

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

**ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ
АНАЛІЗУ УЧНІВ У КЛАСАХ ПРИРОДНИЧОГО ПРОФІЛЮ**

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04. Середня освіта (Математика)
Попрожук Катерини Євгенівни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Бобилєв Д.Є.

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Попрожук Катерина Євгенівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ.....	4
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ	8
1.1 Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу..	8
1.2 Використання прикладних задач природничого характеру під час повторення загально-функціональних понять основної школи	18
1.3 Показникова, логарифмічна, степенева функції – математичні моделі прикладних задач	22
1.4 Принципи побудови двоядерної моделі курсу алгебри та початків аналізу для профільних класів природничо-наукового напрямку.....	25
РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ УЧНІВ В КЛАСАХ ПРИРОДНИЧОГО ПРОФІЛЮ .	37
2.1 Приклади прикладних завдань складених учнями.....	37
2.2 Апробація матеріалів та аналіз проведеного тестування	51
2.3 Організація роботи вчителя на етапі актуалізації знань на уроках алгебри по темі "похідна"	62
2.4 Система вправ на уроках алгебри по темі " похідна"	63
2.5 Аналіз і динаміка сформованості поняття похідної.....	69
ВИСНОВОК.....	71
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	72

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ПЗ - прикладна задача

НП - навчальний процес

МО - методичне об'єднання

УМК - навчально-методичний комплекс

КТН - критичне мислення

ІКТ - інформаційно-комунікаційні технології

ВСТУП

Розвиток шкільної освіти в Україні, особливо в галузі математичної підготовки учнів, стимулює педагогічну науку шукати нові підходи до формування змісту навчання, застосування сучасних технологій та критеріїв для досягнення високого рівня практичних компетентностей учнів, орієнтованих на їх особистісний розвиток. Щоб успішно адаптуватися до сучасних умов життя, кожен випускник середньої школи має опанувати певні методи математичної діяльності та навички їх застосування для розв'язання прикладних задач. Курси алгебри і початків аналізу – важливі навчальні дисципліни, які значною мірою сприяють формуванню особистості учня та його підготовці до майбутньої професії. Однак володіння знаннями з цієї галузі не гарантує їх активного застосування у різних життєвих ситуаціях. Така здатність формується через цілеспрямовану педагогічну роботу, що передбачає набуття знань, умінь і навичок, які учні зможуть широко використовувати у повсякденному житті, навчанні у ВНЗ або професійній діяльності.

Прикладні задачі є одним із найбільш ефективних засобів формування вмінь і навичок застосовувати набуті знання в нестандартних ситуаціях. На жаль, їхній обсяг у сучасних шкільних підручниках з математики є недостатнім. Саме тому цей навчальний посібник спрямований на заповнення цієї прогалини, допомагаючи вчителям, учням, магістрам, дослідникам та авторам підручників з алгебри і початків аналізу краще зрозуміти теоретичні та практичні аспекти прикладної спрямованості курсу. У ньому запропоновані методичні рекомендації та засоби, що сприятимуть ефективнішому засвоєнню курсу незалежно від обраного профілю навчання.

Однією з ключових методичних вимог до реалізації прикладної спрямованості курсу є наповнення навчального процесу прикладними задачами, які повинні відповідати таким критеріям:

- 1) мати реальний практичний зміст, що ілюструє цінність і значущість математичних знань у житті;

2) відповідати програмам і підручникам з алгебри та початків аналізу за методами та фактами, необхідними для їх розв'язання;

3) демонструвати практичне застосування математичних ідей у природничих науках, зокрема в біології, генетиці, екології, хімії, медицині та фармації;

4) викликати пізнавальний інтерес учнів та давати можливість показати ефективність застосування математичних знань на практиці;

5) містити поняття і терміни, зрозумілі або інтуїтивно сприйнятні для учнів;

6) базуватися на реальних числових даних, що відповідають практичній дійсності.

При розв'язанні таких задач слід дотримуватись правил наближених обчислень і застосовувати сучасні обчислювальні засоби, зокрема персональні комп'ютери, для підвищення ефективності та точності.

Актуальність теми. В сучасній освіті особлива увага приділяється розвитку математичної компетентності учнів, оскільки саме вона є фундаментом для формування аналітичного мислення, здатності до логічного мислення та розв'язання складних задач у будь-якій галузі науки. Зокрема, навчання алгебри та початкових аспектів аналізу в природничих класах має важливе значення для формування наукового світогляду та розвитку дослідницьких навичок учнів. Практичний досвід показує, що застосування прикладних задач у навчанні допомагає зробити абстрактні математичні поняття більш зрозумілими, стимулює інтерес до предмету та сприяє глибшому засвоєнню матеріалу.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри та початкових понять аналізу учнів у природничих класах загальноосвітніх навчальних закладів.

Предметом дослідження виступають методи та засоби формування математичних навичок через застосування прикладних задач.

Метою дипломної роботи є розробка та впровадження ефективних підходів до навчання алгебри та початкових аспектів аналізу через використання прикладних задач у навчанні учнів природничих класів.

Для досягнення цієї мети визначені такі **завдання**:

- розібрати прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу ;
- розглянути використання прикладних задач природничого характеру під час повторення загально-функціональних понять основної школи;
- порівняти показникова, логарифмічна, степенева функції – математичні моделі прикладних задач;
- привести принципи побудови двоядерної моделі курсу алгебри та початків аналізу для профільних класів природничо-наукового напрямку;
- проаналізувати приклади прикладних завдань складених учнями;
- виконати апробацію матеріалів та аналіз проведеного тестування;
- охарактеризувати організацію роботи вчителя на етапі актуалізації знань на уроках алгебри по темі "похідна";
- привести систему вправ на уроках алгебри по темі " похідна";
- описати аналіз і динаміку сформованості поняття похідної.

У процесі дослідження використовувалися такі методи: аналіз літературних джерел, педагогічний спостереження, тестування, методи педагогічного експерименту.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані результати мають практичне значення для вчителів математики природничих класів, які можуть використовувати розроблені рекомендації та методичні матеріали для підвищення ефективності навчання алгебри та аналізу. Впровадження запропонованих підходів сприяє підвищенню мотивації учнів, поліпшенню рівня їхніх знань і навичок, а також розвитку їхнього аналітичного мислення.

Структура роботи. Дипломна робота складається з вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

1.1 Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу

Володіння навичками математичної діяльності та здатність застосовувати їх для розв'язання різноманітних задач є важливими чинниками успішної участі особистості у сучасному суспільному житті. Одним із базових положень, які наразі лежать в основі системи вітчизняної математичної освіти, є орієнтація навчання математики на забезпечення міцного й усвідомленого засвоєння учнями системи математичних знань і вмінь, необхідних у повсякденному житті, для успішного опанування інших навчальних предметів у школі та для здобуття якісної професійної освіти у майбутньому. Це положення потребує додаткових роз'яснень. Аналіз матеріалів звіту про світовий розвиток [1], підготовленого Світовим банком на основі тестування математичних та природничих знань учнів і студентів окремих розвинених країн, зокрема й країн СНД, виявляє різницю у розумінні важливості цих знань і, відповідно, у ставленні до їх формування. Так, наприклад, якщо зосередитись на одній із цілей навчання: 1) формуванні системи знань; 2) навчанні застосовувати знання на практиці; 3) розвитку навичок використання знань у нестандартних ситуаціях, то різні країни мають різне бачення їх важливості (рис. 1).

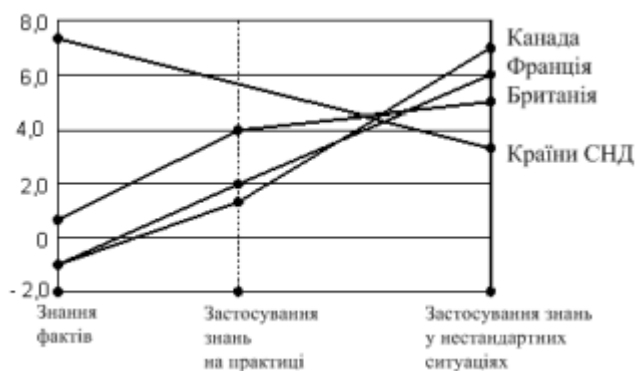


Рисунок 1

На рис. 1 показані відхилення від середнього значення у вибірці школярів віком 9-13 років. Графіки демонструють, що у країнах колишнього СРСР традиційно пріоритетною була ціль формувати у учнів глибокі та міцні математичні і природничі знання, тоді як двом іншим цілям приділялося менше уваги. В інших країнах, як видно з рис. 1, пріоритети в цільових орієнтирах різняться.

Україна, стаючи незалежною державою і реформуючи систему освіти, прагне виправити цю тенденцію. У всіх подальших нормативних документах, що стосуються змісту математичної освіти, вимог до математичної підготовки учнів, профілізації шкіл тощо, акцент робиться на посиленні прикладної спрямованості курсу математики (ціль 3). Перехід від когнітивно-інформаційної парадигми освіти до компетентнісної не лише стимулює, а й зобов'язує втілювати ці зміни. Стверджувати, що вже зроблено все можливе у цьому напрямі, не можна з огляду на різні чинники: інерційність системи освіти, складність вирішення проблеми, недостатнє матеріальне забезпечення тощо. Однак поступовий рух уперед, навіть якщо й малий, все ж має місце.

Прикладна спрямованість шкільного курсу математики розглядається як важлива проблема, яку потрібно вирішити, а її метою є формування у учнів практичних навичок та застосування математичних знань у реальному житті. Це положення закріплено у таких освітніх документах, як „Концепція математичної освіти 12-річної школи” [4], „Концепція профільної освіти у старшій школі” [5], „Державний стандарт базової середньої освіти: освітня галузь Математика” [2], а також у програмах з математики для середньої школи та інших нормативних документах.

Наукові дослідження, зокрема З.І. Слєпкань, М.Я. Ігнатенка, А.В. Пруса, Л.О. Соколенко, В.О. Швеця та інших українських методистів, були спрямовані на розробку технологій для реалізації цієї проблеми. Вони досліджували і продовжують досліджувати питання прикладної спрямованості шкільних курсів алгебри, початкового аналізу, стереометрії та

інтегрованого курсу „Математика”. Однак, поки що, цю проблему менш успішно вирішено в підручниках з математики нового покоління.

Що ж таке „прикладна спрямованість шкільного курсу математики”? Першим визначення цього поняття дав радянський педагог-математик В.В. Фірсов. Згодом його удосконалювали інші вчені. За нашим розумінням, суть прикладної спрямованості полягає у орієнтації цілей, змісту та засобів навчання на:

- здійснення цілеспрямованих зв'язків між математикою і практикою;
- формування в учнів здатності застосовувати математичні знання, уміння і навички у процесі математичного моделювання для розв'язання реальних життєвих та професійних задач.

Остання теза передбачає включення в навчальний процес таких елементів, що характерні для дослідження прикладних проблем і розв'язання прикладних задач — задач, що виникають поза межами математики, але розв'язуються за допомогою математичного апарату.

Поряд з поняттям прикладної спрямованості часто використовується термін „практична спрямованість” навчання математики. За нашим розумінням, її суть полягає у спрямованості цілей, змісту, засобів і методів навчання на формування в учнів умінь і навичок розв'язання математичних задач. Водночас, у реальному навчальному процесі прикладна і практична спрямованості мають функціонувати разом, доповнюючи одна одну для досягнення цілей навчання.

Алгебра та початки аналізу — одна з основних навчальних дисциплін шкільної програми математики, яку вивчають у старшій школі. Аналізуючи цю тему, можна сформулювати такі погляди:

1) Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу полягає у тому, щоб орієнтувати цілі, зміст і методи навчання на:

- встановлення цілеспрямованих зв'язків між алгеброю, аналізом і практичною діяльністю;

- формування у учнів під час вивчення цього предмета знань, умінь і навичок, які зможуть застосовувати у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності.

2) Практична спрямованість цього курсу передбачає орієнтацію цілей, змісту, засобів і методів навчання на розв'язання математичних задач і вправ за допомогою алгебраїчних методів і методів математичного аналізу. Радикальним способом реалізації прикладної спрямованості є застосування математичного моделювання, а найефективнішим засобом — розв'язання прикладних задач, що вимагають глибоких знань з математики й інших дисциплін.

Важливо підкреслити, що процес розв'язання прикладних задач включає всі етапи математичного моделювання: перший етап — переклад задачі з природної мови, якою вона описана в конкретній галузі, на мову математики (створення математичної моделі); другий етап — дослідження та розв'язання отриманої математичної задачі; третій етап — інтерпретація результатів, тобто перетворення розв'язку з мови математики назад у мову галузі, де виникла ця задача.

Процес розв'язання прикладної задачі у схемі можна зобразити так: ПЗ — прикладна задача, МЗ — математична задача, РМЗ — розв'язання математичної задачі, РПЗ — розв'язок прикладної задачі.

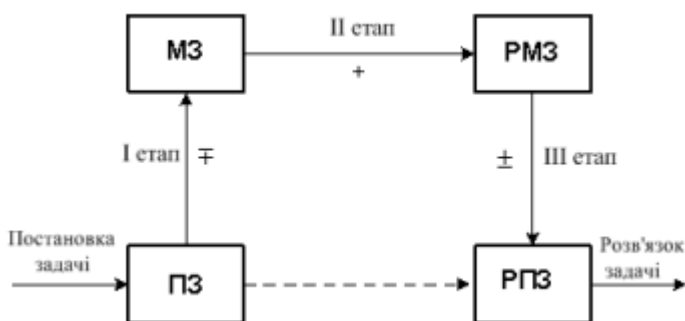


Рисунок 2

Спеціальні дослідження свідчать, що найбільші труднощі у учнів виникають на I етапі ($-+$ дуже слабо володіють навичками перекладу

прикладних задач з природної мови на мову математики, а також у створенні адекватної математичної моделі). Якщо ж учням запропонувати готову модель або допомогти у її створенні (наприклад, рівняння, системи рівнянь, функції тощо), вони зазвичай справляються з її розв'язанням досить добре (+ – добре). З меншою успішністю, у порівнянні з II етапом, характеризується

III етап ($\pm$ – учні не завжди вміють інтерпретувати розв'язок математичної задачі як рішення прикладної задачі). Варто зазначити, що навчання учнів розв'язування прикладних задач є досить складним завданням. Труднощі виникають як у викладачів, так і у самих учнів. Для ефективної організації навчальної діяльності з розв'язання прикладних задач нами визначені відповідні методичні прийоми та орієнтовні дії, що найбільш універсальні для кожного з названих етапів.

На I етапі рекомендується:

- застосовувати евристичні запитання та приписи, спеціальні евристики для вивчення конкретного матеріалу;
- абстрагуватись від несуттєвих властивостей об'єкта, які не впливають на побудову адекватної моделі;
- допомагати учням чітко розрізняти між об'єктом та його моделлю;
- формулювати умову та вимоги прикладної задачі мовою математики.

На II етапі слід:

- при необхідності використовувати додаткові джерела даних та теоретичну інформацію;
- застосовувати ілюстративні креслення, графіки або ескізи, що сприяють пошуку рішення;
- використовувати (за потреби) задачі-дублікати для тренування;
- систематично застосовувати ІКТ для побудови рисунків, графіків та обчислень;
- доводити знайдене рішення до числового значення або розрахункової формули.

На III етапі важливо:

- відбирати ті математичні рішення, які є валідними для прикладної задачі, враховуючи область визначення даних;

- при необхідності оцінювати ступінь точності отриманих результатів.

Більш детально ці прийоми та дії описані у навчальному посібнику [6]. Наведемо приклади для ілюстрації застосування описаної методики.

Розглянемо конкретний приклад — задачу з посібника [6] та її особливості, які потрібно враховувати під час розв'язання.

Задача 1.1. Жінки індіанських племен, що мешкають біля річки Амазонки, під час збору насіння водяних рослин часто беруть із собою малих дітей. Для їхньої безпеки їх кладуть на листя амазонського латаття. Кожен лист має поперечник до 2 м, а краї загнуті вгору, що запобігає випадінню дітей. Один дослідник для перевірки вантажопідйомності листя насипав на нього 10 відер піску, і лист потонув. Потрібно визначити, яку масу може витримати один такий лист латаття.

Розв'язання на I етапі:

Спершу учні погано уявляють собі рослину: форму, розмір листя. Для кращого сприйняття демонструємо ілюстративний матеріал (рис. 3-4).



Рисунок 3



Рисунок 4

Потім показуємо картинку з відром (рис. 5), вказуємо, що таке відро може містити близько 10 л води, що базується на життєвому досвіді.



Рисунок 5

Оскільки в умові не вказано об'єм відра, вважаємо, що всі відра мають однакову масу. Задача ускладнюється тим, що дослідник спочатку насипав пісок у центр листка, поступово розширюючи радіус — щоб лист не перекинувся раніше. Після цього ставимо учням запитання: «Що потрібно з'ясувати для відповіді на задачу?» Вони відповідають: «Потрібно знайти масу десяти відер піску». Тому перетворюємо задачу у таку: «Яка маса 10 відер піску, якщо кожне вміщує 10 л води?»

Учням стає очевидним, що потрібно визначити масу одного відра піску. Для цього необхідно знати густину піску (з фізики). Наступним кроком є розрахунок:

- визначення об'єму відра ($10 \text{ л} = 0,01 \text{ м}^3$);
- застосування формули маси через густину: $\text{маса} = \text{густина} \times \text{об'єм}$;
- обчислення маси одного відра, а потім — маси десяти відер.

Такий підхід дозволяє поступово перейти від життєвих уявлень до конкретних математичних розрахунків, що є важливою частиною формування навичок моделювання та розв'язання прикладних задач.

Проаналізуємо:

пісок має густину $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$

1 л води має об'єм 1 дм^3 , $1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$;

в однорідному відрі маса піску $m = \rho \cdot 10^4 \text{ (г)}$;

маса десяти відер піску $M = m \cdot 10^4 \text{ (г)}$;

Отримуємо вираз $M = m \cdot 10^4 \text{ (г)}$

Щоб відповісти на запитання прикладної задачі, потрібно обчислити значення виразу при $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$. Отже, формулюємо задачу у такій формі:
„Обчислити значення виразу $\rho \cdot 10^5$, $\rho = 1,5$ “

II етап. Вираз $M = \rho \cdot 10^5$ є математичною моделлю вихідної прикладної задачі. Обчислюємо: $M = 1,5 \cdot 10^5 = 150000$.

Таким чином, відповідь на математичну задачу: $M = 150000$.

III етап. Оскільки об'єм відра виражається у кубічних сантиметрах, а густина піску — у грамах на кубічний сантиметр, то маса піску становитиме 150000 г, що дорівнює 150 кг. Далі міркуємо так: якщо дослідник рівномірно та акуратно насипав пісок відром на листок латаття, то його вантажопідйомність приблизно становить 150 кг. Враховуючи, що середня маса однієї дитини близько 10 кг, на такому листі латаття можуть поміститися до 15 малюків (рис. 6).



Рисунок 6

Відповідь. Листок амазонського латаття здатен витримати вагу до 150 кг без потопання. У наведеному прикладі чітко виділяються три етапи розв'язання прикладної задачі. У реальній практиці таке розділення зазвичай не застосовується, і рішення подається як цілісний процес. Знову звернемося до прикладу.

Задача 1.2. Сергій насипав у циліндричну каструлю трохи крупи і спитав маму: «Скільки потрібно налити води, щоб зварити смачну кашу?» — «Це дуже просто, — відповіла мама. — Нахили каструлю, легенько постукай, щоб крупа пересипалась і закрила рівно половину дна. Тепер зафіксуй точку на стінці каструлі біля краю, до якої піднялася крупа. До цього рівня і потрібно налити воду». — «Але крупи можна насипати більше або менше, і каструлі бувають різних форм — широкі, вузькі», — зауважив Сергій. — «Не має значення, — запевнила мама. — Цей спосіб буде корисним у будь-якому випадку». Чи справді так? Розв'язання задачі. Учням не складе труднощів уявити посуд, такий як каструля.

Тому після демонстрацій із допомогою комп'ютерного ілюстративного матеріалу (каструлі, кастрюлі з крупою, з крупою і водою) переходимо до подальших узагальнень:

— моделлю кастрюлі з крупою може слугувати циліндр, заповнений речовиною (рис. 7);

— моделлю кастрюлі з крупою і водою — той самий циліндр (рис. 8).

Крупа займає в цьому циліндрі об'єм V_k , а вода — об'єм V_v . Щоб перевірити правильність твердження, висловленого мамою, потрібно відповісти на питання: «Чи змінюється співвідношення цих об'ємів залежно від форми циліндра?»

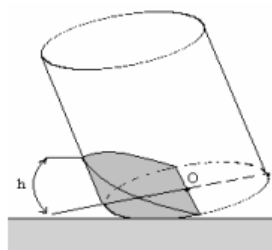


Рисунок 7

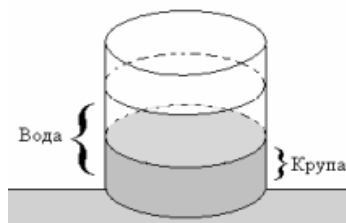


Рисунок 8

Отже, перед нами математична задача: визначити співвідношення об'ємів V_k і V_v . Модель, яка розглядається (рис. 7), розмістимо у прямокутній системі координат так, щоб основа циліндра лежала у площині $ХОУ$, а його центр O співпадав із початком координат (рис. 9).

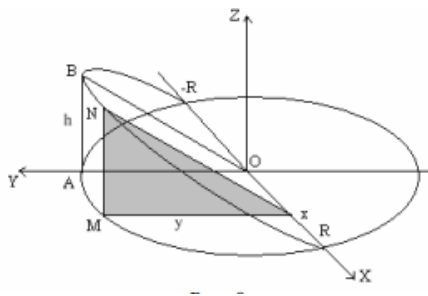


Рисунок 9

Через точку x на осі OX , $x \in [-R; R]$, будемо переріз тіла (тобто гірки із крупи всередині каструлі) площиною, що перпендикулярна до осі OX .

У перерізі отримаємо трикутник MNx . Очевидно, що $\triangle MNx$ подібний до $\triangle ABO$. Тоді $MN/h = y/R$. Звідси $MN = (y \cdot h)/R$. Площа $\triangle MNx$ дорівнює: $S_{\triangle MNx} = 0,5 \cdot MN \cdot Mx$, $S_{\triangle MNx} = \frac{hy^2}{2R}$.

Оскільки точка M належить колу радіуса R і має координати $(x; y)$, то отримаємо $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = R^2 - x^2$. Тому $S_{\triangle MNx} = \frac{h(R^2 - x^2)}{2R}$

Використовуючи визначений інтеграл (як математичну модель), отримаємо

$$V_k = 2 \int_0^R \frac{h(R^2 - x^2)}{2R} dx = \frac{h}{R} \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} h R^2$$

$$\text{Тому } V_{\text{с}} = V_{\text{ц}} - V_k = \pi R^2 h - \frac{2}{3} R^2 h = \frac{R^2 h}{3} (3\pi - 2)$$

$$\text{Очевидно } \frac{V_{\text{с}}}{V_k} = \frac{3\pi}{2} - 1 \approx 3,5(\text{const})$$

Як видно, це співвідношення не залежить від розмірів каструлі. Відповідь. Приготування смачної каші за маминим рецептом не залежить від об'єму каструлі. Нагадаємо, що у кожному з наведених прикладів використання комп'ютера (у тому числі для презентацій) це не випадковість. Досвід доводить, що комп'ютер є дуже потужним засобом, який значно підвищує ефективність і результативність процесу розв'язання прикладних задач. Тому застосування відповідних комп'ютерних презентацій у розв'язанні прикладних задач, зокрема з алгебри та початків аналізу, дозволяє:

- значно посилити та прискорити формування у школярів умінь застосовувати математичні знання на практиці, у нестандартних умовах (у тому числі для усунення недоліків, зазначених у звіті Світового банку [7]);

- ефективно реалізовувати міжпредметні зв'язки математики з іншими шкільними предметами, а також внутрішньо предметні зв'язки в межах математики;

- підвищити практичну підготовку учнів із математики, навчити їх методам математичного моделювання — потужному інструменту для наукових досліджень;

- формувати у учнів наукове уявлення про світ, виховувати позитивне ставлення до навчання, а також вміння бачити реальність через призму математичних понять.

Варто зазначити, що в шкільних підручниках з алгебри та початків аналізу дуже мало прикладних задач, а якщо вони й є, то здебільшого подані у вигляді стандартних текстових задач.

1.2 Використання прикладних задач природничого характеру під час повторення загально-функціональних понять основної школи

Вивчення елементарних функцій у курсі алгебри та початкового аналізу починається з повторення основних понять, що вивчалися в основній школі. Задачі першого параграфу можна використовувати для повторення у загальноосвітніх закладах природничого профілю. Вони будуть корисними для учнів, які готуються до навчання у сферах хімії, біології, медицини або аграрних наук. Розв'язання цих задач допомагає повторити визначення функції, підготуватися до розуміння означення числової функції, пригадати основні способи її задання, а також закріпити властивості основних видів функцій, знайомих з курсу алгебри основної школи.

Для дослідження властивостей конкретного виду функцій корисно аналізувати залежності, що зустрічаються у біології, хімії, екології, медицині або в процесах життєдіяльності, які мають закономірність і є простими для сприйняття. Вибрана залежність є прикладом функції певного виду, а отже, властивості цієї залежності — властивості відповідної функції. Однак учням іноді легше помітити ці властивості на конкретних прикладах, ніж

здогадатися про них, аналізуючи загальний аналітичний вираз функції. Саме тому важливо вводити залежності реальних процесів і явищ.

Залежність слід задавати не лише аналітично, а й графічно, враховуючи наочність і характер залежності. Після дослідження властивостей та їх аналізу ці властивості узагальнюються для всіх функцій відповідного виду. Водночас, залежності у біології, хімії, медицині, екології та інших галузях мають свої особливості. Зокрема, функції, які описують ці процеси, зазвичай визначені на множині невід'ємних чисел і приймають невід'ємні значення, що накладає певні обмеження і не завжди дозволяє ілюструвати всі властивості виду функцій цілком. Деякі властивості можна розглядати тільки в абстрактному вигляді.

Розглянемо приклади розв'язання задач, що базуються на загально-функціональних поняттях, вивчених у школі.

Задача 2.1. На початковій стадії розвитку деяких риб (від 2 до 6 років) спостерігається лінійна залежність ваги риби w (кг) залежить від віку t (у роках) за формулою: $w = a t$, де a — параметр, що визначається за даними спостережень і залежить від виду риби.

Водночас, у цей період довжина риби L (у метрах) також залежить від віку t : $L = b t$, де b — параметр. Відомо, що риба цього виду у віці один рік важить 0,24 кг і має довжину 12 см. Необхідно знайти формулу залежності ваги риби від її довжини.

Розв'язання. З формул лінійної залежності ваги w та довжини L риби від часу t представимо час t : $t = w/a$, $t = L/b$. Прирівнявши праві частини останніх рівностей $w/a = L/b$ та зробивши відповідні перетворення, матимемо залежність ваги риби w від її довжини L : $w = (a/b) L$. Для визначення значень параметрів a і b слід розв'язати рівняння: $0,24 = a \cdot 1$ і $0,24 = b \cdot 1$.

Отже, $a = 0,24$, $b = 0,12$, $w = 2L$

Відповідь. $w = 2L$ — формула залежності ваги риби від її довжини

Задача 2.2. У таблиці представлено середній зріст x , в см і середня вага y в кг різних порід собак:

За даними таблиці побудуйте графік залежності ваги y_i - собаки від її зросту x_i . Визначте цю залежність методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду.

Порода	Тойтер'єр	Пікінес	Карликовий Мопс	Цверг-шнауцер	Франц. бульдог	Фокстер'єр	Бассет-хаунд	Пудель	Кокер-спанієль	
Зріст, x {	22	23	26	29	31	33	34	36	37	40
Вага, y	3	4	6	7	9	10	11	12	12	14

На основі наведеної таблиці побудуйте графік, який показує залежність ваги собаки (y) від її зросту (x). Визначте цю залежність за допомогою методу лінійного вирівнювання точок статистичного ряду.

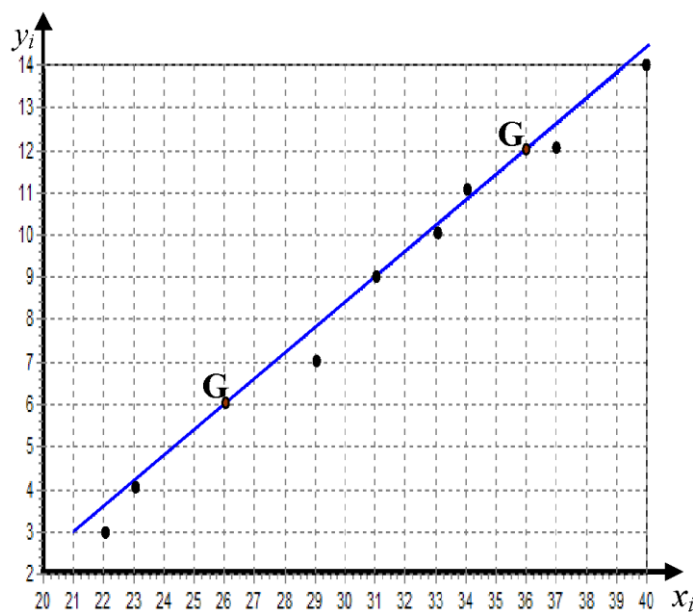


Рисунок 10

Розв'язок. 1) У прямокутній системі координат, яку обрано певним чином, позначимо точки як $(x_i; y_i)$. Звертаємо увагу, що точки, наведені на рисунку 10, розташовані вздовж умовної прямої. Щоб визначити її рівняння, обчислимо координати середньої точки G_1 для перших п'яти точок послідовності та координати середньої точки G_2 для наступних п'яти точок.

$$\bar{x}_1 = \frac{22 + 23 + 26 + 29 + 31}{5} \approx 26$$

$$\bar{y}_1 = \frac{3 + 4 + 6 + 7 + 9}{5} \approx 6$$

Знаходимо $\bar{x}_2 \approx 36, \bar{y}_2 \approx 12$.

Очевидно, пряма проходить через точки G1 (26;6) , G2 (36;12).

Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки A (x1; y1) , B (x2; y2) : $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ одержуємо рівняння $\frac{x - 26}{10} = \frac{y - 6}{6}$

Звідки, внаслідок певних перетворень, виникає формула, що описує залежність ваги собаки конкретної породи від її зросту.

$$y = 0,6x - 9,6.$$

Відповідь. $y = 0,6x - 9,6$ формула залежності ваги собаки певної породи від її зросту

Задача 2.2 розв'язана за допомогою методу лінійного наближення множини точок статистичного ряду. Перед застосуванням такого підходу до подібних задач у курсі алгебри основної школи корисно ознайомити учнів із алгоритмом їх розв'язання.

Задача 2.3. Одна рослина кульбаби (кореневище) займає приблизно 10 м² і за рік виробляє близько 100 летючих насінин. Потрібно визначити, яку площу покриють усі нащадки цієї рослини через 6 років, якщо вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії. Відомо, що площа поверхні суші Землі становить 148 мільйонів квадратних кілометрів. Чи вистачить цим рослинам місця на поверхні планети на сьомий рік?

Розв'язок. Нехай $S_0 = 10$ м² — початкова площа, яку займає одна рослина кульбаби. Тоді площі, які покриють нащадки цієї рослини через 1, 2, ..., n років відповідно, позначимо через $S_1, 2..., S_n$. Припустимо, що рослина розмножується без перешкод і площі розмноження зростають у геометричній прогресії.

$$\text{Тоді маємо: } S_1 = S_0 \cdot 10^2, S_2 = S_1 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^4, \dots, S_n = S_{n-1} \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^{2n}.$$

$$\text{Отже, } S_6 = 10 \cdot 10^{12} = 10^{13} \text{ (м}^2\text{)}$$

Оскільки площа поверхні суші земної кулі складає $148 \cdot 10^6 \text{ км}^2 = 1,48 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$, то на сьомий рік на поверхні суші місця для цих рослин не вистачить, тому що $S_7 = 10^{15} \text{ м}^2$.

Отже, відповідь: За заданих умов на сьомий рік на поверхні суші Землі для кульбаби місця не вистачить.

Ця задача фактично ілюструє поняття показникової функції $S(n) = S_0 \cdot 10^{2n}$. Також для відповіді на поставлене питання можна застосувати формулу n -го члена геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

де $b_1 = 10^2$ (насінин), $q = 100$. Тоді

$$b_7 = 10^2 \cdot 100^6 = 10^{14} \text{ (насінин)}, \text{ а } S_7 = S_0 \cdot b_7 = 10 \cdot 10^{14} = 10^{15} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Отже, задачі такого типу можна використовувати як для закріплення знань про геометричну прогресію, так і для формування нових уявлень про функції. Вони сприяють ознайомленню з різними способами заданих функцій — аналітичними та табличними. Але це не вичерпує потенціал застосування подібних задач у навчанні. Наступним кроком є формулювання подібних задач та задач на повторення властивостей інших основних видів функцій, які знайомі учням з курсу алгебри основної школи.

1.3 Показникова, логарифмічна, степенева функції – математичні моделі прикладних задач

Під час дослідження різноманітних природних процесів, зокрема біологічних і хімічних, часто виникають залежності між змінними величинами, які описуються показниковими або логарифмічними функціями з основою $a=e$ ($e \approx 2,71828$). Прикладами подібних залежностей є залежності:

$$N = N_0 e^{kt}$$

де N — кількість бактерій у час t , N_0 — початкова кількість у момент часу $t=0$, а k — константа швидкості розмноження, визначена експериментально. Колонія дріжджових клітин також розмножується за

експоненційним законом. Аналогічно, кролики, які швидко заповнили Австралію, розмножувались за подібним законом.

Процеси утворення і розпаду можна описати за допомогою залежності:

$$P = P_0 e^{kt}$$

де P — кількість новоутвореної або розпадаючоїся речовини у час t , P_0 — початкова кількість речовини, а k — стала, характерна для конкретного випадку. Таке рівняння застосовується, наприклад, для опису радіоактивного розпаду або зменшення маси (або концентрації) лікарського засобу в організмі через природне виведення. Крім того, показникові функції використовуються для моделювання зростання населення, приросту деревини, залежності врожайності від внесення органічних добрив, а також швидкості хімічних реакцій залежно від температури (закон Вант-Гоффа).

$$v_{T2} = v_{T1} \gamma^{\frac{T2-T1}{10}}$$

де v_{T2}, v_{T1} — швидкості реакції при температурах — $T1, T2$, γ температурний коефіцієнт.

За допомогою логарифмічної функції передається залежність об'єму легень V у людини від її віку у роках, що визначена для вікового проміжку від 10 до 100 років:

$$V(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

де x — вік людини у роках; залежність маси W ссавця від числа споживаних ним калорій M на одиницю маси щодня

$$\lg W = \frac{1,8 - \lg M}{0,225}$$

Деякі дослідники пропонують визначати вагу риби за допомогою кубічної залежності: $W=at^3$ та $W=bL^3$ де a і b — параметри, t — час, а L — довжина риби. Степенева залежність також застосовується для оцінки рівня забруднення узбіччя доріг свинцем (у мг/м^2 за рік), за формулою:

$$C = 0,012Ae^{-0,11k} + 0,37\sqrt[3]{A}$$

де A — інтенсивність руху (кількість транспортних засобів за добу), а k — відстань від краю дороги в метрах. Максимальна кількість опадів I (у мм/рік) залежить від їх тривалості t (у роках) за формулою:

$$I = 13,1t^{-0,56}$$

Приклади таких залежностей можна включити до складу прикладних задач природничого характеру. Це сприятиме більш глибокому розумінню учнями властивостей зазначених функцій і засвоєнню понять, пов'язаних із ними. У цьому параграфі будуть розглянуті прикладні задачі, які містять математичні моделі з використанням показникових, логарифмічних і степеневих функцій, а також задачі, у яких роль моделей виконують показникові й логарифмічні рівняння і нерівності.

Розпочнемо з задачі, яка служить введенням до поняття показникової функції.

Задача 2.4. За оцінкою лісника, запас деревини на одній ділянці лісу становить 10 000 кубометрів. Скільки деревини буде на цій ділянці через 10 років, якщо середній річний приріст становитиме 2,5 %?

Після ознайомлення учнів із умовою задачі пропонується такий підхід до дослідження:

1) Позначте початковий запас деревини на ділянці лісу через D_0 , а D_n — запас деревини на ділянці лісу через n років. Яким буде запас деревини через рік? Виразіть D_1 через D_0 .

2) Чому буде дорівнювати запас деревини на ділянці через два роки? Виразіть D_2 через D_1 та D_2 через D_0 .

3) Дайте відповідь на аналогічне питання для $n=3$.

4) Виразіть D_n через D_{n-1} . Виразіть D_n як функцію від D_0 і n .

5) Підставте в останню формулу значення D_0 з умови задачі. Яку залежність ви одержали?

Провівши таке дослідження, учні отримують функцію:

$$D(n) = 10,000 \cdot 1,025^n$$

— що є моделлю залежності запасу деревини D на ділянці лісу (у кубометрах) від кількості минулих років n . Отримана показникова функція є математичною моделлю цього процесу. Тому, визначивши її значення для $n = 10$, маємо:

$$D(10) = 10,000 \cdot 1,025^{10} = 12800 \text{ м}^3$$

— тобто через 10 років запас деревини становитиме близько 12 800 кубометрів.

Фабула такої задачі може бути різною. Вона може стосуватися зміни чисельності населення міста, розмноження лілій у ставку або мікробів у пробірці. Важливо, що розв'язуючи задачі такого типу, учні навчаються математично описувати реальні природні й суспільні процеси. Пропонуємо кілька прикладів таких задач.

1.4 Принципи побудови двоядерної моделі курсу алгебри та початків аналізу для профільних класів природничо-наукового напрямку

У концепції структури і змісту загальної середньої освіти вказується, що «характерною рисою сучасного етапу розвитку середньої освіти є особистісно-орієнтований освітній процес, що враховує і розвиває індивідуальні особливості учнів». Крім цього, виділяються дві основні функції шкільної математичної освіти: Освіта за допомогою математики, спрямована на розвиток учнів, і власне математична освіта як елемент професійної підготовки

Конструюється нами курс математики для старшої профільної школи базується на принципово новій для методики математики концепції широкого застосування раціональної логіки. Історичний огляд розвитку математики як науки призводить до висновку про об'єктивно існуючих і діалектично взаємодіючих двох її гілок — теоретичної і прикладної

математики. Аналіз процесу розвитку математики з позиції використовуваної логіки при проведенні обґрунтувань, а особливо в період з найдавніших часів до нового часу (XVIII ст.), дає можливість побачити, що саме цей період характеризується застосуванням в основному так званих раціональних міркувань при виникненні фундаментальних розділів математики, що становлять основу змісту сучасного шкільного курсу математики.

Термін "раціоналізм" (від лат. *rationalis*-розумний, *ratio*-розум — « " точка зору розуму, відповідно-розуму; сукупність філософських напрямків, що роблять центральним пунктом аналізу розум, мислення, розум — з суб'єктивної сторони, а розумність, логічний порядок речей — з об'єктивної».

Під терміном "раціональний" відповідно розуміється: "1) розумний, що відправляється від розуму, що здійснюється завдяки розуму; 2) відповідний розуму, доцільний, практичний, цілком осмислений".

Протилежним поняттям поняттю "раціональне" є поняття "ірраціональне" (лат. *irrationalis* — нерозумне) - те, що не може бути досягнуто розумом, що явно не підкоряється законам логіки, що оцінюється як «надрозумне», «протирозумне». Як видно з визначення поняття «раціональний», розумність і логічність вважаються тут синонімами і відображають об'єктивну сторону мислення, але це ототожнення в математиці не є однозначним. Існує багато прикладів, що характеризуються категорією "логічного" з точки зору чистої математики, але відповідних категорії "нерозумного" в прикладній математиці в контексті практичних застосувань і, навпаки, існують приклади, що визначаються категорією "нерозумного" (і навіть неприпустимого) з точки зору теоретичної математики, але відповідних категорії вельми "корисного" і "логічного" з точки зору прикладного дослідження — наприклад, різні принципи, що застосовуються в теорії похибок для вирішення зворотної задачі теорії похибок (ЗЗТП). Відомо, що зворотні задачі з точки зору теоретичної математики найчастіше не мають єдиного рішення. У прикладній математиці при вирішенні зворотної задачі завжди доводиться відшукувати, принаймні

(а найчастіше — тільки), одне рішення (з, наприклад, нескінченної безлічі рішень), що задовольняє якомусь принципу оптимальності. Розглянемо приклад, який є основою математичної обробки результатів лабораторного практикуму в шкільному курсі фізики 9-11 класів.

Нехай $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ - граничні абсолютні похибки величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. Потрібно визначити граничну абсолютну похибку Δy значення функції y .

"Замінюючи" приріст функції диференціалом і "трактуючи" модуль приросту функції як граничну абсолютну похибку функції, рішення можна визначити за формулою (рішення прямої задачі теорії похибок):

$$\Delta y \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{i=n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$$

Розглянемо задачу, зворотну до даної: за заданими значеннями граничної абсолютної похибки Δy і виду функціональної залежності $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначити граничні абсолютні похибки аргументів $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

В рамках логіки теоретичної математики так сформульована задача є некоректною і вирішенню не підлягає. Однак змістовна основа деякої конкретної задачі, що виражається математичною моделлю (1), не залишає сумнівів в природності постановки такого завдання і необхідності отримання її рішення. Як відомо, для вирішення цього завдання можуть бути застосовані різні так звані принципи «наприклад, використовуючи "принцип рівності граничних відносних похибок"», отримаємо рішення ЗЗТП у вигляді

$$\Delta x_i = \frac{\Delta f}{\sum_{i=1}^{i=n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| x_i}, \quad i = 1, n$$

а застосовуючи "принцип рівних впливів" для шуканих граничних абсолютних значень аргументів рішення ЗЗТП можна представити у вигляді

$$\Delta x_i = \frac{\Delta f}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}, \quad i = 1, n.$$

Як видно, отримані різні рішення однієї і тієї ж задачі, що для формату прикладної математики цілком природно. Приклади раціональних міркувань зі шкільної практики.

Приклад 1. Учитель на уроці говорить: "Число π наближено дорівнює 3,14", або: "Число π наближено дорівнює 3,1415" і т.д.

Приклад 2. Період коливань математичного маятника визначається за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Приклад 3. Обґрунтування будь-якого властивості геометричної фігури з наочних міркувань, наприклад, за допомогою креслення або накладення. Раціональний характер тверджень в прикладі 1 очевидний, більш того, залишився один крок до раціонального висновку: число π — змінна величина, що нехарактерно для шкільного курсу, так як в теоретичній математиці число π , звичайно ж, величина постійна. Взагалі, будь-які міркування, якими учні оперують у фізиці, хімії, біології, економіці при використанні математики для вирішення завдань, носять раціональний характер. Дійсно (див. Приклад 2), всі величини, що входять в формулу (l , g , π), є наближеними величинами (тобто не є об'єктами теоретичної математики). Формула коливань математичного маятника була отримана при багатьох припущеннях [однорідність сили тяжіння, відсутність тертя (нитки, самого тіла), «малість» кута відхилення маятника від положення рівноваги, нерозтяжність нитки, концентрація маси всієї системи в коливному тілі, пренебрежимо малі «розміри» тіла по відношенню до довжини нитки]. Проте отриманий наближений результат приймається в рамках прикладної математики і використовується на практиці. Більш того, отримані таким чином результати ні в кого не викликають сумнівів, дозволяють проектувати, прогнозувати, розраховувати і т.д. реальні явища і процеси і на цій основі приймати

життєво необхідні рішення. Аналогічна ситуація має місце при розробці математичних моделей економічних, соціальних, біологічних і т.д. процесів. Таким чином, ми приходимо до розуміння ролі і значення логіки прикладної математики, за допомогою якої ми отримуємо можливість вирішувати конкретні завдання і приймати різноманітні рішення, важливі для життєдіяльності людини. Очевидно, що наведені вище приклади міркувань не мають нічого спільного з логікою теоретичної математики. Подібного роду "логіка" є прикладом логіки прикладної математики (раціональної логіки). Незважаючи на абсолютно неприйнятний характер такої логіки з точки зору теоретичної математики, проте доводиться визнати, що сучасний рівень розвитку науки і техніки (ракетно-космічна галузь, природничо-наукова область людської діяльності: фізика, хімія, біологія, інформатика і т.д., економіка) не був би досягнутий, якби застосовувалася тільки логіка теоретичної математики. Жодна математична модель не може бути побудована в принципі, якщо не використовувати логіку прикладної математики. Виникає проблема, пов'язана з оцінкою правомірності застосування раціональної логіки для отримання та аналізу результатів як прикладного, так і теоретичного математичного дослідження, а також ступеня достовірності цих результатів. Значні успіхи прикладних наук вже не можуть бути проігноровані, а подальший прогрес науки і техніки вимагає чергового «посилення прикладної спрямованості навчання математики». І якщо раніше ця проблема вирішувалася фрагментарним включенням в шкільний курс завдань відповідної "виробничої" тематики, і при цьому нічого не говорилося про застосовувану логіку, то сучасна ситуація в методиці математики характеризується потребою осмислення обставини, пов'язаного з необхідністю адекватного відображення в шкільному курсі математики історично склалася і фактично закріпилася і довела свою «спроможність» на практиці реальності щодо "рівноправного" існування і представництва в шкільному курсі математики обох аспектів — теоретичного і прикладного.

З вищевикладеного та аналізу досліджень з питань методики реалізації принципу політехнізму, практичної та прикладної спрямованості навчання математики випливає висновок, що раціональна логіка є тим самим загальним для всіх елементом, який об'єднує ці напрямки в методичних дослідженнях. Якщо раніше реалізація цих напрямків в шкільному курсі математики в більшій мірі пов'язувалася насамперед зі змістом-передбачалося включати в якості засобу реалізації цих напрямків завдання з відповідних предметних областей (фізика, хімія, біологія, економіка і т. д.), то пізніше прийшло розуміння того, що треба формувати в учнів вміння і навички в області моделювання. Однак розробляючи питання методики навчання моделювання, автори не розкривають сутності процесу моделювання-застосування раціональної логіки, а обмежуються тільки формуванням умінь по реалізації виділяються ними етапів моделювання. Таким чином, в проведеному нами дослідженні істотним моментом є осмислення наступної історико-гносеологічної ланцюжка (рис. 11), що відбиває еволюцію уявлень про введення в шкільний курс математики її додатків, а точніше, «зрівнювання в правах» при навчанні математики її прикладного і теоретичного аспектів.



Рисунок 11 - Еволюція уявлень в методиці про раціональну логіку

Наведемо пояснення до схеми. Йдеться про довільну предметну область (Фізика, Хімія, Біологія, економіка тощо). Спочатку в методиці математики радянського періоду (30-50 роки XX ст.) активно розвивався напрямок, пов'язаний з реалізацією принципу політехнізму, пізніше йшлося про реалізацію прикладної спрямованості навчання математики. Аналіз історії розвитку цих напрямків призводить до висновку про те, що, в кінцевому підсумку, на рівні реалізації цих напрямків в шкільному курсі математики вирішальним методичним моментом була саме конкретна предметна область, тобто. мова не йшла про реалізацію цих напрямків, якщо

не розглядалася конкретна предметна область. Пізніше, правда, прийшло розуміння того, що і реалізація принципу політехнізму, і посилення прикладної спрямованості навчання математики пов'язані не тільки з предметною областю конкретних завдань, а й з характером математичних дій, властивих конкретній передпрофесійній і в подальшому — професійній діяльності.

Зрозуміло, що навчання елементам моделювання здійснюється при вирішенні завдань з предметних областей «Фізика», «Хімія» та ін. На наш погляд, існує принципова відмінність між традиційно сформованою методикою навчання моделювання з трьох етапною схемою (побудова математичної моделі, внутрішньо модельне рішення, інтерпретація) і пропонованої методикою навчання математичного моделювання із залученням логіки прикладної математики. Традиційна методика дає нам етапи (точніше, навіть послідовні компоненти процесу) побудови моделі, які використовуються в пропонованій методиці. Новим, на наш погляд, в результаті осмислення процесу моделювання є наповнення цієї схеми. Ми робимо принциповий акцент на логіку, що застосовується при побудові моделі; раніше ця обставина не розглядалася. Таким чином, в дослідженні показано, що процес моделювання — це, по — перше, структурно-трикомпонентна сутність, і, по — друге, змістовно — предметна область і логіка, яка використовується при побудові моделі, тобто моделювання-процес, що включає два аспекти: структуру і логіку. До нашого дослідження навчання моделюванню — це» навчання структурі " - в учня формувалося, на нашу думку, скоріше як однобоке уявлення про процес моделювання, що представляє собою трикомпонентний об'єкт, так як при побудові моделі Про логіку вчитель взагалі нічого не говорив. Більш того, по суті, використовувана в шкільному курсі математики при традиційному побудові математичних моделей раціональна логіка — це міркування, в даному випадку — «високого ступеня достовірності» (висловлюючись термінами логіки прикладної математики). Але в прикладній математиці існують

міркування, що характеризуються істотно нижчими в порівнянні з традиційними міркуваннями значеннями достовірності, які і є найчастіше логічною основою побудови найважливіших математичних моделей. Ця обставина, на наш погляд, є новим в методиці навчання математики в тій її частині, де ведеться розмова про навчання побудові математичних моделей

Дедуктивні міркування представляють граничний випадок раціональних міркувань, і ступінь їх достовірності приймається рівною одиниці. "Нехай раціональне міркування A складається з n зазначених вище компонентів A_i ($i=1, n$) з ступенем достовірності (ймовірністю) p_i і має

$$A = \bigwedge_{i=1}^{i=n} A_i,$$

кон'юнктивну структуру, тобто

тоді ступінь достовірності міркування A може бути представлена наступним чином:

$$p_A = \prod_{i=1}^{i=n} p_i$$

Очевидно, що в шкільній математиці присутній прагнення до отримання висновків на основі дедуктивних умовиводів, тобто до того, щоб все $p_i = 1$ — це логіка чистої математики.

Однак в практиці навчання реалізація цього принципу все одно скрутна, особливо при вирішенні прикладних завдань. Виникає питання: наскільки необхідно знайомити учнів з подібного роду "міркуваннями", що відображають логіку прикладної математики (раціональну логіку)? Відповідь на поставлене запитання можна отримати, розробляючи курс алгебри і почав аналізу з урахуванням використання в ньому логіки прикладної математики, у якій в шкільному курсі математики є великий дидактичний потенціал, пов'язаний з однією з найважливіших завдань, що вирішуються в прикладній математиці, — із завданням проектування, синтезу та аналізу математичних моделей. Будь-яка математична модель будується на основі саме раціональної логіки, так як неминуче застосування різних припущень і спрощень в процесі її побудови. Застосування раціональної логіки в

профільній школі надає хороші можливості. По-перше, - для демонстрації адаптованого до навчання застосування тієї послідовності етапів відкриття закономірності, яка використовується в реальному науковому дослідженні: пошук характерних явищ і виділення головного, вивчення явищ, висунення гіпотези, встановлення закономірностей і наслідків, підтвердження (або спростування) висунутої гіпотези на експерименті. І, по-друге, формується велика "інтелектуальна рухливість" учня в сфері побудови математичних моделей: він менш «затиснутий» рамками формальної логіки, у нього (і навіть у «трієчника») є можливість математичної творчості, тобто креативна діяльність учня стимулюється самою логікою, застосовуваної в курсі.

Розглянуті вище методологічні та психологічні аспекти, що характеризують сучасну систему математичної освіти в країні, а також результати теоретичного дослідження проблеми побудови курсу алгебри і почав аналізу в профільних класах, дозволяють сформулювати основні положення, які дають можливість спроектувати курс алгебри і почав аналізу в профільних класах природничо-наукового напрямку.

1. Курс проектується як самостійна змістовно і логічно завершена ступінь безперервної математичної освіти, що має свої розвиваючі цілі, цілі вивчення, методичні цілі. У когнітивній сфері розвиваючими цілями є розвиток складових ментального досвіду учня (когнітивний досвід, метакогнітивний досвід, інтенціональний досвід, інтелектуальні здібності) як психологічної основи його суб'єктного досвіду цілі вивчення: освоєння змісту курсу і розвиток передпрофесійних умінь і навичок вирішення завдань і побудови математичних моделей із застосуванням раціональної логіки.

Методичні цілі:

- 1) виявлення рівня розвитку раціонального мислення в учня і організація взаємодії його суб'єктного і суспільно-історичного досвіду;
- 2) організація роботи по формуванню змісту понять в логіці раціональних міркувань;

3) систематизація понять, навчання обґрунтуванням на основі раціональних міркувань;

4) забезпечення завершення вивчення учнями провідних ліній шкільного курсу алгебри і почав аналізу;

5) організація підготовки учнів до підсумкової державної атестації;

6) створення умов для продовження математичної освіти і використання математики як засобу досліджень в природничо-науковій сфері.

2. Проектування курсу як ступені безперервної математичної освіти і дуалізм цілей (завершення загальноосвітньої математичної підготовки і формування готовності до продовження математичної освіти в природничих областях знання) визначають його структуру. Курс містить два ядра, що забезпечують базову і профільну підготовку.

Перше ядро-загальноосвітній блок-містить матеріал, освоєння якого дозволить підготувати школяра до дослідження математичних моделей різних типів і до вивчення профільної частини курсу. Основна частина даного матеріалу пропонується для вивчення в 10 класі, що дозволить школяреві своєчасно і безболісно змінити профіль навчання (в обох напрямках). Загальноосвітній блок включає і профільні елементи, представлені переважно в завданнях, вивчення яких не передбачає використання спеціальних знань, що сприятиме формуванню позитивної мотивації вивчення профільної складової і пропедевтиці професійних знань. Поглиблення базового змісту в рамках даного блоку також здійснюється через завдання або через індивідуальні завдання.

Друге ядро становить профільний математичний матеріал, що об'єднує кілька блоків: елементи теорії похибок, математичні моделі, чисельні методи, елементи логіки, елементи теорії ймовірностей і перевірка статистичних гіпотез, ортогональні многочлени, елементи операційного числення. Ця частина курсу містить як загально-предметний матеріал для профільного природничо-наукового напрямку (елементи теорії похибок, математичні моделі, чисельні методи), так і вузькопрофільні модулі (для майбутніх

фізиків, хіміків і т. д.), що реалізуються в рамках навчального предмета і через курси за вибором (елементи логіки, елементи теорії ймовірностей і перевірка статистичних гіпотез, ортогональні многочлени, елементи операційного числення).

3. Курс проектується на базових змістовних компонентах традиційного курсу алгебри і почав аналізу відповідно до стандарту профільного курсу як альтернативний до існуючих варіацій традиційного курсу за широтою застосовуваної в ньому раціональної логіки, що не суперечить забезпеченню наступності в інтелектуальному розвитку учня, залученню його в процес вивчення предмета як суб'єкта освітнього процесу, виявленню і перетворенню його суб'єктного досвіду. Матеріал курсу має блочну будову, можлива варіативність щодо послідовності вивчення окремих блоків. Досліджуваний курс є відкритою системою, що допускає її варіативність за рахунок індивідуальної дослідницької діяльності учня, спеціалізації освітнього закладу, зміни послідовності розгляду ряду питань.

4. Вивчення матеріалу будується переважно із застосуванням раціональної логіки. Рівень строгості отриманих рішень і обґрунтувань пов'язується з логічною і психологічною евіденцією, характерною для конкретного учня. Посилення дедуктивного характеру організації матеріалу і рівня математичної абстракції застосовуваних математичних понять, його виклад і інтерпретації результатів відбуваються в міру виникнення в цьому психологічної потреби суб'єктів навчального процесу на основі більш високого рівня розвитку інтелектуальних здібностей учня.

5. При обґрунтуванні тверджень в рамках конструюється нами курсу переважно застосовується раціональна логіка, при цьому частина базової складової навчального матеріалу (тригонометрія, показова і логарифмічна функції) будується на основі теоретичної логіки, що забезпечить поступовий перехід від однієї логіки до іншої і дозволить використовувати способи міркувань теоретичної логіки при вивченні матеріалу другого ядра і підготовки до підсумкової державної атестації. У логіці прикладної

математики вивчається той матеріал, з яким учні надалі (у вищій школі) будуть активно працювати.

6. Курс передбачає широке залучення коштів інформаційних технологій як з метою отримання вирішення конкретних завдань і пошуку різних методів доведення тверджень, так і в роботі з первинного формування понятійного апарату курсу в учня. Підвищення рівня абстрактності понятійної системи відбувається в ході онтогенетичного розвитку суб'єктного (ментального) досвіду учня.

7. Процес навчання організовується на позиціях особистісно-орієнтованого підходу, що передбачає виявлення і перетворення суб'єктного досвіду учня як в області математики, так і в області інших профільних дисциплін (фізики, хімії, біології); множинність трактувань понять; можливість вибору учнем рівня освоєння понять (прикладний або теоретичний), способів обґрунтування (в логіці теоретичної або прикладної математики). Наявна можливість і побудови локально-індивідуальної освітньої траєкторії через курси за вибором. В курсі передбачаються різні види самостійної діяльності учнів (дослідницька, Прикладна, історична), можливість вибору пріоритетних видів індивідуальної роботи і різних джерел знань (самостійна діяльність, підручники, довідники, електронні навчальні програми), що вимагає зміни характеру оцінки діяльності учня

Розвиток математики і математичної освіти відбувається у взаємозв'язку і взаємодії теоретичної і прикладної складових математики. Сучасне багатопрофільне навчання в старшій школі, що передбачає побудову самостійного курсу алгебри і почав аналізу для профільних класів природничо-наукового напрямку, дозволило розробити вимоги до побудови курсу і сконструювати на їх основі двоядерну модель курсу, що враховує дуалізм цілей навчання математики в старшій профільній школі

РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ УЧНІВ В КЛАСАХ ПРИРОДНИЧОГО ПРОФІЛЮ

2.1 Приклади прикладних завдань складених учнями

У шкільному курсі алгебри та початкового аналізу перед введенням поняття похідної традиційно розглядають класичні задачі, що приводять до цього поняття: механічна задача щодо визначення миттєвої швидкості та геометрична задача про визначення положення дотичної до кривої в певній точці. Розв'язуючи ці задачі, доводиться застосовувати ті ж самі міркування, що й при розв'язанні численних задач у природничих науках, наприклад, задач про визначення швидкості зростання популяції або швидкості хімічної реакції. Аналіз цих задач є корисним для учнів, які вивчають математику в класах природничого профілю. Оскільки мета курсу полягає у формуванні загального підходу до розв'язання різноманітних задач, доцільно застосувати для цієї мети спеціальну таблицю. У ній виділено чотири основні етапи цього підходу: визначення приросту незалежної змінної Δx , знаходження приросту залежної змінної Δy , а також інші важливі кроки; складання відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

яке виражає середню швидкість зміни функції; знаходження $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, яка є швидкістю зміни функції заданого значення аргументу x . Вивчення біологічного та хімічного змісту похідної відкриває можливості для розв'язання цікавих прикладних задач, що стосуються природних процесів і явищ, а також медичної тематики. Серед них особливу увагу заслуговують задачі, у яких похідна відіграє ключову роль у їх розв'язанні.

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
1. $P = P(t)$ - чисельність популяції в момент часу t ; [особин]	Δt	$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$	$v_{cp} = \Delta P / \Delta t = (P(t + \Delta t) - P(t)) / \Delta t$	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$ швидкість зростання популяції

2. $C = C(t)$ - концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t ; [моль/л]	Δt	$\Delta C = C(t + \Delta t) - C(t)$	$v_{cp} = \Delta C / \Delta t = (C(t + \Delta t) - C(t)) / \Delta t$	$v_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$ швидкість хімічної реакції
--	------------	-------------------------------------	--	--

Розглянемо деякі з них.

Задача. Число N бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу 3,5 хв?

Розв'язання. Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту числа бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної.

Надамо t приросту Δt .

Знайдемо приріст залежної змінної ΔN :

$$\begin{aligned}\Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) = \\ &= 450 + 52(t + \Delta t) + 2(t + \Delta t)^2 - (450 + 52t + 2t^2) = \\ &= 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t (52 + 4t + 2\Delta t).\end{aligned}$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} : \frac{\Delta N}{\Delta t} = 52 + 4t + 2\Delta t$$

Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (52 + 4t + 2\Delta t) = 52 + 4t$$

Ця границя і є швидкістю приросту числа бактерій в момент часу t .

Тому, коли $t = 3,5$ хв, то $v = 66$ бакт/хв.

Відповідь. 450 бактерій; 66 бакт/хв.

Задачі такого типу розв'язуються не лише за правилом знаходження похідної, а й використовуючи інший прийом розв'язування -

диференціювання функції, яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі.

Задача 2. Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 - початкова маса на момент часу $t=0$, m - нерозчинена маса на момент часу t ; k - стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення.

Розв'язання. Масу лікарської речовини, що розчинилась на момент часу t , запишемо у вигляді $M = m_0 - m = m_0 (1 - e^{-kt})$.

Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення $M' = m_0(-e^{-kt})(-k) = km_0 e^{-kt} = km$.

Відповідь. km - швидкість розчинення лікарської речовини.

Реалізація міжпредметних зв'язків відіграє важливу роль у забезпеченні практичної спрямованості навчання математики. Вона сприяє формуванню цілісного уявлення про предмет, дозволяє використовувати знання з суміжних дисциплін, що обумовлює можливість застосування математичних понять і засобів у різних галузях науки та практики. Зокрема, однакові поняття, такі як вектор, зустрічаються у математиці, фізиці, біології, географії, а математичні засоби для вираження залежностей між величинами — формули, графіки, таблиці, рівняння та нерівності — знаходять своє застосування у суміжних предметах. Така інтеграція знань і методів не лише має прикладне значення, а й відображає сучасний розвиток науки, сприяє формуванню наукового світогляду і створює умови для більш глибокого розуміння предмета.

Здійснення міжпредметних зв'язків у навчанні математики вимагає погодження в часі та трактуванні однакових понять у різних дисциплінах. З дидактичної точки зору, це передбачає активне використання фактів і залежностей з інших предметів для мотивації вивчення абстрактних математичних понять, а також для формування практичних умінь і навичок. Важливим засобом розвитку прикладної спрямованості є систематичне формування у школярів навичок виконання обчислень, вимірювань,

побудови та аналізу графіків, складання таблиць і користування довідковою літературою. Це можна досягти через застосування практичних і лабораторних робіт: вимірювання геометричних величин, побудова і аналіз графіків, роботу на місцевості тощо.

Обчислювальні роботи з використанням сучасної техніки, зокрема калькуляторів, є незамінним інструментом у процесі навчання. При цьому важливо враховувати, що результати вимірювань і обчислень є наближеними числами, тому слід враховувати практичну доцільність ступеня точності. Вимірювання потрібно проводити переважно за допомогою доступних інструментів — штангенциркуля, нутроміра, мікрометра та інших спеціальних засобів, що використовуються в навчальній та виробничій діяльності.

Вивчення графіків функцій є важливим елементом розвитку графічної культури, необхідної для представників різних професій. У процесі навчання слід приділяти увагу побудові графіків на практично доцільних значеннях аргументу, їх читанню, аналізу та складанню аналітичного виразу функції за графіком. Прикладна спрямованість навчання передбачає послідовну підготовку школярів до застосування знань для розв'язання реальних практичних завдань у різних сферах людської діяльності. Хоча використання конкретних завдань сприяє цьому, воно не дає повного уявлення про технології застосування знань та навичок вирішення найпростіших проблем. Це є складною педагогічною задачею, яка потребує відповідного математичного та методичного забезпечення.

Для досягнення прикладної спрямованості важливо використовувати різноманітні форми організації навчального процесу. Це можуть бути: уроки різних типів (вивчення нового матеріалу, закріплення, застосування знань, узагальнення тощо), лекції, практичні заняття (семінари, консультації, заліки), а також нетрадиційні форми уроків, такі як урок-казка, урок-подорож, урок-дилова гра та інші.

В сучасному світі характерна тенденція до інтеграції наук і прагнення отримати максимально точне уявлення про загальну картину світу. Ці ідеї знаходять своє відображення у концепції сучасної шкільної освіти, проте вирішити таке завдання в межах одного окремого навчального предмета неможливо. Тому в теорії та практиці навчання важливо застосовувати міжпредметні узагальнення. Інтегровані уроки математики з іншими предметами мають виразну прикладну спрямованість і викликають у учнів значний пізнавальний інтерес. Досвід показує, що проведення таких уроків, наприклад: «Дії з натуральними числами і системи рахунку» — для 5 класу (математика і історія); «Дільники і кратні. Ознаки подільності» — для 6 класу (математика і економіка); «Симетрія щодо прямої» та «Клас комах» — для 8 класу (математика і біологія); «Логарифми. Логарифмічна функція та її застосування» — для 11 класу, сприяє розвитку пізнавальної та дослідницької діяльності учнів.

Спільна робота вчителя і учня в цьому процесі приносить радість від «відкриття» нових зв'язків і додаткових знань, є продуктивною і сприяє особистісному зростанню, а не призводить до деградації особистості. На уроках важливо організовувати навчальний процес відповідно до природної потреби учня вільно мислити, творити та самостверджуватися. Як зазначав давньогрецький філософ Протагор з Абдери (481–411 р. до н.е.), «Освіта не дає паростків у душі, якщо воно не проникає до значної глибини».

Шляхи впровадження прикладної та практичної спрямованості в навчанні математики є надзвичайно широкими і різноманітними. У рамках цієї проблеми зосередимося лише на кількох напрямках, що стали результатом багаторічних досліджень.

Одним з основних засобів, застосування якого створює хороші умови для досягнення прикладної та практичної спрямованості навчання математики, є завдання з практичним змістом (завдання прикладного) характеру.

Під завданням з практичним змістом розуміється математична задача, фабула якої розкриває додатки математики в навколишньому нас дійсності, в суміжних дисциплінах, знайомить з її використанням в організації, технології та економіці сучасного виробництва, в сфері обслуговування, в побуті, при виконанні трудових операцій.

До завдань прикладного характеру природно на ряду із загальними вимогами до математичних задач пред'явити і наступні додаткові:

доступність школярам використовуваного нематематичного матеріалу;
реальність описуваної в умові ситуації, числових значень даних, постановки питання і отриманого рішення.

Коли говорять про прикладної задачі, мають на увазі додатки певного розділу науки до зовнішньої предметної області, тому прикладної для алгебри може бути і теоретична задача, припустимо, з фізики, хімії, геометрії, біології.

Задачі практичного змісту, які зустрічаються в шкільних підручниках, здебільшого представлені у вигляді стандартних алгебраїчних і геометричних прикладів і часто не відповідають поставленим вимогам. Їхній зміст потребує значного збагачення, що може бути досягнуто шляхом додавання таких типів завдань, як:

- обчислення значень величин, що використовуються в практичній діяльності учнів (завдання, де рішення зводиться до обчислення числового значення алгебраїчного виразу);

- побудова найпростіших графіків однієї й тієї ж функції при різних значеннях параметра;

- застосування емпіричних формул і їх обґрунтування (такі завдання широко використовуються в практиці, оскільки емпіричні формули не є результатом строгого математичного доведення, але їх застосовність підтверджується досвідом. Важливо також досліджувати походження цих формул і їхні обґрунтування на основі теоретичних знань);

- складання простих розрахункових таблиць (завдання, пов'язані зі створенням таблиць згідно з практичними математичними правилами);
- виведення формул залежностей, що застосовуються в реальній практиці (творчі завдання, які вирішуються методом математичного моделювання, оскільки для таких задач не існує стандартних алгоритмів розв'язання).

Використання завдань з практичним змістом у навчальному процесі сприяє демонстрації широких застосувань математики в житті, показує особливості відображення реального світу через математичний апарат і досягає таких дидактичних цілей, як:

- мотивація освоєння нових математичних понять і методів;
- практичне застосування вивченого матеріалу;
- закріплення та поглиблення знань з предмету;
- формування практичних умінь і навичок.

Загалом, прикладні задачі відкривають широкі можливості для реалізації дидактичних принципів у навчанні математики в школі. Практика засвідчує, що такі завдання можуть бути використані з різною дидактичною метою: вони здатні зацікавити або мотивувати учнів, сприяти розвитку їхнього розумового потенціалу, а також допомагати у поясненні зв'язків між математикою та іншими галузями знань.

Однією з основних завдань при навчанні арифметиці є формування умінь виконувати дії з натуральними числами. Однак одноманітність завдань у вигляді прикладів на обчислення притупляє інтерес, як до рахунку, так і до уроку взагалі. Тому можна використовувати різноманітні форми усних завдань: традиційні (обчислити, порівняти, спростити і т.д.) і нетрадиційні: Математичні сходи, завдання - загадка, завдання у віршах, робота по блок-схемі, обчислення ланцюжком, завдання економічного, екологічного змісту, завдання з казковими героями, завдання логічного характеру. Використання в усній роботі нематематичної інформації направлено на виховання в учнів допитливості, прагнення пізнавати нове, розширення кругозору. З цією

метою доцільно застосовувати прикладні завдання за серіями: "У світі тварин", "Хочу все знати" та інші. Досвід показав, що не слід применшувати роль усних вправ в старших класах. Вони, що здаються легкими, емоційними діють на учнів, захоплюють і слабких школярів. У класі, психологічно не готовому до занять з математики, ризиковано починати урок, думаючи, що сам матеріал опанує увагою учнів.

Інтегрований підхід до навчання. Використання так можливість навчити школярів складати нетрадиційні, творчі завдання. Психологи стверджують, що інтереси дітей часом буває важко розпізнати, і що їх пробудженню може сприяти знайомство з якимось яскравим фактом. Інтегрований підхід до навчання дозволяє за порівняно короткий час дізнатися інтереси дитини і намітити шляхи їх розвитку, удосконалювати природні задатки особистості.

Розминка. Розминки можуть включати питання не тільки на перевірку домашнього завдання, а й на актуалізацію опорних понять, пройдених раніше і які необхідно відновити в пам'яті дитини.

Складання задач за моделями, наприклад: $y=x$, $y = 5x$, $y = 2x - 3$.

Процес вирішення будь-якої прикладної задачі, згідно складається з трьох етапів:

формалізації, перекладу запропонованої задачі з природної мови на мову математичних термінів, тобто побудови математичної моделі задачі;

рішення задачі всередині моделі;

інтерпретації отриманого рішення, тобто перекладу отриманого результату (математичного рішення) на мову, на якому була сформульована вихідна задача.

При вивченні математики, так само як при вивченні інших предметів, у дітей виникає питання « " А навіщо ми це вчимо?». Як правило вчитель дає ряд стандартних відповідей, математика - це основа багатьох наук; без математики вивчення хімії, фізики, і навіть деяких розділів біології не можливо; без математики і вирішення завдань не можуть обійтися такі

професії, як: економіст, програміст, Інженер, лікар, архітектор, військовий; крім того завдання з математики ще й розвивають логічне мислення; таке вміння стане в нагоді і в звичайному житті; уміння вирішувати завдання-один з основних показників рівня математичного розвитку; рішення задач - робота кілька незвичайна, а саме розумова робота.

Працюючи з учнями 5-6 класів це питання доводиться чути часто. Перший рік дуже складно відповісти на це питання і доводилося використовувати стандартні відповіді, але вже з часом для відповіді на це питання дуже допомогли завдання прикладного характеру, завдання пов'язані з навколишнім світом, з життям. Багато з текстових завдань в підручниках неприродні з прикладних позицій. Пошук і систематизація наукових і в той же час досить простих завдань подібного роду - вельми актуальна проблема.

Щоб дізнатися, чи розуміють діти ту чи іншу тему, як вони її розуміють, і чи можуть використовувати набуті знання в житті, необхідно по можливості, після вивчення кожної теми, давати дітям у вигляді домашнього завдання (поки практикую це як завдання на канікули) придумати (скласти, вирішити і оформити) своє завдання з вивченої теми застосовну в житті. Звичайно, перший раз це було складно, діти не зовсім вдало складали їх. Не завжди могли сформулювати свої думки, але з часом у них стало виходити складати цікаві завдання. Але досвід складання таких завдань також показує, що учні поки не можуть використовувати реальні числа (можливо, це через підручників, адже в них підбирають зручні числа), складають завдання схожі на завдання підручника. Тому, наприклад, завдання на купівлю — продаж містять «старі ціни», а не ціни реального часу (1 кг 20 грн., а не 200 грн..) це свідчить про те, що учні не усвідомлюють прикладну спрямованість цих завдань і частіше не використовують при поході в магазин математичні знання — обчислювати вартість покупки.

Для підвищення ефективності роботи в цьому напрямку окреслюють такі вимоги до прикладних завдань:

- методи і способи розв'язання повинні бути наближеними до практичних прийомів і технологій;
- завдання мають відповідати програмі курсу та бути невід'ємною частиною навчального процесу, спрямованою на досягнення навчальних цілей;
- у змісті прикладних задач слід відображати як математичні, так і нематематичні проблеми, а також їх взаємозв'язки;
- у формулюванні задач впроваджуються поняття та терміни, що мають бути доступними для учнів, а зміст і вимоги — близькими до реальної дійсності;
- прикладна частина задачі не повинна приховувати її математичну сутність. Такі задачі можуть мати різні цілі: зацікавлювати, мотивувати, сприяти розвитку розумових здібностей, а також ілюструвати взаємозв'язки між математикою та іншими науками.

Розв'язання прикладних задач підвищує інтерес учнів до предмету, оскільки для більшості студентів цінність математичної освіти полягає у її практичних можливостях. Важливо формувати правильне уявлення про те, як математика відображає явища і процеси реального світу, а також роль математичного моделювання у науковому пізнанні та практичній діяльності. Це має велике значення для формування діалектико-матеріалістичного світогляду учнів.

Нижче наведені прикладні завдання, які викладачі пропонують на своїх веб-сайтах. Їх використовують у процесі навчання математики школярів.

Завдання № 1. Кухареві необхідно приготувати 15 порцій біфштекса по 200 г в кожній. Скільки йому необхідно взяти сирого м'яса, якщо відомо, що м'ясо при варінні втрачає 35% своєї маси.

Завдання № 2. У книзі рецептів написано, що на три порції фруктового салату необхідно взяти 150 г ківі, 210 г манго, 180 г папайї і 60 г мигдальних горіхів. За скільки грам кожного інгредієнта потрібно для приготування 20 порцій салату?

Розглянемо тип прикладних задач системи, в яких похідна застосовується: до дослідження на монотонність функції, яка відіграє роль математичної моделі даної задачі; з метою дослідження функції на екстремум; з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції; під час дослідження функції за загальною схемою, на основі якого будується її графік; до обчислення наближеного значення функції. З'ясуємо роль і місце прикладних задач природничого характеру при підготовці до вивчення теоретичних питань курсу та при закріпленні тільки що набутих теоретичних знань і формуванні математичних умінь. Покажемо, як можна використовувати цей тип задач та ілюстративні життєві приклади у процесі навчання, виходячи з різних дидактичних цілей. До вивчення питань монотонності функції в старшій школі існують різні методичні підходи, запропоновані у чинних шкільних підручниках.

За основу візьмемо підхід, згідно з яким розгляд понять зростаючої і спадної функції складається з двох етапів: 1) повторення означень, відомих учням з курсу алгебри основної школи; 2) розгляду питань зростання і спадання функції у точці, формулювання означення монотонної функції на проміжку та доведення ознак монотонності функції в точці і, як наслідок, на проміжку.

Зупинимось на етапах процесу навчання, під час яких розгляд практичних життєвих ситуацій сприятиме засвоєнню учнями теоретичного матеріалу. Розпочнемо з етапу повторення понять зростаючої та спадної функції на проміжку, відомих учням з курсу алгебри основної школи. Розглянемо таку задачу.

Задача 3.3. На рисунку 13 представлена зміна тиску крові вздовж судинного русла. Як залежить тиск крові від товщини ділянки судинної системи? На якій ділянці тиск найбільший, а на якій найменший? Аналізуючи цей графік, учні зможуть пригадати поняття спадної функції на проміжку та алгоритм дослідження функції на монотонність. При введенні понять зростаючої та спадної функції в точці також доцільно звертатись до

практичних прикладів. Наступний та подібний до нього приклади допоможуть учням глибше усвідомити поняття зростаючої функції у точці і скоріше запам'ятати означення, сформульоване у підручнику.

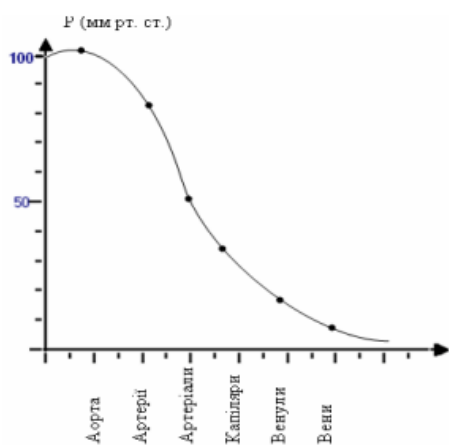


Рисунок 13

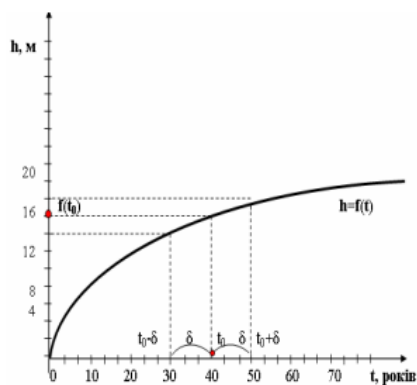


Рисунок 14

Приклад 1. На рисунку 14 зображений графік залежності висоти h ялинки від її віку t (у роках).

Зображена на малюнку функція $h=f(x)$ є зростаючою у точці t_0 , оскільки існує інтервал $(t_0-\delta; t_0+\delta)$, $0 < \delta$, який міститься у проміжку $\langle a, b \rangle$, і такий, що $f(t) < f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0-\delta; t_0)$ і $f(t) > f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0; t_0+\delta)$.

Розгляд практичних проблемних ситуацій буде корисним і під час вивчення ознак зростання і спадання функцій. Застосуємо похідну до дослідження на монотонність функції, яка є математичною моделлю такої прикладної задачі.

Задача. У країні Меланхолії виникла епідемія депресії, яка розповсюджується так, що відсоток p тих, що захворіли залежить від часу t (в добах) наступним чином, $p = 0,005(12t^2 - t^3)$, де $0 \leq t \leq 12$

- 1) Скільки відсотків мешканців захворіє до кінця другої доби?
- 2) Скільки діб відсоток тих, що захворіли, буде збільшуватись?
- 3) Починаючи з якої доби епідемія почне спадати?

Розв'язання.

Для відповіді на перше питання знайдемо значення функції для $t=2$:
 $p(2) = 0,005(12 \cdot 2^2 - 2^3) = 0,2 = 20(\%)$

Отже, до кінця другої доби захворіє 20% мешканців. Щоб відповісти на наступні питання, знайдемо похідну функції:

$$p'(t) = 0,005(24t - 3t^2) = 0,015t(8-t)$$

Оскільки час $t > 0$ то на відрізку $[0;12]$ існує єдина точка, в якій похідна набуває нульового значення. Ця точка розбиває проміжок $[0;12]$ на два проміжки $[0;8]$ та $(8;12]$. На першому з цих проміжків $p'(t) > 0$ і, отже, функція на ньому зростає, а на другому проміжку $p'(t) < 0$ і тому функція на ньому спадає.

На основі ознаки зростання (спадання) функції на певному проміжку було зроблено висновок, що через 8 діб відсоток тих, хто захворів, буде зростати, а починаючи з 9-ї доби епідемія почне зменшуватися. Відповідь: 20%; 8 діб; з 9-ї доби.

Задачі, розв'язані в класі, допомагають учням освоїти методи розв'язання подібних прикладних задач із реального життя. Також корисним є самостійне розв'язання кількох додаткових задач. Згідно з рекомендаціями досвідчених фахівців пропонуємо такі завдання:

Задача 4. Швидкість радійового розпаду пропорційна кількості радію в момент часу. Знайдіть закон радіоактивного розпаду, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина початкової кількості радію.

Задача 5. Населення міста зростає з швидкістю, пропорційною його поточній кількості. Знайдіть закон зростання населення, якщо в момент часу

t_0 населення становило N_0 тисяч, а щорічний приріст — h тисяч. Обчисліть, через скільки років населення подвоїться, якщо $N_0 = 900$, $h = 30$.

Задача 6. Кількість речовини, що перетворюється на іншу, змінюється з швидкістю, пропорційною кількості не перетвореної речовини. Через годину залишається 31,4 г, а через 3 години — 9,7 г. Знайдіть залежність кількості не перетвореної речовини x від часу t .

Задача 7. Швидкість утворення ферменту у пивних дріжджах пропорційна його кількості. Початковий об'єм ферменту N_0 через 1 годину подвоюється. Визначте, у скільки разів збільшиться кількість ферменту через 3 години.

Задача 8. Щоденна норма корму у тваринництві, розрахована на 1000 кг живої маси, є максимальною на початку росту тварин і зменшується у процесі росту, досягаючи мінімуму в момент припинення росту. Це пояснюється зменшенням обміну речовин у організмі. Швидкість зміни норми корму пропорційна різниці між поточною нормою та її мінімуму. Складіть диференціальне рівняння для цього процесу та знайдіть щоденну норму корму.

Задача 9. Через 30 днів маса радіоактивної речовини зменшилася на 50%. За скільки часу залишиться 1% початкової кількості, якщо швидкість розпаду пропорційна кількості речовини?

Задача 10. Популяція бактерій у сприятливих умовах зростає за законом: швидкість росту у момент часу t (у годинах) дорівнює розміру популяції, поділеному на 10. Обчисліть розмір популяції через 10 годин, якщо початково їх 1000. Через який час бактерії подвояться? Якщо початкова кількість — 100, за 3 години вона подвоїться. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу та визначте, у скільки разів вона зросте за 9 годин.

Задача 11. В експерименті голодування маса людини за 30 днів зменшилася з 140 до 110 фунтів. Щоденна втрата маси пропорційна її поточній масі. Запишіть диференціальне рівняння для маси як функції часу та знайдіть масу через 15 днів.

Прикладні задачі природничого характеру вимагають побудови математичних моделей на основі умови, що призводить до складання диференціального рівняння. Такі рівняння відіграють важливу роль у дослідженнях фізико-хімічних, фармацевтичних і медико-біологічних процесів. За допомогою їх ми встановлюємо зв'язки між змінними величинами, що характеризують явища. Розв'язання будь-якої задачі за допомогою математичного аналізу зазвичай складається з трьох етапів: 1) перетворення умов задачі у математичну форму; 2) розв'язання диференціального рівняння; 3) аналіз отриманих результатів. Найскладнішою частиною є перший етап — складання диференціального рівняння, оскільки універсальних методів його побудови немає, і навички набуваються через вивчення конкретних прикладів.

2.2 Апробація матеріалів та аналіз проведеного тестування

Ми провели апробацію запропонованої системи задач практичного спрямування у спілкуванні зі старшокласниками. Основою нашого підходу є ідея, що головним результатом шкільної освіти є сформований учень — випускник, який володіє практичними навичками, здатний до самостійного пізнання та має відповідний набір компетентностей. Виходимо з положення, що структура компетентностей розкривається через психологічну перспективу, де вони складаються з мотивів, знань, умінь і рефлексії.

З огляду на це, мотивація виступає як фундамент будь-якої діяльності, а мотиви відіграють важливу роль у навчальному процесі. Тому питання навчальної мотивації є одним із ключових для сучасної школи, особливо у контексті оновлення змісту навчання, розвитку самостійності у здобутті знань та активізації інтересу учнів. Це питання буде детально досліджене у рамках нашої роботи. Багато педагогів і психологів зазначають, що рівень компетентності та успішність учнів багато в чому залежать від мотивації до навчання. Старшокласники, мотивовані на самореалізацію, прагнуть максимально пізнавати під час уроків, виконувати творчі завдання та

здобувати нові знання. Однак протягом навчання мотивація може знижуватися, що негативно впливає на ефективність навчання.

У процесі апробації нашої роботи особливу увагу приділятимемо саме мотивації навчання. За даними психологів і педагогів, прагнення учнів вчитися залежить від наявності пізнавальних мотивів, таких як бажання зрозуміти навколишній світ, оволодіти новими знаннями та навичками, здобути досвід і професію, а також від соціальних мотивів — отримання похвали від батьків, однокласників, оточуючих. Пізнавальні мотиви є внутрішніми драйвами навчальної діяльності, тоді як соціальні — зовнішніми. Часто їх розглядають у єдності, оскільки інтерес до навчання співвідноситься з прагненням отримати схвалення і визнання у колективі, бути першим або лідером. Найвищу роль у визначенні успішності мають саме внутрішні мотиви.

Стійкий інтерес і мотивація старшокласників є важливими критеріями ефективної організації навчального процесу та його результативності. Тому дослідження мотивації старшокласників є актуальним питанням. Звісно, рівень їхньої успішності у вивченні математики, а також відвідуваність уроків і сформованість компетентностей є показниками, що відображають рівень мотивації. Крім того, педагог може отримати додаткову інформацію через спостереження за поведінкою учнів під час уроків і поза ними, анкетування, яке швидко збирає дані про ставлення до предмету, а також індивідуальні бесіди з учнями щодо їхніх мотивів і сенсу навчання. Важливо, щоб учні мали внутрішню мотивацію, оскільки саме вона сприяє більш ефективному навчанню.

За наявності внутрішньої мотивації діяльність сама по собі стає цінністю, приносить задоволення та захоплює процесом навчання. Багато досліджень учених доводять, що внутрішня мотивація особливо активізується при використанні на уроках задач практичного або прикладного характеру, а також творчих завдань. У старшокласників внутрішня мотивація є важливою складовою дослідження, особливо під час

апробації роботи з розробки задач практичного змісту. На нашу думку, такі завдання допомагають навчити школярів наполегливості, здобути досвід ефективного застосування знань з математики у реальному житті, а ситуації успіху сприяють психологічному комфорту та позитивному ставленню до предмету. Водночас, слід використовувати соціальні мотиви для підтримки навчальної мотивації: організовуючи групову діяльність, враховуючи особистісні характеристики учнів, їх лідерські якості, а також пропонуючи заохочення за досягнення у навчанні. Досвідчений педагог легко помітить ознаки демотивації, такі як зниження оцінок, невиконання домашніх завдань, прогули уроків, пасивність на заняттях. Часто старшокласники вважають, що математика не є важливою для їхнього майбутнього і сприймають уроки з негативними емоціями. Тому вчителі шукають способи зробити навчання більш цікавим. Одним із підходів є акцент на практичному застосуванні математики, щоб показати її необхідність у будь-якій професії. Також багато задач подаються через цифрові освітні ресурси, що дозволяє учням виконувати інтерактивні завдання на комп'ютерах та гаджетах, стимулюючи їхню зацікавленість у навчанні. Важливо створити для кожного учня індивідуальну карту його мотивів, що допоможе підбирати відповідні види діяльності на уроках і підтримувати його навчальну мотивацію. Існує багато методик діагностики навчальної мотивації учнів. Розглянемо одну з них — методику М. Матюхиної (модифікація Н. Бадмаєва), яка передбачає індивідуальне застосування для налагодження діалогу з учнем. Ця методика дозволяє з'ясувати, що керує учнем у процесі навчання. Діагностика проходить у три етапи: спочатку учні обирають картки з твердженнями, які вважають важливими для себе; потім з них залишають сім найважливіших; і, нарешті, визначають три найголовніших. Серед тверджень є такі, наприклад: «Я розумію, що учень повинен добре вчитися», «Прагну швидко і точно виконувати вимоги вчителя», «Хочу закінчити школу і навчатися далі», «Хочу бути культурною і розвиненою людиною», «Хочу отримувати гарні оцінки», «Хочу схвалення вчителів і батьків», «Хочу, щоб товариші добре

думали про мене», «Хочу мати багато друзів у класі», «Мрію бути найкращим учнем», «Хочу, щоб мої відповіді були найкращими», «Не хочу, щоб мене лаяли», «Не хочу отримувати погані оцінки», «Люблю дізнаватися нове», «Мені цікаво, коли вчитель розповідає щось цікаве», «Люблю думати і міркувати», «Люблю брати складні завдання», «Мені цікаво спілкуватися з учителем», «Вважаю за краще працювати в групі», «Люблю вирішувати різними способами», «Цікавлюся новинками», «Хочу отримати високі оцінки», «Мрію про великі успіхи». Вчитель зможе визначити мотиви учня, аналізуючи картки, які він обрав двічі або тричі, і на цій основі зробити висновки щодо його внутрішніх керунків у навчанні.

Судження, які учень обирає лише один раз, можна вважати випадковим вибором. Відповідність тверджень певним мотивам визначається так:

- обов'язок і відповідальність: 1–2;
- самовизначення і самовдосконалення: 3–4;
- благополуччя: 5–6;
- афіліація (потреба у прийнятті, довірчі стосунки): 7–8;
- престиж: 9–10;
- уникнення невдачі: 11–12;
- навчально-пізнавальні (зміст навчання): 13–14;
- навчально-пізнавальні (процес навчання): 15–16;
- комунікативні: 17–18;
- творчої самореалізації: 19–20;
- досягнення успіху: 21–22.

За результатами такої діагностики шкільної мотивації формуємо «карту мотивів» конкретного учня. Враховуючи актуальні для нього мотиви, нам легше підтримувати його пізнавальну мотивацію та підкреслити ті аспекти навчання, які є для школяра важливими.

Цікавою для нас є методика діагностики мотивації навчання і емоційного ставлення до навчання у старших класах, розроблена за опитувальником Ч. Спілбергера (модифікація А. Андрєєвої). Цю методику

рекомендується застосовувати для визначення рівня мотивації та емоційного ставлення учнів до навчання. Вона проводиться фронтально для всього класу за допомогою психолога. Учні видають бланки та інструкції. Перед початком діагностики учні можуть ставити запитання психологу для з'ясування незрозумілих моментів, після чого працюють самостійно. На заповнення бланка відводиться 10–15 хвилин. Вони відповідають на питання про свої відчуття під час уроків. За результатами цієї методики вчитель може визначити рівень мотивації, пізнавальної активності та мотивації досягнень, а також виявити учнів, у яких навчання викликає тривогу чи негативні емоції. Аналізуючи результати, вчитель звертає увагу на тих, хто має низький бал з пізнавальної активності або високий — з гніву й тривоги, — і надає їм додаткову увагу. Психологи рекомендують обговорити з учнями отримані результати і разом визначити кроки щодо зменшення негативних емоцій в навчанні, підбираючи найбільш ефективні педагогічні методики та тактики. Таким чином, за результатами цієї методики можна визначити загальний рівень мотивації, пізнавальної активності, мотивації досягнень і виявити учнів із негативним емоційним ставленням до навчання.

У нашому дослідженні також застосовувалася шкала академічної мотивації, розроблена Т. Гордєєвою, на основі шкали академічної мотивації ШАМ Е. Валлеранда, Е. Дісі та Р. Райана. Ця методика дозволяє досліджувати сім аспектів (шкал мотивації), що охоплюють різні сфери учнівської мотивації.

Бали за кожною шкалою мотивації оцінюються окремо. Чим вищий бал, тим яскравіше виражений відповідний тип мотивації.

1. Пізнавальна мотивація (питання 1, 8, 15, 22). Вона характеризує прагнення до здобуття нових знань, розуміння навчального матеріалу, а також рівень інтересу і задоволення від процесу пізнання.

2. Мотивація досягнення (питання 2, 9, 16, 23). Визначає прагнення досягати високих результатів і отримувати задоволення від розв'язання складних завдань.

3. Мотивація саморозвитку (питання 3, 10, 17, 24). Вимірює рівень бажання розвивати свої здібності у навчанні, почуття майстерності та компетентності.

4. Мотивація самоповаги (питання 4, 11, 18, 25). Оцінює прагнення навчатися для підвищення власної значущості і самооцінки через досягнення у навчанні.

5. Інтроєційована мотивація (питання 5, 12, 19, 26). Вона визначає спонукання до навчання, що зумовлені відчуттям сорому і обов'язку перед собою або іншими людьми.

6. Екстернальна мотивація (питання 6, 13, 20, 27). Відповідає на питання, чи є дотримання соціальних вимог основною мотивацією навчання. В такій ситуації максимальне відчуття автономії фруструється.

7. Амотивація (питання 7, 14, 21, 28). Оцінює рівень інтересу і усвідомленості процесу навчання: чи є він значущим для учня.

За результатами діагностики мотивації кожного учня можна створити його профіль мотивації.

Учні з високими балами по шкалах 5, 6 і 7 (інтраційна, екстернальна мотивація та амотивація) належать до групи ризику, оскільки у них переважає зовнішня мотивація. Це потребує особливої уваги та розвитку внутрішньої мотивації. Для цього важливо допомогти учню відчувати свою компетентність і впевненість у собі («я зможу»), сприяти розвитку автономії, тобто можливості робити власний вибір і приймати рішення, а також сприяти позитивним взаємовідносинам і спільному спілкуванню під час навчальної діяльності, особливо при розв'язанні прикладних задач.

Педагоги рекомендують використовувати також тест рівня мотивації навчання (авторка – Н. Лусканова). Ми внесли до нього деякі зміни, орієнтовані на предмет математики, щоб краще досліджувати мотивацію учнів у цьому навчальному контексті.

Він має такі запитання:

1. Тобі подобаються уроки математики?

не надто

подобаються

не подобаються

2. Ти завжди з радістю йдеш на уроки або тобі часто хочеться залишитися вдома?

частіше хочеться залишитися вдома

буває по-різному

йду з радістю

3. Якби вчитель сказав, що завтра не обов'язково приходити всім учням, що бажаючи можуть залишитися вдома, ти пішов би на математику або залишився вдома?

не знаю

був би дома

пішов би на урок

4. Тобі подобається, коли скасовуються уроки математики?

не подобається

буває по-різному

подобається

5. Ти хотів би, щоб тобі не задавали домашніх завдань?

хотів би

не хотів би

не знаю

6. Ти хотів би, щоб замість уроків математики були лише перерви?

не знаю

не хотів би

хотів би

7. Ти часто розповідаєш про уроки математики батькам?

часто

рідко

не розповідаю

8. Ти хотів би, щоб у тебе був менш вимогливий учитель?

точно не знаю

хотів би

не хотів би

9. У тебе в класі багато друзів, яких цікавить математика?

мало

багато

немає друзів

10. Тобі подобається ставлення твоїх однокласників до предмету?

подобається

не надто

не подобається

КЛЮЧ до тесту.

Номер запитання	Оцінка за 1 відповідь	Оцінка за 2 відповідь	Оцінка за 3 відповідь
1	1	3	0
2	0	1	3
3	1	0	3
4	3	1	0
5	0	3	1
6	1	3	0
7	3	1	0
8	1	0	3
9	1	3	0
10	3	1	0

Пояснення

Перший рівень. Учень, який набрав від 25 до 30 балів, демонструє високий рівень шкільної мотивації та активності в навчанні. Такий учень має пізнавальний мотив і прагне максимально успішно виконувати всі вимоги школи. Він чітко слідує вказівкам вчителя, сумлінний і відповідальний, переживає у разі отримання незадовільних оцінок.

Другий рівень. Балами від 20 до 24 учень показує добре сформовану мотивацію. Такий рівень притаманний більшості учнів, які успішно виконують навчальні завдання і вважаються в межах норми.

Третій рівень. Набравши 15–19 балів, учень має позитивне ставлення до школи, але більшою мірою зацікавлений позаурочною діяльністю. Він досить комфортно почувається на уроках, але надає перевагу спілкуванню з друзями ніж навчальним процесам. Йому подобається бути учнем, мати гарний портфель, ручки, зошити. Пізнавальні мотиви у таких дітей менш сформовані, і навчання не дуже їх приваблює.

Четвертий рівень. Оцінки від 10 до 14 балів свідчать про низький рівень мотивації. Ці учні відвідують уроки неохоче, часто пропускають заняття, займаються сторонніми справами або іграми під час уроку. Вони стикаються з труднощами у навчанні і мають нестійку адаптацію до навчального процесу.

П'ятий рівень. Нижче 10 балів — це прояв негативного ставлення до уроків та дезадаптація. Такі учні мають серйозні труднощі у навчанні, не справляються з навчальним матеріалом, ускладнено їхню взаємодію з однокласниками та вчителями. Уроки для них часто сприймаються як вороже середовище, перебування у ньому — нестерпне.

Використання методики дослідження мотивації навчання у старшокласників за М.І. Лук'яною [1; 4] дозволяє визначити: загальний рівень мотивації, особистісний сенс навчання, здатність до цілепокладання, провідні мотиви, переважання внутрішніх чи зовнішніх мотивів, а також прагнення до успіху або уникнення невдачі.

За результатами дослідження, проведеного за цією методикою, у нашому класі (25 учнів 11 класу) до початку апробації лише 5 мали високий рівень мотивації, тоді як 7 — низький. Після впровадження системи задач для вивчення матеріалу ситуація покращилася: кількість учнів із високою мотивацією зросла, а кілька учнів із середнім рівнем мотивації були переведені у групу з високою мотивацією. Водночас, учнів із низькою мотивацією залишилось приблизно так само — 28%, і ця кількість не змінилася після роботи.

Результати наведені на гістограмі 1 «Мотивація навчання, особистісний сенс» (один учень з об'єктивних причин не був досліджений).

Гістограма 1. Мотивація навчання, особистісний сенс



Ми також досліджували спрямованість мотивів у навчально-пізнавальній діяльності, зокрема мотиви, орієнтовані на пізнавальну та соціальну сфери. Як уже зазначалося, пізнавальні мотиви сприяють прагненню учнів до саморозвитку та самовдосконалення. Соціальні мотиви полягають у бажанні взаємодіяти з іншими людьми й удосконалювати відповідні навички. Аналізуючи мотиви учнів початкової апробації, виявлено, що переважають соціальні мотиви (56%) над пізнавальними (44%). Після застосування описаної методики спостерігається зміна у бік внутрішньої мотивації у трьох учнів. Зміни складають з 44% до 56%. Результати відображено на гістограмі 2 «Спрямованість мотивації навчальної діяльності», де показано спрямованість мотивів до початку апробації (перші два стовпці) та після її завершення (останні два стовпці).

Гістограма 2. Напрямки мотивації



Зауважимо, що визначення загального рівня навчальної мотивації старшокласників дає змогу окреслити шляхи та форми роботи з учнями зі зниженим і середнім рівнем мотивації для її підвищення відповідно до рекомендацій учених [29]. Особливу увагу слід звернути на «метод експертних оцінок», який ми застосовували як допоміжний спосіб збору інформації про рівень знань, умінь та компетентностей учнів 11 класу за оцінками експертних осіб. В ролі «суддів» виступали вчителі з інших предметів, керівники гуртків, викладачі вищих навчальних закладів та інші фахівці. Зрозуміло, що для більш об'єктивної оцінки слід збирати інформацію про одного учня від кількох «суддів», а отримані дані порівнювати між собою. В якості експертів було обрано вчителів математики, інформатики та фізики, які зафіксували прогрес у знаннях учнів за контрольними роботами, проведеними до початку апробації та після неї. Прогрес оцінювався за приростом балів (+3, +2, +1), відсутністю змін (0) або зменшенням балів (-3, -2, -1).

Аналіз результатів контрольних робіт засвідчив, що можна говорити про покращення рівня сформованості окремих навичок у учнів, зокрема тих, на яких ми зосереджували увагу при створенні системи практичних задач. Це проявлялося у застосуванні різноманітних креативних процедур для розв'язання задач з відповідних навчальних дисциплін. Також у таблиці переважають позитивні знаки «+», тоді як «-» і «0» трапляються рідше. Водночас враховувалося, що для дослідження думки учнів використовуються різні методи, зокрема бесіда, інтерв'ю та анкетування, які застосовувалися як на початку, так і в процесі та наприкінці апробації з метою зіставлення отриманих результатів із думками самих учасників експерименту. У науковій літературі детально описані такі методи, як усна бесіда, інтерв'ю та письмове анкетування. Ми обрали саме анкетування, оскільки цей метод дозволяє зібрати первинну соціологічну інформацію через письмовий опит. Це забезпечує швидкий збір даних щодо ставлення учнів до запропонованої системи практичних задач та інших елементів роботи. Переваги анкетування

полягають у можливості швидко опитати велику кількість учасників за короткий час, уникнути стороннього впливу, необов'язковості особистого контакту з респондентами та швидкій обробці отриманої інформації.

2.3 Організація роботи вчителя на етапі актуалізації знань на уроках алгебри по темі "похідна"

Говорячи про зміст будь-якого курсу математики, можна виділити три основні аспекти: логічний, образний і технічний. Математика - це не тільки школа логічного мислення, це ще й джерело образів. Її образний аспект, безумовно, дуже важливий для людей з гуманітарними інтересами. Вміти бачити різноманітні форми в їх просторовому і площинному зображенні, розпізнавати конфігурації, уявляти собі вид графіка, знаючи властивості функції - все це сприяє розвитку уяви і естетичного почуття. Таке викладання математики сприяє виникненню асоціацій і допомагає відчувати цілісність досліджуваних об'єктів.

Таблиця 1. Проведення етапу актуалізації знань на уроці.

Варіант №1

Етап уроку	Діяльність вчителя
Актуалізація знань	Як ви думаєте, яке з висловлювань, найбільше підходить до теми нашого заняття? 1. "Недостатньо тільки отримати знання, треба їх систематизувати і знайти їм гідне додаток». Гете І. (німецький поет і мислитель 18 століття).
	2. "Не в кількості знань полягає освіта, але в повному розумінні і майстерному застосуванні всього того, що знаєш." Дістервег а. (німецький педагог і політик 19 століття). 3. "Повторення-мати вчення". Хто б з вас і вибрав 1 висловлювання? Чому? Хто б з вас і вибрав 2 висловлювання? Чому? Хто б з вас і вибрав 3 висловлювання? Чому? Ви вибрали всі три? І правильно! Метою нашого заняття буде: повторення, систематизація і застосування знань по темі: «похідна».

Таблиця 2. Проведення етапу актуалізації знань на уроці.

Варіант № 2

Етап уроку	Діяльність вчителя
Актуалізація знань	Сьогодні на уроці ми повторимо правила обчислення похідних, згадаємо формули обчислення похідних, правила диференціювання. Почати я хочу його з незвичайних слів. "Музика може підносити або

	умиротворяти душу, живопис-радувати око, поезія-пробуджувати почуття, філософія-задовольняти потреби розуму, інженерна справа – удосконалювати матеріальну сторону життя людей, а математика здатна досягти всіх цих цілей!"Моріс Клайн (американський математик, відомий своїми роботами з історії та філософії математики). Метою нашого заняття буде: повторення, систематизація і застосування знань по темі: «похідна».
--	--

2.4 Система вправ на уроках алгебри по темі " похідна"

При вивченні правил обчислення похідної основних функцій можна зробити картки, на яких будуть представлені ці правила. Дані картки повинні бути присутніми на всьому протязі вивченні даної теми. Під час уроків вітається використання різнокольорових маркерів.

Використовувати картки можна не тільки при вивченні правил, але і для запису рішень завдань по ходу уроку. Виконання практичних занять має на меті закріпити в учнів теоретичні знання та розвинути практичні навички та вміння з теми «похідна» [9].

Таблиця 3. Картка-консультант "знаходження похідної функції"

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знаходимо приріст функції в точці x_0 $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	
2	Знаходимо різницеве відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	
3	З'ясовуємо, до якого числа прагне $\Delta f / \Delta x$, якщо вважати, що Δx прагнуть до нуля.	
4	Обчислюємо значення похідної в заданій точці (якщо вона вказана).	
5	Записуємо відповідь.	

За допомогою "Прикладу 1" розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 3).

Приклад 1. Користуючись визначенням похідної, знайдіть значення похідної функції f , якщо $f(x)=x^2-3x$ [9].

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знаходимо приріст функції в точці x_0 : $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= (x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x\end{aligned}$

2	Знаходимо різницеве відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3\end{aligned}$
3	З'ясовуємо, до якого числа прагне $\Delta f/\Delta x$, якщо вважати, що Δx прагнуть до нуля.	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3),$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $f'(x) = 2x_0 - 3$
4	Обчислюємо значення похідної в заданій точці (якщо вона вказана).	-
5	Записуємо відповідь.	$f'(x_0) = 2x_0 - 3$

Таблиця 4. Картка-консультант " знаходження похідної функції*"

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Яка функція дана?	
2	Як знайти похідну такої функції?	
3	Виберемо правила диференціювання	
4	Позначимо чому дорівнює U і V	
5	Підставимо значення в вибране правило диференціювання	
6	Записуємо відповідь	

За допомогою "прикладу 2" розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 4).

Приклад 2. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2(3x + x^3)$

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Яка функція дана?	Степеневий
2	Як знайти похідну такої функції?	$y = x^n, y' = nx^{n-1}$
3	Виберемо правила диференціювання	$(UV)' = u'V + UV'$
4	Позначимо чому дорівнює U і V	$U = x^2, V = (3x + x^3)$
5	Підставимо значення в вибране правило диференціювання	$f' = 0 = 0^2 \cdot (3x + x^3) + x^2(3x + x^3)'$ $= 2x(3x + x^3) + x^2(3 + 3x^2) = 9x^2 + 5x^2$
6	Записуємо відповідь	$f' = 9x^2 + 5x^2$

Таблиця 5. Картка-консультант "знаходження похідної складної функції".

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Виділимо "внутрішню" функцію	
2	Виділимо "зовнішню" функцію	
3	Обчислити похідну складної функції	
4	Записуємо відповідь	

За допомогою "прикладу 3" розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 5).

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $f(x) = (2x - 7)^8$.

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Виділимо "внутрішню" функцію	$y = 2x - 7$
2	Виділимо "зовнішню" функцію	$g(y) = y^8$
3	Обчислити похідну складної функції	$f'(x) = ((2x - 7)^8)'$ $= 8(2x - 7)^7(2x - 7)'$ $= 8(2x - 7)^7 \cdot 2 = 16(2x - 7)^7$
4	Записуємо відповідь	$f'(x) = 16(2x - 7)^7$

Таблиця 6. Картка-консультант "Написання рівняння дотичної"

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Обчислимо похідну функції	
2	Знайдемо значення функції в точці %	
3	Знайдемо значення похідної в точці %	
4	Підставимо отримані числа в формулу $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	
5	Наведемо рівняння до стандартного виду	
6	Запишемо відповідь	

За допомогою "прикладу 4" розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 6).

Приклад 4. До кривої $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 1$ провести дотичну

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Обчислимо похідну функції	$f(x) = 2x$
2	Знайдемо значення функції в точці x_0	$f(1) = 1^2 = 1$
3	Знайдемо значення похідної в точці x_0	$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$
4	Підставимо отримані числа в формулу $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$	$y = 2(x - 1) + 1$
5	Наведемо рівняння до стандартного виду	$y = 2x - 1$
6	Запишемо відповідь	$y = 2x - 1$

Таблиця 7. Карточка-консультант «Нахождение промежутков возрастания и убывания функции».

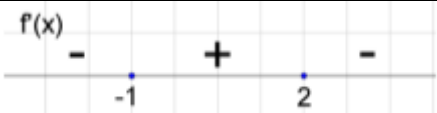
№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знаходимо область визначення функції.	
2	Знаходимо похідну функції.	
3	Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ох.	
4	Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю	

	Ох.	
5	Перевіряємо знак функції на кожному проміжку.	
6	Робити висновки.	

За допомогою» прикладу 5 " розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 7).

Приклад 5. Знайдіть проміжки зростання і убуття функції

$$y = 12x + 3x^2 - 2x^3.$$

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знаходимо область визначення функції.	$D(f) = R$
2	Знаходимо похідну функції.	$f'(x) = 12 + 6x - 6x^2$ $= -6(x - 2)(x + 1)$
3	Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ох.	$x_1 = -1; x_2 = 2$
4	Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ох.	
5	Перевіряємо знак функції на кожному проміжку.	$f'(x) < 0$ на $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ $f'(x) > 0$ на $(-1; 2)$
6	Робити висновки.	Функція убиває на $(-\infty; -1]$ и на $[2; +\infty)$; Функція зростає на $[-1; 2]$.

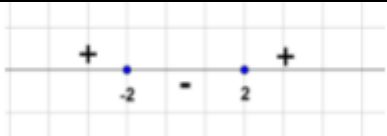
Таблиця 8. Картка-консультант "знаходження критичних точок функції".

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знаходимо область визначення	
2	Знаходимо похідну функції	
3	Знаходимо область визначення похідної функції	
4	Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ох.	
5	Відзначаємо точки на числовій прямій	
6	Перевіряємо знак функції на кожному проміжку	
7	Робити висновки	

За допомогою "прикладу 6" розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 8).

Приклад 6. Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, а які-точками мінімуму: $f(x) = 5 + 12x - x^3$ [9].

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знаходимо область визначення	$D(f) = R$
2	Знаходимо похідну функції	$f'(x) = 12 - 3x^2 =$ $= -3(x - 2)(x + 2)$
3	Знаходимо область визначення похідної	$D(f'(x)) = R$

	функції	
4	Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ox .	$x = -2; x = 2$
5	Відзначаємо точки на числовій прямій	
6	Перевіряємо знак функції на кожному проміжку	$f'(x) < 0$ на $(-2; 2)$ $f'(x) > 0$ на $(-\infty; -2)$ $\cup (2; +\infty)$
7	Робити висновки	$x = \pm 2$, де $x = -2$ - точка мінімуму $x = 2$ - точка максимуму

Таблиця 9. Картка-консультант "застосування похідної до дослідження функцій"

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знайти область визначення і область значення функції	
2	З'ясуємо, чи є функція f парною, непарною або ні парною, ні непарною, чи є періодичною	
3	Знайти точки перетину графіка з осями координат	
4	Знайти похідну функції	
5	Знайти область визначення похідної функції	
6	Прирівняти похідну до нуля і знайти значення функції в цій точці	
7	Заповнена таблиця	
8	Побудувати графік	

За допомогою» прикладу 7 " розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 9).

Приклад 7. Дослідіть функцію та побудуйте її графік $f(x) = x^2 - 2x + 8$.

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знайти область визначення і область значення функції	$D(f) = R$ $E(f) = [7; +\infty)$
2	З'ясуємо, чи є функція f парною, непарною або ні парною, ні непарною, чи є періодичною	$f(x)$ - ні парна, ні непарна
3	Знайти точки перетину графіка з осями координат	$x^2 - 2x + 8 = 0$ - не має рішення $f(0) = 8$;
4	Знайти похідну функції	$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$
5	Знайти область визначення похідної функції	$D(f'(x)) = R$
6	Прирівняти похідну до нуля і знайти значення функції в цій точці	$x = 1$ $f(1) = 7$

7	Заповнена таблиця	x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
		$f(x)$		7	
				$\min$	
8	Побудувати графік				

Таблиця 10. Картка-консультант "знаходження найбільшого і найменшого значень функції"

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знайти похідну функції	
2	Знайти область визначення похідної функції	
3	Прирівняти похідну до нуля	
4	Вибрати точки, які входять у відрізок	
5	Знайти значення функції в даних точках	
6	Вибрати найбільше і найменше значення на відрізку	

За допомогою "прикладу 8" розглянемо варіант заповнення картки (Таблиця 10).

Приклад 8. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на відрізку $[-1; 1]$

№	Послідовність дій	Результат виконання дій
1	Знайти похідну функції	$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2)$
2	Знайти область визначення похідної функції	$D(f'(x)) = \mathbb{R}$
3	Прирівняти похідну до нуля	$f'(x) = 0$, при $x = 0; \pm 2$
4	Вибрати точки, які входять у відрізок	$-1; 0; 1$
5	Знайти значення функції в даних точках	$f(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^2 - 9 = -16$ $f(0) = -9$ $f(1) = -16$
6	Вибрати найбільше і найменше значення на відрізку	$\max f(x) = f(0) = -9$ $\min f(x) = f(-1) = f(1) = -16$

Як бачимо, використання карток-консультантів дозволяє покроково виконувати необхідні дії, що значно полегшує учням класів процес розуміння і запам'ятовування потрібних алгоритмів. А також вчить аналізувати і коригувати власну діяльність учням, які не виявляють спеціального інтересу і схильностям до занять математикою

2.5 Аналіз і динаміка сформованості поняття похідної

Успішність засвоєння матеріалу залежить від того, наскільки добре учні орієнтуються в теоретичній базі, наскільки володіють деякими елементарними знаннями і вміннями.

У дослідженні взяли участь школярі м. Київ. Загальне число випробовуваних 26 осіб. Склад випробовуваних був обраний нами з урахуванням завдання нашого дослідження – перевірити ефективність запропонованої методики і виробити рекомендації по її практичному застосуванню. Аналіз результатів дослідження (Таблиця 11 і Рис 1.1.) показав, що учні найкраще засвоїли знання, отримані за допомогою карток-консультантів «знаходження похідної функції», «знаходження похідної функції*» і «написання рівняння дотичної». Найменший результат показали картки "застосування похідної до дослідження функцій" і "знаходження найбільшого і найменшого значень функції".

Таблиця 11. Відсоток (%) сформованості знань

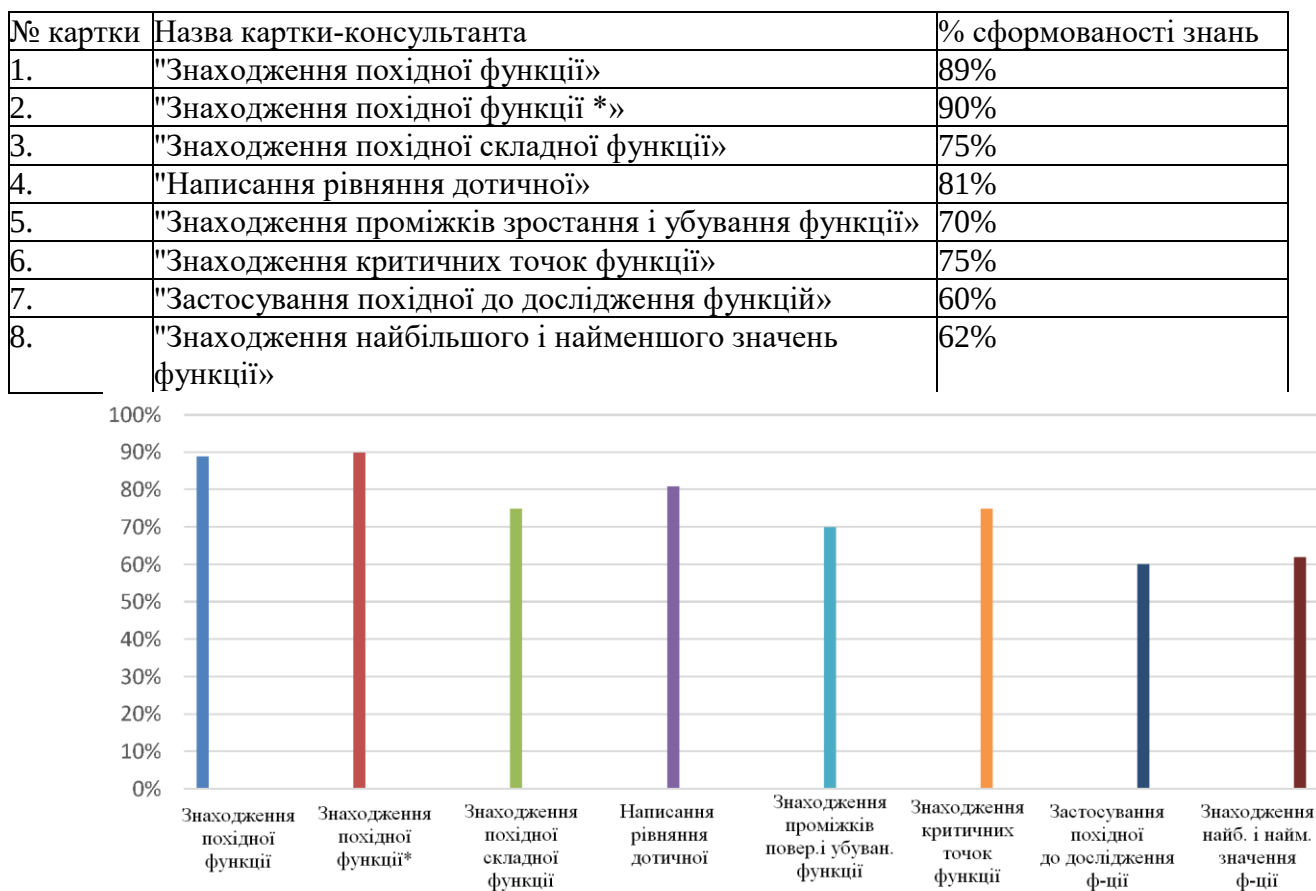


Рис 1.1. Відсоток (%) сформованості знань

Аналізуючи отримані дані, ми можемо зробити висновки що:

Учні добре запам'ятовують новий, середньої складності матеріал. Особливо їх зацікавлює початок вивчення теми. До завершення вивчення теми інтерес учнів значно зменшується, тому що зміст уроків стає більш насиченим математичними термінами і прийомами. Зменшення інтересу негативно позначається на засвоєнні матеріалу.

Рекомендації щодо практичного застосування методики: на завершальних етапах знайомства з темою основний матеріал уроку можна урізноманітнити творчої складової, а саме можна заздалегідь роздати картки-консультанти, попросити прикрасити їх на свій розсуд або навіть переробити на свій лад. Цей нестандартний метод дасть можливість учням фіксувати інформацію в комфортних для них умовах, що повинно позитивно позначитися на рівні уважності і як наслідок на якості засвоєння знань.

ВИСНОВОК

Таким чином, використання прикладних задач у навчанні алгебри та початкових курсів аналізу є ефективним засобом підвищення інтересу учнів до математики та розвитку їхніх практичних навичок. Це сприяє глибшому засвоєнню теоретичних знань, формуванню критичного мислення та здатності застосовувати математичні концепції у реальних життєвих ситуаціях. Особливо важливим є застосування таких підходів у класах природничого профілю, де учні мають можливість побачити практичну цінність математики у дослідженні природних явищ та процесів. Впровадження прикладних задач у навчальний процес сприяє формуванню у учнів навичок аналізу та розв'язання складних задач, що є важливими для їхнього подальшого навчання та професійної діяльності.

На сучасному етапі дедалі більше поширюється використання інтегрованих уроків та завдань, що сприяє міжпредметній взаємодії. Уроки з алгебри також не залишаються осторонь: доцільно залучати учнів до розв'язання задач із текстовими умовами, пов'язаними з географією, історією та іншими галузями знань.

Ми підготували добірку завдань, яка сприятиме підвищенню ефективності формування навичок розв'язання прикладних задач. Досвід показує, що учні із великим інтересом долучаються до таких вправ, проявляють кмітливість і творчу самостійність. Одним із важливих засобів організації цілеспрямованої та систематичної роботи є різноманітні задачі з логічним навантаженням. Виконуючи їх, учні засвоюють нові знання, прийоми розумової діяльності, закріплюють та вдосконалюють свої вміння і навички.

Отже, всі ці методи та підходи у процесі уроку алгебри сприяють реалізації однієї з головних цілей сучасного навчання — навчити учнів розв'язувати прикладні задачі, що є одним із ключових завдань учителя на цьому етапі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 From Plan to Market / World Development Report 1996? Published for the Work by Oxford University Press, p. 124-125.
- 2 Книга для вчителя математики: Довідково-методичне видання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, Н.П. Щекань. – Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. – 272 с.
- 3 Кондакова С., Мельник С. Ентропія як кількісна міра інформації // Математика в школі. – 2009. – № 4. – С. 27-31.
- 4 Концепція математичної освіти 12-річної школи: Проект // Математика в школі. – 2002. – № 2. – С. 12-17.
- 5 Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформ. зб. МОН України. – 2003. – № 24. – С. 32.
- 6 Швець В.О., Прус А.В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. – Житомир: Видавництво ЖДУ імені І.Франка, 2007. – 156 с.
- 7 From Plan to Market / World Development Report 1996? Published for the Work by Oxford University Press, p. 124-125
- 8 Андрущенко В. П. Роздуми про освіту: статті, нариси, інтерв'ю. 2-е вид. Київ : Знання України, 2008. 819 с
- 9 Бевз, Г. П. Алгебра: проб. підруч. для 7–9 кл. середньої школи / Г. П. Бевз. – К.: Освіта, 2001. – 303 с
- 10 Бойчук Ю. Д. Компетентнісний підхід як основа модернізації сучасної освіти. Освітній простір. Глобальні, регіональні та інформаційні аспекти : наук.-метод. журнал. Черновці : Черемош, 2013. Вип. 13. С. 130– 135
- 11 Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе. – 1992 – № 2 – С.40 – 43
- 12 Волошена В.В. Результати аналізу прикладної спрямованості сучасних підручників алгебри
<http://ipvid.org.ua/upload/iblock/2ce/2ce9de471aca4a059e40bf3d7b33e506.pdf>

- 13 Воронка Г. С. Дисципліни «ядрові» та елективні: фундаменталізація і гуманітаризація навчального процесу. Психологія і суспільство. 2015. № 4. С. 147–156
- 14 Герасимова І. Г. Гуманізація вищої освіти: досвід і проблеми. URL: <http://derun.vk.vntu.edu.ua/file/cbbdeb0c2e5f3d1518d52ce951847bef.doc>
- 15 Гулай О. І. Компетентнісний підхід як основа нової парадигми освіти. Вісник Національної академії Державної прикордонної служби України. 2009. № 2. С. 41–51.
- 16 Дзюбко Л. В. Мотивація навчальної діяльності як психологопедагогічна проблема / Л. В. Дзюбко, Л. І. Гриценко // Психодіагностика: Зб. 70 наук. праць ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державн. пед. ун-тет імені Григорія Сковороди». – Переяслав-Хмельницький : ПП «СКД», 2009. – Вип. 4. – 256 с. – С. 33–43.
- 17 Дуброва О.М. Навчальна мотивація як специфічний компонент навчальної діяльності / Вісник Черкаського університету: Педагогічні науки. Вип. 14.2016. С.30-37. 14. Закон України «Про освіту» <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>
- 18 Зязюн І. А. Філософія поступу і прогнозу освітньої системи / Ничкало Н. Г., Зязюн І. А., Пуховська Л. П., Гузій Н. В. Педагогічна майстерність: проблеми, пошуки, перспективи: монографія. Київ : Глухів : РВВ ГДПУ, 2005. С. 10–18.
- 19 Іванюк Т. Г. Групова форма роботи на уроках математики./ Тернопіль: Підручники й посібники, 2007. 87с.
- 20 Калашнікова С. А. Компетентнісно орієнтований підхід: базові поняття та положення. Педагогічна освіта: теорія і практика. Педагогіка. Психологія. 2010. № 1. С. 67–71.
- 21 Калугіна О. Р. Шляхи формування предметної компетенції на уроках математики. «Освітнянин», № 1, 2008. С.18-19
- 22 Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів: Частина друга. / Тернопіль: Підручники й посібники, 2007. 112с

- 23 Колесник, Т. В. Алгебра. 9 клас: для поглибленого вивчення : підруч. / Т. В. Колесник, Т. М. Хмара – К.: Пед. думка, 2008. – 246 с.
- 24 Компетентнісний підхід у сучасній освіті. Світовий досвід та українські перспективи / Під ред. О. В. Овчарук. К.: К. І. С., 2004. 112 с.
- 25 Кравчук, В. Алгебра: підруч. для 9 кл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г.Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2009. – 256 с.
- 26 Лосєва Н.М. Розвиток ідеї самореалізації особистості (філософський аспект) // Рідна школа. – 2004. – № 5. – С. 71-74.
- 27 Лук'янова М. Психологія навчальної мотивації школярів / М. Лук'янова // Відкритий урок: розробки, технології, досвід. – 2006. – №3/4. – С. 26–32.
- 28 Лусканова Н. Тест «Оцінка рівня шкільної мотивації»
https://infourok.ru/anketa_ocenka_urovnya_shkolnoy_motivacii_n.g.luskanovo_y374120.htm
- 29 Мальований, Ю. І. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосв. навч. закл. / Ю. І. Мальований, Г. М. Литвиненко, Г. М. Возняк / [за ред. Ю. І. Мальованого]. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2009. – 288 с.
- 30 Математика: алгебра і початки аналізу 11 клас (профільний рівень) / Нелін Є. П., Долгова О. Є. Вид-во: Ранок, 2019. 240с.
- 31 Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. Підручник для 11 класів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Х.: Гімназія, 2019. 208с.
- 32 Мерзляк, А. Г. Алгебра : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2019. – 320 с
- 33 Методика використання прикладних задач у шкільному курсі математики. Методичний посібник. /уклад. А.П.Корольок. – Рівне: РОІППО, 2018
- 34 <http://navigator.rv.ua/wp-content/uploads/2019/01/posibnykKorolyuk.pdf> 72
- 35 Навчальні програми. <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
- 36 Овсієнко Л. М. Сутність понять «компетенція», «компетентність», «компетентнісний підхід», «якість освіти» у світлі сучасної освітньої

- парадигми. Науковий вісник Донбасу. 2013. № 2. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvd_2013_2_32
- 37 Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
- 38 Савченко О. П. Компетентнісний підхід у сучасній вищій школі. Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку. 2010. Вип. 3. С. 16–23. URL : <http://intellect-invest.org.ua>
- 39 Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри та початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
- 40 Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с
- 41 Ткач, Ю. М. Задачі економічного змісту у шкільному курсі математики. Методичний посібник / Ю. М. Ткач . - Чернігів : ЧОІППО. - 2005. - 68 с. 73
- 42 Формування життєвих вмінь та навичок учнів на уроках математики шляхом використання прикладних задач. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja_zhittevikh_vmin_ta_navichok_uchniv_na_urok_akh_matematiki_shljakhom_vikoristannja_prikladnikh_zadach/1-1-0-1.
- 43 Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О.Швець // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 16-23.
- 44 Шкіль, М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К. : Зодіак-Еко, 2015. – 384 с.

- 45 Штефан Л. В., Нечіпор С. В. До питання компетентнісного підходу в професійній освіті. Педагогіка і психологія професійної освіти. 2010. № 3. С. 22-28.
- 46 Ярхо Т.О. Теоретичні і методичні основи фундаменталізації математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю у вищих навчальних закладах. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора педагогічних наук, Харків 2017. 618с
- 47 Соколенко Л.О. Про необхідність створення системи прикладних задач природничого характеру для профільного навчання математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний зб.наук.робіт. – Донецьк, 2005. – Вип. 24. – С. 218-222.
- 48 Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 248 с.
- 49 Соколенко О.І., Соколенко Л.О. Особливості викладання вищої математики на природничих факультетах вищих навчальних закладів // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Вип. 19. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2003. – С. 85-87.
- 50 Мірецька Л. Семінар з алгебри на тему: „Показникова і логарифмічна функції в природі, науці, техніці, мистецтві” (10-11 класи) // Математика в школі. – 2005. – № 10. – С. 21-27; 2006. № 1. – С. 32-36.