

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

ЗАСТОСУВАННЯ МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ТА
ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ
УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ РОЗДІЛУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
«ЧИСЛОВІ РЯДИ»

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності 014.04 Середня освіта
(математика)
Бочасвої Катерини Дмитрівни
Керівник: канд. техн. наук, професор
Корольський В. В.

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Бочаєва Катерина Дмитрівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ЗВ'ЯЗОК ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПРИ НАВЧАННІ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ».....	8
1.1. Основні поняття теми «Числові ряди».....	8
1.2. Геометричні моделі числових рядів та їх особливості та призначення.....	11
1.3. Реалізація міждисциплінарних зв'язків при навчанні теми «Числові ряди»	13
1.4. Числові ряди за допомогою графіків алгебраїчних функцій.....	17
Висновки до розділу 1.....	18
РОЗДІЛ 2. СТВОРЕННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ ЗВ'ЯЗКІВ.....	20
2.1. Задачі точкової геометричної інтерпретації членів числового ряду	22
2.2. Задачі лінійної геометричної інтерпретації членів числового ряду	24
2.3. Задачі квадратурної геометричної інтерпретації членів числового ряду	39
2.4. Задачі кубатурної геометричної інтерпретації членів числового ряду	64
2.5. Задачі за допомогою графіків функцій: $y = \ln x$; $y = \frac{1}{x}$ геометричної інтерпретації членів числового ряду.....	68
Висновки до розділу 2.....	73

ВИСНОВКИ	76
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	78
ДОДАТКИ	84
Додаток А	84
Додаток Б	99

ВСТУП

Актуальність дослідження. У сучасній освіті стає все більше вимог до висококваліфікованих спеціалістів, особливо в області математики. Це передбачає не просто в засвоєнні теоретичних знань, а в комплексному підході розвитку логічного мислення і практичних навичок. Для того, щоб покращити і вдосконалити освітній процес, важливо використовувати такий напрям як міждисциплінарні зв'язки. За допомогою цього напрямку у студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів формується цілісне сприйняття шкільного курсу математики і вивченого матеріалу вищої математики. Також важливим елементом слід зауважити геометричні моделі, які будуть допомагати візуально встановлювати дані міждисциплінарні зв'язки.

«Числові ряди» є одним з найважливіших розділів математичного аналізу, особливо для майбутніх вчителів і студентів педагогічних університетів. Саме в даному розділі ми чітко можемо прослідкувати важливість використання міждисциплінарних зв'язків і геометричних моделей. Під час вивчення даного розділу студенти спеціальності «Математика» поглиблюють такі базові поняття з ШКМ як арифметична та геометрична прогресії, площі та об'єми фігур, формули відстані між двома точками та інші.

Використання геометричної інтерпретації допоможе студентам наочно краще засвоювати навчальний матеріал, поглибити попередні знання, впровадити нові методи вивчення теми «Числові ряди». Окрему цінність становить можливість створення міждисциплінарних зв'язків та об'єднання теми числових рядів з іншими розділами математики. Це обумовлює практичну значущість даного дослідження та підтверджує його актуальність у сучасній освіті.

Метою даної кваліфікаційної роботи є створення системи задач за допомогою рекомендованих геометричних моделей та міждисциплінарних зв'язків в межах вивчення розділу математичного аналізу «Числові ряди».

Для досягнення вищепоставленої мети будемо виконувати наступні **завдання:**

1. Аналіз наукової літератури для визначення сутності понять «міждисциплінарні зв'язки» та «геометричні моделі» у вивченні розділу математичного аналізу «Числові ряди».
2. Розробити математичну модель пов'язану з використанням відомих числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a + d(n-1)$.
3. Створити числові ряди і провести їх дослідження на збіжність і використання в навчальному процесі.
4. Створити посібник «Створення та дослідження числових рядів» для бакалаврів 014.04 середня освіта «Математика».

Об'єктом дослідження є розділ математичного аналізу «Числові ряди».

Предметом дослідження є розробка геометричних моделей і реалізація міждисциплінарних зв'язків для створення задач до розділу «Числові ряди» математичного аналізу при вивченні студентами спеціальності 014.04 середня освіта «Математика» (рівень бакалавр).

Для розв'язання вищеперелічених завдань були використані наступні **основні методи дослідження**:

1. Порівняльний аналіз науково-методичної літератури (вивчення та порівняння).
2. Синтез та узагальнення теоретичних положень сучасних науково-методичних джерел.
3. Розробка геометричних моделей для створення числових рядів пов'язаних з їх вивченням майбутніми бакалаврами спеціальності 014.04 середня освіта «Математика».
4. Реалізація міждисциплінарних зв'язків за допомогою геометричних моделей і основних математичних дисциплін підготовки бакалаврів.
5. Створення посібника «Створення та дослідження числових рядів».

Апробація: публікація статті у збірнику «Наукові записки молодих учених», випуск 12. Кропивницький: РВВ ЦДУ ім В. Винниченка, 2023.

Структура роботи складається зі вступу, двох розділів з висновками до кожного, загального висновку, додатків та списку використаних джерел, який має 36 найменувань.

РОЗДІЛ 1. ЗВ'ЯЗОК ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПРИ НАВЧАННІ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ РЯДИ»

1.1. Основні поняття теми «Числові ряди»

Теорія числових рядів є значущим розділом при вивченні математичного аналізу і вищої математики. «Знадобилося дві тисячі років розвитку людської цивілізації для того, щоб математики усвідомили поняття ряду, границі, інтеграла, міри, надали їм чіткого абстрактного означення, вивчили їх властивості й навчилися слушно їх застосовувати при розв'язанні різноманітних прикладних та теоретичних математичних задач» [3, с.12-13]. Це обумовлює досить широке застосування числових рядів в різних розділах математики, фізики, інформатики та інших.

Завдяки вивченню числових рядів можна краще демонструвати поняття нескінчених сум числових доданків та їх поводження при наближенні до нескінченності. Також варто зазначити, коли ряди збігаються, тоді можна обчислити їх суму.

Числовий ряд — нескінченна сума послідовності чисел виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Це означає, що розглядають дві числові послідовності, а саме послідовність членів (елементів) ряду $\{a_n \in R \mid n \in N\}$ та послідовність часткових (частинних) сум ряду $\{S_n \in R \mid n \in N\}$, де $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, n \in N$ [3, с.13].

Загальний член числового ряду є вираз $\{a_n \in R \mid n \in N\}$, який дозволяє зв'язувати кожний окремий член ряду та за його допомогою розв'язувати інші задачі. Він є ключовим компонентом для розуміння структури ряду та динаміки поведінки його членів зі зростанням $n, n \in N$.

Слід відмітити, що у шкільному курсі математики розглядаються числові послідовності, які можна пов'язувати відповідно з числовими рядами. Так у

підручниках авторів Мерзляка А. Г. і Тарасенкової Н. А. можна знайти означення цього поняття. Використаємо їх для порівняння з означенням числового ряду: «об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ..., утворюють послідовності» [1, с. 151] і «якщо кожному натуральному числу n за деяким правилом поставити у відповідність число a_n , то одержимо послідовність чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ або числову послідовність (a_n) » [2, с. 172]. Як бачимо, числова послідовність стала базою у ШКМ для вивчення числових рядів у вищій математиці. Послідовність вважається упорядкованим набором чисел за допомогою певної функції, а ряд розглядається вже як нескінченна сума цих чисел. Це дає змогу глибше зануритись у скінченність числового ряду і таким чином розширити базу математичних знань та дослідження більш складних математичних явищ.

Розглянувши джерела [4, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 27] можна побачити багато математичних задач, пов'язаних зі збіжністю та розбіжністю, знаходження суми числових рядів та інше. Ці задачі широко розкривають як теоретичні так і практичні основи числових рядів, показують можливі методи і вміння розв'язувати задачі, пов'язані з числовими послідовностями та рядами.

В контексті сказаного вище варто розглянути деякі ознаки і властивості збіжності знакододатних числових рядів [3, с. 18-56], а саме:

1. Теорема 21.2.1 (необхідна і достатня умова збіжності невід'ємного ряду). Числовий ряд з невід'ємними членами збіжний тоді й лише тоді, коли послідовність часткових сум або будь-яка її підпослідовність є обмеженою зверху: $a_n \geq 0, n \in N \Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — збіжний} \Leftrightarrow \exists c \geq 0: s_n \leq c, n \in N \Leftrightarrow \exists c \geq 0: s_{n_k} \leq c, \text{ де } n_k \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty, n_k \in N)$.
2. Теорема 21.2.2 (мажорантна ознака порівняння збіжності числових рядів). Нехай для числових рядів з невід'ємними членами виконана умова $0 \leq a_n \leq b_n, n \in N$. Тоді: 1) якщо є збіжним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то таким є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Теорема 21.2.5 (гранична ознака порівняння збіжності числових рядів). Нехай для членів числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконані нерівності $a_n \geq 0, b_n > 0, n \in N$ та існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Тоді:
- Якщо границя є додатним числом, тобто $0 < c < +\infty$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ або обидва збіжні, або обидва розбіжні, та умову існування границі можна подати у рівносильному вигляді $a_n \sim cb_n, n \rightarrow +\infty$.
 - Якщо границя $c = 0$, то справджуються твердження попередньої теореми 21.2.2.
 - Якщо границя $q = +\infty$, то справджуються твердження попередньої теореми 21.2.2, в якій ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ змінено місцями.
4. Теорема 21.2.6 (ознака Даламбера збіжності числового ряду). Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ складено з додатних членів: $a_n > 0, n \in N$. Тоді:
- Якщо члени ряду задовольняють нерівності $a_{n+1}/a_n \leq q < 1, n \in N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним.
 - Якщо справедливі нерівності $a_{n+1}/a_n \geq 1, n \in N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.
5. Теорема 21.2.8 (ознака Коші збіжності числового ряду). Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ складено з невід'ємних членів: $a_n \geq 0, n \in N$. Тоді:
- Якщо члени ряду задовольняють нерівності $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, n \in N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним.
 - Якщо справедливі нерівності $\sqrt[n]{a_n} \geq 1, n \in N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.
6. Теорема 21.2.14 (інтегральна ознака Коші–Маклорена). Якщо невід'ємний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ складено зі значень в цілих точках деякої незростаючої дійсної функції f , визначеної на півосі $[1; +\infty)$, тобто $a_n = f(x)|_{x=n}, n \in N$, то він збігається тоді й лише тоді, коли є

збіжним невластний інтеграл від цієї функції, обчислений в межах від 1 до $+\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ [3, с. 18-56].

Вище розглянуті ознаки і властивості допомагають не тільки визначити збіжність або розбіжність ряду, а й застосовувати набуті знання для вирішення широкого кола теоретичних і практичних завдань, пов'язаних з дослідженням нових числових рядів. Для цього можливо застосовувати поряд з геометричними моделями і міждисциплінарними зв'язками класичні числові ряди, тобто ряди наступного виду:

1. Гармонічний ряд:

- Формула: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

2. Геометричний ряд:

- Формула: $\sum$, де $|r| < 1$.

3. Спряжений ряд до гармонічного:

- Формула: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

4. Ряд вигляду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

та інші [3, с.13-24].

Отже, володіння основними поняттями теми «Числові ряди» та відомими числовими рядами є необхідною базою для вивчення більш ширших і складніших питань та створення нових числових рядів.

1.2. Геометричні моделі числових рядів та їх особливості та призначення.

При засвоєнні числових рядів всі звикли до вивчення тільки теоретичних знань без ілюстрацій та наочностей. Як можна побачити, це не дає такого бажаного ефекту при підготовці майбутніх вчителів математики, навіть навпаки, може знизити мотивацію вивчення числових рядів. Саме тому в останні часи з'явилося поняття геометричної моделі числового ряду та їх використання для поглиблення вивчення числових рядів. «Геометрична інтерпретація – важлива складова вивчення геометричних об'єктів та їх властивостей і доведення

формул обчислення параметрів цих об'єктів. Геометричні інтерпретації успішно використовуються при вивченні модулів математичного аналізу: вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної і декількох змінних. У той же час в модулі «Ряди», який є одним з основних в математичному аналізі, геометричні інтерпретації практично відсутні» [18, с. 58].

«Геометрична інтерпретація числових рядів передбачає представлення математичних послідовностей за допомогою параметрів елементів об'єктів, шаблонів або структур. Цей підхід забезпечує візуальний та інтуїтивний спосіб зрозуміти поведінку та властивості числових рядів. Генерація членів числових рядів за допомогою геометричних моделей є цікавою галуззю досліджень, яка може включати в себе різноманітні методи та підходи для представлення та вивчення числових рядів» [31, с. 8]. Таким чином, геометричні моделі є цікавим інструментом для наочного представлення числових рядів. Це дає змогу краще візуалізувати абстрактні математичні поняття і зрозуміти сутність нескінченних сум.

Геометричне моделювання числових рядів базується на використанні вже здобутих теоретичних і методологічних принципів, що в поєднанні з візуальним геометричним уявленням дає ще більший результат для майбутніх вчителів математики. Такий підхід дозволяє глибше аналізувати закономірності числових рядів, що забезпечує комплексне розуміння математичного аналізу шляхом інтеграції геометричних і математичних концепцій. Застосування теоретичних положень і практичних підходів сприятиме поглибленому розумінню властивостей числових рядів та особливостей їхньої поведінки.

Геометричні моделі доречно підходять для створення нових числових рядів і пов'язаних з ними задач. Це допоможе проводити дослідження не тільки на збіжність або розбіжність, а й на аналіз і обчислення послідовності площ та об'ємів геометричних тіл. В свою чергу це розкриває нові можливості на розглядання багатьох моделей, а саме: лінійних, квадратурних, кубатурних інтерпретацій числових рядів.

Детальний аналіз літератури допоміг розібратися нам з особливостями та призначенням геометричних моделей при вивченні числових рядів. Бобирь В., Христюк А., Корольский В., Дзигарська Н., Тураєва О., Габ С., Римар А. та ряд інших дослідників. У своїх роботах вони створювали різні геометричні моделі: від найпростіших, таких як квадрат зі стороною $a=1$, до складніших — прямокутники, трикутники, трапеції, кола, дуги та інше. Ще одним напрямком створення нових рядів є використання геометричних фігур пов'язаних з графіками різноманітних відомих функцій, наприклад $y = \ln(x)$; $y = \frac{1}{x}$; $y = x^n$ та інші. Використання геометричних моделей дає змогу вивчення числових рядів на рівні візуалізації їх елементів.

Геометричні моделі числових рядів є не тільки візуалізацією теоретичних знань, а й корисним і ефективним інструментом для розв'язання практичних задач, які сприяють поєднанню знань з різних дисциплін та засобом розвитку у студентів логічного та абстрактного мислення. Їх призначення полягає в забезпеченні наочності, зацікавленості, сучасності, підвищеної мотивації при вивченні теми «Числові ряди».

Отже, геометричні моделі використовуються при вивченні числових рядів через візуалізацію складних теоретичних знань, формуючи у майбутніх вчителів математики зацікавленість у сприйнятті важливих понять теми. Це допомагає не тільки згрупувати всі набуті знання, а й розширити їх.

1.3. Реалізація міждисциплінарних зв'язків при навчанні теми «Числові ряди»

У наші часи від висококваліфікованих спеціалістів потребують більше обізнаності у різних наукових сферах. «Сучасний світ вимагає від фахівців різних сфер діяльності вміння критично аналізувати та синтезувати інформацію для ефективного розв'язання складних завдань. Інтеграція знань з різних галузей, зокрема математичних, сприяє розвитку ключових компетенцій у здобувачів вищої освіти, що дозволяє їм глибше усвідомлювати ситуації, прогнозувати їхній розвиток та робити обґрунтовані висновки»[30, с. 262]. Як

можна побачити традиційні методи навчання починають менш ефективно працювати на рівень знань майбутніх спеціалістів, те ж саме стосується і вчителів математики. Студенти перестали сприймати інформацію комплексно і частіше запам'ятовують вибірково.

На допомогу у вирішенні нових проблем дослідники стали розглядати метод міждисциплінарних зв'язків. «Міждисциплінарні зв'язки допомагають сформувати у студентів цілісну картину про значущість кожного математичного об'єкта, алгоритму чи теорії, і як наслідок, робить знання системними та практично більш значущими»[29, с. 116]. Це дає змогу вивчати числові ряди системно, поєднати нові знання з вже відомими, забезпечити глибше розуміння теорії.

Числові ряди починають вивчати у ВНЗ, а у школі в 9 класі всіх знайомлять з такими поняттями як алгебраїчна і геометрична прогресії. Це перше уявлення про числові ряди. Давайте пригадаємо означення прогресій. «Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число»[1, с. 160]. «Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число»[1, с. 173]. Знаючи означення далі учні вчать знаходити скінченні суми перших n -членів послідовності.

Прослідковування зв'язків числових рядів і геометричних моделей дає змогу зрозуміти, що це найкраще поєднання для прикладу міждисциплінарних зв'язків у математичному аналізі. Вони поєднують між собою аналітично-алгебраїчні підходи та наочне представлення абстрактних понять теми «Числові ряди», що в свою чергу робить тему інтуїтивно доступною і зрозумілою.

Використовуючи розглянуті у попередньому пункті, геометричні моделі числових рядів, важливим є застосування міждисциплінарних зв'язків. Це передбачає застосування координатного методу, формул для обчислення довжин ліній (прямих і кривих), площ і об'ємів. Для цього використовуються знання з

різних розділів математики: шкільного курсу алгебри, аналітичної геометрії, планіметрії та стереометрії, включаючи знаходження рівнянь, відстаней від точок до прямих, обчислення площ трикутників засобами аналітичної геометрії, а також математичного аналізу.

Розглянувши геометричні моделі у роботах Габа С., Дзигарської Н., Корольський В. В., Михайлової Я., Няньчук В., Примакової О., Римара А., Романової А., Сьомкіної К., Тураєвої О. можна побачити міждисциплінарні зв'язки між математичним аналізом, геометричними інтерпретаціями і знаннями зі шкільного курсу математики. Наприклад, задачу про знаходження ряду довжин відрізків можна розв'язати кількома способами. Застосувати всім відому формулу знаходження відстані між двома точками, а саме: «Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$. Оскільки довжина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ дорівнює відстані між його початком і кінцем, то її можна обчислити за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ »[6, с. 114, 7, с.67]. Також ці довжини рядів можна знаходити через теорему косинусів, якщо на геометричній моделі чітко прослідковується прямокутний трикутник, а саме вона формулюється так: «Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними. Можна записати: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ »[7, с. 12-14]. Або визначивши графік функції, яка задається двома точками, даної послідовності через визначений інтеграл з відомим відрізком інтегрування. Для цього способу розв'язку слід пригадати наступні формули: « $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ »[9, с. 89-90] і « $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ »[11, с. 74-75].

Приклади на знаходження рядів площ трикутників також мають багато способів розв'язань. Якщо це довільний трикутник, то він буде знаходитись за формулою «добутку половині сторони на висоту, проведену до цієї сторони, можна записати: $S = \frac{1}{2}ah_a$ », якщо це прямокутний трикутник, то попередня формула спрощується і виглядає наступним чином: «половині добутку його

катетів, можна записати: $S = \frac{1}{2}ab$ »[5, с. 155]. Якщо в трикутнику відомі або знайдені всі три сторони, тоді можна застосувати формулу Герона: «площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна обчислити за формулою $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p — його півпериметр», якщо в трикутнику відомий або знайдений кут між двома сторонами, то формула площі дорівнює: «половині добутку двох його сторін на синус кута між ними, можна записати: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ »[7, с. 35-36].

Для знаходження рядів об'ємів тіл обертання, утворюючи конуси, зрізані конуси, циліндри і так далі, існує також багато способів розв'язання. Для знаходження об'єму конуса слід пригадати і скористатися наступною формулою: «Об'єм конуса V з площею основи S і висотою h можна обчислити за формулою $V = \frac{1}{3}Sh$. Якщо відомий радіус основи r , то дану формулу можна записати у вигляді $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ »[22, с. 149]. Або, якщо знайти графік функції і знати границі обертання (у випадку конуса це і є його висота), то через визначений інтеграл можна обчислити ряд послідовності об'ємів конусів, а саме так: « $V = \int_a^b S(x) dx$. Якщо обертання відбувається навколо вісі Ox , тоді формулу можна записати у вигляді $V_{Ox} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$, якщо навколо вісі Oy , то — $V_{Oy} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dy$ »[11, с. 84].

Отже, реалізація міждисциплінарних зв'язків з геометричними моделями є важливою складовою у розумінні теми «Числові ряди», так як прослідковується тісний зв'язок з алгеброю, геометрією, аналітичною геометрією і математичним аналізом. Це дає змогу студентам складати цілісну картинку сприйняття навчального матеріалу і зацікавленість у майбутній професії.

1.4. Числові ряди за допомогою графіків алгебраїчних функцій

У процесі вивчення теми «Числові ряди» ключового значення набуває розвиток здатності встановлення зв'язку між аналітичними виразами та їхніми геометричними моделями як для учнів, так і для майбутніх вчителів математики. Одним із вдалих навчальних інструментів можна використати графіки вже відомих алгебраїчних функцій. Геометричні моделі допоможуть візуально представити динаміку зміни членів ряду, їх часткові суми, прямування до нескінченності, збіжності, розбіжності і т.д.

Графіки алгебраїчних функцій допомагають побудувати наочне представлення і більш глибоке розуміння абстрактного математичного аналізу. Як можна було зрозуміти, ряди можна створювати за допомогою графіків відомих функцій $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$ або $y = x^3$, які задані точково на координатній площині Оху. Розглядаючи фігури, які утворилися через відомі функції і обмеження кривими та прямими лініями і додатково осями координат, можна побачити багато задач про визначення рядів через точкову, лінійну, квадратурну або кубатурну геометричні інтерпретації. У цих випадках числові ряди стають результатом побудови геометричних моделей, що розкриває суть міждисциплінарних зв'язків між шкільним курсом математики і вищою математикою, а саме інтегральним поняттям площ та нескінченними сумами послідовностей. Це в свою чергу забезпечує інтуїтивне розуміння числових рядів у вигляді вже відомих алгебраїчних функцій, що є відображенням геометричних моделей.

Використання графіків алгебраїчних функцій при вивченні теми «Числові ряди» несуть великі дидактичні переваги, а саме:

- геометрична інтерпретація для легшого розуміння базових понять теми;
- представлення наочності при порівняльному аналізі різних типів рядів;

- можливість знаходження сум, величин послідовності відрізків, прямих, кутових коефіцієнтів, площ, об'ємів рядів;
- застосування міждисциплінарних зв'язків для створення та розв'язання прикладних задач, елементи змісту яких візуально спостерігаються на геометричній моделі;
- розвиток просторового і логічного мислення.

Отже, використання геометричних моделей, пов'язаних з графіками відомих алгебраїчних функцій, посилює сприйняття навчального матеріалу не тільки теми «Числові ряди», а й поглиблює знання про самі алгебраїчні функції та можливості їх використання. При цьому абстрактні поняття стають більш доступними для розуміння учнів, студентів та майбутніх вчителів математики.

Висновки до розділу 1

Вивчення теми «Числові ряди» відіграє вагому роль при вивченні інших понять математичного аналізу. Це вимагає як від учнів, так і від студентів більш широкого, абстрактного і логічного мислення. Усвідомити всю значущість числових рядів, їх збіжності або розбіжності, знаходження часткових сум, границь — все це становить фундамент у використанні подальших роздумів, розв'язків і досліджень в математичних дисциплінах. Втім, традиційні методики викладання потребували класичних теоретичних знань без глибокого уявлення якоїсь візуалізації, використання алгебраїчного та аналітичного методів, що могло ускладнювати розуміння у студентів та знижувати мотивацію у майбутньому. Більшість понять даної теми досить абстрактні і можуть важко сприйматися тільки на слух, тому дослідники вирішують вдаватися до нових методик викладання. Міждисциплінарні зв'язки в поєднанні з геометричними моделями дають великий поштовх до нових знань, зацікавленості у студентів і систематизації вже відомого матеріалу.

Як ми вже раніше з'ясували, геометричні моделі дозволяють сприймати вивчати інші поняття математичного аналізу на рівні візуалізації. Їх функції полягають у наочності представлення елементів числових рядів, сум, збіжностей і тощо. Це дозволяє не тільки ілюструвати математичні явища, а й

ефективно виконувати навчальні завдання, що сприяє ефективному аналізу інформації, заохоченню у пошуку інформації, розвитку критичного і творчого мислення.

Пригадавши вищезазначені факти можна сказати, що міждисциплінарні зв'язки є потужним засобом формування цілісного сприйняття навчального матеріалу у студентів, що в свою чергу допомагає раціонально використовувати набуті раніше знання. Вище розглянуті геометричні моделі у джерелах допомогли нам зробити деякі висновки. Можна побачити, як багато прикладів задач можна розв'язати кількома способами, просто пригадавши формули від шкільного курсу математики (алгебри, планіметрії, стереометрії) до вищої математики (аналітичної геометрії, математичного аналізу). Це передбачає використання координатного методу, формул визначення довжин ліній, як кривих так і прямих, площ трикутників, прямокутників, трапецій та інших геометричних фігур, об'ємів тіл обертання (конуси, зрізані конуси, циліндри та інші).

Отже, використання інтегрованого підходу міждисциплінарних зв'язків і геометричних моделей перетворює абстрактні поняття на зрозумілі візуальні образи та демонструє важливість застосування вже вивченого навчального матеріалу. Це все в свою чергу посилює зацікавленість і підвищує мотивацію до нових знань у майбутніх вчителів математики.

РОЗДІЛ 2. СТВОРЕННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ ЗВ'ЯЗКІВ

Поняття «модель» має досить широке поле розуміння. Але при вивченні дисциплін природничо-математичного спрямування моделі використовуються для поширення знань про досліджуваний об'єкт моделювання. Тобто, в навчальному процесі будь-якого природничо-математичного рівня використовують різноманітні моделі (плакати, макети, і т.п.), які мають демонстраційне призначення. Але ми пропонуємо розробку і використання геометричних моделей, які дають можливість генерувати різноманітні числові ряди, створювати нові задачі і втілювати їх в процес вивчення розділу «Числові ряди» при підготовці вчителів математики рівня «бакалавр». Розв'язання задач базується на використанні параметрів елементів розробленої (пропонуємої) геометричної моделі та міждисциплінарних зв'язків. При цьому потребуються від студентів не тільки знання вивчаємих базових наукових дисциплін, але і прояви навичок проводити пошуково-дослідницьку роботу та логічного мислення математичного спрямування. З методичної точки зору використання геометричної моделі поширює розуміння поняття числового ряду через геометричну інтерпретацію його членів, частинних сум, суми ряду і процесу його збіжності або розбіжності. При цьому для розв'язання задач на створення рядів та їх дослідження на збіжність і обчислення частинних сум і суми необхідно використовувати комплекс знань з геометрії, алгебри і окремих розділів математичного аналізу. Варто відмітити, що значно поширюються можливості розуміння і застосування методу координат, який дозволяє розв'язувати задачі на відповідність між геометричними об'єктами та їх числовими параметрами (членами генеруємих числових рядів). Це у свою чергу дає можливість використовувати дидактичний принцип візуалізації членів числових рядів і алгоритму їх знаходження.

Для досягнення мети дослідження і розв'язання поставлених задач будемо використовувати геометричну модель, представлену на рис. 1.

2.1. Числові ряди з точковою геометричною інтерпретацією

Скласти числові ряди координат послідовності наступних точок (див. рис.

1):

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1. т. C_n ; | 4. т. t_n ; | 7. т. K_n ; |
| 2. т. a_n ; | 5. т. l_n ; | 8. т. P_n ; |
| 3. т. b_n ; | 6. т. d_n ; | 9. т. m_n . |

Розв'язання:

Задача 1. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (1)

Ряд (1) є відомим гармонічним рядом, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 22].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. C_n будуть наступними:

$$C_1\left(\frac{1}{2}; 0\right), C_2\left(\frac{1}{3}; 0\right), C_3\left(\frac{1}{4}; 0\right), \dots, C_n\left(\frac{1}{n}; 0\right).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, оскільки координати точки по у не змінюються, а саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Задача 2. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (2)

Ряд (2) є відомим гармонічним рядом, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [2, с. 22].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. a_n будуть наступними:

$$a_1\left(1; \frac{1}{2}\right), a_2\left(1; \frac{1}{3}\right), a_3\left(1; \frac{1}{4}\right), \dots, a_n\left(1; \frac{1}{n+1}\right).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, оскільки координати точки по х не змінюються, а саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Задача 3. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (3)

Ряд (3) є відомим рядом, загальний член якого дорівнює 1, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 29].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. b_n будуть наступними:

$$b_1\left(1; \frac{1}{2}\right), b_2\left(1; \frac{2}{3}\right), b_3\left(1; \frac{3}{4}\right), \dots, b_n\left(1; \frac{n}{n+1}\right).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, оскільки координати точки по x не змінюються, а саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Задача 4. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (4)

Ряд (4) є відомим гармонічним рядом, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 22].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. t_n будуть наступними:

$$t_1\left(\frac{1}{2}; 1\right), t_2\left(\frac{1}{3}; 1\right), t_3\left(\frac{1}{4}; 1\right), \dots, t_n\left(\frac{1}{n+1}; 1\right).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, оскільки координати точки по y не змінюються, а саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Задача 5. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (5)

Ряд (5) є відомим рядом, загальний член якого дорівнює 1, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 29].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. l_n будуть наступними:

$$l_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), l_2\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), l_3\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right), \dots, l_n\left(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1}\right).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, оскільки координати точки по x така ж сама, що і по y , тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{n}{n+1}$. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Задача 7. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (6)

Ряд (6) є відомим рядом, загальний член якого дорівнює 1, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 22].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. K_n будуть наступними:

$$K_2(\frac{2}{9}; \frac{2}{3}), K_3(\frac{3}{16}; \frac{3}{4}), \dots, K_n(\frac{n}{(n+1)^2}; \frac{n}{n+1}).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, координати точки по x змінюються наступним чином, а саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{n}{(n+1)^2}$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

Задачі 6, 8, 9 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

2.2. Числові ряди з лінійною геометричною інтерпретацією

1. Визначити числовий ряд, сума S якого візуально спостерігається на моделі (див. рис. 1):

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n a_{n+1}} ;$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n c_{n+1}} ;$ |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n b_{n+1}} ;$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{t_n t_{n+1}} ;$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n d_{n+1}} ;$ | 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{m_n m_{n+1}} ;$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{l_n l_{n+1}} ;$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{r_n r_{n+1}} .$ |

2. Визначити числовий ряд величин послідовності відрізків на моделі (див. рис. 1):

- | | |
|--|---|
| 1. $\{ \overline{0t_n} \}_{n=1}^{\infty};$ | 6. $\{ \overline{l_n b_n} \}_{n=1}^{\infty};$ |
| 2. $\{ \overline{0b_n} \}_{n=1}^{\infty};$ | 7. $\{ \overline{l_n e_n} \}_{n=1}^{\infty};$ |

$$3. \{|\overline{0k_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$8. \{|\overline{d_n a_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$4. \{|\overline{El_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$9. \{|\overline{d_n e_n}|\}_{n=1}^{\infty}.$$

$$5. \{|\overline{Ed_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

3. Визначити числовий ряд кутового коефіцієнту послідовності прямих на моделі (див. рис. 1):

$$1. |\overline{0t_n}|;$$

$$3. |\overline{0e_n}|;$$

$$2. |\overline{0b_n}|;$$

$$4. |\overline{0k_n}|.$$

Розв'язання:

Задача 1.1. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{a_n a_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{1}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 1).

Обчислимо відстані між точками за формулою [6, с.67]:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (7)$$

$$|\overline{a_1 a_2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \quad |\overline{a_2 a_3}| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}; \quad \dots; \quad |\overline{a_n a_{n+1}}| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (8)

Отримали ряд (8), сума якого дорівнює $S = \frac{1}{2}$.

Варто зазначити, що сума ряду $S = \frac{1}{2}$, може бути знайдена за допомогою обчислення границі послідовності частинних сум ряду:

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad S_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \quad \dots; \quad S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \rightarrow S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

Обчислимо суму ряду S за формулою:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Зрозуміло, що сума ряду (8) S дорівнює: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$

Або можна було розв'язати іншим способом, а саме так як відрізок $|\overline{a_n a_{n+1}}|$ і вісь Оу паралельні між собою, то довжиною відрізків ряду $|\overline{a_n a_{n+1}}|$ можна вважати тільки ординату точок.

Задача 1.2. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{b_n b_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{1}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 1).

Обчислимо відстані між точками за формулою (7):

$$|\overline{b_1 b_2}| = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} ; |\overline{b_2 b_3}| = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} ; \dots ; |\overline{b_n b_{n+1}}| = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (9)

Отримали ряд (9), сума якого дорівнює $S = \frac{1}{2}$.

Варто зазначити, що сума ряду $S = \frac{1}{2}$, може бути знайдена за допомогою обчислення границі послідовності частинних сум ряду:

$$S_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} ; S_2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} ; S_3 = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} ; \dots ; S_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \rightarrow S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \dots - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{n}{n+1}$$

Обчислимо суму ряду S за формулою:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Зрозуміло, що сума ряду (9) S дорівнює: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$

Або можна було розв'язати іншим способом, а саме так як відрізок $|\overline{b_n b_{n+1}}|$ і вісь Оу паралельні між собою, то довжиною відрізків ряду $|\overline{b_n b_{n+1}}|$ можна вважати тільки ординату точок.

Задача 1.3. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{d_n d_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 1).

Проаналізувавши рисунок, бачимо що точки $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ лежать на діагоналі квадрата, тому точка d_1 має координати $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $d_2 — (\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $d_3 — (\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$, $\dots$, $d_n — (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, а $d_{n+1} — (\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2})$. Обчислимо відстані між точками за

формулою (7). Тоді $|\overline{d_1 d_2}| = \sqrt{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $|\overline{d_2 d_3}| =$
 $\sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{3})^2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$; ...; $|\overline{d_n d_{n+1}}| =$
 $\sqrt{(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1})^2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$.

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}$ (10)

Отримали ряд (10), сума якого дорівнює $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Інший спосіб розв'язання включає в себе розглядання прямокутного трикутника OAB , а саме: $\angle OAB = 90^\circ$, OA і AB — катети, OB — гіпотенуза. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{d_n d_{n+1}}|$ лежить на половині гіпотенузи, тому знайдемо гіпотенузу трикутника за теоремою Піфагора (квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів) [5, с.116]:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (11)$$

Тоді $|\overline{OB}| = \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{AB}|^2} = \sqrt{2}$. Отже, сума шуканого числового ряду (10) обчислимо як половину гіпотенузи: $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{d_n d_{n+1}}|$ розглянути як половина діагоналі квадрата $OABC$, то знаючи сторону квадрата (за властивістю вони всі рівні, $OA=AB=BC=OC=1$) і формулу обчислення діагоналі квадрата знайдемо суму шуканого числового ряду (10): $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 1.4. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{l_n l_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 1).

Проаналізувавши рисунок, бачимо що точки $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ лежать на діагоналі квадрата, тому точка l_1 має координати $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, l_2 — $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, l_3 — $(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$, ..., l_n — $(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, а l_{n+1} — $(\frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2})$. Обчислимо відстані між точками за

формулою (7). Тоді $|\overline{l_1 l_2}| = \sqrt{(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $|\overline{l_2 l_3}| =$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}; \dots; |\overline{l_n l_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}.$$

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}$ (12)

Отримали ряд (12), сума якого дорівнює $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Інший спосіб розв'язання включає в себе розглядання прямокутного трикутника OAB , а саме: $\angle OAB = 90^\circ$, OA і AB — катети, OB — гіпотенуза. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{l_n l_{n+1}}|$ лежить на половині гіпотенузи, тому знайдемо гіпотенузу трикутника за теоремою Піфагора (11). Тоді $|\overline{OB}| = \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{AB}|^2} = \sqrt{2}$. Отже, сума шуканого числового ряду обчислимо як половина гіпотенузи: $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{l_n l_{n+1}}|$ розглянути як половина діагоналі квадрата $OABC$, то знаючи сторону квадрата (за властивістю вони всі рівні, $OA=AB=BC=OC=1$) і формулу обчислення діагоналі квадрата знайдемо суму шуканого числового ряду (12): $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 1.5. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{c_n c_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{1}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 1).

Обчислимо відстані між точками за формулою (7). Тоді $|\overline{c_1 c_2}| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $|\overline{c_2 c_3}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $\dots$; $|\overline{c_n c_{n+1}}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (13)

Отримали ряд (13), сума якого дорівнює $S = \frac{1}{2}$.

Варто зазначити, що сума ряду $S = \frac{1}{2}$, може бути знайдена за допомогою обчислення границі послідовності частинних сум ряду:

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; S_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \dots; S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \rightarrow S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

Обчислимо суму ряду S за формулою:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Зрозуміло, що сума ряду (13) S дорівнює: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Або можна було розв'язати іншим способом, а саме так як відрізок $|\overline{c_n c_{n+1}}|$ і вісь Ox паралельні між собою, то довжиною відрізків ряду $|\overline{c_n c_{n+1}}|$ можна вважати тільки ординату точок.

Задача 1.6. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{t_n t_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{1}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 1).

Маємо такі координати точок: $t_1 (\frac{1}{2}; 1)$, $t_2 (\frac{1}{3}; 1)$, $t_3 (\frac{1}{4}; 1)$, $t_4 (\frac{1}{5}; 1)$, ..., $t_n (\frac{1}{n+1}; 1)$, $t_{n+1} (\frac{1}{n+2}; 1)$

Отже, за формулою (7):

$$|\overline{t_1 t_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - 1)^2} = \frac{1}{6}, |\overline{t_2 t_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 + (1 - 1)^2} = \frac{1}{12}, \dots, |\overline{t_n t_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + (1 - 1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (14)

Отримали ряд (14), сума якого дорівнює $S = \frac{1}{2}$.

Або можна було розв'язати іншим способом, а саме так як відрізок $|\overline{t_n t_{n+1}}|$ і вісь Ox паралельні між собою, то довжиною відрізків ряду $|\overline{t_n t_{n+1}}|$ можна вважати тільки абсцису точок.

Задачі 1.7 і 1.8 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

Задача 2.1. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{0 t_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: $O(0;0)$, $t_1(\frac{1}{2}; 1)$, $t_2(\frac{1}{3}; 1)$, $t_3(\frac{1}{4}; 1)$, $t_4(\frac{1}{5}; 1)$, ..., $t_n(\frac{1}{n+1}; 1)$.

За допомогою теореми Піфагора (11) знайдемо відстань відрізка $|\overline{Ot_1}|$.

$$|\overline{Ot_1}| = \sqrt{1^2 + \frac{1^2}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{Ot_n}|$:

$$|\overline{Ot_2}| = \sqrt{1^2 + \frac{1^2}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$|\overline{Ot_3}| = \sqrt{1^2 + \frac{1^2}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{4},$$

.....,

$$|\overline{Ot_n}| = \sqrt{1^2 + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}$. (15)

За допомогою теореми косинусів знайдемо відстань відрізка $|\overline{Ot_1}|$ [7, с. 12-14]:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (16)$$

Так як $\Delta Ot_1C'_1$ прямокутний, то $\angle Ot_1C'_1 = 90^\circ$, $\cos \angle Ot_1C'_1 = 0$. Отже, відстань відрізка $|\overline{Ot_1}|$ буде така ж, як і в способі знаходження відстані за теоремою Піфагора, а саме $\frac{\sqrt{5}}{2}$, тоді і послідовність відрізків $|\overline{Ot_n}|$ також буде $\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}$.

Зрозуміло, що за допомогою формули відрізків між двома точками (7) ми з легкістю знайдемо послідовність відрізків $|\overline{Ot_n}|$, де отримаємо ряд (15).

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від 0 до $\frac{1}{n+1}$.

Якщо т. $O(0;0)$, а т. $t_n(\frac{1}{n+1}; 1)$, то одержимо рівняння прямої лінії [9, с.89]:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (17)$$

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції:

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{\frac{1}{n+1}-0}. \text{ Спростивши отримаємо } y = x(n+1). \text{ За формулою обчислення}$$

довжини дуги гладкої кривої [11, с.82]:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (18)$$

Внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_0^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + (n+1)^2} dx = x\sqrt{n^2 + 2n + 2} \Big|_0^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 2}}{n+1}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (15).

Задача 2.2. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{0b_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: $O(0;0)$, $b_1(1; \frac{1}{2})$, $b_2(1; \frac{2}{3})$, $b_3(1; \frac{3}{4})$, $b_4(1; \frac{4}{5})$, ..., $b_n(1; \frac{n}{n+1})$.

За допомогою теореми Піфагора (11) знайдемо відстань відрізка $|\overline{0b_1}|$.

$$|\overline{0b_1}| = \sqrt{1^2 + \frac{1^2}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{0b_n}|$:

$$|\overline{0b_2}| = \sqrt{1^2 + \frac{2^2}{3}} = \frac{\sqrt{13}}{3},$$

$$|\overline{0b_3}| = \sqrt{1^2 + \frac{3^2}{4}} = \frac{5}{4},$$

.....,

$$|\overline{0b_n}| = \sqrt{1^2 + \frac{n^2}{n+1}} = \frac{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}}{n+1}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}}{n+1}$. (19)

За допомогою теореми косинусів (16) знайдемо відстань відрізка $|\overline{Ob_1}|$. Знайдемо відстань відрізка $|\overline{Ob_1}|$. Так як $\triangle Ob_1C_1$ прямокутний, то $\angle Oc_1 b_1 = 90^\circ$, $\cos \angle Oc_1 b_1 = 0$. Отже, відстань відрізка $|\overline{Ob_1}|$ буде така ж, як і в способі знаходження відстані за теоремою Піфагора, а саме $\frac{\sqrt{5}}{2}$, тоді і послідовність відрізків $|\overline{Ob_n}|$ також буде $\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n+1}$.

Зрозуміло, що за допомогою формули відрізків між двома точками (7) ми з легкістю знайдемо послідовність відрізків $|\overline{Ob_n}|$, де отримаємо ряд (19).

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від 0 до 1. Якщо т. О (0;0), а т. b_n $(1; \frac{n}{n+1})$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{n}{n+1}-0} = \frac{x-0}{1-0}$. Спростивши отримаємо $y = x \left(\frac{n}{n+1} \right)$. За формулою обчислення довжини дуги гладкої кривої (18), внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2} dx = \frac{x\sqrt{2n^2+2n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n+1}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (19).

Задача 2.4. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{El_n}|\}_{n=1}^\infty$.

Маємо такі координати точок: Е $(\frac{1}{2}; 1)$, l_1 $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, l_2 $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, l_3 $(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$, l_4 $(\frac{4}{5}; \frac{4}{5})$, ..., l_n $(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$.

За допомогою формули довжини відрізка, який проходить через дві точки (7), знайдемо відстань відрізка $|\overline{El_1}|$.

$$|\overline{El_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{El_n}|$:

$$|\overline{El}_2| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

$$|\overline{El}_3| = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

.....,

$$|\overline{El}_n| = \sqrt{\left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{(n-1)^2}{2(n+1)} + \left(\frac{-1}{n+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{n^2-2n+5}}{2n+2}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n+5}}{2n+2}$. (20)

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від $\frac{1}{2}$ до $\frac{n}{n+1}$.

Якщо т. Е $(\frac{1}{2}; 1)$, а т. $l_n (\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y-1}{\frac{n}{n+1}-1} =$

$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{n}{n+1}-\frac{1}{2}}$. Спростивши отримаємо $y = x \left(\frac{-2}{n-1}\right)$. За формулою обчислення довжини

дуги гладкої кривої (18), внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2}{n-1}\right)^2} dx = x \frac{\sqrt{n^2-2n+5}}{n-1} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{n}{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2-2n+5}}{2n+2}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (20).

Задача 2.5. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{Ed}_n|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: Е $(\frac{1}{2}; 1)$, $d_1 (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $d_2 (\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $d_3 (\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$, $d_4 (\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$,
..., $d_n (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$.

За допомогою формули довжини відрізка, який проходить через дві точки (7), знайдемо відстань відрізка $|\overline{Ed}_1|$.

$$|\overline{Ed}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{Ed_n}|$:

$$|\overline{Ed_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{6},$$

$$|\overline{Ed_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

.....,

$$|\overline{Ed_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1-n}{2(n+1)}^2 + \left(\frac{-n}{n+1}\right)^2} = \frac{\sqrt{5n^2-2n+1}}{2n+2}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^2-2n+1}}{2n+2}$. (21)

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{n+1}$.

Якщо т. Е $(\frac{1}{2}; 1)$, а т. $d_n (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y-1}{\frac{n}{n+1}-1} =$

$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}}$. Спростивши отримаємо $y = x \left(\frac{2n}{n-1}\right)$. За формулою обчислення довжини

дуги гладкої кривої(18), внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + \left(\frac{2n}{n-1}\right)^2} dx = x \frac{\sqrt{5n^2-2n+1}}{n-1} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\sqrt{5n^2-2n+1}}{2n+2}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (21).

Задача 2.6. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{l_n b_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: $l_1 (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $l_2 (\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $l_3 (\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$, $l_4 (\frac{4}{5}; \frac{4}{5})$, ..., $l_n (\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, $b_1 (1; \frac{1}{2})$, $b_2 (1; \frac{2}{3})$, $b_3 (1; \frac{3}{4})$, $b_4 (1; \frac{4}{5})$, ..., $b_n (1; \frac{n}{n+1})$.

За допомогою формули довжини відрізка, який проходить через дві точки (7), знайдемо відстань відрізка $|\overline{l_1 b_1}|$.

$$|\overline{l_1 b_1}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{2} + 0^2} = \frac{1}{2},$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{l_n b_n}|$:

$$|\overline{l_2 b_2}| = \sqrt{(1 - \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{3} + 0^2} = \frac{1}{3},$$

$$|\overline{l_3 b_3}| = \sqrt{(1 - \frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4} - 1)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{4} + 0^2} = \frac{1}{4},$$

.....,

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{(1 - \frac{n}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{n+1} + 0^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. (22)

Ще можна побачити на рис. 1, що ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{l_n b_n}|\}_{n=1}^{\infty}$ є катетами ряду трикутників $l_n b_n B$. Тому знаючи катет $b_n B$ і гіпотенузу $l_n B$ можна за теоремою Піфагора (11) з легкістю обчислити ряд відрізків $\{|\overline{l_n b_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від $\frac{n}{n+1}$ до 1. Якщо т. $l_n (\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, а т. $b_n (1; \frac{n}{n+1})$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}} =$

$\frac{x - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}}$. Спростивши отримаємо $y = \frac{n}{n+1}$. За формулою обчислення довжини дуги

гладкої кривої (18), внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_{\frac{n}{n+1}}^1 \sqrt{1 + 0^2} dx = x \Big|_{\frac{n}{n+1}}^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (22).

Задача 2.8. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{d_n a_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: $d_1 (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $d_2 (\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $d_3 (\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$, $d_4 (\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$, ..., $d_n (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, $a_1 (1; \frac{1}{2})$, $a_2 (1; \frac{1}{3})$, $a_3 (1; \frac{1}{4})$, $a_4 (1; \frac{1}{5})$, ..., $a_n (1; \frac{1}{n+1})$.

За допомогою формули довжини відрізка, який проходить через дві точки (7), знайдемо відстань відрізка $|\overline{d_1 a_1}|$.

$$|\overline{d_1 a_1}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{2} + 0^2} = \frac{1}{2},$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{d_n a_n}|$:

$$|\overline{d_2 a_2}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3} + 0^2} = \frac{2}{3},$$

$$|\overline{d_3 a_3}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3^2}{4} + 0^2} = \frac{3}{4},$$

.....,

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. (23)

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від $\frac{1}{n+1}$ до 1. Якщо т. $d_n (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, а т. $a_n (1; \frac{1}{n+1})$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} =$

$\frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}$. Спростивши отримаємо $y = \frac{1}{n+1}$. За формулою обчислення довжини дуги

гладкої кривої (18), внесемо отриману функцію під знак інтеграла:

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^1 \sqrt{1 + 0^2} dx = x \Big|_{\frac{1}{n+1}}^1 = \frac{n}{n+1}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (23).

Задачі 2.3 і 2.7 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

Задача 3.1. Визначити кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0t_n}|$.

Маємо такі координати точок: $0(0;0)$, $t_1(\frac{1}{2}; 1)$, $t_2(\frac{1}{3}; 1)$, $t_3(\frac{1}{4}; 1)$, $t_4(\frac{1}{5}; 1)$, ..., $t_n(\frac{1}{n+1}; 1)$.

Кутовий коефіцієнт — це тангенс кута нахилу прямої до додатньої вісі абсцис. Він показує нахил прямої, яка проходить через дві точки, і обчислюється за формулою [9, с.80-81]:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (24)$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0t_1}|$:

$$k_{|\overline{0t_1}|} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}-0} = 2 > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут.}$$

За тією ж формулою знайдемо кутові коефіцієнти послідовності прямих $|\overline{0t_n}|$:

$$k_{|\overline{0t_2}|} = \frac{1-0}{\frac{1}{3}-0} = 3 > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут,}$$

$$k_{|\overline{0t_3}|} = \frac{1-0}{\frac{1}{4}-0} = 4 > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут,}$$

$$k_{|\overline{0t_4}|} = \frac{1-0}{\frac{1}{5}-0} = 5 > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут,}$$

.....,

$$k_{|\overline{0t_n}|} = \frac{1-0}{\frac{1}{n+1}-0} = n+1 > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут.}$$

Знайдемо границю кутового коефіцієнта послідовності прямих $|\overline{0t_n}|$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_{|\overline{0t_n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = +\infty$$

Отже, як можна побачити кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0t_n}|$, який дорівнює $n+1$, буде необмежено зростати.

Спробуємо розв'язати цю задачу іншим способом. Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{\frac{1}{n+1}-0}$. Спростивши отримаємо $y =$

$x(n+1)$. Знаючи формулу рівняння прямої, яке виглядає $y = kx + b$, де k — це коефіцієнт прямої, можемо знайти кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0t_n}|$, який буде дорівнювати $n+1$.

Задача 3.2. Визначити кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0b_n}|$.

Маємо такі координати точок: $0(0;0)$, $b_1(1; \frac{1}{2})$, $b_2(1; \frac{2}{3})$, $b_3(1; \frac{3}{4})$, $b_4(1; \frac{4}{5})$, ..., $b_n(1; \frac{n}{n+1})$.

Кутовий коефіцієнт — це тангенс кута нахилу прямої до додатньої вісі абсцис. Він показує нахил прямої, яка проходить через дві точки, і обчислюється за формулою (24). Знайдемо кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0b_1}|$:

$$k_{|\overline{0b_1}|} = \frac{\frac{1}{2}-0}{1-0} = \frac{1}{2} > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут.}$$

За тією ж формулою знайдемо кутові коефіцієнти послідовності прямих $|\overline{0b_n}|$:

$$k_{|\overline{0b_2}|} = \frac{\frac{2}{3}-0}{1-0} = \frac{2}{3} > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут,}$$

$$k_{|\overline{0b_3}|} = \frac{\frac{3}{4}-0}{1-0} = \frac{3}{4} > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут,}$$

$$k_{|\overline{0b_4}|} = \frac{\frac{4}{5}-0}{1-0} = \frac{4}{5} > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут,}$$

.....,

$$k_{|\overline{0b_n}|} = \frac{\frac{n}{n+1}-0}{1-0} = \frac{n}{n+1} > 0, \text{ отже, утворюється гострий кут.}$$

Знайдемо границю кутового коефіцієнта послідовності прямих $|\overline{0b_n}|$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_{|\overline{0b_n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = +\infty$$

Отже, як можна побачити кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0b_n}|$, який дорівнює $\frac{n}{n+1}$, буде необмежено зростати.

Спробуємо розв'язати цю задачу іншим способом. Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і

отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{n}{n+1}-0} = \frac{x-0}{1-0}$. Спростивши отримаємо $y = x \left(\frac{n}{n+1} \right)$. Знаючи формулу рівняння прямої, яке виглядає $y = kx + b$, де k — це коефіцієнт прямої, можемо знайти кутовий коефіцієнт послідовності прямих $|\overline{0b_n}|$, який буде дорівнювати $\frac{n}{n+1}$.

Задачі 3.3 і 3.4 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

2.3. Числові ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією

1. Визначити числовий ряд площ трикутників на моделі (див. рис. 1):

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1. $l_1 b_1 B$; | 8. $d_4 a_4 B$; |
| 2. $l_2 b_2 B$; | 9. $l_3 l_h K_n$; |
| 3. $l_3 b_3 B$; | 10. $l_2 l_3 K_3$; |
| 4. $l_4 b_4 B$; | 11. $l_1 l_2 K_2$; |
| 5. $d_1 a_1 B$; | 12. $d_2 d_1 P_1$; |
| 6. $d_2 a_2 B$; | 13. $d_3 d_2 P_2$; |
| 7. $d_3 a_3 B$; | 14. $d_4 d_3 P_3$. |

2. Визначити числовий ряд площ трапецій на моделі (див. рис. 1):

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. $l_1 l_2 b_2 b_1$; | 7. $0 d_3 a_3 A$; |
| 2. $l_1 l_3 b_3 b_1$; | 8. $0 d_2 a_2 A$; |
| 3. $l_1 l_4 b_4 b_1$; | 9. $0 d_1 a_1 A$; |
| 4. $l_2 l_3 b_3 b_2$; | 10. $d_4 d_3 a_3 a_4$; |
| 5. $l_3 l_4 b_4 b_3$; | 11. $d_3 d_2 a_2 a_3$; |
| 6. $0 d_4 a_4 A$; | 12. $d_2 d_1 a_1 a_2$. |

Розв'язання:

Задача 1.1. Визначити ряд площ трикутника $l_1 b_1 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $l_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$, $b_1 \left(1; \frac{1}{2} \right)$, $B (1; 1)$. Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle l_1 b_1 B = 90^\circ$; $l_1 b_1, b_1 B$ — катети; $l_1 B$ — гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою півдобутку катетів прямокутного трикутника [5, с. 155]:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times l_1 b_1 \times b_1 B. \quad (25)$$

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{l_1 b_1}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{2} + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$|\overline{b_1 B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $l_n(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, $b_n(1; \frac{n}{n+1})$, $B(1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{(1 - \frac{n}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{n+1} + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{b_n B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{n\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \times (n+1)^2} \quad (26)$$

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{n\Delta}$ підставимо $n=1$, то отримаємо площу трикутника $l_1 b_1 B$, яка дорівнює $\frac{1}{8}$.

Пригадаємо формулу Герона, де a, b, c — сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ [7, с.36]:

$$s_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (27)$$

Сторони $l_1 b_1$, $b_1 B$, $l_1 B$ ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Знайдемо півпериметр даного трикутника: $\frac{0,5+0,5+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{8}. \text{Отже, ряд площ (26) буде}$$

також рівний.

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою [5, с. 155]:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h_a \quad (28)$$

Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника заданого координатами своїх вершин, яка має такий вигляд [25]:

$$s_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (29)$$

Всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ (26), який буде рівний.

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника [7, с.35]:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \quad (30)$$

Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle l_1 b_1 B = 90^\circ$, то $\sin \angle l_1 b_1 B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо рівняння прямої яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}$. Спростивши рівняння набуває вигляду: $y = x$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури [11, с. 80]:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (31)$$

Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_{\Delta} = \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (26).

Задача 1.2. Визначити ряд площ трикутника $l_2 b_2 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $l_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), b_2 \left(1; \frac{2}{3}\right), B (1; 1)$.

Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle l_2 b_2 B = 90^\circ$; $l_2 b_2, b_2 B$ – катети; $l_2 B$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{l_2 b_2}| = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{3} + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3},$$

$$|\overline{b_2 B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $l_n \left(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1}\right), b_n \left(1; \frac{n}{n+1}\right), B (1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{n+1} + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{b_n B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (26).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{n\Delta}$ підставимо $n=2$, то отримаємо площу трикутника $l_2 b_2 B$, яка дорівнює $\frac{1}{18}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони $l_2 b_2, b_2 B, l_2 B$ ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}$. Знайдемо півпериметр даного трикутника: $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{6}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{6} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right)} = \frac{1}{18}.$$

Отже, отриманий ряд площ буде також рівний ряду (32).

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника заданого координатами своїх вершин (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ (26).

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle l_2 b_2 B = 90^\circ$, то $\sin \angle l_2 b_2 B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}}$, $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}}$, $y = 1$. Спростивши рівняння набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_{\Delta} = \int_{\frac{n}{n+1}}^1 (1 - x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^1 = \frac{1}{2 \times (n+1)^2}$. Підставивши $n=2$, отримаємо $S_{\Delta} = \frac{1}{18}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (26).

Задача 1.3. Визначити ряд площ трикутника $l_3 b_3 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $l_3 \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right), b_3 \left(1; \frac{3}{4}\right), B (1; 1)$.

Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle l_3 b_3 B = 90^\circ$; $l_3 b_3, b_3 B$ – катети; $l_3 B$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{l_3 b_3}| = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{4} + 0^2} = \frac{1}{4},$$

$$|\overline{b_3 B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $l_n \left(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1}\right), b_n \left(1; \frac{n}{n+1}\right), B (1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{n+1} + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{b_n B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (26).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{n\Delta}$ підставимо $n=3$, то отримаємо площу трикутника $l_3 b_3 B$, яка дорівнює $\frac{1}{32}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони $l_3 b_3, b_3 B, l_3 B$ ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$. Знайдемо півпериметр даного

трикутника: $\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{8}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{8} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{1}{32}.$$

Отже, ряд площ буде також рівний.

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ.

Також варто пригадати про формулу знаходження площі (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle l_3 b_3 B = 90^\circ$, то $\sin \angle l_3 b_3 B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні

рівняння функції: $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}}$, $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}}$, $y = 1$. Спростивши рівняння

набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $s_\Delta =$

$$\int_{\frac{n}{n+1}}^1 (1 - x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^1 = \frac{1}{2 \times (n+1)^2}. \text{ Підставивши } n=3, \text{ отримаємо } s_\Delta = \frac{1}{32}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (26).

Задача 1.4. Визначити ряд площ трикутника $l_4 b_4 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $l_4 \left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5} \right)$, $b_4 \left(1; \frac{4}{5} \right)$, $B (1; 1)$.

Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle l_4 b_4 B = 90^\circ$; $l_4 b_4$, $b_4 B$ – катети; $l_4 B$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|l_4 b_4| = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5} \right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{5} + 0^2} = \frac{1}{5},$$

$$|\overline{b_4 B}| = \sqrt{(1-1)^2 + (1-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{5}} = \frac{1}{5}.$$

Підставимо у формулу (25) і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $l_n(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, $b_n(1; \frac{n}{n+1})$, $B(1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{(1 - \frac{n}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{b_n B}| = \sqrt{(1-1)^2 + (1 - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n+1}^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (26).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{n\Delta}$ підставимо $n=4$, то отримаємо площу трикутника $l_4 b_4 B$, яка дорівнює $\frac{1}{50}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони $l_4 b_4, b_4 B, l_4 B$ ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}$. Знайдемо півпериметр даного

трикутника: $\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{10}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{10} (\frac{2+\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{5}) (\frac{2+\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{5}) (\frac{2+\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{5})} = \frac{1}{50}.$$

Отже, ряд площ буде також рівний.

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ.

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle l_4 b_4 B = 90^\circ$, то $\sin \angle l_4 b_4 B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}}$, $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}}$, $y = 1$. Спростивши рівняння набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_\Delta = \int_{\frac{n}{n+1}}^1 (1 - x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^1 = \frac{1}{2 \times (n+1)^2}$. Підставивши $n=4$, отримаємо $S_\Delta = \frac{1}{50}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (26).

Задача 1.5. Визначити ряд площ трикутника $d_1 a_1 B$.

Трикутник $d_1 a_1 B$ рівний трикутнику $l_1 b_1 B$. Отже, ряд площ також рівний і дорівнювати ряду (26).

Аналогічно до попередньої задачі зможемо застосувати вищеперераховані методи розв'язання.

Задача 1.6. Визначити ряд площ трикутника $d_2 a_2 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $d_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $a_2 \left(1; \frac{1}{3}\right)$, $B (1; 1)$. Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle d_2 a_2 B = 90^\circ$; $d_2 a_2$, $a_2 B$ – катети; $d_2 B$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{d_2 a_2}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3} + 0^2} = \frac{2}{3},$$

$$|\overline{a_2 B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{2^2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $d_n \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1} \right)$, $a_n \left(1; \frac{1}{n+1} \right)$, $B (1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{a_n B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{n^2}{n+1}} = \frac{n}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{n\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2 \times (n+1)^2} \quad (32)$$

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{n\Delta}$ підставимо $n=2$, то отримаємо площу трикутника $d_2 a_2 B$, яка дорівнює $\frac{2}{9}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони $d_2 a_2, a_2 B, d_2 B$ ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Знайдемо півпериметр даного

трикутника: $\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$. Скористаємося формулою Герона: $S_{\Delta} =$

$$\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)} = \frac{2}{9}. \text{Отже, ряд площ буде також рівний.}$$

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ.

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle d_2 a_2 B =$

90° , то $\sin \angle d_2 a_2 B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}$, $\frac{y - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}$, $y = 1$. Спростивши рівняння набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $s_\Delta = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1 - x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{n+1}}^1 = \frac{n^2}{2 \times (n+1)^2}$. Підставивши $n=2$, отримаємо $s_\Delta = \frac{2}{9}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (32).

Задача 1.7. Визначити ряд площ трикутника $d_3 a_3 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $d_3 \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $a_3 \left(1; \frac{1}{4}\right)$, $B (1; 1)$. Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle d_3 a_3 B = 90^\circ$; $d_3 a_3$, $a_3 B$ – катети; $d_3 B$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{d_3 a_3}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3^2}{4} + 0^2} = \frac{3}{4},$$

$$|\overline{a_3 B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{3^2}{4}} = \frac{3}{4}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $d_n \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right)$, $a_n \left(1; \frac{1}{n+1}\right)$, $B (1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{a_n B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{n^2}{n+1}} = \frac{n}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (32).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (32) підставимо $n=3$, то отримаємо площу трикутника $d_3 a_3 B$, яка дорівнює $\frac{9}{32}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони $d_3 a_3, a_3 B, d_3 B$ ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Знайдемо півпериметр даного

трикутника: $\frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{6+3\sqrt{2}}{8}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{6+3\sqrt{2}}{8} (\frac{6+3\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{4}) (\frac{6+3\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{4}) (\frac{6+3\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{4})} = \frac{9}{32}.$$

Отже, ряд площ буде також рівний.

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ.

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle d_3 a_3 B = 90^\circ$, то $\sin \angle d_3 a_3 B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні

рівняння функції: $\frac{y - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}, \frac{y - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}, y=1$. Спростивши рівняння

набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі

плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_{\Delta} = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1-x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{n+1}}^1 = \frac{n^2}{2 \times (n+1)^2}$. Підставивши $n=3$, отримаємо $S_{\Delta} = \frac{9}{32}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (32).

Задача 1.8. Визначити ряд площ трикутника $d_4 a_4 B$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $d_4 \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right), a_4 \left(1; \frac{1}{5}\right), B (1; 1)$. Як можемо побачити з рис. 1, даний трикутник прямокутний ($\angle d_4 a_4 B = 90^\circ$; $d_4 a_4, a_4 B$ – катети; $d_4 B$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{d_4 a_4}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2}{5} + 0^2} = \frac{4}{5},$$

$$|\overline{a_4 B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{4^2}{5}} = \frac{4}{5}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $d_n \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right), a_n \left(1; \frac{1}{n+1}\right), B (1; 1)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{a_n B}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{n^2}{n+1}} = \frac{n}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (32)

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (32) підставимо $n=4$, то отримаємо площу трикутника $d_4 a_4 B$, яка дорівнює $\frac{8}{25}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони d_3a_3, a_3B, d_3B ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4\sqrt{2}}{5}$. Знайдемо півпериметр даного

трикутника: $\frac{\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{5}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{5} \left(\frac{4+2\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{4+2\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{4+2\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)} = \frac{8}{25}.$$

Отже, ряд площ буде також рівний.

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 1, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ.

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle d_4a_4B = 90^\circ$, то $\sin \angle d_4a_4B = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні

рівняння функції: $\frac{y - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}, \frac{y - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}, y = 1$. Спростивши рівняння

набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_{\Delta} =$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1 - x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{n+1}}^1 = \frac{n^2}{2 \times (n+1)^2}.$$

Підставивши $n=4$, отримаємо $S_{\Delta} = \frac{8}{25}$. Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (32).

Задачі 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13 і 1.14 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

Задача 2.1. Визначити ряд площ трапецій $l_1 l_2 b_2 b_1$.

Прямокутна трапеція ($\angle l_2 b_2 b_1 = 90^\circ$ і $\angle l_1 b_1 b_2 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $l_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $l_2(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $b_2(1; \frac{2}{3})$, $b_1(1; \frac{1}{2})$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною формулою [5, с.160]:

$$S_{l_1 l_2 b_2 b_1} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{l_1 b_1 + l_2 b_2}{2} \cdot b_1 b_2 \quad (33)$$

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{l_1 b_1}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + 0^2} = \frac{1}{2},$$

$$|\overline{l_2 b_2}| = \sqrt{(1 - \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}^2 + 0^2} = \frac{1}{3},$$

$$|\overline{b_1 b_2}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{6}^2} = \frac{1}{6}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{l_1 l_2 b_2 b_1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{72}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту, а саме де $l = \frac{a+b}{2}$ (півсума основ) [5, с. 45, 161]:

$$S = l \cdot h \quad (34)$$

Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $l_n(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, $l_{n+1}(\frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2})$, $b_{n+1}(1; \frac{n+1}{n+2})$, $b_n(1; \frac{n}{n+1})$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{(1 - \frac{n}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{l_{n+1} b_{n+1}}| = \sqrt{(1 - \frac{n+1}{n+2})^2 + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+1}{n+2})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+2}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+2},$$

$$|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}^2} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{l_n l_{n+1} b_{n+1} b_n} = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}}{2} \cdot \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2(n^2 + 3n + 2)^2}. \quad (35)$$

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{l_n l_{n+1} b_{n+1} b_n}$ підставимо $n=1$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $l_1 l_2 b_2 b_1$, яка дорівнює $\frac{5}{72}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $x=1$ і $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+2} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+2} - \frac{n}{n+1}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо

формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ

буде мати наступний вид: $S_{l_n l_{n+1} b_{n+1} b_n} = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} (1-y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{2n+3}{2(n^2 + 3n + 2)^2}$. Підставивши $n=1$, отримаємо $S_{l_1 l_2 b_2 b_1} = \frac{5}{72}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (35).

Задача 2.4. Визначити ряд площ трапецій $l_2 l_3 b_3 b_2$.

Прямокутна трапеція ($\angle l_3 b_3 b_2 = 90^\circ$ і $\angle l_2 b_2 b_3 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $l_2(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $l_3(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$, $b_2(1; \frac{2}{3})$, $b_3(1; \frac{3}{4})$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$\begin{aligned} |\overline{l_2 b_2}| &= \sqrt{(1 - \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{3} + 0^2} = \frac{1}{3}, \\ |\overline{l_3 b_3}| &= \sqrt{(1 - \frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4} - \frac{3}{4})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{4} + 0^2} = \frac{1}{4}, \\ |\overline{b_2 b_3}| &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{3}{4} - \frac{2}{3})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{12}} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{l_2 l_3 b_3 b_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{288}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $l_n(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, $l_{n+1}(\frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2})$, $b_{n+1}(1; \frac{n+1}{n+2})$, $b_n(1; \frac{n}{n+1})$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{(1 - \frac{n}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{l_{n+1} b_{n+1}}| = \sqrt{(1 - \frac{n+1}{n+2})^2 + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+1}{n+2})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+2}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+2},$$

$$|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n^2+3n+2}^2} = \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (35).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (35) підставимо $n=2$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $l_2 l_3 b_3 b_2$, яка дорівнює $\frac{7}{288}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $x=1$ і $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ

буде мати наступний вид: $S_{l_n l_{n+1} b_{n+1} b_n} = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} (1 - y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{2n+3}{2(n^2+3n+2)^2}$. Підставивши $n=2$, отримаємо $S_{l_2 l_3 b_3 b_2} = \frac{7}{288}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (35).

Задача 2.5. Визначити ряд площ трапецій $l_3 l_4 b_4 b_3$.

Прямокутна трапеція ($\angle l_4 b_4 b_3 = 90^\circ$ і $\angle l_3 b_3 b_4 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $l_3(\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$, $l_4(\frac{4}{5}; \frac{4}{5})$, $b_3(1; \frac{3}{4})$, $b_4(1; \frac{4}{5})$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною формулою (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{l_3 b_3}| = \sqrt{(1 - \frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4} - \frac{3}{4})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 0^2} = \frac{1}{4},$$

$$|\overline{l_4 b_4}| = \sqrt{(1 - \frac{4}{5})^2 + (\frac{4}{5} - \frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + 0^2} = \frac{1}{5},$$

$$|\overline{b_3 b_4}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{4}{5} - \frac{3}{4})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{20}^2} = \frac{1}{20}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{l_3 l_4 b_4 b_3} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{9}{40} \cdot \frac{1}{20} = \frac{9}{800}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $l_n(\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, $l_{n+1}(\frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2})$, $b_{n+1}(1; \frac{n+1}{n+2})$, $b_n(1; \frac{n}{n+1})$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{l_n b_n}| = \sqrt{(1 - \frac{n}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+1},$$

$$|\overline{l_{n+1} b_{n+1}}| = \sqrt{(1 - \frac{n+1}{n+2})^2 + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+1}{n+2})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+2}^2 + 0^2} = \frac{1}{n+2},$$

$$|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}^2} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (35).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (35) підставимо $n=3$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $l_3 l_4 b_4 b_3$, яка дорівнює $\frac{9}{800}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $x=1$ і $\frac{y-\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}} = \frac{x-\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ

буде мати наступний вид: $S_{l_n l_{n+1} b_{n+1} b_n} = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} (1-y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{2n+3}{2(n^2+3n+2)^2}$. Підставивши $n=2$, отримаємо $S_{l_3 l_4 b_4 b_3} = \frac{9}{800}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (35).

Задача 2.7. Визначити ряд площ трапецій $0d_3a_3A$.

Прямокутна трапеція ($\angle d_3a_3A = 90^\circ$ і $\angle 0Aa_3 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $0(0;0)$, $d_3(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$, $a_3(1;\frac{1}{4})$, $A(1;0)$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною формулою (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{d_3a_3}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3^2}{4} + 0^2} = \frac{3}{4},$$

$$|\overline{0A}| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overline{a_3A}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{0d_2a_2A} = \frac{\frac{3}{4}+1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{32}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $O(0;0)$, $d_n(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, $a_n(1; \frac{1}{n+1})$, $A(1;0)$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overline{a_n A}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n+1}^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{0d_n a_n A} = \frac{\frac{n}{n+1} + 1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)^2}. \quad (36)$$

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{0d_n a_n A}$ підставимо $n=3$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $0d_3 a_3 A$, яка дорівнює $\frac{7}{32}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Ох. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $y=x$, $y=0$ та $y=\frac{1}{n+1}$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ (через суму площ трикутника і прямокутника) буде мати наступний вид: $S_{0d_n a_n A} = \int_0^{\frac{1}{n+1}} (x - 0) dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (\frac{1}{n+1} - 0) dx = \frac{2n+1}{2(n+1)^2}$. Підставивши $n=3$, отримаємо $S_{0d_3 a_3 A} = \frac{7}{32}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (36).

Задача 2.8. Визначити ряд площ трапецій $0d_2 a_2 A$.

Прямокутна трапеція ($\angle d_2 a_2 A = 90^\circ$ і $\angle O A a_2 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $O(0;0)$, $d_2(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $a_2(1; \frac{1}{3})$, $A(1;0)$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{d_2 a_2}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3} + 0^2} = \frac{2}{3},$$

$$|\overline{0A}| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overline{a_2 A}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{0d_2 a_2 A} = \frac{\frac{2}{3}+1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $0(0;0)$, $d_n(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, $a_n(1; \frac{1}{n+1})$, $A(1;0)$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{0A}| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overline{a_n A}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (36).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (36) підставимо $n=2$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $0d_2 a_2 A$, яка дорівнює $\frac{5}{18}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Ох. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $y=x$, $y=0$ та $y=\frac{1}{n+1}$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ (через суму площ трикутника і

прямокутника) буде мати наступний вид: $s_{0d_n a_n A} = \int_0^1 (x - 0) dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) dx = \frac{2n+1}{2(n+1)^2}$. Підставивши $n=2$, отримаємо $s_{0d_2 a_2 A} = \frac{5}{18}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (36).

Задача 2.9. Визначити ряд площ трапецій $0d_1 a_1 A$.

Прямокутна трапеція ($\angle d_1 a_1 A = 90^\circ$ і $\angle 0 A a_1 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $0(0; 0)$, $d_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $a_1(1; \frac{1}{2})$, $A(1; 0)$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною формулою (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{d_1 a_1}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{2} + 0^2} = \frac{1}{2},$$

$$|\overline{0A}| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overline{a_1 A}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$s_{0d_1 a_1 A} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $0(0; 0)$, $d_n(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, $a_n(1; \frac{1}{n+1})$, $A(1; 0)$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{0A}| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overline{a_n A}| = \sqrt{(1-1)^2 + (0 - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n+1}^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (36).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (36) підставимо $n=1$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $0d_1a_1A$, яка дорівнює $\frac{3}{8}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Ox . Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $y=x$, $y=0$ та $y=\frac{1}{n+1}$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ (через суму площ трикутника і прямокутника) буде мати наступний вид: $S_{0d_n a_n A} = \int_0^{\frac{1}{n+1}} (x-0) dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (\frac{1}{n+1} - 0) dx = \frac{2n+1}{2(n+1)^2}$. Підставивши $n=1$, отримаємо $S_{0d_1 a_1 A} = \frac{3}{8}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (36).

Задача 2.11. Визначити ряд площ трапецій $d_3 d_2 a_2 a_3$.

Прямокутна трапеція ($\angle d_2 a_2 a_3 = 90^\circ$ і $\angle d_3 a_3 a_2 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $d_3(\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$, $d_2(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $a_2(1; \frac{1}{3})$, $a_3(1; \frac{1}{4})$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною формулою (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{d_2 a_2}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3} + 0^2} = \frac{2}{3},$$

$$|\overline{d_3 a_3}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3^2}{4} + 0^2} = \frac{3}{4},$$

$$|\overline{a_2 a_3}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{12}^2} = \frac{1}{12}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{d_3 d_2 a_2 a_3} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{24} \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{288}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту, а саме (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $d_{n+1}(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2})$, $d_n(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, $a_n(1; \frac{1}{n+1})$, $a_{n+1}(1; \frac{1}{n+2})$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$|\overline{d_n a_n}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1},$$

$$|\overline{d_{n+1} a_{n+1}}| = \sqrt{(1 - \frac{1}{n+2})^2 + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2})^2} = \sqrt{\frac{n+1^2}{n+2} + 0^2} = \frac{n+1}{n+2},$$

$$|\overline{a_n a_{n+1}}| = \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n^2+3n+2}} = \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{d_{n+1} d_n a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}}{2} \cdot \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{2n^2+4n+1}{2n^2+6n+4} \cdot \frac{1}{n^2+3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n+1}{2(n^2+3n+2)^2}. \quad (37)$$

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (37) підставимо $n=2$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $d_3 d_2 a_2 a_3$, яка дорівнює $\frac{17}{288}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $x=1$ і $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+2} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+2} - \frac{n}{n+1}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо

формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ

$$\text{буде мати наступний вид: } S_{d_{n+1} d_n a_n a_{n+1}} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} (1 - y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} =$$

$$\frac{2n^2+4n+1}{2(n^2+3n+2)^2}. \text{ Підставивши } n=2, \text{ отримаємо } S_{d_3 d_2 a_2 a_3} = \frac{17}{288}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (37).

Задача 2.12. Визначити ряд площ трапецій $d_2 d_1 a_1 a_2$.

Прямокутна трапеція ($\angle d_1 a_1 a_2 = 90^\circ$ і $\angle d_2 a_2 a_1 = 90^\circ$) має такі вершини з координатами: $d_2(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $d_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $a_1(1; \frac{1}{2})$, $a_2(1; \frac{1}{3})$. Для знаходження площі трапеції скористаємося наступною формулою (33).

Знайдемо сторони трапеції за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$\begin{aligned} |\overline{d_1 a_1}| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1^2}{2} + 0^2} = \frac{1}{2}, \\ |\overline{d_2 a_2}| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2^2}{3} + 0^2} = \frac{2}{3}, \\ |\overline{a_1 a_2}| &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{6}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо площу трапеції:

$$S_{d_2 d_1 a_1 a_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{72}.$$

Якщо пригадати формулу знаходження площі трапеції через середню лінію і висоту (34). Можна побачити, що дана формула з легкістю перетворюється на загальну формулу знаходження площі трапеції (33).

Представимо вершини трапеції через загальні вершини з координатами: $d_{n+1}(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2})$, $d_n(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, $a_n(1; \frac{1}{n+1})$, $a_{n+1}(1; \frac{1}{n+2})$. Визначимо сторони трапеції наступним чином:

$$\begin{aligned} |\overline{d_n a_n}| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{\frac{n^2}{n+1} + 0^2} = \frac{n}{n+1}, \\ |\overline{d_{n+1} a_{n+1}}| &= \sqrt{(1 - \frac{1}{n+2})^2 + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2})^2} = \sqrt{\frac{n+1^2}{n+2} + 0^2} = \frac{n+1}{n+2}, \\ |\overline{a_n a_{n+1}}| &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1})^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1}{n^2+3n+2}} = \frac{1}{n^2+3n+2}. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ (37).

Отже, можна побачити якщо ми у формулу (37) підставимо $n=1$, то отримаємо площу прямокутної трапеції $d_2 d_1 a_1 a_2$, яка дорівнює $\frac{7}{72}$.

Знайдемо площу прямокутної трапеції через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $x=1$ і $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо

формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_{d_{n+1}d_n a_n a_{n+1}} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} (1-y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} =$

$\frac{2n^2+4n+1}{2(n^2+3n+2)^2}$. Підставивши $n=1$, отримаємо $S_{d_2 d_1 a_1 a_2} = \frac{7}{72}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (37).

Задачі 2.2, 2.3, 2.6 і 2.10 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

2.4. Числові ряди з кубатурною геометричною інтерпретацією

Визначити числовий ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі на моделі (див. рис. 1):

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $ \overline{0b_n} ;$ | 6. $ \overline{0a_n} ;$ |
| 2. $ \overline{0b_1} ;$ | 7. $ \overline{0a_1} ;$ |
| 3. $ \overline{0b_2} ;$ | 8. $ \overline{0a_2} ;$ |
| 4. $ \overline{0b_3} ;$ | 9. $ \overline{0a_3} ;$ |
| 5. $ \overline{0b_4} ;$ | 10. $ \overline{0a_4} .$ |

Розв'язання:

Задача 1. Визначити ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0b_n}|$.

Розглянемо конус обертання навколо осі $|\overline{0b_n}|$. Маємо координати точок: $0(0;0)$, $A(1;0)$, $b_1(1;\frac{1}{2})$, $b_2(1;\frac{2}{3})$, $b_3(1;\frac{3}{4})$, $b_4(1;\frac{4}{5})$, ..., $b_n(1;\frac{n}{n+1})$. Для

знаходження ряду об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0b_n}|$ будемо використовувати наступну формулу [22, с. 149]:

$$V_{|\overline{0b_n}|} = \frac{1}{3} \pi R^2 H \quad (38)$$

Знайдемо об'єм для конуса обертання навколо осі $|\overline{0b_1}|$. Визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_1 : $0A=1$, $Ab_1 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{2}$. Відомі значення підставимо у формулу і обчислимо об'єм:

$$V_{|\overline{0b_1}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1}{2} = \frac{1\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

За аналогією знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0b_n}|$:

- визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_2 : $0A=1$,

$$Ab_2 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \frac{2}{3}. \text{ Отже, } V_{|\overline{0b_2}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2}{3} = \frac{2\pi}{9}.$$

- визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_3 : $0A=1$,

$$Ab_3 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2} = \frac{3}{4}. \text{ Отже, } V_{|\overline{0b_3}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 3}{4} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}.$$

- Визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_4 : $0A=1$,

$$Ab_4 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{4}{5} - 0\right)^2} = \frac{4}{5}. \text{ Отже, } V_{|\overline{0b_4}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 4}{5} = \frac{4\pi}{15}.$$

-

- Визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_n : $0A=1$,

$$Ab_n = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{n}{n+1} - 0\right)^2} = \frac{n}{n+1}. \text{ Отже, } V_{|\overline{0b_n}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times n}{n+1} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{3n+3}. \quad (39)$$

Знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0b_n}|$ за допомогою визначеного інтегралу. Проміжком інтегрування візьмемо від 0 до 1. Складемо рівняння твірної конуса через відомі дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{n}{n+1}-0} = \frac{x-0}{1-0}$.

Спростивши отримали наступне рівняння: $y = x \left(\frac{n}{n+1} \right)$. Пригадаємо формулу знаходження об'єму тіла обертання [11, с.84]:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (40)$$

Підставимо значення і обчислимо визначений інтеграл: $V_{|\overline{0b_n}|} =$

$$\pi \int_0^1 \left(x \left(\frac{n}{n+1} \right) \right)^2 dx = \frac{nx^3}{3(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{\pi n}{3n+3}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (39).

Задача 6. Визначити ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0a_n}|$.

Розв'язання:

Розглянемо конус обертання навколо осі $|\overline{0a_n}|$. Маємо координати точок: $0(0;0)$, $A(1;0)$, $a_1(1;\frac{1}{2})$, $a_2(1;\frac{1}{3})$, $a_3(1;\frac{1}{4})$, $a_4(1;\frac{1}{5})$, ..., $a_n(1;\frac{1}{n+1})$. Для знаходження ряду об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0a_n}|$ будемо використовувати наступну формулу (38).

Знайдемо об'єм для конуса обертання навколо осі $|\overline{0a_1}|$. Визначимо радіус $0A$ і висоту Aa_1 : $0A=1$, $Aa_1 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{2}$. Відомі значення підставимо у формулу і обчислимо об'єм:

$$V_{|\overline{0a_1}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1}{2} = \frac{1\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

За аналогією знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{0a_n}|$:

• визначимо радіус $0A$ і висоту Aa_2 : $0A=1$, $Aa_2 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \frac{1}{3}$. Отже, $V_{|\overline{0a_2}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1}{3} = \frac{\pi}{9}$.

- визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_3 : $0A=1$,
 $Aa_3 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)^2} = \frac{1}{4}$. Отже, $V_{|0a_3|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1}{4} = \frac{\pi}{12}$.
- Визначимо радіус $0A$ і висоту Ab_4 : $0A=1$,
 $Aa_4 = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{5} - 0\right)^2} = \frac{1}{5}$. Отже, $V_{|0a_4|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1}{5} = \frac{\pi}{15}$.
-
- Визначимо радіус $0A$ і висоту Aa_n : $0A=1$,
 $Aa_n = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - 0\right)^2} = \frac{1}{n+1}$. Отже, $V_{|0a_n|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1}{n+1} = \frac{\pi}{3n+3}$. (41)

Знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|0a_n|$ за допомогою визначеного інтегралу. Проміжком інтегрування візьмемо від 0 до 1. Складемо рівняння твірної конуса через відомі дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{1}{n+1}-0} = \frac{x-0}{1-0}$.

Спростивши отримали наступне рівняння: $y = x \left(\frac{1}{n+1} \right)$. Пригадаємо формулу знаходження об'єму тіла обертання (40). Підставимо значення і обчислимо

$$\text{визначений інтеграл: } V_{|0a_n|} = \pi \int_0^1 \left(x \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)^2 dx = \frac{x^3}{3(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3n+3}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (41).

Задачі 2, 3, 4 і 5 були розглянуті як окремі випадки висот у задачі 1, а задачі 7, 8, 9 і 10 були аналогічно розглянуті у задачі 6.

2.5 Задачі за допомогою графіків функцій: $y = \ln x$; $y = \frac{1}{x}$ геометричної інтерпретації членів числового ряду

Розглянемо геометричну модель на рис. 2 з послідовністю точок, створену за допомогою графіків відомих алгебраїчних функцій.

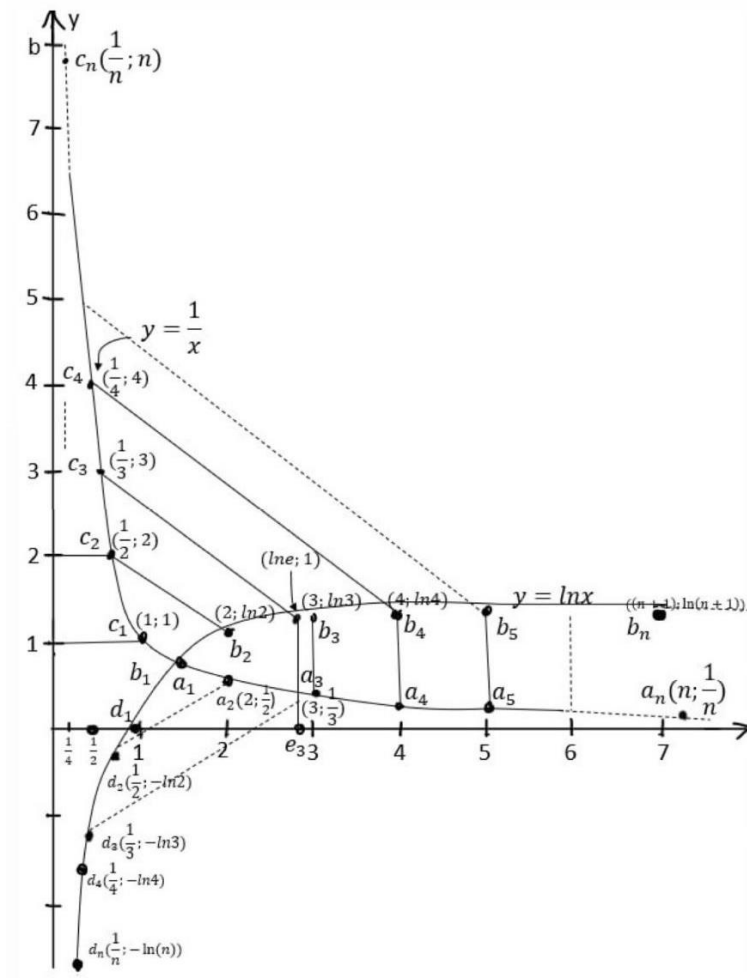


Рис.2. Графіки функцій $y = \ln x$, $y = \frac{1}{x}$, на яких розташовані послідовності точок $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$.

У розробленій раніше статті ми показали всю значущість даного дослідження, а саме: «Метод побудови графіків функцій виявився ефективним для візуалізації властивостей функцій та їх впливу на поведінку числових рядів. Отримані результати можуть мати важливе практичне значення в різних областях науки та інженерії, де числові ряди використовуються для моделювання та аналізу різноманітних процесів» [31, с. 2-4].

«Візуально на моделі спостерігаємо послідовності, які стосуються координат послідовності точок. Для точок a_n маємо x_n задається загальним членом n , $y_n = \frac{1}{n}$, для точок b_n відповідають членам послідовності $x_n = n + 1$, $y_n = \ln(n + 1)$, для точок c_n відповідають членам послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \ln n$, де $\forall n \in \mathbb{N}$. Одержання вказаних послідовностей координат точок $\{a_n\}$,

$\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ можна пропонувати як окремі задачі з точковою геометричною інтерпретацією як для учнів ліцею, так і для студентів ВНЗ. Розглянемо декілька задач із даної статті» [31, с. 5-11]:

Задача 1. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{b_nb_{n+1}}\}$

Розв'язання:

Координати точок b_n відповідають членам послідовності $x_n = n + 1$, $y_n = \ln(n + 1) \forall n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат Оху:

$$|\overline{b_1b_2}| = \sqrt{(2-1)^2 + (\ln 2 - 0)^2} = \sqrt{1 + \ln^2 2},$$

$$|\overline{b_2b_3}| = \sqrt{(3-2)^2 + (\ln 3 - \ln 2)^2} = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{3}{2}},$$

$$|\overline{b_3b_4}| = \sqrt{(4-3)^2 + (\ln 4 - \ln 3)^2} = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{4}{3}},$$

.....

$$|\overline{b_nb_{n+1}}| = \sqrt{((n+1)-n)^2 + (\ln(n+1) - \ln(n))^2} = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{n+1}{n}}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\sqrt{1 + \ln^2 \frac{n+1}{n}}$.

Задача 2. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{a_na_{n+1}}\}$

Розв'язання:

Координати точок a_n відповідають членам послідовності $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат Оху:

$$|\overline{a_1a_2}| = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$|\overline{a_2a_3}| = \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{6},$$

$$|\overline{a_3a_4}| = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{145}}{12},$$

.....

$$|\overline{b_n b_{n+1}}| = \sqrt{((n+1) - n)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2 + 1}}{n^2 + n}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2 + 1}}{n^2 + n}$.

Задачі, які розв'язуються за аналогією:

1. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{c_n c_{n+1}}\}$
2. Скласти ряд довжин послідовності відрізків $\{\overline{d_n d_{n+1}}\}$

Задача 3. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{b_{n+1}\} \{a_{n+1}\}$

Розв'язання:

Координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \ln(n + 1)$, а $a_{n+1} - x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY :

$$|\overline{b_{n+1} a_{n+1}}| = \sqrt{((n+1) - (n+1))^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right)^2} = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) = \frac{1 - (n+1) \cdot \ln(n+1)}{n+1}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\frac{1 - (n+1) \cdot \ln(n+1)}{n+1}$.

Задача 4. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{b_{n-1}\} \{a_{n+2}\}$

Розв'язання:

Координати точок b_{n-1} відповідають членам послідовності $x_{n-1} = n$, $y_{n-1} = \ln n$, а $a_{n+2} - x_{n+2} = n + 2$, $y_{n+2} = \frac{1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі використаємо формулу обчислення відстані між точками в системі координат OXY :

$$|\overline{b_{n-1} a_{n+2}}| = \sqrt{((n+2) - n)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \ln n\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{1 - (n+2) \cdot \ln n}{n+2}\right)^2}.$$

Одержуємо послідовність з загальним членом $\sqrt{4 + \left(\frac{1 - (n+2) \cdot \ln n}{n+2}\right)^2}$.

Задачі, які розв'язуються за аналогією:

1. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{b_{n+1}\}$
 $\{a_{n+1}\}$
2. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{a_{n+1}\}$
 $\{d_{n+1}\}$
3. Скласти ряд величини послідовності відстаней між точками $\{c_{n+1}\}$
 $\{d_{n+1}\}$

Задача 10. Скласти ряд величин площ послідовності фігур $\{a_{n+1}a_{n+2}b_{n+1}b_{n+2}\}$

Розв'язання:

Координати точок a_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, а $a_{n+2} - x_{n+2} = n + 2$, $y_{n+2} = \frac{1}{n+2}$, координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \ln(n + 1)$, а $b_{n+2} - x_{n+2} = n + 2$, $y_{n+2} = \ln(n + 2)$, де $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тепер давайте обчислимо площу криволінійної трапеції для кожного відрізка $a_{n+1}a_{n+2}b_{n+1}b_{n+2}$. Площа трапеції між точками $a_{n+1}a_{n+2}$ буде:

$$S_{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Площа трапеції між точками $b_{n+1}b_{n+2}$ буде:

$$S_{b_{n+1}b_{n+2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Тепер, загальна площа трапеції між точками $a_{n+1}b_{n+2}$ буде:

$$S = S_{a_{n+1}a_{n+2}} + S_{b_{n+1}b_{n+2}}.$$

Підставимо значення та спростимо вираз для площі загальної трапеції.

$$\begin{aligned} S &= S_{a_{n+1}a_{n+2}} + S_{b_{n+1}b_{n+2}} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}) + \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) \cdot (y_{n+2} - y_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{2}(n + 1 + n + 2) \cdot \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2}(n + 1 + n + 2) \cdot (\ln(n + 2) - \ln(n + 1)) = \\ &= -\frac{2n+3}{2n^2+6n+4} + \frac{2 \ln(n+2) \cdot n+3 \ln(n+2)-2 \ln(n+1) \cdot n-3 \ln(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Якщо учень ліцею або студент фізико-математичного факультету педагогічного університету пам'ятає формулу знаходження площі криволінійної трапеції через інтегральне числення, то з легкістю розв'яже наступну рівність:

$$S = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) dx + \int_{n+1}^{n+2} (\ln(n+1) - \ln(n+2)) dx = \left(\frac{x}{n^2+3n+2} \right) \Big|_{n+1}^{n+2} +$$

$$(\ln(n+1) \cdot x - \ln(n+2) \cdot x) \Big|_{n+1}^{n+2} = \frac{1}{n^2+3n+2} + \ln(n+1) \cdot (n+2) - \ln(n+2) \cdot$$

$$(n+2) - \ln(n+1) \cdot (n+1) - \ln(n+2) \cdot (n+1) =$$

$$\frac{1+(n^3+5n^2+8n+4) \cdot \ln(n+1) + (-n^3-5n^2-8n-4) \cdot \ln(n+2) + (-n^3-4n^2-5n-2) \cdot \ln(n+1) + (-n^3-4n^2-5n-2) \cdot \ln(n+2)}{n^2+3n+2}$$

Задача 11. Скласти ряд величин площ послідовності фігур $\{n+1, n+2, a_{n+2}a_{n+1}\}$

Задача 11 розв'язується аналогічним шляхом.

Задача 12. Скласти ряд величин площ послідовності прямокутних трапецій $\{n, n+1, c_{n+1}c_n\}$

Розв'язання:

Координати точок c_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $y_{n+1} = n+1$, координати точок c_n відповідають членам послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, де $\forall n \in \mathbb{N}$.

Якщо учень ліцею або студент фізико-математичного факультету педагогічного університету пам'ятає формулу знаходження площі криволінійної трапеції через інтегральне числення, то з легкістю розв'яже наступну рівність:

$$S = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} ((n+1) - (n+1)) dy = 0$$

Задача 13. Скласти ряд величин площ послідовності прямокутних трапецій (пов'язаних з графіком функції $y = \frac{1}{x}$) $\{n, n+1, c_{n+1}c_n\}$

Задача 13 розв'язується аналогічним шляхом.

Задача 14. Скласти ряд величин площ послідовності криволінійних трапецій $\{n+1, n+2, b_{n+1}b_{n+2}\}$

Розв'язання:

Координати точок b_{n+1} відповідають членам послідовності $x_{n+1} = n + 1$, $y_{n+1} = \ln(n + 1)$, а $b_{n+2} - x_{n+2} = n + 2$, $y_{n+2} = \ln(n + 2)$, де $\forall n \in \mathbb{N}$.

Якщо учень ліцею або студент фізико-математичного факультету педагогічного університету пам'ятає формулу знаходження площі криволінійної трапеції через інтегральне числення, то з легкістю розв'яже наступну рівність:

$$S = \int_{n+1}^{n+2} (\ln(n+1) - \ln(n+2)) dx = (\ln(n+1) \cdot x - \ln(n+2) \cdot x) \Big|_{n+1}^{n+2} = \\ \ln(n+1) \cdot (n+2) - \ln(n+2) \cdot (n+2) - \ln(n+1) \cdot (n+1) - \ln(n+2) \cdot (n+1) \quad [31, \text{с. 5-11}].$$

Отже, у межах даної роботи було реалізовано дослідження з побудови та аналізу числових рядів за допомогою відомих графіків алгебраїчних функцій на основі геометричної інтерпретації. Головним результатом є не тільки створення нових числових об'єктів, а й створення дидактичного комплексу задач, спрямованого на збагачення навчальних знань учнів ліцеїв і студентів ВНЗ. Практична значущість результатів полягає в тому, що в учнів та студентів відбувається розвиток математичного моделювання та удосконалення навичок візуалізації числових рядів, що в свою чергу вважається вагомим внеском у математичну науку та освіту.

Висновки до розділу 2

Вивчення теми «Числові ряди» вважається однією з найскладніших тем математичного аналізу так як має багато абстрактних понять, які важко сприймаються без наочного представлення. Для ефективного засвоєння матеріалу варто використовувати зв'язок між алгебраїчними виразами та їх геометричною інтерпретацією. Геометричні моделі в свою чергу слугують потужним допоміжним дидактичним інструментом, що допомагає вивчати ряди від застосування критеріїв збіжності до інтуїтивного розуміння нескінченних сум. Також такі моделі дозволяють не тільки розв'язувати систему вже існуючих завдань, а й створювати нові задачі та підходи до розв'язування числових рядів.

Дана робота демонструє створення числових рядів за допомогою геометричних моделей і міждисциплінарних зв'язків через розв'язування системи задач чотирьох рівнів складності. Перший і другий рівні складності включали в себе розв'язок числових рядів з точковою і лінійною геометричною інтерпретацією. В цих задачах було показано застосування різних формул обчислення довжин прямих, інтегралів, задання рівняння прямої через дві точки, застосування теореми Піфагора, теореми косинусів і т.д. Найбільшу різноманітність формул обчислення площ трикутників з ШКМ було розглянуто і розв'язано на третьому рівні складності для розв'язування числових рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією. Застосовувалися формули площі через півдобуток сторони і висоти, проведеної до цієї сторони, через півдобуток сторін і синус кута між ними, через півдобуток катетів і формулу Герона, а також через визначений інтеграл. І на останньому четвертому рівні складності були розглянуті задачі з кубатурною геометричною інтерпретацією через обчислення об'ємів конусів.

Використання вже відомих графіків алгебраїчних функцій допомагають створювати візуальне представлення числових рядів. В даному випадку були представлені графіки функцій $y = \ln x$, $y = \frac{1}{x}$, на яких розташовані послідовності точок $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$. Розв'язані задачі слугують поштовхом для створення нових числових рядів через інші відомі функції і підкреслення значущості міждисциплінарних зв'язків.

Отже, застосування комплексного підходу геометричних моделей з точковою, лінійною, квадратурною, кубатурною геометричною інтерпретацією і відомих графіків алгебраїчних функцій дають вагомий внесок при вивченні теми «Числові ряди» та слугують цінним методичним прийомом. Це забезпечує візуалізацію абстрактних понять, активізує інтуїтивне розуміння збіжності та розбіжності, а також зміцнює міждисциплінарні зв'язки.

ВИСНОВКИ

1. Згідно з поставленою метою та завданнями було проаналізовано існуючі публікації, які стосуються теми кваліфікаційної роботи та з'ясовано, що:

- теорія числових рядів є важливим розділом при вивченні фундаментальної математичної дисципліни «Математичний аналіз»;
- знадобилось біля двох тижнів, щоб усвідомити математичне поняття нескінченної суми як числового ряду та можливостей його використання щодо розв'язання різноманітних теоретичних та практичних задач;
- найважливішими компонентами сучасної теорії числових рядів є ознаки їх збіжності, які були запропоновані видатними математиками, а саме: Г. Лейбніцем, О. Коші, Ж. Д'аламбером та іншими. Ці ознаки є обов'язковою складовою розділу «Числові ряди» в усіх сучасних підручниках курсу «Математичний аналіз»;
- переважна частина підручників, посібників та практикумів з математичного аналізу пропонують однотипні практичні задачі без візуального представлення членів рядів та характеру їх збіжності (розбіжності);
- однак в останні роки мають місце публікації, пов'язані з застосуванням геометричних інтерпретацій членів числових рядів за допомогою геометричних інтерпретацій [10, 13, 14, 15, 16, 21, 24, 28, 32, 33], що свідчить про актуальність вибраної нами теми дослідження, спрямованої на поширення застосування геометричних моделей та міждисциплінарних зв'язків в процесі вивчення розділу «Числові ряди».

2. Проведені нами дослідження підтверджують, що:

- геометричні моделі можуть бути основою для створення різних числових рядів;
- використання геометричних моделей при вивченні числових рядів дає можливість для досить ефективного реалізації дидактичного принципу

візуалізації досліджуваних понять, пов'язаних з геометричною інтерпретацією членів числових рядів та характером їх змін зі зростанням кількості.

3. Використання геометричних моделей дозволяє реалізовувати міждисциплінарні зв'язки в процесі генерації числових рядів та при розв'язанні різноманітних задач, пов'язаних зі змістом розділу «Числові ряди». Визначили, що міждисциплінарні зв'язки сприяють системному сприйняттю навчального матеріалу (ШКМ, алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу), а геометричні моделі слугують допоміжним інструментом для ефективної візуалізації абстрактних понять і підвищення розуміння наочності.
4. Запропоновано поряд з використанням геометричних моделей, посилювати міждисциплінарні зв'язки при вивченні числових рядів за допомогою графіків відомих алгебраїчних функцій.
5. Створена досить суттєва добірка задач, в яких демонструється використання геометричних моделей і міждисциплінарних зв'язків між дисциплінами математичного циклу, який забезпечує фундаментальну підготовку до розвитку фахових компетентностей вчителів математики. Задачі розподілені на чотири рівня складності, а саме: точкова, лінійна, квадратурна, кубатурна.
6. Одержані результати частково можуть бути використані в навчанні учнів ліцеїв при вивченні теми «Числові послідовності».
7. За результатами виконаної кваліфікаційної роботи складено і пропонується для використання навчальний посібник: «Створення та дослідження числових рядів» (див. Додаток А).
8. Отже, дане дослідження несе в собі не тільки внески науково-теоретичного характеру, а й прикладного значення. Вони можуть бути використані при викладанні дисципліни математичного аналізу для майбутніх вчителів математики. Реалізація запропонованих підходів сприятиме формуванню цілісного сприйняття навчального матеріалу,

креативного, абстрактного, логічного мислення, що в свою чергу посилює зацікавленість та підвищує мотивацію до здобуття нових знань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х. : Гімназія, 2017. — 272 с.
2. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коло-мієць, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 272 с.
3. Бакун В. В. Математичний аналіз : підручник у 3-х ч. / В. В. Бакун. – Ч. 3. Числові й функціональні ряди. Інтегрالي, залежні від параметра. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 435 с
4. Бобирь В. Д., Христюк А. М. (2019). Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» (7 березня 2019 р., Дніпро). (Bobyry V. D., Hrystyuk A. M. (2019). Implementation of the didactic principle of visibility in the study of number series. 10th International Conference of Young Scientists "Young Scientists 2019 – from Theory to Practice" (Mar. 7, 2019, Dnipro). Dnipro.
5. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - 2-ге видання, переробл. — Х. : Гімназія, 2021. — 208 с.
6. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. - К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 224 с.
7. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 240 с.
8. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. - К. : УОВЦ «Оріон», 2016. — 224 с.
9. Гриньов Б. В, Кириченко І. К. Аналітична геометрія: Підруч. для вищих техн. навч. закладів.— Харків: Гімназія, 2008.— 340 с.

10. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Тураєва О. В.(2022). Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy . Наукові записки молодих учених № 10. (Dzyharska N. S., Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2022). Generation of numerical series using sequences of geometric objects inscribed in a square with parameter $a = 1$ in the Oxy coordinate system. Scientific notes of young scientists № 10).
11. Інтегральне числення: навч. посіб. / Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитонова М. О. Київ: КНУТД, 2021. 216
12. Коваленко І. В. Міждисциплінарні зв'язки як засіб поглибленого вивчення фізики студентами педагогічних університетів. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Випуск 28'2011; серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи, с. 99-103.
13. Корольський В. В., Габ С. С. (2018). Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 67-73). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018). Linear, quadrature and cuboidal geometric interpretation of numerical series by means of modeling. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 67-73)).
14. Корольський В. В., Муравська Д. І. Міждисциплінарні зв'язки у фаховій підготовці бакалаврів 014.04 Середня освіта (Математика). Актуальні питання природничо-математичної освіти. Суми, 2024. Випуск 2(24).
15. Корольський В. В., Римар А. І. (2022). Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з державною символікою. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 2(20) (сс. 29-38). (Korolskiy V. V., Rymar A. I. (2022) Geometric interpretation of numerical series associated with state symbols. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Issue 2(20) (pp. 29-38)).

16. Корольський В. В., Тураєва О. В. (2023). Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 1 (21) (сс. 46-54). (Korolskiy V. V., Turaieva O. V. (2023) Generation and investigation of number series using geometric model and combination of series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Issue 1 (21) (pp. 46-54)).
17. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. (2018). Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. Випуск 4(18) (сс. 81-89). (Korolskiy V. V., Shokaluk S. V., Melnychenko Y. A. (2018). Theoretical and methodological foundations of geometric modeling of numerical series. Physical and mathematical education. Issue 4(18) (pp. 81-89)).
18. Корольський В. В. (2017). Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XV. Кривий Ріг (сс. 57-63). (Korolskiy V. V. (2017). Geometric interpretation of numerical series. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XV. Kryvyi Rih (pp. 57-63)).
19. Корольський В. В. (2018). Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп'ютерні технології: науково-методичний збірник. Том XVI. Кривий Ріг (сс. 59-66). (Korolskiy V. V. (2018). Geometric interpretation of a numerical series of arithmetic progression. Latest computer technologies: scientific and methodical collection Volume XVI. Kryvyi Rih (pp. 59-66)).
20. Корольський В. В. Габ С. С. (2018). Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал, В. В. Корольський (ред.). Том 42. Кривий Ріг (сс. 39-45). (Korolskiy V. V., Gab S. S. (2018).

Numerical series related to the parameters of the dodecahedron. Bulletin of the International Research Center "Man: Language, Culture, Cognition": scientific journal, V. V. Korolskiy (Ed.). Volume 42. Kryvyi Rih (pp. 39-45)).

21. Корольський, В. В., Тураєва, О. В. (2023). Технологія створення задач із застосуванням геометричних моделей. Матеріали V Всеукраїнської (з міжнародною участю) науковопрактичної конференції молодих учених (10–11 травня 2023, м. Харків) (сс. 243–246). (Korolsky, V. V., Turaeva, O. V. (2023). Technology of Problem Creation Using Geometric Models. Materials of the V All-Ukrainian (with International Participation) Scientific and Practical Conference of Young Scientists (May 10–11, 2023, Kharkiv) (pp. 243–246).).
22. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с.
23. Михайлова Я. А. Розробка системи задач із застосуванням геометричних моделей та комбінації числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} [a^n]$ для учнів ліцеїв : кваліфікаційна робота / науковий керівник – канд. техн. наук, проф. Корольський Володимир Вікторович. Кривий Ріг, 2023. 119 с.
24. Няньчук В. В. Генерація числових рядів за допомогою функції $y=1/2^{(n-1)}x$ і квадрата зі стороною $a=1$: магістерська робота / Владислав Володимирович Няньчук ; науковий керівник – кандидат техн. наук, проф. Володимир Вікторович Корольський. - Кривий Ріг : КДПУ, 2021. - 90 с.
25. Освітній портал математичного спрямування. Контрольна робота — вища математика, теорія ймовірностей, диференціальні рівняння. URL: <https://yukhym.com/uk/geometriya/ploshcha-trikutnika.html>.
26. Примакова О. Ю. Генерація числових рядів за допомогою функції $y=1/n \cdot x$ і квадрата зі стороною $a=1$ / Оксана Юріївна Примакова ; науковий керівник – кандидат тех. наук, проф. Володимир Вікторович Корольський. - Кривий Ріг : КДПУ, 2021. - 86 с.
27. Романова А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04

- Середня освіта (Математика) / А. М. Романова: наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2019. – 90 с.
28. Страх О. П., Лукашова Т. Д. Міждисциплінарні зв'язки при вивченні деяких тем дискретної математики та диференціальних рівнянь. Фізико-математична освіта. 2021. Випуск 3(29). С.112-118.
 29. Страх О. П. Налагодження міждисциплінарних зв'язків при вивченні різних математичних дисциплін. Збірник наукових матеріалів LXIX міжнародної науково-практичної інтернет – конференції «Світ під час пандемії: нові виклики та загрози», Вінниця, 2021, с. 115-118.
 30. Сухомлинова О. В. Критичне мислення в контексті міждисциплінарної освіти. Наука у сучасному світі: інновації та випробування, с. 262-267, 2024. The 1st International scientific and practical conference “Science in the modern world: innovations and challenges” (September 27-29, 2024) Perfect Publishing, Toronto, Canada. 2024. 262-267 p.
 31. Сьомкіна К. Д. Створення задач, пов'язаних з числовими послідовностями і рядами за допомогою геометричної моделі з використанням графіків функцій: $y=\ln x$; $y=1/x$; $y = x^n$. Наукові записки молодих учених, випуск 12. Кропивницький: РВВ ЦДУ ім В. Винниченка, 2023.
 32. Тураєва О. В. Розробка системи задач із застосуванням геометричних моделей та комбінації числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)$ для учнів ліцеїв : кваліфікаційна робота / науковий керівник – канд. техн. наук, проф. Корольський Володимир Вікторович. Кривий Ріг, 2023. 117 с.
 33. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, // X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики», м. Дніпро, 7 березня 2019р. – Дніпро, 2019. – 404с.
 34. Швачич Г.Г., Коноваленков В.С., Заборова Т.М. Введення у математичний аналіз: Навчальний посібник. - Дніпропетровськ: НМетАУ, 2013. – 32 с.
 35. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч II: Посібник для пед. інститутів. Київ, 1981. 456 с.

36. Щоголев С. А. Теорія рядів: навчально-методичний посібник. Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. 76 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Посібник «Створення та дослідження числових рядів»

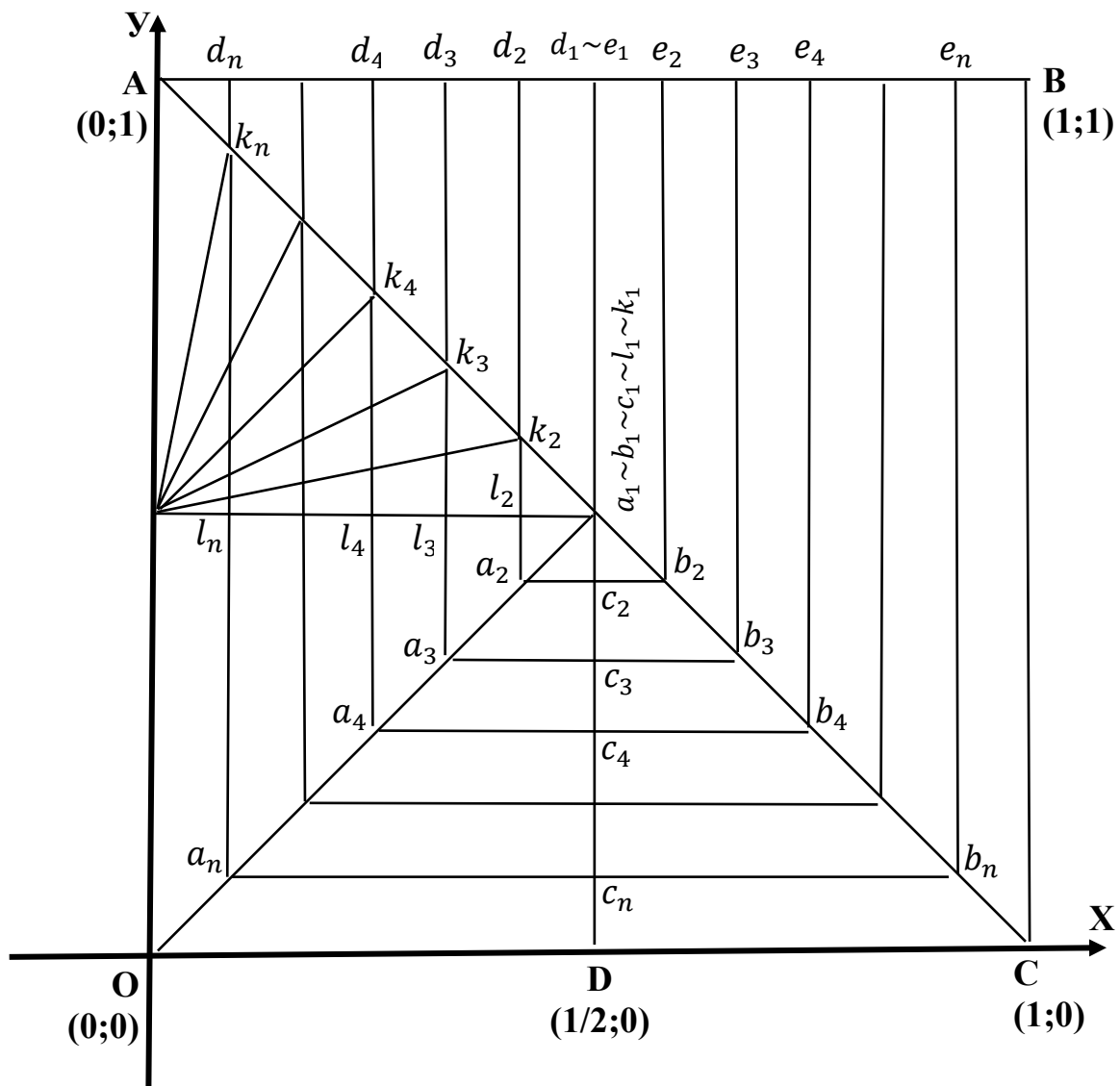


Рис. 3 Геометрична модель з використанням квадрата зі стороною $a=1$ і послідовності точок $d_n \left\{ \frac{1}{n+1}; 1 \right\}$, $e_n \left\{ \frac{n}{n+1}; 1 \right\}$, $l_n \left\{ \frac{1}{n+1}; \frac{1}{2} \right\}$

Якщо проаналізувати елементи моделі, то можна задачі, спрямовані на створення числових рядів, розподілити по рівням складності їх формулювань і розв'язання:

- 1 — задачі точкової геометричної інтерпретації членів числового ряду;
- 2 — задачі лінійної геометричної інтерпретації членів числового ряду;
- 3 — задачі квадратурної геометричної інтерпретації членів числового ряду;

4 — задачі кубатурної геометричної інтерпретації членів числового ряду.
Розглянемо утворені задачі.

1. Скласти числові ряди координат послідовності наступних точок (див. рис. 3):

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1. т. c_n ; | 4. т. e_n ; | 7. т. k_n . |
| 2. т. a_n ; | 5. т. l_n ; | |
| 3. т. b_n ; | 6. т. d_n ; | |

Розв'язання:

Задача 1.3. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (1)

Ряд (1) є відомим рядом, загальний член якого дорівнює 1, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 29].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. b_n будуть наступними:

$$b_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), b_2\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), b_3\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right), \dots, b_n\left(\frac{n}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right).$$

Далі розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Він є відомим гармонічним рядом, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [3, с. 22].

$$\text{Отже, } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Задача 1.6. Візуально одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (2)

Ряд (2) є відомим гармонічним рядом, який є розбіжним числовим рядом, що зводиться різними способами в сучасних підручниках з математичного аналізу [2, с. 22].

З рисунку видно, що координати послідовності точок т. d_n будуть наступними:

$$d_1\left(\frac{1}{2}; 1\right), d_2\left(\frac{1}{3}; 1\right), d_3\left(\frac{1}{4}; 1\right), \dots, d_n\left(\frac{1}{n+1}; 1\right).$$

Отже, розглянули тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, оскільки координати точки по у не змінюються, а саме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1$. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Задачі 1, 2, 4, 5 і 7 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

2. Визначити числовий ряд, сума S якого візуально спостерігається на моделі (див. рис. 3):

- | | |
|---|---|
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n a_{n+1}} ;$ | 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n c_{n+1}} ;$ |
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n b_{n+1}} ;$ | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n e_{n+1}} ;$ |
| 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n d_{n+1}} ;$ | 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{k_n k_{n+1}} .$ |
| 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{l_n l_{n+1}} ;$ | |

Розв'язання:

Задача 2.3. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{d_n d_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{1}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 3).

Обчислимо відстані між точками за формулою (7):

$$|\overline{d_1 d_2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \quad |\overline{d_2 d_3}| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}; \quad \dots; \quad |\overline{d_n d_{n+1}}| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (3)

Отримали ряд (3), сума якого дорівнює $S = \frac{1}{2}$.

Варто зазначити, що сума ряду $S = \frac{1}{2}$, може бути знайдена за допомогою обчислення границі послідовності частинних сум ряду:

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad S_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \quad \dots; \quad S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \rightarrow S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

Обчислимо суму ряду S за формулою:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Зрозуміло, що сума ряду (3) S дорівнює: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$

Або можна було розв'язати іншим способом, а саме так як відрізок $|\overline{d_n d_{n+1}}|$ і вісь Ох паралельні між собою, то довжиною відрізків ряду $|\overline{d_n d_{n+1}}|$ можна вважати тільки абсцису точок.

Задача 2.7. Визначити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{a_n a_{n+1}}|$, сума якого $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$ візуально спостерігається на моделі (рис. 3).

Проаналізувавши рисунок, бачимо що точки $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ лежать на діагоналі квадрата, тому точка k_1 має координати $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $k_2 — (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $k_3 — (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$, $\dots, k_n — (\frac{1}{n+1}; \frac{n}{n+1})$, а $k_{n+1} — (\frac{1}{n+2}; \frac{n}{n+2})$. Обчислимо відстані між точками за формулою (7). Тоді $|\overline{k_1 k_2}| = \sqrt{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $|\overline{k_2 k_3}| = \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{3})^2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$; $\dots$; $|\overline{k_n k_{n+1}}| = \sqrt{(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1})^2 + (\frac{n}{n+2} - \frac{n}{n+1})^2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(n+2)(n+1)}$.

Таким чином, одержуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}$ (4)

Отримали ряд (4), сума якого дорівнює $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Інший спосіб розв'язання включає в себе розглядання прямокутного трикутника ОАС, а саме: $\angle AOC = 90^\circ$, ОС і АО — катети, АС — гіпотенуза. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{k_n k_{n+1}}|$ лежить на половині гіпотенузи, тому знайдемо гіпотенузу трикутника за теоремою (11).

Тоді $|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{OC}|^2 + |\overline{AO}|^2} = \sqrt{2}$. Отже, сума шуканого числового ряду (4) обчислимо як половину гіпотенузи: $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{k_n k_{n+1}}|$ розглянути як половина діагоналі квадрата ОАВС, то знаючи сторону квадрата (за властивістю вони всі рівні, ОА=АВ=ВС=ОС=1) і формулу обчислення діагоналі квадрата знайдемо суму шуканого числового ряду (4): $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задачі 1, 2, 4, 5 і 6 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

3. Визначити числовий ряд величин послідовності відрізків на моделі (див. рис. 3):

$$10. \{|\overline{0a_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$15. \{|\overline{a_nb_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$11. \{|\overline{0c_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$16. \{|\overline{a_nc_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$12. \{|\overline{0l_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$17. \{|\overline{c_nb_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$13. \{|\overline{d_nk_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$18. \{|\overline{l_na_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$14. \{|\overline{l_nk_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$19. \{|\overline{e_nb_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

Розв'язання:

Задача 3.1. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{0a_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: $O(0;0)$, $a_1(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $a_2(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, $a_3(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$, $a_4(\frac{1}{5};\frac{1}{5})$, ..., $a_n(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1})$.

За допомогою теореми Піфагора (11) знайдемо відстань відрізка $|\overline{0a_1}|$.

$$|\overline{0a_1}| = \sqrt{\frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{0a_n}|$:

$$|\overline{0a_2}| = \sqrt{\frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$|\overline{0a_3}| = \sqrt{\frac{1^2}{4} + \frac{1^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

.....,

$$|\overline{0a_n}| = \sqrt{\frac{1^2}{n+1} + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. (5)

За допомогою теореми косинусів (16) знайдемо відстань відрізка $|\overline{0a_1}|$. Знайдемо відстань відрізка $|\overline{0a_1}|$. Так як $\triangle 0a_1D$ прямокутний, то $\angle 0Da_1 = 90^\circ$, $\cos \angle 0Da_1 = 0$. Отже, відстань відрізка $|\overline{0a_1}|$ буде така ж, як і в способі

знаходження відстані за теоремою Піфагора, а саме $\frac{\sqrt{2}}{2}$, тоді і послідовність відрізків $|\overline{0a_n}|$ також буде $\frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Зрозуміло, що за допомогою формули відрізків між двома точками (7) ми з легкістю знайдемо послідовність відрізків $|\overline{0a_n}|$, де отримаємо ряд (5).

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від 0 до $\frac{1}{n+1}$.

Якщо т. О (0;0), а т. $a_n (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1})$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{1}{n+1}-0} =$

$\frac{x-0}{\frac{1}{n+1}-0}$. Спростивши отримаємо $y = x$. За формулою обчислення довжини дуги

гладкої кривої (18), внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_0^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + (1)^2} dx = x\sqrt{2} \Big|_0^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (5).

Задача 3.4. Визначити ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{d_n k_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Маємо такі координати точок: $d_1 (\frac{1}{2}; 1)$, $d_2 (\frac{1}{3}; 1)$, $d_3 (\frac{1}{4}; 1)$, $d_4 (\frac{1}{5}; 1)$, ..., $d_n (\frac{1}{n+1}; 1)$, $k_1 (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $k_2 (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $k_3 (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$, $k_4 (\frac{1}{5}; \frac{4}{5})$, ..., $k_n (\frac{1}{n+1}; \frac{n}{n+1})$.

За допомогою формули довжини відрізка, який проходить через дві точки (7), знайдемо відстань відрізка $|\overline{d_1 k_1}|$.

$$|\overline{d_1 k_1}| = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{2}} = \frac{1}{2},$$

Так само далі продовжуємо шукати послідовність відрізків $|\overline{d_n k_n}|$:

$$|\overline{d_2 k_2}| = \sqrt{(\frac{1}{3} - \frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3} - 1)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{3}} = \frac{1}{3},$$

$$|\overline{d_3 k_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{4}} = \frac{1}{4},$$

.....,

$$|\overline{d_n k_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Таким чином, одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. (6)

Ще можна побачити на рис. 2, що ряд величин послідовності відрізків $\{|\overline{d_n k_n}|\}_{n=1}^{\infty}$ є катетами ряду трикутників $d_n k_n A$. Тому знаючи катет $d_n A$ і гіпотенузу $k_n d_n$ можна за теоремою Піфагора (11) з легкістю обчислити ряд відрізків $\{|\overline{d_n k_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Визначивши графік функції даної послідовності зможемо запропонувати ще один спосіб розв'язання через визначений інтеграл для кривої лінії (окремий випадок прямої лінії, як в нашій задачі) з відрізком інтегрування від $\frac{n}{n+1}$ до 1.

Якщо т. $d_n \left(\frac{1}{n+1}; 1\right)$, а т. $k_n \left(\frac{1}{n+1}; \frac{n}{n+1}\right)$, то отримаємо рівняння прямої лінії (17).

Підставимо координати точок і отримаємо наступне рівняння функції: $\frac{x - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} =$

$\frac{y - \frac{n}{n+1}}{1 - \frac{n}{n+1}}$. Спростивши отримаємо $y = \frac{n}{n+1}$. За формулою обчислення довжини дуги

гладкої кривої (18), внесемо отриману вище функцію під знак інтеграла:

$$\int_{\frac{n}{n+1}}^1 \sqrt{1 + 0^2} dx = x \Big|_{\frac{n}{n+1}}^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (6).

Задачі 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 і 10 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

4. Визначити числовий ряд площ трикутників на моделі (див. рис. 3):

1. $a_1 a_2 b_2$;

9. $a_1 c_4 b_4$;

2. $a_1 a_3 b_3$;

10. $k_1 d_1 A$;

3. $a_1 a_4 b_4$;

11. $k_2 d_2 A$;

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 4. $a_1 a_2 c_2$; | 12. $k_3 d_3 A$; |
| 5. $a_1 a_2 c_3$; | 13. $k_4 d_4 A$; |
| 6. $a_1 a_2 c_4$; | 14. $a_1 l_2 k_2$; |
| 7. $a_1 c_2 b_2$; | 15. $a_1 l_3 k_3$; |
| 8. $a_1 c_3 b_3$; | 16. $a_1 l_4 k_4$. |

Розв'язання:

Задача 4.4. Визначити ряд площ трикутника $a_1 a_2 c_2$.

Трикутник має такі вершини з координатами: $a_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), a_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), c_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

Як можемо побачити з рис. 2, даний трикутник прямокутний ($\angle a_2 c_2 a_1 = 90^\circ$; $a_2 c_2, c_2 a_1$ – катети; $a_2 a_1$ – гіпотенуза). Отже, знайдемо площу трикутника за формулою (25).

Візьмемо катети і знайдемо їх довжини:

$$|\overline{a_2 c_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2}{6} + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6},$$

$$|\overline{c_2 a_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{1^2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}.$$

Підставимо у формулу і визначимо ряд площ:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

Якщо вершини трикутника представити через загальні вершини з координатами: $a_n \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right), a_{n+1} \left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right), c_{n+1} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{n+2}\right)$. Тоді довжини катетів будуть визначені наступним чином:

$$|\overline{a_{n+1} c_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2}{2n+4} + 0^2} = \frac{n}{2n+4},$$

$$|\overline{c_{n+1} a_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{n^2}{2n+4}} = \frac{n}{2n+4}.$$

Підставимо у формулу і отримаємо ряд площ $S_{\Delta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2(2n+4)^2}$. (8)

Отже, можна побачити якщо ми у формулу $S_{n\Delta}$ підставимо $n=1$, то отримаємо площу трикутника $a_1 a_2 c_2$, яка дорівнює $\frac{1}{72}$.

Пригадаємо формулу Герона (27). Сторони a_2c_2, c_2a_1 і a_2a_1 ми вже знаходили і це відповідно дорівнює $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}$. Знайдемо півпериметр даного

трикутника: $\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{12}$. Скористаємося формулою Герона:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{12} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{6}\right) \left(\frac{2+\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{6}\right) \left(\frac{2+\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)} = \frac{1}{72}.$$

Отже, отриманий ряд площ буде також рівний ряду (8).

Розв'язати дану задачу можемо всіма відомою формулою (28). Якщо знову уважно подивитися на рис. 2, то можна помітити, що трикутник прямокутний, а з цього слідує, що один з катетів буде виступати висотою даного трикутника. Виходячи з цих міркувань ми знову повертаємося на формулу (25).

Якщо пригадати формулу знаходження площі трикутника заданого координатами своїх вершин (29), то всі координати вершин трикутника ми знаємо, тому з легкістю можна буде підставити значення у формулу і порахувати ряд площ (8).

Також варто пригадати про формулу знаходження площі трикутника (30). Так як ми будемо брати відомий кут прямокутного трикутника $\angle a_2c_2a_1 = 90^\circ$, то $\sin \angle a_2c_2a_1 = 1$, значить дана формула знову перетворюється на формулу (25).

І ще залишився не розглянутий варіант знаходження площі через інтеграл. Задамо три рівняння прямої (для кожної сторони трикутника) яка проходить через дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні

рівняння функції: $\frac{y - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}, \frac{y - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}, y=1$. Спростивши рівняння

набувають вигляду: $y = x$ та $y = 1$. Пригадаємо формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $S_{\Delta} =$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1-x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{n+1}}^1 = \frac{n^2}{2(2n+4)^2}. \text{ Підставивши } n=1, \text{ отримаємо } S_{\Delta} = \frac{1}{72}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (8).

Задача 4.7. Визначити ряд площ трикутника $a_1c_2b_2$.

Трикутник $a_1c_2b_2$ рівний трикутнику $a_1a_2c_2$. Отже, ряд площ також рівний і дорівнювати ряду (8).

Аналогічно до попередньої задачі зможемо застосувати вищеперераховані методи розв'язання.

Задачі 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 і 16 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

5. Визначити числовий ряд площ прямокутників на моделі (див. рис. 3):

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $a_2b_2e_2d_2$; | 6. $c_4b_4e_4d_1$; |
| 2. $a_3b_3e_3d_3$; | 7. $d_2a_2c_2d_1$; |
| 3. $a_4b_4e_4d_4$; | 8. $d_3a_3c_3d_1$; |
| 4. $c_2b_2e_2d_1$; | 9. $d_4a_4c_4d_1$. |
| 5. $c_3b_3e_3d_1$; | |

Розв'язання:

Задача 5.3. Визначити числовий ряд площ прямокутників $a_4b_4e_4d_4$.

Прямокутник має такі вершини з координатами: $a_4\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right), b_4\left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right), e_4\left(\frac{4}{5}; 1\right), d_4\left(\frac{1}{5}; 1\right)$. Для знаходження площі прямокутника скористаємося формулою добутку довжини на ширину: $S = a_4b_4 \times a_4d_4$. (9)

Знайдемо сторони прямокутника ($a_4b_4 = e_4d_4$ і $a_4d_4 = b_4e_4$) за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{a_4b_4}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3^2}{5} + 0^2} = \frac{3}{5},$$

$$|\overline{a_4d_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{4^2}{5}} = \frac{4}{5}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо ряд площі прямокутника:

$$S = a_4b_4 \times a_4d_4 = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{25} \quad (10)$$

Пригадаємо ще одну формулу обчислення площі прямокутника через добуток сторони на висоту, яка проведена до цієї сторони: $S = ah_a$. Знаючи, що

сторони прямокутника перпендикулярні між собою, то вище згадана формула перетворюється на формулу (9).

Пригадавши ще формулу площі через добуток двох суміжних сторін і синус кута між ними, ми отримаємо наступні міркування: $\angle d_4 a_4 b_4 = 90^\circ$, то $\sin \angle d_4 a_4 b_4 = 1$. Отже, дана формула знову зводиться до формули (9) і отримаємо ряд площі прямокутника (10).

Знайдемо площу прямокутника через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $x=1$ і $\frac{y - \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо

формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ буде мати наступний вид: $s_{a_n b_n e_n d_n} = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 (1-y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{n+1}}^1 = \frac{n^2}{2(n+1)^2}$.

Підставивши $n=4$, отримаємо $s_{a_4 b_4 e_4 d_4} = \frac{12}{25}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (10).

Задача 5.6. Визначити числовий ряд площ прямокутників $c_4 b_4 e_4 d_1$.

Прямокутник має такі вершини з координатами: $c_4 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\right), b_4 \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right), e_4 \left(\frac{4}{5}; 1\right), d_1 \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Для знаходження площі прямокутника скористаємося формулою добутку довжини на ширину: $S = c_4 b_4 \times c_4 d_1$. (12)

Знайдемо сторони прямокутника ($c_4 b_4 = e_4 d_1$ і $c_4 d_1 = b_4 e_4$) за формулою довжини відрізків, які задані двома точками:

$$|\overline{c_4 b_4}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3^2}{10} + 0^2} = \frac{3}{10},$$

$$|\overline{c_4 d_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \frac{4^2}{5}} = \frac{4}{5}.$$

Підставимо знайдені значення у формулу і обчислимо ряд площі прямокутника:

$$S = c_4 b_4 \times c_4 d_1 = \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{25} \quad (13)$$

Пригадаємо ще одну формулу обчислення площі прямокутника через добуток сторони на висоту, яка проведена до цієї сторони: $S = ah_a$. Знаючи, що сторони прямокутника перпендикулярні між собою, то вище згадана формула перетворюється на формулу (12).

Пригадавши ще формулу площі через добуток двох суміжних сторін і синус кута між ними, ми отримаємо наступні міркування: $\angle d_1 c_4 b_4 = 90^\circ$, то $\sin \angle d_1 c_4 b_4 = 1$. Отже, дана формула знову зводиться до формули (12) і отримаємо ряд площі прямокутника (13).

Знайдемо площу прямокутника через визначений інтеграл. Задамо рівняння основ (17), що проходять через дві точки, а межі інтегрування зробимо по вісі Оу. Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння

функції: $x=1$ і $\frac{y - \frac{n}{n+3}}{\frac{n+2}{n+3} - \frac{n}{n+3}} = \frac{x - \frac{n}{n+3}}{\frac{n+2}{n+3} - \frac{n}{n+3}}$, спростимо і отримаємо $x=y$. Пригадаємо

формулу знаходження площі плоскої фігури (31). Тоді знаходження ряду площ

буде мати наступний вид: $S_{c_{n+3}b_{n+3}e_{n+3}d_n} = \int_{\frac{n}{n+1}}^1 (1-y) dy = \left(y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{\frac{n}{n+1}}^1 =$

$\frac{6n^2}{10(n+1)^2}$. Підставивши $n=1$, отримаємо $S_{c_4b_4e_4d_1} = \frac{6}{25}$.

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (13).

Задачі 1, 2, 4, 5, 7, 8 і 9 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

6. Визначити числовий ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі на моделі (див. рис. 3):

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $ \overline{a_1 c_n} ;$ | 6. $ \overline{a_1 c_4} ;$ |
| 2. $ \overline{a_1 l_n} ;$ | 7. $ \overline{a_1 l_2} ;$ |
| 3. $ \overline{a_1 D} ;$ | 8. $ \overline{a_1 l_3} ;$ |
| 4. $ \overline{a_1 c_2} ;$ | 9. $ \overline{a_1 l_4} ;$ |
| 5. $ \overline{a_1 c_3} ;$ | |

$$10. |\overline{k_n d_n}|.$$

Задача 6.3. Визначити ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_1 D}|$.

Розглянемо конус обертання навколо осі $|\overline{a_1 D}|$. Маємо координати точок: $0(0;0)$, $D(\frac{1}{2};0)$, $a_1(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $a_2(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, $a_3(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$, $a_4(\frac{1}{5};\frac{1}{5})$, ..., $a_n(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1})$. Для знаходження ряду об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_1 D}|$ будемо використовувати наступну формулу [22, с. 149]:

$$V_{|\overline{a_1 D}|} = \frac{1}{3} \pi R^2 H \quad (38)$$

Знайдемо об'єм для конуса обертання навколо осі $|\overline{a_1 D}|$. Визначимо радіус $0D$ і висоту Da_1 : $0D = \frac{1}{2}$, $Da_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{2}$. Відомі значення підставимо у формулу і обчислимо об'єм:

$$V_{|\overline{a_1 D}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times \frac{1^2}{2} \times 1}{2} = \frac{1\pi}{24} = \frac{\pi}{24}$$

За аналогією знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_n D}|$. Визначимо радіус $0D$ і висоту Da_n : $0A=1$,

$$Da_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - 0\right)^2} = \frac{1}{n+1}. \text{ Отже, } V_{|\overline{a_n D}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times \frac{1^2}{2} \times 1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{12n+12}.$$

(14) Підставимо у формулу $n=1$ і отримаємо $V_{|\overline{a_1 D}|} = \frac{\pi}{24}$.

Знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_1 D}|$ за допомогою визначеного інтегралу. Проміжком інтегрування візьмемо від 0 до 1. Складемо рівняння твірної конуса через відомі дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{1}{n+1}-0} = \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}$.

Спростивши отримали наступне рівняння: $y = x \left(\frac{2}{n+1} \right)$. Пригадаємо формулу знаходження об'єму тіла обертання [11, с.84]:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (40)$$

Підставимо значення і обчислимо визначений інтеграл: $V_{|\overline{a_n D}|} =$

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x \left(\frac{2}{n+1} \right) \right)^2 dx = \frac{4x^3}{3(n+1)^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6(n+1)^2}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (14).

Задача 6.7. Визначити ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_1 l_2}|$.

Розглянемо конус обертання навколо осі $|\overline{a_1 l_2}|$. Маємо координати точок: $k_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$, $l_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right)$, $a_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$, $a_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$, $a_3 \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right)$, $a_4 \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right)$, ..., $a_n \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1} \right)$. Для знаходження ряду об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_1 l_2}|$ будемо використовувати наступну формулу (38).

Знайдемо об'єм для конуса обертання навколо осі $|\overline{a_1 l_2}|$. Визначимо радіус $l_2 k_2$ і висоту $a_1 l_2$: $l_2 k_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right)^2} = \frac{1}{6}$, $a_1 l_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{1}{6}$. Відомі значення підставимо у формулу і обчислимо об'єм:

$$V_{|\overline{a_1 l_2}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times \frac{1^2}{6} \times 1}{6} = \frac{1\pi}{648} = \frac{\pi}{648}$$

За аналогією знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_n D}|$. Визначимо радіус $l_n k_n$ і висоту $a_n l_{n+1}$:

$$l_{n+1} k_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} \right)^2 + \left(\frac{n}{n+2} - \frac{1}{n+2} \right)^2} = \frac{n-1}{n+2},$$

$$a_n l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)^2} = \frac{n-1}{n+2}. \text{ Отже, } V_{|\overline{a_n l_{n+1}}|} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times \frac{n-1^2}{n+2} \times (n-1)}{n+2} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{324n+324}. \text{ (15) Підставимо у формулу } n=1 \text{ і отримаємо } V_{|\overline{a_1 l_2}|} = \frac{\pi}{648}.$$

Знайдемо ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі $|\overline{a_1 l_2}|$ за допомогою визначеного інтегралу. Проміжком інтегрування візьмемо від 0 до

1. Складемо рівняння твірної конуса через відомі дві точки (17). Підставимо координати точок і отримаємо наступні рівняння функції: $\frac{y-0}{\frac{n}{n+1}-0} = \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}$.

Спростивши отримали наступне рівняння: $y = x \left(\frac{2n}{n+1} \right)$. Пригадаємо формулу знаходження об'єму тіла обертання [11, с.84]:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (40)$$

Підставимо значення і обчислимо визначений інтеграл: $V_{|a_n l_{n+1}|} =$

$$\pi \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}} \left(x \left(\frac{2n}{n+1} \right) \right)^2 dx = \frac{8x^3}{12(n+1)^2} \Big|_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\pi}{162(n+1)^2}.$$

Отже, бачимо з розв'язання даної задачі різними способами ми отримаємо ряд (15).

Задачі 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 і 10 розв'язуються аналогічно до попередніх вище розглянутих задач.

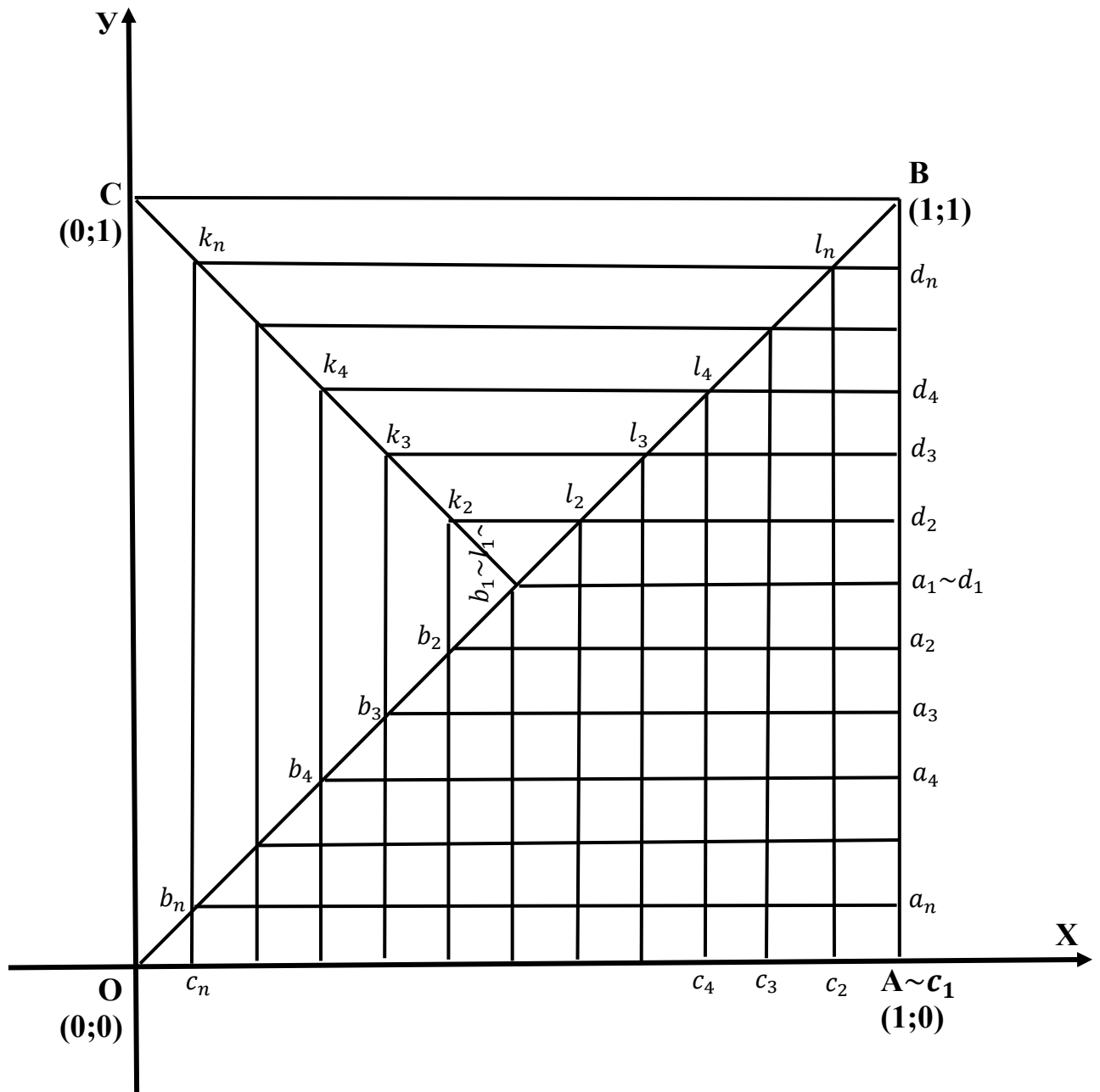


Рис. 4 Геометрична модель з використанням квадрата зі стороною $a=1$ і послідовності точок $a_n \left\{1; \frac{1}{n+1}\right\}$, $d_n \left\{1; \frac{n}{n+1}\right\}$, $c_n \left\{\frac{1}{n}; 0\right\}$

1. Скласти числові ряди координат послідовності наступних точок (див. рис. 4):

- | | |
|---------------|---------------|
| 1. т. c_n ; | 4. т. k_n ; |
| 2. т. a_n ; | 5. т. l_n ; |
| 3. т. b_n ; | 6. т. d_n . |

2. Визначити числовий ряд, сума S якого візуально спостерігається на моделі (див. рис. 4):

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{a_n a_{n+1}}|;$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{c_n c_{n+1}}|;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{b_n b_{n+1}}|;$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{k_n k_{n+1}}|.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{d_n d_{n+1}}|;$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{l_n l_{n+1}}|;$$

3. Визначити числовий ряд величин послідовності відрізків на моделі (див. рис. 4):

$$1. \{|\overline{0b_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$4. \{|\overline{a_n b_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$2. \{|\overline{d_n k_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$5. \{|\overline{c_n b_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$3. \{|\overline{l_n k_n}|\}_{n=1}^{\infty};$$

$$6. \{|\overline{b_n k_n}|\}_{n=1}^{\infty}.$$

4. Визначити числовий ряд площ трикутників на моделі (див. рис. 4):

$$1. l_1 d_1 B;$$

$$9. b_2 k_2 l_2;$$

$$2. l_2 d_2 B;$$

$$10. b_3 k_3 l_3;$$

$$3. l_3 d_3 B;$$

$$11. b_4 k_4 l_4;$$

$$4. l_4 d_4 B;$$

$$12. b_1 k_2 l_2;$$

$$5. b_1 a_1 B;$$

$$13. b_1 k_3 l_3;$$

$$6. b_2 a_2 B;$$

$$14. b_1 k_4 l_4;$$

$$7. b_3 a_3 B;$$

$$15. b_1 k_2 b_2;$$

$$8. b_4 a_4 B;$$

$$16. b_1 k_3 b_3.$$

5. Визначити числовий ряд площ трапецій на моделі (див. рис. 4):

$$13. l_1 l_2 d_2 d_1;$$

$$19. 0d_3 a_3 A;$$

$$14. l_1 l_3 d_3 d_1;$$

$$20. 0b_2 a_2 A;$$

$$15. l_1 l_4 d_4 d_1;$$

$$21. 0b_1 a_1 A;$$

$$16. l_2 l_3 d_3 d_2;$$

$$22. b_4 b_3 a_3 a_4;$$

$$17. l_3 l_4 d_4 d_3;$$

$$23. b_3 b_2 a_2 a_3;$$

$$18. 0b_4 a_4 A;$$

$$24. b_2 b_1 a_1 a_2.$$

6. Визначити числовий ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі на моделі (див. рис. 4):

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. $ \overline{b_1 a_1} ;$ | 6. $ \overline{l_1 d_1} ;$ |
| 2. $ \overline{b_2 a_2} ;$ | 7. $ \overline{l_2 d_2} ;$ |
| 3. $ \overline{b_3 a_3} ;$ | 8. $ \overline{l_3 d_3} ;$ |
| 4. $ \overline{b_4 a_4} ;$ | 9. $ \overline{l_4 d_4} ;$ |
| 5. $ \overline{b_n a_n} ;$ | 10. $ \overline{l_n d_n} .$ |

Як вже можна було помітити задачі, які сформульовано до рис. 4, досить схожі на задачі до рис. 3, тому розв'язати їх можна по аналогії. Отже, всі методи, формули і способи розв'язання можна застосувати до вищезгаданих задач.

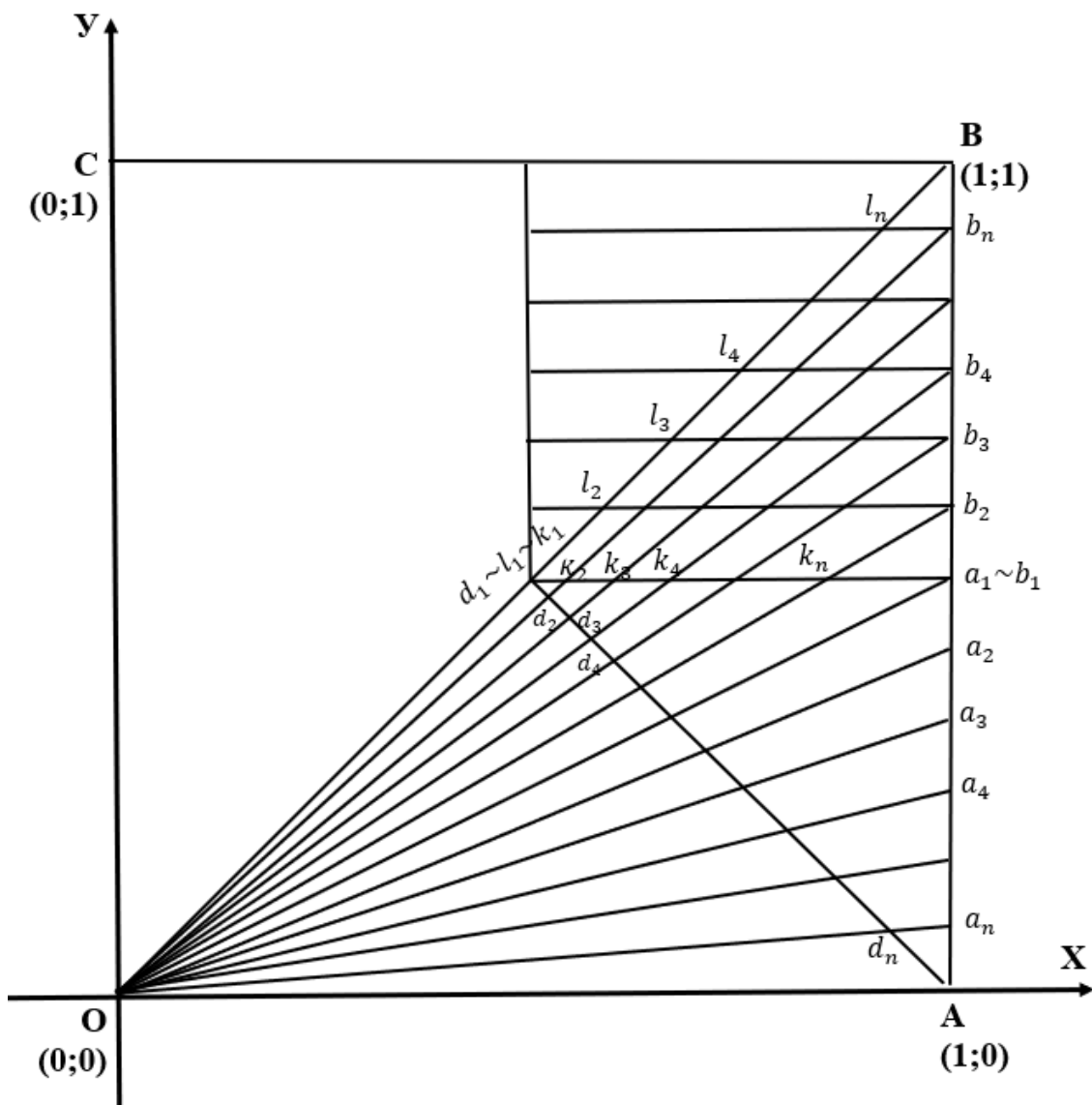


Рис. 5 Геометрична модель з використанням квадрата зі стороною $a=1$ і

послідовності точок $a_n \left\{1; \frac{1}{n+1}\right\}$, $b_n \left\{1; \frac{n}{n+1}\right\}$, $k_n \left\{\frac{n}{n+1}; \frac{1}{2}\right\}$

1. Скласти числові ряди координат послідовності наступних точок (див. рис. 5):

- | | |
|---------------|---------------|
| 1. т. d_n ; | 4. т. k_n ; |
| 2. т. a_n ; | 5. т. l_n ; |
| 3. т. b_n ; | |

2. Визначити числовий ряд, сума S якого візуально спостерігається на моделі (див. рис. 5):

- | | |
|---|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n a_{n+1}} $; | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{l_n l_{n+1}} $; |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n b_{n+1}} $; | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{k_n k_{n+1}} $. |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{d_n d_{n+1}} $; | |

3. Визначити числовий ряд величин послідовності відрізків на моделі (див. рис. 5):

- | | |
|---|--|
| 1. $\{ \overline{0b_n} \}_{n=1}^{\infty}$; | 4. $\{ \overline{d_n a_n} \}_{n=1}^{\infty}$; |
| 2. $\{ \overline{0a_n} \}_{n=1}^{\infty}$; | 5. $\{ \overline{l_n b_n} \}_{n=1}^{\infty}$. |
| 3. $\{ \overline{0d_n} \}_{n=1}^{\infty}$; | |

4. Визначити числовий ряд площ трикутників на моделі (див. рис. 5):

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. $l_1 b_1 B$; | 7. $0a_3 A$; |
| 2. $l_2 b_2 B$; | 8. $0a_4 A$; |
| 3. $l_3 b_3 B$; | 9. $0b_1 A$; |
| 4. $l_4 b_4 B$; | 10. $0b_2 A$; |
| 5. $0a_1 A$; | 11. $0b_3 A$; |
| 6. $0a_2 A$; | 12. $0b_4 A$; |

5. Визначити числовий ряд об'ємів послідовності конусів обертання навколо осі на моделі (див. рис. 5):

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $ \overline{0b_n} $; | 6. $ \overline{0a_n} $; |
| 2. $ \overline{0b_1} $; | 7. $ \overline{0a_1} $; |

3. $|\overline{0b_2}|;$

8. $|\overline{0a_2}|;$

4. $|\overline{0b_3}|;$

9. $|\overline{0a_3}|;$

5. $|\overline{0b_4}|;$

10. $|\overline{0a_4}|.$

Як вже можна було помітити задачі, які сформульовано до рис. 5, досить схожі на задачі до рис. 3, тому розв'язати їх можна по аналогії. Отже, всі методи, формули і способи розв'язання можна застосувати до вищезгаданих задач.