^2 + 16h^2)}}{8h}$

Оптимальний коефіцієнт провисання: $h = d \sqrt[3]{\frac{w}{k}}$

Де:

T = натяг троса (Ньютони)

w = вага на одиницю довжини (Н/м)

d = проліт (метри)

h = висота провисання (метри)

k = коефіцієнт міцності матеріалу

Постановка задачі:

Місто планує побудувати пішохідний підвісний міст через 120-метрову річкову ущелину. Інженери повинні визначити:

1. Оптимальну висоту провисання троса, використовуючи кубічні корені
2. Максимальне безпечне навантаження, використовуючи властивості арифметичних коренів
3. Специфікації матеріалів, використовуючи перетворення радикальних виразів

Задані параметри:

Довжина прольоту: $d = 120$ м

Вага троса: $w = 450$ Н/м

Коефіцієнт міцності матеріалу: $k = 2700$

Вимога до коефіцієнта запасу міцності: 3,5

Покрокове рішення:

Крок 1: Розрахунок оптимальної висоти провисання

$$h = d \sqrt[3]{\frac{w}{k}} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{450}{2700}} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = 120 \cdot \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{6}} \approx 120 \cdot 0.55 \approx 66 \text{ м}$$

Крок 2: Застосування властивостей арифметичних коренів

Використання властивості: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[3]{\frac{450}{2700}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 5 \cdot 10}{9 \cdot 3 \cdot 100}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3 \cdot 10}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{30}}$$

Крок 3: Розрахунок натягу троса

$$T = 450 \cdot \frac{\sqrt{120^2 + 16 \cdot 66^2}}{8 \cdot 66} = 450 \cdot \frac{\sqrt{14400 + 69696}}{528} = 450 \cdot \frac{\sqrt{84096}}{528} \approx 450 \cdot \frac{290}{528} \approx 247 \text{ кН}$$

Графічне представлення:

Учні створюють графік, що показує зв'язок між висотою провисання та натягом, використовуючи різні n -ті корені.

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність розрахунків висоти провисання	2
Правильність розрахунків натягу троса	2
Правильність застосування властивостей арифметичних коренів	2
Якість та точність графіків	2,5
Повнота відповідей на питання для рефлексії	2
Оформлення роботи та презентація	1,5
Всього	12

Запитання для рефлексії:

- Чому інженери використовують кубічні корені саме для оптимальних розрахунків провисання?
- Як властивості арифметичних коренів забезпечують точність розрахунків у критично важливих для безпеки застосуваннях?
- Що станеться зі стійкістю мосту, якщо ми використовуватимемо квадратні корені замість кубічних у формулі провисання?
- Як обмеження області визначення арифметичних коренів (невід'ємні підкорінники) пов'язане з фізичними обмеженнями в інженерії?

Результати:

- Повне математичне рішення з усіма задокументованими застосуваннями до властивостей
- графік, що показує зв'язок між висотою провисання та натягом, використовуючи різні n -ті корені
- Технічний звіт (0,5-1 сторінка), що пояснює роль n -х коренів у проектуванні конструкцій

Додаткові завдання:

Порівняння обчислювальної ефективності різних методів розрахунку коренів.

ДОДАТОК Б

ПРОЄКТ 2: Алгебра - Корінь n-го ступеня 2

Форма: Практичне дослідження (індивідуальне)

Зміст: Практичне застосування

Назва проєкту: «Дизайн саду: Використання n-го коренів для створення ідеальних квадратних та кубічних клумб»

Мета навчання:

Учні зрозуміють корені n-го ступеня та їхні властивості, спроектувавши шкільний сад, розрахувавши розміри клумб та дослідивши, як коріння допомагає нам звернути експоненціальне зростання рослин.

Вступ:

Уявіть, що ви хочете створити квадратні та кубічні клумби у своєму шкільному саду. Якщо ви знаєте площу квадратної клумби, як ви знайдете довжину сторони? Якщо ви знаєте об'єм кубічної кашпо, як ви знайдете довжину ребра? Ось тут нам і допоможуть коріння!

Ключова концепція:

Квадратний корінь ($\sqrt{}$) «скасовує» піднесення до квадрата:

Якщо $x^2 = 16$, то $x = \sqrt{16} = 4$

Кубічний корінь ($\sqrt[3]{}$) «скасовує» піднесення до куба:

Якщо $x^3 = 27$, то $x = \sqrt[3]{27} = 3$

n-й корінь ($\sqrt[n]{}$) «скасовує» n-й степінь:

Якщо $x^n = a$, то $x = \sqrt[n]{a}$

Сценарій проєкту:

Вашому класу надано бюджет на створення саду з клумбами різної форми. Вам потрібно обчислити розміри за допомогою коренів.

Частина 1: Розуміння квадратних коренів ($\sqrt{}$ або $^2\sqrt{}$)

Задача 1: У вас є 64 м^2 простору для квадратної клумби троянд. Який має бути розмір кожної сторони?

Розв'язання:

Площа квадрата = сторона²

$$64 = \text{сторона}^2$$

$$\text{сторона} = \sqrt{64} = 8 \text{ метрів}$$

$$\text{Перевірка: } 8 \times 8 = 64$$

Задача 2: Круглий фонтан має площу $78,5 \text{ м}^2$. Знайдіть радіус, використовуючи $\pi \approx 3,14$.

Розв'язання:

$$\text{Площа кола} = \pi r^2$$

$$78.5 = 3.14 \cdot r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{78.5}{3.14} = 25 \Leftrightarrow r = \sqrt{25} = 5 \text{ метрів}$$

Частина 2: Розуміння кубічних коренів ($\sqrt[3]{}$)

Задача 3: Вам потрібен кубічний ящик для рослин, який вміщує 125 літрів ґрунту. Який має бути розмір кожного ребра? (Примітка: 1 літр = 1000 см^3 , отже $125 \text{ л} = 125\,000 \text{ см}^3$)

Розв'язання:

$$\text{Об'єм куба} = \text{ребро}^3$$

$$125\,000 = \text{ребро}^3$$

$$\text{ребро} = \sqrt[3]{125000}$$

$$\text{Спростимо: } 125\,000 = 125 \times 1000 = 5^3 \times 10^3$$

$$\sqrt[3]{125000} = \sqrt[3]{5^3 \times 10^3} = 5 \times 10 = 50 \text{ см}$$

$$\text{Перевірка: } 50 \times 50 \times 50 = 125\,000$$

Задача 4: Кулястий горщик для рослин має об'єм $904,32 \text{ см}^3$. Знайдіть радіус, використовуючи $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Розв'язання:

$$904.32 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3 \Leftrightarrow 904.32 = 4.19 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{904.32}{4.19} = 216$$

$$r = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ см}$$

$$(\text{Оскільки } 216 = 6 \times 6 \times 6)$$

Частина 3: Розуміння 4-го та 5-го коренів

Задача 5: Схема росту: Популяція рослин щомісяця множиться на один і той самий коефіцієнт. Через 5 місяців з 1 початкової рослини залишилося 243. Який щомісячний коефіцієнт росту?

Розв'язання:

$$1 \times \text{коефіцієнт}^5 = 243 \Leftrightarrow \text{коефіцієнт}^5 = 243$$

$$\text{коефіцієнт} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

Щомісяця популяція потроюється!

Зв'язки з реальним світом:

Дослідіть та напишіть про:

1. Як архітектори використовують квадратні корені для обчислення
2. Як фермери використовують кубічні корені для проектування контейнерів для зберігання
3. Знайдіть приклади обчислення коренів у кулінарії (масштабування рецептів)

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність розрахунків задач 1,2	2,5
Правильність розрахунків задач 3,4	2,5
Правильність розрахунків задачі 5	2,5
Правильність застосування особливостей кореня	1
Повнота відповідей на питання для рефлексії	2
Оформлення роботи та презентація	1,5
Всього	12

Запитання для рефлексії:

- Чому $\sqrt{4} = 2$, але також $\sqrt{4} = -2$? Який з них ми використовуємо для вимірювань, наприклад, у саду і чому?
- Чи можете ви взяти квадратний корінь з від'ємного числа? Чому так чи ні?
- Що більше: $\sqrt[3]{100}$ чи $\sqrt{100}$? Як це визначити без калькулятора?
- Якщо площа квадрата подвоюється, чи подвоюється також його сторона? Поясніть на прикладі.

Результати:

- Практичні рішення задач (показано всі 15 задач з роботами)

- Дослідження з реального світу (презентація)
- Контрольний список оцінювання:
- Правильно застосовані властивості коренів
- Виконані всі практичні задачі
- Чіткі пояснення та акуратна робота

ДОДАТОК В

ПРОЄКТ 3: Алгебра - Перетворення виразів з коренями

Форма: Покроковий семінар (індивідуально або пари)

Зміст: Методи спрощення

Назва проєкту: "Математика теслярства: Спрощення вимірювань за допомогою коренів"

Опис проєкту

Учні вчаться спрощувати вирази з коренями, проєктуючи книжкову полицю. Вони перетворюють складні вимірювання з коренями на простіші форми, які зручніше використовувати в реальних розрахунках.

Основне завдання проєкту

Ви - теслярі, які проєктують книжкову полицю. Виміри задані у формі коренів.

Ваше завдання - спростити всі виміри для зручності роботи.

Дизайн книжкової полиці

Верхня полиця	Ширина $\sqrt{48}$ см
Середня полиця	Ширина $\sqrt{75}$ см
Нижня полиця	Ширина $\sqrt{108}$ см

Додаткові елементи:

- Висота бічної стінки: $\sqrt{80}$ см
- Товщина полиці: $\sqrt{12}$ см
- Відстань між полицями: $\sqrt{45}$ см

ЧАСТИНА 1: Спрощення основних вимірів

Завдання 1.1: Спростіть ширину кожної полиці

Верхня полиця: $\sqrt{48} = ?$

- Крок 1: Розкладіть 48 на множники
- Крок 2: Знайдіть точні квадрати
- Крок 3: Винесіть з-під кореня

Середня полиця: $\sqrt{75} = ?$

Нижня полиця: $\sqrt{108} = ?$

ЧАСТИНА 2: Додавання спрощених вимірів

Завдання 2.1: Знайдіть загальну ширину всіх полиць

Загальна ширина = (ширина верхньої) + (ширина середньої) + (ширина нижньої)

Загальна ширина = _____ $\sqrt{3}$ + _____ $\sqrt{3}$ + _____ $\sqrt{3}$ = _____ $\sqrt{3}$ см

ЧАСТИНА 3: Спрощення додаткових вимірів

Завдання 3.1: Спростіть:

- Висоту бічної стінки: $\sqrt{80} = ?$
- Товщину полиці: $\sqrt{12} = ?$
- Відстань між полицями: $\sqrt{45} = ?$

Завдання 3.2: Знайдіть загальну висоту полиці

Якщо 3 полиці і 2 відстані між ними:

Загальна висота = $3 \times (\text{товщина}) + 2 \times (\text{відстань між полицями})$

ЧАСТИНА 4: Раціоналізація для покупки матеріалів

Вам потрібно купити дошку довжиною:

Варіант А: $30/\sqrt{5}$ см

Варіант Б: $24/\sqrt{3}$ см

Варіант В: $40/\sqrt{2}$ см

Завдання 4.1: Раціоналізуйте кожен вимір

Завдання 4.2: Який варіант найдовший? (порівняйте після спрощення)

ЧАСТИНА 5: Оптимізація вимірів

Теслярський магазин продає дошки стандартної ширини: $6\sqrt{3}$ см

Завдання 5.1: Скільки таких дошок потрібно для кожної полиці?

- Верхня ($4\sqrt{3}$ см): потрібно _____ дошок по $6\sqrt{3}$ см?
- Середня ($5\sqrt{3}$ см): потрібно _____ дошок?
- Нижня ($6\sqrt{3}$ см): потрібно _____ дошок?

Практична частина

Завдання 1: Створення довідкової картки

На картці розміром А5 створіть:

Лицьова сторона:

ДОВІДКА КОРЕНІ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$
$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$
$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

ТОЧНІ КВАДРАТИ: 4, 9, 16, 25, 36, 49...

Зворотна сторона:

- Таблиця точних квадратів від 1 до 144
- Покрокові приклади спрощення

Завдання 2: Схема книжкової полиці

На аркуші А4 намалюйте:

1. Ескіз полиці з видом збоку
2. Позначте всі виміри:
 - Початкові (з коренями)
 - Спрощені (після перетворення)
3. Кольорове кодування:
 - Синій - початкові виміри
 - Зелений - спрощені виміри
4. Додайте розрахунки внизу схеми

Завдання 3: Список матеріалів

Створіть таблицю покупок:

Елемент	Початковий вимір	Спрощений вимір	Кількість
Верхня полиця	$\sqrt{48}$ см	___	1
Середня полиця	$\sqrt{75}$ см	___	1
Нижня полиця	$\sqrt{108}$ см	___	1

Бічна стінка	$\sqrt{80}$ см	—	2
ВСЬОГО ДЕРЕВА		—	

Завдання 7: Периметр полиці

Якщо верхня полиця має ширину $4\sqrt{3}$ см і глибину $2\sqrt{3}$ см, знайдіть її периметр.

Формула: $P = 2(\text{ширина} + \text{глибина})$

Завдання 8: Площа полиці

Знайдіть площу кожної полиці, якщо глибина всіх полиць = $\sqrt{27}$ см

Формула: $S = \text{ширина} \times \text{глибина}$

Підказка: $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$

Підсумкова таблиця. Заповніть таблицю результатів:

Вимір	Початкове значення	Розклад	Спрощене значення
Ширина верхньої полиці	$\sqrt{48}$	$\sqrt{(16 \cdot 3)}$	$4\sqrt{3}$
Ширина середньої полиці	$\sqrt{75}$		
Ширина нижньої полиці	$\sqrt{108}$		
Висота бічної стінки	$\sqrt{80}$		
Товщина полиці	$\sqrt{12}$		
Відстань між полицями	$\sqrt{45}$		
Загальна ширина полиць			

Результати проєкту

Учні створюють:

1. Довідкову картку з правилами та прикладами
2. Схему книжкової полиці зі спрощеними вимірами
3. Розрахункові аркуші з покроковими розв'язаннями
4. Список матеріалів для побудови
5. Презентацію методів спрощення

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність винесення множників	3,5
Правильність додавання коренів	2,5
Правильність раціоналізації	2,5
Якість довідкової картки	1
Точність схеми полиці	1
Оформлення роботи	1,5
Всього	12

Додаткові завдання для швидких учнів

1. Порівняння: Які дві полиці мають найбільшу різницю в ширині?
2. Оптимізація: Якщо дошки продаються по $\sqrt{75}$ см, скільки таких дошок потрібно для всіх полиць?
3. Дизайн: Створіть власну полицю з 4 рівнями, де всі виміри - це корені, які спрощуються до виразів з $\sqrt{2}$

ДОДАТОК Г

ПРОЄКТ 4: Алгебра - Перетворення з раціональними показниками ступеня

Форма: Навчання через відкриття (Пари або малі групи 2-3 учні)

Зміст: Позначення ступеня

Назва проєкту: "Фотолабораторія: Розуміння степенів та коренів як показників ступеня"

Опис проєкту

Учні відкривають зв'язок між коренями та дробовими показниками ступеня ($\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$), працюючи зі збільшенням фотографій. Вони вчаться перетворювати вирази між радикальною та експоненціальною формами та застосовувати закони степенів.

Основне завдання проєкту

Ситуація

Ви працюєте у фотолабораторії! Вам потрібно розрахувати масштабування фотографій для різних замовлень. Всі обчислення використовують раціональні показники ступеня.

ЧАСТИНА 1: Базове масштабування

Замовлення 1: Збільшення фото для рамки

Вихідні дані:

- Оригінальне фото: 4 см × 6 см
- Площа оригіналу: 24 см²
- Потрібна площа: 96 см²

Завдання 1.1: Знайдіть коефіцієнт збільшення площі

$$96 = 24 \times k \text{ (де } k \text{ - коефіцієнт)}$$

$$k = ?$$

Завдання 1.2: Знайдіть масштаб лінійних розмірів

Якщо площа збільшилась у k разів, то лінійні розміри збільшились у

$$\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}} \text{ разів.}$$

$$\text{Масштаб} = k^{\frac{1}{2}} = ?$$

Завдання 1.3: Знайдіть нові розміри фото

$$\text{Нова ширина} = 4 \times \text{масштаб} = ?$$

$$\text{Нова висота} = 6 \times \text{масштаб} = ?$$

ЧАСТИНА 2: Складніше масштабування

Замовлення 2: Фото для виставки

Вихідні дані:

- Оригінал: 3 см × 5 см (площа = 15 см²)
- Потрібна площа: 135 см²

Завдання 2.1: Знайдіть коефіцієнт збільшення площі

Завдання 2.2: Обчисліть масштаб:

$$\text{Масштаб} = (\text{коефіцієнт площі})^{\frac{1}{2}}$$

Завдання 2.3: Перетворіть у радикальну форму та обчисліть

ЧАСТИНА 3: Кубічне масштабування (3D-моделі)

Замовлення 3: 3D-фігурка з фото

Вихідні дані:

- Об'єм маленької моделі: 8 см³
- Об'єм великої моделі: 64 см³

Завдання 3.1: Знайдіть коефіцієнт збільшення об'єму

Завдання 3.2: Обчисліть масштаб лінійних розмірів:

$$\text{Масштаб} = (\text{коефіцієнт об'єму})^{\frac{1}{3}}$$

Підказка: Якщо об'єм збільшився в k разів, то лінійні розміри збільшилися в

$$k^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k} \text{ разів}$$

Завдання 3.3: Якщо висота маленької моделі 2 см, яка висота великої?

ЧАСТИНА 4: Комбіновані перетворення

Замовлення 4: Серія фото для колажу

Вам потрібно створити 3 версії одного фото:

Фото А: Масштаб = $16^{\frac{1}{4}}$

Фото Б: Масштаб = $27^{\frac{1}{3}}$

Фото В: Масштаб = $32^{\frac{2}{5}}$

Завдання 4.1: Обчисліть кожен масштаб (покажіть обчислення!)

Завдання 4.2: Яке фото найбільше?

Завдання 4.3: Якщо оригінал має ширину 5 см, знайдіть ширину кожного фото

ЧАСТИНА 5: Складні обчислення для професіоналів

Замовлення 5: Подвійне масштабування

Клієнт хоче:

1. Спочатку збільшити фото у $8^{\frac{1}{3}}$ разів
2. Потім збільшити результат ще у $8^{\frac{1}{2}}$ разів

Завдання 5.1: Використовуючи закони степенів, знайдіть загальний масштаб:

$$\text{Загальний масштаб} = 8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} = 8^{(?)}$$

Завдання 5.2: Обчисліть значення загального масштабу

Завдання 5.3: Якщо початкова ширина 4 см, яка буде фінальна?

ЧАСТИНА 6: Зменшення фото

Замовлення 6: Мініатюри для соцмереж

Вихідні дані:

- Великий файл: 64 Мб
- Потрібний розмір: 8 Мб

Завдання 6.1: У скільки разів потрібно зменшити розмір файлу?

Завдання 6.2: Обчисліть коефіцієнт зменшення лінійних розмірів:

$$\text{Коефіцієнт} = \left(\frac{8}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = ?$$

Завдання 6.3: Перетворіть у радикальну форму

Завдання 6.4: Якщо оригінал 1200 пікселів, скільки буде у мініатюрі?

Практична частина

Завдання 1: Таблиця перетворень

Створіть таблицю на аркуші А4:

Радикальна форма	Експоненціальна форма	Приклад з числом
$\sqrt{x}$	$x^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt[3]{x}$	$x^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[4]{x}$		
$\sqrt{x^3}$		
$\sqrt[3]{x^2}$		
$\sqrt[4]{x^3}$		
$\sqrt[5]{x^2}$		

Завдання 2: Довідкова картка законів степенів

На картці А5 створіть:

Лицьова сторона:

ЗАКОНИ СТУПЕНІВ	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(ab)^n = a^n b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$	

Зворотна сторона:

- Покрокові приклади
- Таблиця часто використовуваних степенів
- Ваші власні приклади

Завдання 3: Дизайн фото-колажу

На аркуші А3 створіть макет колажу:

- Намалюйте 6 прямокутників (фото) різних розмірів
- Позначте кожне фото:
 - Оригінальний розмір

- Масштаб (у вигляді $a^{\frac{m}{n}}$)
- Фінальний розмір

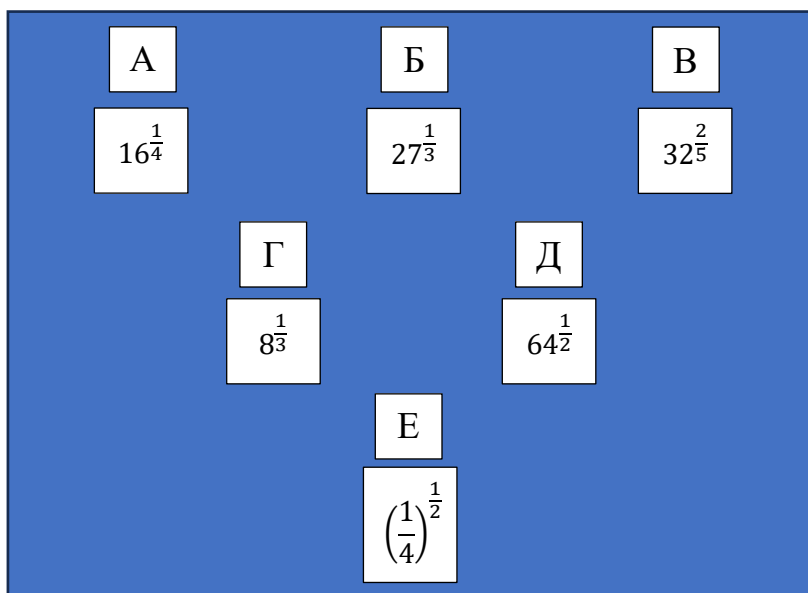
8. Використайте масштаби з Частини 4

9. Кольорове кодування:

- Синій - Оригінальний розмір
- Зелений - Збільшені фото
- Червоний - Зменшені фото

10. Додайте всі обчислення з боку або знизу

Схема колажу:



Завдання 9: Практична задача

Фотолабораторія друкує фото зі швидкістю $V = 100 \cdot t^{\frac{2}{3}}$ фото за t годин.

- Скільки фото роздрукують за 8 годин?
- За який час роздрукують 400 фото?

Завдання 10: Задача з зірочкою ★

Площа фото збільшилась у 16 разів, потім ще у 9 разів.

- У скільки разів збільшився лінійний масштаб? (використайте закони степенів!)
- Якщо початкова ширина 2 см, яка фінальна ширина?

Підсумкова таблиця масштабування

Заповніть таблицю для всіх замовлень:

Замо- влення	Початкові дані	Коефіцієнт	Масштаб (експонента)	Масштаб (радикал)	Фінальний розмір
1	$4 \times 6, 96\text{см}^2$	4	$4^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{4}$	8×12
2	$3 \times 5, 135\text{см}^2$				
3	$V=8 \rightarrow 64\text{см}^3$				
4А	Масштаб $16^{\frac{1}{4}}$	-	$16^{\frac{1}{4}}$		
4Б	Масштаб $27^{\frac{1}{3}}$	-	$27^{\frac{1}{3}}$		
4В	Масштаб $32^{\frac{2}{5}}$	-	$32^{\frac{2}{5}}$		
5	Подвійне збільш.	-	$8^{(?)}$		
6	$64\text{Мб} \rightarrow 8\text{Мб}$				

Результати проєкту

Учні створюють:

1. Таблицю перетворень (радикал $\leftrightarrow$ експонента)
2. Довідкову картку з законами степенів
3. Розрахунки масштабування для всіх замовлень
4. Дизайн фотоколажу з позначеними розмірами
5. Підсумкову таблицю результатів
6. Презентацію методів обчислення

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність перетворень (радикал $\leftrightarrow$ експонента)	2
Правильність обчислень значень	2
Розрахунки масштабування (Частини 1-3)	3
Складні обчислення (Частини 4-6)	2
Таблиця перетворень та довідкова картка	1
Дизайн фото-колажу з розрахунками	1
Акуратність та повнота роботи	1

Додаткові завдання для швидких учнів

1. Дослідження: як змінюється розмір файлу при зміні лінійних розмірів фото?
2. Творче завдання: створіть рекламний плакат фотолабораторії з прикладами масштабування
3. Програмування: напишіть формулу в Excel для автоматичного розрахунку масштабу
4. Зв'язок з геометрією: дослідіть, як змінюється периметр при масштабуванні площі

ДОДАТОК Д

ПРОЄКТ 5: Алгебра - Розв'язання ірраціональних рівнянь

Форма: Практикум з розв'язання задач

Зміст: Покрокові розв'язки

Назва проєкту: "Пошук скарбів: Розв'язання рівнянь з квадратним коренем"

Опис проєкту

Учні розв'язують ірраціональні рівняння, слідуючи "карті скарбів". Кожне правильно розв'язане рівняння дає координати наступного місця. Важливо перевіряти всі розв'язки, щоб не потрапити в "пастку" сторонніх коренів!

Основне завдання: ПОШУК СКАРБІВ

Легенда

Давній пірат заховав скарб на острові. Щоб знайти його, потрібно розв'язати 10 рівнянь. Кожне рівняння дає координату X або Y наступної точки на карті!

МАРШРУТ 1: Початок подорожі (легкі рівняння)

Точка 1 (X₁): $\sqrt{x+5} = 4$

Крок 1: _____

Крок 2: _____

Крок 3: $x =$ _____

Перевірка: $\sqrt{(___ + 5)} = \sqrt{___} = ___$

Точка 1 (Y₁): $\sqrt{2x+1} = 5$

Розв'язання: _____

Відповідь: $x =$ _____

Точка 2 (X₂): $\sqrt{x} + 3 = 7$

Розв'язання: _____

Відповідь: $x =$ _____

МАРШРУТ 2: Глибше в джунглі (середня складність)

Точка 2 (Y₂): $\sqrt{3x-2} = 4$

Точка 3 (X₃): $\sqrt{x+7} - 2 = 3$

Точка 3 (Y₃): $\sqrt{5x+1} + 1 = 6$

МАРШРУТ 3: Печера з пастками (складні рівняння)

УВАГА: Тут можуть бути сторонні корені!

Точка 4 (X₄): $\sqrt{2x - 3} = x - 3$

Підказка: після піднесення до квадрата
отримаєте квадратне рівняння!

Точка 4 (Y₄): $\sqrt{x + 5} = \sqrt{2x - 1}$

Підказка: можна звести до квадрата обидві частини

МАРШРУТ 4: Останній крок до скарбу

Точка 5 (X₅): $\sqrt{4x + 1} - \sqrt{x + 4} = 0$

Підказка: перенесіть один корінь вправо

Точка 5 (Y₅): $2\sqrt{x - 1} = 8$

Підказка: спочатку поділіть на 2

Таблиця результатів

Заповніть таблицю координат:

Точка	Рівняння для X	X	Рівняння для Y	Y	Перевірка
1	$\sqrt{x + 5} = 4$		$\sqrt{2x + 1} = 5$		Так/Ні
2	$\sqrt{x} + 3 = 7$		$\sqrt{3x - 2} = 4$		Так/Ні
3	$\sqrt{x + 7} - 2 = 3$		$\sqrt{5x + 1} + 1 = 6$		Так/Ні
4	$\sqrt{2x - 3} = x - 3$		$\sqrt{x + 5} = \sqrt{2x - 1}$		Так/Ні
5	$\sqrt{4x + 1} - \sqrt{x + 4} = 0$		$2\sqrt{x - 1} = 8$		Так/Ні

Практична частина

Завдання 1: Карта скарбів

На аркуші А4 створіть координатну площину:

- Накресліть осі X та Y (від 0 до 25)
- Позначте всі 5 точок з таблиці
- З'єднайте точки лініями по порядку
- Позначте:
 - Червона точка СТАРТ (0, 0)

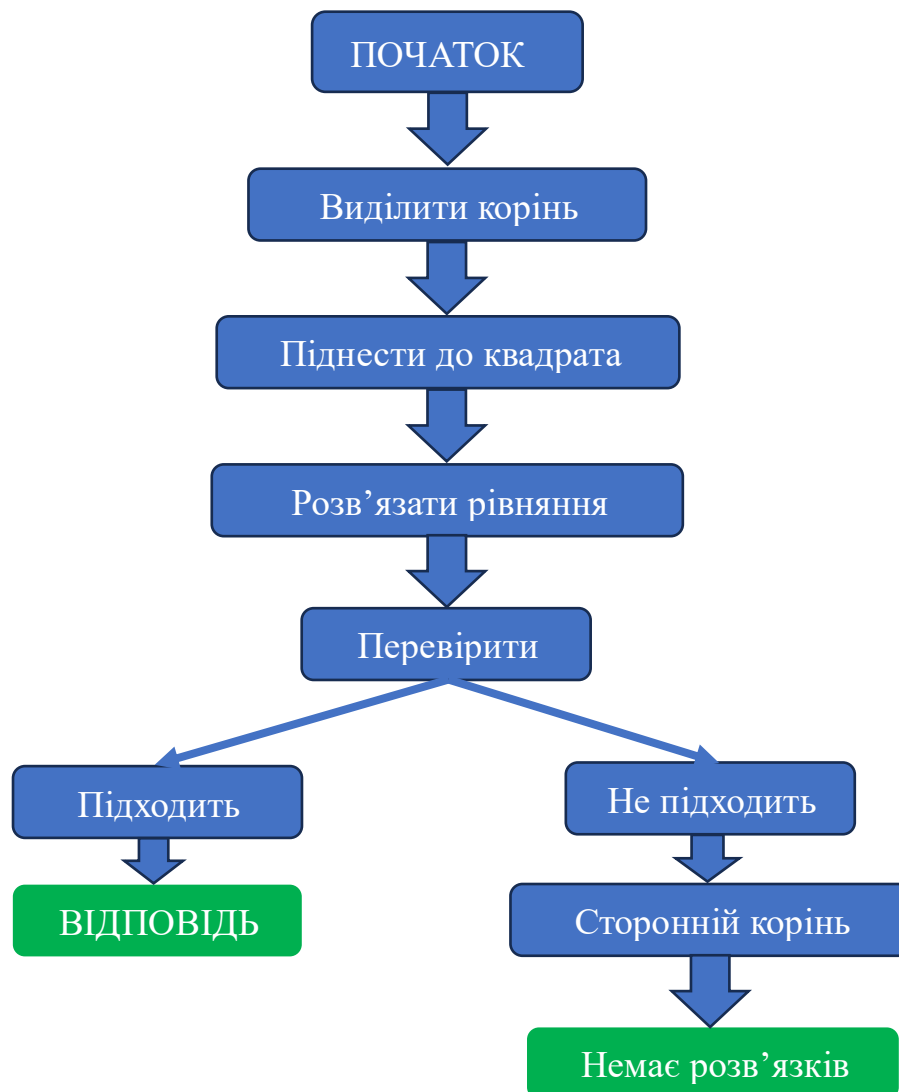
- Синя точка СКАРБ (остання точка)
- Жовта точка - небезпечні місця (де були сторонні корені)

Оформлення:

- Намалюйте острів, пальми, море
- Підпишіть кожну точку номером
- Додайте компас (північ-південь)

Завдання 2: Блок-схема алгоритму

На картці А5 створіть блок-схему (додайте приклад на кожному кроці):



Завдання 3: Довідкова картка "Пастки"

Створіть список типових помилок:

ПОМИЛКА 1: Забути перевірити розв'язок

ПРАВИЛЬНО: Завжди підставляти в оригінал

ПОМИЛКА 2: Вважати, що $\sqrt{x}$ може бути від'ємним

ПРАВИЛЬНО: $\sqrt{x} \geq 0$ завжди!

ПОМИЛКА 3: Піднести до квадрата неправильно

ПРАВИЛЬНО: $(\sqrt{x} + 3)^2 \neq x + 9$

Відповідайте на питання:

1. Скільки рівнянь ви розв'язали правильно з першого разу?
2. Скільки разів зустріли сторонні корені?
3. Який тип рівнянь був найскладнішим?
4. Яка координата скарбу: $(X_5, Y_5) = (_, _)$?

Результати проєкту

Учні створюють:

1. 10 розв'язаних рівнянь з перевітками
2. Карту скарбів з нанесеними точками
3. Блок-схему алгоритму розв'язання
4. Довідкову картку про типові помилки
5. Таблицю координат з перевітками

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність розв'язання (10 рівнянь $\times$ 0.4)	4
Наявність перевірок	2
Карта скарбів з координатами	2
Блок-схема алгоритму	2
Довідкова картка	1
Акуратність та повнота	1
Всього	12

Швидка довідка

Покроковий приклад

Рівняння: $\sqrt{2x - 3} + 1 = 4$

Крок 1: $\sqrt{2x - 3} = 3$

Крок 2: $2x - 3 = 9$

Крок 3: $2x = 12$, $x = 6$

Крок 4 (перевірка):

$$\sqrt{2 \cdot 6 - 3} + 1 = \sqrt{9} + 1 = 3 + 1 = 4$$

Відповідь: $x = 6$

Ключ для перевірки (для вчителя)

Точка	X	Y
1	11	12
2	16	6
3	18	4
4	7	9
5	5	17

Координата скарбу: (5, 17)

ДОДАТОК Е

ПРОЄКТ 6: Геометрія - паралельність та перетин ліній у просторі

Форма: Практичне конструювання (групи по 3-4 учні)

Зміст: Просторові відносини

Назва проєкту: "Проектування мосту: аналіз паралельності та перетину сталевих балок"

Опис проєкту

Учні досліджують взаємне розміщення прямих у просторі, аналізуючи опорні балки мосту. Вони вивчають три можливі випадки: паралельні прямі, прямі що перетинаються та мимобіжні прямі.

Основне завдання проєкту

Ви - інженери, які проектують міст. Потрібно проаналізувати 4 пари опорних балок:

Пара 1:

- Балка А: через точку $(0, 0, 0)$, напрямок $(1, 2, -1)$
- Балка В: через точку $(3, 6, -3)$, напрямок $(2, 4, -2)$

Пара 2:

- Балка С: через точку $(1, 0, 2)$, напрямок $(2, -1, 1)$
- Балка D: через точку $(3, 1, 1)$, напрямок $(1, 1, -1)$

Пара 3:

- Балка Е: через точку $(0, 0, 0)$, напрямок $(1, 0, 0)$
- Балка F: через точку $(0, 2, 0)$, напрямок $(0, 1, 0)$

Пара 4:

- Балка G: через точку $(2, 1, 3)$, напрямок $(1, 2, -1)$
- Балка H: через точку $(0, 0, 0)$, напрямок $(2, -1, 1)$

Завдання для кожної пари:

Крок 1: Перевірте, чи паралельні балки

- Порівняйте вектори напрямків
- Чи є один вектор кратним іншому?

Крок 2: Якщо не паралельні - перевірте компланарність

- Знайдіть вектор $\vec{M_0M_1}$ між точками балок
- Обчисліть векторний добуток $\vec{d_1} \times \vec{d_2}$
- Обчисліть мішаний добуток

Крок 3: Зробіть висновок:

- Паралельні?
- Перетинаються?
- Мимобіжні?

Практична частина (побудова 3D-моделі)

Матеріали:

- Палички (шпажки) або соломинки для коктейлів
- Пластилін або зубочистки для з'єднань
- Картон для основи
- Маркери (різні кольори)

Інструкція:

- Виберіть одну пару балок зі свого аналізу
- Створіть систему координат на картоні
- Побудуйте балки за допомогою паличок
- Позначте кольором:
 - Червоний - паралельні балки
 - Синій - балки що перетинаються
 - Зелений - мимобіжні балки
- Додайте підписи з координатами точок та векторами

Підсумок роботи

Заповніть таблицю результатів:

Пара балок	Паралельні?	Компланарні?	Тип взаємного розміщення
A і B			
C і D			
E і F			
G і H			

Результати проекту

Учні створюють:

1. Розрахункові аркуші з аналізом кожної пари
2. 3D-модель мосту з позначеними балками
3. Кольорову схему, що показує типи взаємного розміщення
4. Презентацію висновків (усно або письмово)

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність перевірки паралельності	4
Правильність перевірки компланарності	3
Точність висновків	2
Якість 3D-моделі	1,5
Оформлення роботи	1,5
Всього	12

Додаткові завдання для швидких учнів

1. Знайдіть точку перетину для балок, що перетинаються
2. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими
3. Створіть власну пару балок, які будуть паралельними

ДОДАТОК Ж

ПРОЄКТ 7: Геометрія - Положення двох площин у просторі

Форма: Дослідження та доказ (групи по 3-4 учні)

Зміст: Три взаємозв'язки площин

Назва проєкту: "Геологічні шари: Пошук ліній розломів між шарами гірських порід"

Опис проєкту

Учні досліджують взаємне розміщення площин у просторі, аналізуючи геологічні шари гірських порід. Вони вивчають три можливі випадки: площини що збігаються, паралельні площини та площини що перетинаються, утворюючи лінії розломів.

Основне завдання проєкту

Ситуація

Ви - команда геологів, яка досліджує гірський масив. Потрібно проаналізувати 3 шари гірських порід та визначити їхнє взаємне розташування.

Дані про геологічні шари:

Шар А (Вапняк):

Рівняння: $2x + 3y + z = 12$

Нормаль: $n_1 = (2, 3, 1)$

Утворився: 100 млн років тому

Шар Б (Пісковик):

Рівняння: $4x + 6y + 2z = 30$

Нормаль: $n_2 = (4, 6, 2)$

Утворився: 95 млн років тому

Шар В (Сланець):

Рівняння: $x - 2y + 3z = 5$

Нормаль: $n_3 = (1, -2, 3)$

Утворився: 80 млн років тому

Завдання для кожної пари шарів:

ПАРА 1: Шари А та Б (Вапняк і Пісковик)

Крок 1: Перевірте паралельність

- Порівняйте нормальні вектори $n_1 = (2, 3, 1)$ та $n_2 = (4, 6, 2)$
- Чи є $n_2 = k \cdot n_1$? Знайдіть коефіцієнт k
- Перевірте вільні члени: $30 = k \cdot 12$?

Крок 2: Якщо паралельні - знайдіть відстань

- Приведіть рівняння до однакових коефіцієнтів
- Використайте формулу: $d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Крок 3: Зробіть висновок

- Площини збігаються?
- Площини паралельні? (На якій відстані?)
- Площини перетинаються?

ПАРА 2: Шари А та В (Вапняк і Сланець)

Крок 1: Перевірте паралельність

- Порівняйте $n_1 = (2, 3, 1)$ та $n_3 = (1, -2, 3)$
- Чи пропорційні вони?

Крок 2: Якщо не паралельні - знайдіть лінію розлому

Спосіб 1: Векторний добуток

- Обчисліть $s = n_1 \times n_3$
- Формула: $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

Спосіб 2: Система рівнянь

- Складіть систему:
$$2x + 3y + z = 12$$
$$x - 2y + 3z = 5$$
- Виразіть x та y через z (нехай $z = t$)
- Запишіть параметричне рівняння лінії

Крок 3: Зробіть висновок

- Знайдіть координати напрямного вектора лінії розлому
- Знайдіть хоча б одну точку, що належить лінії

ПАРА 3: Шари Б та В (Пісковик і Сланець)

Проаналізуйте цю пару самотійно за тим самим алгоритмом:

1. Перевірте паралельність
2. Якщо паралельні - знайдіть відстань
3. Якщо перетинаються - знайдіть лінію розлому

Практична частина

Побудова 3D-моделі геологічного розрізу

Матеріали:

- Картон або пінопласт (для шарів)
- Ножиці та клей
- Маркери (3 різні кольори)
- Лінійка
- Нитки або дріт (для ліній розломів)

Інструкція:

1. Створіть систему координат на великому аркуші картону (основа)
2. Виріжте три площини з кольорового картону:
 - Коричневий - Вапняк (шар А)
 - Жовтий - Пісковик (шар Б)
 - Синій - Сланець (шар В)
3. Розташуйте шари згідно з результатами аналізу:
 - Паралельні шари - на відповідній відстані
 - Шари що перетинаються - під кутом
4. Позначте лінії розломів червоними нитками або маркером
5. Додайте підписи:
 - Рівняння кожного шару
 - Відстані між паралельними шарами
 - Рівняння ліній розломів
6. Зробіть легенду з віком кожного шару

Підсумок роботи

Заповніть таблицю результатів:

Пара шарів	Паралельні?	Відстань / Лінія розлому	Тип взаємного розміщення
А та Б (Вапняк-Пісковик)			
А та В (Вапняк-Сланець)			
Б та В (Пісковик-Сланець)			

Результати проєкту

Учні створюють:

1. Розрахункові аркуші з детальним аналізом кожної пари шарів
2. 3D-модель геологічного розрізу з позначеними шарами та розломами
3. Таблицю результатів з усіма обчисленнями
4. Презентацію висновків (усно або письмово) про геологічну структуру масиву

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність перевірки паралельності (3 пари)	3
Правильність обчислення відстаней	2
Правильність знаходження ліній перетину	3
Точність висновків та заповнення таблиці	2
Якість 3D-моделі та візуалізації	1,5
Оформлення роботи та презентація	0,5
Всього	12

Додаткові завдання для швидких учнів

1. Кут між площинами

Знайдіть кут між шарами А та В, використовуючи формулу:

$$\cos \alpha = |\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2| / (|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|)$$

2. Четвертий шар

Геологи виявили новий шар: $6x + 9y + 3z = 24$

Визначте його положення відносно шарів А, Б та В.

3. Точка спостереження

Чи належить точка спостереження $M(2, 1, 3)$ якомусь із досліджуваних шарів?

Якщо ні, до якого шару вона найближча?

4. Проекція точки

Знайдіть проекцію точки $M(0, 0, 0)$ на площину шару А (Вапняк).

ДОДАТОК К

ПРОЄКТ 8: Геометрія - Аналіз руху транспортних засобів

Форма: Дослідження та обчислення (групи по 2-3 учні)

Зміст: Миттєва швидкість, функції руху

Назва проєкту: "Гонка вантажівок МАЗ: коли швидкості збігаються?"

Опис проєкту

Студенти застосовують похідні для аналізу руху в реальному світі, визначаючи миттєві швидкості двох транспортних засобів і розраховуючи, коли вони збігаються. Проєкт демонструє практичне застосування математичного аналізу до задач кінематики.

Основне завдання проєкту

Ситуація

Два автомобілі марки МАЗ рухаються одночасно на випробувальному полігоні. Їхні траєкторії описуються різними функціями руху. Вам потрібно визначити, в які моменти часу автомобілі мають однакові швидкості.

Дані про вантажівки:

Вантажівка 1 (синя):

- Закон руху: $S_1(t) = 4t^3 + 5$ (метри)
- Початкове положення: 5 метрів від старту
- Рух прискорюється з часом

Вантажівка 2 (червона):

- Закон руху: $S_2(t) = 18t^2 - 4$ (метри)
- Початкове положення: -4 метри (трохи позаду старту)
- Рух також прискорюється

Час t вимірюється в секундах, відстань S - у метрах.

Покроковий розв'язок

Крок 1: Знайдіть функції швидкості

Для вантажівки 1:

$$v_1(t) = S_1'(t) = \frac{d}{dt}(4t^3 + 5)$$

Застосуйте правила:

- Похідна $4t^3$: використайте $(t^n)' = n \cdot t^{n-1}$
- Похідна константи 5: дорівнює 0
- Обчисліть: $v_1(t) = ?$

Для вантажівки 2:

$$v_2(t) = S_2'(t) = \frac{d}{dt}(18t^2 - 4)$$

Застосуйте правила:

- Похідна $18t^2$
- Похідна константи -4
- Обчисліть: $v_2(t) = ?$

Крок 2: Прирівняйте швидкості

Встановіть рівняння: $v_1(t) = v_2(t)$

Підставте знайдені функції швидкості.

Крок 3: Розв'яжіть рівняння

Перенесіть все в одну сторону:

- Винесіть спільний множник
- Розв'яжіть рівняння
- Знайдіть усі значення t

Крок 4: Проаналізуйте результати

Для кожного знайденого моменту часу t :

- Обчисліть швидкість $v_1(t)$ і $v_2(t)$ (мають бути рівні)
- Обчисліть положення $S_1(t)$ і $S_2(t)$ (будуть різні!)
- Заповніть таблицю:

Момент часу t (сек)	$v_1(t)$ (м/с)	$v_2(t)$ (м/с)	$S_1(t)$ (м)	$S_2(t)$ (м)	Різниця положень (м)
$t = ?$					
$t = ?$					

Графічна частина

Завдання 1: Побудуйте графіки положення

На одній координатній площині побудуйте:

- Синій графік: $S_1(t) = 4t^3 + 5$
- Червоний графік: $S_2(t) = 18t^2 - 4$

Діапазон: t від 0 до 4 секунд

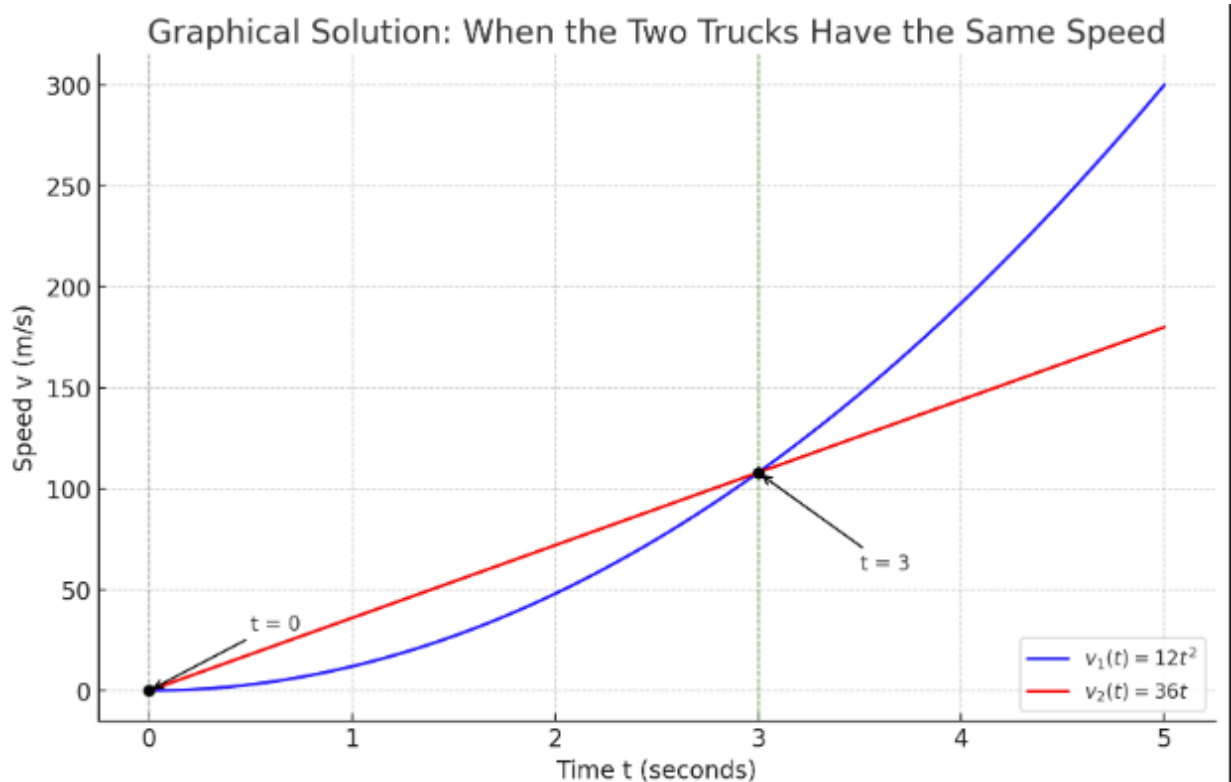
Завдання 2: Побудуйте графіки швидкості

На другій координатній площині побудуйте:

- Синя крива: $v_1(t) = 12t^2$
- Червона лінія: $v_2(t) = 36t$

Позначте:

- Точки перетину (коли $v_1 = v_2$)
- Зелені пунктирні вертикальні лінії в моменти t , коли швидкості рівні



Завдання 3: Створіть комбінований графік

Об'єднайте обидва графіки на одному плакаті з поясненнями.

Питання для рефлексії

Обговоріть у групі і запишіть відповіді:

1. Що означає, коли два транспортні засоби мають однакову швидкість, але знаходяться в різних положеннях?

Підказка: Подумайте про автомобілі на різних смугах автостради.

2. Чому вони мають однакову швидкість більше одного разу?

Підказка: Проаналізуйте графіки швидкостей - одна парабола, друга пряма лінія.

3. Чи можуть вони коли-небудь бути в одному положенні та мати однакову швидкість одночасно?

Підказка: Це потребує розв'язання системи:

- $v_1(t) = v_2(t)$
- $S_1(t) = S_2(t)$

4. Яка вантажівка рухається швидше при $t = 1$ сек? А при $t = 4$ сек?

5. Яка вантажівка має більше прискорення?

Підказка: Знайдіть $a(t) = v'(t) = S''(t)$

Результати проєкту

Учні створюють:

1. Письмове розв'язання з усіма обчисленнями похідних та розв'язком рівняння
2. Графіки функцій:
 - Графік положення $S_1(t)$ та $S_2(t)$
 - Графік швидкості $v_1(t)$ та $v_2(t)$
 - Позначення точок перетину
3. Заповнену таблицю з результатами для моментів t
4. Відповіді на питання для рефлексії
5. Коротку презентацію (усно або письмово) з висновками

Критерії оцінювання

Критерій	Бали
Правильність знаходження похідних (2 функції)	2
Правильність розв'язування рівняння	2
Обчислення швидкостей та положень для знайдених t	2

Якість та точність графіків	2,5
Повнота відповідей на питання для рефлексії	2
Оформлення роботи та презентація	1,5
Всього	12

Додаткові завдання для швидких учнів

1. Прискорення вантажівок

Знайдіть функції прискорення $a_1(t)$ та $a_2(t)$ для обох вантажівок.

Підказка: $a(t) = v'(t) = S''(t)$

Коли прискорення вантажівок рівні?

2. Максимальна різниця швидкостей

У який момент часу (на проміжку $[0, 5]$) різниця швидкостей $|v_1(t) - v_2(t)|$ є максимальною?

3. Третя вантажівка

На полігон виїхала третя вантажівка з законом руху $S_3(t) = 6t^2 + 10t$.

Знайдіть моменти, коли:

- $v_3(t) = v_1(t)$
- $v_3(t) = v_2(t)$

4. Коли вони зустрінуться?

Розв'яжіть рівняння $S_1(t) = S_2(t)$, щоб знайти, чи перетинаються траєкторії вантажівок (чи проїжджають вони через одну й ту саму точку).

Підказка: Це складніше рівняння! Можна використати графічний метод або числові методи.

5. Середня швидкість

Обчисліть середню швидкість кожної вантажівки на інтервалі $[0, 3]$ секунди.

Формула: $v_{\text{середня}} = [S(3) - S(0)] / 3$