

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико – математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

**КООРДИНАТНИЙ І ВЕКТОРНИЙ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ
СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ
НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ**

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІМ-24
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Корнілової Юлії Олександрівни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Бобилев Д. Є.

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Корнілова Юлія Олександрівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

Зміст

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ТЕМ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ» В ШКМ.....	7
1.1. Методичні особливості вивчення координат і векторів у курсі планіметрії.....	7
1.1.1. Пропедевтика вивчення координат в курсі математики 5- 6 класу.....	7
1.1.2. Елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри у курсі геометрії 9 класу.....	12
1.2. Роль і місце теми «Координати та вектори у просторі» у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки.....	25
1.3. Координатний і векторний методи розв'язування задач і доведення математичних тверджень.....	27
1.3.1. Основні принципи координатного методу. Типові задачі і приклад використання координатного підходу. Переваги та недоліки координатного методу.....	27
1.3.2. Використання векторних операцій у розв'язуванні задач. Приклади типових задач із застосуванням векторного методу. Переваги та недоліки векторного методу.	33
Висновки до І розділу	37
РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ КООРДИНАТНИМ І ВЕКТОРНИМ МЕТОДАМИ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ.....	39
2.1. Методика навчання учнів застосуванню координатного методу в розв'язуванні стереометричних задач.....	39
2.2. Методика навчання учнів застосуванню векторного методу в розв'язуванні стереометричних задач.....	44

Висновки до II розділу	46
ВИСНОВКИ	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	49

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасна математична освіта включає в себе багато важливих напрямів розвитку мислення учнів. Одним із них є аналітичне мислення, тобто математична освіта ставить на меті розвивати в учнів здатність аналізувати, зіставляти факти та обирати найраціональніший спосіб розв'язання практичних задач у математиці, а і подальшому проблемних ситуацій у житті.

У старшій школі учні знайомляться з розділом геометрії, що вимагає особливої уваги до просторового уявлення, вміння побачити взаємне розташування геометричних об'єктів та виконання складних побудов.

Зазвичай методи, що допомагають при розв'язанні стереометричних задач, які у більшості випадків ґрунтуються на важливих аксіомах та теоремах є складними для учнів профільної школи.

На допомогу здобувачам освіти приходять методи аналітичної геометрії такі, як координатний та векторний. Ці методи дають можливість полегшити та систематизувати розв'язки. Вони дозволяють перевести розв'язування стереометричної задачі в алгебраїчну форму, що дозволяє виконувати легко та ефективно обчислення.

Координатний та векторний метод дозволяють учням побачити зв'язок між алгеброю та геометрією.

Актуальність дослідження виявляється також в потребі удосконалити практичне використання координатного і векторного методів у розв'язуванні стереометричних задач.

Все вище зазначене обумовлює вибір теми дослідження: **«Координатний і векторний методи розв'язування стереометричних задач на профільному рівні навчання математики»**

Об'єкт дослідження – це процес навчання учнів розв'язанню стереометричних задач на профільному рівні підготовки.

Предмет дослідження: методика навчання учнів розв'язуванню стереометричних задач координатним і векторним методами.

Метою дослідження є розробити методичні прийоми застосування координатного та векторного методів розв'язування задач у навчанні учнів стереометрії за програмою профільного рівня.

Для дослідження поставлено мети дослідження були визначені такі **завдання**:

1. Дослідити методичні особливості тем змістової лінії «Координати і вектори» в курсі математики 5-6 класу, геометрії 9 класу.
2. Розкрити сутність координатного і векторного методів розв'язування задач і доведення математичних тверджень.
3. Дослідити роль і місце теми «Координати та вектори у просторі» у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки.
4. Розробити елементи методики навчання учнів розв'язуванню стереометричних задач координатним і векторним методами на профільному рівні підготовки.

Методи дослідження: теоретичні: вивчення і аналіз психологопедагогічної, навчальної та методичної літератури з теми, узагальнення

Структура кваліфікаційної роботи. Структура кваліфікаційної роботи складається з вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ТЕМ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ» В ШКМ.

1.1. Методичні особливості вивчення координат і векторів у курсі планіметрії.

1.1.1. Пропедевтика вивчення координат в курсі математики 5-6 класу.

Пропедевтика вивчення координат в курсі математики 5-6 класу є важливою етапом у вивченні математики, що починає формувати в учнів просторове уявлення та навички, що у подальшому ними використовуватиметься при вивченні координатної площини та геометрії.

Формування поняття координат починається у п'ятому класі, коли учні починають вивчати, що таке «координатний промінь», але перед тим, як перейти до вивчення цього поняття учні повинні вивчити що таке «промінь».

Поняття «промінь» п'ятикласникам визначають як частина прямої, що лежить по один бік від точки, що належить даній прямій. У підручнику з математики авторів Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, В. О. Рудніцька та у конспекті «Геометричні фігури та величини (довжина, площа, об'єм, маса, час)», що зроблений платформою ВШО, поняття промінь розкривається разом з поняття «пряма» та «відрізок» за допомогою наступної таблиці 1.1.1.1 [29, 35]

Таблиця 1.1.1.1

Пряма	Промінь	Відрізок
 <i>пряма AB</i> Мал. 1.1.1	 <i>промінь BC</i> Мал. 1.1.2	 <i>відрізок CD</i> Мал. 1.1.3
Нескінченна пряма лінія	Частина прямої по один бік від точки B	Частина прямої, що сполучає точки C і B
Пряма AB – нескінченна	Точка B – початок	Точки C і B – кінці

	<i>променя.</i>	<i>відрізка.</i>
--	-----------------	------------------

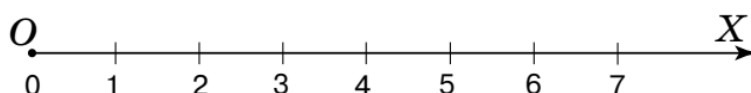
Табл. 1.1.1.1 Означення понять «пряма», «промінь», «відрізок».

Після вивчення поняття «промінь» школярі переходять до поняття «координатний промінь», з якого і починається формування пропедевтика вивчення координат у п'ятому класі.

Продовжуємо розглядати методику вивчення цього поняття з підручника Н. А. Тарасенкової. У підручнику пропонується Виконати побудову координатного променя, не наголошуючи поки що на назві поняття. Маємо такий алгоритм побудови [29]:

1. Будуємо промінь;
2. У кінці зображення променя ставимо стрілочку;
3. Від початку променя відкладаємо відрізок довжиною одиничного відрізка (наприклад 1 см) і ставимо засічку [29];
4. На промені праворуч від засічки послідовно відкладаємо відрізки довжиною, як перший;
5. На початку променя пишемо число 0, а далі під засічками — числа натурального ряду: 1; 2; 3; 4; 5; 6;... [29]

Після виконання алгоритму, дається назва «координатний промінь» (мал. 1.1.1.4).



Мал. 1.1.1.4. Координатний промінь.

Розглянемо мал. 1.1.1.4 за підручником п'ятого класу Тарасенкової маємо [29]:

- Точку O називають початком відліку.
- Відрізок, що відповідає числу 1, називають одиничним відрізком.
- Стрілка наприкінці променя показує напрям відліку.
- За одиничний відрізок можна взяти відрізок будь якої довжини.
- Кожній точці на координатному промені відповідає єдина координата.

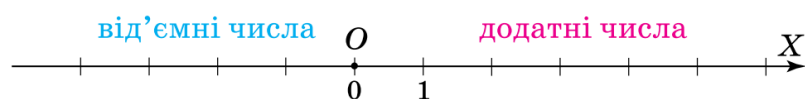
Координата деякої точки, що лежить на координатному промені, позначає кількість одиничних відрізків, або відстань від поданої точки до точки відліку, тобто нуля [29].

Наступним кроком учням пояснюється визначення відстані між двома точками на координатному промені. У підручнику Н. А. Тарасенкової дають таке означення: «щоб знайти відстань між двома точками за їх координатами, треба від більшої координати відняти меншу» [29, с. 27].

Отже у п'ятому класі школярі знайомляться та вивчають поняття «координатний промінь» та «координати» точок, що лежать на промені, а також відстань між точками, що побудовані координатному промені [29].

У шостому класі учні розширюють свої знання про координати, вони починають вивчати, що таке «координатна площина».

Вивчення цієї теми починають з розгляду «координатної прямої», після вивчення від'ємних та додатних чисел, що є фундаментом вивчення «координатної площини» у шостому класі. Школярам на початку вивчення «координатної прямої» варто пригадати що таке «координатний промінь», який вони вивчали у п'ятому класі. Саме у підручнику Н. А. Тарасенкової пропонується відштовхуватися від поняття «координатний промінь». Учням пропонують продовжити промінь ліворуч за його початок відліку. Наступним кроком наносимо таку ж саму шкалу, що знаходиться праворуч від точки відліку. [29]



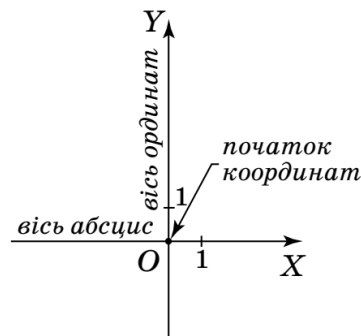
Мал. 1.1.1.5. Координатна пряма.

Координата зі значенням нуль залишається початком відліку для «координатної площини», як і для «координатного променя». Ліворуч від початку відліку розташовують від'ємні числа, а праворуч – додатні. Можна зазначити, що стрілка на «координатній прямій» позначає додатний напрям.

Якщо розглянути подання теоретичного матеріалу у підручнику автора О. С. Істера, то можна побачити, що «координатну пряму» починають

вивчати з звичайної прямої. Наступний крок – це побудова точки O , що є початком відріку. Далі говорять, що ця точка ділить пряму на два променя. Додатні числа знаходяться на промені знаходиться праворуч від початку відріку, а від’ємні числа – на промені ліворуч від початку відріку. Наступним кроком будують шкалу та позначають координати. [16]

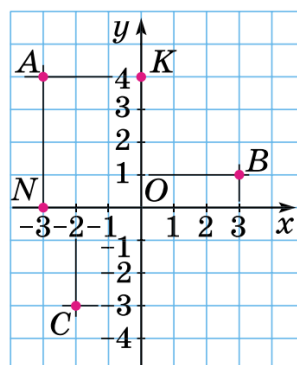
Розглянемо вивчення вже безпосередньо поняття «координатна площина» у підручнику з математики 6 клас автора Н. А. Тарасенкової. Вивчення «координатної площини» починається з побудови прямокутної системи координат таким чином: будують дві координатні прямі перпендикулярні одна до одної й так, щоб початки відріку збігалися на них (одна задає напрямок праворуч – ліворуч, а друга вниз - вгору) [36].



Мал. 1.1.1.6. Прямокутна система координат.

Розглядаємо мал. 1.1.1.6 першу пряму позначають OX , та називають віссю абсцис, другу координатну пряму позначають OY – віссю ординат. Спільну точку двох координатних прямих називають початком координат [36].

Після вивчення «прямокутної системи координат» починають розглядати позначення «координат» у цій системі координат.

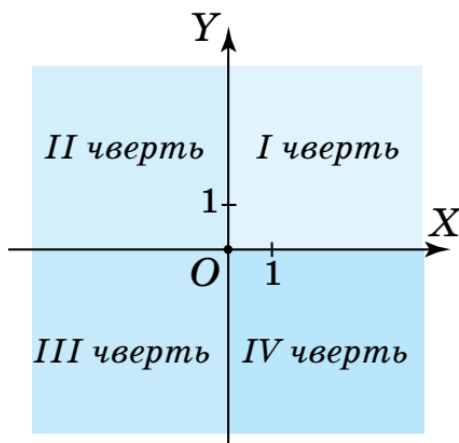


Мал. 1.1.1.7. Прямокутна система координат та координати точок.

Позначимо у прямокутній системі координат точки (мал. 1.1.1.7). Якщо розглянути кожену точку, то можна побачити, кожній точці на площині можна поставити у відповідність єдину пару чисел, які беруться у певному порядку. Також це працює і у зворотному напрямку, що кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини [36]. Таку упорядковану пару чисел називають координатами точки. Першою координатою у парі чисел беруть за віссю абсцис і називають її абсцисою, другу координату у парі чисел беруть за віссю ординат і називають ординатою. Тобто у записі ми матимемо такий вигляд: $A(x; y)$. [29, 16]

Розглянемо мал. 1.1.1.7 та визначимо координати точки A . Ця точка по віссі абсцис матиме першу координату зі значенням -3 , а по віссі ординат -4 . Тобто матимемо такий запис: $A(-3; 4)$. Якщо точка лежить на одній із віссі, то координата за віссю, на якій точка не лежить буде дорівнювати нулю. Наприклад, розглянемо точки N та K з мал. 1.1.1.7 [36]. Точка N лежить на віссі абсцис, тобто у даному випадку абсциса буде дорівнювати -3 , а ось ордината буде мати координату 0 . Точка K лежить на віссі ординат, то тепер абсциса буде дорівнювати нулю, а ордината матиме координату 4 . Початок координат має такі координати, як $(0; 0)$. [16]

Якщо уважно розглянути «прямокутну систему координат», то стає очевидно, що координатні осі перетнувшись розбивають координатну площину на чотири частини. Такі частини називають «координатними чвертями»[36,].



Мал. 1.1.1.8. Координатні чверті.

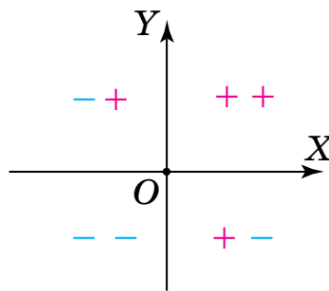
На мал. 1.1.1.8 показано розташування чвертей та їх назви: I чверть, II чверть, III чверть, IV чверть. Розглянемо координати точки, яка розміщена у деякій чверті (табл. 1.1.1.2).

Таблиця 1.1.1.2

Координати	I чверть	II чверть	III чверть	IV чверть
Абсциса (x)	+	-	-	+
Ордината (y)	+	+	-	-

Табл. 1.1.1.2. Знаки чвертей прямокутної системи координат.

Розглянувши табл. 1.1.1.2, бачимо що у I чверті обидві координати додатні, у II чверті абсциса від'ємна, а ордината додатна, у III чверті обидві координати від'ємні, у IV чверті абсциса – додатна, а ординат від'ємна (мал. 1.1.1.9) [36].



Мал. 1.1.1.9. Знаки координат у чвертях.

Отже, у 5-6 класі учні знайомляться з координатним променем та його координатами, з координатною прямою та її координатами, та з прямокутною системою координат, що є фундаментом для використання координат у подальшому вивченні геометрії та використання координатного методу розв'язування задач.

1.1.2. Елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри у курсі геометрії 9 класу.

Наступним кроком для використання координатного та векторного методів при розв'язуванні стереометричних задач на профільному рівні навчання математики є вивчення учнями елементів аналітичної геометрії та векторної алгебри у курсі геометрії 9 класу.

Розглянемо діючу навчальну програму для курсу геометрії 9 класу від 2017 року. За програмою учні мають розглянути такі теми з курсів аналітичної геометрії та векторної алгебри, як: «координати на площині» та «вектори на площині» [26].

Розглянемо детальніше тему «Координати на площині». Учням на вивчення та засвоєння цього навчального матеріалу виділяють вісім годин. У навчальній програмі за ці вісім уроків учні повинні вивчити такі теми [26]:

- Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° .
- Тотожності: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
- Координати середини відрізка.
- Відстань між двома точками із заданими координатами.
- Рівняння кола і прямої [26].

Навчальна програма зазначає, що з цієї теми дев'ятикласники та дев'ятикласниці повинні [26]:

- пояснювати основні поняття теми (синус, косинус, тангенс кутів 0° до 180° ; рівняння фігури; як задаються на координатній площині пряма та коло);
- формулювати теореми (відстань між двома точками, координати середини відрізка);
- записувати та пояснювати формули (координат середини відрізка, відстані між двома точками) та рівняння (кола та прямої);
- зображувати та знаходити на малюнках пряму та коло за їх рівнянням у заданій системі координат;
- обчислювати координати середини відрізка, відстань між двома точками, що задані своїми координатами;
- доводити теореми (відстань між двома точками, координати середини відрізка);
- застосовувати вивчені формули та рівняння фігур до розв'язування задач [26].

Тепер розглянемо, що повинні вивчити та засвоїти дев'ятикласники та дев'ятикласниці з теми «Вектори на площині», що за програмою вивчається одразу ж після теми «Координати на площині» [26]. На тему відводиться дванадцять уроків і учні та учениці повинні вивчити такі теми за ці 12 годин:

- Вектор. Модуль і напрям вектора.
- Рівність векторів.
- Координати вектора.
- Додавання і віднімання векторів.
- Множення вектора на число.
- Колінеарні вектори.
- Скалярний добуток векторів [26].

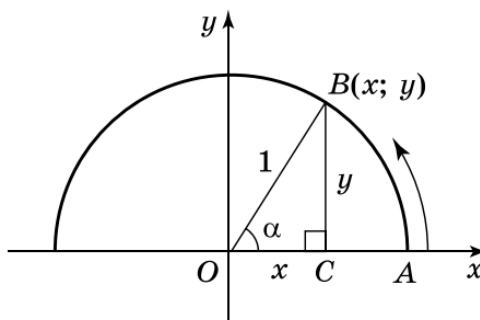
За навчальною програмою, з цієї теми дев'ятикласники та дев'ятикласниці повинні:

- наводити приклади векторів (рівні, протилежні, колінеарні);
- пояснювати поняття теми (вектор, модуль і напрям вектора, одиничний вектор, нуль-вектор, колінеарні вектори, протилежні вектори, координати вектора, сума і різниця векторів, добуток вектора на число), задавати вектор, відкладати вектор від заданої точки та знати правила (знаходження суми векторів та добутку вектора на число) [37];
- формулювати означення (рівні вектори, скалярний добуток векторів) та властивості (дії над векторами);
- зображувати та знаходити на малюнках основні поняття теми (вектор; вектор, рівний або протилежний даному, колінеарний із даним, у т. ч. за його координатами; вектор, що дорівнює сумі (різниці) векторів, добутку вектора на число;) [37];
- обчислювати координати вектора, суми (різниці) векторів; добутку вектора на число, довжину вектора, кут між двома векторами [37];
- обґрунтовувати рівність та колінеарність векторів[37];

– застосовувати вивчені означення й властивості до розв’язування задач [26].

Багато вивчення теми «Координати на площині» почати з повторення вивченого у 5-6 класі з теми «координат», а конкретніше повторити всі вивчені відомості про прямокутну систему координат. У підручнику з геометрії автора О. С. Істера, вивчення теми «координати на площині» і починають з повторення координатної площини [7].

Наступним кроком дев’ятикласники та дев’ятикласниці пригадують вивчені ними у восьмому класі косинус, синус тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Потрібно це для того, щоб ввести означення косинуса, синуса та тангенса через прямокутну систему координат [6].



Мал. 1.1.2.1 Одиничне півколо.

Побудуємо на площині прямокутну систему координат. Наступним кроком проведемо у I та II чвертях півколо радіусом 1, так що центр кола збігається з початком координат (мал. 1.1.2.1). Таке півколо називають одиничним півколом. Вводимо позначення як на малюнку 1.1.2.1:

- точка A – це точка перетину півкола з додатнім напрямом осі абсцис;
- кути відкладаємо від променя OA проти годинникової стрілки;
- $\angle AOB = \alpha$ – це гострий кут (точка B належить півколу);
- BC – це перпендикуляр до осі x ;
- в результаті утворився прямокутний трикутник OBC з гіпотенузою OB , що дорівнює 1 [7].

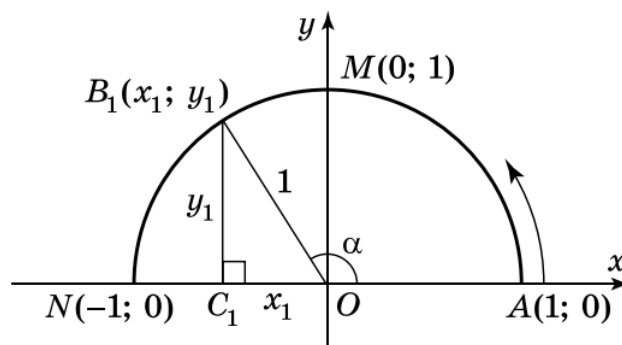
Після побудови малюнку 10, визначаємо синус, косинус, тангенс гострого кута α через координати точки В маємо такі формули:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (1.1.2.1)$$

У восьмому класі учні на геометрії знайомилися з значеннями косинуса, синуса та тангенсом деяких кутів, а у дев'ятому класі вони розширюють та поглиблюють свої знання про них.

Дев'ятикласники розглядають значення синуса, косинуса та тангенса кутів від 0° до 180° , через одичне півколо.

Позначимо на одиничному півколі точку $B_1(x_1; y_1)$, яка лежить у другій чверті (мал. 1.1.2.2).



Мал. 1.1.2.2. Одиничне півколо з точкою $B_1(x_1; y_1)$, що належить другій чверті.

Якщо розглянемо малюнок 1.1.2.2, то побачимо, що утворюється тупий $\angle B_1OA$. Тоді ми маємо такі значення цього кута:

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{1} = y_1; \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{1} = x_1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1} \quad (1.1.2.2)$$

Розглянемо координати деяких точок одиничного півкола. Вони змінюються у межах $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, а тоді для довільного α від 0° до 180° , виконується такі нерівності:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad (1.1.2.3)$$

Кут α , може в бути гострим та тупим, розглянемо ці два випадки і подивимося на яких проміжках знаходиться значення косинусу, синусу та тангенсу:

– коли кут α – гострий, то:

$$\sin \alpha = y > 0; \quad \cos \alpha = x > 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} > 0; \quad (1.1.2.4)$$

– коли кут α – тупий, то:

$$\sin \alpha = y > 0; \quad \cos \alpha = x < 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} < 0. \quad (1.1.2.5)$$

Варто зазначити що, якщо збільшувати кут α від 0° до 90° , то його синус буде збільшуватися в межах від 0 до 1, а косинус зменшуватися від 1 до 0. Якщо ж кут α збільшувати від 90° до 180° , то синус цього кута зменшується від 1 до 0, а косинус зменшується в межах від 0 до -1 [7].

За малюнком 1.1.2.2 дуже легко знайти значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0° , 90° , 180° . Щоб знайти значення синуса, косинуса та тангенса кута 0° , треба розглянути точку $A(1;0)$ на одиничному півколі. Матимемо такі значення:

$$\sin 0^\circ = y = 0; \quad \cos 0^\circ = x = 1; \quad \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0. \quad (1.1.2.6)$$

Точка $M(0;1)$ відповідає куту 90° , тоді значення синуса, косинуса та тангенса матимемо такі:

$$\sin 90^\circ = y = 1; \quad \cos 90^\circ = x = 0; \quad \operatorname{tg} 90^\circ - \text{не існує.} \quad (1.1.2.7)$$

Точка $N(-1;0)$ відповідає куту 180° , тоді значення синуса, косинуса та тангенса матимемо такі:

$$\sin 180^\circ = y = 0; \quad \cos 180^\circ = x = -1; \quad \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0. \quad (1.1.2.8)$$

Вище зазначалося, що значення тангенса деякого кута дорівнює співвідношенню координати y на x , тому з цього випливає, що значення тангенса деякого кута можна знаходити за таким відношенням:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (1.1.2.9)$$

У дев'ятому класі учні повинні ознайомитися та вивчити деякі тригонометричні тотожності.

Тригонометричні тотожності – це математичні вирази, що містять тригонометричні функції (синус, косинус, тангенс), які виконуються для всіх значень аргумента зі спільної області визначення [6].

У шкільному курсі геометрії розглядають такі тригонометричні тотожності:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (1.1.2.10)$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; \quad (1.1.2.11)$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad (1.1.2.12)$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad (1.1.2.13)$$

Детально розглянемо доведення цих тригонометричних тотожностей у підручнику О. С. Істера.

Доведемо, що тотожність (1.1.2.10) є вірною.

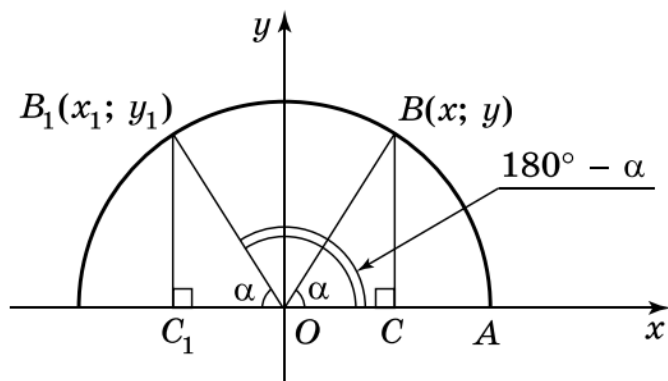
Розглянемо малюнок 1.1.2.1. На малюнку бачимо прямокутний трикутник BOC . Пригадаємо та використаємо теорему Піфагора: $BC^2 + OC^2 = OB^2$. Підставимо у дану рівність значення сторін трикутника: $BC = y$, $OC = x$, $OB = 1$. Отримуємо таку рівність: $y^2 + x^2 = 1$. З огляду на те, що ми маємо рівність (1.1.2.1), то отримуємо таку рівність: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Отриману рівність називають основною тригонометричною тотожністю. Ця формула дає можливість вивести формули для знаходження синус та косинус кута:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (1.1.2.14)$$

При знаходженні косинуса кута у знак « $-$ » пишуть, коли кут α є тупим кутом.

Доведемо, що тотожності (1.1.2.11) є вірними.



Мал. 1.1.2.3. Одиничне півколо з точками $B(x; y)$ та $B_1(x_1; y_1)$.

Розглянувши малюнок 1.1.2.3, можна побачити, що точка $B(x; y)$ відповідає куту α , а точка $B_1(x_1; y_1)$ – куту $180^\circ - \alpha$.

Розглянемо $\triangle OBC$ та $\triangle OB_1C_1$: так як $\angle B_1OA = 180^\circ - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = 180^\circ - 180^\circ + \alpha = \alpha$. $OB = OB_1 = 1$.

Отже $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом), тому $BC = B_1C_1$ і $OC = O_1C_1$. З цього можна сказати, що абсциси точок B та B_1 – протилежні ($x = -x_1$), а їх ординати – однакові ($y = y_1$).

Беручи до уваги, що $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\sin(180^\circ - \alpha) = y_1$, $\cos(180^\circ - \alpha) = x_1$, матимемо: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Що і треба було довести.

Доведемо, що тотожності (1.1.2.12) є вірними.

Щоб довести рівність (1.1.2.12), використовуємо розглянуті попередні рівності (1.2.11), тобто ми матимемо:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Після доведення цих формул у підручнику О. С. Істера пропонується розглянути задачу для засвоєння формул (1.1.2.11) та (1.1.2.12), щоб вразити синус, косинус і тангенс тупого кута $180^\circ - \alpha$ через синус, косинус та тангенс гострого кута α . Після цього всі знання отримані з вивчення цієї теми та отримані у восьмому класі, що пов'язані зі значеннями кута синуса, косинуса та тангенса, систематизуємо у таку таблицю 1.1.2.1:

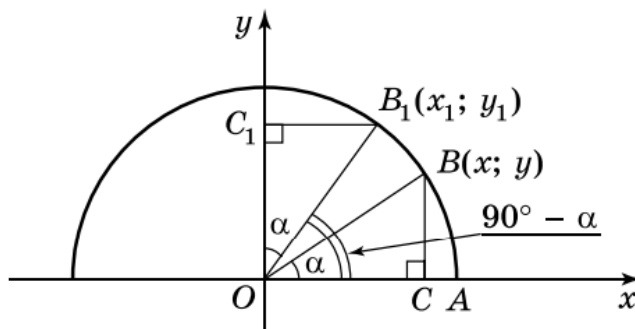
Таблиця 1.1.2.1

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Табл. 1.1.2.1. Значення синуса, косинуса та тангенса кута від 0° до 180°

Для знаходження синуса, косинуса та тангенса кутів, що не входять до таблиці 1.1.2.1, використовують таблиці або калькулятори.

Не доведеними формулами у нас залишилися рівності (1.1.2.13). Тому доведемо, що тотожності (1.1.2.12) є вірними.



Мал. 1.1.2.4. Одиничне півколо з точками $B(x; y)$ та $B_1(x_1; y_1)$.

На малюнку 1.1.2.4 зображено дві точки $B(x; y)$ та $B_1(x_1; y_1)$, що відповідають кутам α та $90^\circ - \alpha$.

Розглянемо трикутники, що утворилися $\triangle OBC$ та $\triangle OB_1C_1$. Оскільки $\angle B_1OA = 90^\circ - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Тому за гіпотенузою та гострим кутом маємо, що $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$. Отже $OC = OC_1$, $BC = B_1C_1$, тобто $x = y_1$ і $y = x_1$.

Беручи до уваги, що $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\sin(90^\circ - \alpha) = y_1$, $\cos(90^\circ - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Наступним кроком учні знайомляться та вивчають координати середини відрізка, відстань між двома точками із заданими координатами. На цьому етапі учні починають знайомитися з аналітичною геометрією зі знаннями, що дозволять їм у подальшому вивчити та використовувати метод координат.

Метод координат, можна використовувати для розв'язування геометричних, тому що «існує взаємно однозначна відповідність між точками координатної площини і їх координатами $(x; y)$ », це випливає з того, що кожній точці координатної площини відповідає єдина пара чисел $(x; y)$, і

навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка координатної площини» [7].

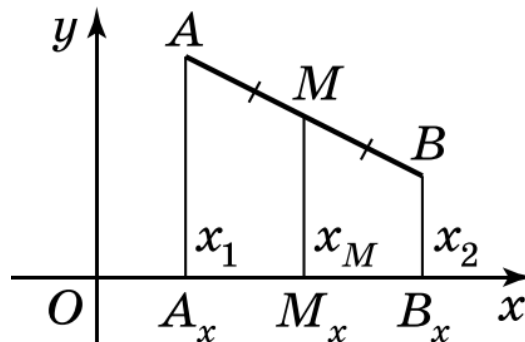
Метод координат ґрунтується на тому, щоб подавати геометричні співвідношення розташування точок та фігур через алгебраїчні співвідношення між їх координатами [7].

Тему починають розглядати з розв'язування загальної задачі на знаходження середини відрізка.

Задача 1.1.2.1. Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Точка M – середина відрізка AB . Знайти координати точки M .

Розв'язання

1) Першим кроком розглянемо випадок, коли відрізок AB не паралельний осі y , тобто тоді маємо, що $x_1 \neq x_2$. Проводимо через точки A , B і M прямі, що паралельні осі y , тоді маємо наступний малюнок.



Мал. 1.1.2.5. Координатна площина з точками $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та M – середина відрізка AB .

Проведені прямі перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$, $B_x(x_2; 0)$ і $M_x(x_M; 0)$.

Розглянемо проведені прямі. Ці прямі є паралельними між собою $AA_x \parallel BB_x \parallel MM_x$ та точка M – середина відрізка AB , тоді за теоремою Фалеса, маємо, що M_x є серединою відрізка A_xB_x .

Маємо $A_xM_x = M_xB_x$, тобто $|x_1 - x_M| = |x_M - x_2|$.

За означенням модуля маємо дві рівності: $x_1 - x_M = x_M - x_2$ та $x_1 - x_M = -(x_M - x_2)$.

Виразимо з першої рівності x_M : $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$. Друга рівність не має змісту, тому що $x_1 \neq x_2$.

2) Розглядаємо випадок коли відрізок AB паралельний осі y , тоді $x_1 = x_2 = x_M$ і формула $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ справджується.

3) Аналогічно доводиться і формула $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Тому маємо, що координати точки M – середини відрізка AB , де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1+y_2}{2} \quad (1.1.2.15)$$

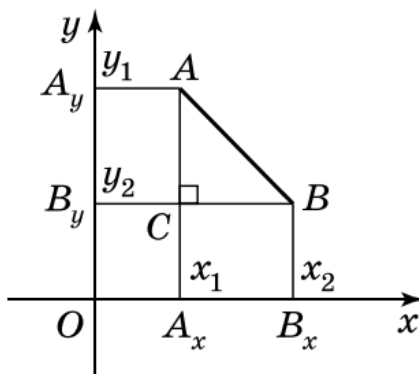
Після розгляду формул знаходження координат середини відрізка за координатами кінців відрізка, розглядають знаходження відстані між двома точками. Тому вивчають на загальній задачі.

Задача 1.1.2.2. Знайти відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

Розв'язання

1) Починаємо розглядати перший випадок, коли відрізок AB не паралельний жодній осі координат ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$).

Проводимо через кінці даного відрізка прямі, що паралельні осям координатної площини. Отримуємо такий малюнок:



Мал. 1.1.2.6. Координатна площина, відрізок AB не паралельний осям

Утворилися точки перетину з осями. З віссю x маємо: $A_x(x_1; 0)$ і $B_x(x_2; 0)$. З віссю y маємо: $A_y(0; y_1)$ і $B_y(0; y_2)$.

Оскільки $A_x B_x B C$ - прямокутник, тому маємо $BC = A_x B_x = |x_1 - x_2|$.

Аналогічно $AC = A_y B_y = |y_1 - y_2|$.

Розглядаємо прямокутний трикутник ABC : гіпотенуза цього трикутника і є шуканим відрізком: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2) Другий випадок відрізок AB паралельний осі y , тоді $(x_1 = x_2, y_1 \neq y_2)$ та $AB = |y_1 - y_2|$. Той самий результат отримаємо і за наведеною формулою для цього відрізка у пункті один.

3) Третій випадок відрізок AB паралельний осі x , тоді $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$ та $AB = |x_1 - x_2|$. Той самий результат отримаємо і за наведеною формулою для цього відрізка у пункті один.

4) Четвертий випадок коли точки збігаються, тобто $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, тоді $AB = 0$. Той самий результат отримаємо і за наведеною формулою для цього відрізка у пункті один

Тобто маємо, що відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ знаходиться за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1.1.2.16)$$

Останнім кроком знайомства з ознайомленням у дев'ятому класі з аналітичною геометрією є вивчення рівняння кола та рівняння прямої.

У підручнику геометрії 9-го класу авторів Г. П. Бевз, В. Г. Бевз та Н. Г. Владімірова починають з такого означення «рівняння фігури»: «**рівнянням фігури** на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури, і тільки координати точок даної фігури». [6]

Потім учні розглядають рівняння кола із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r :

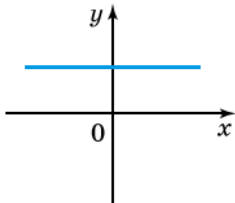
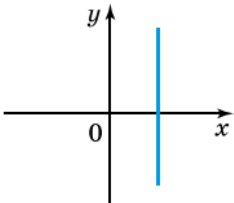
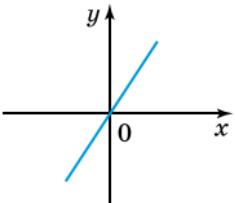
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1.1.2.17)$$

Загальне рівняння прямої у прямокутній системі координат має вигляд:

$$ax + by + c = 0, \quad (1.1.2.18)$$

де a, b, c - числа, причому коефіцієнти біля змінних одночасно не дорівнюють нулю.

Дев'ятикласники розглядають деякі часткові випадки розташування прямої у декартовій системі координат. Ці випадки зображені на малюнку 1.1.2.7 [7].

Часткові випадки розташування прямої $ax + by + c = 0$ в декартовій системі координат		
$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$
$y = -\frac{c}{b}$	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{a}{b}x$
		

Мал. 1.1.2.7. Часткові випадки розташування прямої.

Тепер перейдемо до розгляду матеріалу, що учні дев'ятого класу вивчають у шкільному курсі геометрії з векторної алгебри.

Векторна алгебра - це розділ математики, що вивчає вектори та дії над ними.

Зрозуміло, що основне поняття, що вивчається – це вектор.

Дев'ятикласники, повинні познайомитися з базовими поняттями та операціями, що можна виконувати над ними, що є фундаментом вивчення векторного методу та використання цього методу при розв'язування стереометричних задач.

У підручнику авторства О. С. Істер вектор означають таким чином: «відрізок, для якого визначено напрям, називають напрямленим відрізком, або вектором» [7, ст. 54]

Здобувачі освіти повинні вивчити такі основні поняття з векторної алгебри:

- вектор;
- модуль вектора (довжина вектора) та формулу знаходження;
- колінеарні вектори та умови колінеарності векторів;
- рівність векторів;

- координати вектора та їх знаходження;
- скалярний квадрат вектора;
- кут між двома ненульовими векторами, що не мають спільного початку та його формула знаходження.

Учні повинні ознайомитися з такими теоремами з курсу векторної алгебри [26]:

- про рівність векторів (у рівних векторів відповідні координати рівні, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні) [38];

- правило трикутника додавання векторів;
- про добуток вектора на число;
- про скалярний добуток векторів та наслідки з неї [26].

У навчальній програмі 8-9 класів зазначено, що учні повинні засвоїти, такі основні дії над векторами:

- сума векторів та їх властивості;
- різниця векторів;
- множення вектора на число та його властивості;
- Скалярний добуток векторів та його властивості [26].

1.2. Роль і місце теми «Координати та вектори у просторі» у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки.

Тема «Координати та вектори у просторі» є фундаментальною у вивченні геометрії на профільному рівні навчання, тому що ця тема дозволяє розв'язувати стереометричні задачі за допомогою алгебраїчних методів, продовжуючи встановлювати зв'язок між алгеброю та геометрією. Також ця тема дає загальний розвиток здібностей учнів, таких як:

- 1) інтелектуальний та логічний розвиток учнів;
- 2) розвиток пам'яті та вміння аналізувати та узагальнювати матеріал;

- 3) використовувати математичні знання під час розв'язання задач;
- 4) розвиток культури мовлення та висловлення своєї думки [25].

«Координати та вектори у просторі» дають такі математичні знання та розвиток математичного мислення та навичок, як:

- розширення знань та уявлень здобувачів освіти про координати та вектори на площині та в просторі;
- розвивати вміння учнів доводити просторові поняття та твердження проводячи аналогію з відповідними означеннями планіметрії;
- навчити та удосконалювати навички побудови просторових фігур та розв'язувати стереометричні задачі координатним та векторним методами, у яких використовують геометричні фігури у просторі;
- формувати та відточувати вміння та навички під час розв'язування практичних задач [25, ст. 23-25].

Розглядання теми «Координати та вектори у просторі» починається у кінці десятого класі у розділі, що має назву «Координати, вектори, геометричні перетворення в просторі».

Вивчення у десятому класі є продовженням дев'ятого класу, але учні переходять до вивчення декартових координат та векторів у просторі. Першим кроком учні вивчають та засвоюють поняття «тривимірного простору», розміщення точок та побудову відрізків, векторів та прямих у просторі. Навчаються побудови геометричних фігур у просторі, використовуючи знання про координати. Знайомляться з формулами для простору та проводять аналогії з формулами, що використовувалися на площині для векторів та координат. [25, 5, 27, 23].

Десятикласники повинні засвоїти такі формули знаходження [17]:

- координат середини відрізка;
- координати точки;
- координати відрізка
- довжини відрізка та площі фігури;
- скалярного добутку векторів;

У одинадцятому класі учні продовжують розглядати та удосконалювати та поглиблювати знання. Учні вчаться виконувати складні дії з векторами, які задаються як і геометрично, так і координатами. Удосконалюються навички використання формул при розв'язування алгебраїчних та геометричних задач. І у одинадцятому класі якраз учні починають і вчаться розв'язувати стереометричні задачі, використовуючи координатний та векторний методи, які спрощують розв'язання цих задач і показують тісний взаємозв'язок алгебри та геометрії [18, 25, ст. 30]

Змістова лінія «Координати та вектори у просторі» дуже тісно пов'язані з деякими предметами, наприклад, такими як фізика та інформатика. Координати та вектори у фізиці розглядаються у багатьох розділах: класична механіка, електродинаміка, магнетизм. У інформатиці вектори та координати застосовують при вивчення 3D-графіки [2].

1.3. Координатний і векторний методи розв'язування задач і доведення математичних тверджень.

1.3.1. Основні принципи координатного методу. Типові задачі і приклади використання координатного підходу. Переваги та недоліки координатного методу.

Координатний метод – аналітичний спосіб розв'язування геометричних задач або задач на знаходження геометричного місця точок чи виведення рівнянь для деяких ліній, використовуючи координати деяких точок. Метод координат також поєднується з векторним. Він розглядає вектори, що задаються своїми координатами [10].

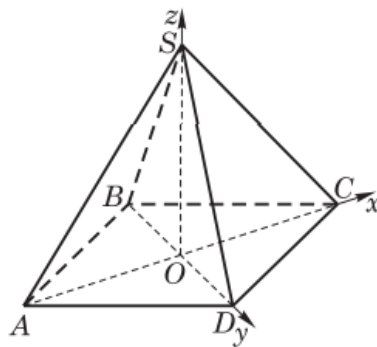
Основним принципом координатного методу є задання геометричних об'єктів за допомогою чисел, тобто координатами, рівняннями та векторами. Основою цього принципу є перетворення геометричних фігур просторові відношення у алгебраїчні співвідношення, тобто рівняння [28].

Складність та доречність використання координатного методу при розв'язуванні стереометричних задач, залежить від того, як розміщено

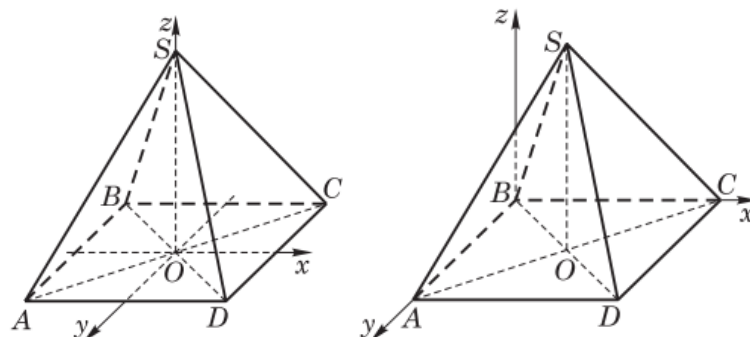
геометричну фігуру відносно осей координат. Найоптимальнішим варіантом розв'язання задачі цим методом є коли геометричний об'єкт містить прямі кути. Прямокутну систему координат вводять довільним чином, наприклад, розглянемо правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ [10].

У даному випадку доречно уводити прямокутну систему координат, так щоб початок координат знаходився в центрі O основи піраміди (мал. 1.3.1.1), вісь Oz повинна збігатися з прямою SO , тобто вісь повинна збігатися з висотою цієї пірамід, а вісь Ox повинна належати прямій AC , якій належить діагональ AC , вісь ординат Oy збігається з прямою BD , якій належить діагональ BD [10].

Хоч вище згаданий спосіб є найдоречнішим, але ми маємо і інші способи як ми можемо обрати прямокутну систему координат для нашого геометричного об'єкта (мал. 1.3.1.2).



Мал.. 1.3.1.1. Правильна чотирикутна піраміда $SABCD$ та прямокутна система координат



Мал. 1.3.1.2. Правильна чотирикутна піраміда $SABCD$ та прямокутна система координат.

Зверніть увагу, що результат розв'язання такої задачі не залежить від вибору прямокутної системи координат, але чим краще ми виберемо систему координат, тим легше буде алгоритм розв'язання задачі та швидше ми отримаємо результат. Тому спочатку варто проаналізувати зміст задачі.

Принцип заміни геометричних міркувань алгебраїчними, полягає в тому, щоб звести складні геометричні завдання, що потребують складних побудов чи доведень, у координатну форму (розв'язування систем рівнянь, обчислення відстаней, знаходження скалярного добутку, вектори тощо) [17].

Розглянувши ці принципи, можемо скласти такий алгоритм розв'язання стереометричних задач координатним:

- 1) аналізуємо задачу;
- 2) записуємо задачу координатною мовою;
- 3) перетворюємо аналітичний вираз;
- 4) подаємо вираз за допомогою геометричних термінів [30].

Щоб навчитися використовувати координатний метод важливо володіти такими навичками, як [30]:

- побудова точки за координатами;
- визначати координати точок, що задані в умові задачі;
- вміти обчислювати відстань між точками та координати середини відрізка;
- доречно вибирати прямокутну систему координат;
- складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;
- бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;
- перетворювати алгебраїчні рівності [34, с.233].

Розглянемо типові задачі, що зручно та доцільно розв'язувати за допомогою координатного методу:

- знаходження відстані між двома точками;
- знаходження координат середини відрізка (чи координат точки, що ділить відрізок у заданому відношенні);
- знаходження кута між прямими (векторами);

- знаходження кута між прямою і площиною;
- знаходження кута між площинами;
- знаходження відстані від довільної точки до даної площини [22].

Приклади задач:

Задача 1.3.1.1 Задано пряму $l: -2x + y - 1 = 0$ і точку $M(-1, 2)$.

Потрібно:

- 1) обчислити відстань $\rho(M, l)$ від точки M до прямої l ;
- 2) записати рівняння прямої l' , яка проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої l ;
- 3) записати рівняння прямої l'' , яка проходить через точку M паралельно до заданої прямої l [1, ст 330].

Задача 1.3.1.2. Точка M – середина відрізка AB . Знайдіть координати точки B , якщо $A(-3; 8; 5)$, $M(5; 4; -6)$ [24].

Задача 1.3.1.3. У правильній чотирикутній піраміді із стороною основи 2 і висотою 4 знайти відстань від вершини кута основи до площини бічної грані, якій належить інша сторона основи [30].

Задача 1.3.1.4. Ребра AB , AD , і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відповідно дорівнюють 3 см, 1 см і 4 см. Знайдіть відстань від точки A_1 до площини $BC_1 D$ [23, ст. 68].

Задача 1.3.1.5. Ребро куба має довжину 1. Знайдіть відстань між прямими, яким належать мимобіжні діагоналі двох суміжних граней куба. [3, с.54]

Задача 1.3.1.6. Трикутна піраміда визначається координатами її вершин: $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$, $D(0; -5; 4)$. Обчисліть довжину вектора $\overrightarrow{AG}$, якщо G — це точка перетину медіан грані BCD [1, ст 330].

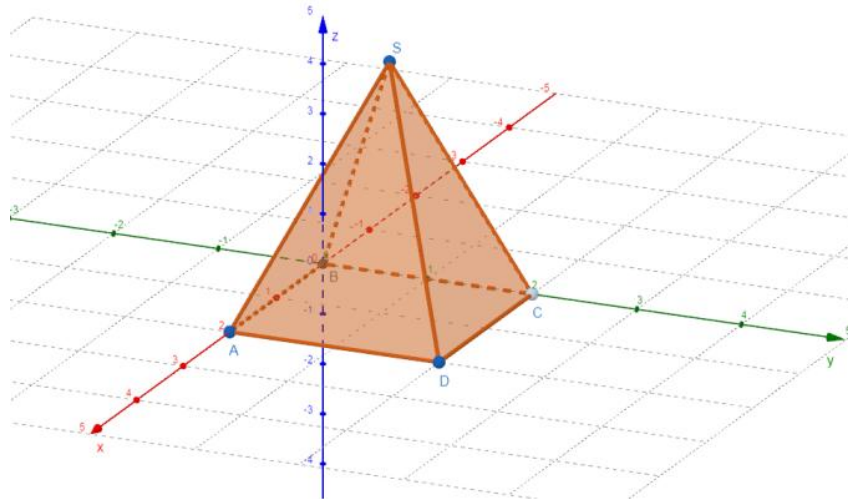
Задача 1.3.1.7. Об'єм прямої трикутної призми $ABCA_1 B_1 C_1$ дорівнює 3. Обчисліть координати вершини A , якщо відомі координати вершин однієї з основ призми: $A(1; 0; 1)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ [1].

Задача 1.3.1.2

У правильній чотирикутній піраміді із стороною основи 2 і висотою 4 знайти відстань від вершини кута основи до площини бічної грані, якій належить інша сторона основи [30].

Розв'язання:

- 1) Вводимо прямокутну систему координат, так щоб:
 - початок координат належить точці B ;
 - основа чотирикутної піраміди $ABCD$ належить координатній площині XOY ($AB \subset OX$; $BC \subset OY$) (мал. 19).



Мал. 1.3.1.9. Правильна чотирикутна піраміда $ABCD$.

- 2) Видно, що точки основи піраміди мають такі координати: $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(2; 2; 0)$.

- 3) Оскільки точка S проєкується паралельно OZ у центр квадрата основи, то її координати x і y дорівнюють координатам середин відрізків AB і BC відповідно і знаходитимуться за такими формулами:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_S, \quad \frac{y_A + y_B}{2} = y_S \quad (1.3.1.1)$$

Отже, тоді вершина піраміди має такі координати, як: $S(1; 1; 4)$.

- 3) За умовою задачі ми повинні знайти відстань від вершини кута основи B до площини бічної грані DCS , а цій грані належить інша сторона основи.

Складаємо рівняння площини DCS виду $ax + bx + cz + d = 0$ (a, b, c не дорівнюють нулю одночасно).

Даній площині належать точки D, C, S , їх координати задовільняють рівняння, тому маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2a + 2b + d = 0, \\ 2b + d = 0, \\ a + b + 4c + d = 0; \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2a + 0 = 0, \\ d = -2b, \\ a + b + 4c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ d = -2b, \\ 0 + b + 4c - 2b = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ d = -2b, \\ b = 4c; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ d = -2b, \\ b = -8c; \end{cases}$$

Нехай $c = 1$, тоді маємо, що:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 4, \\ c = 1, \\ d = -8. \end{cases}$$

Отже рівняння площини DCS має вигляд: $4y + z - 8 = 0$.

4) Знайдемо відстань від точки $B(0; 0; 0)$ до площини DCS за формулою:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 + 0 + 0 - 8|}{\sqrt{0 + 16 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{17}}$$

Відповідь: $\frac{8}{\sqrt{17}}$

Переваги та недоліки координатного методу розглянуті у таблиці 1.3.1.1 [12, 20].

Таблиця 1.3.1.1

Переваги	Недоліки
Алгебризація геометрії	Вибір прямокутної системи координат
Розв'язування геометричних задач за допомогою алгебри, що спрощує процес багатьох типів задач.	Іноді вибрати оптимальному систему координат досить важко.
Графічна наочність	Складність деяких задач
Ілюструє задачі у вигляді графіка.	Іноді для деяких задач координатний метод може бути незручним або
Систематичний підхід	

Чітко видно початок і алгоритм дій, що робить задачі структурованими.	вимагати складних обчислень.
Міжпредметні зв'язки	
Тісний зв'язок між алгеброю та геометрією, а також і з іншими предметами (наприклад, фізика).	

Табл. 1.3.1.1. Переваги та недоліки координатного методу

1.3.2. Використання векторних операцій у розв'язуванні задач. Приклади типових задач із застосуванням векторного методу. Переваги та недоліки векторного методу.

Векторний метод – це метод аналітичної геометрії, що базується на операціях додавання, множення на число, скалярного та векторного добутків, за допомогою яких можна описувати положення точки, напрямки прямої, взаємне розташування площин та тіл у просторі, тобто цей метод ґрунтується на використанні властивостей векторів і діями над ними. Цей метод виступає одним із найефективнішим методом аналітичної геометрії для розв'язування стереометричних задач у профільній школі, так як курс геометрії будується на основі векторних уявлень [9, ст.15].

Л. Г Філон у своїй роботі зазначив деякі ознаки задач, що розв'язуються за допомогою векторного методу [33]. Вимога таких задач істотно пов'язана із знаходженням:

- довжин відрізків;
- відношенням відрізків паралельних прямих;
- знаходженням величин кутів;
- з'ясуванням взаємного розташування прямих (паралельність, перпендикулярність тощо) [33].

У таких задач дуже часто лінійні елементи і кути, що задні в умові задачі, часто розташовані в різних площинах, тому зведення цих елементів в одну площину недоцільне або іноді неможливе. [33]

Для використання векторного методу при розв'язуванні стереометричних задач існує спеціальний алгоритм:

- 1) Перекласти вимогу задачі на векторну мову (запис векторного співвідношення).
- 2) Вести прямокутну систему координат (або вибрати два неколінеальних вектори як базисні).
- 3) Знайти координати векторів.
- 4) Довести або знайти виділене співвідношення і перевести результат на геометричну мову [31].

Основними поняттями якими учні повинні володіти для використання векторного методу є: вектор, початок вектора, кінець вектора, співнаправлені вектори, протилежно напрямлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори, нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між двома ненульовими векторами [21, 8]

Зазначимо, що основними векторними операціями, що використовуються при розв'язуванні стереометричних векторним методом є такі операції як: додавання векторів (за правилом трикутника або паралелограма); віднімання векторів; зображення вектора в вигляді суми, різниці двох векторів; множення вектора на число; в вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним за допомогою паралельного перенесення; розкладання вектора по осях; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між довжинами і виконання оберненої дії; вираження довжини вектора через скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжин цих векторів [34, 8].

У практикумі з методику навчання математики автора В. О. Швець зазначено такі геометричного задачі, які доцільно б було розв'язувати векторним методом [34]:

- на доведення паралельності прямих та відрізків;
- на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;
- на доведення належності трьох точок одній прямій;
- на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;
- на доведення залежностей між довжинами відрізків;
- на знаходження величини кута [34].

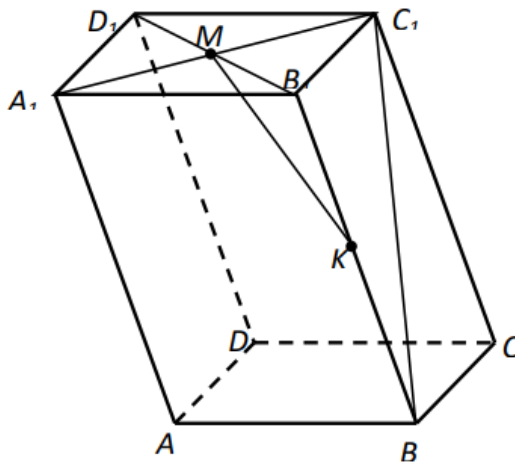
Розглянемо приклад розв'язання задачі векторним методом.

Задача 1.3.2.1

(Умова компланарності трьох векторів). Нехай у паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M – середина діагоналі $A_1 C_1$ грані $A_1 B_1 C_1 D_1$, а точка K — середина ребра $B C_1$. Довести, що прямі $A_1 B_1$, KM та $B C_1$ паралельні до деякої площини.

Розв'язання:

1) Розглянемо три вектори зі спільним початком: $\overrightarrow{B_1 A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1 C_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B_1 B} = \vec{c}$ (мал. 20).



Мал. 1.3.2.1. паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Тоді ми вважаємо, що ці три некомпланарні вектори базисом, і в такому випадку ми будемо виражати інші вектори:

$$\overrightarrow{B C_1} = \overrightarrow{B_1 C_1} - \overrightarrow{B_1 B} = \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{B_1 A_1} + \overrightarrow{B C_1} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{B_1M} - \overrightarrow{B_1K} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}),$$

Тобто $\overrightarrow{KM}$ виражається через вектори $\overrightarrow{B_1A_1}$ та $\overrightarrow{B_1C_1}$. Це означає, що вони лежать на одній площині або на паралельні до деякої площини (компланарні).

Що говорить нам про те, що до цієї площини паралельними також є A_1B_1 , KM та BC_1 , оскільки відповідні вектори є для цих прямих, відповідно напрямленими. Задачу доведено.

Розглянемо переваги та недоліки векторного методу у нижче наведеній таблиці [32]:

Таблиця 1.3.2.1

Переваги	Недоліки
Алгебризація геометрії.	Потрібен високий рівень алгебраїчної підготовки
Перетворює геометричні задачі в алгебраїчні	Необхідні знання з векторної алгебри
Спрощення складних задач	Складність деяких задач
Не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій.	Іноді для деяких задач координатний метод може бути незручним або вимагати складних обчислень.
Візуалізація	
.Дозволяє візуалізувати співвідношення між величинами за допомогою векторів	
Міжпредметні зв'язки	
Тісний зв'язок між алгеброю та геометрією, а також і з іншими предметами (наприклад, фізика).	

Табл. 1.3.2.1. Переваги та недоліки векторного методу

Висновки до I розділу

Отже, першому розділі геометрії було теоретично розглянуто методичні особливості тем змістової лінії «Координати і вектори» в шкільному курсі математики, тобто проаналізовано змістову лінію «Координати і вектори» та виділено її роль у формованні просторово-геометричної компетентності учнів 5-6 класі, 9-х класів та учнів, що навчаються на профільному рівні підготовки. Під час розгляду методичних особливостей вивчення координатного і векторного підходів показує, що ці теми є дуже важливими і посідають фундаментальне значення сучасній шкільній освіті, оскільки забезпечує надійну опору для переходу від геометричного мислення до аналітико-алгебраїчних методів.

Формування знань, умінь та навичок для використання координатного та векторного методів починається ще з вивчення координат у курсі математики 5-6 класу. У 5-му класі формують поняття «промінь» та «координат точок променя». У 6-му класі знання розширюють до «координатної прямої» та вивчають «прямокутну систему координат». У дев'ятому класі учні вивчають координати та вектори на площину, що у профільній школі стане фундаментом для вивчення координат та векторів у просторі та використання координатного та векторного методів під час розв'язування стереометричних задач на профільному рівні навчання.

Розглянуто мету та роль координатного та векторного методів, а такого переваги та недоліки обох методів. Координатний метод вирізняється універсальністю, точністю та зручністю, однак потребує високого рівня алгебраїчної підготовки. Векторний метод переводить стереометричні задачі у алгебраїчні, що знижує їх складність, проте він потребує високих знань з векторної алгебри.

Таким чином, змістова лінія «Координати і вектори» є невід'ємною складовою сучасного курсу геометрії та потребує ретельної методики викладання.

РОЗДІЛ II. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ КООРДИНАТНИМ І ВЕКТОРНИМ МЕТОДАМИ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ.

2.1. Методика навчання учнів застосуванню координатного методу в розв'язуванні стереометричних задач.

Координатний метод є одним із ключових засобів переходу від геометричних до алгебраїчних способів розв'язування стереометричних задач у старшій школі. Цей метод дозволяє здійснювати алгебраїчний обрис просторових об'єктів (прямих, площин, многогранників, геометричних тіл) та переводити геометричні міркування у систему рівнянь та нерівностей.

За А. В. Погореловим координатний метод виступає фундаментом для більшості сучасних геометричних досліджень і практичних застосувань [28].

Першим етап у навчанні учнів застосуванню координатного методу в розв'язанні є пропедевтичний етап, що починає реалізуватися з 5 класу під час вивчення «поняття промінь» та «координат точок». Завершальним етапом у формуванні фундаментальних знань стає вивчення у 9-му класі координат та векторів на площині. У старшій школі учні знайомляться з координатами та рівняннями прямих та площ.

Отже, зазначимо, що учні повинні володіти, такими знаннями як:

- координати точок на площині;
- рівняння ліній;
- векторними операціями;
- базовими прийомами алгебри.

Як відомо, що ефективність навчально-пізнавальної діяльності учнів, залежить найбільше від їх мотиваційної сфери, таких як:

- цілей;
- інтересів;
- мотивів,
- нахилів, що детермінують діяльністю [13].

Опираючись на досвід вчителів-практиків, дає зрозуміти, що розвиток мотивації вивчення координатного методу залежить від таких прийомів як: показ практичних додатків, цікавих фактів та розв'язування задач практичного змісту [13].

Щоб з мотивувати учнів до вивчення координатного методу, слід покази взаємозв'язок цього методу з реальним світом, наприклад:

- координати використовуються у роботі навігаційних систем літаків, смартфонах, автомобілях;
- у розділі інформатика «графіка», тобто у графічному дизайні;
- для розрахунків, планування та розташування елементів у будівельних проєктах.
- у розробці ігор та програмуванні [13].

Одним із ефективних способів мотивації буде створення сюжетних задач для розв'язання їх координатним методом.

Наприклад, у своїй статті Г. Дейниченко та Ф. Сидоренко пропонують таку задачу: «Літак вирушив із пункту А з координатами $(0, 0)$ на північ зі швидкістю 300 км/год. Після 2 годин польоту літак здійснив поворот на захід і пролетів ще 400 км, а потім знову полетів на північ і через 2 години здійснив посадку. Знайдіть координати точки місця приземлення літака, враховуючи його початкові координати, напрямок руху та час польоту» [13, с.263].

Отже, якщо учні будуть розуміти, значущість координатного методу у реальному житті та у задачах практичного змісту – це буде великим кроком у вивченні та застосуванню ними цього методу.

Наступний етап переходить до безпосереднього формування знань, що вивчаються у старшій школі. Тобто, закріплення базових навичок, що почали формуватися ще в основній школі. О. М. Котуг зазначає, що на цьому етапі формування знань учнів про векторний метод та як за допомогою нього розв'язати стереометричні задачі, слід приділити увагу таким навичкам, як:

- визначення точок координат (учні повинні навчитися правильно розташовувати систему координат відповідно до умови задачі);
- обчислення за координатами (учні повинні відпрацювати навички обчислення відстані між двома точками, координат середини відрізка тощо) [20].

Наступним кроком є вивчення алгоритма застосування координатного методу до розв'язування задач.

І. М. Тищенко у своїй роботі зазначила такий алгоритм застосування координатного методу [30]:

- 1) аналізуємо задачу;
- 2) записуємо задачу координатною мовою;
- 3) перетворюємо аналітичний вираз;
- 4) подаємо вираз за допомогою геометричних термінів, що входять до умови задачі [30].

Використаємо цей алгоритм при розв'язання наступної задачі.

Задача 2.1.1

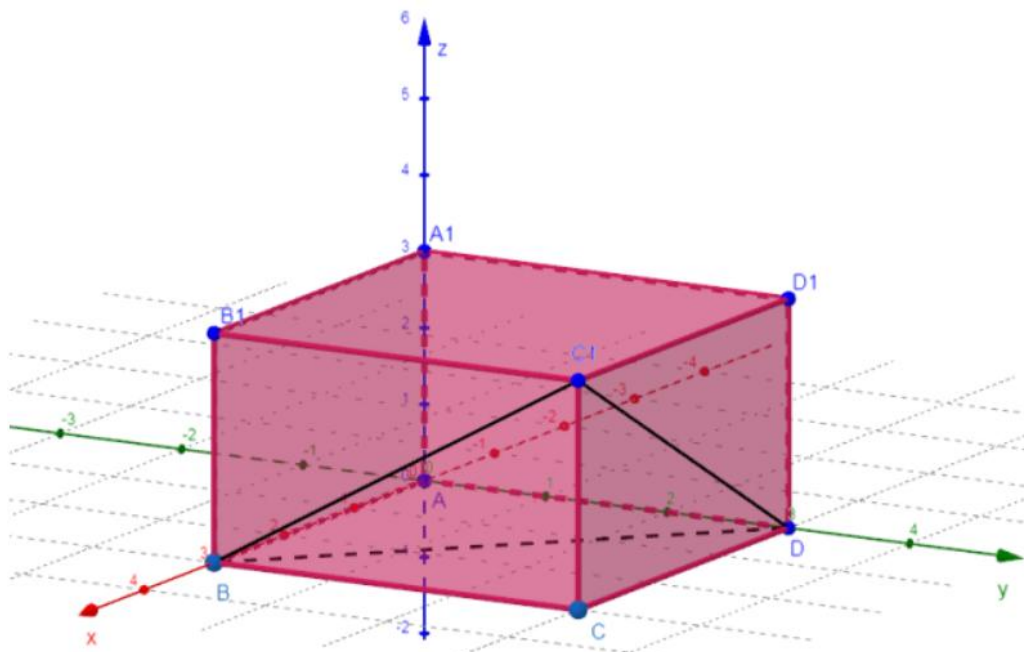
Ребра AB , AD , і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відповідно дорівнюють 3 см, 1 см і 4 см. Знайдіть відстань від точки A_1 до площини $BC_1 D$ [23, ст. 68].

Розв'язання:

- 1) Задаємо прямокутну систему координат:
 - точка A буде початком координат;
 - нижня основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ належить координатній площині XOY ($AB \subset OX$; $AD \subset OY$, $AA_1 \subset OZ$).

Звідси випливає, що вершини прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ мають координати:

$$A(0; 0; 0); B(3; 0; 0); C(3; 1; 0); D(0; 1; 0); A_1(0; 0; 4); C_1(3; 1; 4).$$



Мал. 2.1.1. Прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

2) За у мовою задами шуканою величиною є відстань від вершини A_1 до площини BC_1D . Тому складаємо рівняння площини BC_1D .

Нехай рівняння $ax + by + cz + d = 0$, Задає площину BC_1D .

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3a + d = 0, \\ b + d = 0, \\ 3a + b + 4c + d = 0; \end{cases} \begin{cases} 3a + 4c = 0, \\ b + d = 0, \\ b + 4c = 0; \end{cases} \begin{cases} 3a + 4c = 0, \\ b = -d, \\ b = -3a; \end{cases} \begin{cases} c = -\frac{3}{4}a, \\ b = -d, \\ d = -3a. \end{cases}$$

Для зручності обчислень нехай $a = 4$, тоді ми матимемо, що:

$$\begin{cases} a = 4, \\ b = 12, \\ c = -3, \\ d = -12. \end{cases}$$

Отже, рівняння площі BC_1D :

$$12y - 2z - 12 = 0$$

3) Знаходимо відстань від т. A_1 з координатами $(0; 0; 0)$ до площини BC_1D :

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-3 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{16 + 144 + 9}} = \frac{24}{13} = 1 \frac{11}{13} \text{ см}$$

Відповідь: $1 \frac{11}{13}$ см.

Також доцільно буде почати вивчення координатного методу з таких задач:

Задача 2.1.2. Установіть вид чотирикутника $MNPK$ і знайдіть його площу, якщо: $M(0; -2; 0)$, $N(4; 1; 0)$, $P(4; 1; 5)$, $K(0; -2; 5)$. (доцільно розглянути під час вивчення теми «Прямокутна система координат»[22])

Задача 2.1.3. В одиничному кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ M і N – середини ребер $A_1 D_1$ та $B B_1$ відповідно. Знайдіть кут між прямою MN і діагоналлю $B D_1$. (доцільно розглянути під час вивчення теми «Застосування координат та векторів»[22])

Задача 2.1.4. У площині YOZ знайти координати точки , яка є рівновіддаленою від точок $A_1(2; 0; 2)$, $A_2(0; 3; -1)$, $A_3(2; -2; 0)$ [11].

Задача 2.1.5. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб, точка E – середина $A_1 B_1$, точка F – середина $B_1 C_1$. Знайти кут між площинами $AD_1 E$ і $D_1 F C$ [11].

Після того як учні засвоять алгоритм розв’язування стереометричних задач за допомогою координатного методу доцільно запропонувати також задачі на доведення та задачі практичного змісту та задач з підвищеним рівнем складності.

Приклад задач:

Задача 2.1.6. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, точка F є серединою бічного ребра SB . На діагоналі DB основи вибрано точку M , а на бічному ребрі SC – точку N так, що $AF \parallel MN$. Обчисліть відношення $MN:AF$ [15].

Задача 2.1.7. У піраміді $ABCD$ на медіанах DP , DQ , DR граней ABD , BCD , CAD , відповідно, задано точки M , N , K , для яких $DM:MP=2:1$, $DN:NQ=3:1$, $DK:KR=1:1$. Точка S – точка перетину прямої AD площиною MNK . Знайдіть відношення $DS:SA$ [19]

Отже, можемо зазначити, основні етапи формування в учнів алгоритму розв’язування стереометричних задач за допомогою координатного методу:

– пропедевтика, що починається ще з вивчення ШКМ у 5-му класі;

- мотиваційний етап (пов'язати координатний метод з реальним життям);
- закріплення базових навичок, що потрібні для використання координатного методу;
- задачі на формування навичок використання алгоритму координатного методу;
- розв'язання задач практичного змісту та задач з підвищеним рівнем складності.

2.2. Методика навчання учнів застосуванню векторного методу в розв'язуванні стереометричних задач

Векторний метод посідає важливе місце у шкільному курсі геометрії профільної математики, тому що дозволяє перевести стереометричну задачу у більш зручну форму, для цього векторний метод використовує властивості та операції над векторами.

Як і при вивченні координатного методу, векторний метод ґрунтується на цілеспрямовану поетапну роботу (від пропедевтики до задач підвищеного рівня складності), яка забезпечує усвідомлене використання векторам у просторі, а також розвиває просторову уяву і аналітичне мислення.

Першим кроком до вивчення векторного методу є повторення та систематизація знань з курсу геометрії дев'ятого класу змістової лінії «Вектори на площині».

Наступним етапом у вивченні векторного методу є підготовчий етап [25].

На цьому етапі потрібно вивчити із здобувачами освіти змістову лінію «Вектори у просторі», доречим способом є проведення аналогій із змістовою лінією дев'ятого класу «Вектори на площині» [27].

Як і з координатним вектором наступний етап це – мотиваційний [22, 25]. Тобто показати взаємозв'язок векторного методу та реального життя.

Після мотивації переходять до формування алгоритму векторного методу до розв'язання стереометричних задач та виділяють такі основні елементи векторного методу розв'язання стереометричних задач: введення векторів, вибір системи координат, вибір базисних векторів, розкладання векторів по базисним, а також утворення системи рівностей та їх спрощення [25].

Наведемо приклади задач:

Задача 2.2.1. Трикутник ABC лежить в основі трикутної піраміди $SABC$, трикутник ABC є правильним, сторона його дорівнює 2. Ребро S є перпендикулярним площині основи і його довжина його дорівнює 1. Серединами ребер CB і SB є точка P і точка Q . Знайдіть відстань між мимобіжними прямими (прямими, що схрещуються) SP і AQ [9, с. 47].

Задача 2.2.2. Визначте кути трикутника ABC , якщо його вершини мають координати $A(1; 5; 3)$, $B(3; 3; 2)$, $C(3; 6; 5)$ [27, с.192].

Задача 2.2.3. Довести, що медіани тетраедра перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 3:1, рахуючи від вершини [14].

Задача 2.2.4 . $ABCD$ - тетраедр, K, P, T - середини його ребер AB, AC і AD . Чи компланарні вектори: а) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{KP}$?; б) $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{KT}$ і $\overrightarrow{CB}$?

Задача 2.2.5. Довести, що для будь-якого тетраедра $DABC$ має місце рівність $AD + BC = BD + AC$.

Після засвоєння алгоритму розв'язування задач векторного методу потрібно запропонувати задачі підвищеної складності.

Задача 2.2.5. Нехай $SABCD$ – піраміда, основою якої паралелограм $ABCD$. Нехай в цій піраміді побудовано площину, котра перетинає бічні ребра SA, SB, SC, SD та піраміди, відповідно, в точках K, L, M, N так, що $SK = \frac{1}{k}SA, SL = \frac{1}{l}SB, SM = \frac{1}{m}SC, SN = \frac{1}{n}SD$ Знайти співвідношення між числами k, l, m, n .

Отже, можемо зазначити, основні етапи формування в учнів алгоритму розв'язування стереометричних задач за допомогою векторного методу:

- пропедевтика, що починається ще з вивчення ШКМ у 9-го класу;
- підготовчий етап;
- мотиваційний етап (пов'язати векторний метод з реальним життям);
- задачі на формування навичок використання алгоритму векторного методу;
- розв'язання задач з підвищеним рівнем складності.

Висновки до II розділу

У другому розділі було розглянуто методичні особливості навчання учнів на профільному рівні підготовки застосуванню координатного та векторного методів під час розв'язування стереометричних задач. Обидва методи є важливими у вивченні геометрії. Вони дають можливість істотно підвищити засвоєння просторових відношень, показують тісний зв'язок між геометрією та алгеброю, розвивають аналітичне мислення.

У другому розділі виділено етапи вивчення координатного та векторного методів для засвоєння алгоритмів розв'язування стереометричних задач такі як:

1. пропедевтика.
2. Мотивація.
3. Підготовчий етап.
4. Формування та засвоєння алгоритму розв'язання стереометричних задач.
5. Задачі підвищеної складності.

ВИСНОВКИ

У цьому дослідженні було розглянуто методичні особливості змістової лінії «Координати та вектори» в курсі математики 5-6 класу, геометрії 9 класу. Досліджено, що розгляд цієї змістової лінії починається з вивчення

поняття «промінь» та «координати точки», що належить цьому променю – це початок до застосування координатного та векторного методів при розв’язуванні задач. Далі у шостому класі учні розширюють свої знання з поняття «координатний промінь» до поняття «координатна пряма», а потім у кінці шостого класу знайомляться з поняттям «прямокутна система координат» та поняттям «координати точки» на цій прямокутній системі координат.

У дев’ятому класі учні опановують елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри. За навчальною програмою вони повинні опанувати такі теми [26]:

1. Координати на площині:
 - a. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° .
 - b. Тотожності: $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
 - c. Координати середини відрізка.
 - d. Відстань між двома точками із заданими координатами.
 - e. Рівняння кола і прямої.
2. Вектори на площині:
 - a. Вектор. Модуль і напрям вектора.
 - b. Рівність векторів.
 - c. Координати вектора.
 - d. Додавання і віднімання векторів.
 - e. Множення вектора на число.
 - f. Колінеарні вектори.
 - g. Скалярний добуток векторів.

У дослідженні було розкрито сутність векторного та координатного методів розв’язування задач.

Застосування координатного методу сприяє полегшенню розв’язання стереометричних задач, переводячи їх у форму рівнянь і числових відношень.

Векторний метод, забезпечує наочність розв'язування, надає можливість використовувати природний геометричний зміст векторних операцій.

Отже, координатний і векторний методи виступають важливим засобом розвитку математичної культури, формування дослідницьких компетентностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Tsypkin A. G., Pinsky A. I. Methods of Solving Problems in High-School Mathematics. Moscow : Mir Publishers, 1983. URL: <https://archive.org/details/tsypkin-pinsky-methods-of-solving-problems-in-high-school-mathematics-mir/page/n7/mode/2up?view=theater>
2. Unity Technologies. Vector Cookbook: Understanding Vector Arithmetic. Unity User Manual. URL: <https://docs.unity3d.com/Manual/VectorCookbook.html>.
3. Апостолова Г. В. Геометрія : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень. Київ : Генеза, 2011. 304 с.
4. Бевз В. Г. Метод координат і його вивчення в школі. Didactics of mathematics: Problems and Investigations. 2010. № 34. С. 82–86.
5. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.
6. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
7. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. Київ : Генеза, 2017. 240 с
8. Бурцева О. Г., Мацулевич О. Є., Мацулевич А. Е., Антонова Г. В. Застосування сучасного програмного забезпечення при викладанні дисциплін математичного напрямку для розв'язання задач стереометрії координатним і векторним методами. Фізико-математична освіта. 2021. Вип. 2 (28). С. 20–26.
9. Віктор В. В. Елементи векторної алгебри в шкільному курсі математики : кваліф. робота на здобуття освіт. ступеня магістра / Віктор Вікторія Валеріївна ; Нац. ун-т «Чернігівський колегіум» ім. Т. Г. Шевченка. Чернігів, 2024. 68 с. URL: https://epub.chnpu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/10707/1/Віктор_Елементи%20векторної%20алгебри.pdf

10. Возняк О. Г. Метод координат у геометричних задачах : навч. посіб. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2013. 64 с. URL: http://www.mmf.lnu.edu.ua/images/stories/study/help/doc/voznyak_metod.pdf.
11. Головань А. В. Узагальнення та систематизація знань учнів при вивченні методу координат : кваліфікаційна робота. Кривий Ріг : КДПУ, 2022. URL: https://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/6843/%d0%94%d0%98%d0%9f%d0%9b%d0%9e%d0%9c_%d0%93%d0%9e%d0%9b%d0%9e%d0%92%d0%90%d0%9d%d0%ac.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
12. Дейниченко Г. В., Жерновникова О. А., Ткачова Н. О. Аксіологічний підхід у вивченні координатного методу в шкільному курсі математики. Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі : зб. тез доп. учасників ІІ наук.-практ. конф. молодих учених (Харків, 14–15 трав. 2020 р.). Харків : ХНПУ, 2020. С. 118–120.
13. Дейниченко Г., Сидоренко Ф. Мотивація навчальної діяльності учнів у вивченні координатного методу. Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі : зб. тез доп. учасників VI Міжнар. наук.-практ. конф. молод. учених (м. Харків, 15–16 трав. 2024 р.). Харків, 2024. С. 262–264.
14. Жук В. Г. Узагальнення курсу математики старшої школи: векторний метод. Наукові записки молодих учених. 2019. № 4.
15. Ізюмченко Л. В. Стереометричні задачі на математичних конкурсах та способи їхнього розв’язування. Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. 2017. № 2 (11). URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/1138>.
16. Істер О. С. Математика : підруч. для 5 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза, 2018.
17. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія : (профіль. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 368 с.

18. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія : (профіль. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 288 с
19. Контрольні завдання III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2013 році. Ч. 1. Київ, 2013. 234 с. URL: http://man.gov.ua/ua/resource_center/publishing/edition-155.
20. Котуг О. М. Методичні особливості вивчення координатно-векторного методу в ЗЗСО. [Б. м.], 2022.
21. Лященко Е. І. Лабораторні та практичні роботи по методиці викладання математики : навч. посіб. Москва : Просвіта, 1988. 223 с.
22. Малай С. О. Координатно-векторна складова систематичного курсу стереометрії профільної школи : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Малай Сергій Олександрович ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2019. 267 с.
23. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.
24. Геометрія. 11 кл. : збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. 112 с.
25. Мультян В. А. Векторний і координатний методи як засоби розв'язування геометричних задач у основній школі. Херсон : ХДУ, 2019. URL: <https://ekhsuir.kspu.edu/server/api/core/bitstreams/580a325f-4b46-4fca-838d-f2fec950a552/content>.
26. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів: Математика. 5–9 класи. Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. URL: <https://mon.gov.ua>.
27. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 240 с.

28. Погорелов О. В. Геометрія: стереометрія : підруч. для 10–11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 2001. 128 с.
29. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Бочко О. П. Математика : підруч. для 5 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2018.
30. Тищенко І. М. Застосування методу координат до стереометричних задач. На Урок. URL: <https://naurok.com.ua/zastosuvannya-metodu-koordinat-do-stereometrichnih-zadach-366830.html>.
31. Тягай І. Методичні особливості розв'язування геометричних задач векторним способом. Збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів. Умань, 2016.
32. Ульянов П. І., Сорока І. В. Використання векторного методу в геометрії. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. 2004. С. 264.
33. Філон Л. Г. Координатний і векторний методи у системі математичної освіти профільної школи. Матеріали наукової конференції / СумДПУ ім. А. С. Макаренка. Суми, 2009. С. 96.
34. Швець В. О. Практикум з методики навчання математики. Основна школа : навч. посіб. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.
35. Геометричні фігури та величини (довжина, площа, об'єм, маса, час) : конспект [Електронний ресурс] / Всеукраїнська школа онлайн. – 2022. – Режим доступу: https://lms.e-school.net.ua/assets/courseware/v1/2f8835a1f10ba9af947ce4ebf51aa9ee/asset-v1:UIED+Math-NUSH-5-6th+2022+type@asset+block/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96_%D1%84%D1%96%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B8_%D1%82%D0%B0_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B8_%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B0_%D0%BE%D0%B1_%D1%94%D0%BC_%D0%BC%D0%

[B0%D1%81%D0%B0_%D1%87%D0%B0%D1%81_.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82_183133_%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%B4%D1%96%D0%BB%D0%BE%D0%BA_31_%D0%B6%D0%BE%D0%B2%D1%82%D0%BD%D1%8F_2022.pdf.](#)

36. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Бочко О. П. Математика : підруч. для 6 кл. закладів загальної середньої освіти частина 2. Київ : Освіта, 2023.

37. Вектори [Електронний ресурс] // EdEra : [онлайн-бібліотека]. – Режим доступу: [https://edera.gitbook.io/mathmon59-new/geometriya/9_klas/vektory.](https://edera.gitbook.io/mathmon59-new/geometriya/9_klas/vektory)

38. Сукач Т.В. Вектори на площині : навч. посіб. для 9 кл. // На Урок : освіт. проект. URL: <https://naurok.com.ua/vektori-na-ploschini-navchalniy-posibnik-dlya-9-klasu-87595.html>