

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

**МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ У
ПРОЦЕСІ РОБОТИ З ЧИСЛОВИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ В
КЛАСАХ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОФІЛЮ**

Кваліфікаційна робота студентки групи
МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Сухобрус Зої Сергіївни
Керівник: кандидат педагогічних наук,
доцент Бобилев Д. Є.

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Сухобрус Зоя Сергіївна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

Зміст

Вступ	3
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування дослідницьких умінь учнів у процесі роботи з числовими послідовностями в класах математичного профілю.....	5
1.1. Психолого-педагогічні аспекти розвитку дослідницьких умінь у старшокласників.	5
1.2. Поняття «Числові послідовності» у шкільній математиці.	11
1.3. Формування дослідницьких вмінь під час вивчення числових послідовностей в класах математичного профілю.....	28
Висновок до розділу 1.....	38
РОЗДІЛ 2. Методичні підходи до формування дослідницьких умінь учнів у процесі роботи з числовими послідовностями в класах математичного профілю.....	40
2.1. Методичні особливості організації дослідницької діяльності учнів у процесі роботи з числовими послідовностями.....	40
2.2. Завдання дослідницького характеру для використання в навчальному процесі в класах математичного профілю.....	49
2.3 Розробка модельної навчальної програми вибіркового курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка».....	60
Висновок до розділу 2.....	71
ВИСНОВКИ	72
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	74

Вступ

Актуальність теми.

Державний стандарт базової середньої освіти та концепція «Нова Українська Школа» наголошує на тому, що сучасна освіта має формувати в учнів не лише систему знань, а й уміння їх застосовувати в нестандартних ситуаціях для розв'язання навчальних та життєвих проблем. Учень має отримати достатню базу знань і вміти використовувати вже відомі факти, знаходити та піддавати аналізу нову інформацію, розвивати вміння висувати гіпотези та здійснювати їх доведення. Ці складові входять до дослідницького вміння. Адже саме вміння досліджувати формує підґрунтя для подальшої успішної наукової та професійної діяльності.

Розділ «Числові послідовності» шкільного курсу математики має передумови для успішної реалізації формування дослідницьких вмінь, але на даному етапі бракує системного підходу. Навчання даної теми обмежується лише репродуктивним рівнем засвоєння матеріалу, без залучення до активного дослідження послідовностей навіть для учнів поглибленого вивчення математики.

Аналіз підручників та навчально-методичних матеріалів дає можливість стверджувати, що для даної теми майже відсутні завдання дослідницького характеру. Такий підхід унеможлиблює формування дослідницьких умінь під час вивчення теми, оскільки учні позбавлені можливості самостійного пошуку закономірностей, постановки та перевірки гіпотез. У цьому контексті, вважаємо доцільним розробити завдання, які будуть цікавими, формувати в учнів інтерес до дослідження що, в свою чергу, сприятиме формуванню дослідницьких вмінь.

Саме це обумовлює актуальність дослідження методики формування дослідницьких вмінь на прикладі теми «Числові послідовності».

Магістерська робота присвячена теоретичному обґрунтуванню та практичній реалізації формування дослідницьких вмінь в учнів математичного профілю під час роботи з числовими послідовностями.

Мета дослідження полягає в теоретичному обґрунтуванні та розробці методики формування дослідницьких умінь учнів у процесі вивчення числових послідовностей у класах математичного профілю.

Основними **завданнями** дослідження є:

- 1) З'ясувати сутність та структуру дослідницьких умінь учнів, охарактеризувати їх роль у формуванні математичної компетентності.
- 2) Провести логіко-математичний аналіз навчального матеріалу з теми «Числові послідовності»
- 3) Визначити дидактичні умови ефективного формування дослідницьких умінь учнів під час роботи з числовими послідовностями.
- 4) Розробити методичні рекомендації формування дослідницьких умінь у процесі вивчення теми «Числові послідовності» в класах математичного профілю.

Об'єкт дослідження: процес навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Предметом дослідження є методика формування дослідницьких умінь учнів у процесі вивчення числових послідовностей у класах математичного профілю.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано комплекс **методів дослідження**: теоретичні – вивчення, аналіз, порівняння, конкретизація та узагальнення змісту наукової літератури; емпіричні – спостереження, розв'язування задач.

Структура роботи підпорядкована логіці викладу матеріалу, тому складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування дослідницьких умінь учнів у процесі роботи з числовими послідовностями в класах математичного профілю.

1.1. Психолого-педагогічні аспекти розвитку дослідницьких умінь у старшокласників.

У сучасній психолого-педагогічній літературі поняття «уміння» розглядають як важливий компонент навчальної діяльності, адже саме в цьому понятті відображається процес використання отриманих знань, набутого досвіду на практиці. Гончаренко С. розглядає «уміння» як здатність належно виконувати певні дії, яка заснована на доцільному використанні набутих знань та навичок [6]. Бабанський Ю. під поняттям «уміння» розуміє усвідомлене оволодіння прийомами діяльності [10]. Підласий І. підкреслює, що «уміння» є не лише інтелектуальною, а й практичною категорією, оскільки вони відображають готовність діяти у нестандартних умовах та орієнтуватися у нетипових ситуаціях [10]. Савченко О. трактує уміння як свідоме застосування знань, що передбачає певний рівень самостійності [11]. Отже, узагальнюючи підходи, у контексті нашого дослідження, «уміння» трактуємо як здатність особистості свідомо самостійно застосовувати знання і способи діяльності, для розв'язування навчальних та практичних завдань.

Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти та концепцією «Нова Українська Школа» сучасна школа має формувати в учнів не лише систему знань, а й уміння їх застосовувати в нестандартних ситуаціях для розв'язання навчальних та життєвих проблем [7,8]. Концепція Нової української школи наголошує, що наскрізні вміння разом із ключовими компетентностями створюють основу для успішної самореалізації здобувача освіти як особистості, громадянина і фахівця [9, с.93]. До наскрізних вмінь, тобто таких базових навичок, які має опанувати учень за системою НУШ, відносять читання з розумінням; уміння висловлювати власну думку усно й письмово; критичне та системне мислення; здатність логічно обґрунтовувати позицію; творчість; ініціативність; вміння конструктивно керувати емоціями;

вміння оцінювати ризики та приймати рішення; вміння розв'язувати проблеми; здатність співпрацювати з іншими людьми. Ці вміння є наскрізними, оскільки формуються і розвиваються протягом вивчення всіх предметів та є основою для становлення ключових компетентностей. В свою чергу серед ключових компетентностей, визначених концепцією НУШ, виокремлюють: вільне володіння державною мовою, здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами, математична компетентність, компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій, інноваційність, екологічна компетентність, інформаційно-комунікаційна компетентність, навчання впродовж життя, громадянські та соціальні компетентності, культурна компетентність, підприємливість і фінансова грамотність[9].

Таким чином, вміння, які є основою для формування ключових компетентностей разом утворюють підґрунтя для успішної самореалізації учня. У контексті навчання математики розвиток в учнів вмінь, які сприяють інтеграції розумового, практичного та творчого компоненту навчальної діяльності набуває важливого значення. Процес навчання математики передбачає не лише засвоєння основних концепцій та алгоритмів, а й формування здатності аналізувати математичні закономірності та усвідомлювати їх практичне значення в різних сферах життєдіяльності. Що в свою чергу вимагає від учнів не лише відтворення отриманих знань, а й здатність до пізнавальної активності. Саме тому актуальності набуває формування в учнів дослідницьких вмінь, які забезпечують перехід від пасивного засвоєння інформації до активної пізнавальної діяльності.

Українська дослідниця Недодатко Н. визначає «дослідницькі вміння» як складне психічне утворення, що являє собою синтез інтелектуальних, практичних дій, а також самоорганізації та самоконтролю, засвоєних та закріплених у способах діяльності [12]. Це утворення забезпечує готовність школяра до пізнавального пошуку і формується в результаті цілеспрямованого управління навчально-дослідницькою діяльністю учнів. Нікітіна О.

характеризує пошукові (дослідницькі) вміння як здатність самостійно висувати ідеї, знаходити спосіб дії, застосовувати знання з різних галузей; самостійно знаходити відсутню інформацію в інформаційному полі; формулювати гіпотези і встановлювати причинно-наслідкові зв'язки [13]. Савченко О. підкреслювала важливу роль пізнавальної самостійності учнів, розглядаючи їх як ефективний засіб, що сприяє глибшому осмисленню навчального матеріалу та формуванню пізнавального інтересу, що, в свою чергу, створює підґрунтя для розвитку дослідницьких умінь. Отже, поняття «дослідницькі вміння» часто трактується як характеристика пізнавальної активності.

У цьому контексті поняття пізнавальної активності розглядається низкою вітчизняних педагогів як основа для формування дослідницьких умінь. У своїх дослідженнях, українська педагогиня Лозова В. визначає «пізнавальну активність» як властивість особистості, яка проявляється у ставленні до пізнавальної діяльності та передбачає готовність та бажання до самостійної діяльності індивіда, яка спрямована на засвоєння соціального досвіду [14, с.25]. Лозова В. в своїх працях розглядає активність як рису особистості та як широку категорію, що включає в себе діяльність. Показником активності дослідниця вважає ініціативність. У своїх працях визначає поняття «пізнавальна активність» близьке за змістом до понять «цікавість» та «допитливість». Українська педагогиня Марусинець М. зазначає, що пізнавальна активність це природний прояв зацікавленості дитини до навколишнього середовища, який характеризується інтересом[15].

Отже, розвиток дослідницьких умінь неможливий за відсутності зацікавленості учня пізнавальною діяльністю. Пізнавальна активність виступає рушійною силою для процесу дослідження, адже саме інтерес мотивує до пошукової діяльності. Дослідницьких умінь та пізнавальна активність взаємопов'язані, а саме активність, цікавість є передумовою формування дослідницьких умінь, але успішне застосування дослідницьких

вмінь посилює пізнавальний інтерес, оскільки зміцнює впевненість у власних можливостях.

Розглянемо структуру дослідницьких вмінь. За компонентами психічної діяльності Недодатко Н. в своїх дослідженнях виокремлює у структурі навчально-дослідницьких вмінь інтелектуальний компонент, практичний компонент та компонент самоорганізації (самоконтролю) [17]. Розглянемо кожен компонент детальніше. Інтелектуальний компонент передбачає використання набутих знань, вміння порівнювати, узагальнювати й систематизувати інформацію, описувати об'єкти, що вивчаються чи спостерігаються, здійснювати висновок. До цього компоненту також належить встановлення причинно-наслідкових зв'язків, вміння постановити проблему й висунути гіпотезу її можливого вирішення, здійснювати пошук й використовувати аналогії, робити дедуктивні висновки й здійснювати доведення. Використання навчальної, а також додаткової літератури, підбір матеріалів та приладів для експерименту, процес дослідження та оформлення результату відносять до практичного компоненту. Самоорганізація передбачає процес планування роботи, вчасне виконання всіх поставлених завдань та самоперевірку отриманих результатів.

Г. Ягенська та А. Степанюк в своїх працях виокремлюють вміння, які необхідні для організації дослідницької діяльності :

- вміння організувати та виконати планування роботи;
- вміння та знання дослідницького характеру(вміння обрати тему та вибудувати структуру дослідження);
- вміння працювати з інформацією;
- вміння презентувати результат своєї роботи;
- оцінні вміння (вміння здійснити аналіз своєї діяльності)[18].

Запропоновані класифікації демонструють багатшаровість дослідницьких вмінь та необхідність їх формування в навчальному процесі.

Згідно з Державним стандартом профільної середньої освіти (2024) [19], результати навчання здобувачів освіти визначають на основі

компетентнісного підходу. Однією з ключових компетентностей є математична, що передбачає не тільки здатність розвивати та застосовувати математичні знання і методи для розв'язання завдань, а й вміти їх застосувати у повсякденному житті, змодельовати процеси і ситуації із застосуванням математичного апарату та мати усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини.

Головань М.С. вважає, що математичну компетентність, як інтегративне утворення особистості, можна розглядати за наступною структурою:

- мотиваційний компонент;
- когнітивний компонент;
- діяльнісний компонент;
- ціннісно-рефлексивний компонент;
- емоційно-вольовий компонент.

Виокремлені структурні компоненти мають тісний зв'язок собою [28, с.37].

Вимоги до обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти в математичній освітній галузі зазначені в додатку 8 і передбачають, що здобувач освіти вміє дослідити ситуацію та вміє виокремлювати проблему, яку можна розв'язати із застосуванням математичних методів; моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблемних ситуацій; критично оцінює процес і результат розв'язання проблемних ситуацій; розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою [19]. Що в свою чергу має спільне з структурою дослідницьких вмінь, тобто дослідницькі вміння мають важливу роль у формуванні математичної компетентності.

Особливого значення формування дослідницьких вмінь набуває в учнів старшої школи, адже саме під час цього віку учні опановують профільні дисципліни на поглибленому рівні та починають підготовку до вступу у ВНЗ. Учні старших класів володіють достатньою базою знань що створює

сприятливі умови для впровадження в навчальну діяльність методів та прийомів які передбачають розвиток самостійного наукового пошуку.

У процесі формування дослідницьких умінь старшокласників ключову роль відіграє вчитель. Саме від педагога залежить створення проблемного середовища, яке стимулює пізнавальну активність, що в свою чергу допомагає формувати дослідницькі вміння. Недодатко Н. та Коваленко Г процес розвитку дослідницьких вмінь спрямований на вирішення навчально-дослідної задачі поділяють на чотири основних етапи:

- 1) створення мотивації
- 2) постановка проблеми
- 3) розв'язування дослідницької задачі
- 4) підведення підсумків [16, с.18].

Охарактеризуємо кожний етап. Перший етап передбачає викликання створення подиву в учнів, бажання досліджувати. Створення мотивації є першим і обов'язковим завданням від вчителя в організації навчально-дослідницької діяльності. Другий етап має на меті усвідомлення учнями змісту задачі, активізувати психічну діяльність через виділення ключових слів, розкриття суті понять, постановку питань, що вимагають проведення розумового експерименту, висунення гіпотези та її обґрунтування. Домогтися цього можна завдяки виділенню ключових слів, які є орієнтирами у розв'язанні задачі й сприяють правильному розумінню умов та знаходженню зони можливого рішення; розкриттю суті понять безпосередньо в умові задачі; пропонуванню скороченого формулювання задачі, яке виражає її суть тощо. Під час третього етапу вчителю важливо підтримувати активність учнів в пошуку рішення через організацію «мозкового штурму», висунення учнями проектів, гіпотез та їх захисту, контроль за самоорганізацією діяльності. Четвертий етап – етап підведення підсумків навчально-дослідницької діяльності, на якому важливо, щоб учні усвідомили свої успіхи і недоліки в навчально-дослідницькій діяльності.

Отже, у контексті нашого дослідження успішний процес формування дослідницьких вмінь в старшокласників можливий за наявності наступних дидактичних умов:

- 1) Сформованість міцної бази знань з математики та оволодіння основними способами діяльності.
- 2) Забезпечення зацікавленості учнів темою дослідження, а саме показ практичної цінності математики та можливості застосування знань у реальному житті.
- 3) Створення проблемних ситуацій; поступового ускладнення дослідницьких завдань, переходу від роботи за зразком до самостійного наукового пошуку.

1.2. Поняття «Числові послідовності» у шкільній математиці.

Попереднє ознайомлення з поняттям послідовності відбувається ще на уроках геометрії, при вивченні понять що мають послідовну природу, наприклад, вивчення багатокутників. Здобувачі освіти ознайомлюються з послідовним зростанням кількості сторін: від трикутника до чотирикутника, п'ятикутника і так далі. Під час спостереження закономірностей змін, а саме як змінюється сума внутрішніх кутів багатокутника в залежності від його сторін, учні фактично працюють з числовою послідовністю вже в 8 класі. Теорема про суму кутів опуклого n -кутника стверджує, що сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$, де n – це кількість сторін [2, с.174]. Це дає можливість сформувати послідовність: $180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, 720^\circ, \dots$, що відповідає геометричній фігурі (трикутнику, чотирикутнику, п'ятикутнику, шестикутнику). Таким чином учням інтуїтивно демонструється ідея впорядкованих чисел, що є основою для вивчення послідовностей в подальшому вивченні математики.

У курсі алгебри також трапляються ситуації, коли учні ще не знаючи означення числової послідовності фактично працюють з нею. Наведемо приклад використання числової послідовності під час роботи на уроках алгебри. Якщо учням запропонувати обчислити значення виразу 2^n , де $n \in$

N, під час вивчення теми «Степінь натурального числа з натуральним показником» у 5 класі учні отримують послідовність чисел: 2, 4, 8, 16, 32, Хоч здобувачі освіти ще не знайомі з поняттям геометричної прогресії, але вже працюють з послідовністю чисел, де кожен наступний член у 2 рази більший за попередній. Таким чином поступово демонструється ідея впорядкованості чисел, ще до чіткого означення послідовності, що створює можливості для більш глибокого та логічного опанування теми в старшій школі.

Станом на 2025 рік тема «Числові послідовності» в шкільному курсі математики вивчається починаючи з 9 класу на уроках алгебри, що передбачено чинною навчальною програмою [1, с.28].

Проведемо аналіз викладу матеріалу діючих підручників автора О. Істера та А. Мерзляка. Під час аналізу підручників з алгебри для 9 класу виявили, що подача матеріалу з теми «Числові послідовності» має суттєві відмінності залежно від рівня навчання та методичних підходів авторів. О. Істер починає з інтуїтивних прикладів, зокрема послідовності парних чисел, поступово вводячи терміни «член послідовності», « n -й член», «наступний» і «попередній» член, а також відповідне позначення. У такий спосіб учні ознайомлюються з формальним записом послідовності та отримують приклади формул загального члена. Основна увага в підручнику зосереджена на закріпленні базового понятійного апарату та підготовці до подальшого вивчення арифметичної й геометричної прогресій. Вправи підручника здебільшого мають тренувальний характер і спрямовані на відпрацювання навичок знаходження загального члена, встановити чи є число членом певної послідовності та продовження заданої послідовності, суму n перших членів послідовності. Велика кількість завдань приділена поняттям арифметичної та геометричної прогресій.

Натомість у підручнику А. Мерзляка для поглибленого вивчення математики простежується більш системний і розгорнутий підхід. Автор також починає з простих прикладів, а саме:

1, 2, 3, 4, 5 ... – послідовність натуральних чисел;

2, 4, 6, 8, 10 ... – послідовність парних чисел;

19, 38, 57, 76, 95 ... – послідовність двоцифрових чисел, кратних 19.

Та поступово вводить наступні поняття. Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n , ..., утворюють послідовності[3, с.317]. Об'єкти, які утворюють послідовність, називають членами послідовності. Якщо член послідовності має номер n , то його називають n -м членом послідовності. Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають числовою. Послідовності бувають скінченими і нескінченими. Наприклад, послідовність непарних натуральних чисел – це нескінчена послідовність, а послідовність двоцифрових чисел кратних 15, – це скінчена послідовність.

Вже на початковому етапі проводить паралель між поняттями «функція» та «послідовність». В підручнику це показано наступним чином. Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел або множина n перших натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ або скінченну послідовність $f(1), f(2), \dots, f(n)$ [3, с. 317]. Таким чином нескінченна послідовність це функція, областю визначення якої є множина $\mathbb{N}$, а скінченна послідовність, що складається з n членів, — це функція, область визначення якої це множина n перших натуральних чисел.

Наприклад, якщо будемо розглядати на множині натуральних чисел функції $y = x^2$ то отримаємо послідовність квадратів натуральних чисел, тобто 1, 4, 9, 16, 25,

Наголошується, що будь-яка функція з областю визначення на множині натуральних чисел задає послідовність, що формує у здобувачів освіти цілісне уявлення про взаємозв'язки математичних об'єктів. Такий підхід є характерним для профільного рівня, оскільки він не лише пояснює окремі випадки, а й закладає фундамент для подальшого вивчення елементів математичного аналізу.

Відрізняється різноманітність способів задання послідовностей у підручнику авторів. Відомо, що функція може задаватися, наприклад, аналітично, таблицею, графічно тощо. Числову послідовність теж можна задавати різними способами. О. Істера основну увагу зосереджує на аналітичному способі, тобто способі при якому вказують формулу її n -го члена, інші розглядаються оглядово. А. Мерзляк детально розглядає також описовий, табличний, аналітичний і рекурентний способи. Описовим називають спосіб, якщо правило описано словами[3, с.318]. Якщо послідовність є скінченною, то її можна задати за допомогою таблиці[3, с.318]. Спосіб задання послідовності за допомогою початкових умов і рекурентної формули називають рекурентним способом задання послідовності. Під рекурентною формулою розуміють таку формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів[3, с.318]. Варто зазначити, що А. Мерзляк додатково розглядає послідовність яка має назву числа Фібоначчі показуючи процес утворення, формулу, вигляд, властивості та наводить приклади застосування в реальних ситуаціях. Особливе значення має введення рекурентних співвідношень (наприклад, у задачах із послідовністю Фібоначчі), адже це відкриває для учнів ширші можливості для дослідницької діяльності. В свою чергу О. Істер просто згадує про існування чисел Фібоначчі та загальний вигляд цієї послідовності.

Крім того, у підручнику А. Мерзляка більше уваги приділяється дослідженню властивостей послідовностей. Деякі завдання виходять за межі простого обчислення і мають дослідницький характер, що сприяє розвитку логіко-математичного мислення. У порівнянні з цим, у підручнику О. Істера такі аспекти розглядаються менш системно, що зумовлює прикладний і базовий характер подачі матеріалу.

Отже, можна зробити висновок, що підручник О. Істера забезпечує необхідний мінімум знань про числові послідовності. Водночас підручник А. Мерзляка, орієнтований на поглиблене вивчення, створює умови для глибшого розуміння та дослідження властивостей послідовностей, що

значною мірою сприяє формуванню дослідницьких умінь старшокласників. Саме методичний підхід А. Мерзляка відповідає завданням профільного навчання і забезпечує формування математичних компетентності учнів.

З огляду на переваги підручника А. Мерзляка щодо системності викладу та дослідницькій спрямованості завдань, наступним кроком нашого дослідження стане логіко-математичний аналіз з теми «Числові послідовності» за цим підручником.

Логіко-математичний аналіз теми:

«Числові послідовності»

ВИТЯГ З ПРОГРАМИ:

Таблиця 1.2.1

Тема 6. ПОСЛІДОВНОСТІ 32 годин	
Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей. Формула n-го члена. Рекурентний спосіб задання послідовностей. Арифметична і геометрична прогресії та їх властивості. [Знаходження суми n перших членів деяких послідовностей]. Формули n -го члена і суми n перших членів прогресій. Нескінченна геометрична прогресія. Уявлення про границю послідовності. Метод математичної індукції та його застосування	Учень/учениця: пояснює: способи задання числових послідовностей, метод математичної індукції, поняття суми нескінченної геометричної прогресії ($q < 1$); формулює означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій; доводить: властивості арифметичної та геометричної прогресій, формули n-го члена і суми n перших членів арифметичної та геометричної прогресій; розв'язує вправи, що передбачають: знаходження членів прогресії, задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними, обчислення сум перших n членів арифметичної та геометричної прогресій, запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного, використання формул n-го члена і суми n перших членів прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій, використання методу математичної індукції

На основі витягу з програми проведемо логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу. Визначимо нові поняття, факти та способи діяльності та базові знання які вже мають учні.

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

Таблиця 1.2.2

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Послідовність, члени послідовності, числова послідовність, скінченна послідовність, нескінченна послідовність, задана послідовність, способи задання (описовий, табличний, аналітичний, рекурентний), стаціонарна послідовність, рекурентна формула, числа Фібоначчі, арифметична прогресія, різниця арифметичної прогресії, геометрична прогресія, знаменник геометричної прогресії, границя послідовності, збіжна послідовність, сумування перших n членів послідовності	формулою n -го члена арифметичної прогресії, теорема про характеристичну властивість арифметичної прогресії, формула суми n перших членів арифметичної прогресії, формулою n -го члена геометричної прогресії, теорема про характеристичну властивість геометричної прогресії, формула суми n перших членів геометричної прогресії, формула суми нескінченної геометричної прогресії	знаходження членів прогресії, задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними, обчислення сум перших n членів арифметичної та геометричної прогресій, запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного, використання формул n -го члена і суми n перших членів прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій, використання методу математичної індукції
Базові	Функція, область визначення функції, множина, середнє	Властивості степенів, Властивості натуральних чисел	Розв'язування рівнянь, Спрощення алгебраїчних виразів,

	арифметичне, нерівність, натуральні числа.		Виконання дій зі степенями
--	--	--	-------------------------------

Проведемо аналіз понять взятих з підручника. Сформулюємо означення, його вид та характеристичні властивості.

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Таблиця 1.2.3

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристична властивість
Послідовність	Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ..., утворюють послідовність.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: нумерація об'єктів натуральними числами в порядку зростання
члени послідовності	Об'єкти, які утворюють послідовність, називають членами послідовності.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: елементи, що входять до складу послідовності
числова послідовність	Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають числовою.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: всі члени послідовності є числами
скінченна послідовність	Послідовність, що складається зі скінченної кількості членів.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: має скінченну кількість елементів
Нескінченна послідовність	Послідовність, що складається з нескінченної кількості членів.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: кількість елементів нескінченна
задана послідовність	Послідовність вважають заданою, якщо вказано правило, за допомог	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість:

	ою якого можна знайти будь-який її член.	наявність правила для знаходження будь-якого члена
Описовий спосіб задання	Якщо правило описано словами, то такий спосіб задання послідовності називають описовим.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: словесний опис правила
Табличний спосіб задання	Якщо послідовність є скінченною, то її можна задати за допомогою таблиці.	Описове, словесне, , через найближчий рід. Істотна властивість: представлення у вигляді таблиці
аналітичний спосіб задання	Послідовність задана за допомогою формули.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: використання формули
стаціонарна послідовність	Послідовність, усі члени якої рівні, називають стаціонарною.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: всі члени однакові
рекурентна формула	Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають рекурентною формулою	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: вираження через попередні члени
числа Фібоначчі	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Члени цієї послідовності називають числами Фібоначчі.	Описове, словесне через перелік, просте. Істотна властивість: кожен член дорівнює сумі двох попередніх
Арифметична прогресія	Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: постійна різниця між сусідніми членами
Різниця арифметичної прогресії	Число, про яке йдеться в означенні, дорівнює різниці наступного й попереднього членів послідовності	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: стала величина

	називають різницею арифметичної прогресії та позначають буквою d	
геометрична прогресія	Геометричною прогресією називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.	Описове, словесне, складене, через найближчий рід. Істотна властивість: постійне відношення між сусідніми членами
знаменник геометричної прогресії	Число, про яке йдеться в означенні, дорівнює відношенню наступного й попереднього членів послідовності називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: стає число відношення
границя послідовності	Випишемо кілька перших членів цієї послідовності: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$ Говорять, що зі збільшенням номера n члени послідовності (a_n) прямують до числа 1. Інакше кажучи, зі збільшенням номера n різниця $a_n - 1$ стає все меншою та меншою. Наприклад, $a_n - 1 < 0,1$ при $n \geq 10$, $a_n - 1 < 0,0001$ при $n \geq 10000$ і т. д. Узагалі, починаючи з де якого номера n різниця $a_n - 1$ може стати меншою від будьякого наперед за даного додатного числа. У цьому разі говорять, що число 1 є границею послідовності a_n, і записують: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$	Описове, словесне та символічне, складене.

збіжна послідовність	Послідовність, яка має границю, називають збіжною.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: існування скінченної границі
сумування перших n членів послідовності	Знаходження формули n -го члена послідовності називають сумуванням перших n членів послідовності.	Описове, словесне, просте, через найближчий рід. Істотна властивість: обчислення суми

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Таблиця 1.2.4

Поняття	Види вправ					
	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння текстового значення
Послідовність	30.1	30.1, 30.2	30.3	30.2	30.7, 30.8	30.1

Члени послідовності	30.1	30.2, 30.3	30.5, 30.6, 30.11, 30.12, 30.17	30.2, 30.3, 30.4	30.7, 30.8, 30.21, 30.22	30.1
числова послідовність	30.1	30.2, 30.3	30.29, 30.30	30.15, 30.16	30.15, 30.16	30.1
скінченна послідовність	30.1	—	30.13, 30.14	30.1, 30.13, 30.14	30.13, 30.14	30.1
Нескінченна послідовість	30.1	30.2, 30.3	30.23 – 30.27	30.2, 30.3, 30.7, 30.8,	30.7 – 30.10	30.1
задана послідовність	30.1	30.2, 30.3, 30.4	30.18, 30.19, 30.28	30.18, 30.19	30.20, 30.21, 30.22	—
Описовий спосіб задання	—	—	—	30.15, 30.16	30.15, 30.16	—
Табличний спосіб задання	—	—	—	30.15, 30.16	30.15, 30.16	—
аналітичний спосіб задання	—	30.2, 30.3, 30.4	30.18, 30.19, 30.28, 30.31	30.2, 30.3, 30.18, 30.19	30.20, 30.21, 30.22	—

стаціонарна послідовність	—	—	—	—	—	—
рекурентна формула	—	—	30.17– 30.19, 30.28	30.17, 30.9, 30.10	30.9, 30.10, 30.29	—
числа Фібоначчі	—	—	—	с. 369	—	—
Арифметична прогресія	31.1, 31.29, 31.30	31.2, 31.3, 31.4, 31.5	31.21, 31.22, 31.26, 31.27, 31.31, 31.32, 31.37, 31.43	31.6, 31.7, 31.8, 31.15, 31.16	31.9, 31.10, 31.15, 31.16, 31.33 – 31.41, 31.48 – 31.52	31.1
Різниця арифметичної прогресії	—	31.3, 31.4, 31.6, 31.7	31.11 – 31.14, 31.17, 31.23– 31.25, 31.28, 31.42, 31.46, 31.47	31.3, 31.4, 31.6, 31.7, 31.8	31.9, 31.10, 31.18, 31.19, 31.20,	—
геометрична прогресія	33.1, 33.29, 33.30	33.2, 33.3, 33.4, 33.5	33.21, 33.22, 33.26, 33.27, 33.31, 33.32,	33.6, 33.7, 33.8, 33.15, 33.16	33.9, 33.10, 33.15, 33.16, 33.33, –33.36,	33.1

			33.37, 33.43– 33.45		33.38 –33.52	
знаменник геометричної прогресії	—	33.3, 33.4, 33.6, 33.7	33.11– 33.14, 33.17, 33.23– 33.25, 33.28, 33.42, 33.46	33.3, 33.4, 33.6 – 33.8	33.9, 33.10, 33.18, 33.19, 33.20,	—
границя послідовності	—	—	35.18, 35.19	35.20, 35.21	—	—
збіжна послідовність	—	—	35.5, 35.6, 35.13, 35.18, 35.19	35.20 –35.23	—	—
сумування перших n членів послідовності	35.1, 35.2	35.3, 35.4, 35.7– 35.12	35.14 – 35.17, 35.22 –35.28	—	—	—

**Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника спрямованих на
формування способу діяльності**

Таблиця 1.2.5

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують	Відпрацювання операцій, які входять у	Застосування способу діяльності
-------------------------------	--	---	---------------------------------------

	способи діяльності	спосіб діяльності	
знаходження членів прогресії	30.1, 30.2, 30.3	30.4, 30.5, 30.6, 31.3, 31.4, 31.5, 33.2, 33.3, 33.5, 33.6, 33.7, 33.8	30.7, 30.8, 30.11, 30.12, 31.9, 31.10, 31.11, 31.12, 31.13, 31.14, 33.15, 33.16, 33.21, 33.22, 33.23, 33.24
задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними	31.1, 31.2, 33.1, 33.4	31.7, 31.23, 31.24, 33.13, 33.14, 33.33, 33.34	31.21, 31.36 – 31.43, 33.17, 33.18, 33.31 – 33.44
обчислення сум перших n членів арифметичної та геометричної прогресій	32.1, 32.2, 32.3, 34.1, 34.2	32.7 – 32.13, 34.3 – 34.8	32.4, 32.5, 32.6, 32.11, 32.14 – 32.52, 34.9 – 34.23, 35.1 – 35.4, 35.11 – 35.18, 36.1 – 36.11
запис періодичного десятичного дробу у вигляді звичайного	35.5, 35.6	35.7 – 35.12	35.13, 35.20, 35.21, 35.22, 35.23
використання формул n- го члена і суми n перших членів прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій	30.9, 30.10, 30.17	30.18, 30.19, 30.20, 30.21, 30.22, 31.8, 31.15, 31.16, 33.11, 33.12, 33.19, 33.20	30.23 – 30.31, 31.17 – 31.52, 33.26 – 33.30

використання методу математичної індукції	—	30.22 – 30.27	30.27 – 30.31
--	---	---------------	---------------

**Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури
формулювання математичного твердження**

Теорема про характеристичну властивість арифметичної прогресії

Таблиця 1.2.6

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Послідовність, яка містить більше двох членів, є арифметичною прогресією тоді й тільки тоді, коли кожний її член, крім першого (і останнього, якщо послідовність скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів.
2. Встановлення виду твердження	Просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Арифметична прогресія з трьома або більше членами
4. Виділення умови	Послідовність містить більше двох членів
5. Виділення вимоги	кожний її член, крім першого (і останнього, якщо послідовність скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо в послідовності кожний член (крім першого і останнього) дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх членів, то ця послідовність є арифметичною прогресією

Теорема про характеристичну властивість геометричної прогресії

Таблиця 1.2.7

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Послідовність (b_n) , яка містить більше двох членів і всі члени якої відмінні від нуля, є геометричною прогресією тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $n \geq 2$ виконується рівність $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$
2. Встановлення виду твердження	Просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Геометрична прогресія з трьома або більше ненульовими членами

4. Виділення умови	Послідовність містить більше двох членів і всі члени відмінні від нуля
5. Виділення вимоги	для будь-якого $n \geq 2$ виконується рівність $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо в послідовності ненульових чисел для будь-якого $n \geq 2$ виконується рівність $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, то ця послідовність є геометричною прогресією

Для кращого засвоєння теоретичної інформації учням варто подавати додатково структурно-логічну модель яка буде містити в собі основні поняття та факти теми.

Структурно-логічна модель, яка охоплює основні поняття теми

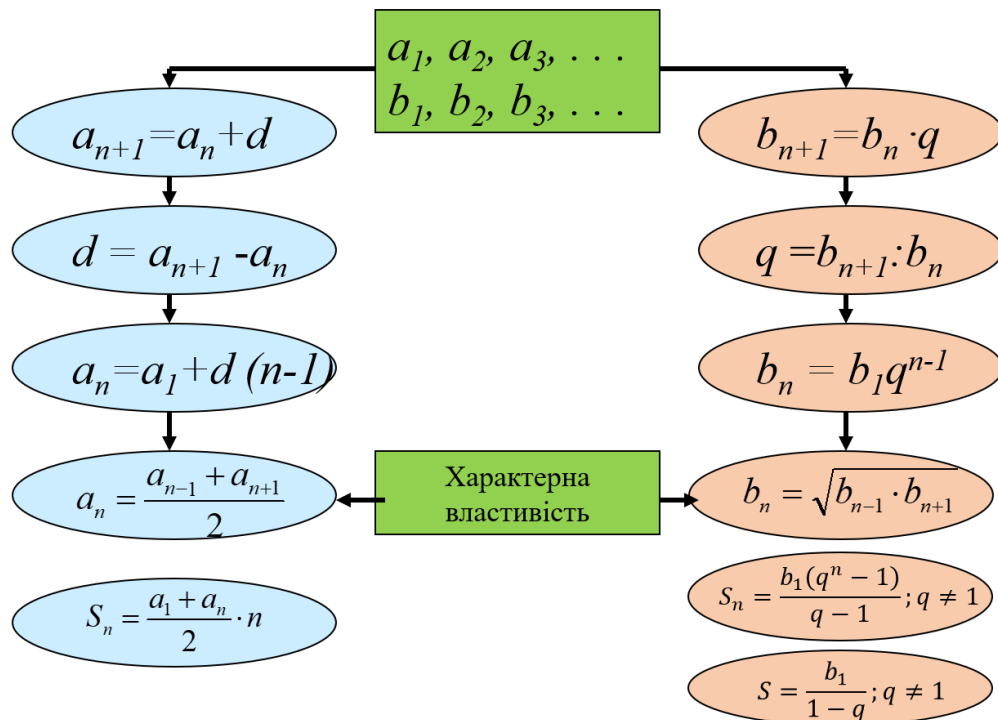
Таблиця 1.2.8



Структурно-логічна модель, яка охоплює основні факти теми

Схематичне представлення фактів теми (опорний конспект)

Таблиця 1.2.9



Логіко-математичний аналіз навчального матеріалу з теми «Числові послідовності» сприяє забезпеченню комплексного підходу до організації навчального процесу. Дозволяє забезпечити в учнів ґрунтовне опанування ключових теоретичних положень та формує вміння застосовувати знання під час розв’язування вправ. Методичне структурування навчального матеріалу та впорядкування системи вправ за певним видом діяльності створюють передумови для розвитку математичних компетентностей, а саме вміння будувати математичну модель, досліджувати її та інтерпретувати отриманий результат.

Отже, використання запропонованого підходу для організації навчальної діяльності створює можливість для подальшого формування дослідницьких вмінь, адже підхід сприяє сформованості бази знань та оволодінню основними способами діяльності.

1.3. Формування дослідницьких вмінь під час вивчення числових послідовностей в класах математичного профілю

Раніше було визначено, що тема «Числові послідовності» вивчається в 9 класі, вивчення навчально-методичної літератури та програми дають можливість стверджувати, що дев'ятикласники під час вивчення ознайомлюються з базовими поняттям та основними способами діяльності. Учні поглибленого вивчення математики опановують тему на вищому рівні порівняно з стандартом, але зміст обмежується переважно вивченням арифметичної та геометричної прогресій, їх властивостей та застосування у розв'язанні задач. Навіть враховуючи умови поглибленого вивчення дев'ятикласники не мають того рівня володіння знаннями, який дозволяє повною мірою здійснювати дослідницьку діяльність. Учні мають труднощі в формулюванні власних гіпотез, побудові складних доведень та встановлення міжпредметних зв'язків.

Натомість ми вважаємо, що тема «Числові послідовності» набуває нового змісту під час вивчення в старшій школі в класах математичного профілю, адже учні 10 класу вивчають границю та неперервність функції, похідну, що є елементами математичного аналізу. Послідовність можна вважати проміжною ланкою між алгеброю та початками аналізу, оскільки через них учень може усвідомити перехід від дискретних до неперервних процесів. З іншого боку у профільних класах вивчення математики збільшується кількість навчальних годин, що створює можливість для організації дослідницьких проєктів. Також учні профільних класів мають чітку мотивацію до поглибленого вивчення, оскільки планують продовжувати освіту у технічних, природничих або економічних напрямках, де знання про числові послідовності мають практичне застосування, що в свою чергу стимулює пізнавальну активність.

За допомогою структурованого подання матеріалу, а саме логіко-математичного аналізу теми «Числові послідовності» вчитель сформував міцну базу знань учнів та навчив виконувати основні способів діяльності що є

першою умовою для успішного формування дослідницьких вмінь. Наступною визначеною педагогічною умовою є забезпечення зацікавленістю учнів у процесі дослідження, а саме показ практичної цінності теми «Числові послідовності» та можливості застосування знань у реальному житті.

Особливе місце серед числових послідовностей посідають послідовність Фібоначчі та послідовність Люка. Ці послідовності є унікальними математичними об'єктами, які мають велику кількість властивостей та прикладів застосування у реальному житті, а саме в описі природних явищ, мистецтві та архітектурі

Числа Фібоначчі стали відомі європейським математикам і науковцям після публікації книги Леонарда Пізанського (Фібоначчі). Ця книга має назву «Liber abacci» («Книга про абак»). Вона вийшла друком в 1202 році.

«Liber abacci» це об'ємна праця, що містить майже всі арифметичні та алгебраїчні відомості того часу, яка відіграла помітну роль у розвитку математики в Західній Європі протягом кількох наступних століть. Зокрема, саме за цією книгою європейці познайомилися з вигаданою індійцями позиційною системою числення, відому зараз як арабські цифри [20]. Матеріал, що повідомляється в "Liber abacci", пояснюється на великій кількості задач, що становлять значну частину цього трактату.

В розділі XII трактату Леонардо Пізанський сформулював таку задачу про кроликів: «Дехто помістив пару кроликів в певному місці, відгородженому з усіх сторін стіною, щоб дізнатися, скільки пар кроликів народиться з цією умовою протягом року. При цьому природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує на світ другу пару, а народжують кролики з другого місяця після свого народження.»[21, с.22].

Якщо вважати першу пару кроликів новонародженою, то на другий місяць ми також матимемо 1 пару; на третій місяць – $1+1=2$; на четвертий місяць – $2+1=3$ пари (бо з двох наявних пар потомство дає лише одна пара); на п'ятий місяць – $3+2=5$ пар (лише 2 пари, що народилася на третій місяць, дадуть потомство на п'ятий місяць); на шостий місяць – $5+3=8$ пар (бо

потомство дадуть тільки ті пари, які народилися на четвертому місяці); на сьомий місяць – $8+5=13$ пар; на восьмий місяць буде $13+8=21$ пара; на дев'ятий місяць буде $21+13=34$ пари; на десятий місяць – $34+21=55$ пар; на одинадцятий місяць буде $55+34=89$ пар, а на останній місяць кількість пар кроликів буде $89+55=144$. Таким чином, відповіддю задачі буде 144 пари.

Побудуємо алгебраїчну модель даної задачі. Якщо позначити символом F_n число пар кроликів у відгородженому місці через n місяців, то дістанемо числову послідовність

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_{12} \quad (1.3.1)$$

де $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, \dots, F_{12} = 144$.

Згідно з умовою задачі про кроликів, кожен член цієї послідовності, починаючи з третього, дорівнює сумі двох її попередніх членів, тобто

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 1. \quad (1.3.2)$$

Варто зазначити, що послідовності такого виду називають рекурентною. Рекурентна послідовність це послідовність, яка задовольняє рекурентну формулу [22, с.213]. Зокрема, під рекурентною послідовністю розуміють послідовність $u_n (n \in \mathbb{N})$, що задовольняє рівність

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq 1). \quad (1.3.3)$$

Таку рекурентну послідовність також називають зворотною послідовністю, а число k – її порядком [22, с.213]. Рекурентне співвідношення (1.3.2) однозначно визначає послідовність (1.3.1), якщо задати початкові умови $F_1 = F_2 = 1$.

Зворотна послідовність, яка задана умовою $F_1 = F_2 = 1$ і формулою (1.3.2) називається послідовністю Фібоначчі, а члени послідовності – числами Фібоначчі.

Після ознайомлення з історією виникнення та практичними застосуваннями послідовності Фібоначчі, наступним кроком є систематичне дослідження її математичних властивостей. Робота з властивостями та процес доведення забезпечує формування дослідницьких вмінь. Розглянемо деякі з них.

Властивість 1.

Сума перших n чисел послідовності Фібоначчі дорівнює різниці числа з індексом $(n + 2)$ і 1, тобто

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Властивість 2.

Сума перших n чисел послідовності Фібоначчі з непарними номерами дорівнює числу з номером $2n$, тобто

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Властивість 3.

Сума перших n чисел послідовності Фібоначчі з парними номерами дорівнює різниці числа з індексом $(2n + 1)$ і 1, тобто

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Властивість 4.

Сума квадратів перших n чисел послідовності Фібоначчі дорівнює $F_n F_{n+1}$, тобто

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$$

Властивість 5.

Квадрат числа Фібоначчі дорівнює різниці добутків n -го члена на $(n + 1)$ – го члена послідовності і n – го члена на $(n - 1)$ – го члена послідовності, тобто

$$F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}$$

Властивість 6.

Число Фібоначчі з індексом $n + m$ дорівнює сумі добутків чисел Фібоначчі з індексами $n - 1$ на m і чисел з індексами n і $m + 1$, тобто

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}$$

Властивість 7.

Будь яке число з парним індексом $2n$ з послідовності Фібоначчі дорівнює добутку числа Фібоначчі з індексом n на суму його сусідніх чисел, тобто

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$$

Властивість 8.

Кожне число з парним індексом $2n$ дорівнює різниці квадратів його наступного та попереднього, тобто

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

Наступна властивість є дуже цікавою. Дивовижним чином числа Фібоначчі утворюються за формулою Біне. Формула отримала назву на честь французького математика Жака Філіпа Марі Біне [21, с.40]. Цікавим є те, що незважаючи на наявність ірраціонального числа формула надає цілі числа.

Властивість 9.

Числа Фібоначчі можна обчислити за формулою Біне:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Числа Фібоначчі тісно пов'язані з золотим перетином $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [23]. У математиці дві величини утворюють золотий перетин, якщо відношення їхньої суми до більшої величини дорівнює відношенню більшої до меншої [24]. Формула Біне виражає за допомогою ϕ значення F_n в явному вигляді як функцію від n :

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\phi - (-\phi)^{-1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}, (n \geq 1) \quad [23].$$

При цьому $\phi \approx 1.618$ і $(-\phi)^{-1} = 1 - \phi \approx -0.618$ є коренями квадратного рівняння $x^2 - x - 1 = 0$ [23]. З формули Біне випливає, що для всіх натуральних n , F_n є найближчим до $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ цілим числом [23].

Властивість 10.

Член послідовності F_n ділиться націло на F_m тоді і тільки тоді, коли n ділиться націло на m .

Властивість 11.

Для будь якого числа з послідовності Фібоначчі виконується таке, що для будь якого числа з індексом n виконується таке НСД $(F_{n-1}, F_n) = 1$ і НСД $(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Властивість 12.

НСД двох чисел Фібоначчі з індексами n та m є число Фібоначчі з індексом, який рівний НСД (n, m) , тобто $\text{НСД}(F_n, F_m) = F_{\text{НСД}(n, m)}$.

Важливо наголосити, що більшість властивостей послідовності Фібоначчі не є очевидними з її означення і потребують цілеспрямованого дослідження. Процес їх виявлення передбачає проведення обчислювального експерименту, спостереження закономірностей, формулювання гіпотез та їх подальше строге математичне доведення. Запропонована послідовність дій спонукає учнів до власного дослідження, формує необхідні вміння.

Розглянемо наступний вид послідовностей, а саме послідовність Люка.

Франсуа Едуард Анатоль Люка – видатний французький математик. Едуард Люк народився в Парижі у 1842 році в Ам'єні [25]. Едуард Люка першим звернув увагу та описав властивості чисел, згодом названими його ім'ям – чисел Люка. Вони є певною модифікацією послідовності Фібоначчі.

Послідовність, яка задана умовою $L_0 = 2, L_1 = 1$ і формулою $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, де $n > 1$ і $(n \in \mathbb{N})$ називається послідовність Люка, а члени послідовності – числами Люка [26]. Отже, послідовність чисел Люка виглядає наступним чином:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \dots$$

Бачимо, що правило, за яким знаходяться числа з послідовності Фібоначчі підходять також для пошуку чисел Люка, тобто кожен член послідовності є сумою двох попередніх. Ці математичні об'єкти створюють унікальні можливості для формування дослідницьких умінь через компаративний аналіз – метод порівняльного дослідження двох споріднених математичних об'єктів. Перейдемо до розгляду властивостей чисел Люка.

Властивість 1.

Сума перших n чисел послідовності Люка дорівнює різниці числа з індексом $(n+2)$ і 1, тобто

$$L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 1.$$

Властивість 2.

Сума всіх членів послідовності з парними індексами, починаючи з L_0 дорівнює сумі наступного члену послідовності з індексом $(2n+1)$ і 1, тобто

$$L_0 + L_2 + L_4 + \dots + L_{2n} = L_{2n+1} + 1.$$

Властивість 3.

Квадрат числа Люка дорівнює різниці добутків n -го члена на $(n+1)$ -го члена послідовності і n -го члена на $(n-1)$ -го члена послідовності, тобто

$$L_n^2 = L_n \cdot L_{n+1} - L_n \cdot L_{n-1}$$

Властивість 4.

Квадрат n -го числа Люка дорівнює сумі числа послідовності з індексом $2n$ і $2 \cdot (-1)^n$, тобто

$$L_n^2 = L_{2n} + 2 \cdot (-1)^n.$$

Властивість 5.

Число Люка з індексом mn дорівнює різниці добутків чисел Люка з індексами m на $m(n-1)$ і добутку $(-1)^m$ на число Люка з індексом $m(n-2)$, тобто $L_{mn} = L_m L_{m(n-1)} - (-1)^m L_{m(n-2)}$.

Властивість 6.

Добуток попереднього та наступного n -го числа Люка дорівнює різниці квадрату n -го числа Люка та $5 \cdot (-1)^n$, тобто

$$L_{n-1} L_{n+1} = L_n^2 - 5 \cdot (-1)^n.$$

Властивість 7.

Аналог формули Біне для знаходження чисел Люка є

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Розглянемо ще дві властивості суми чисел Люка.

Властивість 8.

$$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2}.$$

Властивість 9.

$$L_n + L_{n+4} = 3L_{n+2}.$$

Як було сказано вище, послідовність чисел Люка є певною модифікацією чисел Фібоначчі, тому мають багато подібних властивостей. Якщо при роботі з послідовностями Фібоначчі учні здійснювали наукове дослідження разом з вчителем, то перед вивченням послідовності Люка вони вже володіють необхідними знаннями для самостійного виявлення закономірностей. Тому доцільним є запропонувати виконати дослідження самостійно. Такий підхід розвиває уміння працювати за аналогією. Учні усвідомлюють, що знання структури властивостей одного об'єкта може слугувати орієнтиром для дослідження споріднених об'єктів, водночас розуміють необхідність критичної перевірки кожної аналогії. Після ознайомлення з властивостями обох послідовностей учням пропонується дослідницьке завдання вищого рівня складності: дослідити чи існують загальні властивості, які характерні одночасно для двох послідовностей; який саме зв'язок між ними.

Нагадаємо, що числа Фібоначчі визначаються рекурентно за формулою

$$F_n = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n = 0 \\ 1, \text{ якщо } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ якщо } n > 1 \end{cases}$$

в свою чергу, числа Люка визначаються рекурентно за формулою

$$L_n = \begin{cases} 2, \text{ якщо } n = 0 \\ 1, \text{ якщо } n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ якщо } n > 1. \end{cases}$$

Побудуємо таблицю, в якій відобразимо номер індексу та відповідно йому число Фібоначчі та число Люка.

Таблиця 1.3.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	...

Проаналізувавши таблицю, можна помітити зв'язок між числами Люка і Фібоначчі, а саме те, що число Люка з індексом n є сумою чисел з індексами $n - 1$ і $n + 1$ з послідовності Фібоначчі. Наприклад:

$$L_3 = F_2 + F_4,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 4.$$

Тому справедливою є формула $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

Аналогічним чином розглянемо та проаналізуємо чи число Фібоначчі з індексом n є сумою чисел з індексами $n - 1$ і $n + 1$ з послідовності Люка. Маємо:

$$F_3 \neq L_2 + L_4,$$

$$2 \neq 3 + 7.$$

Продовжимо дослідження, і отримаємо:

$L_1 = 1$ і $L_3 = 4$, тому їх сума буде дорівнювати 5, тоді як $F_2 = 1$;

$L_2 = 3$ і $L_4 = 7$, тому їх сума буде дорівнювати 10, тоді як $F_3 = 2$;

$L_3 = 4$ і $L_5 = 11$, тому їх сума буде дорівнювати 15, тоді як $F_4 = 3$;

$L_4 = 7$ і $L_6 = 18$, тому їх сума буде дорівнювати 25, тоді як $F_5 = 5$.

Маємо змогу спостерігати закономірність, відповідно виводимо формулу, що

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}.$$

Розглянемо деякі властивості, які упорядкував у своїй праці доктор Рон Кнотт [27]. Це перелік основних властивостей. Ефективним методичним прийомом стане пропозиція запропонувати учням його продовжити. Що в свою чергу відповідає третій дидактичній умові, а саме формування дослідницьких вмінь можливе, якщо вчитель створює проблемні ситуації, поступово ускладнює дослідницьке завдання, здійснюючі перехід від роботи за зразком до самостійного наукового пошуку.

Властивості для суми (різниці) двох чисел Фібоначчі.

Властивість 1.

$$F_{n+4} - F_n = L_{n+2}.$$

Властивість 2.

$$F_{n+6} + F_n = 2L_{n+3}.$$

Властивість 3.

$$2F_{n-1} + F_n = L_n.$$

Властивості для суми (різниці) двох чисел Люка.

Властивість 1.

$$L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}.$$

Властивість 2.

$$2L_n + L_{n+1} = 5F_{n+1}.$$

Властивість 3.

$$L_{n-2} - L_{n+2} = 5F_n.$$

Властивості для суми (різниці) чисел Фібоначчі і Люка.

Властивість 1.

$$F_n + L_n = 2F_{n+1}.$$

Властивість 2.

$$L_n + 5F_n = 2L_{n+1}.$$

Властивість 3.

$$3F_n + L_n = 2F_{n+2}.$$

Властивості добутку чисел Фібоначчі і Люка.

Властивість 1.

$$F_n L_n = F_{2n}.$$

Властивість 2.

$$F_{n+1} L_n = F_{2n+1} + (-1)^n.$$

Властивість 3.

$$L_{n+1} F_n = F_{2n+1} - (-1)^n.$$

Наведені властивості демонструють глибокі структурні зв'язки між послідовностями Фібоначчі та Люка. Аналіз цих властивостей дозволяє виявити певні закономірності в їх побудові, що створює основу для формулювання учнями власних гіпотез про можливі співвідношення.

Отже, розширення змісту теми «Числові послідовності» та впровадження додаткових розділів для учнів десятого класу математичного профілю створює можливість дати темі дослідницький та прикладний характер, що сприяє формуванню дослідницьких умінь через реалізацію раніше визначених дидактичних умов. Робота з такими видами

послідовностей як Фібоначчі та Люка створюються умови для виявлення закономірностей, формулювання гіпотез, обґрунтування та доведення висновків, узагальнення отриманих результатів що в свою чергу є елементами дослідницьких вмінь. Формування дослідницьких умінь на прикладі теми «Числові послідовності» відбувається поетапно: від засвоєння основних понять і способів діяльності до самостійного дослідження властивостей числових закономірностей. Важливу роль у цьому процесі відіграє педагог, адже він має створити проблемну ситуацію, стимулювати пізнавальну активність учня.

Висновок до розділу 1

Перший розділ кваліфікаційної роботи був присвячений теоретичним основам формуванню дослідницьких вмінь учнів у процесі роботи з числовими послідовностями в класах математичного профілю.

З'ясувати сутність та структуру дослідницьких умінь учнів, охарактеризувати їх роль у формуванні математичної компетентності. Визначили, що розвиток дослідницьких вмінь неможливий за відсутності зацікавленості учня пізнавальною діяльністю. Рушійною силою для процесу дослідження виступає інтерес, який мотивує до пошукової діяльності.

На основі психолого-педагогічної літератури сформували дидактичні умови, наявність який дає можливість формувати дослідницькі вміння. До них відносимо:

- 1) Сформованість міцної бази знань з математики та оволодіння основними способами діяльності.
- 2) Забезпечення зацікавленості учнів темою дослідження, а саме показ практичної цінності математики та можливості застосування знань у реальному житті.
- 3) Створення проблемних ситуації; поступового ускладнення дослідницьких завдань, переходу від роботи за зразком до самостійного наукового пошуку.

Визначили, що логіко-математичний аналіз навчального матеріалу з теми «Числові послідовності» сприяє забезпеченню комплексного підходу до організації навчального процесу. Дозволяє забезпечити в учнів ґрунтовне опанування ключових теоретичних положень та формує вміння застосовувати знання під час розв'язування вправ. Ми вважаємо, що використання запропонованого підходу для організації навчальної діяльності створює можливість для подальшого формування дослідницьких вмінь.

З'ясували, що розширення змісту теми «Числові послідовності» та впровадження додаткових розділів для учнів десятого класу математичного профілю створює можливість дати темі дослідницький та прикладний характер. Введення чисел Люка та Фібоначчі мають великий потенціал для досліджування в школі. Робота учнів з запропонованими числовими послідовностями створюють умови для виявлення закономірностей, формулювання гіпотез, проведення досліджень, здійснення висновків та узагальнення отриманих результатів що в свою чергу є елементами дослідницьких вмінь.

Отже, перший розділ дозволив сформувати теоретичну базу для подальшого дослідження методичних підходів до формування дослідницьких вмінь в учнів математичного профілю на прикладі теми «Числові послідовності». Отримані результати стали основою для розробки практичних рекомендацій, спрямованих на підвищення ефективності формування дослідницьких вмінь під час вивчення математики.

РОЗДІЛ 2. Методичні підходи до формування дослідницьких умінь учнів у процесі роботи з числовими послідовностями в класах математичного профілю.

2.1. Методичні особливості організації дослідницької діяльності учнів у процесі роботи з числовими послідовностями

В першому розділі ми сформулювали психолого-педагогічні умови та розглянули детально структуру розв'язування навчально-дослідницької задачі (за Недодатко Н. та Коваленко Г.). Аналіз теоретичного матеріалу дає можливість визначити етапи формування дослідницьких вмінь. Ми виокремлюємо:

1. Етап актуалізації знань та мотивація;
2. Етап формулювання проблеми;
3. Етап проведення дослідження;
4. Етап аналізу результатів та рефлексії.

Розглянемо як кожен етап можна впровадити під час дослідницької діяльності на прикладі теми «Числові послідовності» в класах математичного профілю.

На першому етапі варто пригадати навчальний матеріал з даної теми. Наприклад, провести фронтальне опитування. Наведемо приклад діалогу під час уроку, системи запитань вчителя та прогнозовані відповіді учнів:

Вчитель: «Що таке послідовність?»

Учень: «Впорядкований набір елементів»

Вчитель: «Яку назву має послідовність, якщо її елементами є числа?»

Учень: «Числова послідовність»

Вчитель: «Які числові послідовності ви знаєте?»

Учень: «Арифметична прогресія, геометрична прогресія»

Вчитель: «Яку послідовність ми називаємо арифметичною?»

Учень: «Числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число.»

Вчитель: «Яку послідовність ми називаємо геометричною?»

Учень: «Числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.»

На цьому етапі варто запропонувати систему завдань на відпрацювання базових вмінь, для повторення основних способів діяльності. Доцільно використати структурно-логічні моделі, які охоплюють основні поняття теми (Таблиця 1.2.8) та факти теми (Таблиця 1.2.9). Наведемо приклади завдань у вигляді таблиці.

Таблиця 2.1.1

Умова завдання	Спосіб діяльності
1. Знайдіть сім перших членів послідовності (a_n) , якщо $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + 3$. 2. Послідовність (b_n) задано формулою n-го члена $a_n = 7n - 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 61; 2) 77? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена. 3. Знайдіть сто перший член послідовності (a_n) , якщо $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.	знаходження членів послідовності і
1. Підберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності, першими членами якої є числа 1) 1, 4, 9, 25, ...; 2) 0, 2, 0, 2, 0, ... 2. Знайдіть формулу n-го члена послідовності, заданої рекурентно $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$. 3. Знайдіть формулу n-го члена арифметичної прогресії: $-5, -7, -9, -11$.	завдання послідовності ей за даними їх членами або співвідношеннями між ними
1. Обчисліть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії $-8; -6; -4; \dots$.	обчислення сум перших

2. Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо: 1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$; 3. Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії 8,4; 7,8; 7,2;	n членів арифметичної прогресії
1. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо: $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$; 2. Знайдіть суму семи перших членів геометричної прогресії (x_n), якщо $x_3 = 24$, $x_8 = 768$. 3. Знайдіть суму кубів чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$ і $b_2 = -6$.	обчислення сум перших n членів геометричної прогресії
1. Сума перших шести членів арифметичної прогресії дорівнює 39, а сума перших чотирнадцяти членів дорівнює -77. Знайдіть перший член і різницю прогресії. 2. Перший член арифметичної прогресії дорівнює -9, а різниця становить 6. Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їхня сума дорівнювала 960? 3. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, у якій середнє арифметичне n перших членів при будь-якому n дорівнює їхній кількості.	використання формул n-го члена арифметичної прогресії для знаходження невідомих елементів прогресії
1. Сума членів скінченної геометричної прогресії дорівнює 605. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо її перший член $b_1 = 5$, а знаменник прогресії $q = 3$. 2. Для будь-якого натурального n суму n перших членів деякої геометричної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 4(3n - 1)$. Знайдіть третій член цієї прогресії.	використання формул n-го члена геометричної прогресії для знаходження невідомих

3. Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = 3$, останній член $c_n = 162$, а сума всіх членів $S_n = 242$.	елементів прогресій
---	---------------------

Наступним кроком першого етапу є мотивація, інтерес учнів до дослідження. Рекомендуємо продовжити наведений вище приклад діалогу під час уроку:

Вчитель: «Давайте придумаємо таку числову послідовність, яка не є ні арифметичною, ні геометричною прогресією»

Учень: «Наприклад, послідовність яка складається з квадратів натуральних чисел, а саме 1, 4, 9, 16, 25, 36 ...»

Вчитель: «Так. Адже вами запропонована послідовність не має постійного відношення та різниці між членами змінюється. Прикладом також є послідовність простих чисел. Окрім запропонованих послідовностей в математиці існують послідовність Фібоначчі та послідовність Люка»

На етапі мотивації запропонуємо розглянути задачу яку сформулював Леонардо Пізанський в книзі "Liber abacci" у 13 столітті. Дану задачу можна віднести й в етап формулювання проблеми. Етап мотивації та формулювання проблеми можна пов'язати, адже якщо вже є бажання розв'язати цікаве, нетипове, проблемне завдання то мотивація присутня.

Умова задачі: «Дехто помістив пару кроликів в певному місці, відгородженому з усіх сторін стіною, щоб дізнатися, скільки пар кроликів народиться з цією умовою протягом року. При цьому природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує на світ другу пару, а народжують кролики з другого місяця після свого народження.»[21, с.22].

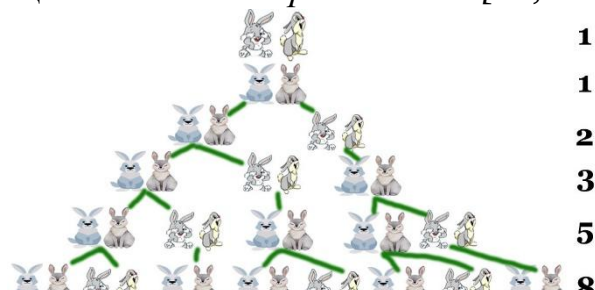


Рис. 2.1.1

Розв'язок задачі та введення чисел Фібоначчі детальніше розглянуті в 1 розділі.

Позначити символом F_n число пар кроликів у відгородженому місці через n місяців. При побудові алгебраїчної моделі задачі одержимо послідовність y якій $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, \dots, F_{12} = 144$.

На етапі формулювання проблеми вчитель має ставити учням проблемні запитання. Продемонструємо на прикладі передбачуваного діалогу:

Вчитель: «Давайте проаналізуємо послідовність чисел яка утворилася. Чи є тут зв'язок між її членами?»

Учень: «Так. Кожен член починаючи з третього дорівнює сумі двох попередніх.»

Вчитель: «Чи можемо ми записати це у вигляді рекурентної формули?»

Учень: « $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$,»

Вчитель: «Які значення можемо приймати за n ?»

Учень: «Починаючи з 1 включно, тобто $n \geq 1$ »

Вчитель: «Які властивості має ця послідовність чисел? Чи можна дізнатися значення будь-якого члена послідовності Фібоначчі без обчислення всіх попередніх? Як змінюються числа Фібоначчі при діленні на 2, 3, 5? Чи можемо створити схожу послідовність на Фібоначчі, але з іншою початковою умовою? Де зустрічаються числа Фібоначчі в природі, мистецтві, архітектурі?».

На основі цих питань можна визначити тему, проблему для майбутніх досліджень. Протягом дослідження треба підтримувати дискусію, але не нав'язувати готових рішень. Етап формулювання проблеми забезпечує перехід від мотивації до самостійної пізнавальної діяльності, створює основу для проведення математичного дослідження та є ключовим у розвитку пізнавальної активності учнів профільної школи.

Проведення дослідження є **третім етапом**. Мета цього етапу полягає у перевірці висунутих гіпотез через обчислювальний експеримент, пошук

закономірностей та побудову математичного доведення. Наприклад, проблемне запитання з другого етапу формування дослідницьких вмінь «Чи можна дізнатися значення будь-якого члена послідовності Фібоначчі без обчислення всіх попередніх? Знайдіть F_{16} ». Учні наштовхуються на проблему з знаходженням 25 члена послідовності. Звідси й отримуємо тему дослідження «Знайти спосіб одержання F_n без підрахунку попередніх членів»

Для цього використовують формулу Біне, але нашим головним завданням є формування дослідницьких вмінь. Учень має спробувати самостійно, з мінімальною допомогою вчителя провести дослідження.

- 1) Запропонуємо обчислити відношення виду $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ для перших 20 членів послідовності.

Спочатку варто знайти значення всіх 20 членів послідовності. Доцільно використати можливості інтернет-сервісів, які за допомогою загальної формули автоматизують обчислення, наприклад Google Таблиці.

	A	B	C	D	E	F
1	1		1			
2	1		2			
3	2		1,5			
4	3		1,67			
5	5		1,6			
6	8		1,63			
7	13		1,615			
8	21		1,619			
9	34		1,618			
10	55		1,618			
11	89		1,618			
12	144		1,618			
13	233		1,618			
14	377		1,618			
15	610		1,618			
16	987		1,618			
17	1597		1,618			
18	2584		1,618			
19	4181		1,618			
20	6765					
21	Члени послідовності Фібоначчі	відношення виду $\frac{F_{n+1}}{F_n}$				
22						

Рис. 2.1.2

Висновок: відношення наближається до сталого значення 1,618, тобто кожне наступне число зростає приблизно в 1,618 кількість раз ніж попереднє.

- 2) Припустимо, що члени послідовності мають вигляд $F_n = r^n$. Що є гіпотезою для дослідження. Який вигляд матиме рекурентна формула послідовності Фібоначчі?

Учні виконують заміну та отримують $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$. Виконавши ділення на r^{n-2} одержимо $r^2 = r + 1$. Ми одержали квадратне рівняння.

3) Розв'яжемо квадратне рівняння $r^2 - r - 1 = 0$, отримаємо два корені

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \text{ та } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\psi = r_1 = -0.618, \varphi = r_2 = 1.618$$

Висновок: $\varphi = r_2 = 1.618$ є числом, яке з'являється у відношенні сусідніх чисел.

4) Оскільки $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, то робимо припущення, що $F_n = A\psi^n + B\varphi^n$.

Нам відомі значення φ та ψ . Залишається знайти A та B , коефіцієнти і тоді зможемо сформулювати формулу для знаходження будь-якого члена послідовності Фібоначчі.

5) $F_n = A\psi^n + B\varphi^n$, розв'яжемо систему рівняння для $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

$$\begin{cases} F_1 = A\psi^1 + B\varphi^1, \\ F_2 = A\psi^2 + B\varphi^2; \end{cases} \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2}A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2A + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2B = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2}A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 1 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}A + \frac{3+\sqrt{5}}{2}B = 1 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему та отримуємо $A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ підставляємо назад у формулу $F_n = A\psi^n + B\varphi^n$ і отримуємо $F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n = \frac{-\psi^n + \varphi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Таким чином, учні відкривають формулу Біне. Головним завданням вчителя є не демонстрація готової формули, а допомога учневі отримати результат власного дослідження.

Аналіз результатів та рефлексія – четвертий етап формування дослідницьких вмінь. Мета цього етапу полягає у формуванні рефлексивного компонента дослідницьких умінь через усвідомлення учнями як отриманого результату (доведеної властивості), так і процесу дослідження (використаних методів, переборених труднощів, власного внеску у роботу). В нашому випадку учні отримують формулу Біне та перевіряють, чи дійсно можна знайти будь який член послідовності Фібоначчі.

В таблиці яку будували під час третього етапу визначили, що $F_{16} = 987$, спробуємо це довести використовуючи формулу Біне $F_{16} =$

$$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{16} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{16}}{\sqrt{5}} = 987. \text{ Отже, наше дослідження вірне.}$$

Після завершення дослідження учням важливо представити результати своєї роботи. Це формує вміння структуровано викладати наукову інформацію та можливість отримати досвід публічного виступу. До форм звітування роботи можна віднести цифрову презентацію, відеопрезентацію, створити власний веб-сайт з дослідженнями. Варто пам'ятати про позашкільні конкурси та конференції, вчитель може запропонувати написати повну науково-дослідницьку роботу для Малої академії наук України.

Варто зазначити, що результати дослідницької діяльності учнів залежить від сформованості необхідних вмін для її організації. Як було зазначено в першому розділі, Г. Ягенська та А. Степанюк визначили вміння учнів, які необхідні для організації дослідницької діяльності. До них відносяться вміння організувати та виконати планування роботи; вміння та знання дослідницького характеру; вміння працювати з інформацією; вміння презентувати результат своєї роботи; вміння здійснити аналіз своєї діяльності[18]. Запропонована дослідницями групи навичок повністю узгоджується з визначеними етапами формування дослідницьких вмінь. Таким чином, кожен з етапів разом з підбором методичних прийомів сприяє розвитку певних складових дослідницької компетентності, що забезпечує їх поетапне, систематичне та цілеспрямоване формування у здобувачів освіти математичного профілю.

Таблиця 2.1.2

Вміння	Етап формування	Методичні прийоми
вміння організувати та виконати планування роботи	Етап 2	постановка проблемних запитань; допомога у формулюванні теми та структури дослідження

вміння та знання дослідницького характеру	Етап 2,3	визначення гіпотези; обчислювальний експеримент; побудова таблиць; пошук закономірностей; підбір методу доведення
вміння працювати з інформацією	Етап 1,3	аналіз опорних конспектів і структурно-логічних моделей; робота з емпіричними даними; використання калькулятора або програмних засобів
вміння презентувати результат своєї роботи	Етап 4	цифрова презентація; відеопрезентація; створення веб-сайту дослідження
вміння здійснити аналіз своєї діяльності	Етап 4	самооцінювання; взаємооцінювання; рефлексивні запитання

Таким чином, запропоновані методичні прийоми організації дослідницької діяльності сприяють розвитку дослідницьких вмінь учнів старшої школи. Структура формування дослідницьких вмінь, яка включає чотири етапи (актуалізація знань та мотивація, формулювання проблеми, проведення дослідження, аналіз результатів та рефлексії) допомагає розвивати математичне мислення, уміння встановлювати закономірності, обґрунтовувати твердження, а також представляти й оцінювати здобуті

результати, що є важливим чинником підготовки їх до подальшої наукової та професійної діяльності.

2.2. Завдання дослідницького характеру для використання в навчальному процесі в класах математичного профілю

Метою нашого дослідження є розробка методики формування дослідницьких вмінь у процесі вивчення числових послідовностей і для її успішної реалізації маємо створити систему відповідних дослідницьких завдань. Дослідницьке завдання передбачає активне залучення здобувача освіти до самостійного пошуку, спостереження, що уможливорює встановлення зв'язків предметів і явищ дійсності, закономірностей. Саме такі завдання стимулюють розвиток пізнавальної активності та формують зацікавленість до більш глибокого, а саме наукового дослідження.

Демонструємо розробку з 9 завдань дослідницького характеру, які розподілені за рівнями складності. Під час створення ми керувалися вимогами програми профільного рівня, диференціацією за трьома рівнями складності. Також до уваги взяли можливість урізноманітнити завдання та показати міжпредметні зв'язки для здобувачів освіти.

Завдання **початкового рівня** передбачають розпізнавання математичних об'єктів, роботу з означенням (послідовностей Фібоначчі та Люка), побудова таблиць, побудова графіка. В нашому випадку доцільним є включення завдань які потребують знаходження інформації та систематизації відкриття послідовностей щодо історичного контексту, пошук застосування послідовностей в природі (пелюстки квітів, насіння соняшнику, лусочки шишки, мушлі), побудова таблиці та точкових графіків числових послідовностей (відповідність номера члена послідовності до його числового значення).

До **середнього рівня** можна віднести завдання, які передбачають встановлення закономірностей між математичними об'єктами, вміння сформулювати проблему та підібрати відповідний спосіб розв'язання, провести експеримент та оцінити достовірність гіпотези. Для завдань цього

рівня ми пропонуємо віднести визначення та пошук золотого перерізу у мистецтві, дослідження золотого прямокутника разом з спіраллю Фібоначчі та вивчення періодичності послідовності Фібоначчі за модулем.

Завдання **високого рівня** від середнього відрізняються тим, що є більш орієнтовані на наукове дослідження. Здобувачі освіти самостійно підбирають метод доведення, узагальнюють результат та застосовують отримані знання для розв'язання завдань які вимагають додаткових знань. Саме під час розв'язання дослідницьких завдань високого рівня формуються ключові для учнів які навчаються за математичним профілем. Під час роботи учні розвивають вміння володіти методами математичного доведення, здатність до узагальнення та вміння застосовувати знання у нестандартних ситуаціях. Ми пропонуємо завдання на знаходження закономірності подільності в послідовності Фібоначчі, на пошук зв'язку між числами Фібоначчі та Люка (виведення формул), на дослідження щодо збіжності відношень сусідніх членів послідовності Люка до золотого перетину та аналіз з послідовністю Фібоначчі.

Завдання початкового рівня

Завдання 1. Історичне дослідження «Шлях послідовностей».

Завдання дослідження:



Рис. 2.1.3

- За допомогою інтернет-ресурсів провести дослідження біографії математиків Леонарда Пізанського (Фібоначчі) та Едуарда Люка, встановити контекст виникнення числових послідовностей Фібоначчі та Люка.
- Чи існують числові послідовності окрім розглянутих? Дослідити відкриття числових послідовностей в Стародавній Індії, Греції та країнах арабського світу.
- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: подкаст, письмовий звіт, виступ з презентацією, відео-есе, стаття для шкільного блогу.

Завдання 2. Природа + Математика = ?. Чи є зв'язок між послідовностями



Рис. 2.1.4

Фібоначчі та Люка в природі?

Завдання дослідження:

- Знайдіть більше двох прикладів застосування послідовностей в природі, а саме характеристики рослин чи тварин, які потенційно відповідають числам

послідовності.

- Для кожного прикладу:
 - 1) Знайдіть зображення або сфотографуйте приклад застосування, в інтернет-сервісах знайдіть теоретичну інформацію про відповідну рослину.
 - 2) Виконайте виміри параметрів.
 - 3) Проаналізуйте одержані результати та вкажіть чи можна отримати послідовність чисел Фібоначчі або Люка.
- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: інтерактивний плакат в Canva, виступ з презентацією, створення інтерактивної моделі, стаття для шкільного блогу, портфоліо дослідника.

Завдання 3. Комп'ютерне моделювання «Візуалізація та порівняльний аналіз динаміки зростання послідовностей».

Завдання дослідження:

- Побудувати точкові графіки послідовностей Фібоначчі і Люка та реалізувати візуалізацію обох послідовностей на одній координатній площині.
- Здійснити аналіз закономірностей, а саме виявити стрімкість зростання, наявність чи відсутність точок перетину, обчислити відношення сусідніх

членів. Провести дослідження на збіжність отриманих відношень до золотого перетину тощо.

- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: письмовий звіт з використанням інтернет ресурсів, виступ з презентацією, створення динамічного графіка (GeoGebra, Desmos), створення інтерактивної 3D моделі графіку та розміщення на GitHub Pages, стаття для шкільного блогу.

Завдання середнього рівня

Завдання 4. Золотий перетин у мистецтві.

Завдання дослідження:



Рис. 2.1.5

- Знайти не менше трьох творів мистецтва (скульптура, картина, архітектура, музика) в яких присутні математичні закономірності пов'язані з числами Фібоначчі, послідовністю Люка або золотим перетином $\phi \approx 1,618$.

- Для кожного прикладу:

- 1) Знайти зображення обраних творів живопису, архітектури.
- 2) За допомогою інтернет-сервісів здійснити дослідження теоретичних питань (історична інформація, біографія автора, наявність свідчень про використання математичних пропорцій)
- 3) Виконати кількісні виміри та здійснити їх аналіз (для живопису: побудова сітки золотого перетину, вимір пропорцій елементів композицій, для архітектури: аналіз співвідношень розмірів фасаду, вікон чи колон)

- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: міні-сайт/GitHub Pages, виступ з презентацією, інфографіка(постер-дослідження), стаття для шкільного блогу, відео-есе.

Завдання 5. Що таке «Золотий» прямокутник? Чи дійсно він з золота?

Завдання дослідження:

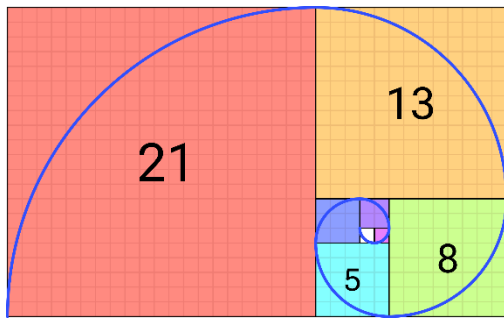


Рис. 2.1.6

- Побудувати послідовність прямокутників сторони яких утворюють числа Фібоначчі: 1×1 , 1×2 , 2×3 , 3×5 , 5×8 , 8×13 , 13×21 .
- З'єднати протилежні кути квадратів утворюючі спіраль Фібоначчі.
- Виконати обчислення відношень довшої сторони до коротшої для кожного

прямокутника та визначити, до якого числа наближаються їх значення.

- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: інтерактивна побудова (GeoGebra), письмовий звіт, міні-сайт/GitHub Pages, виступ з презентацією, інфографіка (постер-дослідження).

Завдання 6. Періодичність послідовності Фібоначчі за модулем.

Завдання дослідження:

- Обчислити послідовність Фібоначчі за модулем 2 перших 30 членів та встановити період повторення послідовності шляхом систематичного порівняння членів послідовності, проаналізувати результату.
- Провести аналогічне дослідження для модулів 3, 5 та 10, обчисливши достатню кількість членів для виявлення повної періодичності.
- Сформулювати гіпотезу про існування періоду Пізано та дослідити залежність величини періоду від значення модуля
- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: письмовий звіт, міні-сайт/GitHub Pages, виступ з презентацією, інфографіка (постер-дослідження), підготовка наукової роботи для участі в МАН або шкільній науковій конференції.

Завдання високого рівня

Завдання 7. Збіжність відношень сусідніх членів послідовності Люка до золотого перетину: порівняльний аналіз з послідовністю Фібоначчі

Завдання дослідження:

- Для значень n від 1 до 25 обчисліть $\frac{L_{n+1}}{L_n}$. Результат бажано оформити у вигляді таблиці.
- Проведіть дослідження границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n}$ та визначте до якого числа прямує.
- Здійсніть порівняльний аналіз з послідовністю Фібоначчі, а саме обчисліть $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ для значень n від 1 до 25 та дослідіть динаміку збіжності обох послідовностей.
- Встановіть зв'язок з золотим перетином.
- Оформити результати дослідження та зробити висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: письмовий звіт, міні-сайт/GitHub Pages, виступ з презентацією, інфографіка, підготовка наукової роботи для участі в МАН або шкільній науковій конференції.

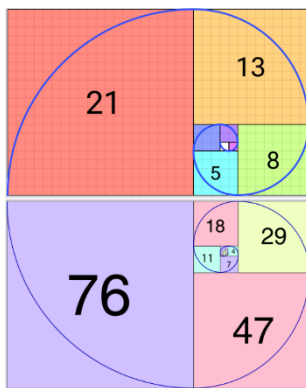


Рис. 2.1.7

Завдання 8. Математичний зв'язок між числами Фібоначчі та Люка: виведення формул.

Завдання дослідження:

- Провести дослідження зв'язку між послідовностями Фібоначчі та Люка.
- Довести тотожності: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $F_{2n} = F_n L_n$
- Пояснити, як ці співвідношення відображають спільну рекурентну структуру обох послідовностей.
- Сформулювати власну гіпотезу щодо інших можливих тотожностей між L_n та F_n та вивести їх.
- Оформити результати дослідження та висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: письмовий звіт з доведенням, візуалізація у GeoGebra, виступ з презентацією, інфографіка, підготовка наукової роботи для участі в МАН або шкільній науковій конференції.

Завдання 9 Закономірності подільності в послідовності Фібоначчі

Завдання дослідження:

- Обчислити найбільший спільний дільник (НСД) чисел Фібоначчі F_m, F_n для різних пар індексів:

$$\text{НСД}(F_6, F_9), \text{НСД}(F_8, F_{12}), \text{НСД}(F_{10}, F_{15}), \text{НСД}(F_{12}, F_{18}).$$

- Виявити закономірність між НСД чисел Фібоначчі та НСД їхніх індексів.
- Сформулювати гіпотезу щодо загального вигляду залежності:

$$\text{НСД}(F_m, F_n) = \dots ?$$

- Побудувати логічне доведення сформульованої гіпотези.
- Оформити результати дослідження та висновки.

Пропозиції щодо формату подання результатів: письмовий звіт з доведенням, візуалізація у GeoGebra, виступ з презентацією, інфографіка, підготовка наукової роботи для участі в МАН або шкільній науковій конференції.

Продемонструємо процес розв'язання задач кожного рівня складності. Виконаємо **3 завдання** початкового рівня, яке передбачає моделювання візуалізації та порівняльний аналіз динаміки зростання послідовностей Фібоначчі та Люка.

Розв'язання

- 1) Сформулюємо проблемне запитання для учнів, наприклад: «Чому послідовність Фібоначчі та Люка, маючи спільну властивість пошуку членів послідовностей дають різні значення? Як це відображається на графіку?

2) Побудуємо таблиці для знаходження членів послідовності. Задля автоматизації обчислень використаємо Google Таблиці.

	A	B	C	D	E	F
1	Члени послідовності Фібоначчі			Члени послідовності Люка		
2	№	число		№	число	
3	1	1		1	2	
4	2	1		2	1	
5	3	2		3	3	
6	4	3		4	4	
7	5	5		5	7	
8	6	8		6	11	
9	7	13		7	18	
10	8	21		8	29	
11	9	34		9	47	
12	10	55		10	76	
13						

Рис. 2.1.8

3) Відповідні значення нанесемо на графіки в інтернет-застосунку GeoGebra. За вісь x приймаємо числове значення, а за вісь y номер відповідного значення.

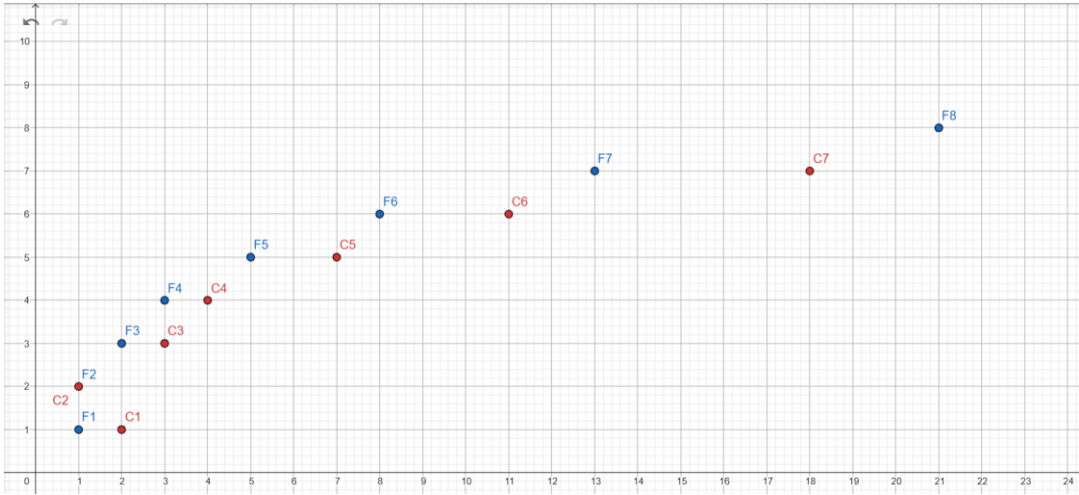


Рис. 2.1.9

За допомогою графіку та таблиці можемо дати відповідь на проблемне запитання. Послідовність Фібоначчі та Люка, маючи спільну властивість пошуку членів послідовностей дають різні значення бо мають різні початкові умови.

4) При аналізі графіку можемо стверджувати, що наявна точка перетину графіків, а саме $F_2 = C_1 = 2$. Графіки зростають стрімко. Обчислимо

відношення сусідніх членів для кожної послідовності. Бачимо, що це дає можливість вказати на збіжність отриманих відношень сусідніх членів до золотого перетин.

Г	Н	І	Ж	К
відношення виду $\frac{F_{n+1}}{F_n}$			відношення виду $\frac{C_{n+1}}{C_n}$	
1			0,5	
2			3	
1,5			1,333	
1,667			1,75	
1,6			1,571	
1,625			1,636	
1,615			1,611	
1,619			1,621	
1,618			1,617	
1,618			1,618	
1,618			1,618	
1,618			1,618	
1,618			1,618	
1,618			1,618	
1,618			1,618	

Рис. 2.1.10

Отже, під час дослідження встановили, що незважаючи на однакову рекурентну формулу обидві послідовності демонструють різну динаміку зростання. Це відбувається через різні початкові умови. За допомогою точкового графіку визначили, що послідовності мають тільки одну спільну точку. Під час обчислення відношень сусідніх членів послідовності Фібоначчі та Люка виявили, що значення збігаються до одного числа, а саме 1,618, що є значенням золотого перерізу.

Виконаємо 6 завдання середнього рівня складності, яке має на меті дослідження періодичності послідовності Фібоначчі за модулем.

1) Спочатку сформулюємо проблемне запитання для учнів: «Як змінюється послідовність Фібоначчі, якщо обчислити її члени за модулем певного числа? Чи отримаємо якусь закономірність?»

2)Обчислимо послідовність Фібоначчі за модулем 2, 3, 5 та 10 перших 30 членів. Для автоматизації та спрощення обчислень використаємо Google Таблиці. Спочатку обчислимо 30 членів послідовності Фібоначчі, а потім дослідимо значення які утворюються при остачі від ділення відповідних значень.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Члени послідовності Фібоначчі							Члени послідовності Фібоначчі			
2	№	число						mod 2	mod 3	mod 5	mod 10
3	1	1						1	1	1	1
4	2	1						1	1	1	1
5	3	2						0	2	2	2
6	4	3						1	0	3	3
7	5	5						1	2	0	5
8	6	8						0	2	3	8
9	7	13						1	1	3	3
10	8	21						1	0	1	1
11	9	34						0	1	4	4
12	10	55						1	1	0	5
13	11	89						1	2	4	9
14	12	144						0	0	4	4
15	13	233						1	2	3	3
16	14	377						1	2	2	7
17	15	610						0	1	0	0
18	16	987						1	0	2	7
19	17	1597						1	1	2	7
20	18	2584						0	1	4	4
21	19	4181						1	2	1	1
22	20	6765						1	0	0	5
23	21	10946						0	2	1	6
24	22	17711						1	2	1	1
25	23	28657						1	1	2	7
26	24	46368						0	0	3	8
27	25	75025						1	1	0	5
28	26	121393						1	1	3	3
29	27	196418						0	2	3	8
30	28	317811						1	0	1	1

Рис. 2.1.11

3) При обчисленні учні виявляють закономірність, а саме що за певним модулем зберігається період повторення блоку. Остача за mod 2 це період повтору 3, а саме повторюється блок 0,1,1. При обчисленні остачі за модулем 3 бачимо знову повтор блок 0,1,1,2,0,2,2,1. Період якого становить 8. Під час обчислення остачі за модулем 5 спостерігаємо повтор блок, період якого становить 20. При збільшенні кількість відомих чисел Фібоначчі можна спостерігати повторення значень й за mod 10, а саме періодичність буде 60.

Маємо відповідь на наше проблемне запитання: «При обчисленні членів послідовності Фібоначчі однозначно отримуємо закономірність.». Отже, з дослідження можемо сформулювати гіпотезу, а саме, що для будь-якого числа m послідовність остач є періодичною $(F_n \bmod m)$, тобто для кожного модуля m існує деякий період Пізано.

Для дослідження виявлених результатів додатково учням можна запропонувати знайти цікаву інформацію про цей період.

Продемонструємо розв'язання завдання 8 високого рівня, яке передбачає виявлення математичного зв'язку між числами Фібоначчі та Люка та виведення відповідних формул.

Під час роботи з числами Фібоначчі та Люка учні вже виявили зв'язок між цими послідовностями. Проблемне запитання: «Чи можна знайти таке математичне співвідношення, яке поєднує одночасно числа послідовності Фібоначчі та Люка?»

Розв'язання

1) Доведемо тотожність: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

Числа Фібоначчі визначаються рекурентно за формулою $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ з початковими значеннями $F_1 = 1, F_2 = 1$. Числа Люка визначаються рекурентно за формулою $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, де початковими значеннями є $L_1 = 2, L_2 = 1$. В таблиці зобразимо номер індексу та відповідне йому число Фібоначчі та число Люка

Таблиця 2.1.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	...

Проаналізувавши таблицю, можна помітити зв'язок між числами Люка і Фібоначчі, а саме те, що число Люка з індексом n є сумою чисел з індексами $n - 1$ і $n + 1$ з послідовності Фібоначчі. Наприклад:

$$L_3 = F_2 + F_4,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 4.$$

Тому справедливою є формула $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$. Доведено.

2) Доведемо тотожність: $F_{2n} = F_n L_n$. Для цього використаємо властивість індексів для чисел Фібоначчі. Відомо, що $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$. Припустимо, що $m=n$, тоді $F_{n+n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$

$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$, з доведення попереднього твердження маємо, що $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, тому виконаємо заміну і отримаємо: $F_{2n} = F_n L_n$. Доведено.

Тут отримуємо відповідь на наше проблемне запитання: «Так, і цих співвідношення велика кількість. »

Після доведення даних тверджень варто запропонувати учням сформулювати власну гіпотезу щодо інших можливих тотожностей між L_n та F_n та вивести їх.

Таким чином розробка системи завдань дослідницького спрямування забезпечує послідовне формування дослідницьких вмінь. Завдання розподілені за рівнем складності дають можливість враховувати індивідуальну спроможність учнів та орієнтацію на їх інтереси.

2.3 Розробка модельної навчальної програми вибіркового курсу

«Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка».

Модельна навчальна програма – це документ, що визначає орієнтовну послідовність досягнення очікуваних результатів навчання здобувачів освіти, зміст навчального предмета (в нашому випадку інтегрованого курсу) та видів навчальної діяльності учнів [29]. Така програма має використовуватися в освітньому процесі в порядку, визначеному законодавством (абзац сьомий статті 1 Закону України «Про повну загальну середню освіту»).

Проект модельної навчальної програми має мати певну структуру, а саме складатися з вступної, основної та прикінцевої частин. Вступна частина є теоретичним обґрунтуванням курсу, де розкривається місце і роль у структурі профільної математичної підготовки учня. У основній частині окресл.ть поетапну реалізацію очікуваних освітніх результатів учнів під час навчання, представлений зміст навчального курсу та варіанти навчальної діяльності здобувачів освіти. Прикінцева частина є необов'язковою, але за бажанням можна додати рекомендації щодо способів контролю та оцінювання навчальних результатів, додаткові складові щодо курсу.

На основі методичних рекомендацій для розроблення модельних навчальних програм та пропонованої структури створимо власну програму для вибіркового курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка».

Розробка модельної навчальної програми вибіркового курсу
«Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка»

Вступна частина

Модельна навчальна програма вибіркового курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка» створена з метою реалізації компетентного потенціалу, мети й завдань математичної освітньої галузі та призначена для викладання курсу в закладах загальної середньої освіти.

Курс за обраною темою «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка» (далі – Курс) реалізується за умови його вибору учнівством та закладом освіти і може викладатися у межах передбаченої кількості навчальних годин для вивчення обов'язкових освітніх компонентів за обраним профілем навчання.

Програма враховує наступність та логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти здобувачів освіти, розпочату в початковій школі та 5–9 класах середньої школи, розширюючи та доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей здобувачів / здобувачок освіти. Програма реалізовує частину обов'язкових результатів навчання в межах математичної освітньої галузі, доповнюючи обов'язкові результати навчання модельних програм основних освітніх компонентів («Алгебра. 10–12 класи. Поглиблений рівень»).

Основою для формулювання очікуваних результатів навчання в Програмі є обов'язкові результати навчання (орієнтири для оцінювання) поглибленого рівня математичної освітньої галузі, що визначають профіль.

Метою викладання Курсу є формування дослідницьких вмінь учнів в процесі поглибленого вивчення числових послідовностей Фібоначчі та Люка на основі знань, здобутих у 9 класі, що передбачає розширення системи знань

про закономірності та властивості цих послідовностей, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні завдання дослідницького характеру. Зміст Курсу присвячений історичним аспектам виникнення послідовностей, застосуванню у природі, мистецтві, архітектурі, та сучасних технологіях, математичним властивостям послідовностей; сприяє розвитку математичної, дослідницької та інформаційно-комунікаційної компетентностей. Виконання дослідницьких завдань і застосування знань у життєвих ситуаціях забезпечує розвиток критичного мислення, здатності виявляти математичні закономірності в навколишньому світі та формування наукового підходу до розв'язання проблем.

Доцільність вивчення курсу обумовлена тим, що числові послідовності Фібоначчі та Люка є фундаментальними математичними об'єктами, які широко застосовуються в розв'язанні прикладних задач та створюють основу для побудови моделей у різних галузях знань. Властивості послідовностей Фібоначчі та Люка застосовують для створення алгоритмів у криптографії, комп'ютерних науках, фінансовому аналізі, архітектурному проектуванні, моделюванні біологічних процесів, оптимізаційних задачах тощо.

Основними завданнями викладання курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка» є:

- сформувати в здобувачів освіти дослідницькі вміння та аналітичне мислення, орієнтацію в практичних можливостях застосування послідовностей Фібоначчі та Люка, вміння працювати з різними джерелами інформації, розуміння ролі числових послідовностей у наукових дослідженнях;
- забезпечити в учнів засвоєння теоретичних основ послідовностей Фібоначчі та Люка, вміння застосовувати їх властивості, бачення закономірностей та взаємозв'язків з і іншими математичними об'єктами;
- навчити виявляти та досліджувати прояви послідовностей в природних явищах, технологічних процесах, мистецьких творах та

використовувати їх властивості при розв'язанні задач у різних предметних галузях;

- розвивати дослідницькі вміння шляхом формулювання гіпотез, планування та проведення математичного дослідження, аналізу отриманих результатів з дотриманням принципів академічної доброчесності;
- сприяти формуванню наукового світогляду;
- формувати в учнів здатність до рефлексії власної дослідницької діяльності.

Зміст курсу відповідає ціннісним орієнтирам, які окреслені у Державному стандарті профільної середньої освіти. Під час вивчення Курсу особлива увага приділяється формуванню дослідницьких вмінь, розвитку здатності розв'язання дослідницької задачі, аргументованого обговорення отриманих результатів та дотриманню принципів академічної доброчесності. Здобувачі освіти долучаються до діяльності, що сприяє розвитку аналітичного мислення, самостійності у виборі методів дослідження та представлення результатів, визначенню власних освітніх інтересів.

Основними принципами, на яких ґрунтується Програма, є:

- компетентнісний підхід: основою для програми є досягнення математичних компетентностей, передбачених Державним стандартом у математичній освітній галузі;
- цілісність: послідовне викладення тем з урахуванням їхніх взаємозв'язків;
- практична зорієнтованість: програма включає значну кількість завдань практичного змісту та передбачає заохочення учнів до дослідницької діяльності;
- врахування вікових й індивідуальних особливостей розвитку й потреб школярів, що відбувається шляхом послідовного поглиблення вивчення тем та набуття відповідних компетентностей.

Ключовими пріоритетами викладання Курсу є:

- формування математичних компетентностей учнів у математичній галузі, передбачених Державним стандартом;
- відведення значної частини вивчення предмету практичним та груповим, видам діяльності;
- формування й усвідомлення міжпредметних зав'язків; критичного мислення та математичної грамотності;
- дослідницький підхід;
- академічна доброчесність.

Структура курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка» включає 34 години і складається з десяти тем, з поміж яких одна тема – повторення навчального матеріалу, а одна тема – моніторинг навчальних досягнень учнів із вивченого курсу.

Особливості організації освітнього процесу для вивчення Курсу ми вбачаємо у тому, що вчительство вільне у виборі прикладів, задач, джерел інформації, застосуванні цифрових ресурсів, видів діяльності, методичних особливостей викладання навчального матеріалу, оскільки головним є досягнення компетентностей учнівства. Ми наводимо можливі види діяльності при вивченні вказаних тем, але залишаємо вибір для вчителя щодо їх застосування на уроках. Можна також змінювати кількість годин для вивчення певної теми з урахуванням особливостей та потреб учнів. Найважливіше у вивченні цього Курсу – формування дослідницьких вмінь здобувачів освіти що є однією з математичних компетентностей та створення фундаменту для їхнього подальшого розвитку.

Способи реалізації Курсу охоплюють три можливі моделі розподілу навчального часу:

- 1) одна година на тиждень упродовж навчального року;
- 2) дві години на тиждень упродовж навчального семестру;
- 3) інтенсивне вивчення Курсу впродовж терміну, що обирає навчальний заклад, наприклад, три (чотири) години на тиждень.

Курс рекомендуємо викладати в 10 класі, що забезпечує логічну наступність з вивченням теми «Числові послідовності» 9 класу. За умов особливостей навчального плану заклад освіти може обрати впровадження програми курсу в 11 або 12 класі.

Основна частина

Кількість годин:34

Очікувані результати	Пропонований зміст курсу	Види навчальної діяльності
Тема 1. Повторення «Числові послідовності» (9 клас).		
Кількість годин 3		
Учень/учениця: пояснює: способи задання числових послідовностей, метод математичної індукції, поняття суми нескінченної геометричної прогресії; формулює означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій; доводить: властивості арифметичної та геометричної прогресій, формули n-го члена і суми n перших членів арифметичної та геометричної прогресій; розв'язує вправи, що передбачають: знаходження членів прогресії, задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними, обчислення сум	1.1	Повторення. Поняття числової послідовності. Способи задання послідовностей.
	1.2	Повторення. Арифметична прогресія: означення, формула n-го члена, формула суми n-перших членів.
	1.3	Повторення. Геометрична прогресія: означення, формула n-го члена, формула суми n-перших членів.
	1.4	Повторення. Границя послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії.
		Лекційна форма роботи. Створення конспектів та опорних схем за змістом теми. Повторення теорії з використанням опорних схем (конспектів). Розв'язування завдань в зошиті. Усне опитування. Індивідуальна робота з практичними завданнями. Діагностична робота.

перших n членів арифметичної та геометричної прогресій, запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного, використання формул n -го члена і суми n перших членів прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій, використання методу математичної індукції.	1.5	Модуль знаменника якої менший від 1. Діагностична робота з метою виявлення рівня знань учнів з теми послідовності.	
---	-----	---	--

Тема 2. Історія виникнення чисел Фібоначчі та Люка, їх означення.

Кількість годин: 4

Учень/учениця: пояснює: історичну інформацію про виникнення чисел Фібоначчі та чисел Люка; формулює: означення числових послідовностей Люка та Фібоначчі; виокремлює серед числових послідовностей: числа Фібоначчі та числа Люка. розв'язує вправи, що передбачають: обчислення перших n-членів, знаходження наступних членів послідовностей Фібоначчі	2.1 Історія виникнення послідовностей. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) та відкриття чисел Фібоначчі. 2.2 Книга «Liber Abaci». Задача про кроликів. 2.3 Означення послідовності Фібоначчі. Рекурентна формула послідовності Фібоначчі. 2.4 Історія виникнення чисел Люка. Едуард Люка та його внесок у	Лекційна форма роботи. Створення конспектів та опорних схем за змістом теми. Усне опитування. Формувальне оцінювання у формі тесту. Обговорення теорії з наведенням прикладів використання розглянутих математичних фактів у житті. Групова робота (з використанням цифрових інструментів). Виконання завдань з використанням електронних таблиць.
--	---	---

та Люка, порівняння послідовностей.	дослідження чисел Фібоначчі. 2.5 Означення послідовності Люка. Рекурентна формула послідовності Люка.	
Тема 3. Властивості чисел Фібоначчі та Люка. Геометрична інтерпретація. Кількість годин 5		
Учень/учениця: формулює та доводить: основні властивості числових послідовностей Люка та Фібоначчі; застосовує властивості Фібоначчі та Люка під час розв'язання завдань зображає геометричну інтерпретацію послідовностей Люка та Фібоначчі розрізняє геометричну інтерпретацію чисел Фібоначчі від чисел Люка.	3.1 Властивості чисел Фібоначчі. 3.2 Властивості чисел Люка 3.3 Геометрична інтерпретація.	Лекційна форма роботи. Створення конспектів та опорних схем за змістом теми. Виконання завдань з використанням електронних таблиць та математичного застосунку GeoGebra. Розв'язування задач практичного спрямування. Формувальне оцінювання у формі тесту.
Тема 4. Зв'язок між числами Люка та Фібоначчі Кількість годин 4		
Учень/учениця: пояснює вплив початкових умов на формування числових послідовностей. формулює спільні властивості числових	4.1 Вплив початкових умов на формування числових послідовностей Люка та Фібоначчі. 4.2 Спільні властивості між послідовностями Люка та Фібоначчі.	Використання проблемних питань у вивченні теоретичного матеріалу. Створення опорних конспектів за теоретичним матеріалом теми. Формувальне оцінювання у формі тесту. Виконання завдань з використанням електронних

послідовностей Люка та Фібоначчі визначає зв'язок між послідовністю Люка та Фібоначчі. розв'язує завдання, що передбачають: використання вивчених формул та властивостей.		таблиць. Розв'язування задач практичного спрямування.
Тема 5. Золотий переріз. Формула Біне. Кількість годин 3		
Учень/учениця: наводить приклади використання золотого перерізу; знає формулу Біне розв'язує завдання, що передбачають: використання вивчених формул та властивостей.	5.1 Золотий переріз. 5.2 Формула Біне для чисел Фібоначчі. 5.3 Формула Біне для чисел Люка.	Лекційна форма роботи. Створення конспектів та опорних схем за змістом теми. Усне опитування. Використання проблемних питань у вивченні теоретичного матеріалу. Групова робота (з використанням цифрових інструментів). Розв'язування задач практичного спрямування.
Тема 6. Числа Фібоначчі та Люка в алгебрі та теорії чисел. Кількість годин 6		
Учень/учениця: формулює Тотожності Кассіні, Каталана, Д'аламбера; вміє дослідити члени послідовності на парність, подільність, конгруєнцію. розв'язує завдання, що передбачають: використання вивчених формул та властивостей.	6.1 Парність та подільність чисел послідовностей. Прості числа послідовностей. 6.2 Конгруєнції Фібоначчі 6.3 Алгебраїчні тотожності та формула Біне 6.4 Тотожності Кассіні, Каталана, Д'аламбера.	Лекційна форма роботи. Використання проблемних питань у вивченні теоретичного матеріалу. Створення опорних конспектів за теоретичним матеріалом теми. Усне опитування. Пошук та письмова фіксація інформації щодо вивченої теми з використанням цифрових ресурсів. Розв'язування задач практичного спрямування. Виконання індивідуальних завдань з

		фіксацією результатів у зошитах. Формувальне оцінювання у формі тесту. Консультації щодо проєктів.
Тема 7. Числа Фібоначчі та Люка в біології.		
Кількість годин 2		
Учень/учениця: самостійно або у взаємодії з іншими виявляє застосування послідовностей в природі робить висновки щодо застосувань послідовностей в навколишньому середовищі.	7.1 Застосування чисел Фібоначчі та Люка в природі.	Обговорення теорії з наведенням прикладів використання розглянутих математичних фактів у житті. Групова робота (з використанням цифрових інструментів).
Тема 8. Числа Фібоначчі та Люка в архітектурі та мистецтві.		
Кількість годин 2		
Учень/учениця: Наводить приклади застосування послідовностей в архітектурі та мистецтві робить висновки щодо застосувань послідовностей в будівництві та створенні мистецьких творів.	8.1 Застосування чисел Фібоначчі та Люка в архітектурі. 8.2 Застосування чисел Фібоначчі та Люка в мистецтві.	Обговорення теорії з наведенням прикладів використання розглянутих математичних фактів у житті. Групова робота (з використанням цифрових інструментів). Консультації щодо проєктів.
Тема 9. Застосування чисел Фібоначчі в інформатиці.		
Кількість годин 2		
Учень/учениця: самостійно або у взаємодії з іншими	9.1 Фібоначчі у криптографії 9.2 Фібоначчі в комп'ютерній графіці.	Обговорення теорії з наведенням прикладів використання розглянутих математичних фактів

виявляє застосування послідовностей в криптографії та комп'ютерній графіці. робить висновки щодо застосувань послідовностей в криптографії та комп'ютерній графіці.		у житті. Групова робота (з використанням цифрових інструментів).
Тема 10. Моніторинг навчальних досягнень учнів / учениць з вивченого курсу.		
Кількість годин 3		
Учень/учениця: висловлює власне ставлення до здобутої інформації про числа Фібоначчі та числа Люка; пропонує ідеї застосування послідовностей, які виникли в результаті роботи під час курсу пов'язує математичні знання і вміння з курсу, узагальнює їх, робить висновки.	10.1 Узагальнення та систематизація вивченого матеріалу зі всього курсу. 10.2 Презентація власних проєктів зі всього курсу.	Виконання діагностичної роботи для перевірки знань з всього курсу. Аналіз виконаної роботи. Презентація та обговорення індивідуальних (групових) проєктів.

Отже, ми розробили програму вибіркового курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка». Вивчення кожної теми курсу передбачає пошук закономірностей, перевірку гіпотез, проведення дослідження, аналіз результатів та обґрунтування висновків, що в свою чергу входить до процесу формування дослідницьких вмінь. Таким чином, розроблений курс дає можливість реалізувати методичні рекомендації щодо формування дослідницьких вмінь на прикладі теми «Числові послідовності» учнів профільних класів на практиці.

Висновок до розділу 2

Другий розділ роботи присвячено практичним аспектам формування дослідницьких вмінь на прикладі теми «Числові послідовності» в учнів математичного профілю, що включає в себе розробку методичних рекомендацій, завдань дослідницького характеру та створення програми вибіркового курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка».

По-перше, за допомогою розробки методичних прийомів формування дослідницьких вмінь стає можливим та ефективнішим. Структура формування дослідницьких вмінь, яка включає чотири етапи (актуалізація знань та мотивація, формулювання проблеми, проведення дослідження, аналіз результатів та рефлексії) допомагає розвивати математичне мислення, уміння встановлювати закономірності, обґрунтовувати твердження, а також представляти й оцінювати здобуті результати. Розвиток дослідницьких вмінь є важливим чинником підготовки їх до подальшої наукової та професійної діяльності.

По-друге, розробка системи завдань дослідницького спрямування забезпечує послідовне формування дослідницьких вмінь. Розроблені завдання різного рівня складності дозволяють заохочувати учнів до активної роботи, що дає змогу посилювати їхню впевненість у власних силах.

По-третє, розроблений курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка» дає можливість реалізувати процес формування дослідницьких вмінь. Курс включає 34 години і складається з десяти тем вивчення яких передбачає пошук закономірностей, перевірку гіпотез, проведення дослідження, аналіз результатів та обґрунтування висновків.

Таким чином, практичні аспекти формування дослідницьких вмінь в учнів математичного профілю на прикладі теми «Числові послідовності» потребують комплексного підходу, який охоплює методичні прийоми, розробку відповідних диференційованих завдань та можливість реалізувати процес на прикладі програми створеного курсу.

ВИСНОВКИ

Проаналізовано сучасні підходи щодо формування дослідницьких вмінь та досліджено теоретичні та практичні аспекти на прикладі теми «Числові послідовності» в класах математичного профілю.

З'ясовано сутність та структуру дослідницьких умінь учнів, охарактеризовано їх роль у формуванні математичної компетентності. Сформовано дидактичні умови, наявність яких дає можливість формувати дослідницькі вміння:

- 1) Сформованість міцної бази знань з математики та оволодіння основними способами діяльності.
- 2) Забезпечення зацікавленості учнів темою дослідження, а саме показ практичної цінності математики та можливості застосування знань у реальному житті.
- 3) Створення проблемних ситуацій; поступового ускладнення дослідницьких завдань, переходу від роботи за зразком до самостійного наукового пошуку.

Розроблено логіко-математичний аналіз навчального матеріалу з теми «Числові послідовності» що сприяє комплексному підходу до організації навчального процесу.

З'ясовано, що розширення змісту теми «Числові послідовності» та впровадження додаткових розділів для учнів десятого класу математичного профілю має потенціал для набування теми дослідницького характеру. Робота учнів з числовими послідовностями Фібоначчі та Люка створюють умови для виявлення закономірностей, формулювання гіпотез, проведення досліджень, здійснення висновків та узагальнення отриманих результатів що в свою чергу є елементами дослідницьких вмінь.

Розроблено методичні рекомендації формування дослідницьких вмінь під час вивчення теми «Числові послідовності» та диференційовану за рівнями складності систему завдань дослідницького характеру. Розроблені завдання на дослідження числових послідовностей Люка та Фібоначчі.

Створено розробку курсу «Математичні дослідження: світ чисел Фібоначчі та Люка», що дає можливість реалізувати процес формування дослідницьких вмінь. Курс включає 34 години і складається з десяти тем вивчення яких передбачає пошук закономірностей, перевірку гіпотез, проведення дослідження, аналіз результатів та обґрунтування висновків що і є складовими дослідницьких вмінь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математика. Навчальна програма для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти / Укладачі: О. Істер, А. Каплун, С. Березняк та ін. — Київ : Міністерство освіти і науки України, 2017. — 60 с.
2. Істер О. С. Геометрія : підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид., переробл. — Київ : Генеза, 2021. — 240 с.
3. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2-ге вид., переробл./ А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2021. — 416 с.
4. Істер О. С. Алгебра : підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид., переробл. — Київ : Генеза, 2022. — 240 с.
5. Математика. Навчальна програма для 8–9 класів закладів загальної середньої освіти для поглибленого вивчення математики / Укладачі: М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова, М.С.Якір.та ін.: Міністерство освіти і науки України, 2017. — 21 с.
6. Гончаренко С. Український педагогічний словник: словник. Київ: Либідь, 1997. 374 с.
7. Державний стандарт базової середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898 (у ред. постанови КМУ від 30 серпня 2022 р. № 972).
URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020>
8. Інструктивно-методичні рекомендації щодо організації освітнього процесу в природничій освітній галузі : додаток 7 до Державного стандарту базової середньої освіти. Київ : МОН України, 2022.
URL:<https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/metodichni%20recomendazii>
9. Дослідницькі вміння учнів у контексті реалізації концепції Нової української школи / [авт. статті] // Актуальні проблеми природничо-

математичної освіти : зб. матеріалів міжнар. наук.-практ. конф. (ГО «МАСОНК», 22–24 лют. 2022 р.). Київ : ІТЗО, 2022. С. 93–97.

URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/730602>

10. Шостак Н. В. Психолого-педагогічні умови формування навчальних умінь старшокласників [Електронний ресурс] / Н. В. Шостак // Вісник психолого-педагогічних наук. – Кривий Ріг : ДВНЗ «КДПУ», 2020. – С. 45–52.

URL: <https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/123456789/6523/3/10.pdf>

11. Уміння вчитися — ключова компетентність молодшого школяра посібник; Савченко О.Я. — К.: Педагогічна думка, 2014. — 176 с.

URL: <https://undip.org.ua/wp-content/uploads/2021/08/savchenko.in>

12. Недодатко Н. Г. Формування навчально-дослідницьких умінь старшокласників : дис.канд. пед. наук : 13.00.01 / Н. Г. Недодатко. – Кривий Ріг, 2000. – 210 с.

13. Нікітіна О. О. Дослідницькі вміння і навички в складі операційного компонента навчальної діяльності молодших школярів. *Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка*. Серія: Педагогічні науки. 2014. Вип. 132. С. 83–87.

URL: <https://dspace.cusu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/774a8a94>

14. Лозова В. І. Цілісний підхід до формування пізнавальної активності школярів. Харків: ОВС, 2000. 164 с.

15. Марусинець М. Розвиток пізнавальної активності. Шкільне виховання. 2005. №11. С. 11–12.

16. Недодатко Н. Г., Коваленко Г. С. Від навчально-дослідницьких умінь до науково-дослідницьких *Навчально-методичний посібник*. - Кривий Ріг, 2007. - 124 с.

URL: <https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/123456789/11469/>

17. Буднік С. Навчально-дослідницькі вміння: сутнісно-структурний аналіз. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки*. 2013.

URL: <https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/6872/3/30.pdf>

18. Ягенська Г. В., Степанюк А. В. Формування дослідницьких умінь школярів у галузі природничих наук (друга половина XX – початок XXI століття) : монографія. Тернопіль: ТИПУ ім. В. Гнатюка, 2021. 282 с.

URL: <http://dspace.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/23521/1/Yahenska>

19. Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 25 лип. 2024 р. № 851.

URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF#Text>

20. Фібоначчі // *Вікіпедія* : вільна енциклопедія.

URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/>

21. Ушаков Р. П. Деякі тотожності, пов'язані з числами Фібоначчі. / У світі математики: українське науково-популярне видання з математики. Том 13, випуск 3 / голов. ред. Шевченко Г.М.; редкол.: Антонюк О.В., Басов Д.С., Безущак О.О. [та ін.]. Київ: Київський університет, 2007. 103 с.

22. Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Сорокін Ю. І. Математика в поняттях, означеннях і термінах: 2 частина. Київ, 1986. 359 с.

23. Послідовність Фібоначчі // *Вікіпедія* : вільна енциклопедія.

URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Послідовність_Фібоначчі

24. Золотий перетин // *Вікіпедія* : вільна енциклопедія.

URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Золотий_перетин

25. Едуард Люка // *Вікіпедія* : вільна енциклопедія.

URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Едуард_Люка

26. Lucas number // *Wikipedia* : the free encyclopedia. —

URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_number

27. Knott R. *Fibonacci and Golden Ratio Equations* [Electronic resource]. — URL: <https://r-knott.surrey.ac.uk>

28. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / Микола Степанович Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. — 2014. — № 1. — С. 35–39.

URL: <https://essuir.sumdu.edu.ua/server/api/core/bitstreams>

29.Методичні рекомендації для розроблення модельних навчальних програм :
додаток до листа Міністерства освіти і науки України від 24.03.2021 №
4.5/637-21. Київ : Директорат дошкільної, шкільної, позашкільної та
інклюзивної освіти МОН України, 2021. 6 с.

URL:<https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/rizne/2021/03/25/metod.pdf>