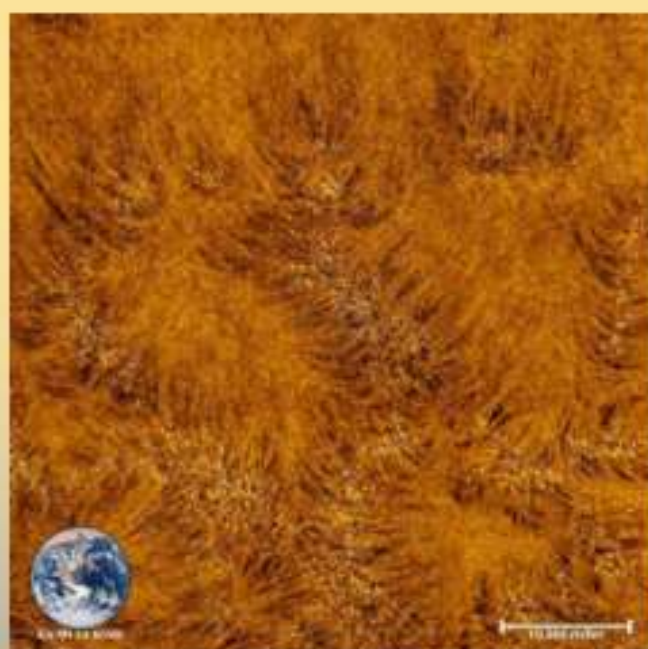




В. ЗДЕЩИЦ

Університетська фізика

АТОМНА І ЯДЕРНА ФІЗИКА



2025

SENIOR CONTRIBUTING AUTHORS
SAMUEL J. LING, TRUMAN STATE UNIVERSITY
JEFF SANNY, LOYOLA MARYMOUNT UNIVERSITY
WILLIAM MOEBS, FORMERLY OF LOYOLA MARYMOUNT UNIVERSITY

<https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-2>

Переклад з англійської А. В. Здешиц
за редакцією В. М. Здешиц

Кривий Ріг
КДПУ
2025

Університетська фізика. Атомна і ядерна фізика: навчальний посібник.
Переклад з англійської А. В. Здещиц, за редакцією В. М. Здещиц. Кривий Ріг :
Криворізький державний педагогічний університет, 2025. 334 с.

Рецензенти:

В. М. Кадченко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент
кафедри фізики та методики її навчання

Викладено будова та властивості матерії в мікросвіті, а також гіпотези та
теорії про походження та розвиток Всесвіту на основі експериментальних та
теоретичних досліджень сучасної фізики.

Посібник надає студентам можливість вивчити основні поняття фізики та
зрозуміти, як ці поняття застосовуються до їхнього життя та світу навколо них.

Посібник призначено для супроводу електронного навчального курсу
дисципліни “Атомна і ядерна фізика” і використання під час самостійної роботи
студентів, написання теоремодулей, контрольних робіт тощо.

Навчальний посібник затверджено на засіданні кафедри фізики та
методики її навчання

«16» січень 2025 р., протокол № 6.

Завідувач кафедри _____ Микола Слюсаренко

Зміст

Вступ.....	6
Розділ 1. Фотони та хвильові властивості матерії.....	7
1.1 Випромінювання чорного тіла.....	8
1.2. Фотоелектричний ефект.....	18
1.3. Ефект Комптона.....	27
1.4. Модель Бора атома водню.....	33
1.5. Хвилі де Бройля.....	45
1.6. Корпускулярно-хвильовий дуалізм.....	54
Концептуальні питання до розділу 1.....	61
Розділ 2. Основи квантової теорії.....	67
2.1. Хвильові функції.....	67
2.2. Принцип невизначеності Гейзенберга.....	77
2.3. Рівняння Шредінгера.....	82
2.4. Квантова частинка в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі.....	86
2.5. Квантовий гармонічний осцилятор.....	93
2.6. Квантове тунелювання частинок через потенційні бар'єри.....	100
Концептуальні питання до розділу 2.....	114
Розділ 3. Будова атома.....	119
3.1. Атом водню.....	118
3.2. Орбітальний магнітний дипольний момент електрона.....	129
3.3. Спін електрона.....	133
3.4. Принцип Паулі та періодична таблиця Менделєєва.....	139
3.5. Атомні спектри та рентгенівські промені.....	146
3.6. Лазери.....	158
Концептуальні питання до розділу 3.....	163
Розділ 4. Основи фізики конденсованого середовища.....	165
4.1. Типи молекулярних зв'язків.....	166
4.2. Молекулярні спектри.....	172
4.3. Зв'язок у кристалічних твердих тілах.....	176
4.4. Модель металів з вільними електронами.....	185
4.5. Зонна теорія твердих тіл.....	190
4.6. Напівпровідники та легування.....	194
4.7. Напівпровідникові прилади.....	198
4.8. Надпровідність.....	205
Концептуальні питання до розділу 4.....	213
Розділ 5. Ядерна фізика.....	216
5.1. Властивості ядер.....	217
5.2. Енергія зв'язку ядер.....	223

5.3. Радіоактивний розпад.....	227
5.4. Ядерні реакції.....	233
5.5. Поділ важких ядер.....	243
5.6. Ядерний синтез.....	250
5.7. Медичне застосування та біологічні ефекти ядерного випромінювання.....	256
Концептуальні питання до розділу 5.....	267
Розділ 6. Фізика елементарних частинок і космологія.....	269
6.1. Вступ до фізики елементарних частинок.....	270
6.2. Закони збереження в мікросвіті частинок.....	277
6.3. Кварки.....	283
6.4. Прискорювачі частинок і детектори.....	289
6.5. Стандартна модель будови речовини.....	300
6.6. Великий вибух.....	307
6.7. Еволюція раннього Всесвіту.....	312
Концептуальні питання до розділу 6.....	322

Вступ

У посібнику викладено будова та властивості матерії в мікросвіті, а також гіпотези та теорії про походження та розвиток Всесвіту на основі експериментальних та теоретичних досліджень сучасної фізики.

Посібник надає студентам можливість вивчити основні поняття атомної і ядерної фізики та зрозуміти, як ці поняття застосовуються до їхнього життя та світу навколо них.

Посібник призначено в першу чергу для супроводу електронного навчального курсу дисципліни “Атомна і ядерна фізика” і використання його під час самостійної роботи студентів (розв’язання вправ), написання теормодулей, контрольних робіт тощо.

Зображення, що відкривають розділи, включають фото, малюнки з повсякденного життя або сучасної науки та техніки, з якими студенти можуть мати стосунок, від смартфонів до Інтернету та пристроїв GPS.

В основному тексті крім теорії обговорюються також ключові історичні постаті та фундаментальні експерименти з атомної і ядерної фізики.

Приклади в розділах складаються з трьох частин: стратегія, розв’язок та обговорення як підійти до проблеми, як працювати з рівняннями та як перевірити й узагальнити результат.

За прикладами йдуть запитання для перевірки розуміння студентом важливих ідей прикладів.

В кінці кожного розділу містяться концептуальні запитання (питання теормодуля), які не вимагають розрахунків, але перевіряють засвоєння студентами ключових понять.

Окремо, в збірнику задач, зібрані вправи, щоб студенти самостійно могли практикувати те, чому вони навчилися. В збірнику також наведені проблемні задачі, які перевіряють навички студентів розв’язувати проблеми та здатність застосовувати ідеї до практичних ситуацій. Ці додаткові задачі змушують студентів застосовувати знання, отримані в межах розділу, для визначення, які концепції та рівняння підходять для розв’язання заданих задач, а які завдання мають нереальні результати. Тобто, студентам пропонується оцінити відповідь на проблему та пояснити, чому вона є нерозумною та які зроблені припущення можуть бути неправильними.

Крім цього є завдання з більш складними умовами, які поширюють ідеї тексту на цікаві, але складні ситуації.

ФОТОНИ ТА ХВИЛЬОВІ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІЇ

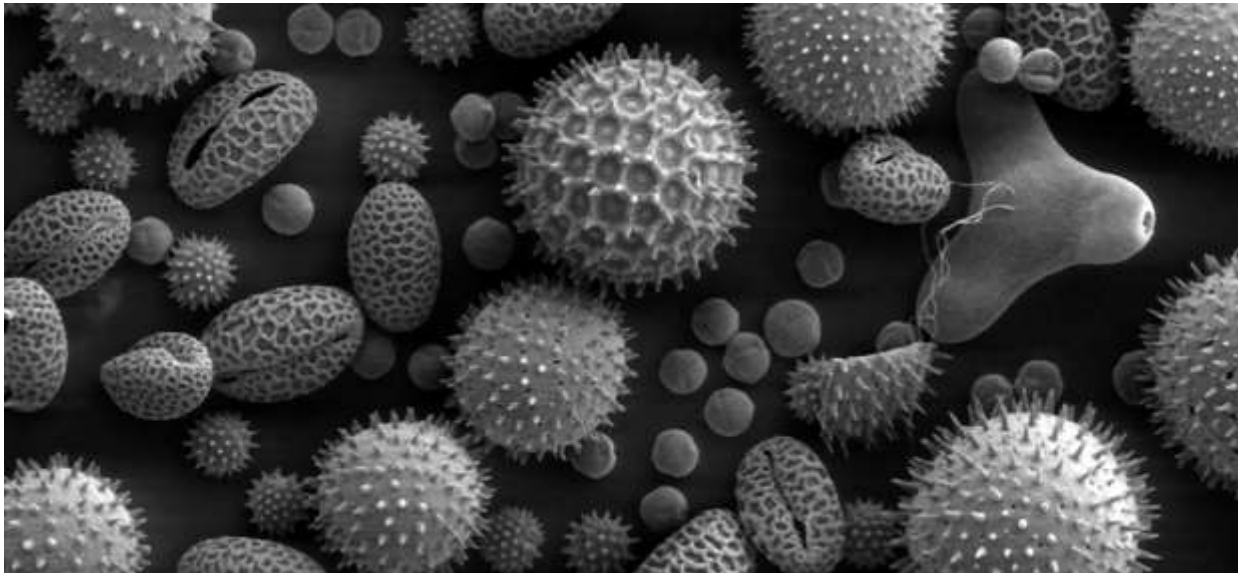


Рис. 1.1. На цьому зображенні пилку, зробленому за допомогою електронного мікроскопа, бобоподібні зерна мають довжину приблизно 50 мкм. Електронні мікроскопи можуть мати набагато вищу роздільну здатність, ніж звичайні світлові мікроскопи, оскільки довжини хвиль електронів можуть бути в 100 000 разів коротші за довжини хвиль фотонів видимого світла

Двома найбільш революційними концепціями двадцятого століття були опис світла як сукупності частинок і трактування частинок як хвиль. Ці хвильові властивості матерії призвели до відкриття таких технологій, як електронна мікроскопія, яка дозволяє досліджувати субмікроскопічні об'єкти, такі як зерна пилку (рис. 1.1).

У цьому розділі ви дізнаєтеся про *квант енергії*, концепцію, яку ввів у 1900 році німецький фізик Макс Планк для пояснення випромінювання чорного тіла. Ми обговорюємо, як Альберт Ейнштейн поширив концепцію Планка на *квант світла* («фотон»), щоб пояснити фотоефект. Ми також показуємо, як американський фізик Артур Х. Комптон використав концепцію фотона в 1923 році, щоб пояснити зсув довжини хвилі, що спостерігається в рентгенівських променях. Після обговорення моделі водню Бора ми описуємо, як матеріальні хвилі були постульовані в 1924 році Луї-Віктором де Бройлем, щоб виправдати модель Бора, і досліджуємо експерименти, проведені в 1923 – 1927 роках Клінтоном Девіссоном і Лестером Джермером, які підтвердили існування матеріальних хвиль де Бройля.

1.1. Випромінювання чорного тіла

Усі тіла випромінюють електромагнітні хвилі. Раніше ми дізналися, що холодніше тіло випромінює менше енергії, ніж тепліше. Ми також знаємо зі спостережень, що коли тіло нагрівається і його температура підвищується, довжина хвилі випромінювання змінюється з інфрачервоного на червоне, а потім з червоного на помаранчеве і так далі. Коли його температура підвищується, тіло світиться кольорами, що відповідають дедалі меншим довжинам хвиль електромагнітного спектру. Це основний принцип роботи лампи розжарювання: гаряча металева нитка світиться червоним, і коли нагрівання продовжується, її світіння врешті охоплює всю видиму частину електромагнітного спектру. Температура (T) об'єкта, який випромінює випромінювання, або **випромінювача**, визначає довжину хвилі, на якій випромінювана енергія є максимальною. Наприклад, Сонце (див. рисунок на титульному аркуші), температура поверхні якого знаходиться в діапазоні від 5000 К до 6000 К, найбільш сильно випромінює в діапазоні довжин хвиль близько 560 нм у видимій частині електромагнітного спектру. Ваше тіло при нормальній температурі близько 310 К випромінює найсильніше в інфрачервоній частині спектру.

Випромінювання, яке падає на об'єкт, частково поглинається і частково відбивається. У термодинамічній рівновазі швидкість, з якою об'єкт поглинає випромінювання, така ж, як і швидкість, з якою він його випускає. Тому хороший **поглинач** випромінювання (будь-який об'єкт, який поглинає випромінювання) також є хорошим випромінювачем. Ідеальний поглинач поглинає все падаюче на нього електромагнітне випромінювання; такий об'єкт називають **чорним тілом**.

Хоча чорне тіло є ідеалізацією, оскільки жоден фізичний об'єкт не поглинає 100% падаючого випромінювання, ми можемо побудувати близьку реалізацію чорного тіла у формі невеликого отвору в стінці герметичної оболонки, відомої як резонаторний радіатор, як показано на рис. 1.2. Внутрішні стінки порожнинного радіатора шорсткі та почорнілі, тому будь-яке випромінювання, яке проникає через крихітний отвір у стінці, затримується всередині порожнини. У термодинамічній рівновазі (при температурі T) стінки порожнини поглинають рівно стільки випромінювання, скільки випромінюють. Крім того, всередині порожнини випромінювання, що входить в отвір, врівноважується випромінюванням, що виходить з нього. Спектр випромінювання чорного тіла можна отримати, аналізуючи світло, що випромінює отвір. Електромагнітні хвилі, які випромінює чорне тіло, називають **випромінюванням чорного тіла**.

Інтенсивність $I(\lambda, T)$ випромінювання чорного тіла залежить від довжини хвилі λ випромінювання та від температури T чорного тіла (рис. 1.3). Інтенсивність $I(\lambda, T)$ – це енергія, що випромінюється за одиницю часу з одиниці площі поверхні тіла за допомогою електромагнітних хвиль у вузькому діапазоні довжин хвиль від λ до $\lambda + \Delta\lambda$ у вакуумі.

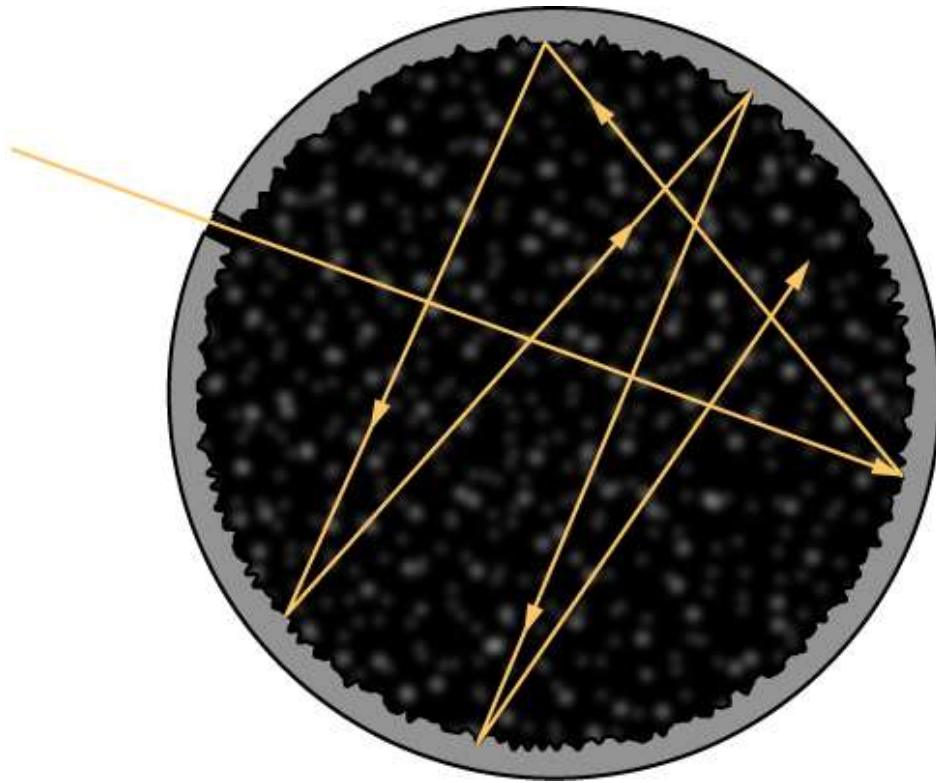


Рис. 1.2. Чорне тіло фізично реалізується маленьким отвором у непрозорій стінці резонаторного радіатора

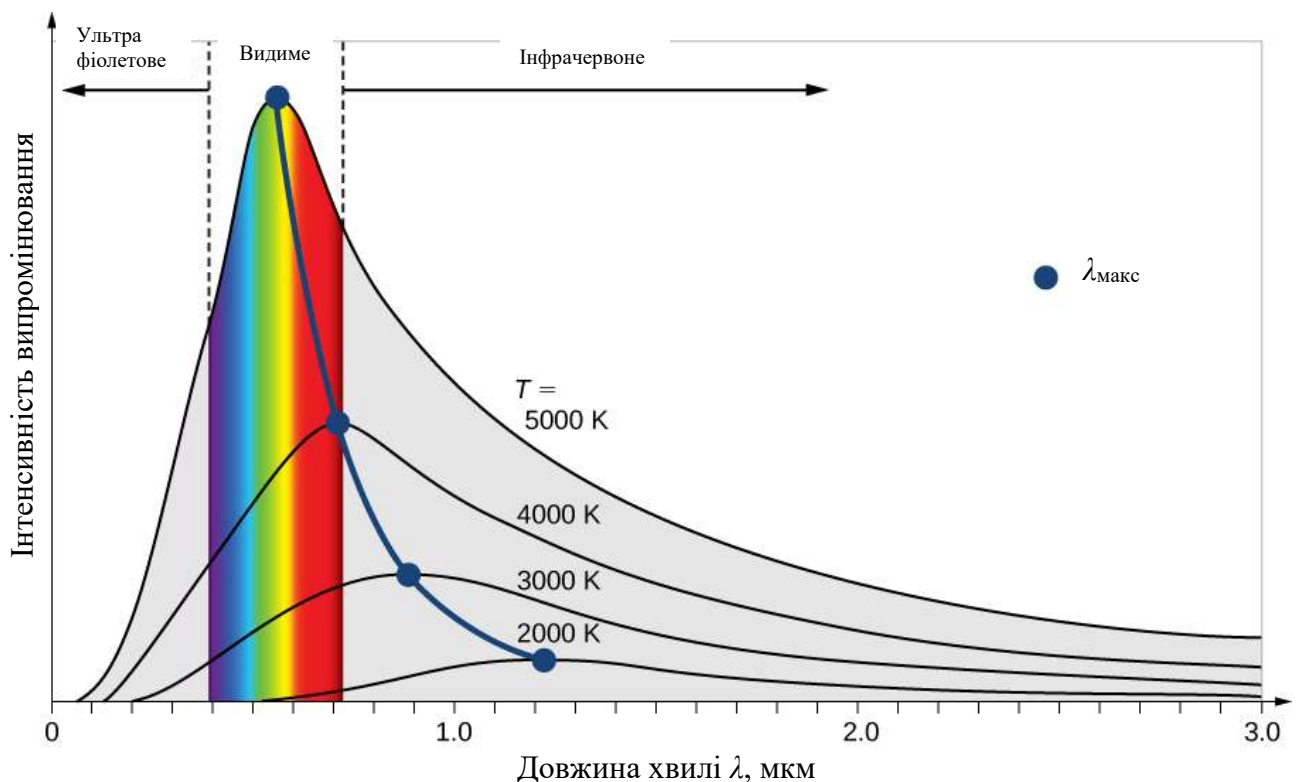


Рис. 1.3. Залежність інтенсивності випромінювання чорного тіла від довжини хвилі випромінювання. Кожна крива відповідає різній температурі чорного тіла, починаючи з низької температури (найнижча крива) до високої температури (найвища крива)

Розподіл інтенсивності по довжинах хвиль випромінювання, що випромінюється порожнинами, було досліджено експериментально в кінці

дев'ятнадцятого століття. Як правило, випромінювання, що випускається матеріалами, лише приблизно відповідає кривій випромінювання чорного тіла (рис. 1.4); однак спектри звичайних зірок дуже точно сліднують кривій випромінювання чорного тіла.

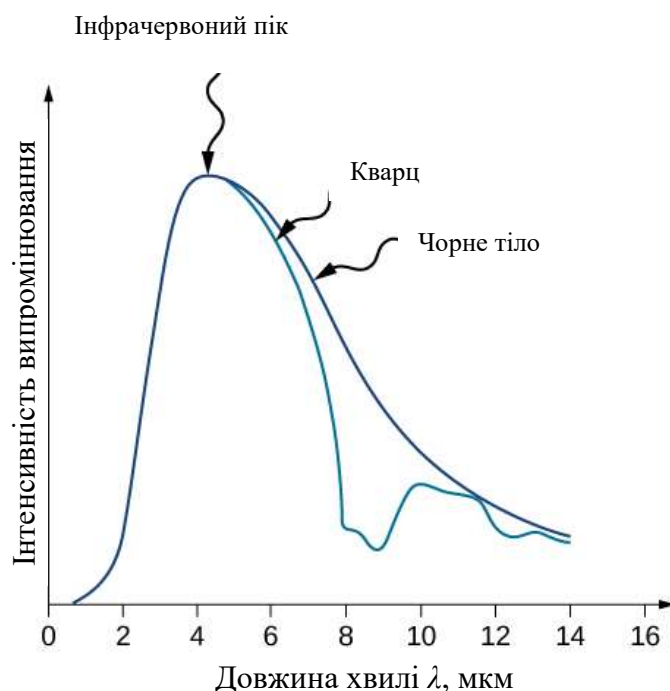


Рис. 1.4. Спектр випромінювання поверхні кварцу (блакитна крива) і крива випромінювання чорного тіла (чорна крива) при 600 К

Два важливі закони узагальнюють експериментальні результати вимірювання випромінювання чорного тіла: *закон зміщення Віна* та *закон Стефана*. Закон зміщення Віна проілюстровано на рис. 1.3 кривою, що з'єднує максимуми на кривих інтенсивності. На цих кривих ми бачимо, що чим гарячіше тіло, тим коротша довжина хвилі, що відповідає піку випромінювання на кривій випромінювання. Кількісно закон Віна виглядає так:

$$\lambda_{\text{макс}} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}, \quad (1.1)$$

де $\lambda_{\text{макс}}$ – положення максимуму на кривій випромінювання.

Іншими словами, $\lambda_{\text{макс}}$ це довжина хвилі, на якій чорне тіло випромінює найсильніше за даної температури T . Зверніть увагу, що в рівнянні (1.1) температура вказана в кельвінах. Закон зміщення Віна дозволяє оцінити температуру далеких зірок шляхом вимірювання довжини хвилі випромінювання, яке вони випромінюють.

Приклад 1.1. Температури далеких зірок

Ясним вечором у зимові місяці, якщо ви опинитесь у північній півкулі й подивіться на небо, ви побачите сузір'я Оріон (Мисливець). Одна зірка в цьому сузір'ї, Рігель, мерехтить синім кольором, а інша зірка, Бетельгейзе, має

жовтуватий колір, як показано на рис. 1. 5. Яка з цих двох зірок холодніша, Бетельгейзе чи Рігель?

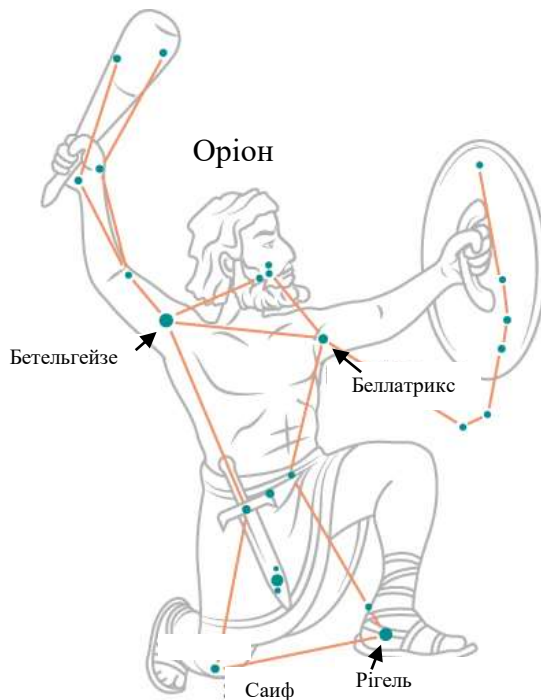


Рис. 1.5. У сузір'ї Оріона червона зірка Бетельгейзе, яка зазвичай набуває жовтуватого відтінку, виглядає як праве плече фігури (угорі ліворуч). Гігантська блакитна зірка внизу праворуч — це Рігель, яка виглядає як ліва нога мисливця

Стратегія

Ми ставимося до кожної зірки як до чорного тіла. Тоді відповідно до закону Віна його температура обернено пропорційна довжині хвилі його пікової інтенсивності. Довжина хвилі $\lambda_{(\text{синій})\text{макс}}$ синього світла коротше довжини хвилі $\lambda_{(\text{червоний})\text{макс}}$ червоного світла. Навіть якщо ми не знаємо точних довжин хвиль, ми все одно можемо встановити пропорцію.

Розв'язок

Записуючи закон Віна для синьої та червоної зірки, ми маємо:

$$\lambda_{\text{макс}}^{\text{черв}} T_{\text{черв}} = 2,898 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} = \lambda_{\text{макс}}^{\text{син}} T_{\text{син}}. \quad (1.2)$$

У спрощеному вигляді рівняння 1.2 дає:

$$T_{\text{черв}} = \frac{\lambda_{\text{макс}}^{\text{син}}}{\lambda_{\text{макс}}^{\text{черв}}} T_{\text{син}} < T_{\text{син}}. \quad (1.3)$$

Тому Бетельгейзе холодніше Рігеля.

Обговорення

Зауважте, що закон зміщення Віна говорить нам, що чим вища температура випромінюючого тіла, тим коротша довжина хвилі випромінювання, яке воно випромінює. Якісний аналіз, наведений у цьому прикладі, загалом дійсний для будь-якого випромінюючого тіла, чи то великий об'єкт, як-от зірка, чи малий об'єкт, як-от розжарена нитка в лампочці розжарювання.

Перевірте своє розуміння 1.1

Полум'я свічки з ароматом персика має жовтий колір, а полум'я пальника Бунзена в хімічній лабораторії – блакитний. Яке полум'я має більшу температуру?

Друге експериментальне співвідношення — це закон Стефана, який стосується повної потужності випромінювання абсолютно чорного тіла, випромінюваного по всьому спектру довжин хвиль при даній температурі. На рис. 1.3 ця загальна потужність представлена площею під кривою випромінювання чорного тіла для заданого T . Зі збільшенням температури чорного тіла загальна випромінювана потужність також зростає. Кількісно закон Стефана виражає це співвідношення так:

$$P(T) = \sigma AT^4, \quad (1.4)$$

де A – площа поверхні чорного тіла, T – його температура (у кельвінах), σ – **стала Стефана–Больцмана**, $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$.

Закон Стефана дозволяє нам оцінити, скільки енергії випромінює зірка, дистанційно вимірюючи її температуру.

Приклад 1.2. Потужність випромінювання зірок

Така зірка, як наше Сонце, з часом еволюціонує до зірки «червоного гіганта», а потім до зірки «білого карлика». Типовий білий карлик приблизно розміром із Землю, а температура його поверхні приблизно $2,5 \times 10^4 \text{ K}$. Типовий червоний гігант має температуру поверхні $3,0 \times 10^3 \text{ K}$ і радіус приблизно в 100 000 разів більший, ніж у білого карлика. Яка середня потужність випромінювання на одиницю площі та загальна потужність випромінювання кожного з цих типів зірок? Як вони порівнюються?

Стратегія

Якщо розглядати зірку як чорне тіло, то, згідно із законом Стефана, повна потужність, яку випромінює зірка, пропорційна четвертому степеню її температури. Щоб знайти потужність, випромінювану на одиницю площі поверхні, нам не потрібно робити жодних припущень щодо форми зірки, оскільки P/A залежить лише від температури. Однак, щоб обчислити загальну потужність, нам потрібно зробити припущення, що енергія випромінюється через сферичну поверхню, що оточує зірку, так що площа поверхні становить $A = 4\pi R^2$, де R – її радіус.

Розв'язок

Проста пропорція, заснована на законі Стефана, дає наступний вираз:

$$\frac{P_{\text{карл}}/A_{\text{карл}}}{P_{\text{гігант}}/A_{\text{гігант}}} = \frac{\sigma T_{\text{карл}}^4}{\sigma T_{\text{гігант}}^4} = \left(\frac{T_{\text{карл}}}{T_{\text{гігант}}} \right)^4 = \left(\frac{2,5 \times 10^4}{3,0 \times 10^3} \right)^4 = 4820. \quad (1.5)$$

Потужність, випромінювана на одиницю площі білим карликом, приблизно в 5000 разів перевищує потужність, випромінювану червоним гігантом. Позначивши це співвідношення через $a = 4,8 \times 10^3$, з рівняння 1.5 отримуємо:

$$\frac{P_{\text{карл}}}{P_{\text{гігант}}} = a \frac{A_{\text{карл}}}{A_{\text{гігант}}} = a \frac{4\pi R_{\text{карл}}^2}{4\pi R_{\text{гігант}}^2} = a \left(\frac{R_{\text{карл}}}{R_{\text{гігант}}} \right)^2 = 4820 \left(\frac{R_{\text{карл}}}{10^5 R_{\text{карл}}} \right)^2 \approx 5 \times 10^{-7}. \quad (1.6)$$

Отже, загальна потужність, випромінювана білим карликом, становить крихітну частку від загальної потужності, випромінюваної червоним гігантом. Незважаючи на відносно нижчу температуру, загальна потужність випромінювання червоного гіганта значно перевищує потужність випромінювання білого карлика, оскільки червоний гігант має набагато більшу площу поверхні. Щоб оцінити абсолютну величину випромінюваної потужності на одиницю площі, використаємо закон Стефана. Для білого карлика отримуємо:

$$\frac{P_{\text{карл}}}{A_{\text{карл}}} = \sigma T_{\text{карл}}^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} (2,5 \times 10^4 \text{К})^4 = 2,2 \times 10^{10} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (1.7)$$

Аналогічний результат для червоного гіганта отримуємо шляхом масштабування результату для білого карлика:

$$\frac{P_{\text{гігант}}}{A_{\text{гігант}}} = \frac{2,2 \times 10^{10} \text{Вт}}{4,82 \times 10^3 \text{м}^2} \cong 4,6 \times 10^6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (1.8)$$

Обговорення

Щоб оцінити загальну потужність, випромінювану білим карликом або червоним гігантом, ми можемо використати рівняння 1.7, оцінюючи площу поверхні за допомогою приблизних розмірів, зазначених у постановці задачі.

Перевірте своє розуміння 1.2

Гріють залізну кочергу. Коли температура підвищується, кочерга починає світитися — спочатку тьмяно-червоним, потім яскраво-червоним, потім помаранчевим, а потім жовтим. Використовуйте або криву випромінювання чорного тіла, або закон Віна, щоб пояснити ці зміни в кольорі світіння.

Перевірте своє розуміння 1.3

Припустимо, що дві зірки, α і β , випромінюють точно таку ж загальну потужність. Якщо радіус зірки α в три рази більше зірки β , яке співвідношення температур поверхні цих зірок? Яка з них гарячіша?

Термін «чорне тіло» був введений Густавом Р. Кірхгофом у 1862 році. Крива випромінювання чорного тіла була відома експериментально, але її форма уникала фізичного пояснення до 1900 року. Фізична модель чорного тіла при температурі T — це модель електромагнітних хвиль, укладених у порожнині (див. рис. 1.2), які знаходяться в термодинамічній рівновазі зі стінками порожнини. Хвилі можуть обмінюватися енергією зі стінками. Мета тут полягає в тому, щоб знайти розподіл густини енергії між різними видами коливань на різних довжинах хвиль (або частотах). Іншими словами, ми хочемо знати, скільки енергії переноситься однією довжиною хвилі або смугою довжин хвиль. Коли ми знаємо розподіл енергії, ми можемо використовувати стандартні статистичні методи, щоб отримати криву випромінювання чорного тіла, закон

Стефана та закон зміщення Віна. Коли фізична модель правильна, теоретичні прогнози мають бути такими ж, як експериментальні криві.

У класичному підході до проблеми випромінювання чорного тіла, в якому випромінювання розглядається як хвилі, моди електромагнітних хвиль, захоплених у порожнині, знаходяться в рівновазі та постійно обмінюються своєю енергією зі стінками порожнини. Немає жодних фізичних причин, чому хвиля повинна діяти інакше: будь-яка кількість енергії може бути обмінена, переходячи від хвилі до матеріалу в стіні або приймаючись хвилею від матеріалу в стіні.

Цей класичний малюнок є основою моделі, розробленої лордом Релеєм і, незалежно, сером Джеймсом Джинсом. Результат цієї класичної моделі для кривих випромінювання чорного тіла відомий як закон Релея–Джинса. Однак, як показано на рис. 1.6, закон Релея–Джинса не в змозі правильно відтворити експериментальні результати.

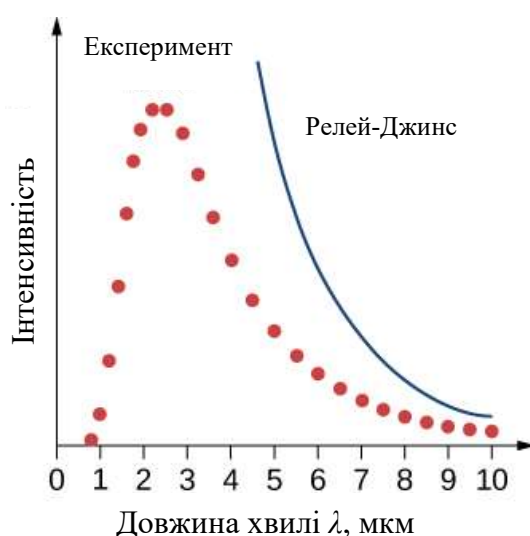


Рис. 1.6. Ультрафіолетова катастрофа: закон Релея–Джинса не пояснює спостережуваний спектр випромінювання чорного тіла

У межах коротких довжин хвиль закон Релея–Джинса передбачає нескінченну інтенсивність випромінювання, що не узгоджується з експериментальними результатами, в яких інтенсивність випромінювання має кінцеві значення в ультрафіолетовій області спектру. Ця розбіжність між результатами класичної теорії та експериментів, яку почали називати *ультрафіолетовою катастрофою*, показує, що класична фізика не може пояснити механізм випромінювання чорного тіла.

Проблема випромінювання чорного тіла була вирішена в 1900 році Максом Планком. Планк використав ту саму ідею, що й модель Релея–Джинса, у тому сенсі, що він трактував електромагнітні хвилі між стінками всередині порожнини класичним способом і припускав, що випромінювання знаходиться в рівновазі зі стінками порожнини. Новаторська ідея, яку Планк представив у своїй моделі, полягала в припущенні, що випромінювання порожнини походить від атомних коливань всередині стінок порожнини, і що ці коливання можуть мати лише *дискретні* значення енергії. Тому випромінювання, захоплене стінками

порожнини, може обмінюватися енергією зі стінками лише в дискретних кількостях. Гіпотеза Планка про *дискретні значення енергії*, яку він назвав *квантами*, припускає, що осцилятори всередині стінок порожнини мають **квантовану енергію**. Це була абсолютно нова ідея, яка вийшла за рамки класичної фізики дев'ятнадцятого століття, тому що у класичній картині енергія осцилятора може приймати будь-яке безперервне значення. Планк припустив, що енергія осцилятора (E_n) може мати лише дискретні або квантовані значення:

$$E_n = nhf, \quad (1.9)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

У рівнянні 1.9 f — це частота осцилятора Планка. Натуральне число n , яке перераховує ці дискретні енергії, називають **квантовим числом**. Фізичну сталу h називають *постійною Планка*:

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ еВ} \cdot \text{с}. \quad (1.10)$$

Кожне дискретне значення енергії відповідає **квантовому стану осцилятора Планка**. Квантові стани нумеруються квантовими числами. Наприклад, коли осцилятор Планка має перший $n = 1$ квантовий стан, його енергія $E_1 = hf$; коли він знаходиться в $n = 2$ квантовому стані, його енергія $E_2 = 2hf$; коли він знаходиться в $n = 3$ квантовому стані, $E_3 = 3hf$; і так далі.

Зверніть увагу, що рівняння 1.9 показує, що існує нескінченна кількість квантових станів, які можна представити у вигляді послідовності $\{hf, 2hf, 3hf, \dots, (n-1)hf, nhf, (n+1)hf, \dots\}$. Кожні два послідовних квантових станів в цій послідовності розділені стрибком енергії, $\Delta E = hf$. Осцилятор у стінці може отримувати енергію від випромінювання в порожнині (поглинання) або може віддавати енергію випромінюванню в порожнині (випромінювання). Процес поглинання переводить осцилятор у вищий квантовий стан, а процес випромінювання переводить осцилятор у нижчий квантовий стан. У якому б напрямку не відбувався цей обмін енергією, найменша кількість енергії, якою можна обмінятися, становить hf . Немає верхньої межі того, скільки енергії можна обміняти, але будь-який обмін має бути цілим числом, кратним hf . Якщо енергетичний пакет не має такої точної кількості, він не поглинається і не випромінюється на стінці чорного тіла.

Квантова гіпотеза Планка

Гіпотеза Планка про кванти енергії стверджує, що кількість енергії, яку випромінює осцилятор, переноситься квантом випромінювання ΔE , причому:

$$\Delta E = hf.$$

Нагадаємо, що частота електромагнітного випромінювання пов'язана з його довжиною хвилі та швидкістю світла фундаментальним співвідношенням $f\lambda = c$. Це означає, що ми можемо виразити (1.10) еквівалентно через довжину хвилі. Коли гіпотеза Планка включена в обчислення густини енергії чорного тіла, тоді вона дає такий теоретичний вираз для інтенсивності потужності випромінювання, що випромінюється на одиницю довжини хвилі:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \quad (1.11)$$

де c – швидкість світла у вакуумі, а k_B постійна Больцмана, $k_B = 1,380 \times 10^{-23}$ Дж/К.

Теоретичну формулу, виражену в рівнянні 1.11, називають *законом випромінювання чорного тіла Планка*. Цей закон узгоджується з експериментальною кривою випромінювання чорного тіла (див. рис. 1.7).

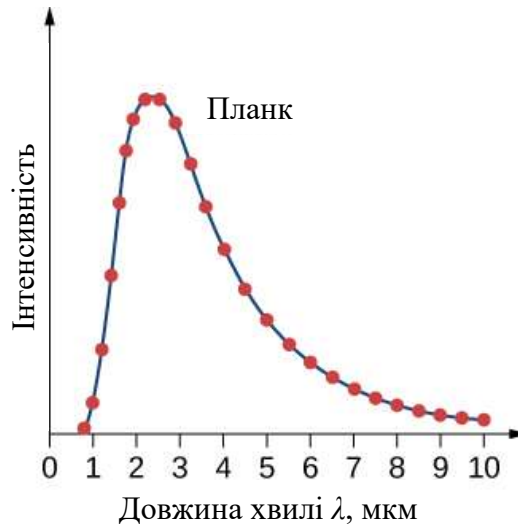


Рис. 1.7. Теоретичний результат Планка (неперервна крива) та експериментальна крива випромінювання чорного тіла (крапки)

Крім того, з рівняння 1.11 можна вивести закон зміщення Віна та закон Стефана. Щоб отримати закон зміщення Віна, ми використовуємо диференціальне числення, щоб знайти максимум кривої інтенсивності випромінювання $I(\lambda, T)$. Щоб вивести закон Стефана та знайти значення сталої Стефана–Больцмана, ми використовуємо інтегральне числення та інтегруємо $I(\lambda, T)$, щоб знайти повну потужність випромінювання чорного тіла при сталій температурі у всьому спектрі довжин хвиль від $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. Цей вивід залишається як вправа далі в цьому розділі.

Приклад 1.3. Квантовий осцилятор Планка

Квантовий осцилятор у стінці порожнини на рис. 1.2 вібрує з частотою $5,0 \times 10^{14}$ Гц. Обчисліть відстань між його енергетичними рівнями.

Стратегія

Енергетичні стани квантового осцилятора задано рівнянням 1.9. Енергетичний інтервал ΔE виходить шляхом знаходження різниці енергій між двома сусідніми квантовими станами для квантових чисел $n + 1$ і n .

Розв'язок

Ми можемо підставити задану частоту та постійну Планка безпосередньо в рівняння:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (n + 1)hf - nhf = hf =$$

$$= (6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})(5,0 \times 10^{14} \text{ Гц}) = 3,3 \times 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Обговорення

Зверніть увагу, що ми не уточнюємо, який саме матеріал використовувався для створення порожнини. Тут квантовий осцилятор — це теоретична модель атома або молекули матеріалу в стінці.

Перевірте своє розуміння 1.4

Молекула коливається з частотою $5,0 \times 10^{14} \text{ Гц}$. Яка найменша відстань між рівнями енергії коливань?

Приклад 1.4. Квантова теорія, застосована до класичного осцилятора

Тіло масою 1,0 кг коливається на кінці пружини. Стала пружини 1000 Н/м. Амплітуда цих коливань 0,10 м. Використайте поняття квантування, щоб знайти енергетичний інтервал для цього класичного осцилятора. Чи важливе квантування енергії для макроскопічних систем, таких як цей осцилятор?

Стратегія

Ми використаємо рівняння 1.10 так, ніби система була квантовим осцилятором, але з частотою f маси, яка коливається на пружині. Щоб оцінити, чи має квантування значний ефект, ми порівнюємо квантовий енергетичний інтервал із макроскопічною повною енергією цього класичного осцилятора.

Розв'язок

Для постійної $k = 1,0 \times 10^3 \text{ Н/м}$, маси $m = 1,0 \text{ кг}$, частота f дорівнює:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1000 \text{ Н/м}}{1 \text{ кг}}} \approx 5 \text{ Гц}.$$

Квант енергії, який відповідає цій частоті, дорівнює:

$$\Delta E = hf = (6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})(5,0 \text{ Гц}) = 3,3 \times 10^{-33} \text{ Дж}.$$

Коли коливання мають амплітуду $A = 0,10 \text{ м}$, енергія коливань становить:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2}(1000 \text{ Н/м})(0,1 \text{ м})^2 = 5,0 \text{ Дж}.$$

Обговорення

Отже, для класичного осцилятора маємо $\Delta E/E \approx 10^{-34} \text{ Дж}$. Ми бачимо, що розділення енергетичних рівнів незмірно мале. Тому для всіх практичних цілей енергія класичного осцилятора приймає безперервні значення. Ось чому класичні принципи можуть бути застосовані до макроскопічних систем, які зустрічаються в повсякденному житті, без втрати точності.

Перевірте своє розуміння 1.5

Чи був би результат у прикладі 1.4 іншим, якби маса становила не 1,0 кг, а крихітну масу 1,0 мкг, а амплітуда коливань становила 0,10 мкм?

Коли Планк вперше опублікував свій результат, гіпотеза квантів енергії не була сприйнята серйозно фізичною спільнотою, оскільки вона не впливала з жодної усталеної фізичної теорії того часу. Це було сприйнято навіть самим Планком як корисний математичний трюк, який призвів до хорошої теоретичної «підгонки» до експериментальної кривої. Це сприйняття змінилося в 1905 році, коли Ейнштейн опублікував своє пояснення фотоелектричного ефекту, в якому він надав кванту енергії Планка нове значення: значення частинки світла.

Вправи до п. 1.1. Випромінювання чорного тіла

1. Обігрівач потужністю 200 Вт випромінює випромінювання з довжиною хвилі 1,5 мкм. (а) Яку величину кванта енергії він випромінює? (б) Припускаючи, що питома теплоємність тіла масою 4,0 кг дорівнює 0,83 ккал/кг · К, скільки з цих фотонів має поглинути тіло, щоб підвищити температуру на 2 К? (в) Скільки часу триває процес нагрівання (б), якщо припустити, що все випромінювання, яке випускає нагрівач, поглинається тілом?
2. Генератор мікрохвиль потужністю 900 Вт у духовці генерує кванти енергії частотою 2560 МГц. (а) Скільки квантів енергії він випромінює за секунду? (б) Скільки квантів енергії має поглинути блюдо з макаронами, розміщене в радіаційній порожнині, щоб підвищити свою температуру на 45,0 К? Припустимо, що маса посуду дорівнює 0,5 кг, а її питома теплоємність дорівнює 0,9 ккал/кг · К. (в) Припустимо, що всі кванти енергії, випромінювані генератором, поглинаються стравою з макаронами. Скільки часу ми повинні чекати, поки страва (б) буде готова?
3. (а) Для якої температури пік спектра випромінювання чорного тіла становить 400 нм? (б) Якщо температура чорного тіла становить 800 К, на якій довжині хвилі воно випромінює найбільше енергії?
4. Вольфрамові елементи ламп розжарювання працюють при 3200 К. На якій довжині хвилі нитка випромінює максимальну енергію?
5. Міжзоряний простір заповнений випромінюванням довжини хвилі 970 мкм. Це випромінювання вважається залишком «великого вибуху». Яка температура чорного тіла відповідає цьому випромінюванню?
6. Енергія випромінювання від сонця досягає максимуму на довжині хвилі приблизно 500,0 нм. Яка приблизна температура поверхні Сонця?

1.2. Фотоелектричний ефект

Коли металева поверхня піддається впливу монохроматичної електромагнітної хвилі досить короткої довжини хвилі (або, що еквівалентно, частоти вище порогової частоти), падаюче випромінювання поглинається, і

відкрита поверхня випускає електрони. Це явище відоме як **фотоелектричний ефект**. Електрони, що випускаються в цьому процесі, називають **фотоелектронами**.

Експериментальна установка для дослідження фотоефекту схематично зображена на рис. 1.8. Матеріал мішені служить катодом, який при освітленні монохроматичним випромінюванням стає емітером фотоелектронів. Цей електрод ми називаємо **фотоелектродом**.

Фотоелектрони збираються на аноді, який підтримується при вищому потенціалі порівняно з катодом. Різниця потенціалів між електродами може бути збільшена або зменшена, або її полярність може бути змінена. Електроди укладені в вакуумну скляну трубку, щоб фотоелектрони не втрачали свою кінетичну енергію при зіткненні з молекулами повітря в просторі між електродами.

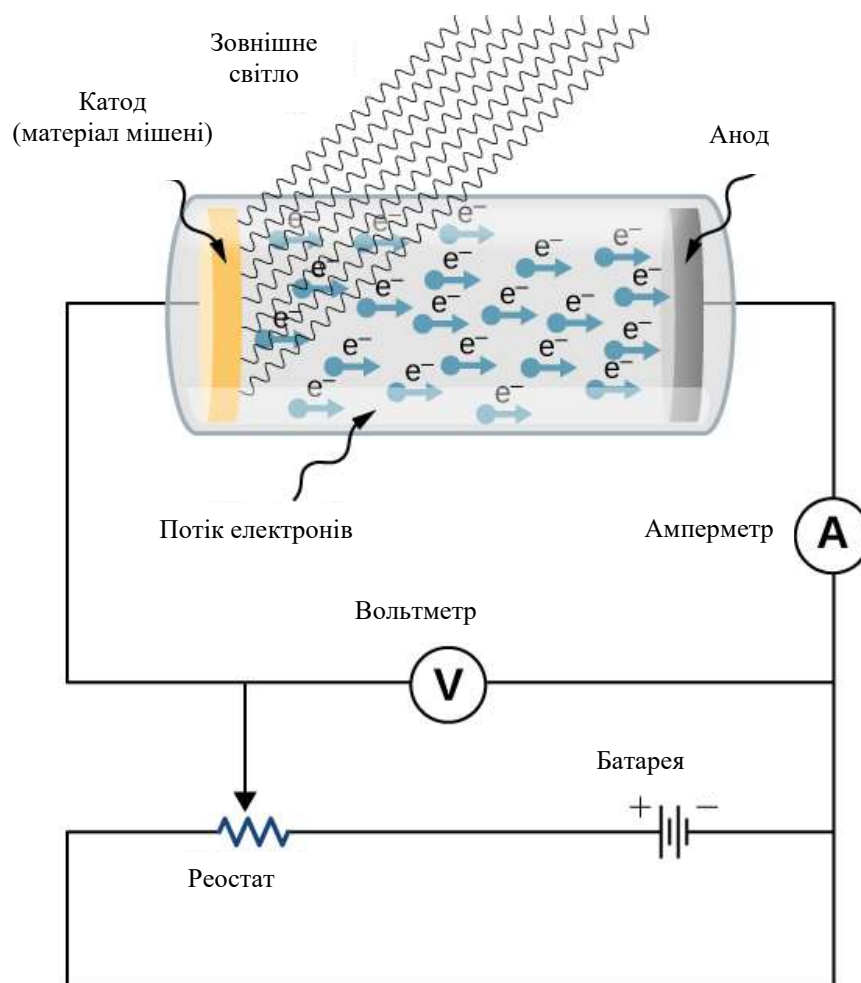


Рис. 1.8. Експериментальна установка для дослідження фотоефекту. Анод і катод укладені в вакуумовану скляну трубку. Вольтметр вимірює різницю електричних потенціалів між електродами, а амперметр вимірює фотострум. Падаюче випромінювання монохроматичне

Коли матеріал мішені не піддається випромінюванню, струм у цьому ланцюзі не реєструється, оскільки ланцюг розірвано (зверніть увагу, між електродами є зазор). Але коли матеріал мішені з'єднується з негативною клемою

батареї та піддається випромінюванню, у цьому ланцюзі реєструється струм; цей струм називають **фотострумом**. Припустимо, що тепер ми змінюємо різницю потенціалів між електродами так, щоб матеріал катоду тепер з'єднався з позитивним полюсом батареї, а потім ми повільно збільшуємо напругу. Фотострум поступово згасає і, зрештою, повністю припиняється при певному значенні цієї зворотної напруги. Різницю потенціалів, при якій фотострум припиняється, називають **гальмівним потенціалом**.

Характеристика фотоефекту

Фотоефект має три важливі характеристики, які неможливо пояснити класичною фізикою: (1) відсутність часу затримки, (2) незалежність кінетичної енергії фотоелектронів від інтенсивності падаючого випромінювання та (3) наявність частоти зрізу. Розглянемо кожную з цих характеристик.

Відсутність затримки часу. Коли випромінювання потрапляє на матеріал мішені в електроді, електрони випускаються майже миттєво, навіть при дуже низькій інтенсивності падаючого випромінювання. Ця відсутність часу затримки суперечить нашому розумінню, заснованому на класичній фізиці. Класична фізика передбачає, що для випромінювання низької енергії знадобиться значний час, перш ніж опромінені електрони зможуть отримати достатню енергію, щоб покинути поверхню електрода; однак такого накопичення енергії не спостерігається.

Інтенсивність падаючого випромінювання та кінетична енергія фотоелектронів. Типові експериментальні криві показані на рис. 1.9, на якому зображено фотострум у залежності від прикладеної різниці потенціалів між електродами.

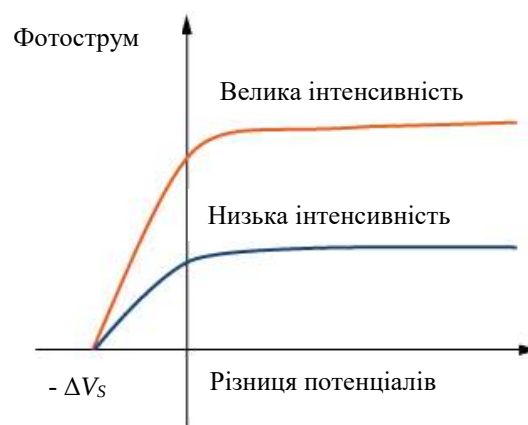


Рис. 1.9. Виявлений фотострум, нанесений на графік залежно від прикладеної різниці потенціалів, показує, що для будь-якої інтенсивності падаючого випромінювання, незалежно від того, чи є вона високою (верхня крива) чи низькою (нижня крива), значення гальмівного потенціалу завжди однакове

Для позитивної різниці потенціалів струм постійно зростає, поки не досягне плато. Подальше збільшення потенціалу понад цю точку не призводить до збільшення фотоструму взагалі. Більша інтенсивність випромінювання створює більшу величину фотоструму. Для негативної різниці потенціалів зі збільшенням абсолютної величини різниці потенціалів значення фотоструму зменшується і дорівнює нулю при гальмівному потенціалі ΔV_s . Для будь-якої інтенсивності падаючого випромінювання, незалежно від того, чи є вона високою або низькою, значення гальмівного потенціалу завжди залишається однаковим.

Щоб зрозуміти, чому цей результат незвичайний з точки зору класичної фізики, нам спочатку потрібно проаналізувати енергію фотоелектронів. Фотоелектрон, який залишає поверхню, має кінетичну енергію K . Він отримав цю енергію від падаючої електромагнітної хвилі. У просторі між електродами фотоелектрон рухається в електричному потенціалі і його енергія змінюється на величину $q\Delta V$, де ΔV є різниця потенціалів і $q = -e$. Оскільки немає сил, окрім електричної, застосовуючи теорему про роботу-енергію, ми отримуємо енергетичний баланс $\Delta K - e \Delta V = 0$ для фотоелектрона, де ΔK це зміна кінетичної енергії фотоелектрона. При потенціалі $-\Delta V_s$ фотоелектрон втрачає свою початкову кінетичну енергію K_i і приходить у стан спокою. Таким чином, його енергетичний баланс стає $(0 - K_i) - e(-\Delta V_s) = 0$, так що $K_i = e \Delta V_s$. При наявності гальмівного потенціалу найбільша кінетична енергія $K_{\text{макс}}$, яку може мати фотоелектрон, це його початкова кінетична енергія, яку він має на поверхні фотоелектрода. Отже, найбільшу кінетичну енергію фотоелектронів можна безпосередньо виміряти шляхом вимірювання гальмівного потенціалу:

$$K_{\text{макс}} = e\Delta V_s. \quad (1.12)$$

На цьому етапі ми бачимо, де класична теорія розходиться з експериментальними результатами. У класичній теорії фотоелектрон поглинає електромагнітну енергію безперервно; це означає, що коли падаюче випромінювання має високу інтенсивність, очікується, що кінетична енергія в рівнянні 1.12 буде високою. Подібним чином, коли випромінювання має низьку інтенсивність, очікується, що кінетична енергія буде низькою. Але експеримент показує, що максимальна кінетична енергія фотоелектронів не залежить від інтенсивності світла.

Наявність частоти зрізу. Для будь-якої металевої поверхні існує мінімальна частота падаючого випромінювання, нижче якої фотострум не виникає. Значення цієї **граничної частоти** для фотоелектричного ефекту є фізичною властивістю металу: різні матеріали мають різні значення граничної частоти. Експериментальні дані демонструють типовий лінійний тренд (див. рис. 1.10).

Кінетична енергія фотоелектронів на поверхні лінійно зростає зі збільшенням частоти падаючого випромінювання. Вимірювання для всіх металевих поверхонь дають лінійні графіки з одним нахилом.

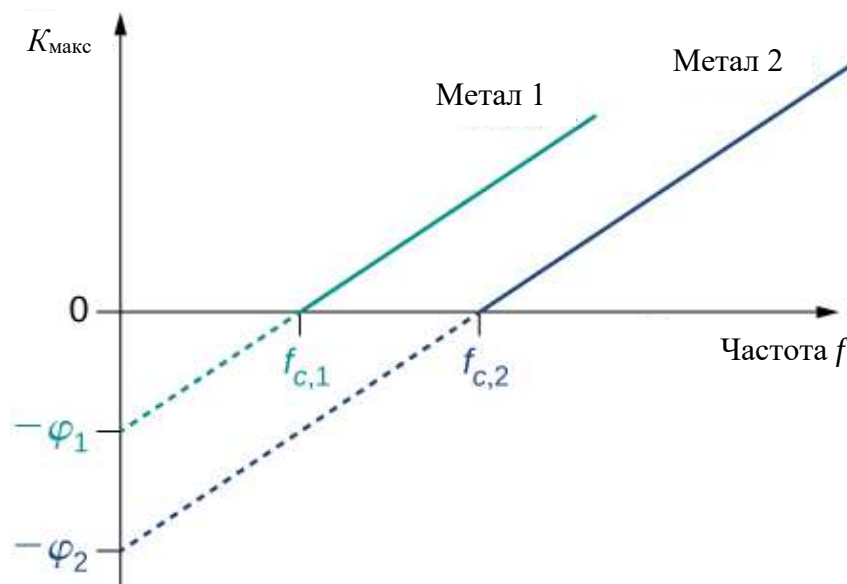


Рис. 1.10. Залежність кінетичної енергії фотоелектронів на поверхні від частоти падаючого випромінювання. Фотоефект може виникнути лише вище граничної частоти f_c . Вимірювання для всіх металевих поверхонь дають лінійні графіки з одним нахилом. Кожна металева поверхня має свою частоту зрізу

Жодне з цих спостережуваних явищ не відповідає класичному розумінню природи. Згідно з класичним описом, кінетична енергія фотоелектронів взагалі не повинна залежати від частоти падаючого випромінювання, і не повинно бути граничної частоти. Натомість у класичній картині електрони отримують енергію від падаючої електромагнітної хвилі безперервним шляхом, і кількість енергії, яку вони отримують, залежить лише від інтенсивності падаючого світла і нічого іншого. Отже, у класичному розумінні, доки світить світло, очікується, що фотоефект триватиме.

Робота виходу

Фотоефект пояснив у 1905 році А. Ейнштейн. Ейнштейн вважав, що якщо гіпотеза Планка про кванти енергії була правильною для опису обміну енергією між електромагнітним випромінюванням і стінками порожнини, вона також повинна працювати для опису поглинання енергії електромагнітного випромінювання поверхнею фотоелектрода. Він припустив, що електромагнітна хвиля переносить свою енергію в дискретних пакетах. Постулат Ейнштейна виходить за рамки гіпотези Планка, оскільки він стверджує, що саме світло складається з квантів енергії. Іншими словами, постулат стверджує, що електромагнітні хвилі є квантованими.

У підході Ейнштейна промінь монохроматичного світла частоти f складається з фотонів. Фотон – це частинка світла. Кожен фотон рухається зі швидкістю світла і несе квант енергії E_f . Енергія фотона залежить тільки від його частоти f . Явно, **енергія фотона** дорівнює:

$$E_f = hf. \quad (1.13)$$

де h є сталою Планка.

Під час фотоефекту фотони потрапляють на поверхню металу, і кожен фотон віддає *всю* свою енергію лише *одному* електрону на поверхні металу. Ця передача енергії від фотона до електрона є типу «все або нічого», і немає дробових передач, при яких фотон втратив би лише частину своєї енергії та вижив. Суть **квантового явища** полягає в тому, що або фотон передає всю свою енергію і припиняє своє існування, або перенесення не відбувається взагалі. Це контрастує з класичною картиною, де дозволені часткові передачі енергії. Маючи таке квантове розуміння, енергетичний баланс для електрона на поверхні, яка отримує енергію E_f від фотона має вигляд:

$$E_f = K_{\text{макс}} + \phi,$$

де $K_{\text{макс}}$ – це кінетична енергія, задана рівнянням 1.12, яку має електрон у той самий момент, коли він відривається від поверхні. У цьому рівнянні енергетичного балансу ϕ – це енергія, необхідна для відриву фотоелектрона від поверхні. Цю енергію ϕ називають **роботою виходу** металу. Кожен метал має свою характерну роботу виходу, як показано в табл. 1.1. Щоб отримати кінетичну енергію фотоелектронів на поверхні, ми просто інвертуємо рівняння балансу енергії та використовуємо рівняння 1.13, щоб виразити енергію поглиненого фотона. Це дає нам вираз для кінетичної енергії фотоелектронів, яка явно залежить від частоти падаючого випромінювання:

$$K_{\text{макс}} = hf - \phi. \quad (1.14)$$

Це рівняння має просту математичну форму, але його фізичні властивості глибокі. Тепер ми можемо розкрити фізичний зміст рівняння 1.14.

Таблиця 1.1

Типові значення роботи виходу для деяких поширених металів	
Метал	ϕ , (eV)
Na	2,46
Al	4,08
Pb	4,14
Zn	4,31
Fe	4,50
Cu	4,70
Ag	4,73
Pt	6,35

В інтерпретації Ейнштейна взаємодія відбувається між окремими електронами та окремими фотонами. Відсутність часу затримки означає, що ці взаємодії відбуваються миттєво. Час взаємодії не можна збільшити, зменшивши інтенсивність світла. Інтенсивність світла відповідає числу фотонів, що надходять на поверхню металу за одиницю часу. Навіть при дуже низькій інтенсивності світла фотоефект все одно виникає, оскільки взаємодія відбувається між одним електроном і одним фотоном. Поки існує хоча б один фотон з достатньою енергією для передачі її зв'язаному електрону, на поверхні фотоелектрода буде з'являтися фотоелектрон.

Наявність частоти зрізу f_C для фотоефекту впливає з рівняння 1.14, оскільки кінетична енергія $K_{\text{макс}}$ фотоелектрона може приймати тільки додатні значення. Це означає, що має існувати деяка порогова частота, для якої кінетична енергія дорівнює нулю, $0 = hf_C - \phi$. Таким чином ми отримуємо явну формулу для частоти зрізу:

$$f_C = \frac{\phi}{h}. \quad (1.15)$$

Частота зрізу залежить тільки від роботи виходу металу і прямо пропорційна їй. Коли робота виходу велика (коли електрони швидко зв'язуються з поверхнею металу), енергія порогового фотона має бути великою, щоб утворити фотоелектрон, і тоді відповідна порогова частота є великою. Фотони з частотами, вищими за порогову частоту f_C завжди виробляють фотоелектрони, тому що вони мають $K_{\text{макс}} > 0$. Фотони з частотами, меншими за f_C не мають достатньої енергії для утворення фотоелектронів. Тому, коли падаюче випромінювання має частоту нижче частоти зрізу, фотоефект не спостерігається. Оскільки частота f і довжина хвилі λ електромагнітних хвиль пов'язані фундаментальним співвідношенням $\lambda f = c$ (де c – це швидкість світла у вакуумі), гранична частота має відповідну **граничну довжину хвилі λ_C** :

$$\lambda_C = \frac{c}{f_C} = \frac{c}{\frac{\phi}{h}} = \frac{hc}{\phi}. \quad (1.16)$$

У цьому рівнянні $hc = 1240 \text{ еВ} \cdot \text{нм}$. Наші спостереження можна переформулювати таким еквівалентним чином: коли довжина хвилі падаючого випромінювання перевищує граничну довжину хвилі, фотоефект не виникає.

Приклад 1.5. Фотоелектричний ефект для срібла

На поверхню срібла падає випромінювання з довжиною хвилі 300 нм. Чи будуть спостерігатися фотоелектрони?

Стратегія

Фотоелектрони можуть бути викинуті з металевої поверхні лише тоді, коли падаюче випромінювання має довжину хвилі, меншу за граничну довжину хвилі. Робота виходу срібла $\phi = 4,73 \text{ еВ}$ (табл. 1.1). Щоб зробити оцінку, ми використовуємо рівняння 1.16.

Розв'язок

Порогова довжина хвилі для спостереження фотоефекту в сріблі становить:

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{нм}}{4,73 \text{ eV}} = 262 \text{ нм}.$$

Падаюче випромінювання має довжину хвилі 300 нм, що перевищує граничну довжину хвилі; тому фотоелектрони не спостерігаються.

Обговорення

Якби фотоелектрод був виготовлений із натрію замість срібла, гранична довжина хвилі становила б 504 нм і спостерігалися б фотоелектрони.

Рівняння 1.14 у моделі Ейнштейна говорить нам, що максимальна кінетична енергія фотоелектронів є лінійною функцією частоти падаючого випромінювання, що показано на рис. 1.10. Для будь-якого металу нахил цього графіка має значення сталої Планка. Перетинання з $K_{\text{макс}}$ -віссю дає нам значення роботи виходу, характерне для металу. З іншого боку, $K_{\text{макс}}$ можна безпосередньо виміряти в експерименті, вимірявши значення гальмівного потенціалу ΔV_s (див. рівняння 1.12), коли фотострум припиняється. Ці прямі вимірювання дозволяють експериментально визначити значення постійної Планка, а також роботу виходу матеріалів.

Модель Ейнштейна також дає пряме пояснення значень фотоструму, показаних на рис. 1.9. Наприклад, подвоєння інтенсивності випромінювання означає подвоєння кількості фотонів, які потрапляють на поверхню за одиницю часу. Чим більше число фотонів, тим більше число фотоелектронів, що призводить до більшого фотоструму в ланцюзі. Так інтенсивність випромінювання впливає на фотострум. Фотострум повинен вийти на плато при певному значенні різниці потенціалів, оскільки в одиницю часу кількість фотоелектронів дорівнює числу падаючих фотонів, а кількість падаючих фотонів зовсім не залежить від прикладеної різниці потенціалів, а лише від інтенсивності падаючого випромінювання. Потенціал гальмування не змінюється зі зміною інтенсивності випромінювання, оскільки кінетична енергія фотоелектронів (див. рівняння 1.14) не залежить від інтенсивності випромінювання.

Приклад 1.6. Функція роботи та частота зрізу

Коли в експерименті з невідомим металом використовується світло з довжиною хвилі 180 нм, виміряний фотострум падає до нуля при потенціалі – 0,80 В. Визначити роботу виходу металу та її граничну частоту для фотоефекту.

Стратегія

Щоб знайти частоту зрізу f_c , ми використовуємо рівняння 1.15, але спочатку ми повинні знайти роботу виходу ϕ . За для цього ми використовуємо рівняння 1.12 і рівняння 1.14. Фотострум падає до нуля при значенні потенціалу затримки, тому ми ідентифікуємо $\Delta V_s = 0,8 \text{ В}$.

Розв'язок

Ми використовуємо рівняння 1.12, щоб знайти кінетичну енергію фотоелектронів:

$$K_{\text{макс}} = e\Delta V_S = e(0,8 \text{ В}) = 0,8 \text{ еВ}.$$

Тепер ми розв'яжемо рівняння 1.14 для ϕ :

$$\phi = hf - K_{\text{макс}} = \frac{hc}{\lambda} - K_{\text{макс}} = \frac{1240 \text{ еВ} \cdot \text{нм}}{180 \text{ нм}} - 0,8 \text{ еВ} = 6,09 \text{ еВ}.$$

Нарешті, ми використовуємо рівняння 1.15, щоб знайти граничну частоту:

$$f_c = \frac{\phi}{h} = \frac{6,09 \text{ еВ}}{4,136 \times 10^{-15} \text{ еВ} \cdot \text{с}} = 1,47 \times 10^{15} \text{ Гц}.$$

Обговорення

У розрахунках, подібних до показаного в цьому прикладі, зручно використовувати постійну Планка в одиницях $\text{еВ} \cdot \text{с}$ і виражати всі енергії в еВ замість джоулів.

Приклад 1.7. Енергія фотона та кінетична енергія фотоелектронів

Фіолетове світло з довжиною хвилі 430 нм падає на кальцієвий фотоелектрод з роботою виходу $2,71 \text{ еВ}$. Знайти енергію падаючих фотонів і максимальну кінетичну енергію вибитих електронів.

Стратегія

Енергія падаючого фотона дорівнює $E_f = hf = hc/\lambda$, де ми використовуємо співвідношення $f\lambda = c$. Щоб отримати максимальну енергію викинутих електронів, ми використовуємо рівняння 1.16.

Розв'язок

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ еВ} \cdot \text{нм}}{430 \text{ нм}} = 2,88 \text{ еВ},$$
$$K_{\text{макс}} = E_f - \phi = 2,88 \text{ еВ} - 2,71 \text{ еВ} = 0,17 \text{ еВ}.$$

Обговорення

У цій експериментальній установці фотоелектрони припиняють потік при гальмівному потенціалі $0,17 \text{ В}$.

Перевірте своє розуміння 1.6

Жовте світло з довжиною хвилі 589 нм падає на поверхню, робота виходу якої становить $1,20 \text{ еВ}$. Чому дорівнює гальмівний потенціал? Чому дорівнює гранична довжина хвилі?

Перевірте своє розуміння 1.7

Гранична частота для фотоефекту в деяких матеріалах становить $8,0 \times 10^{13} \text{ Гц}$. Коли падаюче світло має частоту $1,2 \times 10^{14} \text{ Гц}$, гальмівний потенціал

вимірюється як $0,16 \text{ В}$. Оцініть значення постійної Планка за цими даними (в одиницях $\text{Дж} \cdot \text{с}$ і $\text{еВ} \cdot \text{с}$) і визначте відсоток похибки вашої оцінки.

Вправи до п. 1.2. Фотоелектричний ефект

1. Фотон має енергію 20 кеВ . Яка його частота і довжина хвилі?
2. Довжини хвиль видимого світла коливаються приблизно від 400 до 750 нм . Який відповідний діапазон енергій фотонів для видимого світла?
3. Яка найбільша довжина хвилі випромінювання може вибити фотоелектрон зі срібла? Це у видимому діапазоні?
4. Яка найбільша довжина хвилі випромінювання може вибити фотоелектрон з калію, враховуючи роботу виходу калію $2,24 \text{ еВ}$? Це у видимому діапазоні?
5. Оцініть енергію зв'язку електронів у магнії, враховуючи, що довжина хвилі 337 нм є найдовшою довжиною хвилі, яку може мати фотон, щоб вибити фотоелектрон із магнієвого фотоелектрода.
6. Робота виходу для калію становить $2,24 \text{ еВ}$. Яка гранична частота, коли цей метал використовується як фотоелектрод? Який гальмівний потенціал для випущених електронів, коли на цей фотоелектрод падає випромінювання з частотою 1200 ТГц ?
7. Оцініть роботу виходу алюмінію, враховуючи, що довжина хвилі 304 нм є найбільшою довжиною хвилі, яку може мати фотон, щоб вибити фотоелектрон з алюмінієвого фотоелектрода.
8. Яка максимальна кінетична енергія фотоелектронів, вибитих з натрію під дією падаючого випромінювання з довжиною хвилі 450 нм ?
9. 120-нм УФ-випромінювання освітлює посріблений електрод. Яка максимальна кінетична енергія вибитих фотоелектронів?
10. Фіолетове світло з довжиною хвилі 400 нм вибиває фотоелектрони з максимальною кінетичною енергією $0,860 \text{ еВ}$ з натрієвого фотоелектрода. Яка робота виходу натрію?
11. Світло з довжиною довжини 600 нм падає на фотоелектричну поверхню і вибиває електрони з максимальною кінетичною енергією $0,17 \text{ еВ}$. Визначте (а) роботу виходу та (б) граничну частоту поверхні. (в) Чому дорівнює потенціал гальмування, коли поверхня освітлюється світлом з довжиною хвилі 400 нм ?
12. Гранична довжина хвилі випромінювання фотоелектронів з поверхні становить 500 нм . Знайти максимальну кінетичну енергію вибитих фотоелектронів при освітленні поверхні світлом з довжиною хвилі 600 нм .
13. Знайдіть довжину хвилі випромінювання, яке може вибити електрони з енергією $2,00 \text{ еВ}$ із кальцієвого електрода. Робота виходу для кальцію становить $2,71 \text{ еВ}$. В якому діапазоні знаходиться це випромінювання?
14. Знайдіть довжину хвилі випромінювання, яке може вибити електрони з енергією $0,10 \text{ еВ}$ з калієвого електрода. Робота виходу для калію становить $2,24 \text{ еВ}$. В якому діапазоні знаходиться це випромінювання?
15. Знайти максимальну швидкість фотоелектронів, вибитих випромінюванням з довжиною хвилі 80 нм , якщо робота виходу фотоелектрода $4,73 \text{ еВ}$.

1.3. Ефект Комптона

Двома впливовими ідеями Ейнштейна, представленими в 1905 році, були теорія спеціальної теорії відносності та концепція кванта світла, який ми зараз називаємо фотоном. Після 1905 року Ейнштейн пішов далі, припустивши, що електромагнітні хвилі, що вільно поширюються, складаються з фотонів, які є частинками світла в тому ж сенсі, що електрони чи інші масивні частинки є частинками матерії. Промінь монохроматичного світла довжини хвилі λ (або еквівалентно частоти f) можна розглядати або як класичну хвилю, або як набір фотонів, які рухаються у вакуумі з однією швидкістю c (швидкість світла), і всі вони несуть однакову енергію, $E_f = hf$. Ця ідея виявилася корисною для пояснення взаємодії світла з частинками матерії.

Імпульс фотона

На відміну від частинки речовини, яка характеризується своєю масою спокою m_0 , фотон безмасовий. У вакуумі, на відміну від частинки матерії, яка може змінювати свою швидкість, але не може досягти швидкості світла, фотон рухається лише з однією швидкістю, яка точно відповідає швидкості світла. З точки зору класичної механіки Ньютона ці дві характеристики означають, що фотона взагалі не повинно існувати. Наприклад, як знайти лінійний імпульс або кінетичну енергію тіла, маса якого дорівнює нулю? Цей очевидний парадокс зникає, якщо ми описуємо фотон як релятивістську частинку. Відповідно до спеціальної теорії відносності, будь-яка частинка в природі підкоряється рівнянню релятивістської енергії:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (1.17)$$

Це співвідношення також можна застосувати до фотона. У рівнянні 1.17 E — повна енергія частинки, p — її лінійний імпульс, а m_0 є його масою спокою. Для фотона ми просто встановлюємо $m_0 = 0$ в цьому рівнянні. Це призводить до виразу для імпульсу p_f фотона:

$$p_f = \frac{E_f}{c}. \quad (1.18)$$

Тут енергія фотона E_f така же, як у кванта світла частоти f , який ми ввели для пояснення фотоефекту:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (1.19)$$

Хвильове співвідношення, яке пов'язує частоту f із довжиною хвилі λ і швидкість c також справедлива для фотонів:

$$\lambda f = c. \quad (1.20)$$

Отже, фотон можна еквівалентно охарактеризувати або його енергією та довжиною хвилі, або його частотою та імпульсом. Рівняння 1.19 і рівняння 1.20 можна об'єднати в явне співвідношення між імпульсом фотона та його довжиною хвилі:

$$p_f = \frac{h}{\lambda}. \quad (1.21)$$

Зауважте, що це рівняння дає нам лише величину імпульсу фотона і не містить інформації про напрямок, у якому рухається фотон. Щоб включити напрямок, прийнято записувати імпульс фотона у вигляді вектора:

$$\vec{p}_f = \hbar \vec{k}. \quad (1.22)$$

У рівнянні 1.22 $\hbar = h/2\pi$ – це **скорочена стала Планка** (вимовляється як «*h-bar*»), яка є просто постійною Планка, поділеною на коефіцієнт 2π . Вектор $\vec{k}$ називають «хвильовим вектором» або вектором поширення (напрямок, у якому рухається фотон). Вектор **поширення** показує напрям вектора лінійного імпульсу фотона. Величина хвильового вектора становить $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ і називається **хвильовим числом**. Зауважте, що це рівняння не вводить жодної нової фізики. Ми можемо перевірити, що величина вектора в рівнянні 1.22 є такою ж, як задана в рівнянні 1.18.

Ефект Комптона

Ефект **Комптона** — це термін, який використовується для позначення незвичайного результату, який спостерігається при розсіюванні рентгенівських променів на деяких матеріалах. Відповідно до класичної теорії, коли електромагнітна хвиля розсіюється на атомах, очікується, що довжина хвилі розсіяного випромінювання буде такою ж, як і довжина хвилі падаючого випромінювання. На відміну від цього передбачення класичної фізики, спостереження показують, що коли рентгенівське випромінювання розсіюється на деяких матеріалах, таких як графіт, довжина хвилі розсіяного рентгенівського випромінювання відрізняється від довжини хвилі падаючого рентгенівського випромінювання. Це класично незрозуміле явище експериментально досліджував Артур Х. Комптон і його співробітники, і Комптон дав його пояснення в 1923 році.

Щоб пояснити зміщення довжин хвиль, виміряних під час експерименту, Комптон використав ідею Ейнштейна про світло як частинку. Ефект Комптона займає дуже важливе місце в історії фізики, оскільки він показує, що електромагнітне випромінювання не можна пояснити як суто хвильове явище. Пояснення ефекту Комптона дало переконливий аргумент для спільноти фізиків про те, що електромагнітні хвилі справді можуть поводитися як потік фотонів, що поставило концепцію фотона на тверду основу.

Схема експериментальної установки Комптона показана на рис. 1.11.

Ідея експерименту проста: монохроматичне рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі λ падає на зразок графіту («мішень»), де воно взаємодіє з атомами всередині зразка; пізніше воно з'являється як розсіяні рентгенівські промені з довжиною хвилі λ' . Детектор, розміщений позаду мішені, може вимірювати інтенсивність випромінювання, розсіяного в будь-якому напрямку θ по відношенню до напрямку падаючого рентгенівського променя. Цей **кут розсіювання** θ – кут між напрямком розсіяного променя та напрямком падаючого променя.

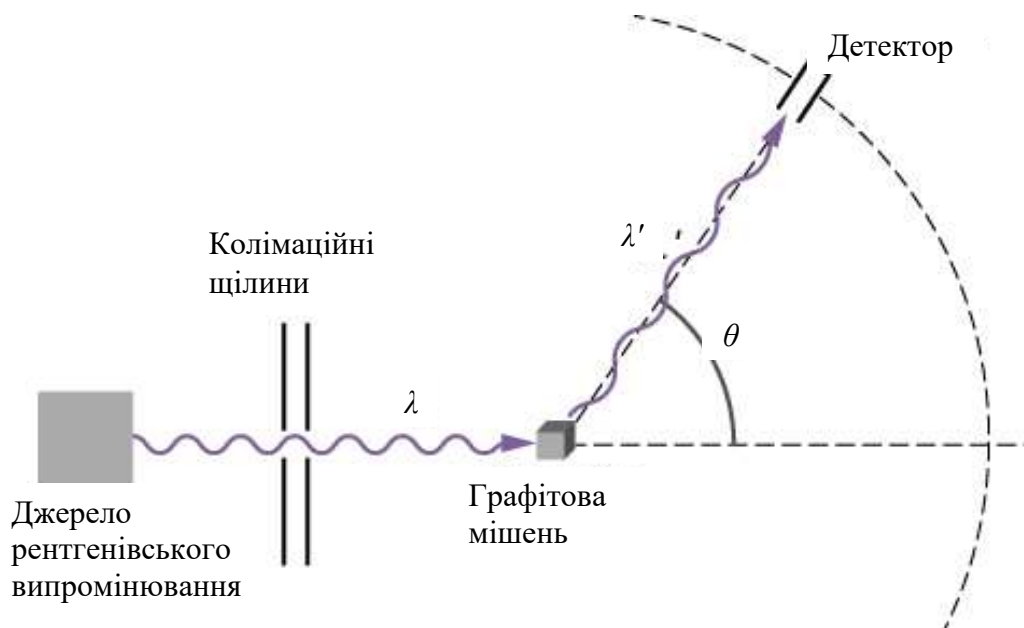


Рис. 1.11. Експериментальна установка для дослідження комптонівського розсіювання

У цьому експерименті ми знаємо інтенсивність і довжину хвилі λ вхідного (падаючого) променя; і для заданого кута розсіювання θ , ми вимірюємо інтенсивність і довжину хвилі λ' вихідного (розсіяного) променя.

Типові результати цих вимірювань показано на рис. 1.12, де на осі абсцис – довжина хвилі розсіяного рентгенівського випромінювання, а на осі у – інтенсивність розсіяного рентгенівського випромінювання, виміряна для різних кутів розсіювання (вказано на графіках).

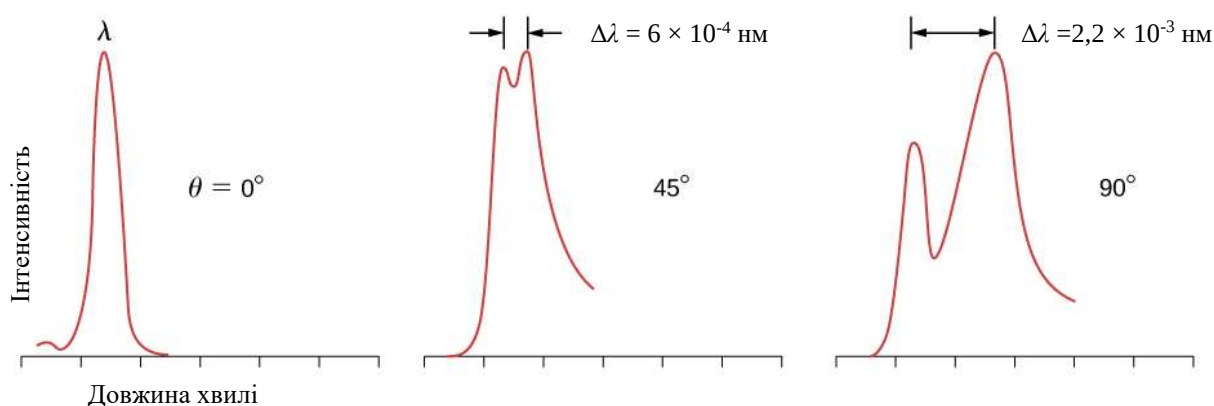


Рис. 1.12. Експериментальні дані показують ефект Комптона для рентгенівського випромінювання, що розсіюється на графіті під різними кутами: інтенсивність розсіяного пучка має два піки. На осі довжин хвиль з'являється один пік λ падаючого випромінювання, а другий пік з'являється на довжині хвилі λ' . Різниця $\Delta\lambda$ між піками залежить від кута розсіювання θ , що є кутовим положенням детектора на рис. 1.11. Експериментальні дані на цьому малюнку нанесені в довільних одиницях так, щоб висота профілю відображала інтенсивність розсіяного променя над фоновим шумом

Для всіх кутів розсіювання (крім $\theta = 0$), ми вимірюємо два піки інтенсивності. Один пік розташований на довжині хвилі λ , яка є довжиною хвилі падаючого променя. Інший пік розташований на іншій довжині хвилі, λ' . Два піки

розділені $\Delta\lambda$, що залежить від кута розсіювання θ і вихідного променя (у напрямку спостереження). Різницю $\Delta\lambda$ називають **зміщенням Комптона**.

Зміщення Комптона

Згідно Комптона, пояснення комптонівського зміщення полягає в тому, що в матеріалі мішені, графіті, валентні електрони слабо зв'язані в атомах і поведуться як вільні електрони. Комптон припустив, що падаюче рентгенівське випромінювання є потоком фотонів. Вхідний фотон у цьому потоці стикається з валентним електроном у графітовій мішені. Під час цього зіткнення вхідний фотон передає деяку частину своєї енергії та імпульсу електрону мішені та залишає її як розсіяний фотон. Ця модель якісно пояснює, чому розсіяне випромінювання має більшу довжину хвилі, ніж падаюче випромінювання. Простіше кажучи, фотон, який втратив частину своєї енергії, стає фотоном з нижчою частотою або, що еквівалентно, з більшою довжиною хвилі. Щоб показати, що його модель правильна, Комптон використовував її для виведення виразу для комптонівського зсуву. У своєму висновку він припустив, що і фотон, і електрон є релятивістськими частинками і що зіткнення підкоряється двом принципам: (1) збереження лінійного імпульсу та (2) збереження повної релятивістської енергії.

У наступному виведенні комптонівський зсув E_f і $\vec{p}_f$ позначають відповідно енергію та імпульс падаючого фотона з частотою f . Фотон стикається з релятивістським електроном у спокої, що означає, що безпосередньо перед зіткненням енергія електрона повністю дорівнює його енергії спокою, m_0c^2 . Відразу після зіткнення електрон має енергію E та імпульс $\vec{p}$, які задовольняють рівняння 1.19. Відразу після зіткнення фотон, що вилітає, має енергію $\tilde{E}_f$, імпульс $\vec{\tilde{p}}_f$, і частоту f' . Напрямок падаючого фотона горизонтальний зліва направо, а напрям фотона, що виходить, — під кутом θ , як показано на рис. 1.11. Кут розсіювання θ – кут між векторами імпульсу $\vec{p}$ і $\vec{\tilde{p}}_f$, і ми можемо записати їх скалярний добуток:

$$\vec{p}_f \cdot \vec{\tilde{p}}_f = p_f \tilde{p}_f \cos \theta. \quad (1.23)$$

Слідуючи аргументу Комптона, ми припускаємо, що фотон і електрон, що стикаються, утворюють ізольовану систему. Це припущення справедливе для слабкозв'язаних електронів, які в хорошому наближенні можна розглядати як вільні частинки. Наше перше рівняння – це рівняння збереження енергії для системи фотон-електрон:

$$E_f + m_0c^2 = \tilde{E}_f + E. \quad (1.24)$$

Ліва частина рівняння – це енергія системи в момент безпосередньо перед зіткненням, а права частина рівняння – це енергія системи в момент безпосередньо після зіткнення. Наше друге рівняння — це збереження лінійного імпульсу для системи фотон–електрон, де електрон перебуває в спокої в момент безпосередньо перед зіткненням:

$$\vec{p}_f = \vec{\tilde{p}}_f + \vec{p}. \quad (1.25)$$

Ліва частина цього рівняння – це імпульс системи безпосередньо перед зіткненням, а права частина рівняння – імпульс системи безпосередньо після зіткнення. Уся фізика комптонівського розсіювання міститься в цих трьох попередніх рівняннях – інша частина – алгебра. На цьому етапі ми могли б перейти до заключної формули для зсуву Комптона, але було б корисно висвітлити основні алгебраїчні кроки, які ведуть до формули Комптона, яку ми наводимо тут наступним чином.

Ми починаємо з переставляння членів у рівнянні 1.24 і зведення його в квадрат:

$$[(E_f - \tilde{E}_f) + m_0 c^2]^2 = E^2.$$

На наступному кроці ми замінюємо рівняння 1.19 на E^2 , ділимо обидві сторони на c^2 та отримуємо:

$$(E_f/c - \tilde{E}_f/c)^2 + 2m_0 c(E_f/c - \tilde{E}_f/c) = p^2.$$

Тепер ми можемо використати рівняння 1.21, щоб виразити цю форму рівняння енергії через імпульси. Результатом є:

$$(p_f - \tilde{p}_f)^2 + 2m_0 c(p_f - \tilde{p}_f) = p^2. \quad (1.26)$$

Щоб усунути p^2 , ми звернемося до рівняння імпульсу (рівняння 1.25), переставимо його члени та піднесемо до квадрата, щоб отримати:

$$(\vec{p}_f - \vec{\tilde{p}}_f)^2 = p^2.$$

$$(\vec{p}_f - \vec{\tilde{p}}_f)^2 = p_f^2 + \tilde{p}_f^2 - 2\vec{p}_f \cdot \vec{\tilde{p}}_f.$$

Добуток векторів імпульсу визначається рівнянням 1.23. Коли ми підставляємо цей результат замість p^2 у рівнянні 1.26 ми отримуємо рівняння енергії, яке містить кут розсіювання θ :

$$(p_f - \tilde{p}_f)^2 + 2m_0 c(p_f - \tilde{p}_f) = p_f^2 + \tilde{p}_f^2 - 2p_f \tilde{p}_f \cos \theta.$$

За допомогою подальшої алгебри цей результат можна спростити до виразу:

$$\frac{1}{\tilde{p}_f} - \frac{1}{p_f} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (1.27)$$

Тепер пригадайте рівняння 1.21 і запишіть:

$$\frac{1}{\tilde{p}_f} = \frac{\lambda'}{h},$$

$$\frac{1}{p_f} = \frac{\lambda}{h}.$$

Коли ці співвідношення підставляються в рівняння 1.27, ми отримуємо співвідношення для комптонівського зсуву:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (1.28)$$

Коефіцієнт $h/(m_0 c)$ називають **комтонівською довжиною хвилі** електрона:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0,00243 \text{ нм} = 2,43 \text{ пм}. \quad (1.29)$$

Позначаючи зсув як $\Delta \lambda = \lambda' - \lambda$, кінцевий результат можна переписати так:

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta). \quad (1.30)$$

Ця формула для комптонівського зсуву надзвичайно добре описує експериментальні результати, показані на рис. 1.12. Дані розсіювання, виміряні для молібдену, графіту, кальциту та багатьох інших матеріалів-мішеней, узгоджуються з цим теоретичним результатом. Незміщений пік, показаний на рис. 1.12, є результатом зіткнень фотонів із міцно зв'язаними внутрішніми електронами в матеріалі мішені. Фотони, які стикаються з внутрішніми електронами атомів, насправді стикаються з усім атомом. У цьому крайньому випадку масу спокою в рівнянні 1.29 потрібно змінити на масу спокою атома. Цей тип зсуву на чотири порядки менший, ніж зсув, викликаний зіткненнями з валентними електронами, і настільки малий, що ним можна знехтувати.

Комптонівське розсіювання є прикладом **непружного розсіювання**, при якому розсіяне випромінювання має більшу довжину хвилі, ніж довжина хвилі падаючого випромінювання. У сьогодинському вживанні термін «комптонівське розсіювання» використовується для neprужного розсіювання фотонів вільними зарядженими частинками. У комптонівському розсіюванні розгляд фотонів як частинок з імпульсами, які можуть бути передані зарядженим частинкам, забезпечує теоретичну базу для пояснення зсувів довжини хвилі, виміряних в експериментах; це доказ того, що випромінювання складається з фотонів.

Приклад 1.8. Комптонівське розсіювання

Рентгенівське випромінювання з частотою 71 пм падає на кальцитову мішень. Знайдіть довжину хвилі рентгенівського випромінювання, розсіяного на кут $\theta = 30^\circ$. Який найбільший зсув можна очікувати в цьому експерименті?

Стратегія

Щоб знайти довжину хвилі розсіяного рентгенівського випромінювання, спочатку ми повинні знайти комптонівський зсув для заданого кута розсіювання, $\theta = 30^\circ$. Ми використовуємо рівняння 1.30. Потім ми додаємо цей зсув до довжини хвилі падіння, щоб отримати довжину розсіяної хвилі. Найбільший комптонівський зсув відбувається під кутом θ коли $1 - \cos \theta$ має найбільше значення, яке є для кута $\theta = 180^\circ$.

Розв'язок

Зміна довжини хвилі при $\theta = 30^\circ$ є

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos 30^\circ) = 0,134\lambda_c = (0,134)(2,43)\text{пм} = 0,325 \text{ пм}.$$

Це дає розсіяну довжину хвилі:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = (71 + 0,325) = 71,325 \text{ пм}.$$

Найбільший зсув є

$$(\Delta\lambda)_{\text{макс}} = \lambda_c(1 - \cos 180^\circ) = 2(2,43\text{пм}) = 4,86\text{пм}.$$

Обговорення

Найбільший зсув довжини хвилі виявляється для зворотного розсіяного випромінювання; однак більшість фотонів від падаючого променя проходить

через мішень, і лише невелика частка фотонів розсіюється назад (як правило, менше 5%). Тому для цих вимірювань потрібні високочутливі детектори.

Перевірте своє розуміння 1.8

Рентгенівське випромінювання з частотою 71 пм падає на кальцитову мішень. Знайдіть довжину хвилі рентгенівського випромінювання, розсіяного на кут $\theta = 60^\circ$. Який найменший зсув можна очікувати в цьому експерименті?

Вправи до п. 1.3. Ефект Комптона

1. Який імпульс має “жовтий” фотон, довжина хвилі якого 589 нм ?
2. Який імпульс має фотон, довжина хвилі якого 4 см ?
3. Який діапазон імпульсів можуть мати фотони в пучку білого світла (довжина хвилі від 400 до 750 нм)?
4. Яка енергія фотона, імпульс якого становить $3,0 \times 10^{-24}\text{ кг} \cdot \text{м/с}$?
5. Яка довжина хвилі (а) рентгенівського фотона з енергією 12 кеВ ; (б) $2,0\text{ МеВ}$ фотона γ -променя?
6. Знайдіть імпульс і енергію фотона, довжина хвилі якого $1,0\text{ \AA}$.
7. Знайти довжину хвилі та енергію фотона з імпульсом $5,00 \times 10^{-29}\text{ кг} \cdot \text{м/с}$.
8. γ -фотон має імпульс $8,00 \times 10^{-21}\text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Знайдіть його довжину хвилі та енергію.
9. (а) Обчисліть імпульс фотона, довжина хвилі якого $2,5\text{ мкм}$. (б) Знайдіть швидкість електрона з таким самим імпульсом. (в) Яка кінетична енергія електрона і як вона порівнюється з енергією фотона?
10. Покажіть, що $p = h/\lambda$ і $E_f = hf$ узгоджуються з релятивістською формулою $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$.
11. Покажіть, що енергія E фотона в еВ визначається так:

$$E = 1,241 \times 10^{-6} \text{ еВ} \cdot \text{м}/\lambda,$$

де λ – його довжина хвилі в метрах.

12. Порівняйте комптонівський зсув фотона, розсіяного на вільних електронах на кут 30° до фотона, розсіяного на 45° .
13. Рентгенівські промені з довжиною хвилі $12,5\text{ пм}$ розсіюються блоком вуглецю. Яка довжина хвилі фотонів, розсіяних на (а) 30° ; (б) 90° ; і (в) 180° ?

1.4. Модель атома водню Бора

Історично модель атома водню Бора є першою моделлю будови атома, яка правильно пояснила спектр випромінювання атомарного водню. Модель займає особливе місце в історії фізики, оскільки вона започаткувала ранню квантову теорію, яка спричинила нові розробки в науковій думці та згодом завершилася розвитком квантової механіки. Щоб зрозуміти специфіку моделі Бора, ми повинні спочатку переглянути відкриття дев'ятнадцятого століття, які спонукали до її формулювання.

Коли ми використовуємо призму для аналізу білого світла, що надходить від Сонця, у сонячному спектрі спостерігається кілька темних ліній (рис. 1.13).

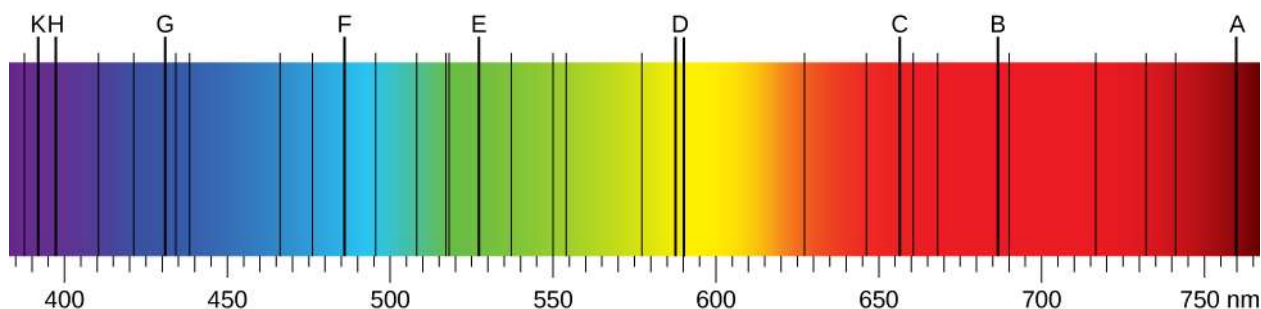


Рис. 1.13. У спектрі сонячного випромінювання у видимому діапазоні від 380 нм до 710 нм лінії Фраунгера спостерігаються як вертикальні чорні лінії в певних спектральних положеннях у безперервному спектрі. Високочутливі сучасні прилади спостерігають тисячі таких ліній

Лінії сонячного поглинання називаються **лініями Фраунгера** на честь Йозефа фон Фраунгера, який точно виміряв їхні довжини хвиль. Протягом 1854–1861 років Густав Кірхгоф і Роберт Бунзен виявили, що для різних хімічних елементів лінійчатий **спектр випромінювання** елемента точно відповідає його лінійчатому **спектру поглинання**. Різниця між спектром поглинання та спектром випромінювання пояснюється на рис. 1.14.

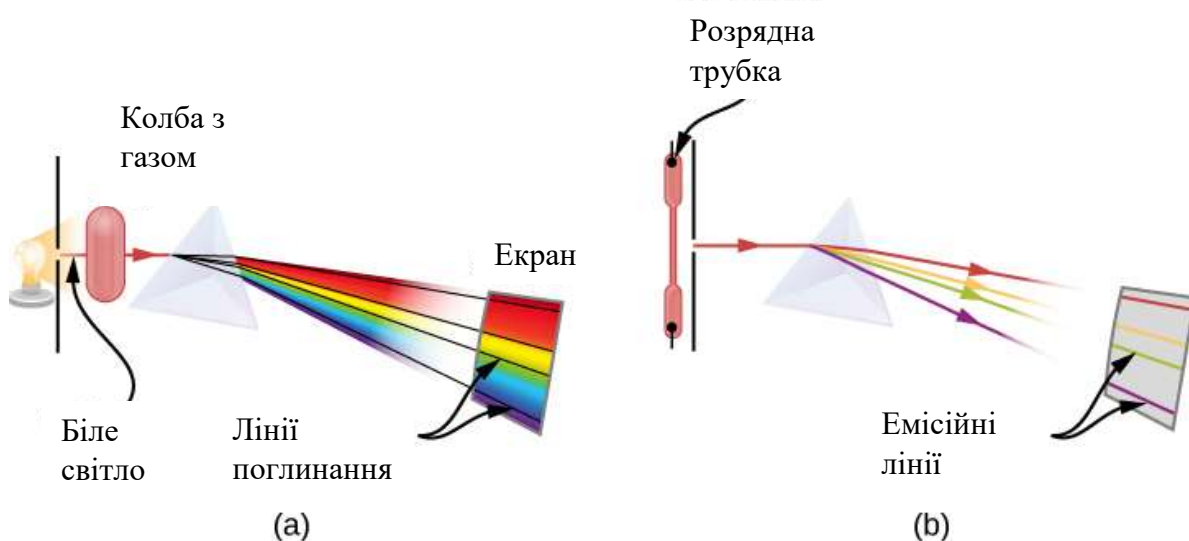


Рис. 1.14. Спостереження лінійчатих спектрів: (а) установка для спостереження ліній поглинання; (б) установка для спостереження за лініями випромінювання. (а) Біле світло проходить через холодний газ, який міститься в скляній колбі. Для розділення довжин хвиль світла, що проходить через холодний газ, використовується призма. У спектрі пропущеного світла відсутні деякі довжини хвиль, які видно як чорні лінії поглинання в безперервному спектрі на екрані. (б) Газ міститься в скляній газорозрядній трубці, на кінцях якої є електроди. При високій різниці потенціалів між електродами газ світиться, і світло, випромінюване газом, проходить через призму, яка розділяє його довжини хвиль. У спектрі випромінюваного світла присутні лише певні довжини хвиль, які видно на екрані як кольорові лінії випромінювання

При проходженні світла через газ спостерігається спектр поглинання. Цей спектр виглядає як чорні лінії, які виникають лише на певних довжинах хвиль на фоні суцільного спектру білого світла (рис. 1.13). Відсутні довжини хвилі говорять нам, які довжини хвиль випромінювання поглинаються газом.

Спектр випромінювання спостерігається, коли світло випромінюється газом. Цей спектр видно як різнокольорові лінії на чорному тлі (див. рис. 1.15 і рис. 1.16).

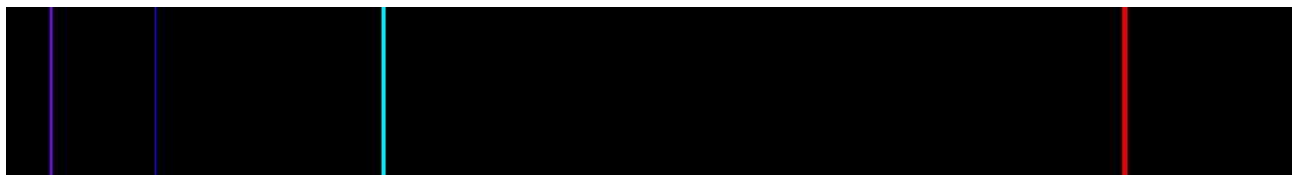


Рис. 1.15. Спектр випромінювання атомарного водню: спектральні положення ліній випромінювання характерні для атомів водню

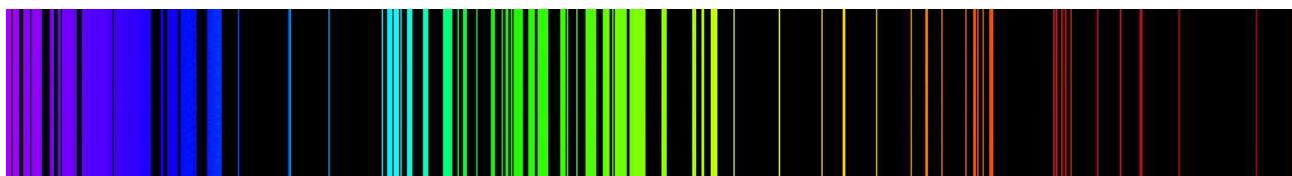


Рис. 1.16. Спектр випромінювання атомарного заліза: спектральні положення ліній випромінювання характерні для атомів заліза

Положення ліній випромінювання вказує нам, яку довжину хвилі випромінює газ. Кожен хімічний елемент має свій характерний спектр випромінювання. Для кожного елемента положення його ліній випромінювання точно збігаються з положеннями його ліній поглинання. Це означає, що атоми певного елемента поглинають випромінювання лише на певних довжинах хвиль, а випромінювання, яке не має цих довжин хвиль, не поглинається елементом взагалі. Це також означає, що випромінювання, яке випромінюють атоми кожного елемента, має точно такі самі довжини хвиль, як випромінювання, яке вони поглинають.

Спостерігаючи за спектрами світла зірок і застосовуючи додаткові знання та обчислення, астрономи можуть визначити склад об'єктів, віддалених на мільйони світлових років. У 1920-х роках Сесілія Пейн-Гапошкін провела ретельний аналіз колекції зоряних спектрів, яку збрала астроном Енні Джамп Кеннон. До цього моменту багато дослідників вважали, що зірки, зокрема Сонце, складаються з елементів, подібних до Землі, частково на основі спектрального аналізу. Але Пейн-Гапошкін знала, що індійський фізик Мегнад Саха розробив метод розрахунку іонізації зірок, щоб отримати точне вимірювання температури зірок. Застосувавши рівняння Саха до наявних даних, Пейн-Гапошкін опублікувала монументальну статтю, яка продемонструвала, що зірки складаються здебільшого з водню та гелію, і що водень є найпоширенішим елементом у Всесвіті. Спочатку її роботу відхилили, але незабаром було доведено, що вона правдива.

Спектри випромінювання елементів мають складну структуру; вони стають ще складнішими для елементів з вищими атомними номерами. Найпростіший спектр, зображений на рис. 1.15, належить атому водню. Тільки чотири лінії видно людському оку. Якщо ви читаєте справа наліво на рис. 1.15, ці лінії: червона (656 нм), називається Н- α лінія; морська (486 нм), синя (434 нм) і фіолетова (410 нм). Лінії з довжиною хвилі менше 400 нм з'являються в ультрафіолетовій частині спектру (рис. 1.15, крайній ліворуч) і невидимі для людського ока. Невидимих спектральних ліній у ряду для водню нескінченно багато.

Емпірична формула для опису позицій (довжин хвиль) λ -лінії випромінювання водню в цій серії була відкрита в 1885 році Йоганном Бальмером. Вона відома як **формула Бальмера**:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (1.31)$$

Константу $R_H = 1,09737 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$ називають постійною Рідберга для водню. У рівнянні 1.31 натуральне число n приймає значення $n = 3, 4, 5, 6$ для чотирьох видимих ліній у цій серії. Ряд емісійних ліній, заданий формулою Бальмера, називають рядом Бальмера для водню. Інші лінії випромінювання водню, відкриті в двадцятому столітті, описують **формулою Рідберга**, яка узагальнює всі експериментальні дані:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (1.32)$$

де $n_i = n_f + 1, n_f + 2, n_f + 3, \dots$

Коли $n_f = 1$, серію спектральних ліній називають **серією Лаймана**. Коли $n_f = 2$, ряд називають **серією Бальмера**, і в цьому випадку формула Рідберга збігається з формулою Бальмера. Коли $n_f = 3$, серію називають **серією Пашена**. Коли $n_f = 4$, серію називають **серією Бреккетта**. Коли $n_f = 5$, серію називають **серією Пфунда**. Коли $n_f = 6$, серію називають **серією Хемфрі**. Як ви можете здогадатися, таких спектральних смуг у спектрі водню нескінченно багато, оскільки n_f може бути будь-яким додатним цілим числом.

Формула Рідберга для водню дає точне положення спектральних ліній, які спостерігаються в лабораторії; однак на початку двадцятого століття ніхто не міг пояснити, чому це так добре працює. Формула Рідберга залишалася непоясненою, поки в 1913 році не була запропонована перша успішна модель атома водню.

Приклад 1.9. Межі серії Бальмера

Обчисліть найдовшу та найкоротшу довжину хвилі в серії Бальмера.

Стратегія

Ми можемо використовувати або формулу Бальмера, або формулу Рідберга. Найбільша довжина хвилі виходить, коли $1/n_i$ є найбільшим, тобто коли $n_i = n_f + 1 = 3$, тому що $n_f = 2$ для серії Бальмера. Найменша довжина хвилі виходить, коли $1/n_i$ є найменшим, тобто $1/n_i \rightarrow 0$ коли $n_i \rightarrow \infty$.

Розв'язок

Довгохвильова межа:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = (1,09737 \times 10^7) \frac{1}{\text{м}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda = 656,3 \text{ нм.}$$

Короткохвильова межа:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - 0 \right) = (1,09737 \times 10^7) \frac{1}{\text{м}} \left(\frac{1}{4} \right) \Rightarrow \lambda = 364,6 \text{ нм.}$$

Обговорення

Зверніть увагу, що між цими двома межами лежить нескінченна кількість спектральних ліній.

Перевірте своє розуміння 1.9

Які межі серії Лаймана? Ви бачите ці спектральні лінії?

Ключ до розкриття таємниці атомних спектрів полягає в розумінні атомної структури. Вчені давно знають, що речовина складається з атомів. Відповідно до науки дев'ятнадцятого століття, атоми є найменшими неподільними кількостями матерії. Це наукове переконання було зруйновано серією новаторських експериментів, які довели існування субатомних частинок, таких як електрони, протони та нейтрони.

Електрон був виявлений і визначений як найменша величина електричного заряду Дж. Дж. Томсоном у 1897 році в його експериментах з катодним променем, також відомих як експерименти з β -променями: **β -промінь** – це пучок електронів. У 1904 році Томсон запропонував першу модель атомної структури, відому як модель «сливового пудингу», у якій атом складався з невідомої позитивно зарядженої речовини з негативними електронами, вбудованими в нього, як сливи в пудинг. Близько 1900 року Е. Резерфорд і незалежно від нього Пол Ульріх Віллар класифікували все випромінювання, відоме на той час, як **α -промені, β -промені та γ -промені** (γ -промінь – це пучок фотонів високої енергії). У 1907 році Резерфорд і Томас Ройдс використали методи спектроскопії, щоб показати, що позитивно заряджені частинки α -випромінювання (назва **α -частинки**) фактично є подвійно іонізованими атомами гелію. У 1909 році Резерфорд, Ернест Марсден і Ганс Гейгер використовували α -частинки у їх знаменитому експерименті з розсіювання, який спростував модель Томсона.

В експерименті із золотою фольгою Резерфорда (також відомому як експеримент Гейгера-Марсдена) α -частинки падали на тонку золоту фольгу і розсіювалися атомами золота всередині фольги. Частинки, які вилітали, реєструвалися 360 сцинтиляційним екраном навколо золотої мішені. Коли розсіяна частинка влучала в екран, у цьому місці спостерігався крихітний спалах світла (сцинтиляція). Підраховуючи мерехтіння, які спостерігаються під різними кутами відносно напрямку падаючого променя, вчені могли визначити, яка частка падаючих частинок була розсіяна, а яка взагалі не відхилялася. Якби модель сливового пудингу була правильною, не було б зворотного розсіювання

α -частинки. Однак результати експерименту Резерфорда показали, що, хоча значна частка α -частинок, що вийшли з фольги, зовсім не розсіяні, ніби фольга не була на їхньому шляху, значна частка α -частинок (10^{-4}) були розсіяні назад до джерела. Такий результат був можливий лише тоді, коли більша частина маси та весь позитивний заряд атома золота були зосереджені в крихітному просторі всередині атома.

У 1911 році Резерфорд запропонував **ядерну модель атома**. У моделі Резерфорда атом містив позитивно заряджене ядро незначного розміру, майже як точка, але включав майже всю масу атома. Атом також містив негативні електрони, які були розташовані всередині атома, але відносно далеко від ядра. Через десять років Резерфорд ввів назву *протон* для ядра водню та назву *нейтрон* для гіпотетичної електрично нейтральної частинки, яка буде опосередковувати зв'язування позитивних протонів у ядрі (нейтрон був відкритий у 1932 році Джеймсом Чедвіком). Резерфорду приписують відкриття атомного ядра; однак модель атомної структури Резерфорда не пояснює формулу Рідберга для ліній випромінювання водню.

Модель атома водню Бора, запропонована Нільсом Бором у 1913 році, була першою квантовою моделлю, яка правильно пояснила спектр випромінювання водню. Модель Бора поєднує класичну механіку руху планет із квантовою концепцією фотонів. Як тільки Резерфорд встановив існування атомного ядра, інтуїція Бора про те, що негативний електрон в атомі водню повинен обертатися навколо позитивного ядра, стала логічним наслідком закону електростатичного притягання, оберненого до квадрата відстані. Згадайте, що закон Кулона, який описує притягання між двома протилежними зарядами, має форму, подібну до універсального закону тяжіння Ньютона в тому сенсі, що як гравітаційна, так і електростатична сила зменшуються як $1/r^2$, де r – відстань між тілами. Так само, як Земля обертається навколо Сонця, негативний електрон в атомі водню може обертатися навколо позитивного ядра. Однак заряд, що прискорюється, випромінює свою енергію. Класично, якби електрон рухався навколо ядра планетарним способом, він зазнав би доцентрового прискорення і, таким чином, випромінював би енергію, яка змусила б його спіралью обертатися і наближатися до ядра. Такий планетарний атом водню не був би стабільним, що суперечить тому, що ми знаємо про звичайні атоми водню, які не розпадаються. Крім того, класичний рух електрона не в змозі пояснити дискретний спектр випромінювання водню. Щоб обійти ці дві труднощі, Бор запропонував наступні **три постулати моделі Бора**:

1. Негативний електрон рухається навколо позитивного ядра (протона) по круговій орбіті. Усі електронні орбіти зосереджені навколо ядра. Не всі класично можливі орбіти доступні для електрона, зв'язаного з ядром.

2. Дозволені орбіти електронів задовольняють *першу умову квантування*: на n -й орбіті кутовий момент L_n електрона може приймати лише дискретні значення:

$$L_n = n\hbar, \quad (1.33)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

Цей постулат говорить про те, що момент імпульсу електрона є квантованим. Позначається r_n і v_n , відповідно, радіус n -ї орбіти та швидкість електрона на ній, перша умова квантування може бути виражена явно так:

$$m_e v_n r_n = n \hbar. \quad (1.34)$$

3. Електрону дозволено здійснювати переходи з однієї орбіти, де його енергія E_n , на іншу орбіту, де його енергія E_m . Коли атом поглинає фотон, електрон здійснює перехід на орбіту з більшою енергією. Коли атом випускає фотон, електрон переходить на орбіту з меншою енергією. Електронні переходи з одночасним поглинанням або випусканням фотона відбуваються *миттєво*. Дозволені електронні переходи задовольняють *другу умову квантування*:

$$hf = |E_n - E_m|, \quad (1.35)$$

де hf – це енергія випромінюваного або поглиненого фотона з частотою f . Друга умова квантування стверджує, що зміна енергії електрона в атомі водню є квантованою.

Ці три постулати ранньої квантової теорії атома водню дозволяють нам вивести не тільки формулу Рідберга, але також значення постійної Рідберга та інші важливі властивості атома водню, такі як його рівні енергії, його енергія іонізації та розміри електронних орбіт. Зверніть увагу, що в моделі Бора, поряд з двома неklasичними постулатами квантування, ми також маємо класичний опис електрона як частинки, що піддається кулонівській силі, і її рух повинен підкорятися законам руху Ньютона. Атом водню, як ізольована система, повинен підкорятися законам збереження енергії та імпульсу, як це відомо з класичної фізики. Маючи на увазі цю теоретичну основу, ми готові продовжити наш аналіз.

Орбіти електронів

Для отримання розміру r_n n -ї орбіти електрона та швидкості електрона v_n в ньому ми звертаємося до механіки Ньютона. Як заряджена частинка, електрон відчуває електростатичне тяжіння до позитивно зарядженого ядра в центрі своєї кругової орбіти. Це електростатичне тяжіння є доцентровою силою, яка змушує електрон рухатися по колу навколо ядра. Отже, величина доцентрової сили ототожнюється з величиною електростатичної сили:

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}. \quad (1.36)$$

Тут e позначає значення елементарного заряду. Негативний електрон і позитивний протон мають однакове значення заряду, $|q| = e$. Коли рівняння 1.36 поєднується з першою умовою квантування, заданою рівнянням 1.34, ми можемо знайти швидкість v_n і радіус r_n :

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n}, \quad (1.37)$$

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2. \quad (1.38)$$

Зверніть увагу, що ці результати говорять нам про те, що швидкість електрона, а також радіус його орбіти залежать лише від індексу n , який нумерує орбіту, оскільки всі інші величини в попередніх рівняннях є фундаментальними

константами. З рівняння 1.38 ми бачимо, що розмір орбіти зростає як квадрат n . Це означає, що друга орбіта в чотири рази більша за першу, а третя в дев'ять разів більша за першу і так далі. Ми також бачимо з рівняння 1.37, що швидкість електрона на орбіті зменшується зі збільшенням розміру орбіти. Швидкість електрона найбільша на першій орбіті Бора, для $n = 1$, яка є найближчою до ядра орбітою. Радіус першої борівської орбіти називають **борівським радіусом водню** і позначають як a_0 . Його значення отримують установкою $n = 1$ у рівнянні 1.38:

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ м} = 0,529 \text{ \AA}. \quad (1.39)$$

Можемо замінити a_0 у рівнянні 1.38, щоб виразити радіус n -ї орбіти через a_0 :

$$r_n = a_0 n^2. \quad (1.40)$$

Цей результат означає, що орбіти електронів в атомі водню *квантовані*, оскільки радіус орбіти приймає лише певні значення $a_0, 4a_0, 9a_0, 16a_0, \dots$ заданими рівнянням 1.40, інші значення не допускаються.

Енергія електронів

Загальна енергія E_n електрона на n -й орбіті є сумою його кінетичної енергії K_n і його електростатичної потенціальної енергії U_n . Використовуючи рівняння 1.37, ми знаходимо, що:

$$K_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1.41)$$

Нагадаємо, що електростатична потенційна енергія взаємодії двох зарядів q_1 і q_2 які розділені відстанню r_{12} є $(1/4\pi\epsilon_0)q_1q_2/r_{12}$. Тут, $q_1 = +e$, заряд ядра в атомі водню (заряд протона), $q_2 = -e$ є заряд електрона і $r_{12} = r_n$ – радіус n -ї орбіти. Тепер ми використовуємо рівняння 1.38, щоб знайти потенціальну енергію електрона:

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1.42)$$

Повна енергія електрона є сумою рівнянь 1.41 і 1.42:

$$E_n = K_n + U_n = -\frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1.43)$$

Зауважте, що енергія залежить лише від індексу n , оскільки решта символів у рівнянні 1.43 є фізичними константами. Значення постійного фактора в рівнянні 1.43 дорівнює:

$$E_0 = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{1}{8\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{h^2} = 2,17 \times 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ еВ}. \quad (1.44)$$

Енергію електрона на n -й орбіті зручно виразити через цю енергію, як

$$E_n = -E_0 \frac{1}{n^2}. \quad (1.45)$$

Тепер ми бачимо, що енергії електронів в атомі водню *квантовані*, оскільки вони можуть мати лише дискретні значення $-E_0, -E_0/4, -E_0/9, -E_0/16, \dots$ задані рівнянням 1.45, і ніякі інші значення енергії не допускаються. Цей набір дозволених енергій електронів називають **енергетичним спектром водню** (рис. 1.17).

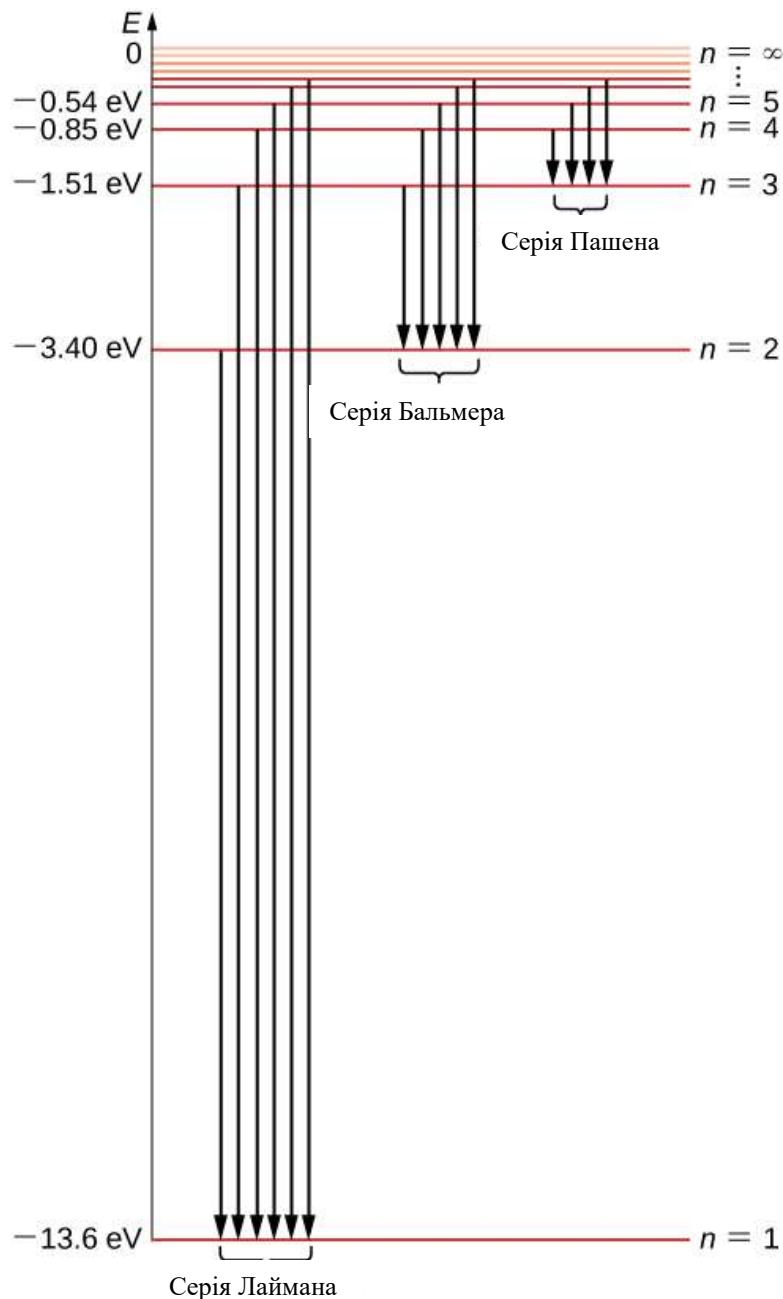


Рис. 1.17. Енергетичний спектр атома водню. Рівні енергії (горизонтальні лінії) представляють зв'язані стани електрона в атомі. Є лише один основний стан, $n = 1$, і нескінченні квантовані збуджені стани. Стани нумеруються квантовим числом $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Вертикальні лінії ілюструють дозволені електронні переходи між станами. Стрілки вниз ілюструють переходи з випромінюванням фотона з довжиною хвилі у вказаній спектральній смузі

Індекс n , який перераховує енергетичні рівні в моделі Бора, називають енергетичним **квантовим числом**.

Ми ототожнюємо енергію електрона всередині атома водню з енергією атома водню. Зверніть увагу, що найменше значення енергії отримано для $n = 1$, тому атом водню не може мати меншу за цю енергію. Це найменше значення енергії електрона в атомі водню називають **енергією основного стану атома водню**, а його значення:

$$E_1 = -E_0 = -13,6 \text{ eV.} \quad (1.46)$$

Атом водню може мати інші енергії, вищі за основний стан. Ці вищі енергетичні стани відомі як **збуджені енергетичні стани атома водню**.

Існує лише один основний стан, але існує нескінченна кількість збуджених станів, тому що в рівнянні 1.45 нескінченно багато значень n . Ми говоримо, що електрон знаходиться в «першому збудженому стані», коли його енергія є E_2 (коли $n = 2$), другий збуджений стан, коли його енергія становить E_3 (коли $n = 3$) і взагалі в n -му збудженому стані, коли його енергія дорівнює E_{n+1} . Не існує вищого збудженого стану; однак існує обмеження на послідовність збуджених станів. Якщо ми продовжуємо збільшувати n у рівнянні 1.45, ми знаходимо, що межа дорівнює $-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_0}{n^2} = 0$. У цій межі електрон більше не зв'язаний з ядром, а стає вільним електроном. Електрон залишається зв'язаним в атомі водню, поки його енергія від'ємна. Електрон, який обертається навколо ядра по першій орбіті Бора, найближчій до ядра, знаходиться в основному стані, де його енергія має найменше значення. В основному стані електрон найміцніше зв'язаний з ядром, і його енергія визначається рівнянням 1.46. Якщо ми хочемо видалити цей електрон з атома, ми повинні надати йому достатньо енергії, E_∞ , щоб принаймні збалансувати енергію основного стану E_1 :

$$E_\infty + E_1 = 0 \Rightarrow E_\infty = -E_1 = -(-E_0) = E_0 = 13,6 \text{ eV}. \quad (1.47)$$

Енергію, необхідну для видалення електрона з атома, називають **енергією іонізації**. Енергію іонізації E_∞ , яка необхідна для видалення електрона з першої борівської орбіти, називають **межею іонізації атома водню**. Межа іонізації в рівнянні 1.47, яку ми отримуємо в моделі Бора, узгоджується з експериментальним значенням.

Спектральні лінії випромінювання водню

Щоб отримати довжини хвиль, що випромінюються, коли електрон здійснює перехід з n -ї орбіти на m -ну орбіту, ми використовуємо другу з умов квантування Бора та рівняння 1.45 для енергій. Випромінювання енергії з атома може відбуватися лише тоді, коли електрон здійснює перехід зі збудженого стану в стан з меншою енергією. Під час такого переходу випромінюваний фотон виносить різницю енергій між станами, що беруть участь у переході. Перехід не може йти в іншому напрямку, тому що енергія фотона не може бути негативною, а це означає, що для випромінювання ми повинні мати $E_n > E_m$ і $n > m$. Тому третій постулат Бора дає:

$$hf = |E_n - E_m| = E_n - E_m = -E_0 \frac{1}{n^2} + E_0 \frac{1}{m^2} = E_0 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (1.48)$$

Тепер ми виразимо енергію фотона через його довжину хвилі, $hf = hc/\lambda$, і поділимо обидві частини рівняння 1.48 на hc . Результатом є вираз:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (1.49)$$

Значення константи в цьому рівнянні становить:

$$\frac{E_0}{hc} = \frac{13,6 \text{ eV}}{(4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{с})(2,997 \times 10^8 \text{ м/с})} = 1,097 \times 10^7 \frac{1}{\text{м}}. \quad (1.50)$$

Це значення точно є сталою Рідберга R_H в евристичній формулі Рідберга рівняння 1.32. Насправді рівняння 1.49 ідентичне формулі Рідберга, оскільки для даного m ми маємо $n = m + 1, m + 2, \dots$. Таким чином, квантова модель атома водню Бора дозволяє нам вивести експериментальну постійну Рідберга з *перших принципів* і виразити її через фундаментальні константи. Переходи між дозволеними орбітами електронів показано на рис. 1.17.

Ми можемо повторити ті самі кроки, які привели до рівняння 1.49, щоб отримати довжину хвилі поглиненого випромінювання; це знову дає рівняння 1.49, але цього разу для положень ліній поглинання в спектрі поглинання водню. Єдина відмінність полягає в тому, що для поглинання квантове число m є індексом орбіти, яку займає електрон перед переходом (орбіта з меншою енергією), а квантове число n є індексом орбіти, на яку електрон здійснює перехід (орбіта з вищою енергією). Різниця між енергіями електронів на цих двох орбітах є енергією поглиненого фотона.

Приклад 1.10. Розмір та енергія іонізації атома водню в збудженому стані

Якщо атом водню в основному стані поглинає фотон 93,7 нм, що відповідає лінії переходу в серії Лаймана, як це впливає на енергію та розмір атома? Скільки енергії необхідно для іонізації атома, коли він перебуває в цьому збудженому стані? Дайте свої відповіді в абсолютних одиницях і відносно основного стану.

Стратегія

Перед поглинанням атом знаходиться в основному стані. Це означає, що перехід електрона відбувається з орбіти $m = 1$ на якусь вищу n -ю орбіту. По-перше, ми повинні визначити n для поглиненої довжини хвилі $\lambda = 93,7$ нм. Тоді ми можемо використовувати рівняння 1.45, щоб знайти енергію E_n збудженого стану та енергії його іонізації $E_{\infty, n}$ і використати рівняння 1.40, щоб знайти радіус r_n атома в збудженому стані. Щоб оцінити n , ми використовуємо рівняння 1.49.

Розв'язок

Підставимо $m = 1$ і $\lambda = 93,7$ нм у рівняння 1.49 і визначимо n . Ви не повинні очікувати отримати ідеальну цілу відповідь через помилки округлення, але ваша відповідь буде близькою до цілого числа, і ви можете оцінити n , взявши невід'ємну частину вашої відповіді:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda R_H}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(93,7 \times 10^{-9} \text{ м})(1,097 \times 10^7 \text{ м}^{-1})}}} = 6,07 \Rightarrow n = 6.$$

Радіус $n = 6$ орбіти є

$$r_n = a_0 n^2 = a_0 6^2 = 36(0,529 \times 10^{-10} \text{ м}) = 19,04 \times 10^{-10} \text{ м} \cong 19,0 \text{ Å}.$$

Таким чином, після поглинання фотона 93,7 нм розмір атома водню в збудженому $n = 6$ стані в 36 разів більше, ніж до поглинання, коли атом перебував в основному стані. Енергія п'ятого збудженого стану ($n = 6$) є:

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{E_0}{6^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{36} \cong -0,378 \text{ eV}.$$

Після поглинання фотона 93,7 нм енергія атома водню більша, ніж була до поглинання. Іонізація атома, коли він знаходиться в п'ятому збудженому стані ($n = 6$) вимагає в 36 разів менше енергії, ніж потрібно, коли атом перебуває в основному стані:

$$E_{\infty,6} = -E_6 = -(-0,378 \text{ eV}) = 0,378 \text{ eV}.$$

Обговорення

Таким же чином ми можемо аналізувати будь-яку спектральну лінію в спектрі водню. Отже, експериментальні вимірювання спектральних ліній дають нам інформацію про атомну структуру атома водню.

Перевірте своє розуміння 1.10

Коли електрон в атомі водню знаходиться в першому збудженому стані, який прогноз дає модель Бора щодо його орбітальної швидкості та кінетичної енергії? Яка величина його орбітального моменту?

Модель атома водню Бора також правильно передбачає спектри деяких воднеподібних іонів. **Воднеподібні іони** – це атоми елементів з атомним номером Z більше одиниці ($Z = 1$ для водню), але з видаленими всіма електронами, крім одного. Наприклад, електрично нейтральний атом гелію має атомний номер $Z = 2$. Це означає, що він має два електрони, що обертаються навколо ядра із зарядом $q = +Ze$. Коли один з орбітальних електронів видаляється з атома гелію (ми говоримо, що атом гелію іонізується один раз), залишається атомна структура, подібна до водню, де електрон, що залишився, обертається навколо ядра із зарядом $q = +Ze$. Цей тип ситуації описується моделлю Бора. Припускаючи, що заряд ядра не $+e$, а $+Ze$, ми можемо повторити всі кроки, починаючи з рівняння 1.36, щоб отримати результати для водневоподібного іона:

$$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2, \quad (1.51)$$

де a_0 – борівська орбіта водню, а

$$E_n = -Z^2 E_0 \frac{1}{n^2}, \quad (1.52)$$

де E_0 — межа іонізації атома водню. Ці рівняння є хорошими наближеннями, якщо атомний номер Z не надто великий.

Модель Бора важлива, оскільки вона була першою моделлю, яка постулювала квантування орбіт електронів в атомах. Таким чином, вона є ранньою квантовою теорією, яка дала початок розвитку сучасної квантової теорії. Бор ввів поняття квантового числа для опису атомних станів.

Обмеження ранньої квантової теорії полягає в тому, що вона не може описати атоми, в яких кількість електронів, що обертаються навколо ядра, перевищує один. Модель водню Бора є напівкласичною моделлю, оскільки вона поєднує в собі класичну концепцію електронних орбіт з новою концепцією

квантування. Надзвичайний успіх цієї моделі спонукав багатьох фізиків шукати пояснення, чому така модель взагалі повинна працювати, і шукати розуміння фізики, що стоїть за постулатами ранньої квантової теорії. Цей пошук призвів до появи абсолютно нової концепції «хвиль матерії».

Вправи до п. 1.4. Модель атома водню Бора

1. Обчисліть довжину хвилі першої лінії в серії Лаймана і покажіть, що ця лінія лежить в ультрафіолетовій частині спектра.
2. Обчисліть довжину хвилі п'ятої лінії серії Лаймана і покажіть, що ця лінія лежить в ультрафіолетовій частині спектра.
3. Обчисліть зміни енергії, що відповідають переходам атома водню: (а) від $n = 3$ до $n = 4$; (б) від $n = 2$ до $n = 1$; і (в) від $n = 3$ до $n = \infty$.
4. Визначте довжину хвилі третьої лінії Бальмера (перехід від $n = 5$ до $n = 2$).
5. Яка частота поглинання фотона при переході атома водню з основного стану в стан з $n = 4$?
6. Коли атом водню перебуває в основному стані, які найкоротші та найдовші довжини хвиль фотонів він може поглинути без іонізації?
7. Коли атом водню перебуває у своєму третьому збудженому стані, які найкоротші та найдовші довжини хвиль фотонів він може випромінювати?
8. Яку найбільшу довжину хвилі може мати світло, щоб воно було здатним іонізувати атом водню в його основному стані?
9. Для електрона в атомі водню в стані з $n = 2$ обчисліть: (а) момент імпульсу; (б) кінетичну енергію; (в) потенційну енергію; і (г) повну енергію.
10. Знайти енергію іонізації атома водню в четвертому енергетичному стані.
11. Було виміряно, що для видалення електрона з атома водню потрібно 0,850 еВ. У якому стані перебував атом до іонізації?
12. Який радіус атома водню, коли електрон знаходиться в першому збудженому стані?
13. Знайдіть найкоротшу довжину хвилі в серії Бальмера. В якій частині спектра лежить ця лінія?
14. Покажіть, що весь ряд Пашена лежить в інфрачервоній частині спектра.
15. Чи збігаються ряди Бальмера та ряди Лаймана? чому ні (*Підказка*: обчисліть найкоротшу лінію Бальмера та найдовшу лінію Лаймана).
16. (а) Яка лінія в серії Бальмера є першою в УФ-частині спектра? б) Скільки бальмерівських ліній лежить у видимій частині спектра? (в) Скільки ліній Бальмера лежить в УФ?
17. 4,653-нм лінія випромінювання атомарного водню відповідає переходу між станами $n_f = 5$ і n_i . Знайти n_i .

1.5. Хвилі де Бройля

Формула Комптона встановила, що електромагнітна хвиля може поводитися як частинка світла при взаємодії з речовиною. У 1924 році

Луї де Бройль запропонував нову спекулятивну гіпотезу про те, що електрони та інші частинки речовини можуть поводитися як хвилі. Сьогодні ця ідея відома як **гіпотеза хвиль матерії де Бройля**. У 1926 році гіпотеза де Бройля разом із ранньою квантовою теорією Бора призвели до розробки нової теорії **хвильової квантової механіки** для опису фізики атомів і субатомних частинок. Квантова механіка проклала шлях до нових інженерних винаходів і технологій, таких як лазерна та магнітно-резонансна томографія (МРТ). Ці нові технології стимулюють відкриття в інших науках, таких як біологія та хімія.

Згідно з гіпотезою де Бройля, безмасові фотони, як і масивні частинки, повинні задовольняти одному загальному набору співвідношень, які пов'язують енергію E з частотою f , а лінійний імпульс p — з довжиною хвилі λ . Ми обговорювали ці співвідношення для фотонів у контексті ефекту Комптона. Згадаємо їх зараз у більш загальному контексті. Будь-яка частинка, яка має енергію та імпульс, є **хвилею де Бройля** з частотою f і довжиною хвилі λ :

$$E = hf, \quad (1.53)$$

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (1.54)$$

Тут E і p — відповідно релятивістська енергія та імпульс частинки. Співвідношення де Бройля зазвичай виражають через хвильовий вектор $\vec{k}$, $k = 2\pi/\lambda$, і частоту хвилі $\omega = 2\pi f$, як ми зазвичай робимо для хвиль:

$$E = \hbar\omega, \quad (1.55)$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (1.56)$$

Хвильова теорія говорить нам, що хвиля переносить свою енергію з **груповою швидкістю**. Для хвиль матерії цією груповою швидкістю є швидкість u частинки. Ототожнення енергії E та імпульсу p частинки з її релятивістською енергією mc^2 і її релятивістського імпульсу mu , відповідно, із співвідношень де Бройля впливає, що хвилі матерії задовольняють таким співвідношенням:

$$\lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{E/\hbar}{p/\hbar} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mu} = \frac{c^2}{u} = \frac{c}{\beta}, \quad (1.57)$$

де $\beta = u/c$. Коли частинка безмасова, ми маємо $u = c$ і рівняння 1.57 стає $\lambda f = c$.

Приклад 1.11. Якої довжини хвилі матерії де Бройля?

Обчисліть довжину хвилі де Бройля: (а) баскетбольного м'яча вагою 0,65 кг, кинутого зі швидкістю 10 м/с, (б) нерелятивістського електрона з кінетичною енергією 1,0 еВ і (в) релятивістського електрона з кінетичною енергією з 108 кеВ.

Стратегія

Ми використовуємо рівняння 1.57, щоб знайти довжину хвилі де Бройля. Коли проблема стосується нерелятивістського об'єкта, який рухається з нерелятивістською швидкістю u , наприклад, у (а), коли $\beta = u/c \ll 1$, ми використовуємо нерелятивістський імпульс p . Коли нерелятивістське наближення не може бути використане, наприклад у (с), ми повинні використовувати релятивістський імпульс $p = mu = m_0\gamma u = E_0\gamma\beta/c$, де енергія

маси спокою частинки $E_0 = m_0 c^2$ і γ є фактором Лоренца $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Повна енергія E частинки задана рівнянням 1.53, а кінетична енергія дорівнює $K = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0$. Коли кінетична енергія відома, ми можемо з рівняння 1.18 знайти $p = \sqrt{(E^2 - E_0^2)/c^2} = \sqrt{K(K + 2E_0)}/c$ і підставити в рівняння 1.57, щоб отримати:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2E_0)}}. \quad (1.58)$$

Залежно від проблеми, що розглядається, у цьому рівнянні ми можемо використовувати такі значення для hc :

$$hc = (6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}) (2,998 \times 10^8 \text{ м/с}) = 1,986 \times 10^{-25} \text{ Дж} \cdot \text{м} = 1,241 \text{ еВ} \cdot \text{мкм}.$$

Розв'язок

(а) Для баскетбольного м'яча кінетична енергія дорівнює:

$$K = \frac{mu^2}{2} = \frac{(0,65 \text{ кг})(10 \text{ м/с})^2}{2} = 32,5 \text{ Дж},$$

а енергія маси спокою становить

$$E_0 = mc^2 = (0,65 \text{ кг})(2,998 \times 10^8 \text{ м/с})^2 = 5,84 \times 10^{16} \text{ Дж}.$$

Ми бачимо, що $K(K + 2E_0) \ll 1$ і використовуємо:

$$p = mu = (0,65 \text{ кг})(10 \text{ м/с}) = 6,5 \text{ Дж} \cdot \text{с/м},$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{6,5 \text{ Дж} \cdot \text{с/м}} = 1,02 \times 10^{-34} \text{ м}.$$

(б) Для нерелятивістського електрона

$$E_0 = mc^2 = (9,109 \times 10^{-31} \text{ кг})(2,998 \times 10^8 \text{ м/с})^2 = 511 \text{ кеВ}$$

і коли $K = 1,0 \text{ еВ}$, у нас $\frac{K}{(K + E_0)} = (1/512) \times 10^{-3} \ll 1$, тому ми можемо використовувати нерелятивістську формулу. Однак тут простіше використовувати рівняння 1.58:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2E_0)}} = \frac{1,241 \text{ еВ} \cdot \text{мкм}}{\sqrt{(1,0 \text{ еВ})[1,0 \text{ еВ} + 2(511 \text{ кеВ})]}} = 1,23 \text{ нм}.$$

Якщо ми використовуємо нерелятивістський імпульс, ми отримуємо той самий результат, оскільки 1 еВ набагато менший за масу спокою електрона.

в) Для швидкого електрона с $K = 108 \text{ кеВ}$, релятивістськими ефектами не можна нехтувати, оскільки його повна енергія дорівнює

$$E = K + E_0 = 108 \text{ кеВ} + 511 \text{ кеВ} = 619 \text{ кеВ}$$

і $\frac{K}{E} = \frac{108}{619}$ не є незначним. Тоді

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2E_0)}} = \frac{1,241 \text{ еВ} \cdot \text{мкм}}{\sqrt{(108 \text{ кеВ})[108 \text{ кеВ} + 2(511 \text{ кеВ})]}} = 3,55 \text{ пм}.$$

Обговорення

З цих оцінок ми бачимо, що довжини хвиль де Бройля макроскопічних об'єктів, таких як м'яч, незмірно малі. Тому, навіть якщо вони існують, вони не виявляються і не впливають на рух макроскопічних об'єктів.

Перевірте своє розуміння 1.11

Яка довжина хвилі де Бройля нерелятивістського протона з кінетичною енергією 1,0 еВ?

Використовуючи концепцію хвилі електронної матерії, де Бройль обґрунтував квантування кутового моменту електрона в атомі водню, яке постулювалося в квантовій теорії Бора. Фізичне пояснення першої умови квантування Бора виникає природно, коли ми припускаємо, що електрон в атомі водню поводить себе не як частинка, а як хвиля. Щоб чітко побачити це, уявіть собі натягнуту гітарну струну, яка затиснута з обох кінців і вібрує в одному зі своїх нормальних режимів. Якщо довжина струни дорівнює l (рис. 1.18), довжини хвиль цих коливань не можуть бути довільними, а мають бути такими, щоб ціле число k напівхвиль $\lambda/2$ точно вкладалося на відстані l між кінцями.

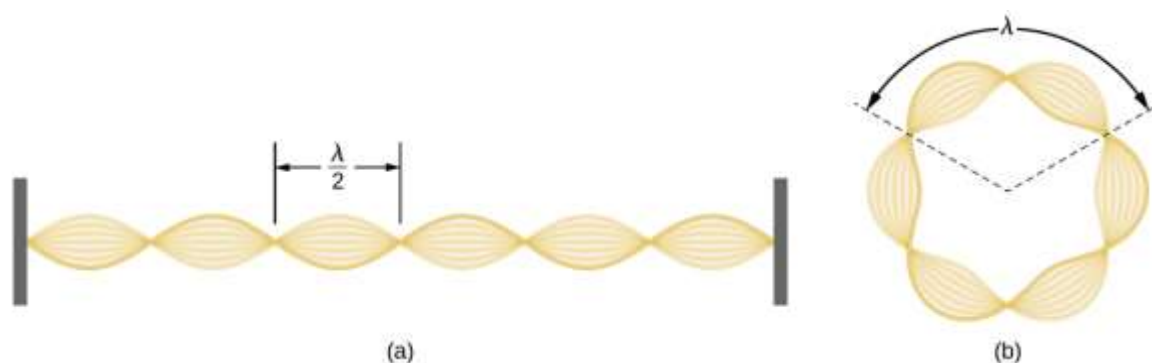


Рис. 1.18. Схема стоячої хвилі: (а) натягнута струна, затиснута на стінках; (б) електронна хвиля на третій борівській орбіті в атомі водню

Це умова $l = k \lambda/2$ для стоячої хвилі на струні. Тепер припустимо, що замість того, щоб струна була затиснута на стінках, ми згинаємо її довжину в коло і скріплюємо кінці один з одним. Це створює круглу струну, яка вібрує в нормальних режимах, задовольняючи ту саму умову стоячої хвилі, але кількість напівхвиль тепер має бути парною k , $k = 2n$, і довжина l тепер пов'язана з радіусом r_n кола. Це означає, що радіуси не є довільними, а повинні задовольняти наступну умову стоячої хвилі:

$$2\pi r_n = 2n \frac{\lambda}{2}. \quad (1.59)$$

Якщо електрон на n -й орбіті Бора рухається як хвиля, відповідно до рівняння 1.59 його довжина хвилі повинна дорівнювати $\lambda = 2\pi r_n/n$. Якщо припустити, що рівняння 1.58 справедливе, електронна хвиля цієї довжини хвилі відповідає лінійному імпульсу електрона, $p = h/\lambda = n h/(2\pi r_n) = n \hbar/r_n$. Отже, на круговій орбіті момент імпульсу електрона повинен бути рівним:

$$L_n = r_n p = r_n \frac{n\hbar}{r_n} = n\hbar. \quad (1.60)$$

Це рівняння є першою з умов квантування Бора, заданих рівнянням 1.36. Надання фізичного пояснення умови квантування Бора є переконливим теоретичним аргументом існування хвиль матерії.

Приклад 1.12. Електронна хвиля в основному стані водню

Знайдіть довжину хвилі де Бройля електрона в основному стані водню.

Стратегія

Ми поєднуємо першу умову квантування в рівнянні 1.60 з рівнянням 1.36 і використовуємо рівняння 1.38 для першого радіуса Бора з $n = 1$.

Розв'язок

Коли $n = 1$ і $r_n = a_0 = 0,529 \text{ \AA}$ й умова квантування Бора дає $a_0 p = 1 \cdot \hbar \Rightarrow p = \hbar/a_0$. Довжина хвилі електрона дорівнює:

$$\lambda = h/p = h/(\hbar/a_0) = 2\pi a_0 = 2\pi (0,529 \text{ \AA}) = 3,324 \text{ \AA}$$

Обговорення

Ми отримуємо той самий результат, коли безпосередньо використовуємо рівняння 1.58.

Перевірте своє розуміння 1.12

Знайти довжину хвилі де Бройля електрона в третьому збудженому стані водню.

Експериментальне підтвердження хвиль речовини було отримано в 1927 році, коли К. Девіссон і Л. Джермер виконали серію експериментів з розсіювання електронів, які чітко показали, що електрони справді поведуться як хвилі. Девіссон і Джермер не ставили свій експеримент для підтвердження гіпотези де Бройля: це підтвердження стало побічним продуктом їхніх рутинних експериментальних досліджень металевих поверхонь під електронним бомбардуванням.

У конкретному експерименті, який забезпечив перші докази електронних хвиль (відомому сьогодні як **експеримент Девіссона–Джермера**), вони вивчали поверхню нікелю. Їхній зразок нікелю був спеціально підготовлений у високотемпературній печі, щоб змінити його звичайну полікристалічну структуру на форму, в якій великі монокристалічні домени займають об'єм. На рис. 1.19 показана експериментальна установка.

Теплові електрони вивільняються з нагрівального елемента (зазвичай виготовленого з вольфраму) в електронній гарматі та прискорюються через різницю потенціалів ΔV , потім колімуються і падають на Ni мішень. Кінетична енергія K електронів регулюється підбором значення різниці потенціалів в електронній гарматі. Це створює пучок електронів із заданим значенням лінійного імпульсу відповідно до закону збереження енергії:

$$e\Delta V = K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2me\Delta V}. \quad (1.61)$$

Електронний пучок падає на зразок нікелю в напрямку, нормальному до його поверхні. На поверхні він розлітається в різні боки. Інтенсивність променя, розсіяного в обраному напрямку ϕ вимірюється високочутливим детектором.

Кутове положення детектора відносно напрямку падаючого променя можна змінювати від $\varphi = 0^\circ$ до $\varphi = 90^\circ$. Вся установка міститься у вакуумній камері, щоб запобігти зіткненням електронів з молекулами повітря, оскільки такі зіткнення змінюють кінетичну енергію електронів і є небажаними.

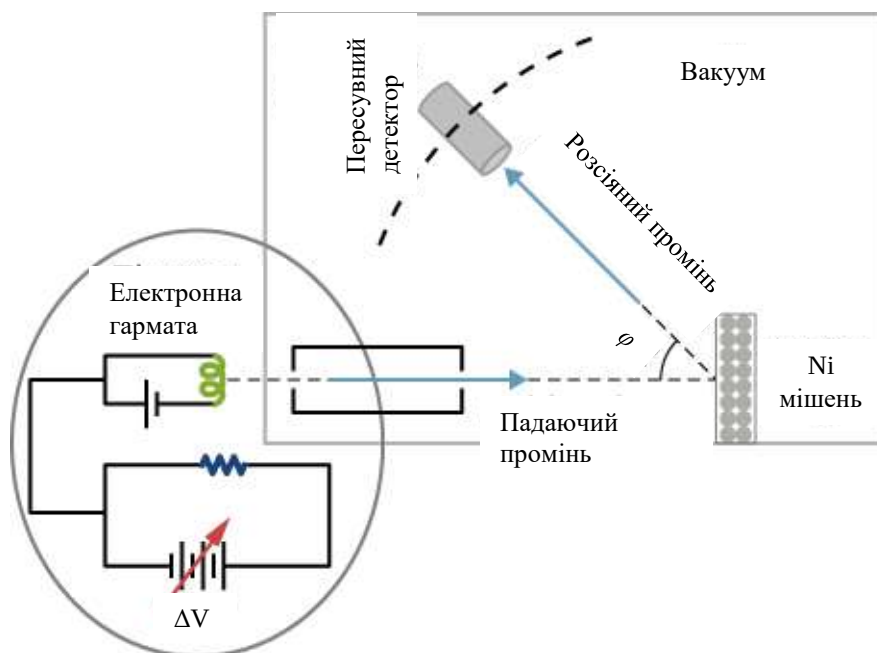


Рис. 1.19. Схема експериментальної установки дифракційного експерименту Девіссона–Джермера. Добре колімований пучок електронів розсіюється від нікелевої мішені. Кінетична енергія електронів у падаючому пучку вибирається шляхом регулювання змінного потенціалу ΔV в електронній гарматі. Інтенсивність розсіяного електронного пучка вимірюється для діапазону кутів розсіювання φ , тоді як відстань між детектором і мішенню не змінюється

Коли нікелева мішень має полікристалічну форму з багатьма випадково орієнтованими мікроскопічними кристалами, падаючі електрони розсіюються від її поверхні в різних випадкових напрямках. В результаті інтенсивність розсіяного електронного пучка практично однакова в будь-якому напрямку, нагадуючи дифузне відбиття світла від пористої поверхні. Однак, коли нікелева мішень має регулярну кристалічну структуру, інтенсивність розсіяного електронного пучка показує чіткий максимум під певним кутом, а результати демонструють чітку дифракційну картину (див. рис. 1.20).

Подібні дифракційні картини, утворені рентгенівськими променями, розсіяними на різних кристалічних твердих тілах, досліджували в 1912 році батько й син фізики Вільям Х. Брегг і Вільям Л. Брегг. Закон Брегга в рентгенівській кристалографії забезпечує зв'язок між довжиною хвилі λ випромінювання, що падає на кристалічну решітку, періодом решітки і положенням інтерференційного максимуму в розсіяному випромінюванні. Порядок решітки мішені Девіссона–Джермера, визначена за допомогою рентгенівської кристалографії, була виміряна і дорівнювала $a = 2,15 \text{ \AA}$.

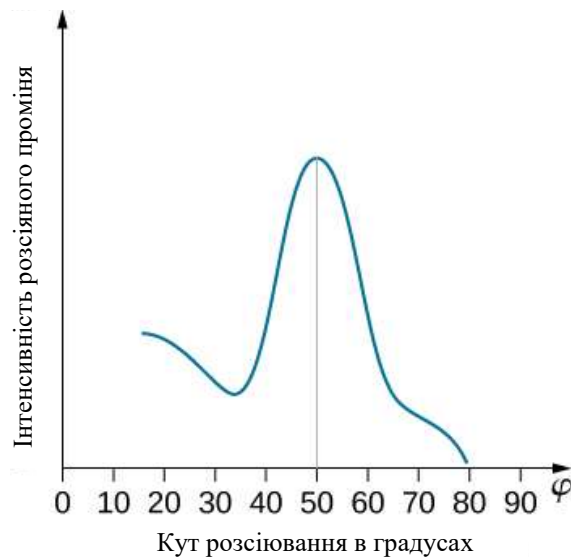
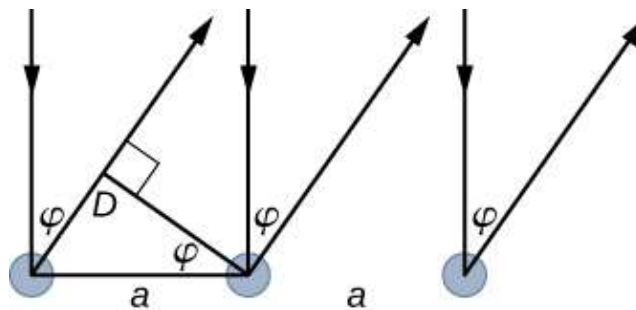


Рис. 1.20. Експериментальні результати електронної дифракції на нікелевій мішені для прискорювального потенціалу електронної гармати близько $\Delta V = 54$ В: максимум інтенсивності реєструється при куті розсіювання $\varphi = 50$

На відміну від рентгенівської кристалографії, в якій рентгенівські промені проникають через зразок, в оригінальному експерименті Девіссона-Джермера тільки поверхневі атоми взаємодіють з падаючим пучком електронів. Для поверхневої дифракції максимальна інтенсивність відбитого електронного пучка спостерігається при кутах розсіювання, які задовольняють умову $n\lambda = a \sin \varphi$ (див. рис. 1.21).



$$D = a \sin \varphi$$

$$D = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n\lambda = a \sin \varphi$$

Рис. 1.21. Під час поверхневої дифракції монохроматичної електромагнітної хвилі на структурі кристалічної решітки синфазні падаючі промені відбиваються від атомів на поверхні. Промінь, відбитий від лівого атома, проходить додаткову відстань $D = a \sin \varphi$ до детектора, де a — порядок ґратки. Відбиті промені залишаються синфазними, коли D є цілим числом, кратним їх довжині хвилі λ . Інтенсивність відбитих хвиль має яскраво виражені максимуми для кутів φ задовольняє $n\lambda = a \sin \varphi$

Максимум першого порядку (для $n = 1$) вимірюється при куті розсіювання $\varphi \approx 50$, коли $\Delta V \approx 54$ В, що дає довжину хвилі падаючого випромінювання як $\lambda = (2,15 \text{ \AA}) \sin 50^\circ = 1,64 \text{ \AA}$. З іншого боку, потенціал 54 В прискорює падаючі

електрони до кінетичної енергії $K = 54 \text{ eV}$. Їхній імпульс, розрахований за рівнянням 1.61, дорівнює $p = 2,478 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{с/м}$. Коли ми підставляємо цей результат у рівняння 1.58, довжина хвилі де Бройля отримується як

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{с}}{2,478 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{с/м}} = 1,67 \text{ \AA}. \quad (1.62)$$

Той самий результат отримуємо, коли використовуємо $K = 54 \text{ eV}$ у рівнянні 1.61. Близькість цього теоретичного результату до експериментального значення Девіссона–Джермера $\lambda = 1,64 \text{ \AA}$ є переконливим аргументом на користь існування хвиль матерії де Бройля.

Дифракційні лінії, виміряні з низькоенергетичними електронами, такими як ті, що використовуються в експерименті Девіссона–Джермера, досить широкі (див. рис. 1.20), оскільки падаючі електрони розсіюються лише від поверхні. Роздільна здатність дифракційних зображень значно покращується, коли промінь електронів з більшою енергією проходить через тонку металеву фольгу. Це відбувається через те, що дифракційне зображення створюється шляхом розсіювання на багатьох кристалічних площинах всередині об'єму, а максимуми, які утворюються під час розсіювання під кутами Брегга, є різкими (див. рис. 1.22).

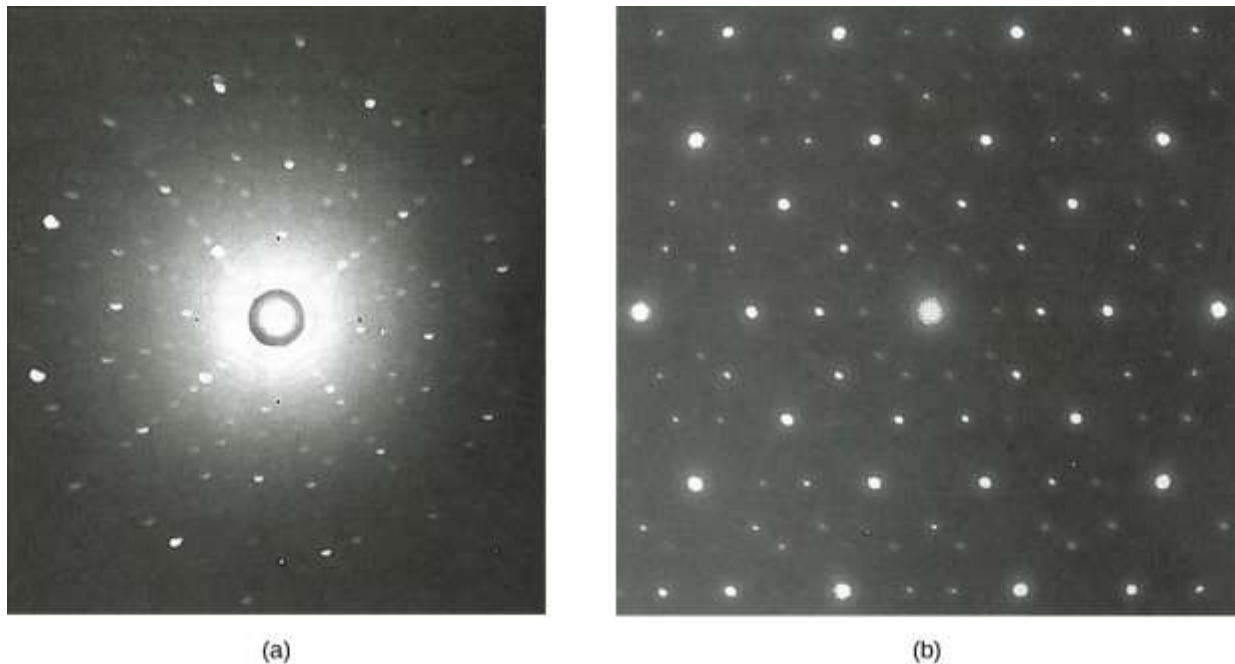


Рис. 1.22. Дифрактограми, отримані при розсіюванні на кристалічному твердому тілі: а) рентгенівськими променями, б) електронами. Спостережувана картина відображає симетрію кристалічної структури зразка

Після роботи Девіссона та Джермера гіпотеза де Бройля була ретельно перевірена різними експериментальними методами, і існування хвиль де Бройля було підтверджено для багатьох елементарних частинок. Нейтрони використовувалися в експериментах з розсіювання для визначення кристалічних структур твердих тіл за інтерференційними картинами, утвореними нейтронними хвилями речовини. Нейтрон має нульовий заряд і його маса

порівняння з масою позитивно зарядженого протона. Як нейтрони, так і протони можна розглядати як хвилі матерії.

Таким чином, властивість бути хвилею матерії характерна не для електрично заряджених частинок, а для всіх частинок, що рухаються. Наприклад, були виміряні хвилі матерії, що складаються з молекул розміром із вуглецю C^{60} . Усі фізичні об'єкти, малі чи великі, мають пов'язану хвилю матерії, поки вони знаходяться в русі. Універсальний характер хвиль матерії де Бройля твердо встановлений.

Приклад 1.13. Розсіяння нейтронів

Припустимо, що пучок нейтронів використовується в дифракційному експерименті на типовому кристалічному твердому тілі. Оцініть кінетичну енергію нейтрона (в еВ) у нейтронному пучку та порівняйте її з кінетичною енергією ідеального газу в рівновазі за кімнатної температури.

Стратегія

Ми припускаємо, що типова відстань між кристалами a становить близько $1,0 \text{ \AA}$. Для спостереження дифракційної картини на такій решітці необхідна довжина хвилі нейтрона λ має бути такого ж порядку, що й відстань між ґратами. Ми використовуємо рівняння 1.61, щоб знайти імпульс p і кінетичну енергію K . Щоб порівняти цю енергію з енергією E_T ідеального газу в рівновазі при кімнатній температурі $T = 300 \text{ K}$, ми використовуємо формулу $K = 3/2 k_B T$, де $k_B = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ є постійною Больцмана.

Розв'язок

Ми оцінюємо pc , щоб порівняти його з енергією маси спокою нейтрона $E_0 = 940 \text{ MeV}$:

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1,241 \times 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{м}}{10 \times 10^{-10} \text{ м}} = 12,41 \text{ кеВ.}$$

Ми бачимо, що $p^2 c^2 \ll E_0^2$ тому $K \ll E_0$ і ми можемо використати вираз для нерелятивістської кінетичної енергії:

$$K = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{h^2}{2\lambda^2 m_n} = \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})^2}{(2 \times 10^{-20} \text{ м}^2)(1,66 \times 10^{-27} \text{ кг})} = 1,32 \times 10^{-20} \text{ Дж} = 82,7 \times 10^{-3} \text{ eV.}$$

Кінетична енергія ідеального газу в рівновазі при 300 K дорівнює:

$$K_T = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} (8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 38,8 \times 10^{-3} \text{ eV.}$$

Ми бачимо, що ці енергії одного порядку величини.

Обговорення

Нейтрони з енергіями в цьому діапазоні, характерному для ідеального газу при кімнатній температурі, називаються «тепловими нейтронами».

Приклад 1.14. Довжина хвилі де Бройля релятивістського протона

У суперколайдері в CERN протони можуть розганятися до швидкостей $0,75c$. Яка довжина хвилі де Бройля при цій швидкості протонів? Яка їх кінетична енергія?

Стратегія

Енергія маси спокою протона дорівнює:

$$E_0 = m_0 c^2 = (1,672 \times 10^{-27} \text{ кг})(2,998 \times 10^8 \text{ м/с}) = 938 \text{ MeV}.$$

Коли відома швидкість протона, ми маємо:

$$\beta = 0,75, \quad \beta\gamma = \frac{0,75}{\sqrt{1-0,75^2}} = 1,134.$$

Отримуємо довжину хвилі λ і кінетичну енергію K з релятивістських співвідношень.

Розв'язок

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\beta\gamma E_0} = \frac{1,241 \text{ eV} \cdot \text{мкм}}{1,134 \cdot (938 \text{ MeV})} = 1,16 \text{ фм}.$$
$$K = E_0(\gamma - 1) = \frac{938 \text{ MeV}}{\sqrt{1-0,75^2} - 1} = 480,1 \text{ MeV}.$$

Обговорення

Зауважте, що оскільки протон у 1835 разів більший за електрон, якби цей експеримент проводився з електронами, просте масштабування цих результатів дало б нам довжину хвилі електрона (1835) $0,77 \text{ фм} = 1,4 \text{ пм}$ і його кінетичну енергію: $480,1 \text{ MeV}/1835 = 261,6 \text{ кеВ}$.

Перевірте своє розуміння 1.13

Знайти довжину хвилі де Бройля та кінетичну енергію вільного електрона, який рухається зі швидкістю $0,75c$.

Вправи до п. 1.5. Хвилі де Бройля

1. При якій швидкості електрон матиме довжину хвилі $1,00 \text{ м}$?
2. Яка довжина хвилі де Бройля електрона, що рухається зі швидкістю $5,0 \times 10^6 \text{ м/с}$?
3. Яка довжина хвилі де Бройля електрона, який прискорюється зі стану спокою через різницю потенціалів 20 кВ ?
4. Яка довжина хвилі де Бройля у протона, кінетична енергія якого дорівнює $2,0 \text{ MeV}$? $10,0 \text{ MeV}$?
5. Яка довжина хвилі де Бройля молодого гепарда, що біжить зі швидкістю $8,0 \text{ м/с}$?
6. (а) Яка енергія електрона, довжина хвилі де Бройля якого дорівнює довжині хвилі фотона жовтого світла з довжиною хвилі 590 нм ? (б) Яка довжина хвилі де Бройля електрона, енергія якого дорівнює енергії фотона жовтого світла?

7. Довжина хвилі де Бройля нейтрона дорівнює 0,01 нм. Яка швидкість і енергія цього нейтрона?
8. Яка довжина хвилі електрона, що рухається зі швидкістю 3% від швидкості світла?
9. При якій швидкості протон має довжину хвилі де Бройля 6,0 фм (приблизно розміром з ядро)? Дайте відповідь в одиницях c .
10. Яка швидкість більярдної кулі масою 0,400 кг, якщо її довжина хвилі де Бройля дорівнює 7,50 фм?
11. Знайдіть довжину хвилі протона, який рухається зі швидкістю 1,00% від швидкості світла (коли $\beta = 0,01$).

1.6. Корпускулярно-хвильовий дуалізм

Енергія випромінювання, що реєструє радіосигнал приймальною антеною, є енергією електромагнітної хвилі. Та сама енергія випромінювання, що реєструється як фотострум у фотоефекті, надходить як енергія окремих частинок фотона. Тому виникає питання про природу електромагнітного випромінювання: *фотон — це хвиля чи це частинка?* Подібні питання можна поставити про інші відомі форми енергії. Наприклад, електрон, який є частинкою електричного струму в колі, поводить себе як частинка, що рухається в унісон з іншими електронами всередині провідника. Той самий електрон поводить себе як хвиля, коли він проходить через тверду кристалічну структуру та утворює дифракційне зображення. *Електрон — це хвиля чи це частинка?* Це ж питання можна поширити на всі частинки матерії — елементарні частинки, а також складні молекули — запитуючи про їх справжню фізичну природу. За нашого сучасного рівня знань такі запитання про справжню природу речей не мають вичерпних відповідей. Все, що ми можемо сказати, це те, що в природі існує **подвійність хвиля-частинка**: за деяких експериментальних умов частинка виглядає як частинка, а за інших експериментальних умов частинка діє як хвиля. І навпаки, за одних фізичних обставин електромагнітне випромінювання діє як хвиля, а за інших фізичних обставин випромінювання діє як пучок фотонів.

Ця дуалістична інтерпретація не є новою концепцією фізики, викликаною конкретними відкриттями в двадцятому столітті. Це вже було присутнє в дебатах між Ісааком Ньютоном і Крістіаном Гюйгенсом про природу світла, починаючи з 1670 року. Відповідно до Ньютона, промінь світла — це сукупність корпускул світла. За Гюйгенсом, світло — це хвиля. Корпускулярна гіпотеза зазнала невдачі в 1803 році, коли Томас Юнг оголосив про свій **експеримент з подвійною щілиною та інтерференції** світла (див. рис. 1.23), який твердо підтвердив, що світло є хвилею. У теорії електромагнетизму Джеймса Клерка Максвелла (завершена до 1873 року) світло є електромагнітною хвилею. Класичний погляд Максвелла на випромінювання як електромагнітну хвилю актуальний і сьогодні; однак він не може пояснити випромінювання чорного тіла та фотоелектричний ефект, коли світло діє як пучок фотонів.

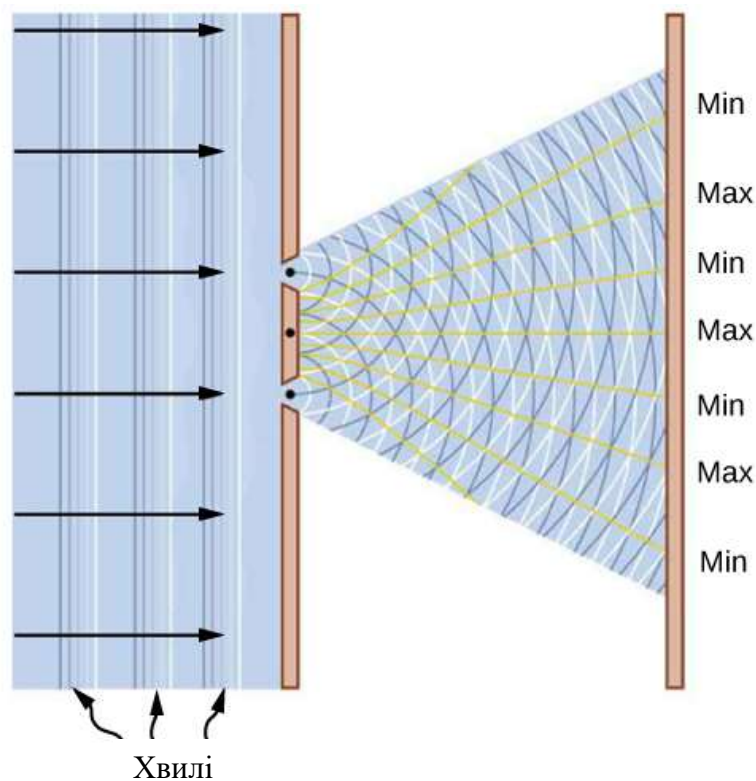


Рис. 1.23. Експеримент Юнга з подвійною щілиною пояснює інтерференцію світла шляхом аналогії з інтерференцією хвиль у воді. Дві хвилі генеруються в положеннях двох щілин у непрозорому екрані. Хвилі мають однакові довжини. Вони переміщуються від місця походження в щілинах до екрану, розташованого праворуч від щілин. Хвилі зустрічаються на екрані. У положеннях, позначених на екрані «Max», зустрічні хвилі є синфазними, а амплітуда комбінованої хвилі збільшується. У положеннях, позначених «Min», сумарна амплітуда хвилі дорівнює нулю. Під час освітлення цей механізм створює візерунок яскравої та темної бахром на екрані

Подібна дихотомія існувала в тлумаченні електрики. Від спостережень Бенджаміна Франкліна за електрикою в 1751 році до відкриття Дж. Дж. Томсоном електрона в 1897 році електричний струм розглядався як потік у безперервному електричному середовищі. У рамках цієї теорії електричної рідини була розроблена сучасна теорія електричних кіл, а також були відкриті електромагнетизм і електромагнітна індукція. Експеримент Томсона показав, що одиниця негативного електричного заряду (електрон) може подорожувати у вакуумі без будь-якого середовища для перенесення заряду, як в електричних колах. Це відкриття змінило сьогоденнє розуміння електрики та наділило електрон статусом частинки. У ранній квантовій теорії атома водню Бора і електрон, і протон є частинками речовини. Подібним чином у комптонівському розсіюванні рентгенівських променів на електронах електрон є частинкою. З іншого боку, в експериментах з розсіювання електронів на кристалічних структурах електрон поводить себе як хвиля.

Скептик може поставити запитання, що, можливо, електрон завжди може бути нічим іншим, як частинкою, і що дифракційні зображення, отримані в експериментах з розсіювання електронів, можна пояснити в рамках якоїсь макроскопічної моделі кристала та макроскопічної моделі електронів, що

налітають на нього, як дощ кульок для пінг-понгу. Насправді, щоб дослідити це питання, нам не потрібна складна модель кристала, а лише пара простих щілин в екрані, непрозору для електронів. Іншими словами, щоб зібрати переконливі докази про природу електрона, нам потрібно повторити експеримент Юнга з подвійною щілиною з електронами. Якщо електрон є хвилею, ми повинні спостерігати утворення типових для хвиль інтерференційних картин, таких як описані на рис. 1.23, навіть коли електрони проходять через щілини один за одним. Але якщо електрон не є хвилею, а частинкою, то інтерференційні смуги утворюватися не будуть.

Найперший експеримент з подвійною щілиною з пучком електронів, проведений Клаусом Йонссоном у Німеччині в 1961 році, продемонстрував, що пучок електронів справді утворює інтерференційну картину, що означає, що електрони разом поведуться як хвиля. Перші експерименти з подвійною щілиною з *одиначними* електронами, що проходять через щілини один за одним, були проведені Джуліо Поцці в 1974 році в Італії та Акірою Тономура в 1989 році в Японії. Вони показують, що інтерференційні смуги утворюються поступово, навіть коли електрони проходять через щілини окремо. Це переконливо демонструє, що електронно-дифракційні зображення утворюються через хвильову природу електронів. Результати експериментів з подвійними щілинами з електронами ілюструються зображеннями інтерференційної картини на рис. 1.24.

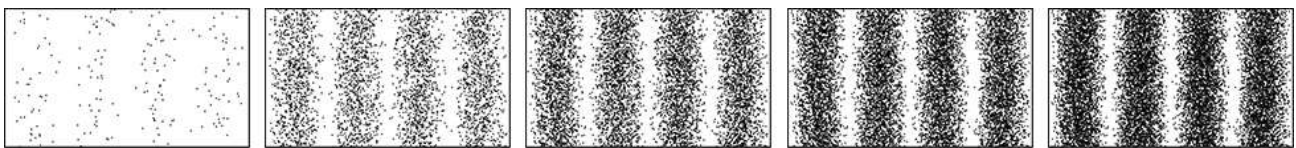


Рис. 1.24. Інтерференційні смуги, змодельовані комп'ютером, видно в експерименті Юнга з подвійною щілиною з електронами. На екрані поступово формується одна картина, незалежно від того, проходять електрони через щілини пучком або окремо один за одним

Приклад 1.15. Експеримент з подвійними щілинами та електронами

В одній експериментальній установці для вивчення інтерференційних картин електронних хвиль створюють дві щілини в покритій золотом кремнієвій мембрані. Кожна щілина має ширину 62 нм та 4 - мкм довжину, а відстань між щілинами становить 272 нм. Електронний промінь створюється в електронній гарматі шляхом нагрівання вольфрамового елемента та прискорення електронів через потенціал $\Delta V = 600$ В. Згодом промінь колімується за допомогою електромагнітних лінз, і колімований пучок електронів направляється через щілини. Знайти кутове положення яскравої смуги першого порядку на екрані.

Стратегія

Нагадаємо, що кутове положення θ яскравої смуги n -го порядку, яка формується в інтерференційній картині Юнга з двома щілинами (про яку йдеться в попередньому розділі), пов'язана з відстанню d між щілинами та довжиною хвилі λ , падаючого світла рівнянням $d \sin \theta = n \lambda$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Відстань

між щілинами дана і дорівнює $d = 272 \text{ нм}$. За смугу першого порядку беремо $n = 1$. Єдине, що нам зараз потрібно, це довжина хвилі падаючого електрона.

Оскільки електрон був прискорений із стану спокою через різницю потенціалів $\Delta V = 600 \text{ В}$, його кінетична енергія дорівнює $K = e \Delta V = 600 \text{ еВ}$. Енергія маси спокою електрона становить $E_0 = 511 \text{ кеВ}$.

Ми обчислюємо його довжину хвилі де Бройля як довжину хвилі нерелятивістського електрона, оскільки його кінетична енергія K набагато менша за її енергію спокою E_0 ($K \ll E_0$).

Розв'язок

Довжина хвилі електрона дорівнює:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} = \frac{h}{\sqrt{2E_0/c^2 K}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0 K}} = \frac{1,241 \times 10^{-6} \text{ еВ} \cdot \text{м}}{\sqrt{2(511 \text{ кеВ})(600 \text{ еВ})}} = 0,05 \text{ нм}.$$

Ця λ використовується для отримання положення першої яскравої смуги:

$$\sin \theta = \frac{1 \cdot \lambda}{d} = \frac{0,05 \text{ нм}}{272 \text{ нм}} = 0,000184 \Rightarrow \theta = 0,01^\circ.$$

Обговорення

Зауважте, що це також кутова роздільна здатність між двома послідовними яскравими смугами до приблизно $n = 1000$. Наприклад, між смугою нульового порядку та смугою першого порядку, між смугою першого порядку та смугою другого порядку тощо.

Перевірте своє розуміння 1.14

Для ситуації, описаної в прикладі 1.15, знайдіть кутове положення яскравої смуги п'ятого порядку на екрані.

Корпускулярно-хвильова подвійна природа частинок матерії та випромінювання є *декларацією нашої неспроможності описати фізичну реальність у рамках однієї єдиної класичної теорії*, оскільки окремо ні класичний частинковий підхід, ні класичний хвильовий підхід не можуть повністю пояснити спостережувані явища. Це обмеження класичного підходу було усвідомлено в 1928 році, і Бор, Едвін Шредінгер, Вернер Гейзенберг і Пол Дірак заклали основу для нової статистичної теорії, названої квантовою механікою. **Квантова механіка** вважає ідею де Бройля про хвилі матерії фундаментальною властивістю всіх частинок і дає їй статистичну інтерпретацію. Згідно з цією інтерпретацією, хвиля, пов'язана з частинкою, несе інформацію про ймовірне положення частинки та про інші її властивості. Одна частинка розглядається як *хвильовий пакет*, який рухається, як показано на рис. 1.25. З цього прикладу ми можемо інтуїтивно відчувати, що якщо частинка є хвильовим пакетом, ми не зможемо виміряти її точне положення так само, як ми не можемо точно визначити розташування хвильового пакету у вібруючій гітарній струні.



Рис. 1.25. На цьому малюнку частинка зображена як хвильовий пакет і її позиція не має точного значення

Невизначеність, Δx , у вимірюванні положення частинки пов'язано з невизначеністю Δp при одночасному вимірюванні його лінійного імпульсу за принципом невизначеності Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (1.63)$$

Принцип Гейзенберга виражає закон природи, що на квантовому рівні наше сприйняття обмежене. Наприклад, якщо ми знаємо точне положення тіла (що означає, що $\Delta x = 0$ у рівнянні 1.63), в той же час ми не можемо знати його імпульс, тому що тоді невизначеність його імпульсу стає нескінченною (оскільки $\Delta p \geq 0,5 \hbar / \Delta x$ у рівнянні 1.63). Принцип **невизначеності Гейзенберга** встановлює обмеження на точність *одночасних* вимірювань положення та імпульсу частинки; це показує, що найкраща точність, яку ми можемо отримати, коли ми маємо знак рівності (=) у рівнянні 1.63, і ми не можемо зробити краще, ніж це, навіть з найкращими інструментами майбутнього. Принцип Гейзенберга є наслідком хвильової природи частинок.

Ми регулярно використовуємо багато електронних пристроїв, які використовують подвійність хвиля-частинка, навіть не усвідомлюючи складності фізики, що лежить в основі їх роботи. Одним із прикладів технології, заснованої на властивостях частинок фотонів і електронів, є *пристрій із зарядовим зв'язком*, який використовується для виявлення світла в будь-якому приладі, де потрібні високоякісні цифрові дані, наприклад у цифрових камерах або медичних датчиках.

Прикладом, у якому використовуються хвильові властивості електронів, є електронний мікроскоп. У 1931 році фізик Ернст Руска, спираючись на ідею про те, що магнітні поля можуть направляти електронний промінь так само, як лінзи можуть направляти промінь світла в оптичному мікроскопі, розробив перший прототип електронного мікроскопа. Ця розробка поклала початок галузі **електронної мікроскопії**.

У трансмісійному електронному мікроскопі (ТЕМ), показаному на рис. 1.26, електрони утворюються гарячим вольфрамовим елементом і прискорюються різницею потенціалів в електронній гарматі, що дає їм кінетичну енергію до 400 кеВ. Після виходу з електронної гармати електронний промінь фокусується електромагнітними лінзами (система збиральних лінз) і пропускається через зразок для перегляду. Зображення зразка відновлюється за пропущеним пучком електронів.

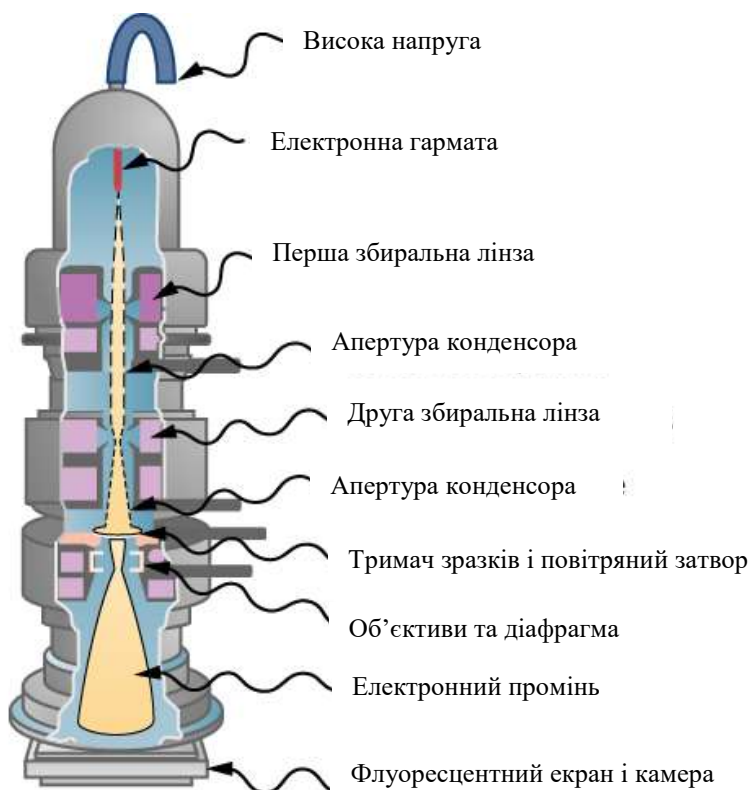


Рис. 1.26. ТЕМ: Електронний промінь, створений електронною гарматою, колімується конденсорними лінзами та проходить через зразок. Пропущені електрони проєктуються на екран, а зображення надсилається на камеру

Збільшене зображення можна переглядати або безпосередньо на флуоресцентному екрані, або опосередковано, надіславши його, наприклад, на цифрову камеру або монітор комп'ютера. Уся установка, що складається з електронної гармати, лінз, зразка та флуоресцентного екрана, поміщається у вакуумну камеру, щоб запобігти втраті енергії променя. Роздільна здатність ТЕМ обмежується лише сферичною аберацією. Сучасні моделі ТЕМ з високою роздільною здатністю можуть мати роздільну здатність понад $0,5 \text{ \AA}$ і збільшення більше ніж у 50 мільйонів разів. Для порівняння, найкраща роздільна здатність, отримана за допомогою світлової мікроскопії, наразі становить близько 97 нм. Обмеження ТЕМ полягає в тому, що зразки повинні мати товщину приблизно 100 нм, а біологічні зразки вимагають спеціальної підготовки, що включає хімічну «фіксацію» для їх стабілізації для надтонкого нарізання.

Такі обмеження відсутні в скануючому електронному мікроскопі (SEM), який був винайдений Манфредом фон Арденном у 1937 році. У SEM типова енергія електронного променя становить до 40 кеВ, і промінь не пропускається через зразок, а розсипається на його поверхні. Топографію поверхні зразка реконструюють за допомогою аналізу електронів, розсіяних назад, електронів, що пройшли, і випромінювання, створеного електронами, які взаємодіють з атомами зразка. Роздільна здатність SEM краща за 1 нм, а збільшення може бути більш ніж у 250 разів краще, ніж у світлового мікроскопа. Зразки, скановані SEM, можуть мати розміри до кількох сантиметрів, але вони повинні бути спеціально підготовлені залежно від електричних властивостей зразка.

Щоб розширити як роздільну здатність, так і типи матеріалів, які можна досліджувати, Пратібха Л. Гай та Едвард Д. Бойс винайшли електронний мікроскоп навколишнього середовища (ETEM). Пристрій удосконалив стандартний електронний мікроскоп, включивши заповнену газом камеру, в якій може міститися більш широкий спектр речовин. Таким чином Гай та інші дослідники могли спостерігати реакції, що відбувалися при неймовірних збільшеннях. Пізніше Гай удосконалила свою роботу, створивши просвічуючий електронний мікроскоп для сканування навколишнього середовища (ESTEM), який має ще більшу роздільну здатність.

Великі збільшення TEM і SEM дозволяють побачити окремі молекули. Висока роздільна здатність TEM і SEM дозволяє нам побачити дрібні деталі, такі як ті, що показані на SEM мікрофотографії пилку на початку цього розділу (рис. 1.1). Користувачі ETEM і ESTEM можуть бачити навіть менші об'єкти: сама Гай була першою людиною, яка коли-небудь побачила окремі атоми. Пристрої використовуються для біологічних матеріалів, нанотехнологій, паливних елементів, каталізу та ряду інших застосувань.

Приклад 1.16. Роздільна здатність електронного мікроскопа

Якщо електронний промінь TEM з довжиною хвилі 1,0 пм проходить через 2,0 - мкм круглий отвір, який кут між двома точковими джерелами, які можна розділити, для цього мікроскопа?

Розв'язок

Ми можемо безпосередньо використати формулу для роздільної здатності $\Delta\theta$ мікроскопа, коли довжина хвилі падаючого випромінювання $\lambda = 1,0$ пм, а діаметр отвору становить $D = 2,0$ мкм:

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{1,0 \text{ пм}}{2,0 \text{ мкм}} = 6,1 \times 10^{-7} \text{ рад} = 3,5 \times 10^{-5} \text{ градусів.}$$

Обговорення

Зауважте, що якби ми використовували звичайний мікроскоп із світлом 400 нм, роздільна здатність була б лише 14° , це означає, що всі дрібні деталі зображення будуть розмитими.

Перевірте своє розуміння 1.15

Припустимо, що діаметр отвору в прикладі 1.16 зменшено вдвічі. Як це впливає на роздільну здатність?

Вправи до п 1.6. Корпускулярно-хвильовий дуалізм

1. Радіопередавач випромінює 500 кВт на частоті 760 кГц. Скільки фотонів за секунду випромінює випромінювач?
2. Знайдіть коефіцієнт Лоренца γ і довжину хвилі де Бройля для електрона з енергією 50 ГеВ у прискорювачі частинок.

3. Знайдіть коефіцієнт Лоренца γ і довжину хвилі де Бройля для протона 1,0 TeV у прискорювачі частинок.
4. Яка кінетична енергія електрона з довжиною хвилі де Бройля 0,01 нм у ТЕМ?
5. Якщо електрон має бути дифрагований на кристалі, його довжина хвилі повинна приблизно дорівнювати відстані d між кристалічними площинами. Припускаючи, що $d = 0,250$ нм, визначте різницю потенціалів, через яку електрон повинен бути прискорений зі стану спокою, щоб він дифрагував на цих площинах.
6. Рентгенівські промені утворюють іонізуюче випромінювання, яке є небезпечним для живих тканин і невиявленим для людського ока. Припустимо, що студент-дослідник, який працює в рентгенівській лабораторії, випадково отримав смертельну дозу радіації. Обчисліть підвищення температури дослідника за таких умов: енергія рентгенівських фотонів 200 кеВ і дослідник поглинає 4×10^{13} фотонів на кожен кілограм маси тіла під час експозиції. Вважати, що питома теплоємність тіла учня становить $0,83$ ккал/кг $\cdot$ К.
7. Сонячний вітер (випромінювання), що падає на верхні шари земної атмосфери, має середню інтенсивність $1,3$ кВт/м². Припустимо, що ви будете сонячне вітрило, яке має рухати маленький іграшковий космічний корабель масою $0,1$ кг у просторі між Міжнародною космічною станцією та Місяцем. Вітрило виготовлено з дуже легкого матеріалу, який чудово відбиває падаюче випромінювання. Щоб оцінити, чи такий проект здійснений, дайте відповідь на наступні запитання, припускаючи, що фотони випромінювання падають лише в нормальному напрямку до поверхні, що відбиває вітрило. (а) Який тиск випромінювання (сила на м²) випромінювання, що падає на дзеркальне вітрило? (б) Враховуючи радіаційний тиск, обчислений у (а), яким буде прискорення космічного корабля, коли вітрило має площу $10,0$ м²? (в) Враховуючи оцінку прискорення в (б), як швидко космічний корабель рухатиметься через 24 години, коли він стартує з місця?
8. Вважайте тіло людини чорним тілом і визначте, на скільки відсотків збільшується повна потужність його випромінювання, коли його температура підвищується від $98,6^\circ\text{F}$ до 103°F .
9. Покажіть, що закон переміщення Віна є результатом закону випромінювання Планка. (Підказка: замінити $x = hc/\lambda kT$ і запишіть закон Планка у вигляді $I(x, T) = Ax^5/(e^x - 1)$, де $A = 2\pi(kT)^5/(h^4c^3)$. Тепер для фіксованого T знайдіть положення максимуму в $I(x, T)$, розв'язавши x у рівнянні $dI(x, T)/dx = 0$.)
10. Покажіть, що закон Стефана є результатом закону випромінювання Планка. Підказка. Щоб обчислити загальну потужність випромінювання чорного тіла, випромінюваного в усьому спектрі довжин хвиль за заданої температури, проінтегруйте закон Планка по всьому спектру $P(T) = \int_0^\infty I(\lambda, T)d\lambda$. Використовуйте заміну $x = hc/\lambda kT$ і табличне значення інтеграла:

$$\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)dx = \pi^4/15.$$

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

1.1. Випромінювання чорного тіла

1. Яка поверхня має вищу температуру – поверхня жовтої зірки чи поверхня червоної зірки?
2. Опишіть, що ви побачите, дивлячись на тіло, температура якого зросла від 1000 K до 1 000 000 K.
3. Поясніть, як змінюється колір гарячого тіла при підвищенні його температури.
4. Поясніть, чому ультрафіолетове світло викликає сонячні опіки, а видиме – ні.
5. Два порожнинних радіатора виготовлені зі стінками з різних металів. Чим відрізнятимуться їхні спектри випромінювання за однакової температури?
6. Поясніть, чому одні тіла здаються чорними, інші — червоними, а треті — білими.
7. Якщо все випромінює електромагнітну енергію, чому ми не можемо побачити предмети кімнатної температури в темній кімнаті?
8. Наскільки збільшується потужність, випромінювана чорним тілом, коли його температура (в K) збільшується втричі?

1.2. Фотоелектричний ефект

9. Для одного і того ж монохроматичного джерела світла, чи виникне фотоефект для всіх металів?
10. Звідки в інтерпретації фотоефекту відомо, що електрон не поглинає більше одного фотона?
11. Поясніть, як можна визначити роботу виходу за графіком залежності гальмівного потенціалу від частоти падаючого випромінювання в експерименті з фотоелектричного ефекту. Чи можете ви визначити значення сталої Планка за цим графіком?
12. Припустимо, що в експерименті з фотоелектричним ефектом ми будемо графік залежності виявленого струму від прикладеної різниці потенціалів. Яку інформацію ми отримуємо з такого графіку? Чи можна по ньому визначити значення сталої Планка? Чи можна визначити роботу виходу металу?
13. Поясніть, як підвищення температури фотоелектрода впливає на результати експерименту з фотоелектричним ефектом.
14. Які аспекти фотоефекту не можна пояснити класичною фізикою?
15. Фотоефект є наслідком хвильового характеру випромінювання чи це наслідок корпускулярного характеру випромінювання? Поясніть коротко.
16. Метали натрій, залізо і молібден мають роботу виходу 2,5 eV, 3,9 eV і 4,2 eV відповідно. Який із цих металів випромінює фотоелектрони при освітленні світлом з довжиною хвилі 400 нм?

1.3. Ефект Комптона

17. Які подібності та відмінності між фотоелектричним ефектом і ефектом Комптона.
18. Що має більший імпульс: УФ фотон чи ІЧ фотон?
19. Чи впливає зміна інтенсивності монохроматичного світлового променя на імпульс окремих фотонів у пучку? Чи впливає така зміна на підсумковий імпульс променя?
20. Чи може ефект Комптона виникнути у видимому світлі? Якщо так, чи буде це виявлено?
21. Чи можна в експерименті Комптона спостерігати розсіяне рентгенівське випромінювання, яке має коротшу довжину хвилі, ніж падаюче рентгенівське випромінювання?
22. Покажіть, що комптонівська довжина хвилі має розмірність довжини.
23. При якому куті розсіювання зміщення довжини хвилі в ефекті Комптона дорівнює довжині хвилі Комптона?

1.4. Модель атома водню Бора

24. Поясніть, чому картини яскравих ліній спектру випромінювання мають ідентичне спектральне положення картині темних ліній спектру поглинання для даного газоподібного елемента.
25. Чи перекриваються різні спектральні лінії атома водню?
26. Серія Бальмера для водню була відкрита раніше або серії Лаймана, або серії Пашена? Чому?
27. При аналізі спектру поглинання водню при кімнатній температурі виявлено лінії поглинання для серії Лаймана, але не знайдено жодної для серії Бальмера. Що це говорить нам про енергетичний стан більшості атомів водню при кімнатній температурі?
28. На водень припадає близько 75% маси речовини на поверхні більшості зірок. Однак лінії поглинання водню є найсильнішими (з найвищою інтенсивністю) у спектрах зірок із температурою поверхні близько 9000 К. Вони слабші в сонячному спектрі й практично відсутні в дуже гарячих (температури вище 25 000 К) і холодних (температури нижче 3500 К) зірках. Поміркуйте, чому температура поверхні впливає на лінії поглинання водню, які ми спостерігаємо?
29. У чому полягає подібність і відмінності між моделлю атома водню Томсона та моделлю атома водню Бора?
30. Чому модель Томсона є нефізичною? Підтвердьте свій аргумент експериментальними доказами.
31. Якщо в атомі водню електрон переходить на орбіту з більшим радіусом, енергія атома водню збільшується чи зменшується?
32. Як зберігається енергія, коли атом здійснює перехід із вищого енергетичного стану в нижчий?

33. Припустимо, що електрон в атомі водню здійснює перехід з $(n + 1)$ -ї орбіти на n -ую орбіту. Довжина хвилі випромінюваного фотона є більшою для більших значень n чи для менших значень n ?
34. Поясніть, чому дозволені енергії атома водню від'ємні.
35. Чи може атом водню поглинути фотон, енергія якого перевищує 13,6 еВ?
36. Чому через скло можна бачити, а через дерево – ні?
37. Чи мають сили гравітації значний вплив на рівні атомної енергії?
38. Покажіть, що стала Планка має розмірність кутового моменту.

1.5. Хвилі матерії де Бройля

39. Який тип випромінювання найбільш підходить для спостереження дифракційних картин на твердих кристалічних тілах; радіохвилі, видиме світло чи рентгенівські промені? Поясніть.
40. Поясніть, як це вплине на дифракційну картину типового кристала, якщо б використовувалися γ -промені замість рентгенівських променів.
41. Якщо електрон і протон рухаються з однаковою швидкістю, який із них має коротшу довжину хвилі де Бройля?
42. Якщо частинка прискорюється, як це впливає на її довжину хвилі де Бройля?
43. Чому хвилеподібна природа матерії не спостерігається щодня для макроскопічних об'єктів?
44. Яка довжина хвилі нейтрона в стані спокою? Поясніть.
45. Чому установку для експерименту Девіссона–Джермера потрібно поміщати у вакуумну камеру? Обговоріть, якого результату ви очікуєте, коли камеру не вакууюють.

1.6. Корпускулярно-хвильовий дуалізм

46. Наведіть приклад досліду, у якому світло поводить себе як хвиля. Наведіть приклад експерименту, у якому світло поводить себе як потік фотонів.
47. Чим інтерференція водних хвиль відрізняється від інтерференції електронів? У чому вони аналогічні?
48. Наведіть хоча б один аргумент на підтримку гіпотези матерії-хвилі.
49. Наведіть хоча б один аргумент на підтримку корпускулярної природи випромінювання.
50. Поясніть важливість експерименту Юнга з подвійною щілиною.
51. Чи дозволяє принцип невизначеності Гейзенберга частинці перебувати в стані спокою у визначеній області простору?
52. Чи можна точно знати довжину хвилі де Бройля частинки?
53. Чи дають фотони червоного світла кращу роздільну здатність у мікроскопі, ніж фотони синього світла? Поясніть.
54. Обговоріть головну різницю між SEM і TEM.

ОСНОВИ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ

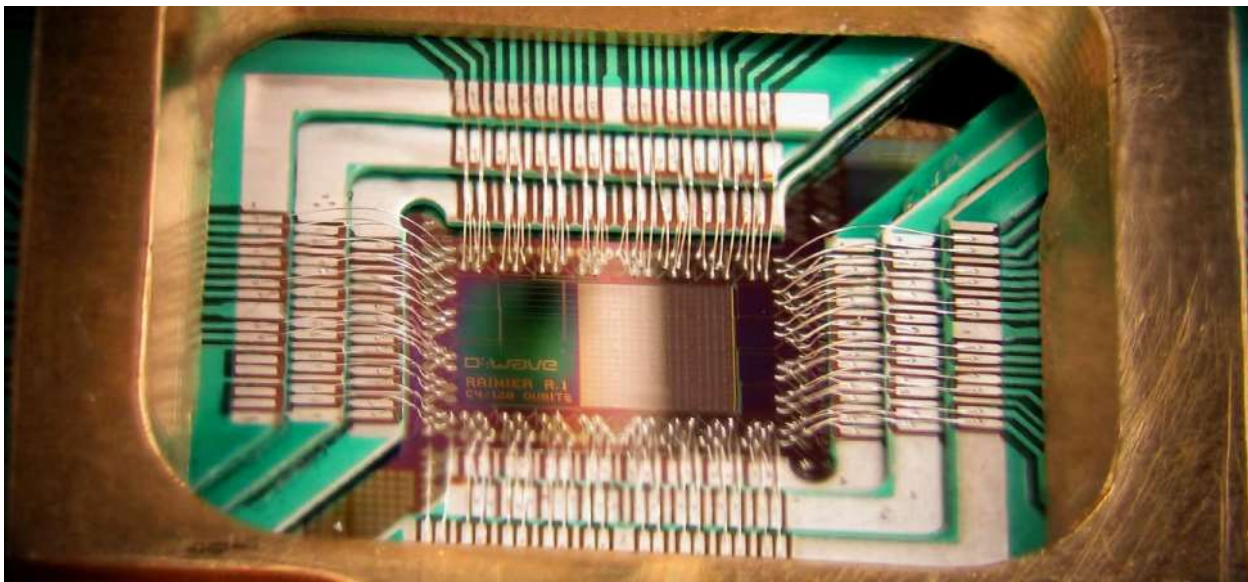


Рис. 2.1. Кубітний процесор D-хвилі: мозок квантового комп'ютера, який кодує інформацію в квантових бітах для виконання складних обчислень

Квантова механіка є потужною основою для розуміння руху та взаємодії частинок у малих масштабах, таких як атоми та молекули. Ідеї квантової механіки часто здаються досить дивними. Багато в чому наш щоденний досвід роботи з макроскопічним фізичним світом не готує нас до мікроскопічного світу квантової механіки. Мета цього розділу — познайомити вас із цим захоплюючим світом. На зображенні вище — процесор квантового комп'ютера. Цей пристрій є «мозком» квантового комп'ютера, який працює при температурах, близьких до абсолютного нуля. На відміну від цифрового комп'ютера, який кодує інформацію двійковими цифрами (певні стани нуля або одиниці), квантовий комп'ютер кодує інформацію квантовими бітами або кубітами (змішані стани нуля *та* одиниці). Квантові комп'ютери обговорюються в першому підрозділі цього розділу.

2.1. Хвильові функції

У попередньому розділі ми побачили, що частинки в одних випадках діють як частинки, а в інших випадках як хвилі. Але що означає для частинки «діяти як хвиля»? Що саме таке «коливання»? Які правила керують тим, як ця хвиля змінюється та поширюється? Як хвильова функція використовується для

прогнозування? Наприклад, якщо амплітуда електронної хвилі задана функцією положення та часу, $\Psi(x, t)$, визначеною для всіх x , де саме знаходиться електрон? Мета цього розділу — відповісти на ці запитання.

Використання хвильової функції

Ключ до фізичного сенсу хвильової функції $\Psi(x, t)$, забезпечується двощілинною інтерференцією монохроматичного світла (рис. 2.2).

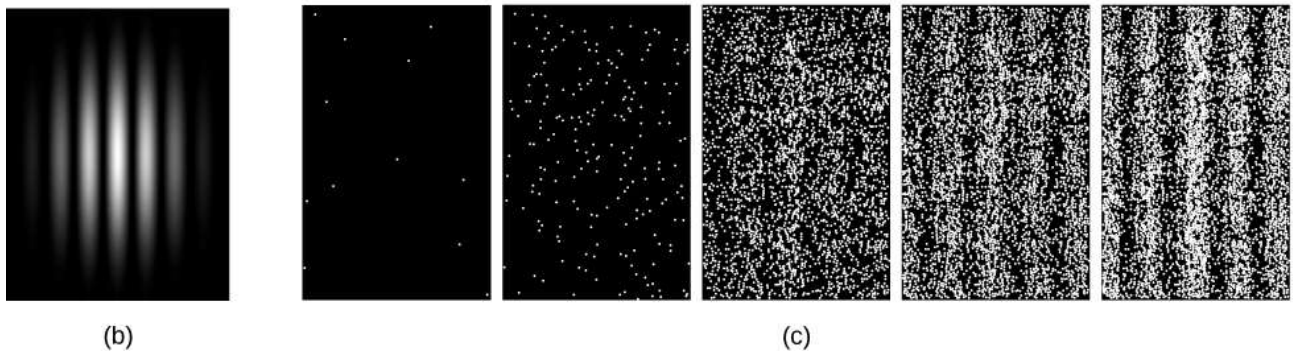
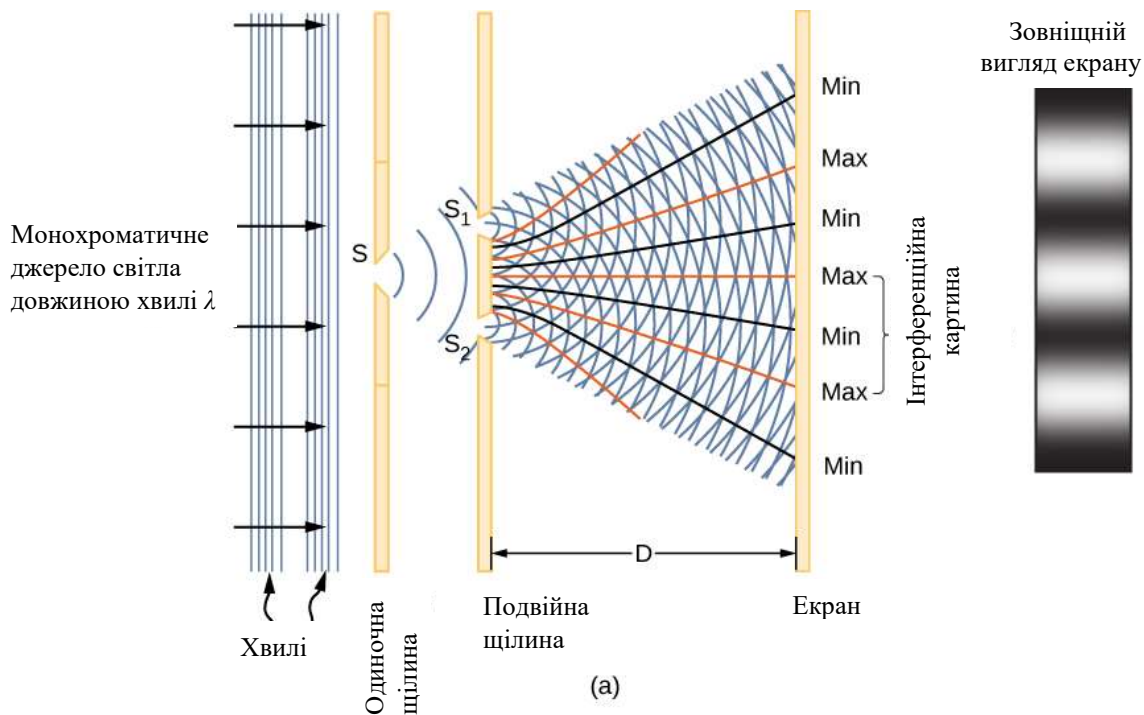


Рис. 2.2. Двощілинна інтерференція монохроматичного світла. (a) Схема двощілинної інтерференції; (b) світлова інтерференційна картина; (c) інтерференційна картина, що поступово створюється світлом низької інтенсивності (зліва направо)

Хвильова функція світлової хвилі визначається як $E(x, t)$, а густина її енергії — як $|E|^2$, де E — напруженість електричного поля. Енергія окремого фотона залежить тільки від частоти світла, $\varepsilon_{\text{фотон}} = hf$, отже $|E|^2$ пропорційна кількості фотонів. Коли хвилі світла від джерела S_1 накладаються на відстані D на світлові хвилі від джерела S_2 на екрані утворюється інтерференційна картина (рис. 2.2(a)). Світлі смуги відповідають точкам конструктивної інтерференції

світлових хвиль, а темні — точкам деструктивної інтерференції світлових хвиль (рис. 2.2(b)).

Припустимо, що спочатку на екран не потрапляє світло. Якщо на екран потрапляє дуже слабе світло, інтерференційна картина з'являється поступово (рис. 2.2 (с), зліва направо). Окремі попадання фотонів на екрані відображаються у вигляді крапок. Очікується, що щільність точок буде великою в місцях, де інтерференційна картина буде, зрештою, найінтенсивнішою. Іншими словами, ймовірність (на одиницю площі) того, що один фотон попаде в певну точку на екрані, пропорційна квадрату повного електричного поля $|E|^2$ в той момент. За відповідних умов така ж інтерференційна картина розвивається для частинок речовини, наприклад електронів.

Квадрат модуля хвилі речовини $|\Psi|^2$ в одному вимірі має подібну інтерпретацію як квадрат електричного поля $|E|^2$. Ймовірність того, що частинка буде знайдена в певному положенні та в певний час на одиницю довжини, називається **густина ймовірності**. Таким чином, ймовірність (P) того, що частинка буде знайдена у вузькому інтервалі $(x, x + dx)$ у момент часу t визначається виразом:

$$P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx. \quad (2.1)$$

Ця ймовірнісна інтерпретація хвильової функції називається **інтерпретацією Борна**. Приклади хвильових функцій та їх квадратів для певного часу t наведено на рис. 2.3.

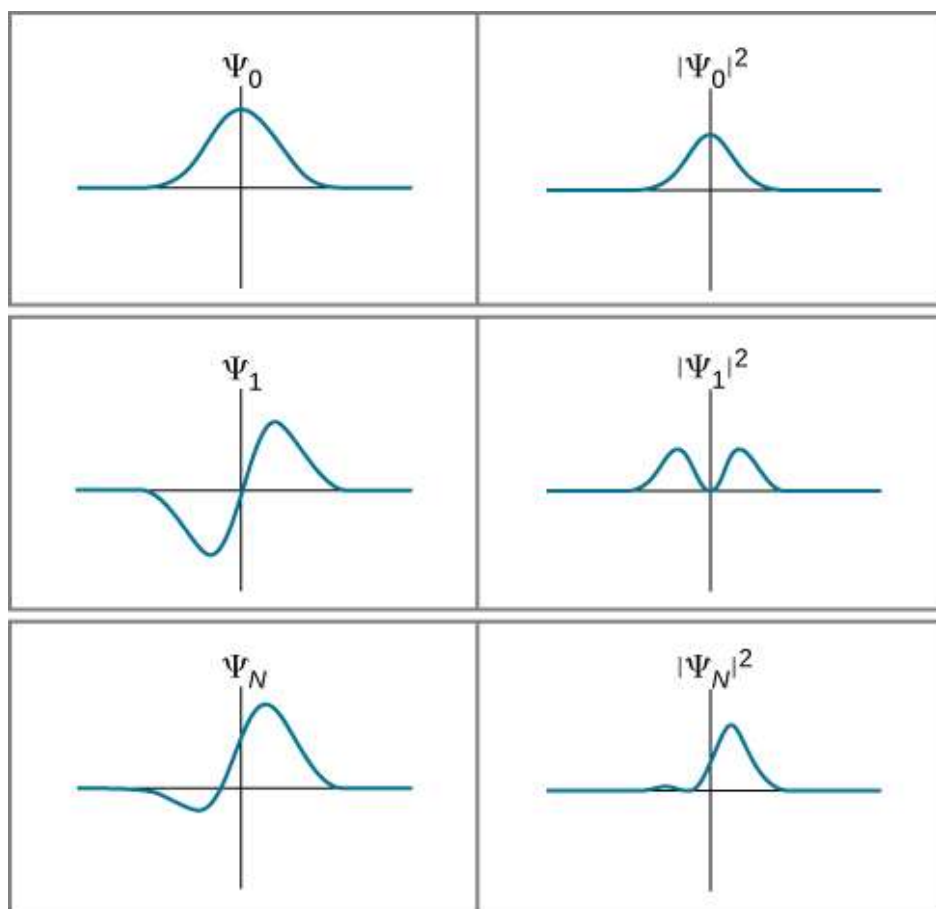


Рис. 2.3. Кілька прикладів хвильових функцій і відповідний квадрат їхніх модулів

Якщо хвильова функція повільно змінюється на інтервалі Δx , ймовірність виявлення частинки в інтервалі Δx дорівнює приблизно:

$$P(x, x + \Delta x) \approx |\Psi(x, t)|^2 \Delta x. \quad (2.2)$$

Зауважте, що зведення хвильової функції в квадрат гарантує, що ймовірність додатна. Однак, якщо хвильова функція змінюється повільно, ми повинні проінтегрувати:

$$P(x, x + \Delta x) \approx \int_x^{x+\Delta x} |\Psi(x, t)|^2 dx. \quad (2.3)$$

Ця ймовірність є просто площею під функцією $|\Psi(x, t)|^2$ між x і $x + \Delta x$. Ймовірність знайти частинку «десь» (**умова нормування**) становить:

$$P(-\infty, +\infty) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (2.4)$$

Для частинки у двох вимірах інтегрування відбувається по площі та вимагає подвійного інтеграла; для частинки в трьох вимірах інтегрування відбувається за об'ємом і вимагає потрійного інтеграла. Наразі ми дотримуємося простого одновимірного випадку.

Приклад 2.1. Де м'яч? (Частина I)

М'яч змушений рухатися по лінії всередині труби довжиною L . З рівною ймовірністю кулька буде знайдена будь-де в трубі в деякий час t . Яка ймовірність того, що кулька в цей час опиниться в лівій половині труби? (Відповідь, звичайно, 50%, але як отримати цю відповідь, використовуючи ймовірнісну інтерпретацію квантово-механічної хвильової функції)?

Стратегія

Першим кроком є запис хвильової функції. М'яч можна знайти будь-де в трубі, тому один із способів описати м'яч постійною *хвильовою* функцією (рис. 2.4). Умову нормалізації можна використати для знаходження значення функції, а просте інтегрування по половині прямокутника дає остаточну відповідь.

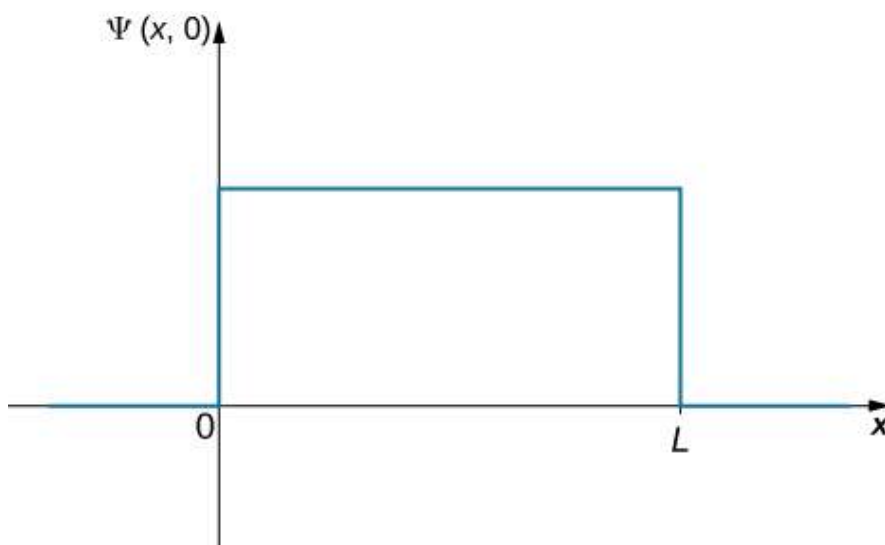


Рис. 2.4. Хвильова функція для кульки в трубі довжиною L

Розв'язок

Хвильову функцію кулі можна записати як $\Psi(x, t) = C$ ($0 < x < L$), де C – константа, і $\Psi(x, t) = 0$ в інших місцях. Ми можемо визначити постійну C , застосувавши умову нормалізації (встановимо $t = 0$ для спрощення позначення):

$$P(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} |C|^2 dx = 1.$$

Цей інтеграл можна розбити на три частини: (1) негативна нескінченність до нуля, (2) від нуля до L і (3) від L до нескінченності. Частинка змушена бути в трубці, тому $C = 0$ за межами трубки, а перше та останнє інтегрування дорівнюють нулю. Отже, наведене вище рівняння можна записати так:

$$P(x = 0, L) = \int_0^L |C|^2 dx = 1.$$

Величина C не залежить від x і може бути винесена з інтеграла, тому отримуємо:

$$|C|^2 \int_0^L dx = 1.$$

З цього виразу отримуємо:

$$C = \sqrt{\frac{1}{L}}.$$

Визначаємо ймовірність знаходження м'яча в першій половині інтервалу ($0 < x < L$):

$$P(x = 0, L/2) = \int_0^{L/2} \left| \sqrt{\frac{1}{L}} \right|^2 dx = \left(\frac{1}{L} \right) \frac{L}{2} = 0,5.$$

Обговорення

Ймовірність виявлення м'яча в першій половині труби становить 50%, як і очікувалося. Заслуговують на увагу два спостереження. По-перше, цей результат відповідає площі під постійною функцією від $x = 0$ до $L/2$ (площа квадрата зліва від $L/2$). По-друге, цей розрахунок вимагає інтегрування квадрата хвильової функції. Поширеною помилкою при виконанні таких обчислень є забуття квадратури хвильової функції перед інтегруванням.

Приклад 2.2. Де м'яч? (Частина II)

М'яч знову змушений рухатися по лінії всередині труби довжиною L . Цього разу м'яч знаходиться переважно в середині труби. Один із способів представлення його хвильової функції — це проста функція косинуса (рис. 2.5). Яка ймовірність знайти кульку в останній чверті труби?

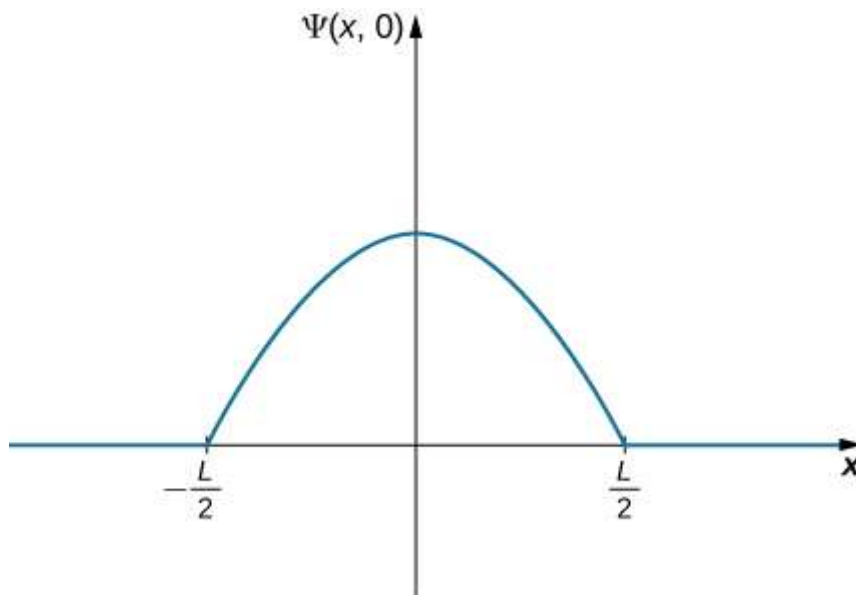


Рис. 2.5. Хвильова функція для кульки в трубці довжиною L , де кулька переважно знаходиться в середині труби.

Стратегія

Ми використовуємо ту ж стратегію, що й раніше. У цьому випадку хвильова функція має дві невідомі константи: одна пов'язана з довжиною хвилі, а інша – амплітудою хвилі. Визначаємо амплітуду за допомогою граничних умов задачі, а довжину хвилі оцінюємо за умовою нормування. Інтегрування квадрата хвильової функції по останній чверті трубки дає остаточну відповідь. Розрахунок спрощується завдяки центруванню нашої системи координат на піку хвильової функції.

Розв'язок

Хвильову функцію кулі можна записати так:

$$\Psi(x, 0) = A \cos(kx), \quad (-L/2 < x < L/2),$$

де A – амплітуда хвильової функції і $k = 2\pi/\lambda$ є його хвильовим числом. За межами цього інтервалу амплітуда хвильової функції дорівнює нулю, оскільки положення кульки обмежено трубою. Вимога, щоб хвильова функція закінчувалася на правому кінці трубки, дає:

$$\Psi(x = L/2, 0) = 0.$$

Оцінка хвильової функції при $x = L/2$ дає:

$$A \cos(kL/2) = 0.$$

Це рівняння виконується, якщо аргумент косинуса є цілим кратним $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ і так далі. У цьому випадку маємо:

$$\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2},$$

або

$$k = \frac{\pi}{L}.$$

Застосування умови нормування дає $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$, тому хвильова функція кулі дорівнює:

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\pi x/L), -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}.$$

Щоб визначити ймовірність знаходження кульки в останній чверті труби, зведемо функцію в квадрат та проінтегруємо:

$$P(x = L/4, L/2) = \int_{L/4}^{L/2} \left| \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right|^2 dx = 0,091.$$

Обговорення

Ймовірність знайти м'яч в останній чверті труби становить 9,1%. Куля має певну довжину хвилі ($\lambda = 2L$). Якщо трубка має макроскопічну довжину ($L = 1$ м), імпульс кулі становить:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L} = \sim 10^{-36} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Цей імпульс занадто малий, щоб його виміряти будь-яким людським інструментом.

Інтерпретація хвильової функції

Тепер ми можемо почати відповідати на запитання, поставлені на початку цього розділу. По-перше, для мандрівної частинки, описаної $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, що таке "коливання?" Виходячи з наведеного вище обговорення, відповідь є математичною функцією, яка, серед іншого, може бути використана для визначення того, де ймовірно буде знаходитися частинка під час вимірювання положення.

По-друге, як хвильова функція використовується для прогнозування? Якщо необхідно знайти ймовірність того, що частинка буде знайдена в певному інтервалі, зведіть хвильову функцію в квадрат та проінтегруйте по цікавому інтервалу. Невдовзі ви дізнаєтесь, що хвильову функцію також можна використовувати для створення багатьох інших видів передбачень.

По-третє, якщо матеріальна хвиля задана хвильовою функцією $\Psi(x, t)$, де саме знаходиться частинка? Існує дві відповіді: (1) коли спостерігач *не* дивиться (або частинку не виявляють іншим чином), частинка всюди ($x = -\infty, +\infty$); і (2) коли спостерігач *дивиться* (частинка виявляється), частинка «стрибає» в певний стан положення $(x, x + dx)$ з імовірністю, визначеною $P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx$ — процес, який називається **зменшенням стану** або **колапсом хвильової функції**. Ця відповідь називається **Копенгагенською інтерпретацією** хвильової функції або квантової механіки.

Щоб проілюструвати цю інтерпретацію, розглянемо простий випадок частинки, яка може займати в невеликому контейнері положення або x_1 або x_2 (рис. 2.6).

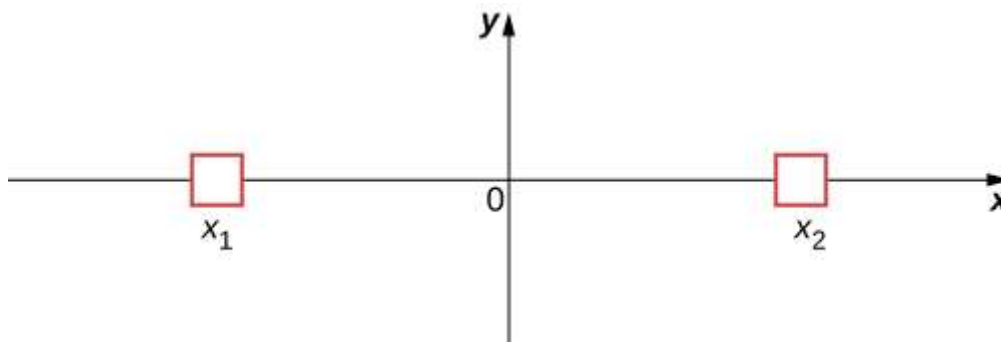


Рис. 2.6. Система розташування частинки з двома станами

У класичній фізиці ми припускаємо, що частинка розташована або в x_1 або x_2 , коли спостерігач не дивиться. Однак у квантовій механіці частинка може існувати в стані невизначеного положення, тобто вона може перебувати в x_1 і x_2 , коли спостерігач не дивиться. Від припущення, що частинка може мати лише одне значення положення (коли спостерігач не дивиться), відмовляються. Подібні коментарі можна зробити щодо інших вимірних величин, таких як імпульс і енергія.

Дивні наслідки копенгагенської інтерпретації квантової механіки проілюстровано творчим мисленнєвим експериментом, вперше сформульованим Ервіном Шредінгером (*National Geographic*, 2013) (рис. 2.7): «Кота поміщають у сталевий ящик разом із лічильником Гейгера, флаконом з отрутою, молотком і радіоактивною речовиною. Коли радіоактивна речовина розпадається, Гейгер виявляє це і запускає молоток, щоб випустити отруту, яка згодом вбиває кота.

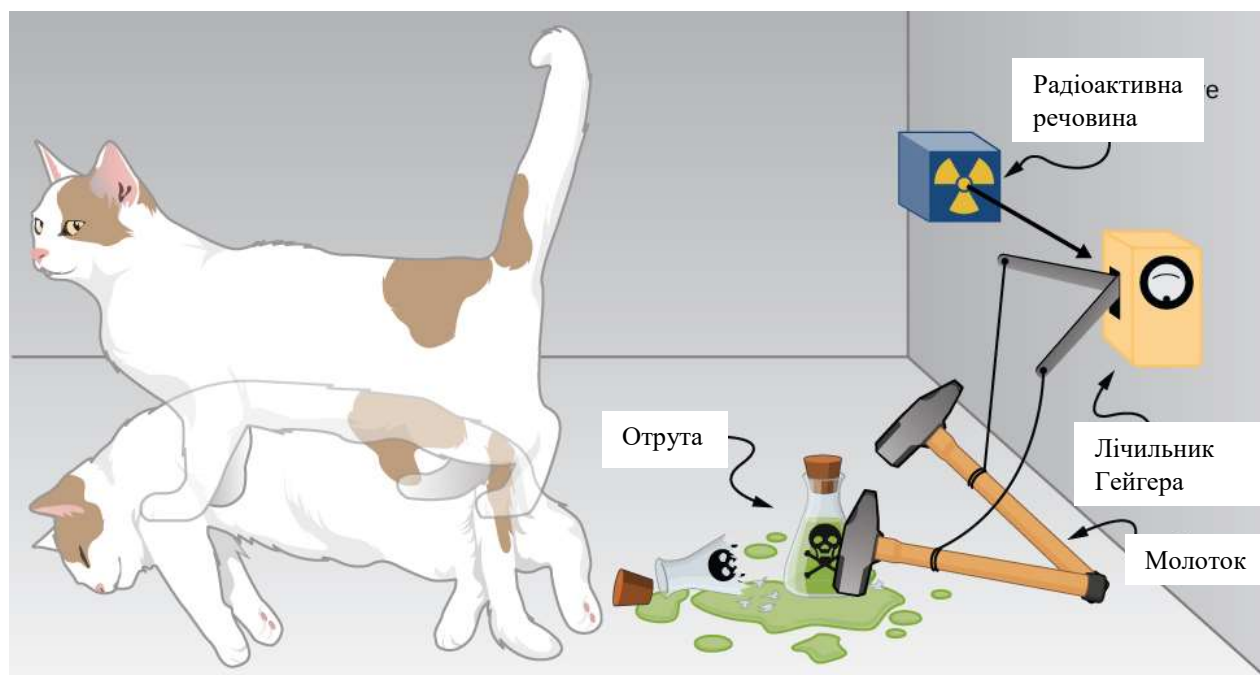


Рис. 2.7. Кішка Шредінгера

Радіоактивний розпад є випадковим [імовірнісним] процесом, і неможливо передбачити, коли це станеться. Фізики кажуть, що атом існує в стані, відомому як суперпозиція, — як розпався, так і не розпався одночасно. Поки коробка не відкрита, спостерігач не знає, живий кіт чи мертвий, тому що доля kota нерозривно пов'язана з тим, чи розпався атом, і чи буде кіт [згідно з копенгагенською інтерпретацією] «живим» чи мертвим...

Шредінгер взяв абсурдні наслідки цього мисленнєвого експерименту (кіт живий і мертвий водночас) як аргумент проти копенгагенської інтерпретації. Однак ця інтерпретація залишається найбільш поширеним поглядом на квантову механіку

Системи з двома станами (лівий і правий, атом розпадається і не розпадається тощо) часто використовуються для ілюстрації принципів квантової механіки. Ці системи знаходять багато застосувань у природі, включаючи спіни електронів і змішані стани частинок, атомів і навіть молекул. Системи з двома станами також знаходять застосування в квантовому комп'ютері, як згадувалося у вступі до цієї глави. На відміну від цифрового комп'ютера, який кодує інформацію у двійкових цифрах (нулі та одиниці), квантовий комп'ютер зберігає та обробляє дані у формі квантових бітів або кубітів. Загалом, кубіт не знаходиться в стані нуль або одиниця, а скоріше в змішаному стані нуль і одиниця. Якщо велику кількість кубітів помістити в один і той же квантовий стан, вимірювання окремого кубіта дасть нуль з ймовірністю p , а одиницю з ймовірністю $q = 1 - p$. Багато вчених вважають, що за квантовими комп'ютерами майбутнє комп'ютерної індустрії.

Комплексно спряжена хвильова функція

Далі в цьому розділі ви побачите, як використовувати хвильову функцію для опису частинок, які є «вільними» або пов'язаними силами з іншими частинками. Конкретна форма хвильової функції залежить від деталей фізичної системи. Особливістю квантової теорії є те, що ці функції зазвичай є **комплексними функціями**. Складна функція — це функція, яка містить одне або кілька уявних чисел ($i = \sqrt{-1}$). Експериментальні вимірювання дають лише дійсні (неуявні) числа, тому наведену вище процедуру використання хвильової функції потрібно дещо змінити. Загалом, ймовірність того, що частинка буде знайдена у вузькому інтервалі $(x, x + dx)$ у момент часу t , визначається так:

$$P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx, \quad (2.5)$$

де $\Psi^*(x, t)$ є комплексно спряженою хвильовою функцією. Комплексно спряжену функцію отримують шляхом заміни кожного $i = \sqrt{-1}$ в цій функції на $-i$. Ця процедура усуває комплексні числа в усіх прогнозах, оскільки добуток $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$ завжди дійсне число.

Перевірте своє розуміння 2.1

Якщо $a = 3 + 4i$, який продукт отримуємо в результаті a^*a ?

Розглянемо рух вільної частинки, яка рухається вздовж x -напрямку. Як випливає з назви, вільна частинка не відчуває жодних сил і тому рухається з постійною швидкістю. Як ми побачимо далі, формальна квантово-механічна обробка руху вільної частинки вказує на те, що її хвильова функція має дійсну та комплексну частини. Зокрема, хвильова функція задана формулою:

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + i A \sin(kx - \omega t),$$

де A – амплітуда, k – хвильове число, ω – кутова частота.

Використовуючи формулу Ейлера,

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi),$$

це рівняння можна записати у вигляді:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = A e^{i\phi},$$

де ϕ – фазовий кут. Якщо хвильова функція повільно змінюється на інтервалі Δx , ймовірність знайти частинку в цьому інтервалі дорівнює:

$$P(x, x + \Delta x) \approx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \Delta x = (A e^{-i\phi}) (A e^{i\phi}) \Delta x = (A^* A) \Delta x.$$

Якщо A має дійсну і комплексну частини ($a + i b$, де a і b — дійсні константи), тоді

$$A A^* = (a + i b)(a - i b) = a^2 + b^2.$$

Зверніть увагу, що комплексні числа зникли. Таким чином,

$$P(x, x + \Delta x) \approx |A|^2 \Delta x.$$

є реальною величиною. Інтерпретація $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$ як густина ймовірності гарантує, що прогнози квантової механіки можна перевірити в «реальному світі».

Перевірте своє розуміння 2.2

Припустимо, що частинка з енергією E рухається вздовж осі x і утримується в області між 0 і L . Однією з можливих хвильових функцій є

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A e^{-iEt/\hbar} \sin \frac{\pi x}{L}, & \text{коли } 0 \leq x \leq L, \\ 0, & \text{у іншому випадку.} \end{cases}$$

Визначте константу нормування.

Очікувані значення

У класичній механіці розв'язок рівняння руху є функцією вимірної величини, наприклад $x(t)$, де x — координата, а t — час. Зверніть увагу, що частинка має одне значення положення для будь-якого часу t . Однак у квантовій механіці розв'язком рівняння руху є хвильова функція, $\Psi(x, t)$. Частинка має багато значень положення для будь-якого часу t , і можна знати лише густину ймовірності знаходження частинки $|\Psi(x, t)|^2$. Середнє значення положення для великої кількості частинок з однаковою хвильовою функцією дорівнює:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx. \quad (2.6)$$

Це називається **математичним очікуванням** позиції. Зазвичай це пишеться так:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx, \quad (2.7)$$

де x затиснуто між хвильовими функціями. Причина цього незабаром стане очевидною. Формально x називають **оператором позиції**.

На цьому етапі важливо підкреслити, що хвильову функцію можна також записати в термінах інших величин, таких як швидкість (v), імпульс (p) і кінетична енергія (K). Можна записати, наприклад, очікуване значення імпульсу так:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(p, t) p \Psi(p, t) dp, \quad (2.8)$$

де dp використовується замість dx для позначення нескінченно малого інтервалу імпульсу. У деяких випадках ми знаємо хвильову функцію в позиції, $\Psi(x, t)$, але шукатиме очікування імпульсу. Процедура для цього така:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi(x, t) dx, \quad (2.9)$$

де величину в дужках, що затиснута між хвильовими функціями, називають **оператором імпульсу** в напрямку x . [Оператор імпульсу в рівнянні 2.9 називають позиційно-просторовим представленням оператора імпульсу]. Оператор імпульсу повинен діяти на хвильову функцію праворуч, а потім результат потрібно помножити на комплексно спряжену хвильову функцію ліворуч до інтегрування. Іноді позначають оператор імпульсу в напрямку x так:

$$(p_x)_{op} = -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (2.10)$$

Аналогічно визначаються оператори імпульсу для напрямків y та z . Цей оператор і багато інших виводяться в більш складному курсі сучасної фізики. У деяких випадках це виведення є відносно простим. Наприклад, **оператор кінетичної енергії** визначається так:

$$(K)_{op} = \frac{1}{2} m (v_x)_{op}^2 = \frac{(p_x)_{op}^2}{2m} = \frac{\left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d}{dx} \right). \quad (2.11)$$

Таким чином, якщо ми шукаємо очікуване значення кінетичної енергії частинки в одному вимірі, перед інтегруванням потрібні дві послідовні перші похідні хвильової функції.

Обчислення очікуваного значення часто спрощують за рахунок використання симетрії хвильових функцій. Симетричні хвильові функції можуть бути парними або непарними. Парна **функція** – це функція, яка задовольняє умові:

$$\psi(x) = \psi(-x). \quad (2.12)$$

Навпаки, **непарна функція** — це функція, яка задовольняє умові:

$$\psi(x) = -\psi(-x). \quad (2.13)$$

Приклад парних і непарних функцій показано на рис. 2.8.

Парна функція є симетричною відносно осі y . Ця функція створюється відображенням $\psi(x)$ для $x > 0$ відносно вертикальної осі y . Для порівняння, непарна функція генерується шляхом відображення функції навколо осі y , а потім відносно осі x . (Непарну функцію також називають **антисиметричною функцією**).

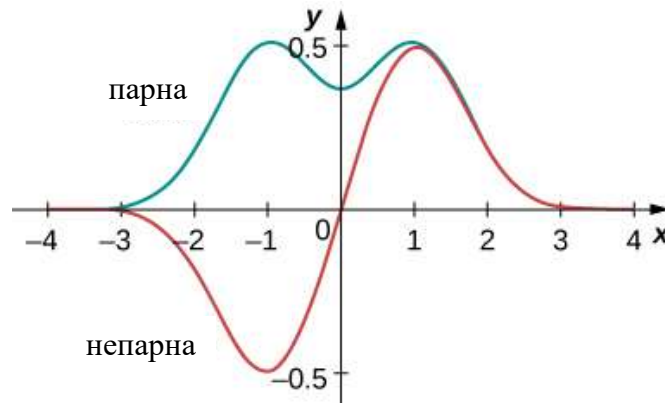


Рис. 2.8. Приклади парних і непарних хвильових функцій

Загалом, парна функція, помножена на парну функцію, дає парну функцію. Простим прикладом парної функції є добуток $x^2 e^{-x^2}$. Подібним чином, непарна функція, помножена на непарну, дає парну функцію, наприклад $x \sin x$ (непарне, помножене на непарне, є парним). Однак помноження непарної функції на парну функцію створює непарну функцію, наприклад, $x e^{-x^2}$ (непарний на парний є непарним). Інтеграл по всьому простору непарної функції дорівнює нулю, оскільки загальна площа функції над віссю x скасовує (негативну) площу під нею. Як показує наступний приклад, ця властивість непарних функцій дуже корисна.

Приклад 2.3. Очікуване значення (частина I)

Нормована хвильова функція частинки

$$\psi(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{x_0}}}{\sqrt{x_0}}.$$

Знайти очікуване значення позиції.

Стратегія

Підставте хвильову функцію в рівняння 2.7 і обчисліть. Оператор позиції вводить лише мультиплікативний множник, тому оператор позиції не потрібно «затискати».

Розв'язок

Спочатку помножте, потім проінтегруйте:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \left| \frac{e^{-\frac{|x|}{x_0}}}{\sqrt{x_0}} \right|^2 = \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x e^{-2|x|/x_0} = 0.$$

Обговорення

Функція під інтегралом ($x e^{-2|x|/x_0}$) є непарною, оскільки є добутком непарної функції (x) на парну функцію ($e^{-2|x|/x_0}$). Інтеграл дорівнює нулю,

оскільки загальна площа функції над оссю x скасовує (негативну) площу під нею. Результат ($\langle x \rangle = 0$) не дивний, оскільки функція густини ймовірності симетрична відносно $x = 0$.

Приклад 2.4. Очікуване значення (частина II)

Залежна від часу хвильова функція частинки, обмежена областю між 0 і L ,

$$\psi(x, t) = Ae^{-i\omega t} \sin(\pi x / L),$$

де ω – кутова частота, а E – енергія частинки.

Коли $x = 0$, синус дорівнює нулю, і хвильова функція дорівнює нулю, що відповідає граничним умовам. Обчисліть математичне очікування положення, імпульсу та кінетичної енергії.

Стратегія

Ми повинні спочатку нормалізувати хвильову функцію, щоб знайти A . Потім ми використовуємо оператори для обчислення очікуваних значень.

Розв'язок

Розрахунок константи нормування:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^L dx \psi^*(x) \psi(x) = \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \left(Ae^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) = \\ &= A^2 \int_0^L dx \sin^2 \frac{\pi x}{L} = A^2 \frac{L}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \end{aligned}$$

Математичне очікування позиції

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^L dx \psi^*(x) x \psi(x) = \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) x \left(Ae^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) = \\ &= A^2 \int_0^L dx x \sin^2 \frac{\pi x}{L} = A^2 \frac{L^2}{4} = \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Середнє значення імпульсу в напрямку x також потребує інтеграла. Щоб встановити цей інтеграл, асоційований оператор повинен — за правилом — діяти праворуч на хвильову функцію $\psi(x)$:

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} Ae^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} = -i \frac{\hbar A}{2L} e^{-i\omega t} \cos \frac{\pi x}{L}.$$

Отже, очікуване значення імпульсу дорівнює:

$$\langle p \rangle = \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \left(-i \frac{\hbar A}{2L} e^{-i\omega t} \cos \frac{\pi x}{L} \right) = -i \frac{\hbar A^2}{4L} \int_0^L dx \sin \frac{2\pi x}{L} = 0.$$

Функція в інтегралі є функцією синусоїди з довжиною хвилі, яка дорівнює ширині L , — непарна функція щодо $x = L/2$. У результаті інтеграл є в нуль.

Математичне очікування кінетичної енергії в напрямку x вимагає, щоб відповідний оператор діяв на хвильову функцію:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} A e^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{A \hbar^2}{8mL^2} e^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Отже, середнє значення кінетичної енергії дорівнює:

$$\langle K \rangle = \int_0^L dx \left(A e^{+i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \left(\frac{A \hbar^2}{8mL^2} e^{-i\omega t} \sin \frac{\pi x}{L} \right) = \frac{A^2 \hbar^2}{8mL^2} \frac{L}{2} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}.$$

Обговорення

Середнє положення великої кількості частинок у цьому стані $L/2$. Середній імпульс цих частинок дорівнює нулю, оскільки дана частинка з однаковою ймовірністю рухається праворуч або ліворуч. Однак частинка не перебуває в стані спокою, оскільки її середня кінетична енергія не дорівнює нулю. Нарешті, густина ймовірності дорівнює:

$$|\psi|^2 = (2/L) \sin^2 \frac{\pi x}{L}.$$

Ця густина ймовірності найбільша в місці $L/2$ і дорівнює нулю коли $x = 0$ і коли $x = L$. Зверніть увагу, що ці висновки не залежать явно від часу.

Перевірте своє розуміння 2.3

Для частинки в наведеному вище прикладі знайдіть ймовірність її розташування між положеннями 0 і $L/4$.

Квантова механіка робить багато дивовижних передбачень. Однак у 1920 році Нільс Бор (засновник Інституту Нільса Бора в Копенгагені, звідки ми отримали термін «копенгагенська інтерпретація») стверджував, що передбачення квантової механіки та класичної механіки повинні збігатися для всіх макроскопічних систем, таких як орбітальні планети, м'ячі, крісла-гойдалки та пружини. Цей **принцип відповідності** нині є загальновизнаним. Це припускає, що правила класичної механіки є наближенням правил квантової механіки для систем з дуже великими енергіями. Квантова механіка описує як мікроскопічний, так і макроскопічний світ, але класична механіка описує лише останній.

Вправи до п. 2.1. Хвильові функції

1. Обчислити $|\Psi(x, t)|^2$ для функції $\Psi(x, t) = \psi(x) \sin \omega t$, де ω є константою.
2. Дано комплекснозначну функцію $f(x, y) = (x - iy) / (x + iy)$, розрахувати $|f(x, y)|^2$.
3. Яка з наведених нижче функцій і чому кваліфікується як хвильова функція частинки, яка може рухатися вздовж усієї дійсної осі?
 - (a) $\psi(x) = A e^{-x^2}$;
 - (б) $\psi(x) = A e^{-x}$;
 - (в) $\psi(x) = A \tan x$;

(г) $\psi(x) = A(\sin x)/x$;

(д) $\psi(x) = Ae^{-|x|}$.

4. Частинка з масою m , що рухається вздовж осі x , і її квантовий стан представлена такою хвильовою функцією:

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A x e^{-\alpha x} e^{-iEt/\hbar}, & x \geq 0, \end{cases}$$

де $\alpha = 2,0 \times 10^{10} \text{ м}^{-1}$. (а) Знайдіть константу нормування. (б) Знайти ймовірність того, що частинку можна знайти на інтервалі $0 \leq x \leq L$. (в) Знайдіть очікуване значення позиції. (г) Знайдіть математичне очікування кінетичної енергії.

5. Хвильова функція частинки масою m задається формулою:

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos \alpha x, & -\frac{\pi}{2\alpha} \leq x \leq +\frac{\pi}{2\alpha} \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $\alpha = 1,00 \times 10^{10} \text{ м}^{-1}$. (а) Знайдіть константу нормування. (б) Знайти ймовірність того, що частинку можна знайти на інтервалі $0 \leq x \leq 0,5 \times 10^{-10} \text{ м}$. (в) Знайдіть середнє положення частинки. (г) Знайдіть її середній імпульс. (д) Знайдіть її середню кінетичну енергію коли $-0,5 \times 10^{-10} \text{ м} \leq x \leq 0,5 \times 10^{-10} \text{ м}$.

2.2. Принцип невизначеності Гейзенберга

Принцип невизначеності Гейзенберга є ключовим принципом у квантовій механіці. Дуже грубо стверджується, що якщо ми знаємо *все* про те, де розташована частинка (невизначеність положення мала), ми *нічого не* знаємо про її імпульс (невизначеність імпульсу велика), і навпаки. Варіанти принципу невизначеності також існують для інших величин, таких як енергія та час. Ми окремо обговоримо принцип невизначеності імпульс-положення та енергія-час.

Імпульс і позиція

Щоб проілюструвати принцип невизначеності положення-імпульсу, розглянемо вільну частинку, яка рухається вздовж напрямку x . Частинка рухається зі сталою швидкістю u та імпульсом $p = mu$. Згідно зі співвідношеннями де Бройля, $p = \hbar k$ і $E = \hbar \omega$. Як обговорювалося в попередньому розділі, хвильова функція для цієї частинки визначається так:

$$\psi_k(x, t) = A [\cos(\omega t - kx) - i \sin(\omega t - kx)] = A e^{-i(\omega t - kx)} = A e^{-i\omega t} e^{ikx} \quad (2.14)$$

і густина ймовірності $|\Psi_k(x, t)|^2 = A^2$ є *рівномірною* і не залежить від часу. Частинка з однаковою ймовірністю може бути знайдена будь-де вздовж осі x , але має певні значення довжини хвилі та хвильового числа, а отже, імпульсу. Невизначеність позиції нескінченна (ми повністю не впевнені щодо позиції), а невизначеність імпульсу дорівнює нулю (ми повністю впевнені щодо імпульсу). Цей опис вільної частинки узгоджується з принципом невизначеності Гейзенберга.

Подібні заяви можна зробити щодо локалізованих частинок. У квантовій теорії локалізована частинка моделюється лінійною суперпозицією станів вільної частинки (або плоскої хвилі), яку називають **хвильовим пакетом**. Приклад хвильового пакета показано на рис. 2.9.

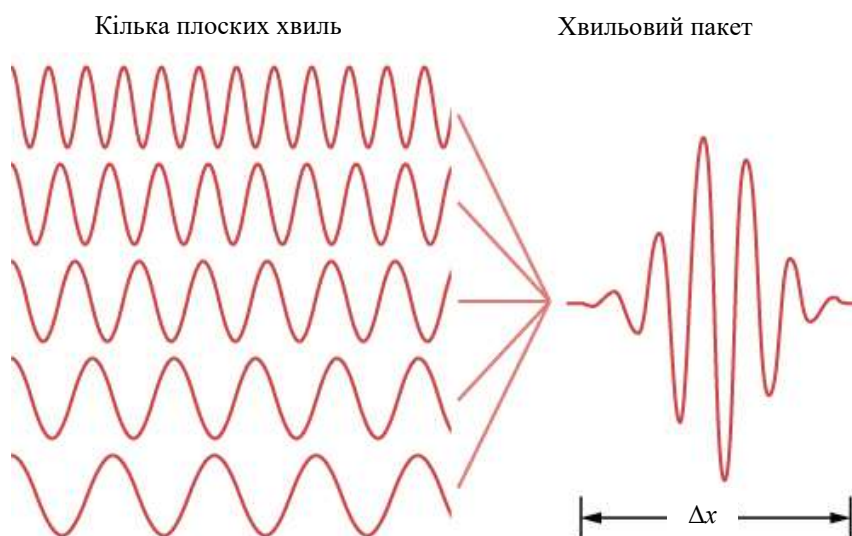


Рис. 2.9. Додавання кількох плоских хвиль з різними довжинами хвиль може створити хвилю, яка є відносно локалізованою

Хвильовий пакет містить багато довжин хвиль і, отже, згідно зі співвідношеннями де Бройля, багато імпульсів — це можливо в квантовій механіці! Ця частинка також має багато значень положення, хоча частинка обмежена здебільшого інтервалом Δx . Частинку можна краще локалізувати (Δx можна зменшити), якщо більше станів плоскої хвилі з різними довжинами хвиль або моментами додаються разом правильним чином (Δp збільшується). За Гейзенбергом, ці невизначеності підкоряються наступному співвідношенню.

ПРИНЦИП НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Добуток невизначеності положення частинки та невизначеності її імпульсу ніколи не може бути меншим, ніж половина приведеної постійної Планка:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.15)$$

Це співвідношення виражає принцип невизначеності Гейзенберга. Він накладає обмеження на те, що ми можемо знати про частинку з одночасних вимірювань положення та імпульсу. Якщо Δx великий, Δp є малим, і навпаки. Рівняння 2.15 можна вивести в більш просунутому курсі сучасної фізики. Розмірковуючи про це відношення у своїй праці «*Фізичні принципи квантової теорії*», Гейзенберг писав: «Будь-яке використання слів «положення» та «швидкість» з точністю, що перевищує ту, яку дає співвідношення, є таким же безглуздом, як і використання слів, сенс яких не визначено».

Зверніть увагу, що принцип невизначеності не має нічого спільного з точністю експериментального приладу. Навіть для досконалих вимірювальних пристроїв ці невизначеності залишаються, оскільки вони походять із хвилювальної природи матерії. Точне значення добутку $\Delta x \Delta p$ залежить від конкретної форми хвильової функції. Цікаво, що функція Гаусса (або дзвоноподібна крива розподілу) дає мінімальне значення величині невизначеності: $\Delta x \Delta p = \hbar / 2$.

Приклад 2.5. Принцип великої та малої невизначеності

Визначте мінімальну невизначеність у положеннях наступних об'єктів, якщо їхні швидкості відомі з точністю до $1,0 \times 10^{-3} \text{ м/с}$: (а) електрон і (б) куля для боулінгу масою 6,0 кг.

Стратегія

Враховуючи невизначеність у швидкості $\Delta u = 1,0 \times 10^{-3} \text{ м/с}$, ми повинні спочатку визначити невизначеність імпульсу $\Delta p = m \Delta u$, потім обернуть рівняння 2.15 так, щоб знайти невизначеність положення $\Delta x = \hbar / (2 \Delta p)$.

Розв'язок

а. Для електрона:

$$\Delta p = m \Delta u = (9,1 \times 10^{-31} \text{ кг})(1,0 \times 10^{-3} \text{ м/с}) = 9,1 \times 10^{-34} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2 \Delta p} = 5,8 \text{ см.}$$

б. Для кулі для боулінгу:

$$\Delta p = m \Delta u = (6 \text{ кг})(1,0 \times 10^{-3} \text{ м/с}) = 6 \times 10^{-3} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2 \Delta p} = 8,8 \times 10^{-33} \text{ м.}$$

Обговорення.

На відміну від невизначеності положення електрона, невизначеність положення кулі для боулінгу незмірно мала. Постійна Планка дуже мала, тому обмеження, накладені принципом невизначеності, непомітні в макроскопічних системах, таких як куля для боулінгу.

Приклад 2.6. Невизначеність і атом водню

Оцініть енергію основного стану атома водню за допомогою принципу невизначеності Гейзенберга. (Підказка: згідно з ранніми експериментами, розмір атома водню становить приблизно 0,1 нм).

Стратегія

Електрон, зв'язаний з атомом водню, може бути змодельований частинкою, зв'язаною з одновимірним ящиком довжини $L = 0,1$ нм. Хвильова функція основного стану цієї системи є напівхвилею, як наведено в прикладі 2.1. Це найбільша довжина хвилі, яка може «поміститися» в ящик, тому хвильова функція відповідає найнижчому енергетичному стану. Зверніть увагу, що ця функція дуже схожа за формою на функцію Гаусса (дзвоноподібна крива). Ми можемо прийняти середню енергію частинки, описану цією функцією (E), як хорошу оцінку енергії основного стану (E_0). Ця середня енергія частинки пов'язана з її середнім квадратом імпульсу, що пов'язано з невизначеністю її імпульсу.

Розв'язок

Щоб вирішити цю проблему, ми повинні чітко визначити, що мається на увазі під «невизначеністю позиції» та «невизначеністю імпульсу». Визначаємо невизначеність позиції (Δx) зі стандартним відхиленням положення (σ_x), і невизначеність імпульсу (Δp) зі стандартним відхиленням імпульсу (σ_p). Для функції Гаусса добуток невизначеності дорівнює:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2},$$

де

$$\sigma_x^2 = x^2 - \bar{x}^2, \quad \sigma_p^2 = p^2 - \bar{p}^2,$$

Частинка з однаковою ймовірністю рухається ліворуч і праворуч, отже $\bar{p} = 0$. Крім того, невизначеність положення порівнянна з розміром ящика, тому $\sigma_x = L$. Отже, розрахована енергія основного стану дорівнює:

$$E_0 = E_{\text{Гаусс}} = \frac{\bar{p}^2}{2m} = \frac{\sigma_p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\sigma_x} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}.$$

Множення чисельника і знаменника на c^2 дає:

$$E_0 = \frac{(\hbar c)^2}{8(mc^2)L^2} = \frac{(197,3 \text{ eV} \cdot \text{нм})^2}{8(0,5 \times 10^6 \text{ eV})(0,1 \text{ нм})^2} = 0,952 \text{ eV} \approx 1 \text{ eV}.$$

Обговорення

Виходячи з ранніх оцінок розміру атома водню та принципу невизначеності, енергія основного стану атома водню знаходиться в діапазоні еВ. Енергія іонізації електрона з основного стану становить приблизно 10 еВ, тому це передбачення приблизно підтверджується. (*Примітка:* добуток $\hbar c$ часто є корисним під час виконання обчислень у квантовій механіці).

Енергія і час

Інший вид принципу невизначеності стосується невизначеності під час одночасних вимірювань енергії квантового стану та його часу життя:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.16)$$

де ΔE є невизначеністю вимірювання енергії та Δt є невизначеністю вимірювання тривалості життя. Принцип **невизначеності «енергія-час»** не є наслідком співвідношення типу, вираженого рівнянням 2.15, через технічні причини, які не обговорюються. Тим не менш, загальне значення принципу енергії-часу полягає в тому, що квантовий стан, який існує лише короткий час, не може мати певної енергії. Причина полягає в тому, що частота стану обернено пропорційна часу, а частота пов'язана з енергією стану, тому, щоб виміряти енергію з хорошою точністю, стан потрібно спостерігати протягом багатьох циклів.

Для ілюстрації розглянемо збуджені стани атома. Скінченний час життя цих станів можна вивести з *форм спектральних ліній*, що спостерігаються в спектрах атомної емісії. Кожного разу, коли збуджений стан розпадається, випромінювана енергія дещо відрізняється, і, отже, лінія випромінювання характеризується розподілом *спектральних частот* (або довжин хвиль) випромінюваних фотонів. В результаті всі спектральні лінії характеризуються *спектральною шириною*. Середня енергія випущеного фотона відповідає теоретичній енергії збудженого стану і дає спектральне розташування піку лінії випромінювання. Короткоіснуючі стани мають широку спектральну ширину, а довгоіснуючі стани мають вузьку спектральну ширину.

Приклад 2.7. Атомні переходи

Атом зазвичай існує в збудженому стані близько $\Delta t = 10^{-8}$ с. Оцініть невизначеність Δf у частоті випромінювання фотонів при переході атома зі збудженого стану з одночасним випромінюванням фотона із середньою частотою $f = 7,1 \times 10^{14}$ Гц. Чи є випромінювання монохроматичним?

Стратегія

Ми перетворимо рівняння 2.16, щоб отримати енергетичну невизначеність $\Delta E \approx \hbar / (2 \Delta t)$ і поєднаємо її з енергією фотона $E = hf$, щоб отримати Δf . Щоб оцінити, чи є випромінювання монохроматичним, ми оцінюємо $\Delta f / f$.

Розв'язок

Розкид енергій фотонів є $\Delta E = h \Delta f$, тому

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow h\Delta f \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta f \approx \frac{1}{4\pi\Delta t} = \frac{1}{4\pi(10^{-8}\text{с})} = 8 \times 10^6 \text{Гц},$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8 \times 10^6 \text{Гц}}{7,1 \times 10^{14} \text{Гц}} = 1,1 \times 10^{-8}.$$

Обговорення

Оскільки випромінювані фотони мають свої частоти в межах $1,1 \times 10^{-6}$ відсотків від середньої частоти, випромінювання можна вважати монохроматичним.

Перевірте своє розуміння 2.4

Атом натрію здійснює перехід із першого збудженого стану в основний, випускаючи фотон з довжиною хвилі 589,0 нм з енергією 2,105 еВ. Якщо час життя цього збудженого стану становить $1,6 \times 10^{-8}$ с, яка невизначеність енергії цього збудженого стану? Яка ширина відповідної спектральної лінії?

Вправи до п. 2.2. Принцип невизначеності Гейзенберга

1. Вимірювання швидкості α -частинок виконано з точністю до 0,02 мм/с. Яка мінімальна невизначеність у її положенні?
2. Газ атомів гелію при 273 К знаходиться в кубічному контейнері зі стороною 25,0 см. (а) Яка мінімальна невизначеність компонентів імпульсу атомів гелію? (б) Яка мінімальна невизначеність компонентів швидкості? (в) Знайдіть відношення невизначеностей у (б) до середньої швидкості атома в кожному напрямку.
3. Якщо невизначеність у-компонент положення протона дорівнює 2,0 пм, знайдіть мінімальну похибку при одночасному вимірюванні у-складової швидкості. Яка мінімальна невизначеність при одночасному вимірюванні х-складових швидкості протона?
4. Деяка нестабільна елементарна частинка має енергію спокою 80,41 ГеВ і невизначеність енергії спокою 2,06 ГеВ. Оцініть час життя цієї частинки.
5. Атом у метастабільному стані має час життя 5,2 мс. Знайти мінімальну невизначеність вимірювання енергії збудженого стану.
6. Вимірювання показують, що атом залишається у збудженому стані протягом середнього часу 50,0 нс, перш ніж здійснити перехід в основний стан з одночасним випромінюванням 2,1 еВ фотона. (а) Оцініть невизначеність частоти фотона. (б) Яка це частка середньої частоти фотона?
7. Припустимо, що електрон обмежений областю довжиною 0,1 нм (порядку розміру атома водню). (а) Яка мінімальна невизначеність його імпульсу? (б) Якою буде невизначеність імпульсу, якщо обмежена область довжини подвоїться до 0,2 нм?

2.3. Рівняння Шредінгера

У попередніх двох підрозділах ми описали, як використовувати квантово-механічну хвильову функцію, і обговорили принцип невизначеності Гейзенберга. У цьому підрозділі ми представляємо повну та формальну теорію квантової механіки, яку можна використовувати для прогнозування. Розвиваючи цю теорію, корисно переглянути хвильову теорію світла. Для світлової хвилі електричне поле $E(x, t)$ підпорядковується співвідношенню:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

де c – швидкість світла і символ ∂ є *частковою похідною*. (Згадайте, що часткова похідна тісно пов'язана зі звичайною похідною, але включає функції більш ніж

однієї змінної. Якщо брати часткову похідну функції за певною змінною, усі інші змінні залишаються постійними). Світлова хвиля складається з дуже великої кількості фотонів, тому величину $|E(x, t)|^2$ можна інтерпретувати як густину ймовірності знаходження одного фотона в певній точці простору (наприклад, на екрані). Є багато розв'язків цього рівняння. Одне з розв'язків особливо важливо:

$$E(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (2.18)$$

де A – амплітуда електричного поля, k – хвильове число, ω – кутова частота. Поєднання цього рівняння з рівнянням 2.17 дає:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.19)$$

Відповідно до рівнянь де Бройля маємо $p = \hbar k$ і $E = \hbar \omega$. Підстановка цих рівнянь у рівняння 2.19 дає:

$$p = \frac{E}{c}, \quad (2.20)$$

або

$$E = pc. \quad (2.21)$$

Отже, згідно із загальним рівнянням енергії-імпульсу Ейнштейна $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, рівняння 2.17 описує частинку з нульовою масою спокою. Це узгоджується з нашими знаннями про фотон.

Цей процес можна повернути назад. Ми можемо почати з рівняння енергії-імпульсу частинки, а потім запитати, яке хвильове рівняння йому відповідає. Рівняння енергії-імпульсу нерелятивістської частинки в одному вимірі таке:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x, t), \quad (2.22)$$

де p — імпульс, m — маса, U — потенціальна енергія частинки.

Хвильове рівняння, яке йде з ним, виявляється ключовим рівнянням у квантовій механіці, яке називають **залежним від часу рівнянням Шредінгера**.

РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ЧАСУ

Рівняння, що описує енергію та імпульс хвильової функції, відоме як рівняння Шредінгера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Сила, що діє на частинку, описану цим рівнянням, визначається як

$$F = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}. \quad (2.24)$$

Це рівняння відіграє роль у квантовій механіці, подібну до другого закону Ньютона в класичній механіці. Після визначення потенціальної енергії частинки або, що еквівалентно, сили, що діє на частинку, можна розв'язати це диференціальне рівняння для хвильової функції. Розв'язком рівняння другого закону Ньютона (також диференціального рівняння) в одному вимірі є функція $x(t)$, яка визначає, де знаходиться об'єкт у будь-який момент часу t . Розв'язок залежного від часу рівняння Шредінгера забезпечує інструмент — хвильову функцію — за допомогою якого можна визначити, де *ймовірно* буде перебувати частинка. Це рівняння також можна записати у двох або трьох вимірах. Для

розв'язання рівняння Шредінгера, що залежить від часу, часто потрібна допомога комп'ютера.

Розглянемо окремий **випадок вільної частинки**. Вільна частинка не відчуває сили ($F = 0$). Виходячи з рівняння 2.24,

$$U(x, t) = U_0 = \text{const.} \quad (2.25)$$

Для простоти встановимо $U_0 = 0$. Тоді рівняння Шредінгера зводиться до виразу:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Допустимим розв'язком цього рівняння є функція:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.27)$$

Не дивно, що цей розв'язок містить уявне число ($i = \sqrt{-1}$) оскільки саме диференціальне рівняння містить уявне число. Однак, як наголошувалося раніше, квантово-механічні передбачення залежать лише від $|\Psi(x, t)|^2$, що дає цілком реальні значення. Зауважте, що реальні розв'язки плоскої хвилі, $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ і $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, не підкоряються рівнянню Шредінгера. Спокуса думати, що хвильову функцію можна побачити, помацати й відчути в природі, усувається появою уявного числа. У теорії квантової механіки Шредінгера *хвильова функція є просто інструментом для обчислення*.

Якщо функція потенціальної енергії (U) не залежить від часу, тоді

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} \quad (2.28)$$

задовольняє залежне від часу рівняння Шредінгера, де $\psi(x)$ є незалежною від часу функцією і $e^{-i\omega t}$ це функція, яка не залежить від простору. Іншими словами, хвильову функцію можна *розділити* на дві частини: частину, що стосується лише простору, і частину, яка стосується лише часу. Фактор $e^{-i\omega t}$ іноді називають фактором **модуляції часу**, оскільки він змінює функцію лише простору. За де Бройлем, енергія хвилі матерії задається формулою $E = \hbar\omega$, де E його повна енергія. Таким чином, наведене вище рівняння також можна записати так:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.29)$$

Будь-яка лінійна комбінація таких станів (змішаний стан енергії або імпульсу) також є дійсним розв'язком цього рівняння. Такі стани можуть, наприклад, описувати локалізовану частинку (див. рис. 2.9).

Перевірте своє розуміння 2.5

Частинка з масою m рухається вздовж осі x у потенціалі, заданому функцією потенціальної енергії $U(x) = 0,5 m\omega^2 x^2$. Обчисліть добуток $\Psi^*(x, t) U(x) \Psi(x, t)$. Виразіть свою відповідь у термінах хвильової функції, що не залежить від часу, $\psi(x)$.

Якщо поєднати рівняння 2.23 і рівняння 2.28, тоді залежне від часу рівняння Шредінгера зводиться до наступного:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x) \psi(x) = E\psi(x), \quad (2.30)$$

де E – повна енергія частинки (дійсне число).

Це рівняння називають **незалежним від часу рівнянням Шредінгера**. Зверніть увагу, що ми використовуємо «великий пси» (Ψ) для хвильової функції, що залежить від часу, і «малого пси» (ψ) для хвильової функції, що не залежить від часу. Розв'язок хвильової функції цього рівняння потрібно помножити на коефіцієнт часової модуляції, щоб отримати хвильову функцію, що залежить від часу.

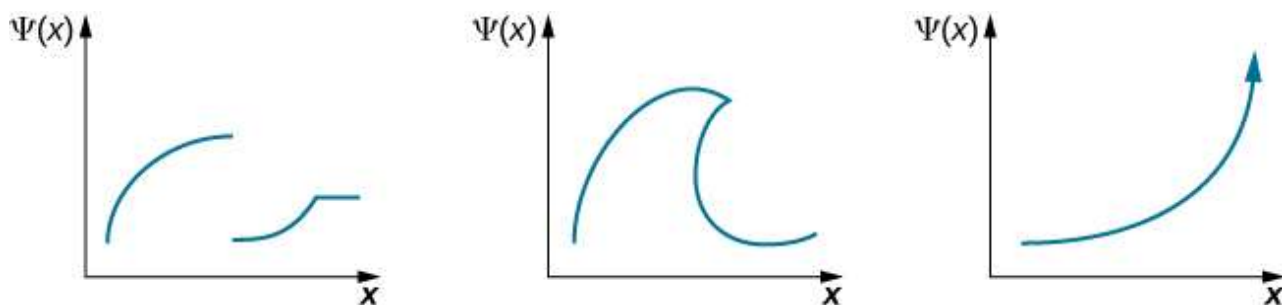
У наступних підрозділах ми розв'яжемо незалежне від часу рівняння Шредінгера для трьох випадків: квантова частинка в ящику, простий гармонічний осцилятор і квантовий бар'єр. Ці випадки дають важливі уроки, які можна використовувати для розв'язання більш складних систем. Незалежна від часу хвильова функція $\psi(x)$ повинна задовольняти трьом умовам:

1. $\psi(x)$ має бути безперервною функцією.
2. Перша похідна від $\psi(x)$ по відношенню до простору, $d\psi(x)/dx$, має бути безперервна, якщо тільки $V(x) = \infty$.
3. $\psi(x)$ не повинна розходитися коли $x = \pm \infty$.

Перша умова дозволяє уникнути раптових стрибків або розривів у хвильовій функції. Друга умова вимагає, щоб хвильова функція була гладкою в усіх точках, за винятком особливих випадків. (Наприклад, у більш просунутому курсі квантової механіки потенційні стрибки нескінченної глибини та висоти використовуються для моделювання твердих тіл). Третя умова вимагає, щоб хвильова функція була нормалізованою. Ця третя умова впливає з інтерпретації квантової механіки Борна. Це гарантує що $|\psi(x)|^2$ це скінченне число, тому ми можемо використовувати його для обчислення ймовірностей.

Перевірте своє розуміння 2.6

Яка з хвильових функцій є дійсним розв'язком хвильової функції для рівняння Шредінгера?



Вправи до п. 2.3. Рівняння Шредінгера

1. Поєднайте рівняння 7.17 і рівняння 7.18, щоб показати, що $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.
2. Покажіть, що $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ є дійсним розв'язком залежного від часу рівняння Шредінгера.
3. Покажіть, що $\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ і $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ не є розв'язком залежного від часу рівняння Шредінгера.

4. Показати, що коли $\Psi_1(x, t)$ і $\Psi_2(x, t)$ є розв'язками залежного від часу рівняння Шредінгера, а A, B є числами, тоді функція $\Psi(x, t)$, тобто суперпозиція цих функцій також є розв'язком:

$$\Psi(x, t) = A\Psi_1(x, t) + B\Psi_2(x, t).$$

5. Частинка масою m описується такою хвильовою функцією: $\psi(x) = A \cos kx + B \sin kx$, де A, B і k — константи. Припускаючи, що частинка вільна, покажіть, що ця функція є розв'язком стаціонарного рівняння Шредінгера для цієї частинки, і знайдіть енергію, яку має частинка в цьому стані.

6. Знайти середнє значення кінетичної енергії для частинки в стані $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$. Який висновок ви можете зробити зі свого рішення?

7. Знайти середнє значення квадрата імпульсу для частинки в стані $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$. Який висновок ви можете зробити зі свого рішення?

8. Вільний протон має хвильову функцію, задану як $\Psi(x, t) = Ae^{i(5,02 \times 10^{11}x - 8,00 \times 10^{15}t)}$. Коефіцієнт біля x є зворотними метрами (м^{-1}), а коефіцієнт при t є оберненим секундам (с^{-1}). Знайдіть імпульс і енергію протона.

2.4. Квантова частинка в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі

У цьому підрозділі ми застосуємо рівняння Шредінгера до частинки, яка знаходиться в одновимірній коробці. Цей особливий випадок містить уроки для розуміння квантової механіки в більш складних системах. Енергія частинки квантується як наслідок стану стоячої хвилі всередині ящика.

Розглянемо частинку маси m , якої дозволено рухатися лише вздовж напрямку x , і її рух обмежено областю між твердими та жорсткими стінками, розташованими на $x = 0$ і $x = L$ (рис. 2.10).

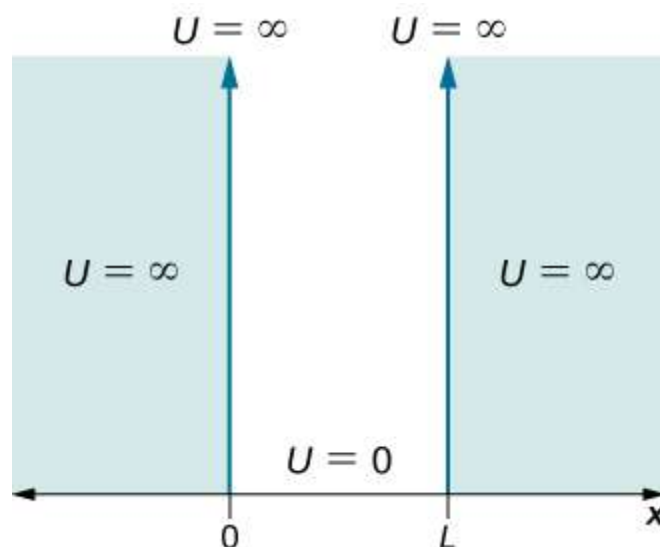


Рис. 2.10. Функція потенційної енергії, яка утримує частинку в одновимірному ящику

Між стінками частинка переміщається вільно. Ця фізична ситуація називається **нескінченною квадратичною ямою**, яка описується функцією потенціальної енергії:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & x < 0, x > L. \end{cases} \quad (2.31)$$

Поєднання цього рівняння з незалежним від часу хвильовим рівнянням Шредінгера дає вираз:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x), \text{ коли } 0 \leq x \leq L, \quad (2.32)$$

де E – повна енергія частинки.

Які типи розв'язків ми очікуємо? Енергія частинки є додатним числом, тому, якщо значення хвильової функції додатне (права частина рівняння), кривизна хвильової функції від'ємна, або увігнута вниз (ліва частина рівняння). Подібним чином, якщо значення хвильової функції негативне (права частина рівняння), кривизна хвильової функції додатна або увігнута вгору (ліва частина рівняння). Цій умові відповідає осцилююча хвильова функція, наприклад синусоїда чи косинусоїда. Оскільки ці хвилі обмежені коробкою, ми уявляємо стоячі хвилі з фіксованими кінцевими точками $x = 0$ і $x = L$.

Розв'язки $\psi(x)$ до цього рівняння мають імовірнісну інтерпретацію. Зокрема, $|\psi(x)|^2$ є густиною ймовірності знаходження частинки в певному місці x . Ця функція повинна бути інтегрована, щоб визначити ймовірність знаходження частинки в деякому інтервалі простору. Тому ми шукаємо нормований розв'язок, який задовольняє наступну умову нормування:

$$\int_0^L dx |\psi(x)|^2 = 1. \quad (2.33)$$

Стінки жорсткі та непроникні, що означає, що частинка ніколи не знаходиться за стіною. Математично це означає, що:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0. \quad (2.34)$$

Ми очікуємо коливальних розв'язків, тому найзагальнішим розв'язком цього рівняння є функція:

$$\psi_k(x) = A_k \cos kx + B_k \sin kx, \quad (2.35)$$

де k - хвильове число, а A_k і B_k є константами.

Застосування граничної умови, вираженої рівнянням 2.34, дає

$$\psi_k(0) = A_k \cos(k \cdot 0) + B_k \sin(k \cdot 0) = A_k = 0. \quad (2.36)$$

Коли маємо $A_k = 0$, розв'язком буде:

$$\psi_k(x) = B_k \sin(kx). \quad (2.37)$$

Якщо B_k дорівнює нулю, $\psi_k(x) = 0$ для всіх значень x і умовою нормування, рівняння 2.33, не може бути задоволено. Припускаючи $B_k \neq 0$, рівняння 2.34 для $x = L$ дає:

$$0 = B_k \sin(kL) \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

Розв'язок $n = 0$ відкидаємо, тому що це квантове число скрізь дорівнюватиме нулю — розв'язок $\psi(x)$, яка не підлягає нормуванню, а отже, розв'язок нефізичний. Підстановка рівняння 2.37 у рівняння 2.32 дає:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_k \sin(kx)) = E(B_k \sin(kx)). \quad (2.39)$$

Обчислення цих похідних призводить до виразу:

$$E = E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (2.40)$$

За теорією де Бройля, $p = \hbar k$, тому цей вираз передбачає, що повна енергія дорівнює кінетичній енергії, що узгоджується з нашим припущенням, що «частинка рухається вільно». Об'єднання результатів рівняння 2.38 і рівняння 2.40 дає вираз для енергії:

$$E = E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

що є дивним! Частинка, зв'язана з одновимірним ящиком, може мати лише певні дискретні (квантовані) значення енергії. Крім того, *частинка не може мати нульову кінетичну енергію* — неможливо, щоб частинка, пов'язана з ящиком, перебувала «в спокої».

Щоб знайти дозволені хвильові функції, які відповідають цим енергіям, ми повинні знайти константу нормування B_n . Ми накладаємо умову нормування рівняння 2.33 на хвильову функцію:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= B_n \sin(n\pi x/L), \\ 1 &= \int_0^L dx |\psi_n(x)|^2 = \int_0^L dx B_n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x = B_n^2 \int_0^L dx \sin^2 \frac{n\pi}{L} x = B_n^2 \frac{L}{2} \Rightarrow \\ B_n &= \sqrt{\frac{2}{L}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Отже, хвильові функції, які відповідають значенням енергії, наведеним у рівнянні 2.41, мають вигляд:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

Для найнижчого енергетичного стану або **енергії основного стану** маємо:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (2.44)$$

Усі інші енергетичні стани можна виразити так:

$$E_n = n^2 E_1, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.45)$$

Індекс n називають **енергетичним квантовим числом** або **головним квантовим числом**. Стан для $n = 2$ є першим збудженим станом, стан для $n = 3$ є другим збудженим станом і так далі. Перші три квантові стани (для $n = 1, 2$ і 3) частинки в одновимірному ящику показано на рис. 2.11.

Хвильові функції в рівнянні 2.45 іноді називають «станами певної енергії». Кажуть, що частинки в цих станах займають **енергетичні рівні**, які зображені горизонтальними лініями на рис. 2.11. Енергетичні рівні аналогічні щаблям сходів, на які частинка може «піднятися», коли вона отримує або втрачає енергію.

Хвильові функції в рівнянні 2.45 також називають **стаціонарними станами** і **станами стоячої хвилі**. Ці функції є «стаціонарними», оскільки їхні функції густини ймовірності $|\Psi(x, t)|^2$, не змінюються в часі, і «стоячі хвилі», тому що їхні реальні та уявні частини коливаються вгору та вниз, як стояча хвиля —

як мотузка, що коливається між двома дітьми на ігровому майданчику. Стаціонарні стани – це стани з певною енергією [рівняння 2.45], але лінійні комбінації цих станів, такі як $\psi(x) = a\psi_1 + b\psi_2$ (також розв'язки рівняння Шредінгера) є станами змішаної енергії.

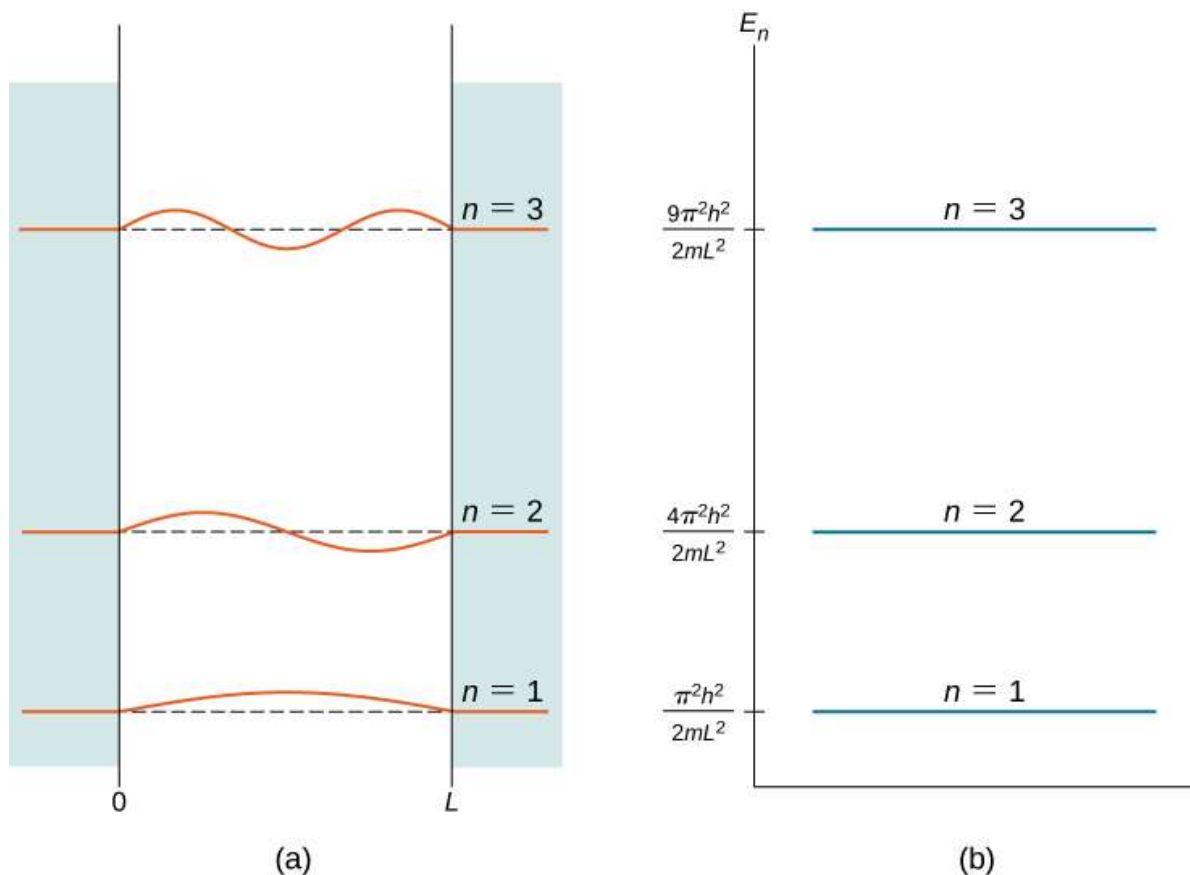


Рис. 2.11. Перші три квантові стани квантової частинки для головних квантових чисел $n = 1, 2$ і 3 : (а) розв'язок стоячої хвилі та (б) дозволені енергетичні стани

Квантування енергії є наслідком граничних умов. Якщо частинка не обмежена коробкою, а вільно блукає, дозволені енергії є безперервними. Однак у цьому випадку дозволені лише певні енергії ($E_1, 4E_1, 9E_1, \dots$). Різниця енергій між сусідніми рівнями енергії визначається як

$$\Delta E_{n+1,n} = E_{n+1} - E_n = (n+1)^2 E_1 - n^2 E_1 = (2n+1)E_1. \quad (2.46)$$

Збереження енергії вимагає, щоб, якщо енергія системи змінюється, різниця енергії переносилася в іншій формі енергії. Для окремого випадку зарядженої частинки, обмеженої невеликим об'ємом (наприклад, в атомі), зміни енергії часто переносяться фотонами. Частоти випромінюваних фотонів дають нам інформацію про різницю енергії (енергетичні відстані) системи та об'єм утримуваного простору — розмір «коробки» [див. рівняння 2.44].

Приклад 2.8. Проста модель ядра

Припустимо, що протон обмежений коробкою шириною $L = 1,00 \times 10^{-14} \text{ м}$ (типовий ядерний радіус). Які енергії основного та першого збуджених станів?

Якщо протон здійснює перехід із першого збудженого стану в основний, які енергія та частота випромінюваного фотона?

Стратегія

Якщо ми припустимо, що протон, обмежений ядром, можна змодельовати протон як квантову частинку в ящику, все, що нам потрібно зробити, це використати рівняння 2.41, щоб знайти його енергії E_1 і E_2 . Маса протона становить $m = 1,67 \times 10^{-27}$ кг. Випромінюваний фотон забирає різницю енергії $\Delta E = E_2 - E_1$. Ми можемо використати співвідношення $E_f = h f$ щоб знайти його частоту f .

Розв'язок

Основний стан має енергію:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})^2}{2(1,67 \times 10^{-27} \text{ кг})(1,00 \times 10^{-14} \text{ м})^2} = 3,28 \times 10^{-13} \text{ Дж} = 2,05 \text{ MeV}.$$

Перший збуджений стан:

$$E_2 = 2^2 E_1 = 4(2,05 \text{ MeV}) = 8,2 \text{ MeV}.$$

Енергія випромінюваного фотона дорівнює:

$$E_f - \Delta E = E_2 - E_1 = 8,2 \text{ MeV} - 2,05 \text{ MeV} = 6,15 \text{ MeV}.$$

Частота випромінюваного фотона дорівнює:

$$f = \frac{E_f}{h} = \frac{6,15 \text{ MeV}}{4,14 \times 10^{-21} \text{ MeV} \cdot \text{с}} = 1,49 \times 10^{21} \text{ Гц}.$$

Обговорення

Це типова частота гамма-променів, випромінюваних ядром. Енергія цього фотона приблизно в 10 мільйонів разів перевищує енергію фотона видимого світла.

Математичне очікування позиції частинки в коробці визначається так:

$$\langle x \rangle = \int_0^L dx \psi_n^*(x) x \psi_n(x) = \int_0^L dx x |\psi_n^*(x)|^2 = \int_0^L dx x \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2}. \quad (2.47)$$

Ми також можемо знайти очікуване значення імпульсу або середнього імпульсу великої кількості частинок у заданому стані:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_0^L dx \psi_n^*(x) \left[-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_n(x) \right] = -i\hbar \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right] = \\ &= -i \frac{2\hbar}{L} \int_0^L dx \sin \frac{n\pi x}{L} \left[\frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \right] = -i \frac{2n\pi\hbar}{L^2} \int_0^L dx \frac{1}{2} \sin \frac{2n\pi x}{L} = \\ &= -i \frac{n\pi\hbar}{L^2} \frac{L}{2n\pi} \int_0^{2\pi n} d\varphi \sin \varphi = -i \frac{\hbar}{2L} \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Таким чином, для частинки в стані певної енергії середнє положення знаходиться в середині ящика, а середній імпульс частинки дорівнює нулю, як це було б і для класичної частинки. Зауважте, що хоча мінімальна енергія класичної частинки може дорівнювати нулю (частинка може перебувати в стані спокою в середині коробки), мінімальна енергія квантової частинки відмінна від нуля і визначається рівнянням 2.44. Середня енергія частинки в n -му квантовому стані — її очікуване значення енергії — становить величину:

$$E_n = \langle E \rangle = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (2.49)$$

Результат не дивний, оскільки стан стоячої хвилі є станом певної енергії. Будь-яке вимірювання енергії цієї системи повинно повертати значення, що дорівнює одній із цих дозволених енергій.

Наш аналіз квантової частинки в ящику був би неповним без обговорення принципу відповідності Бора. Цей принцип стверджує, що для великих квантових чисел закони квантової фізики повинні давати ідентичні результати, що й закони класичної фізики. Щоб проілюструвати, як цей принцип працює для квантової частинки в ящику, ми побудуємо графік розподілу густини ймовірності:

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2(n\pi x/L) \quad (2.50)$$

для пошуку частинки навколо місця x між стінками, коли частинка перебуває в квантовому стані ψ_n . На рис. 2.12 показано ці розподіли ймовірностей для основного стану, для першого збудженого стану та для сильно збудженого стану, який відповідає великому квантовому числу.

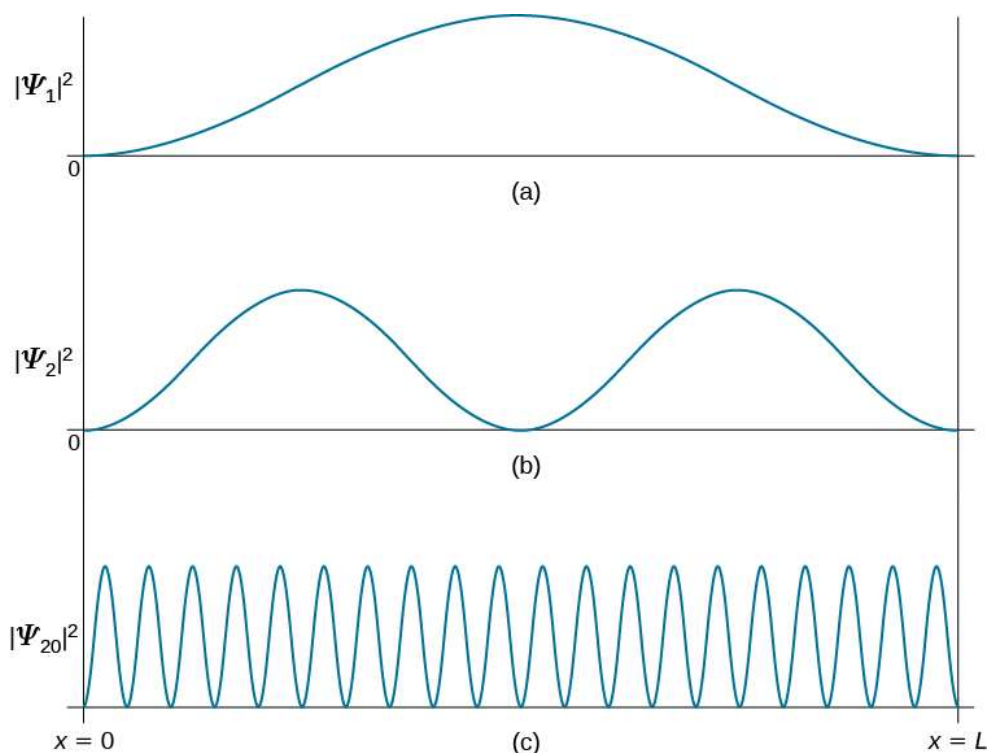


Рис. 2.12. Розподіл густини ймовірності $|\psi_n(x)|^2$ для квантової частинки в ящику для: (а) основного стану, $n = 1$; (б) перший збуджений стан, $n = 2$; і (с) дев'ятнадцятий збуджений стан, $n = 20$

З цих графіків ми бачимо, що коли квантова частинка перебуває в основному стані, вона, швидше за все, буде знайдена в середині коробки, де розподіл ймовірностей має найбільше значення. Це не так, коли частинка знаходиться в першому збудженому стані, тому що тепер розподіл ймовірностей має нульове значення в середині коробки, тому немає шансів знайти там частинку.

Коли квантова частинка знаходиться в першому збудженому стані, розподіл ймовірностей має два максимуми, і найкращий шанс знайти частинку в положеннях, близьких до розташування цих максимумів. Ця квантова картина не схожа на класичну. Густина ймовірності знаходження класичної частинки між x і $x + \Delta x$ залежить від того, скільки часу Δt частинка проводить у цій області. Якщо припустити, що її швидкість u постійна, цей час є $\Delta t = \Delta x / u$, який також є постійним для будь-якого розташування між стінами. Таким чином, густина ймовірності знаходження класичної частинки на позиції x є рівномірною по всій коробці, і немає кращого місця для пошуку класичної частинки.

Ця класична картина збігається в межах великих квантових чисел. Наприклад, коли квантова частинка перебуває у сильно збудженому стані, як показано на рис. 2.12, густина ймовірності характеризується швидкими флуктуаціями, а потім ймовірність знаходження квантової частинки в інтервалі Δx не залежить від того, де цей проміжок розташований між стінами.

Приклад 2.9. Класична частинка в коробці

Невеликий візок масою 0,40 кг рухається вперед-назад по повітряній дорозі між двома бамперами, розташованими на відстані 2,0 м один від одного. Ми припускаємо відсутність тертя; зіткнення з бамперами абсолютно пружні, так що між бамперами автомобіль підтримує постійну швидкість 0,50 м/с. Розглядаючи візок як квантову частинку, оцініть значення головного квантового числа, яке відповідає його класичній енергії.

Стратегія

Знайдемо кінетичну енергію K візка та його енергію основного стану E_1 ніби це була квантова частинка. Енергія візка повністю кінетична, тому $K = n^2 E_1$ (рівняння 2.45). Розв'язування для n дає $n = (K/E_1)^{1/2}$.

Розв'язок

Кінетична енергія візка становить:

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} (0,4 \text{ кг}) (0,5 \text{ м/с})^2 = 0,05 \text{ Дж.}$$

Основним станом візка, який розглядається як квантова частинка, є

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})^2}{2(0,4 \text{ кг})(2,0 \text{ м})^2} = 1,7 \times 10^{-68} \text{ Дж.}$$

Тому

$$n = \sqrt{\frac{K}{E_1}} = \sqrt{\frac{0,05}{1,7 \times 10^{-68}}} = 1,2 \times 10^{33}.$$

Обговорення

З цього прикладу ми бачимо, що енергія класичної системи характеризується дуже великим квантовим числом. Принцип відповідності Бора стосується такого роду ситуацій. Ми можемо застосувати формалізм квантової механіки до будь-якої системи, квантової чи класичної, і результати будуть правильними в кожному випадку. У межах високих квантових чисел немає переваг у використанні квантового формалізму, оскільки ми можемо отримати ті самі результати з менш складним формалізмом класичної механіки. Однак ми не можемо застосувати класичний формалізм до квантової системи в енергетичному стані з низьким числом n .

Перевірте своє розуміння 2.7

(а) Розглянемо нескінченний квадратний колодязь із стінками $x = 0$ і $x = L$. Яка ймовірність знайти квантову частинку в її основному стані десь між $x = 0$ і $x = L / 4$? (б) Повторіть запитання (а) для класичної частинки.

Знайшовши стаціонарні стани $\psi_n(x)$ і енергії E_n , розв'язуючи незалежне від часу рівняння Шредінгера рівняння 2.32, ми використовуємо рівняння 2.28 для запису хвильових функцій $\Psi_n(x, t)$, які є розв'язками залежного від часу рівняння Шредінгера, заданого рівнянням 2.23. Для частинки в ящику це дає:

$$\Psi_n(x, t) = e^{-i\omega_n t} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-iE_n t/\hbar} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.51)$$

де енергії задано рівнянням 2.41.

Модель квантової частинки в коробці має практичне застосування у відносно новій галузі оптоелектроніки, яка має справу з пристроями, які перетворюють електричні сигнали в оптичні. Ця модель також має справу з нанорозмірними фізичними явищами, такими як наночастинка, захоплена в пастці низького електричного потенціалу, обмеженого бар'єрами з високим потенціалом.

Вправи до п. 2.4. Квантова частинка в ящику

1. Припустимо, що електрон в атомі можна розглядати так, ніби він обмежений ящиком ширини $2,0 \text{ \AA}$. Яка енергія основного стану електрона? Порівняйте ваш результат із кінетичною енергією основного стану атома водню в моделі атома водню Бора.
2. Припустимо, що протон у ядрі можна розглядати так, ніби він обмежений одновимірним ящиком шириною $10,0 \text{ фм}$. (а) Які енергії має протон, коли він перебуває у відповідних станах $n = 1$, $n = 2$, і $n = 3$? (б) Яка енергія фотонів, що

випромінюються, коли протон здійснює переходи з першого та другого збуджених станів в основний стан?

3. Електрон, обмежений ящиком, має енергію основного стану 2,5 еВ. Яка ширина ящика?

4. Яка енергія основного стану (в еВ) протона, укладеного в одновимірну коробку розміром з ядро урану, що має радіус приблизно 15,0 фм?

5. Яка енергія основного стану (в еВ) α -частинки, обмеженої одновимірним ящиком розміром з ядро урану, який має радіус 15,0 фм?

6. Щоб збудити електрон в одновимірному ящику з його першого збудженого стану в третій збуджений стан, потрібно 20,0 еВ. Яка ширина ящика?

7. Електрон, обмежений ящиком шириною 0,15 нм з нескінченними бар'єрами потенційної енергії, випромінює фотон, коли він здійснює перехід із першого збудженого стану в основний. Знайдіть довжину хвилі випромінюваного фотона.

8. Якщо енергія першого збудженого стану електрона в ящику дорівнює 25,0 еВ, то яка ширина ящика?

9. Припустимо, що електрон, обмежений ящиком, випромінює фотони. Найбільша зареєстрована довжина хвилі становить 500,0 нм. Яка ширина ящика?

10. Водень молекули H_2 зберігаються при 300,0 К в кубічному контейнері з довжиною сторони 20,0 см. Припустимо, що ви можете розглядати молекули так, ніби вони рухаються в одновимірному ящику. (а) Знайдіть енергію основного стану молекули водню в контейнері. (б) Припустимо, що молекула має теплову енергію, задану як $k_B T / 2$. Знайти відповідне квантове число n квантового стану, яке б відповідало цій тепловій енергії.

11. Електрон обмежений ящиком шириною 0,25 нм. (а) Намалуйте діаграму енергетичних рівнів, що представляє перші п'ять станів електрона. (б) Обчисліть довжини хвилі випромінюваних фотонів, коли електрон здійснює переходи між четвертим і другим збудженими станами, між другим збудженим станом і основним станом і між третім і другим збудженими станами.

12. Електрон у ящику знаходиться в основному стані з енергією 2,0 еВ. (а) Знайдіть ширину ящика. (б) Скільки енергії необхідно, щоб перевести електрон у його перший збуджений стан? (в) Коли електрон здійснює перехід зі збудженого стану в основний з одночасним випусканням фотона з енергією 30,0 еВ, знайдіть квантове число збудженого стану.

2.5. Квантовий гармонічний осцилятор

Коливання зустрічаються в усій природі, у таких речах, як електромагнітні хвилі, коливання молекули та м'яке коливання гілки дерева вперед-назад. Раніше ми використовували механіку Ньютона для вивчення макроскопічних коливань, таких як блок на пружині та простий маятник. У цьому підрозділі ми починаємо вивчати коливальні системи за допомогою квантової механіки. Почнемо з огляду класичного гармонічного осцилятора.

Класичний гармонічний осцилятор

Простий гармонічний осцилятор — це частинка або система, яка зазнає гармонічного руху навколо положення рівноваги, наприклад об'єкт з масою, що вібрає на пружині. У цьому розділі ми розглядаємо коливання лише в одному вимірі. Припустимо, маса рухається вперед-назад уздовж x - напрямку відносно положення рівноваги, $x = 0$. У класичній механіці частинка рухається у відповідь на лінійну відновлюючу силу, задану $F_x = -kx$, де x — зміщення частинки з положення рівноваги. Рух відбувається між двома поворотними точками, $x = \pm A$, де A позначає амплітуду руху. Положення об'єкта періодично змінюється в часі з кутовою частотою $\omega = \sqrt{k/m}$, яка залежить від маси m осцилятора та від силової константи k сумісної сили, і може бути записана так:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (2.52)$$

Повна енергія E осцилятора є сумою його кінетичної енергії $K = mv^2/2$ і потенціальної енергії $U(x) = kx^2/2$,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.53)$$

У моменти коли $x = \pm A$, швидкість осцилятора дорівнює нулю; тому в цих точках енергія коливань є виключно у вигляді потенціальної енергії $U(x) = kx^2/2$. Графік залежності потенціальної енергії $U(x)$ осцилятора від його положення x є параболою (рис. 2.13).

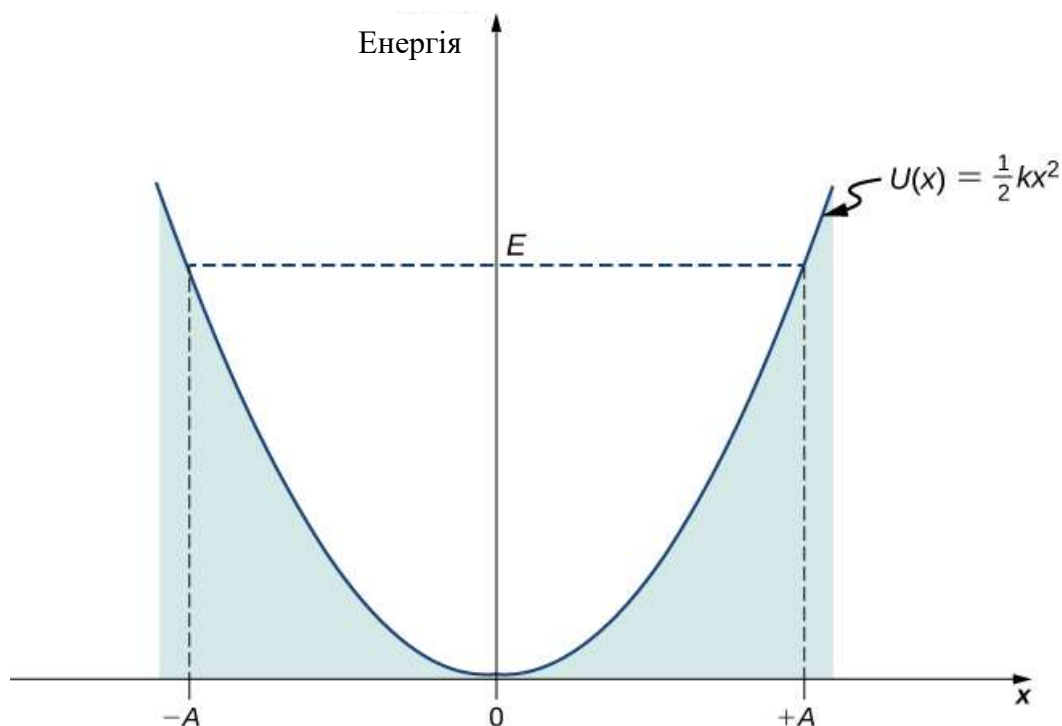


Рис. 2.13. Потенціальна енергетична яма класичного гармонічного осцилятора: рух обмежений між точками повороту, коли $x = -A$ і $x = +A$. Енергія коливань становить $U = kA^2/2$

Функція потенціальної енергії є квадратичною функцією x , виміряною відносно положення рівноваги. На цьому ж графіку ми також наносимо повну енергію E осцилятора у вигляді горизонтальної лінії, яка перетинає параболу в $x = \pm A$. Тоді кінетична енергія K представлена як вертикальна відстань між лінією повної енергії та параболою потенційної енергії.

На цьому графіку рух класичного осцилятора обмежений областю, де його кінетична енергія є невід'ємною, про що говорить співвідношення енергії у рівнянні 2.53. Фізично це означає, що класичний осцилятор ніколи не може бути знайдений поза його точками повороту, і його енергія залежить лише від того, наскільки далеко точки повороту знаходяться від його положення рівноваги. Енергія класичного осцилятора змінюється безперервно. Найнижча енергія, яку може мати класичний осцилятор, дорівнює нулю, що відповідає ситуації, коли об'єкт перебуває в стані спокою в положенні рівноваги. Стан нульової енергії класичного осцилятора просто означає відсутність коливань і руху взагалі (класична частинка, що сидить на дні потенційної ями на рис. 2.13). Коли об'єкт коливається, незалежно від того, якою великою чи малою може бути його енергія, він проводить найдовший час біля точок повороту, оскільки саме тут він сповільнюється та змінює напрямок руху. Тому ймовірність виявлення класичного осцилятора між точками повороту найбільша поблизу точок повороту і найменша в положенні рівноваги. (Зауважте, що це не твердження про перевагу об'єкта переходу до нижчої енергії. Це твердження про те, як швидко об'єкт рухається різними областями).

Квантовий гармонічний осцилятор

Однією з проблем цього класичного формулювання є те, що воно не є загальним. Ми не можемо використовувати його, наприклад, для опису коливань двоатомних молекул, де важливі квантові ефекти. Першим кроком до квантового формулювання є використання класичного виразу $k = m\omega^2$, щоб обмежити згадування константи «пружності» між атомами. Таким чином функцію потенційної енергії можна записати в більш загальному вигляді:

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.54)$$

Поєднання цього виразу з незалежним від часу рівнянням Шредінгера дає:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.55)$$

Щоб розв'язати рівняння 2.55, тобто знайти дозволені енергії E та їхні відповідні хвильові функції $\psi(x)$ — ми вимагаємо, щоб хвильові функції були симетричними відносно $x = 0$ (дно потенційної ями) і були нормованими. Ці умови забезпечують густину ймовірності $|\psi(x)|^2$, яка має бути скінченною при інтегруванні по всьому діапазону x від $-\infty$ до $+\infty$. Як розв'язати рівняння 2.55 є предметом більш просунутого курсу квантової механіки; тут ми просто наводимо результати. Дозволені енергії дорівнюють:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \frac{2n+1}{2}\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.56)$$

Хвильові функції, які відповідають цим енергіям (стаціонарні стани або стани з певною енергією), дорівнюють:

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\beta^2 x^2 / 2} H_n(\beta x), n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.57)$$

де $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$, N_n – постійна нормування, а $H_n(y)$ є поліномом ступеня n , який називають *поліномом Ерміта*. Перші чотири поліноми Ерміта є:

$$H_0(y) = 1$$

$$H_1(y) = 2y$$

$$H_2(y) = 4y^2 - 2$$

$$H_3(y) = 8y^3 - 12y.$$

Кілька прикладів хвильових функцій наведено на рис. 2.14. Зі збільшенням значення головного числа розв'язки чергуються між парними та непарними функціями.

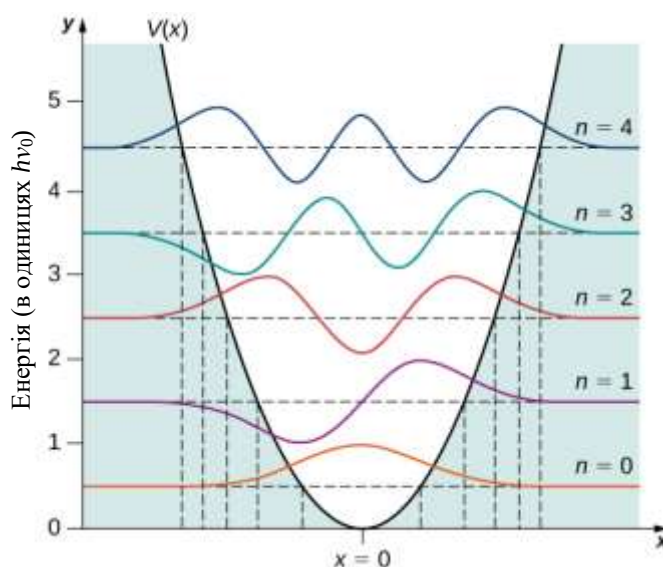


Рис. 2.14. Перші п'ять хвильових функцій квантового гармонічного осцилятора. Класичні межі руху осцилятора позначені вертикальними лініями, що відповідають класичним точкам повороту при $x = \pm A$ класичної частинки з такою ж енергією, як і енергія квантового осцилятора в стані, зазначеному на малюнку

Приклад. 2.10. Класична область гармонічних коливань

Знайти амплітуду A коливань класичного осцилятора з енергією, що дорівнює енергії квантового осцилятора в квантовому стані n .

Стратегія

Для визначення амплітуди A задаємо класичну енергію $E = kx^2/2 = m\omega^2 A^2/2$, яка дорівнює E_n визначеної з рівняння 2.56.

Розв'язок

Отже, ми отримуємо:

$$E_n = \frac{1}{2} m\omega^2 A_n^2 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2} E_n} = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2} \frac{2n+1}{2} \hbar\omega} = \sqrt{(2n+1) \frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Обговорення

Зі збільшенням квантового числа n енергія осцилятора i , отже, амплітуда коливань зростає (для фіксованої власної кутової частоти). Для великих n амплітуда приблизно пропорційна квадратному кореню з квантового числа.

У цьому розв'язку є кілька цікавих функцій. На відміну від класичного осцилятора, вимірювана енергія квантового осцилятора може мати лише значення енергії, визначені рівнянням 2.56. Крім того, на відміну від випадку квантової частинки в ящику, *допустимі рівні енергії розподілені рівномірно*,

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{2(n+1)+1}{2} \hbar \omega - \frac{2n+1}{2} \hbar \omega = \hbar \omega = hf. \quad (2.58)$$

Коли частинка, пов'язана з такою системою, здійснює перехід із стану з вищою енергією в стан з нижчою енергією, квант найменшої енергії, який переносить випромінюваний фотон, обов'язково дорівнює hf . Коли частинка здійснює перехід від стану з нижчою енергією до стану з вищою енергією, найменшим квантом енергії, який може поглинути частинка, є hf . Квантовий осцилятор може поглинати або випромінювати енергію лише кратну цьому кванту найменшої енергії. Це узгоджується з гіпотезою Планка щодо обміну енергією між випромінюванням і стінками порожнини чорного тіла.

Приклад 2.11. Коливальні енергії молекули хлориду водню

Двоатомна молекула HCl складається з одного атома хлору та одного атома водню. Оскільки атом хлору в 35 разів масивніший за атом водню, коливання молекули HCl можна досить добре апроксимувати, якщо припустити, що атом Cl нерухомий, а атом H здійснює гармонійні коливання внаслідок пружної молекулярної сили, змодельованої за законом Гука. Інфрачервоний коливальний спектр, вимірюваний для хлориду водню, має лінію найнижчої частоти з центром $f = 8,88 \times 10^{13}$ Гц. Яка відстань між енергіями коливань цієї молекули? Чому дорівнює силова стала k атомного зв'язку в молекулі HCl?

Стратегія

Найнижчочастотна лінія відповідає випромінюванню фотонів найнижчої частоти. Ці фотони випромінюються, коли молекула здійснює перехід між двома сусідніми коливальними рівнями енергії. Припускаючи, що рівні енергії розташовані однаково, ми використовуємо рівняння 2.58 для оцінки відстані. Молекула добре апроксимується, розглядаючи атом Cl як нескінченно важкий, а атом H як матеріальну точку масою m , яка здійснює коливання. Розглядаючи цю молекулярну систему як класичний осцилятор, силову постійну знаходять із класичного співвідношення $k = m\omega^2$.

Розв'язок

Енергетичний інтервал дорівнює:

$$\Delta E = hf = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(8,88 \times 10^{13} \text{ Гц}) = 0,368 \text{ eV}.$$

Силова константа дорівнює:

$$k = m\omega^2 = m(2\pi f)^2 = (1,67 \times 10^{-27} \text{ кг})(2\pi \times 8,88 \times 10^{13} \text{ Гц})^2 = 520 \text{ Н/м.}$$

Обговорення

Сила взаємодії між атомами в молекулі HCl напрочуд сильна. Типова енергія, що виділяється під час енергетичних переходів між коливальними рівнями, знаходиться в інфрачервоному діапазоні. Як ми побачимо пізніше, переходи між рівнями енергії коливань двоатомної молекули часто супроводжують переходи між рівнями енергії обертання.

Перевірте своє розуміння 2.8

Частота коливань двоатомної молекули йодистого водню HI становить $6,69 \times 10^{13}$ Гц. (а) Чому дорівнює силова константа молекулярного зв'язку між атомами водню та йоду? (б) Яка енергія випромінюваного фотона, коли ця молекула здійснює перехід між сусідніми коливальними рівнями енергії?

Квантовий осцилятор відрізняється від класичного осцилятора трьома ознаками: по-перше, основний стан квантового осцилятора $E_0 = \hbar\omega / 2$, не нуль. У класичному розумінні найменша енергія дорівнює нулю. Відсутність стану з нульовою енергією є спільним для всіх квантово-механічних систем через всюдисущі флуктуації, які є наслідком принципу невизначеності Гейзенберга. Якби квантова частинка сиділа нерухомо на дні потенційної ями, її імпульс, а також її положення повинні були б одночасно точними, що порушувало б принцип невизначеності Гейзенберга. Отже, стан з найнижчою енергією має характеризуватися невизначеністю імпульсу та положення, тому *основний стан квантової частинки має лежати над дном потенціальної ями*.

По-друге, частинка в потенціалі квантового гармонічного осцилятора може бути знайдена з ненульовою ймовірністю поза інтервалом $-A \leq x \leq +A$. У класичній постановці задачі частинка не мала б ніякої енергії, щоб перебувати в цій області. *Ймовірність знайти квантову частинку в основному стані в класично забороненій області становить близько 16%*.

По-третє, розподіл густини ймовірності $|\psi_n(x)|^2$ для квантового осцилятора в основному низькоенергетичному стані, $\psi_0(x)$, найбільше в середині потенціальної ями ($x = 0$). Щоб частинка з найбільшою ймовірністю була знайдена в центрі ями, ми очікуємо, що частинка проводить там найбільше часу під час своїх коливань. Це протилежно поведінці класичного осцилятора, в якому частинка проводить більшу частину свого часу, рухаючись із відносно малими швидкостями поблизу точок повороту.

Перевірте своє розуміння 2.9

Знайти математичне очікування положення для частинки в основному стані гармонічного осцилятора за допомогою симетрії.

Розподіл квантової густини ймовірності змінює характер для збуджених станів, стаючи більш схожим на класичний розподіл, коли квантове число стає великим. Ми спостерігаємо цю зміну вже для першого збудженого стану квантового осцилятора, оскільки розподіл $|\psi_1(x)|^2$ досягає піку навколо точок повороту і зникає в положенні рівноваги, як показано на рис. 2.15.

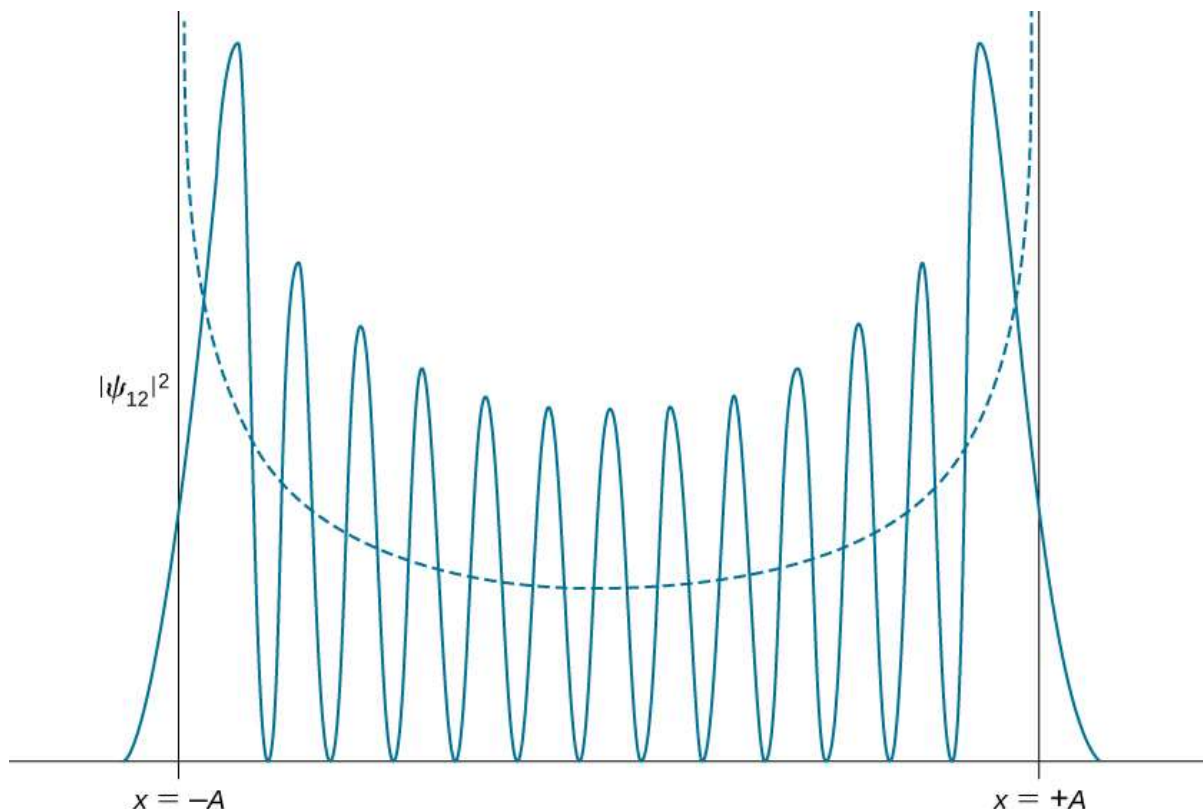


Рис. 2.15. Розподіл густини ймовірності для знаходження квантового гармонічного осцилятора в його квантовому стані $n = 12$. Пунктирна крива показує розподіл густини ймовірності класичного осцилятора з такою ж енергією

Відповідно до принципу відповідності Бора, в межах великих квантових чисел квантовий опис гармонічного осцилятора збігається з класичним описом, який зображено на рис. 2.15. Класичний розподіл густини ймовірності, що відповідає енергії кванта в стані $n = 12$ є досить хорошим наближенням квантового розподілу ймовірностей для квантового осцилятора в цьому збудженому стані. Ця угода стає все кращою для сильно збуджених станів.

Вправи до п. 2.5. Квантовий гармонічний осцилятор

1. Покажіть, що два найнижчі енергетичні стани простого гармонічного осцилятора, $\psi_0(x)$ і $\psi_1(x)$ з рівняння 2.57 задовольняє рівняння 2.55.
2. Якщо енергія основного стану простого гармонічного осцилятора дорівнює 1,25 еВ, яка частота його руху?
3. Коли квантовий гармонічний осцилятор здійснює перехід від $(n + 1)$ у стан n і випромінює фотон з довжиною довжини 450 нм, яка його частота?

4. Коливання молекули H_2 водню можна моделювати як простий гармонічний осцилятор з постійною пружини $k = 1,13 \times 10^3 \text{ Н / м}$ і масою $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ кг}$. (а) Яка частота коливань цієї молекули? (б) Які енергія та довжина хвилі випромінюваного фотона, коли молекула здійснює перехід між третім і другим збудженим станом?

5. Частинка масою $0,030 \text{ кг}$ здійснює коливання на пружині з частотою $4,0 \text{ Гц}$. У положенні рівноваги вона має швидкість $0,60 \text{ м/с}$. Якщо частинка знаходиться в стані певної енергії, знайдіть її енергетичне квантове число.

6. Знайдіть очікуване значення $\langle x^2 \rangle$ квадрата положення квантового гармонічного осцилятора в основному стані.

Примітка: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi} (2\alpha^{3/2})^{-1}$.

7. Визначити середнє значення потенціальної енергії для квантового гармонічного осцилятора в основному стані. Використовуйте це для розрахунку очікуваного значення кінетичної енергії.

8. Перевірте, що $\psi_1(x)$ рівняння 2.57 є розв'язком рівняння Шредінгера для квантового гармонічного осцилятора.

9. Оцініть енергію основного стану квантового гармонічного осцилятора за принципом невизначеності Гейзенберга. Почніть із припущення, що добуток невизначеностей Δx і Δp є мінімальним. Напишіть Δp з точки зору Δx і припустимо, що для основного стану $x \approx \Delta x$ і $p \approx \Delta p$, потім запишіть енергію основного стану через x . Нарешті знайдіть значення x , яке мінімізує енергію, і знайдіть мінімум енергії.

10. Маса $0,250 \text{ кг}$ коливається на пружині зі сталою $k = 110 \text{ Н/м}$. Обчисліть основний рівень енергії та відстань між сусідніми рівнями енергії. Виразіть результати в джоулях і в електрон-вольтах. Чи важливі квантові ефекти?

2.6. Квантове тунелювання частинок через потенційні бар'єри

Квантове тунелювання — це явище, при якому частинки проникають через бар'єр потенційної енергії, висота якого перевищує загальну енергію частинок. Явище цікаве і важливе, оскільки воно порушує принципи класичної механіки. Квантове тунелювання важливе в моделях Сонця та має широкий спектр застосувань, таких як скануючий тунельний мікроскоп і тунельний діод.

Тунелювання та потенційна енергія

Щоб проілюструвати квантове тунелювання, розглянемо кулю, що котиться поверхнею з кінетичною енергією 100 Дж . Коли куля котиться, вона натикається на пагорб. Потенціальна енергія кульки, покладеної на вершину пагорба, дорівнює 10 Дж . Тому куля (з кінетичною енергією 100 Дж) легко перекочується через пагорб і йде далі. У класичній механіці ймовірність того, що куля перелетить пагорб, дорівнює рівно 1 — вона переходить щоразу. Проте, якщо висота пагорба збільшується — куля, розміщена на вершині пагорба, має

потенціальну енергію 200 Дж, — куля проходить лише частину шляху вгору, зупиняється й повертається в тому напрямку, у якому прийшла. Загальна енергія кулі повністю перетворюється на потенційну енергію, перш ніж вона досягне вершини пагорба. Ми не очікуємо, навіть після неодноразових спроб, що куля з енергією 100 Дж коли-небудь буде знайдена за пагорбом. Таким чином, ймовірність того, що куля перелетить пагорб, дорівнює рівно 0, а ймовірність того, що вона повернеться назад або «відбивається» від пагорба, дорівнює рівно 1. Отже, куля *ніколи не* перетинає пагорб. Існування кулі за пагорбом є неможливим або «енергетично забороненим».

Однак, згідно з квантовою механікою, куля має хвильову функцію, і ця функція визначена у всьому просторі. Хвильова функція може бути дуже локалізованою, але завжди є ймовірність того, що коли куля стикається з пагорбом, то вона може раптово опинитися за ним. Дійсно, ця ймовірність помітна, якщо «хвильовий пакет» кулі ширший за бар'єр.

Мовою квантової механіки пагорб характеризується **потенціальним бар'єром**. Квадратний бар'єр кінцевої висоти описується такою функцією потенціальної енергії:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0 \\ U_0, & \text{коли } 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{коли } x > L. \end{cases} \quad (2.59)$$

Потенціальний бар'єр зображено на рис. 2.16.

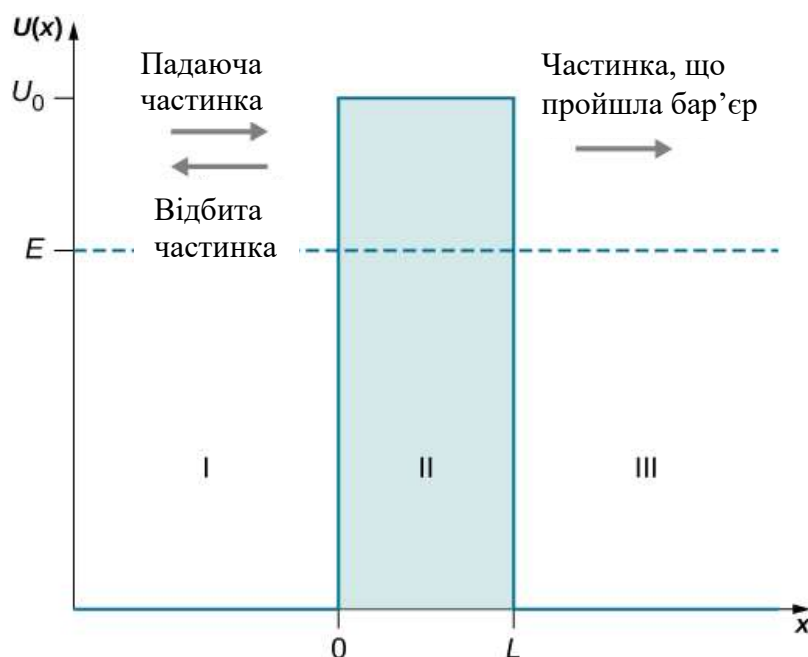


Рис. 2.16. Потенціальний енергетичний бар'єр висотою U_0 створює три фізичні області з трьома різними характеристиками хвиль. В області I де $x < 0$, падаючий хвильовий пакет (падаюча частинка) рухається в безпотенціальній зоні та співіснує з відбитим хвильовим пакетом (відбитою частинкою). В області II частина падаючої хвилі, яка не відбилася на $x = 0$ рухається як передана хвиля в постійному потенціалі $U(x) = +U_0$ і тунелюється через область III на $x = L$. В області III, коли $x > L$, хвильовий пакет (передана частинка), який пройшов через потенціальний бар'єр, рухається як вільна частинка у безпотенціальній зоні. Енергія E падаючої частинки позначена горизонтальною лінією

Коли висота U_0 бар'єру нескінченна, хвильовий пакет, що представляє падаючу квантову частинку, не може проникнути через нього, і квантова частинка відскакує від межі бар'єру, як і класична частинка. Коли ширина L бар'єру нескінченна, а його висота скінченна, частина хвильового пакета, що представляє падаючу квантову частинку, може просочитися через межу бар'єру та зрештою загаснути, пройшовши деяку відстань усередині бар'єру.

Коли ширина L і висота U_0 скінченні, частина квантового хвильового пакета, що падає з одного боку бар'єру, може проникнути через межу бар'єру та продовжити свій рух усередині бар'єру, де поступово послаблюється на шляху до іншого боку. Частина падаючого квантового хвильового пакета зрештою з'являється по інший бік бар'єру у формі переданого хвильового пакета, який пройшов через бар'єр. Яка частина падаючої хвилі може пройти через бар'єр, залежить від ширини бар'єру L і його висоти U_0 , а також від енергії падіння на бар'єр квантової частинки E . Це фізика тунелювання.

Проникнення бар'єрів квантовими хвильовими функціями вперше було теоретично проаналізовано Фрідріхом Хундом у 1927 році, незабаром після того, як Шредінгер опублікував рівняння, яке носить його ім'я. Через рік Георгій Гамов використав формалізм квантової механіки для пояснення радіоактивного α -розпаду атомних ядер як квантово-тунельний феномен. Винахід тунельного діода в 1957 році дав зрозуміти, що квантове тунелювання є важливим для напівпровідникової промисловості. У сучасних нанотехнологіях окремими атомами маніпулюють за допомогою знань про квантове тунелювання.

Тунелювання та хвильова функція

Припустимо, однорідний і незалежний від часу пучок електронів або інших квантових частинок з енергією E , що рухається вздовж осі x (у позитивному напрямку праворуч), зустрічає потенційний бар'єр, описаний рівнянням 2.59. Постає питання: яка ймовірність того, що окрема частинка в пучку пройде через потенціальний бар'єр? Відповідь можна знайти, розв'язавши граничну задачу для рівняння Шредінгера, незалежного від часу, для частинки в пучку. Загальний вигляд цього рівняння задано рівнянням 2.60, яке ми відтворюємо тут:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \text{ де } -\infty < x < +\infty. \quad (2.60)$$

У рівнянні 2.60 потенціальна функція $U(x)$ визначається рівнянням 2.59. Ми припускаємо, що задана енергія E налітаючої частинки менша за висоту U_0 потенційного бар'єру, $E < U_0$, тому що це цікавий фізичний випадок. Знаючи енергію E частинки, що налітає, наше завдання полягає в тому, щоб розв'язати рівняння 2.60 для функції $\psi(x)$, що є неперервною і має неперервні перші похідні для всіх x . Іншими словами, ми шукаємо «гладкий» розв'язок (оскільки саме так виглядають хвильові функції), якому можна дати імовірнісну інтерпретацію, щоб $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$ бо це густина ймовірності.

Ми ділимо дійсну вісь на три області з межами, визначеними потенціальною функцією в рівнянні 2.59 (ілюстровано на рис. 2.16), і

транскрибуємо рівняння 2.60 для кожної області. Позначаючи через $\psi_I(x)$ розв'язок в області I для $x < 0$, $\psi_{II}(x)$ розв'язок в області II для $0 \leq x \leq L$, і $\psi_{III}(x)$ розв'язок в області III для $x > L$, стаціонарне рівняння Шредінгера має такі форми в цих трьох областях:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I(x)}{dx^2} = E \psi_I(x), \text{ в області I: } -\infty < x < 0. \quad (2.61)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} + U_0 \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x), \text{ в області II: } 0 \leq x \leq L. \quad (2.62)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{III}(x)}{dx^2} = E \psi_{III}(x), \text{ в області III: } L < x < +\infty. \quad (2.63)$$

Умова безперервності на межі області вимагає, щоб:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \text{ на межі областей I і II} \quad (2.64)$$

і

$$\psi_{II}(L) = \psi_{III}(L), \text{ на межі областей II і III} \quad (2.65)$$

Умова «гладкості» вимагає, щоб перша похідна розв'язку була неперервною на границях області:

$$\left. \frac{d\psi_I(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{II}(x)}{dx} \right|_{x=0}, \text{ на межі області I та II;} \quad (2.66)$$

$$\left. \frac{d\psi_{II}(x)}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{d\psi_{III}(x)}{dx} \right|_{x=L}, \text{ на межі області II та III;} \quad (2.67)$$

Далі знайдемо функції $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$, і $\psi_{III}(x)$.

Ми можемо легко переконатися (підставляючи у вихідне рівняння та диференціюючи), що в областях I і III розв'язки повинні мати такі загальні форми:

$$\psi_I(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}, \quad (2.68)$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{+ikx} + Ge^{-ikx}, \quad (2.69)$$

де $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ є хвильовим числом, а комплексний показник позначає коливання

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx. \quad (2.70)$$

Константи A , B , F і G у рівнянні 2.68 і рівнянні 2.69 можуть бути комплексними. Ці розв'язки проілюстровано на рис. 2.16. В області I є дві хвилі — одна падаюча (рухається вправо), а друга — відбита (рухається ліворуч), тому жодна з констант A і B у рівнянні 2.68 не може дорівнювати нулю. В області III є лише одна хвиля (рухається вправо), яка є хвилею, що проходить, тому константа G повинна дорівнювати нулю в рівнянні 2.69, $G = 0$. Ми можемо написати явно, що падаюча хвиля є $\psi_{in}(x) = Ae^{+ikx}$ і що відбита хвиля є $\psi_{ref}(x) = Be^{-ikx}$, і що передана хвиля є $\psi_{tra}(x) = Fe^{+ikx}$. Амплітуда падаючої хвилі дорівнює:

$$|\psi_{in}(x)|^2 = \psi_{in}^*(x) \psi_{in}(x) = (Ae^{+ikx})^* Ae^{+ikx} = A^* e^{-ikx} Ae^{+ikx} = A^* A = |A|^2.$$

Аналогічно, амплітуда відбитої хвилі дорівнює $|\psi_{ref}(x)|^2 = |B|^2$, а амплітуда переданої хвилі дорівнює $|\psi_{tra}(x)|^2 = |F|^2$. З теорії хвиль ми знаємо, що квадрат амплітуди хвилі прямо пропорційний інтенсивності хвилі. Якщо ми хочемо знати, яка частина падаючої хвилі тунелює через бар'єр, нам потрібно обчислити квадрат амплітуди переданої хвилі. Імовірність **передачі** або **ймовірність**

тунелювання – це відношення інтенсивності переданої хвилі ($|F|^2$) до інтенсивності падаючої хвилі ($|A|^2$):

$$T(L, E) = \frac{|\psi_{tra}(x)|^2}{|\psi_{in}(x)|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left| \frac{F}{A} \right|^2, \quad (2.71)$$

де L – ширина бар'єру, а E – повна енергія частинки.

Це ймовірність того, що окрема частинка в падаючому пучку пройде через потенційний бар'єр. Інтуїтивно ми розуміємо, що ця ймовірність повинна залежати від висоти бар'єру U_0 .

В області II доданки в рівнянні 2.62 можна переставити так:

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} = \beta^2\psi_{II}(x), \quad (2.72)$$

де β^2 – є позитивним, оскільки $U_0 > E$ і параметр β є дійсним числом,

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E). \quad (2.73)$$

Загальний розв'язок рівняння 2.72 не є коливальним (на відміну від інших областей) і має форму експонент, які описують поступове ослаблення $\psi_{II}(x)$,

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\beta x} + De^{+\beta x}. \quad (2.74)$$

Два типи рішень у трьох областях проілюстровано на рис. 2.17.

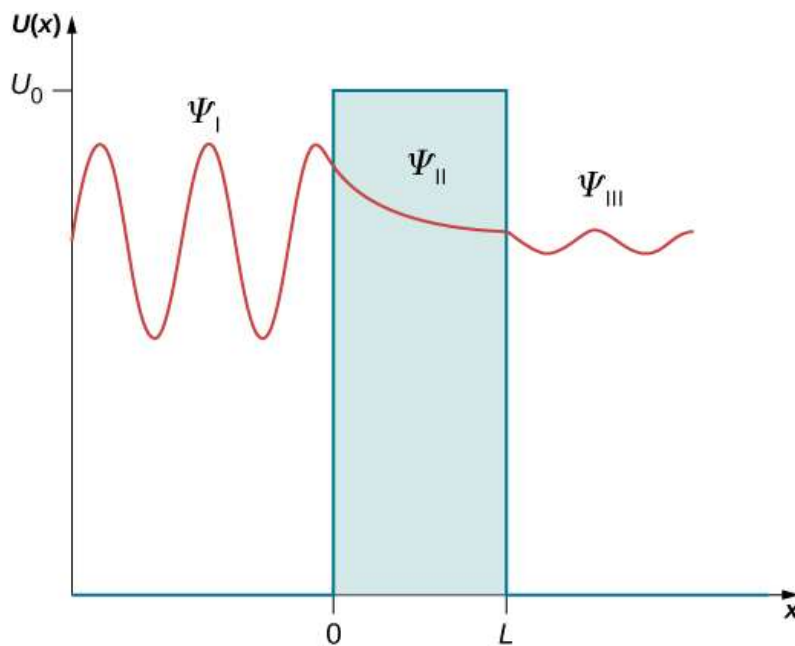


Рис. 2.17. Три типи розв'язків стаціонарного рівняння Шредінгера для проблеми квантового тунелювання: коливальна поведінка в областях I і III, де квантова частинка рухається вільно, і поведінка експоненціального загасання в області II (область бар'єру), де частинка рухається в потенціалі U_0

Тепер ми використовуємо граничні умови, щоб знайти рівняння для невідомих констант. Рівняння 2.68 і рівняння 2.74 замінено на рівняння 2.64, щоб отримати:

$$A + B = C + D. \quad (2.75)$$

Рівняння 2.74 і рівняння 2.69 замінено на рівняння 2.65, щоб отримати:

$$Ce^{-\beta L} + De^{+\beta L} = Fe^{+ikL}. \quad (2.76)$$

Подібним чином ми підставляємо рівняння 2.68 і рівняння 2.74 у рівняння 2.66, диференціюємо та отримуємо:

$$-ik(A - B) = \beta(D - C). \quad (2.77)$$

Аналогічно, гранична умова рівняння 2.67 читається так:

$$\beta(De^{+\beta L} - Ce^{-i\beta L}) = -ikFe^{+ikL}. \quad (2.78)$$

Тепер ми маємо чотири рівняння для п'яти невідомих констант. Однак, оскільки величина, яку ми шукаємо, є коефіцієнтом пропускання, визначеним у рівнянні 2.71 дробом F/A , кількість рівнянь є точною, тому що коли ми ділимо кожне з наведених вище рівнянь на A , ми отримуємо лише чотири невідомі дроби: B/A , C/A , D/A та F/A , три з яких можна виключити, щоб знайти F/A . Фактична алгебра, яка веде до виразу для F/A , досить довга, але це можна зробити вручну або за допомогою комп'ютерного програмного забезпечення. Кінцевий результат є таким:

$$\frac{F}{A} = \frac{e^{-ikL}}{\cosh(\beta L) + i(\gamma/2)\sinh(\beta L)}. \quad (2.79)$$

При отриманні рівняння 2.79 ми використовуємо підстановки $\gamma \equiv \beta/k - k/\beta$, $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Підставляємо рівняння 2.79 у рівняння 2.71 і отримуємо точний вираз для коефіцієнта пропускання для бар'єру:

$$T(L, E) = \left(\frac{F}{A}\right)^* \frac{F}{A} = \frac{e^{+ikL}}{\cosh(\beta L) - i(\gamma/2)\sinh(\beta L)} \cdot \frac{e^{-ikL}}{\cosh(\beta L) + i(\gamma/2)\sinh(\beta L)},$$

або

$$T(L, E) = \frac{1}{\cosh^2(\beta L) + (\gamma/2)^2 \sinh^2(\beta L)}, \quad (2.80)$$

де

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - E/U_0}{E/U_0} + \frac{E/U_0}{1 - E/U_0} - 2 \right).$$

Для широкого та високого бар'єру, який погано пропускає, рівняння 2.80 може бути наближено до наступного виразу:

$$T(L, E) = \frac{16E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\beta L}. \quad (2.81)$$

Незалежно від того, чи це точний вираз рівняння 2.80, чи наближений вираз рівняння 2.81, ми бачимо, що ефект тунелювання дуже сильно залежить від ширини L потенційного бар'єру. У лабораторії ми можемо регулювати потенційну висоту U_0 і ширину L для розробки нанопристроїв з бажаними коефіцієнтами пропускання.

Приклад 2.12. Коефіцієнт пропускання

Два мідні нанодроти ізольовані наночаром оксиду міді, який створює потенційний бар'єр 10,0 еВ. Оцініть ймовірність тунелювання між нанодротоми електронів з енергією 7,00 еВ через шар оксиду товщиною 5,00 нм. Що було б, якби товщину шару було зменшено лише до 1,00 нм? Що було б, якби енергію електронів збільшити до 9,00 еВ?

Стратегія

Вважаючи ізоляційний оксидний шар потенційним бар'єром кінцевої висоти, ми використовуємо рівняння 2.81 та те, що

$$U_0 = 10,0 \text{ еВ}, E_1 = 7,00 \text{ еВ}, E_2 = 9,00 \text{ еВ}, L_1 = 5,00 \text{ нм}, \text{ і } L_2 = 1,00 \text{ нм}.$$

Ми використовуємо рівняння 2.73 для обчислення експоненти. Крім того, нам потрібна маса спокою електрона $m = 511 \text{ кеВ}/c^2$ і стала Планка $\hbar = 0,1973 \text{ кеВ} \cdot \text{нм} / c$. Типовим для цього типу оцінки є робота з дуже малими величинами, які часто не підходять для кишенькових калькуляторів. Для правильної оцінки величин ми робимо конвертацію $e^y = 10^{y/\ln 10}$.

Розв'язок

Константи:

$$\frac{2m}{\hbar^2} = \frac{2(511 \text{ кеВ}/c^2)}{(0,1973 \text{ кеВ} \cdot \text{нм}/c)^2} = 26254 \frac{1}{\text{кеВ} \cdot (\text{нм})^2},$$
$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)} = \sqrt{26,254 \frac{10,0 \text{ еВ} - E}{\text{еВ} \cdot (\text{нм})^2}} = \sqrt{26,254 \frac{10,0 \text{ еВ} - E}{\text{еВ}}} \frac{1}{\text{нм}}.$$

Для електрона меншої енергії $E_1 = 7,00 \text{ еВ}$:

$$\beta_1 = \sqrt{26,254 \frac{10,0 \text{ еВ} - E_1}{\text{еВ}}} \frac{1}{\text{нм}} = \sqrt{26,254 \frac{10,0 \text{ еВ} - 7,00}{\text{еВ}}} \frac{1}{\text{нм}} = \frac{8,875}{\text{нм}},$$
$$T(L, E_1) = \frac{16E_1}{U_0} \left(1 - \frac{E_1}{U_0}\right) e^{-2\beta_1 L} = \frac{16 \cdot 7}{10} \left(1 - \frac{7}{10}\right) e^{-17,75L/\text{нм}} = 3,36 e^{-17,75L/\text{нм}}.$$

Для більш високоенергетичного електрона $E_2 = 9,00 \text{ еВ}$:

$$\beta_2 = \sqrt{26,254 \frac{10,0 \text{ еВ} - E_2}{\text{еВ}}} \frac{1}{\text{нм}} = \sqrt{26,254 \frac{10,0 \text{ еВ} - 9,00}{\text{еВ}}} \frac{1}{\text{нм}} = \frac{5,124}{\text{нм}},$$
$$T(L, E_2) = \frac{16E_2}{U_0} \left(1 - \frac{E_2}{U_0}\right) e^{-2\beta_2 L} = \frac{16 \cdot 9}{10} \left(1 - \frac{9}{10}\right) e^{-10,25L/\text{нм}} = 1,44 e^{-10,25L/\text{нм}}.$$

Для широкого бар'єру $L_1 = 5,00 \text{ нм}$:

$$T(L_1, E_1) = 3,36 e^{-17,75L_1/\text{нм}} = 3,36 e^{-17,75 \cdot 5,00 \text{ нм}/\text{нм}} = 3,36 \cdot e^{-88} =$$
$$= 3,36(6,2 \times 10^{-39}) = 2,1\% \times 10^{-36},$$
$$T(L_1, E_2) = 1,44 e^{-10,25L_1/\text{нм}} = 1,44 e^{-10,25 \cdot 5,00 \text{ нм}/\text{нм}} = 1,44 \cdot e^{-51,2} =$$
$$= 1,44(5,81 \times 10^{-12}) = 8,36\% \times 10^{-25}.$$

Для більш вузького бар'єру $L_2 = 1,00 \text{ нм}$:

$$T(L_2, E_1) = 3,36 e^{-17,75L_2/\text{нм}} = 3,36 e^{-17,75 \cdot 1,00 \text{ нм}/\text{нм}} = 3,36 \cdot e^{-17,75} =$$
$$= 3,36(5,1 \times 10^{-7}) = 1,7\% \times 10^{-4},$$
$$T(L_2, E_2) = 1,44 e^{-10,25L_2/\text{нм}} = 1,44 e^{-10,25 \cdot 1,00 \text{ нм}/\text{нм}} = 1,44 \cdot e^{-10,25} =$$
$$= 1,44(3,53 \times 10^{-5}) = 5,09\% \times 10^{-7}.$$

Обговорення

З цих оцінок ми бачимо, що на ймовірність тунелювання більше впливає ширина потенційного бар'єру, ніж енергія падаючої частинки. У сучасних

технологіях ми можемо маніпулювати окремими атомами на металевих поверхнях, щоб створити потенційні бар'єри розміром частки нанометра, створюючи тунельні струми, які можна вимірювати. Одним із багатьох застосувань цієї технології є скануючий тунельний мікроскоп (СТМ), який ми обговоримо далі в цьому розділі.

Перевірте своє розуміння 2.10

Протон з кінетичною енергією 1,00 еВ падає на квадратний потенційний бар'єр висотою 10,00 еВ. Якщо протон має таку саму ймовірність передачі, що й електрон з такою ж енергією, якою має бути ширина бар'єру відносно ширини бар'єру, з яким стикається електрон?

Радіоактивний розпад

У 1928 році Гамов визначив квантове тунелювання як механізм, відповідальний за радіоактивний розпад атомних ядер. Він спостерігав, що деякі ізотопи торію, урану та вісмуту розпадаються, випромінюючи α -частинки (які є подвійно іонізовані атоми гелію або, простіше кажучи, ядра гелію). У процесі випромінювання α -частинки, вихідне ядро перетворюється на нове ядро, яке має на два менше нейтронів і на два протони менше, ніж у вихідному ядрі. α -частинки, випромінювані одним ізотопом, мають приблизно однакову кінетичну енергію. Коли ми дивимося на варіації цих енергій серед ізотопів різних елементів, найнижча кінетична енергія становить приблизно 4 МеВ, а найвища – приблизно 9 МеВ, тому ці енергії мають однаковий порядок величини. На цьому схожість між різними ізотопами закінчується.

Коли ми перевіряємо періоди напіврозпаду (період напіврозпаду – це час, протягом якого радіоактивний зразок втрачає половину своїх ядер через розпад), різні ізотопи сильно відрізняються. Наприклад, період напіврозпаду полонію-214 становить 160 мкс, період напіврозпаду урану становить 4,5 мільярда років. Гамов пояснив цю варіацію, розглядаючи модель ядра «сферичної коробки», де α -частинки можуть відскакувати вперед і назад між стінами як вільні частинки. Утримання забезпечується сильним ядерним потенціалом на сферичній стінці боксу. Товщина цієї стінки, однак, не нескінченна, а кінцева, тому в принципі ядерна частинка має шанс уникнути цього ядерного обмеження. На внутрішній стінці утримуючого бар'єру знаходиться високий ядерний потенціал, який утримує α -частинку в малому об'ємі. Але коли α -частинка виходить на інший бік цієї стінки, тоді зазнає електростатичного кулонівського відштовхування і віддаляється від ядра. Ця ідея проілюстрована на рис. 2.18.

Ширина L потенційного бар'єру, що розділяє α -частинку із зовнішнім світом, залежить від кінетичної енергії частинки E . Ця ширина є відстанню між точкою, позначеною ядерним радіусом R , і точкою R_0 де α -частинка виходить по інший бік бар'єру, $L = R_0 - R$. На відстані R_0 , її кінетична енергія повинна

принаймні відповідати електростатичній енергії відштовхування, $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R_0}$, (де $+Ze$ є зарядом ядра).

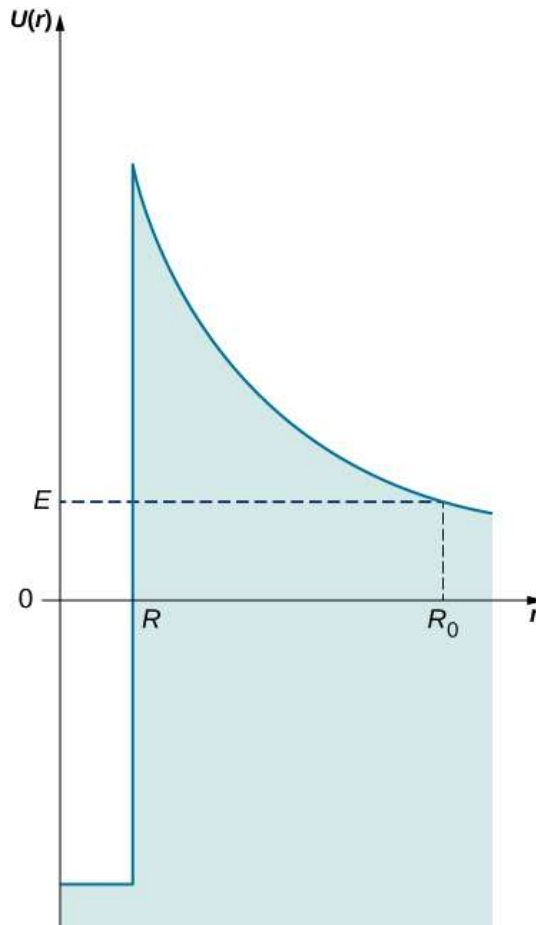


Рис. 2.18. Потенційний енергетичний бар'єр для α -частинки, зв'язаної в ядрі. Щоб вирватися з ядра, α -частинка з енергією E повинна тунелювати через бар'єр від відстані R до відстані R_0 подалі від центру

Таким чином ми можемо оцінити ширину ядерного бар'єру,

$$L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{E} - R.$$

З цієї оцінки ми бачимо, що чим вища енергія α -частинки, тим вужчою є ширина бар'єру, через який вона має тунелювати. Ми також знаємо, що ширина потенційного бар'єру є найважливішим параметром імовірності тунелювання. Таким чином, дуже енергійні α -частинки мають хороший шанс вирватися з ядра, і для таких ядер період напіврозпаду ядер є коротким. Зауважте, що цей процес дуже нелінійний, що означає невелике збільшення α -енергії частинок має непропорційно великий вплив на ймовірність тунелювання і, як наслідок, на скорочення періоду напіврозпаду. Це пояснює, чому період напіврозпаду полонію, який випромінює 8 MeV α -частинки становить лише сотні мілісекунд, а період напіврозпаду урану, який випромінює 4 MeV α -частинки, становить мільярди років.

Польова емісія

Польова емісія — це процес випускання електронів із провідних поверхонь за рахунок сильного зовнішнього електричного поля, яке прикладене в напрямку, перпендикулярному до поверхні (рис. 2.19).

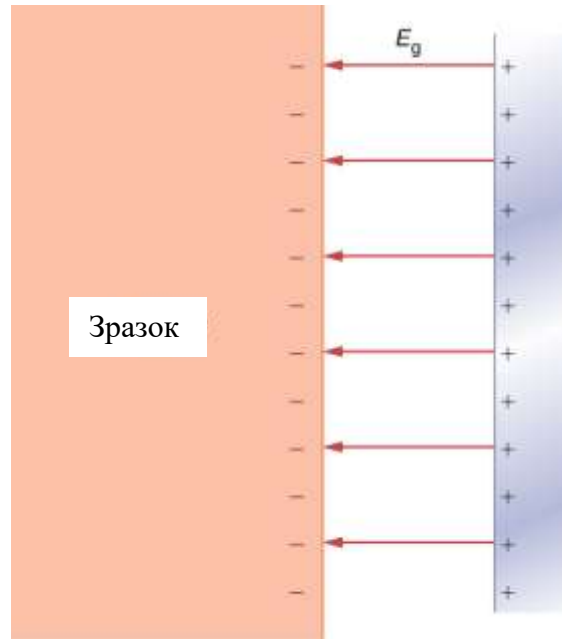


Рис. 2.19. Зовнішнє електричне поле нормального напрямку на поверхні провідника: у сильному полі електрони на провідній поверхні можуть відірватися від неї та прискоритися проти зовнішнього електричного поля від поверхні

Як ми знаємо, прикладене зовнішнє електричне поле змушує електрони в провіднику рухатися до його поверхні та залишатися там до тих пір, поки поточне зовнішнє поле не є надто сильним. У цій ситуації ми маємо постійний електричний потенціал усередині провідника, включаючи його поверхню. Мовою потенційної енергії ми говоримо, що електрон усередині провідника має постійну потенціальну енергію $U(x) = -U_0$ (тут x означає всередині провідника). У ситуації, представлений на рис. 2.19, зовнішнє електричне поле є однорідним і має величину E_g , якщо електрон опиняється за межами провідника на відстані x від його поверхні, його потенційна енергія повинна бути $U(x) = -eE_g x$ (тут x позначає відстань до поверхні). Беручи початок координат на поверхні, так що $x = 0$ є розташуванням поверхні, ми можемо представити потенційну енергію електронів провідності в металі як потенційний енергетичний бар'єр, показаний на рис. 2.20. За відсутності зовнішнього поля потенційна енергія стає ступінчастим бар'єром, визначеним $U(x \leq 0) = -U_0(x \leq 0)$ і $U(x > 0) = 0$.

Коли зовнішнє електричне поле є сильним, електрони провідності на поверхні можуть відірватися від нього та прискоритися вздовж ліній електричного поля в напрямку, антипаралельному зовнішньому полю, від поверхні. Коротше кажучи, електрони провідності можуть вирватися з поверхні.

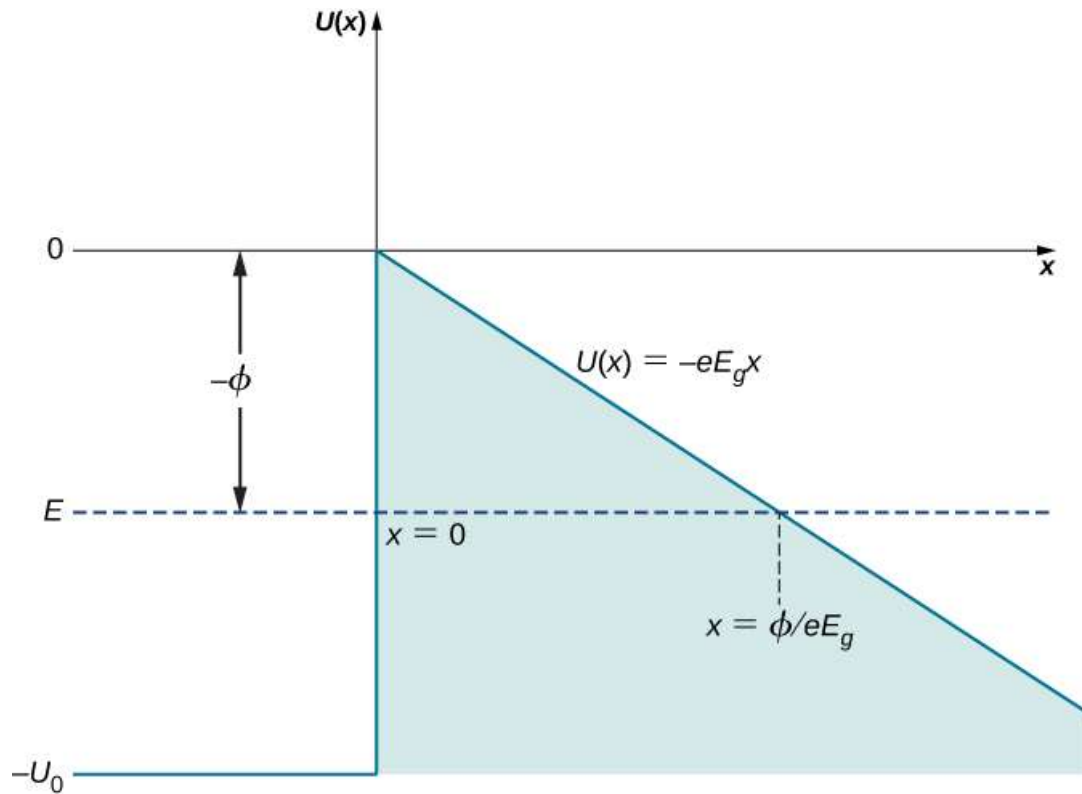


Рис. 2.20. Бар'єр потенційної енергії на поверхні металевого провідника за наявності зовнішнього однорідного електричного поля E_g нормально до поверхні: він стає ступінчастим бар'єром, коли зовнішнє поле видалено. Роботу виходу металу позначають ϕ

Польову емісію можна розуміти як квантове тунелювання електронів провідності через потенційний бар'єр на поверхні провідника. Фізичний принцип тут дуже схожий на механізм α -випромінювання радіоактивного ядра.

Припустимо, електрон провідності має кінетичну енергію E (середня кінетична енергія електрона в металі є роботою виходу ϕ для металу і може бути виміряна), а зовнішнє електричне поле може бути локально апроксимовано однорідним електричним полем напруженості E_g . Ширина L потенційного бар'єру, який повинен подолати електрон, — це відстань від поверхні провідника до точки поза поверхнею, де його кінетична енергія відповідає значенню його потенціальної енергії в зовнішньому полі. На рис. 2.20 ця відстань виміряна вздовж штрихової горизонтальної лінії $U(x) = E$ від $x = 0$ до перетину з $U(x) = -eE_g x$, тому ширина бар'єру становить:

$$L = \frac{e^{-1}E}{E_g} = \frac{e^{-1}\phi}{E_g}.$$

Ми бачимо, що L обернено пропорційна силі E_g зовнішнього поля. Коли ми збільшуємо напруженість зовнішнього поля, потенціальний бар'єр поза провідником стає більш крутим, а його ширина зменшується для електрона з заданою кінетичною енергією. У свою чергу, ймовірність того, що електрон пройде тунель через бар'єр (поверхню провідника), експоненціально зростає. Електрони, які з'являються по інший бік цього бар'єру, утворюють струм (струм тунельних електронів), який можна виявити над поверхнею.

Струм тунельних електронів пропорційний ймовірності тунелювання. Ймовірність тунелювання нелінійно залежить від ширини бар'єру L , і L можна змінити шляхом регулювання E_g . Таким чином, струм тунельних електронів можна регулювати, регулюючи силу зовнішнього електричного поля на поверхні. Коли сила зовнішнього електричного поля постійна, струм тунельного електрона має різні значення на різних висотах L над поверхнею.

Явище квантового тунелювання на металевих поверхнях, яке ми щойно описали, є фізичним принципом роботи скануючого **тунельного мікроскопа (СТМ)**, винайденого в 1981 році Гердом Біннігом і Генріхом Рорером. Пристрій СТМ складається зі скануючого наконечника (голки, зазвичай виготовленої з вольфраму, платино-іридію або золота); п'єзоелектричний пристрій, який контролює підйом наконечника в типовому діапазоні від 0,4 до 0,7 нм над поверхнею, що сканується; якийсь пристрій, що контролює рух наконечника по поверхні; і комп'ютер для відображення зображень. Поки зразок підтримується при відповідній напрузі зсуву, скануючий наконечник рухається вздовж поверхні (рис. 2.21), і струм тунельних електронів між наконечником і поверхнею реєструється в кожній позиції.

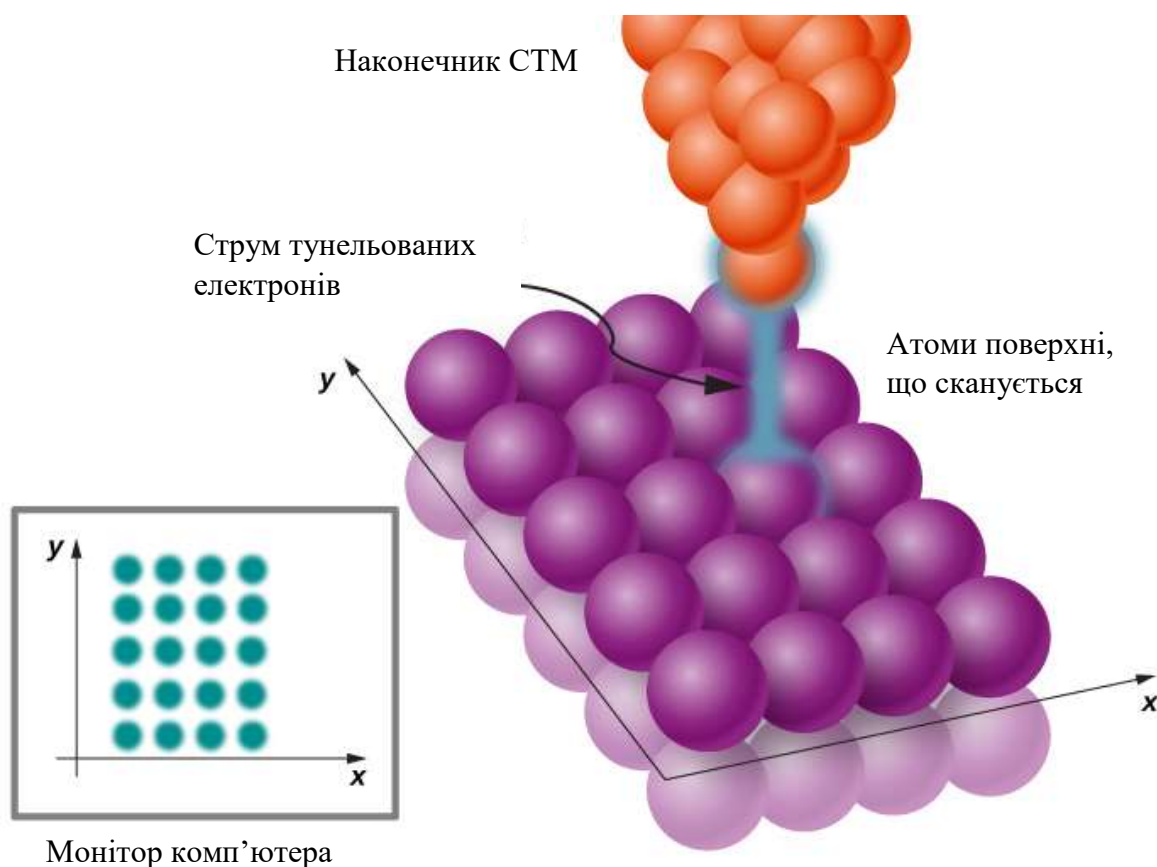


Рис. 2.21. У СТМ поверхня з постійним потенціалом сканується вузьким наконечником, що рухається вздовж поверхні. Коли кінчик СТМ наближається до поверхневих атомів, електрони можуть тунелювати від поверхні до кінчика. Цей струм тунельних електронів постійно контролюється, поки наконечник рухається. Величина струму в місці (x, y) дає інформацію про висоту кінчика над поверхнею в цьому місці. Таким чином створюється детальна топографічна карта поверхні, яка відображається на моніторі комп'ютера

Величина струму залежить від ймовірності тунелювання електрона від поверхні до кінчика, яка, у свою чергу, залежить від висоти кінчика над поверхнею. Таким чином, у кожному положенні кінчика відстань від кінчика до поверхні вимірюється шляхом вимірювання кількості електронів, які тунелюють від поверхні до кінчика. Цей метод може дати безпрецедентну роздільну здатність близько 0,001 нм, що становить приблизно 1% від середнього діаметра атома. Таким чином ми *можемо побачити окремі атоми* на поверхні, як на зображенні вуглецевої нанотрубки на рис. 2.22.

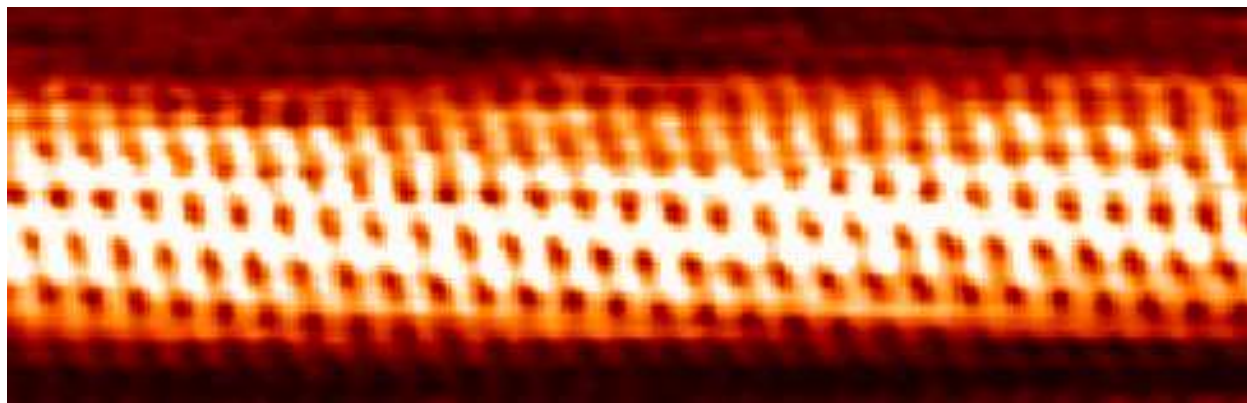


Рис. 2.22. СТМ-зображення вуглецевої нанотрубки: роздільна здатність атомного масштабу дозволяє нам бачити окремі атоми на поверхні. Зображення STM представлені в градаціях сірого, а також додаються кольори, щоб побачити деталі людському оку

Резонансне квантове тунелювання

Квантове тунелювання має численні застосування в напівпровідникових пристроях, таких як компоненти електронних схем або інтегральні схеми, розроблені в нанорозмірах; отже, звідсиля термін «**нанотехнологія**». Наприклад, діод може бути реалізований за допомогою тунельного переходу між двома різними видами напівпровідникових матеріалів. У такому **тунельному діоді** електрони тунелюють через єдиний потенціальний бар'єр на контакті між двома різними напівпровідниками. У місці з'єднання струм тунельних електронів змінюється нелінійно залежно від прикладеної різниці потенціалів на з'єднанні та може швидко зменшуватися зі збільшенням напруги зміщення. Це не схоже на поведінку закону Ома, з яким ми знайомі в побутових схемах. Така швидка зміна (спричинена квантовим тунелюванням) є бажаною для високошвидкісних електронних пристроїв.

Інший вид електронних нанопристроїв використовує **резонансне тунелювання** електронів через потенційні бар'єри, які виникають у квантових точках. Квантова **точка** — невелика ділянка нанокристала напівпровідника, вирошена, наприклад, у кристалі арсеніду кремнію або алюмінію. На рис. 2.23 (а) зображено квантову точку арсеніду галію, вбудовану в пластину арсеніду алюмінію. Область квантової точки діє як потенціальна яма кінцевої висоти (показана на рис. 2.23 (b)), яка має два потенціальних бар'єри кінцевої висоти на границях точок.

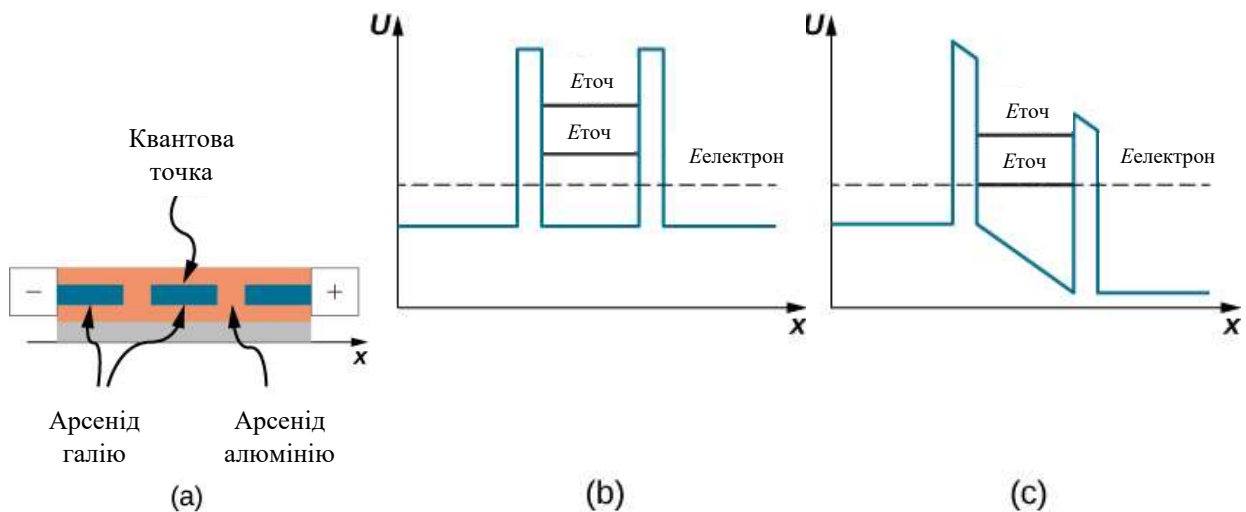


Рис. 2.23. Резонансно-тунельний діод: (а) Квантова точка арсеніду галію, вбудована в арсенід алюмінію. (б) Потенціальна яма, що складається з двох потенціальних бар'єрів квантової точки без зміщення напруги. Енергії електронів $E_{електрон}$ в арсеніді алюмінію не узгоджені з їх рівнями енергії $E_{точка}$ у квантовій точці, тому електрони не тунелюють через точку. (с) Потенційна яма точки зі зміщенням напруги на пристрої. Відповідним чином налаштована різниця напруг спотворює яму так, що рівні енергії електронів у точці вирівнюються з їхньою енергією в арсеніді алюмінію, змушуючи електрони тунелювати через точку

Подібним чином, як і для квантової частинки в ящику (тобто нескінченної потенціальної ями), нижчі енергії квантової частинки, захопленої в потенціальній ямі кінцевої висоти, квантуються.

Різниця між потенціалами коробки та ями полягає в тому, що квантова частинка в коробці має нескінченну кількість квантованих енергій і затримується в коробці на невизначений час, тоді як квантова частинка, захоплена потенціальною ямою, має кінцеву кількість квантованих енергетичних рівнів і може проходити через потенціальні бар'єри на межі ями назовні.

Таким чином, квантова точка арсеніду галію, що знаходиться в арсеніді алюмінію, є потенціальною ямою, де квантуються низько розташовані енергії електрона, позначені як $E_{точка}$ у частині (б) на малюнку. Коли енергія $E_{електрон}$ електрона в зовнішній області точки не відповідає його енергії $E_{точка}$, що він мав би в точці, електрон не тунелює через область точки, і через такий елемент схеми немає струму, навіть якщо він підтримується при різниці електричної напруги (зміщення). Однак, коли це зміщення напруги змінюється таким чином, що один із бар'єрів знижується, так що $E_{точка}$ і $E_{електрон}$ вирівнюються, як видно на частині (с) малюнка, електронний струм тече через точку. Коли зміщення напруги збільшується, ця рівність втрачається, і струм припиняється. Коли напруга зміщення збільшується далі, тунелювання електронів стає малоймовірним, доки напруга зміщення не досягне значення, для якого зовнішня енергія електронів відповідає наступному рівню енергії електронів у точці. Слово «резонанс» у назві пристрою означає, що струм тунельних електронів

виникає лише тоді, коли вибраний рівень енергії узгоджується шляхом налаштування прикладеної напруги, наприклад, у механізмі роботи **резонансно-тунельного діода**. Резонансно-тунельні діоди використовуються як надшвидкісні наноперемикачі.

Вправи до п. 2.6. Квантове тунелювання частинок через потенційні бар'єри

1. Покажіть, що хвильова функція в (а) рівнянні 2.68 задовольняє рівняння 2.61, а (б) рівняння 2.69 задовольняє рівняння 2.63 .
2. Електрон з енергією 6,0 еВ стикається з бар'єром висотою 11,0 еВ. Знайти ймовірність тунелювання електрона через бар'єр, якщо ширина бар'єру становить (а) 0,80 нм і (б) 0,40 нм.
3. Електрон з енергією 5,0 еВ стикається з бар'єром 0,60 нм. Знайти ймовірність тунелювання електрона через бар'єр, якщо висота бар'єру дорівнює (а) 7,0 еВ; (б) 9,0 еВ; і (в) 13,0 еВ.
4. Електрон з енергією 12,0 еВ стикається з бар'єром висотою 15,0 еВ. Якщо ймовірність тунелювання електрона через бар'єр становить 2,5 %, знайдіть його ширину.
5. Квантова частинка з початковою кінетичною енергією 32,0 еВ стикається з квадратним бар'єром висотою 41,0 еВ і шириною 0,25 нм. Знайти ймовірність того, що частинка тунелює через цей бар'єр, якщо частинка є (а) електроном і (б) протоном.
6. Проста модель радіоактивного ядерного розпаду передбачає, що α -частинки захоплені всередині ями ядерного потенціалу, стінки якої є бар'єрами кінцевої ширини 2,0 фм і висоти 30,0 МеВ. Знайти ймовірність проходження тунелю через потенційний бар'єр для α -частинки, що має кінетичну енергію (а) 29,0 МеВ і (б) 20,0 МеВ. Маса α -частинки $m = 6,64 \times 10^{-27}$ кг.
7. Мюон, квантова частинка, маса якої приблизно в 200 разів перевищує масу електрона, падає на потенційний бар'єр висотою 10,0 еВ. Кінетична енергія ударного мюона становить 5,5 еВ, і лише приблизно 0,10% квадрата амплітуди його вхідної хвильової функції фільтрується через бар'єр. Яка ширина бар'єру?
8. Піщинка масою 1,0 мг і кінетичною енергією 1,0 Дж падає на бар'єр потенційної енергії висотою 1,000001 Дж і шириною 2500 нм. Скільки в середньому піщинок має впасти на цю перешкоду, перш ніж її пройти?

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

2.1. Хвильові функції

1. Яка одиниця вимірювання хвильової функції $\Psi(x, t)$? Яка одиниця вимірювання квадрата цієї хвильової функції?
2. Чи може величина хвильової функції ($\Psi(x, t)$ $\Psi^*(x, t)$) бути від'ємним числом? Поясніть.
3. Яку фізичну величину представляє хвильова функція електрона?

4. Який фізичний зміст хвильової функції частинки?
5. Що означає вираз «очікуване значення»? Поясніть.

2.2. Принцип невизначеності Гейзенберга

6. Якщо формалізм квантової механіки «точніший», ніж формалізм класичної механіки, чому б нам не використати квантову механіку для опису руху жаби, що стрибає? Поясніть.
7. Чи можна точно знати довжину хвилі де Бройля частинки? Чи можна точно визначити положення частинки?
8. Чи можемо ми виміряти енергію вільної локалізованої частинки з повною точністю?
9. Чи можемо ми виміряти як положення, так і імпульс частинки з повною точністю?

2.3. Рівняння Шредінгера

10. Чим відрізняється хвильова функція $\psi(x, y, z)$ і хвильова функція $\Psi(x, y, z, t)$ для тієї самої частинки?
11. Якщо квантова частинка знаходиться в нерухомому стані, чи означає це, що вона не рухається?
12. Поясніть різницю між незалежними від часу рівняннями Шредінгера.
13. Припустимо, хвильова функція є розривною в якийсь момент. Чи може ця функція представляти квантовий стан деякої фізичної частинки? Чому так? Чому ні?

2.4. Квантова частинка в ящику

14. Використовуючи модель квантової частинки в ящику, опишіть, як можливі енергії частинки пов'язані з розміром ящика.
15. Чи можливо, що коли ми вимірюємо енергію квантової частинки в ящику, вимірювання може дати менше значення, ніж енергія основного стану? Яке найбільше значення енергії ми можемо виміряти для цієї частинки?
16. Для квантової частинки в ящику перший збуджений стан (Ψ_2) має нульове значення в середній точці прямокутника, тому густина ймовірності знаходження частинки в цій точці точно дорівнює нулю. Поясніть, що не так із таким міркуванням: «Якщо ймовірність знайти квантову частинку в середній точці дорівнює нулю, частинка ніколи не знаходиться в цій точці, чи не так?» Як же тоді частинка може перетнути цю точку на своєму шляху від лівої до правої сторони ящика?

2.5. Квантовий гармонічний осцилятор

17. Чи можна виміряти енергію $0,75\hbar\omega$ для квантового гармонічного осцилятора? Чому так, чому ні? Поясніть.
18. Поясніть зв'язок між гіпотезою Планка про кванти енергії та енергіями квантового гармонічного осцилятора.
19. Якщо класичний гармонічний осцилятор може перебувати в спокої, чому квантовий гармонічний осцилятор ніколи не може перебувати в спокої? Чи порушує це принцип відповідності Бора?
20. На прикладі квантової частинки в коробці або квантового осцилятора поясніть фізичний зміст принципу відповідності Бора.
21. Чи можемо ми одночасно вимірювати положення та енергію квантового осцилятора? Чому так, чому ні?

2.6. Квантове тунелювання частинок через потенційні бар'єри

22. Коли електрон і протон з однаковою кінетичною енергією стикаються з потенційним бар'єром однакової висоти й ширини, який із них легше проходить через бар'єр? Чому?
23. Що найбільше зменшує ймовірність тунелювання: подвоєння ширини бар'єру чи зменшення вдвічі кінетичної енергії падаючої частинки?
24. Поясніть різницю між бокс-потенціалом і потенціалом квантової точки.
25. Чи може квантова частинка «втекти» з такої нескінченної потенційної ями в коробці? Чому так, чому ні?
26. Тунельний діод і резонансно-тунельний діод використовують той самий фізичний принцип квантового тунелювання. Чим вони відрізняються?

БУДОВА АТОМА



Рис. 3.1. NGC1763 – це емісійна туманність у Великій Магеллановій Хмарі, яка є галактикою-супутником нашої Галактики Чумацький Шлях. Кольори, які ми бачимо, можна пояснити, застосувавши ідеї квантової механіки до структури атома

У цьому розділі ми використовуємо квантову механіку для вивчення структури та властивостей атомів. Це дослідження представляє ідеї та поняття, необхідні для розуміння більш складних систем, таких як молекули, кристали та метали. Поглиблюючи наше розуміння атомів, ми спираємося на те, що ми вже знаємо, наприклад, ядерну модель атома Резерфорда, модель атома водню Бора та хвильову гіпотезу де Бройля.

На рис. 3.1 зображено NGC1763, емісійну туманність у малій галактиці, відомій як Велика Магелланова Хмара, яка є супутником галактики Чумацький Шлях. Ультрафіолетове світло гарячих зірок іонізує атоми водню в туманності. Коли протони й електрони рекомбінуються, випромінюються електромагнітні хвилі різних частот. Деталі цього процесу можна правильно передбачити за допомогою квантової механіки, і вони розглядаються в цьому розділі.

3.1. Атом водню

Атом водню є найпростішим атомом у природі, а отже, гарною відправною точкою для вивчення атомів і атомної структури. Атом водню складається з одного негативно зарядженого електрона, який рухається навколо позитивно зарядженого протона (рис. 3.2).

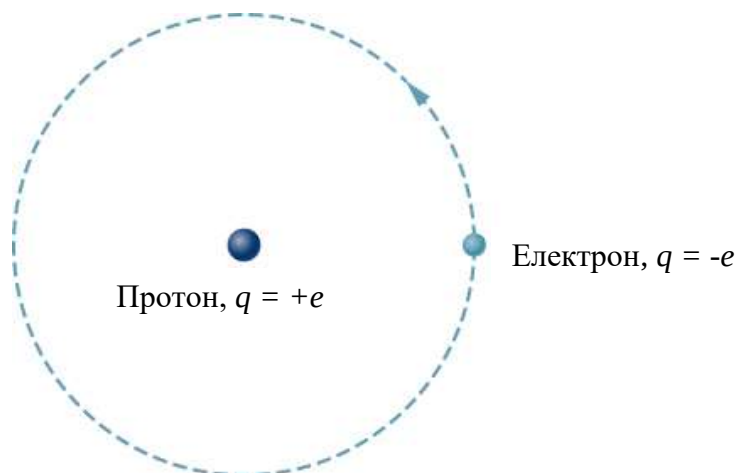


Рис. 3.2. Зображення моделі атома водню Бора

У моделі Бора електрон обертається навколо протона по ідеальній круговій орбіті силою Кулона. Маса протона приблизно в 1800 разів більша за масу електрона, тому протон рухається дуже мало у відповідь на силу, що діє на протон з боку електрона. (Це аналогічно системі Земля-Сонце, де Сонце рухається дуже мало у відповідь на силу, що діє на нього з боку Землі).

З припущенням про нерухомість протона ми зосереджуємось на русі електрона. В електричному полі протона потенціальна енергія електрона дорівнює:

$$U(r) = -k \frac{e^2}{r}, \quad (3.1)$$

де $k = 1/4\pi\epsilon_0$ — відстань між електроном і протоном. Як ми бачили раніше, сила, що діє на об'єкт, дорівнює від'ємній градієнту (або нахилу) функції потенційної енергії. Для окремого випадку атома водню сила між електроном і протоном є силою притягання Кулона.

Зауважте, що функція потенціальної енергії $U(r)$ не змінюється з часом. У результаті рівняння Шредінгера для атома водню зводиться до двох простіших рівнянь: одне залежить лише від простору (x, y, z) , а інше залежить лише від часу t . (Поділ хвильової функції на частини, що залежать від простору та часу, для незалежних від часу функцій потенціальної енергії обговорюється в квантовій механіці). Нас найбільше цікавить рівняння, що залежить від простору:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - k \frac{e^2}{r} \psi = E \psi, \quad (3.2)$$

де $\psi = \psi(x, y, z)$ є тривимірною хвильовою функцією електрона, m_e — маса електрона, E — повна енергія електрона.

Нагадаємо, що повна хвильова функція $\Psi(x, y, z, t)$ є добутком хвильової функції, що залежить від простору $\psi = \psi(x, y, z)$ і, залежною від часу, хвильової функції $\varphi = \varphi(t)$.

Крім того, що $U(r)$ не залежить від часу, він є сферично симетричним потенціалом. Це свідчить про те, що рівняння Шредінгера можна розв'язати легше, якщо виразити його через сферичні координати (r, θ, ϕ) замість прямокутних координат (x, y, z) .

Сферична система координат зображена на рис. 3.3.

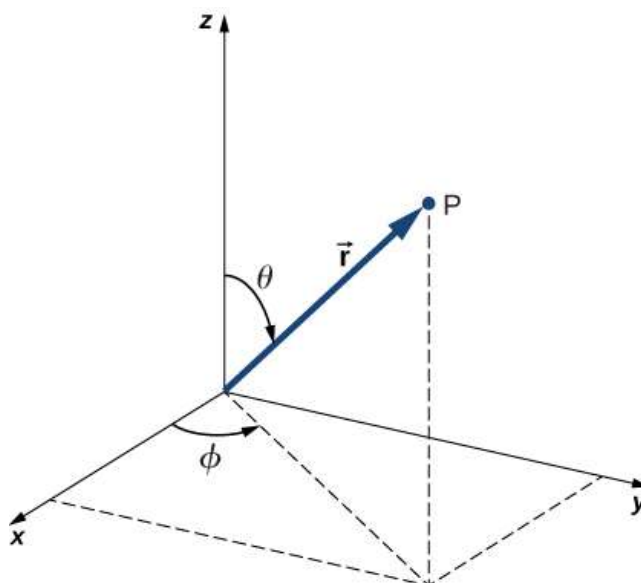


Рис. 3.3. Зв'язок між сферичною та прямокутною системами координат

У сферичних координатах змінна r є радіальною координатою, θ – полярний кут (відносно вертикальної осі z), і ϕ – азимутальний кут (відносно осі x). Зв'язок між сферичними і прямокутними координатами є таким:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Добуток $r \sin \theta$ — величина проекції полярного вектора на площину xy . Крім того, координати x і y отримують шляхом проектування цього вектора на осі x – і y відповідно. Зворотне перетворення дає:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \quad \phi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Хвильове рівняння Шредінгера для атома водню в сферичних координатах розглядається в більш просунутих курсах сучасної фізики, тому ми не розглядаємо його тут докладно. Однак через сферичну симетрію $U(r)$ це рівняння зводиться до трьох простіших рівнянь: по одному для кожної з трьох координат (r , θ , і ϕ). Розв'язки хвильової функції, що не залежить від часу, записуються як добуток трьох функцій:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi),$$

де R – радіальна функція, що залежить лише від радіальної координати r ; Θ – полярна функція, що залежить тільки від полярної координати θ ; і Φ є функцією тільки від ϕ .

Правильні розв'язки рівняння Шредінгера $\psi(r, \theta, \phi)$ визначаються трьома квантовими числами n , l і m :

n – головне квантове число,

l – орбітальне квантове число,

m – магнітне квантове число (число проекції орбітального моменту імпульсу L).

Причини цих назв будуть пояснені в наступному розділі. Радіальна функція R залежить лише від n і l ; полярна функція Θ залежить тільки від l і m ; і

функція Φ залежить тільки від m . Залежність кожної функції від квантових чисел позначено нижніми індексами:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi).$$

Не всі набори квантових чисел (n, l, m) можливі. Наприклад, орбітальне квантове число l ніколи не може бути більше або дорівнювати головному квантовому числу n ($l < n$). Зокрема, маємо:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \end{aligned}$$

Зауважте, що для основного стану $n = 1, l = 0$, і $m = 0$. Іншими словами, існує лише один квантовий стан із хвильовою функцією для $n = 1$, і це ψ_{100} . Однак для $n = 2$, маємо:

$$\begin{aligned} l &= 0, m = 0; \\ l &= 1, m = -1, 0, 1. \end{aligned}$$

Тому дозволені стани для $n = 2$ – це стани $\psi_{200}, \psi_{21-1}, \psi_{210}, \psi_{211}$. Приклад хвильових функцій для атома водню наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Хвильові функції атома водню

$n = 1, l = 0, m_l = 0$	$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$
$n = 2, l = 0, m_l = 0$	$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
$n = 2, l = 1, m_l = -1$	$\psi_{21-1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{-i\phi}$
$n = 2, l = 1, m_l = 0$	$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta$
$n = 2, l = 1, m_l = 1$	$\psi_{211} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{i\phi}$

Зверніть увагу, що деякі з цих виразів містять букву i , яка є $\sqrt{-1}$. Під час обчислення ймовірностей ці комплексні числа не з'являються в остаточній відповіді.

Фізичне значення квантових чисел

Кожне з трьох квантових чисел атома водню (n, l, m) пов'язане з різною фізичною величиною. Головне **квантове число** n пов'язане з повною енергією електрона E_n . Відповідно до рівняння Шредінгера:

$$E_n = - \left(\frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} \right) = -E_0 \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (3.3)$$

де $E_0 = -13,6$ еВ. Зверніть увагу, що цей вираз ідентичний виразу моделі Бора. Як і в моделі Бора, електрон у певному енергетичному стані не випромінює.

Приклад 3.1. Скільки можливих станів?

Для атома водню скільки можливих квантових станів відповідає головному числу $n = 3$? Які енергії цих станів?

Стратегія

Для атома водню з заданою енергією кількість дозволених станів залежить від його орбітального моменту імпульсу. Ми можемо порахувати ці стани для кожного значення головного квантового числа, $n = 1, 2, 3$. Однак повна енергія залежить лише від головного квантового числа, що означає, що ми можемо використовувати рівняння 3.3 і кількість підрахованих станів.

Ріозв'язок

Якщо $n = 3$, допустимі значення l дорівнюють 0, 1 і 2. Якщо $l = 0$, $m = 0$ (1 стан). Якщо $l = 1$, $m = -1, 0, +1$ (3 стани); і якщо $l = 2$, $m = -2, -1, 0, +1, +2$ (5 станів). Загалом є $1 + 3 + 5 = 9$ дозволених станів. Оскільки повна енергія залежить лише від головного квантового числа, $n = 3$, енергія кожного з цих станів становить:

$$E_{n3} = -E_0 \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{-13,6 \text{ eV}}{9} = -1,51 \text{ eV}.$$

Обговорення

Електрон в атомі водню може займати багато різних станів орбітального моменту імпульсу l з однаковою енергією. Зі збільшенням орбітального моменту кількість дозволених станів з однаковою енергією зростає.

Орбітальне **квантове число** l визначає орбітальний момент імпульсу електрона L в атомі водню. З розв'язку рівняння Шредінгера випливає, що коли атом водню знаходиться в стані ψ_{nlm} , величина його орбітального моменту імпульсу L квантується і становить:

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \quad (3.4)$$

де

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Цей результат дещо відрізняється від отриманого з теорії Бора, яка квантує орбітальний момент імпульсу електрона відповідно до правила $L = n \hbar$, де $n = 1, 2, 3, \dots$.

Квантові стани з різними значеннями орбітального моменту імпульсу виділяють за допомогою *спектроскопічних записів* (табл. 3.2). Позначення s, p, d і f є результатом ранніх історичних спроб класифікувати атомні спектральні лінії. (Літери позначають відповідно різкий, основний, дифузний і фундаментальний). Після f літери продовжуються в алфавітному порядку. Основний стан водню позначається як стан 1 s , де «1» вказує на рівень енергії ($n = 1$), а « s » вказує на орбітальне квантове число ($l = 0$). Коли $n = 2$, l може дорівнювати 0 або 1. Стан $n = 2$, $l = 0$ позначається «2 s ». Коли $n = 2$, $l = 1$ стан позначається «2 p ». Коли $n = 3$, l може бути 0, 1 або 2, а стани 3 s , 3 p і 3 d , відповідно.

Таблиця 3.2

Спектроскопічні позначення та орбітальний момент імпульсу

Орбітальне квантове число l	Орбітальний імпульсу L	момент	Стан	Спектроскопічна назва
0	0		s	Різкий
1	$\sqrt{2}h$		p	Основний
2	$\sqrt{6}h$		d	Дифузний
3	$\sqrt{12}h$		f	Фундаментальний
4	$\sqrt{20}h$		g	
5	$\sqrt{30}h$		h	

Позначення для інших квантових станів наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Спектроскопічний опис квантових станів

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$n = 1$	1 s					
$n = 2$	2 s	2 p				
$n = 3$	3 s	3 p	3 d			
$n = 4$	4 s	4 p	4 d	4 f		
$n = 5$	5 s	5 p	5 d	5 f	5 g	
$n = 6$	6 s	6 p	6 d	6 f	6 g	6 h

Квантове **число проекції моменту імпульсу** m пов'язане з азимутальним кутом ϕ (див. рис. 3.3) і з z -компонентою орбітального моменту імпульсу електрона в атомі водню. Цей компонент задано так:

$$L_z = m\hbar, \quad (3.5)$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Z -компонента моменту імпульсу пов'язана з величиною L так:

$$L_z = L \cos \theta, \quad (3.6)$$

де θ – кут між вектором моменту імпульсу та віссю z .

Зауважте, що напрямок осі z визначається експериментом, тобто вздовж будь-якого напрямку експериментатор вирішує виміряти кутовий момент. Наприклад, напрямок z може відповідати напрямку зовнішнього магнітного поля. Відносини між L_z та L наведено на рис. 3.4.

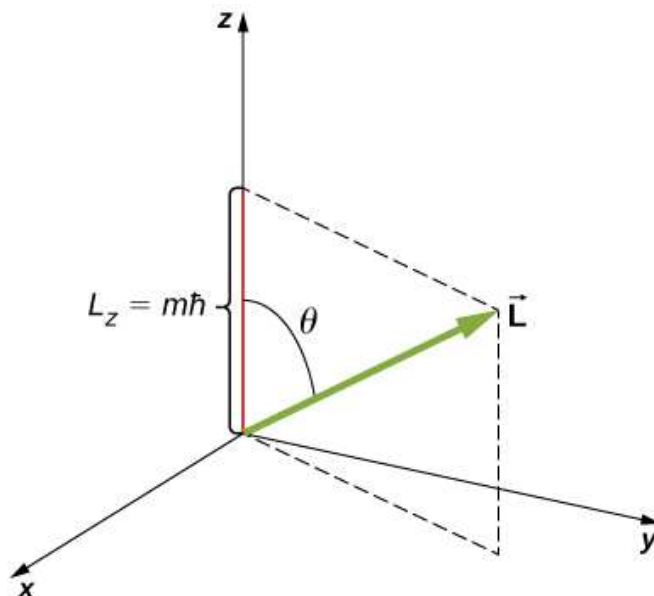


Рис. 3.4. Z -компонент моменту імпульсу квантується власним квантовим числом m

Квантування L_z еквівалентно квантуванню θ . Підставляючи $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ для L і $m\hbar$ для L_z в це рівняння, ми знаходимо:

$$m\hbar = \sqrt{l(l+1)}\hbar \cos \theta. \quad (3.7)$$

Таким чином, кут θ квантується з конкретними значеннями:

$$\theta = \arccos\left(\frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}\right). \quad (3.8)$$

Зверніть увагу, що полярний кут (θ) і проекція L_z вектора моменту імпульсу $\vec{L}$ на довільну вісь z є квантованими.

Квантування полярного кута для $l=3$ показано на рис. 3.5. Вектор орбітального кутового моменту лежить десь на поверхні конуса з кутом розкриття θ_i відносно осі z (якщо не $m=0$, при якому $\theta=90^\circ$, а точки вектора перпендикулярні до осі z).

Детальне вивчення орбітального моменту імпульсу показує, що ми не можемо знати всі три компоненти (L_x , L_y , L_z) одночасно. Z -компонента орбітального моменту імпульсу має певні значення, які залежать від квантового числа m . Це означає, що ми не можемо знати як x -, так і y -компоненти орбітального моменту імпульсу L_x і L_y , з упевненістю. У результаті точний напрям вектора $\vec{L}$ невідомий.

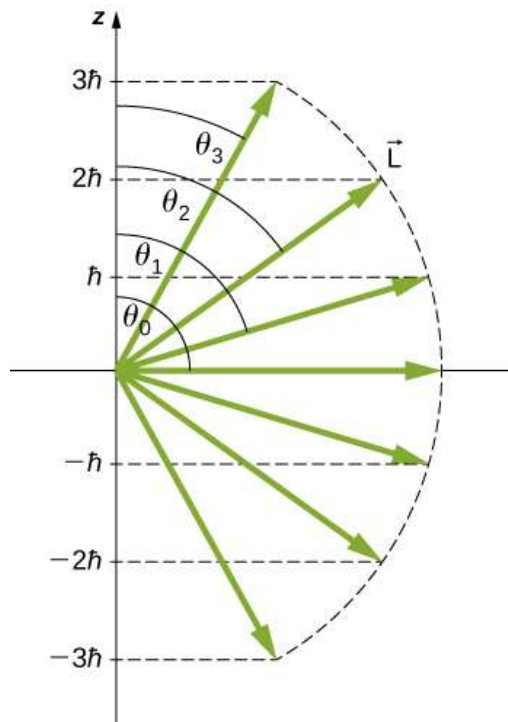


Рис. 3.5. Квантування орбітального моменту імпульсу. Кожен вектор лежить на поверхні конуса з віссю вздовж осі z

Приклад 3.2. Які напрямки дозволені?

Обчисліть кути, які вектор орбітального моменту імпульсу $\vec{L}$ може мати з віссю z для $l = 1$, як показано на рис. 3.6.

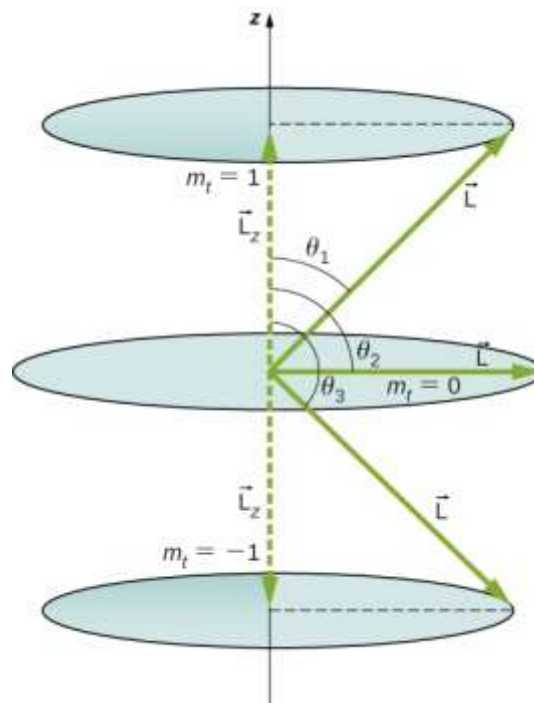


Рис. 3.6. Компонента орбітального моменту імпульсу $\vec{L}$ вздовж осі z (визначена напрямком магнітного поля) може мати лише певні значення. Вони показані тут для $l = 1$, для якого $m = -1, 0$ та $+1$. Напрямок $\vec{L}$ є квантованим у тому сенсі, що він може мати лише певні кути відносно осі z

Стратегія

Вектори $\vec{L}$ і $\vec{L}_z$ (у z -напрямку) утворюють прямокутний трикутник, де L є гіпотенузою, L_z є суміжною стороною. Співвідношення L_z до $|L|$ є косинусом кута, який нас цікавить. Величини $L = |\vec{L}|$ і L_z визначаються так:

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \text{ та } L_z = m\hbar.$$

Розв'язок

Нам дано $l = 1$, тому m_l може бути $+1$, 0 або -1 . Таким чином, L має значення, задане як

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar = \sqrt{2} \hbar.$$

Величина L_z може мати три значення, задані як $L_z = m_l \hbar$:

$$L_z = m_l \hbar = \begin{cases} \hbar, & m_l = +1 \\ 0, & m_l = 0 \\ -\hbar, & m_l = -1. \end{cases}$$

Як ви можете бачити на рис. 3.6, $\cos \theta = L_z/L$, тому для $m = +1$, маємо:

$$\cos \theta_1 = \frac{L_z}{L} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

Таким чином,

$$\theta_1 = \arccos 0,707 = 45^\circ.$$

Так само для $m = 0$, знаходимо $\cos \theta_2 = 0$; це дає:

$$\theta_2 = \arccos 0 = 90^\circ.$$

Тоді, для $m_l = -1$, $\cos \theta_3 = -0,707$, так що

$$\theta_3 = \arccos (-0,707) = 135^\circ.$$

Обговорення

Кути узгоджуються з малюнком. Квантується лише кут відносно осі z . $\vec{L}$ може вказувати в будь-якому напрямку, якщо він утворює відповідний кут з віссю z . Таким чином, вектори орбітального моменту імпульсу лежать на конусах, як показано на малюнку. Щоб побачити, як тут виконується принцип відповідності, зауважимо, що найменший кут (θ_1 у прикладі) для максимального значення m_l , а саме $m_l = l$. Для цього найменшого кута,

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{l}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

який наближається до 1, коли l стає дуже великим. Якщо $\cos \theta = 1$, тоді $\theta = 0^\circ$. Крім того, для великих l існує багато значень m_l , так що всі кути стають можливими, коли l стає дуже великим.

Перевірте своє розуміння 3.1

Чи може величина L_z колись дорівнювати L ?

Використання хвильової функції для прогнозування

Як ми бачили раніше, ми можемо використовувати квантову механіку для прогнозування фізичних подій за допомогою тверджень про ймовірність. Тому правильно стверджувати: «Електрон знаходиться в цьому об'ємі з такою ймовірністю в цей час», але не «Електрон знаходиться в положенні (x, y, z) в цей момент». Щоб визначити ймовірність знаходження електрона в атомі водню в певній області простору, необхідно проінтегрувати густину ймовірності $|\psi_{nlm}|^2$:

$$\text{Ймовірність} = \int_{\text{об'єм}} |\psi_{nlm}|^2 dV, \quad (3.9)$$

де dV – нескінченно малий елемент об'єму. Якщо цей інтеграл обчислюється для всього простору, результат дорівнює 1, оскільки ймовірність того, що частинка *десь* знаходиться, становить 100% (умова нормування). У більш просунутому курсі сучасної фізики ви знайдете, що $|\psi_{nlm}|^2 = \psi_{nlm}^* \psi_{nlm}$, де ψ_{nlm} є комплексним сполученням. Це виключає виникнення $i = \sqrt{-1}$ у наведеному вище розрахунку.

Розглянемо електрон у стані $l = 0$. У цьому випадку хвильова функція електрона залежить лише від радіальної координати r . (Зверніться до ψ_{100} і ψ_{200} у табл. 3.1). Нескінченно малий елемент об'єму відповідає сферичній оболонці радіуса r і нескінченно малої товщини dr , що записується як

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (3.10)$$

Ймовірність знаходження електрона в області від r до $r + dr$ (приблизно на відстані r) дорівнює:

$$P(r)dr = |\psi_{n00}|^2 4\pi r^2 dr. \quad (3.11)$$

Величину $P(r)$ називають **радіальною функцією густини ймовірності** (ймовірність на одиницю довжини). Для електрона в основному стані водню ймовірність знаходження електрона в області від r до $r + dr$ дорівнює:

$$|\psi_{n00}|^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} r^3 e^{-2r/a_0} dr, \quad (3.12)$$

де $a_0 = 0,5$ ангстрем. Радіальна функція густини ймовірності $P(r)$ для основного стану водню зображена на рис. 3.7.

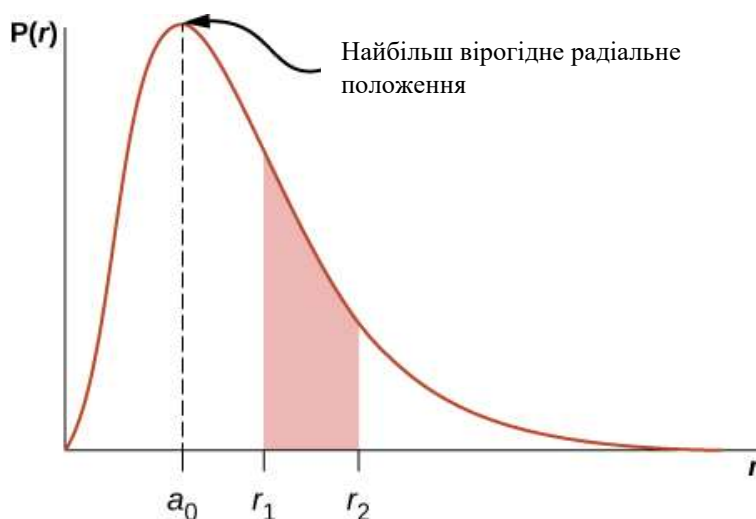


Рис. 3.7. Радіальна функція густини ймовірності для основного стану водню

Скажімо, площа під кривою між будь-якими двома радіальними положеннями r_1 і r_2 , дає ймовірність знаходження електрона в цьому радіальному діапазоні. Щоб знайти найімовірніше радіальне положення, ми прирівнюємо першу похідну цієї функції до нуля ($dP/dr = 0$) і визначаємо це r . Найімовірніше радіальне положення не дорівнює середньому або очікуваному значенню радіального положення, оскільки $|\psi_{n00}|^2$ не є симетричним відносно свого максимального значення. Якщо електрон має орбітальний кутовий момент ($l \neq 0$), то хвильові функції, що представляють електрон, залежать від кутів θ і ϕ ; тобто, $\psi_{nlm} = \psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$. Атомні орбіталі для трьох станів $n = 2$ і $l = 1$ показані на рис. 3.8.

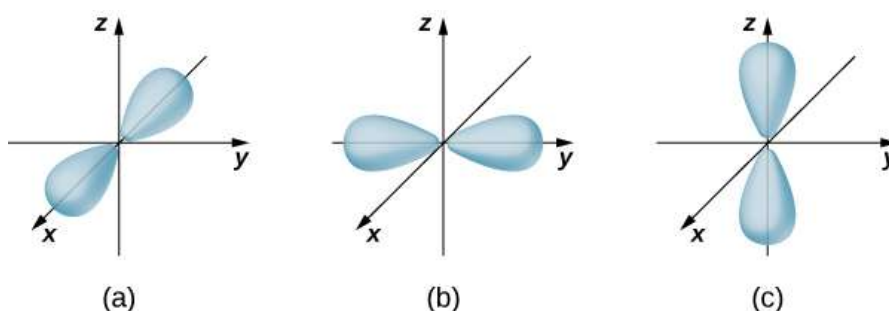


Рис. 3.8. Розподіл густини ймовірності для трьох станів з $n = 2$ і $l = 1$. Розподіли спрямовані вздовж осі x (a), осі y (b) і осі z (c)

Атомна орбіталь — це область у просторі, яка охоплює певний відсоток (зазвичай 90%) ймовірності знаходження електрона в цій області. (Іноді атомні орбіталі називають «хмарами» ймовірності). Зверніть увагу, що ці розподіли чітко виражені в певних напрямках. Ця спрямованість важлива для хіміків, коли вони аналізують, як атоми зв'язуються разом, утворюючи молекули. Дещо інше представлення хвильової функції подано на рис. 3.9.

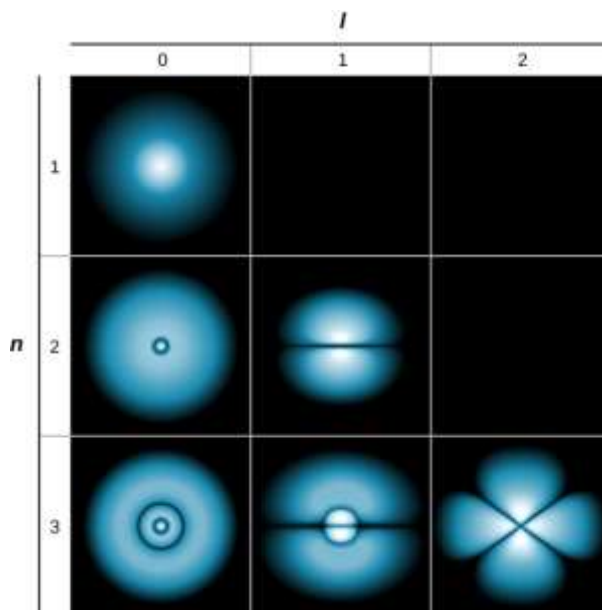


Рис. 3.9. Хмари ймовірностей для електрона в основному стані та кількох збуджених станів водню. Ймовірність знаходження електрона вказує відтінок кольору; чим світліше забарвлення, тим більше шансів знайти електрон

У цьому випадку світлі та темні області вказують на місця з відносно високою та низькою ймовірністю відповідно. На відміну від моделі атома водню Бора, електрон не рухається навколо ядра протона по чітко визначеному шляху. Дійсно, принцип невизначеності робить неможливим дізнатися, як електрон потрапляє з одного місця в інше.

Вправи до п. 3.1. Атом водню

1. Хвильова функція обчислюється в прямокутних координатах $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ у довільних одиницях. Які сферичні координати цього положення?
2. Якщо в атомі є електрон у стані $n = 5$ з $m = 3$, які можливі значення l ?
3. Які можливі значення m для електрона в стані $n = 4$?
4. Які обмеження, якщо такі є, визначають значення $m = 1$ на інших квантових числах для електрона в атомі?
5. Скільки можливих станів існує для стану $l = 4$?
6. (а) Скільки кутів L може утворювати з віссю z для електрона з $l = 2$?
(б) Обчисліть значення найменшого кута.
7. Сила, що діє на електрон, є «від'ємною градієнту функції потенціальної енергії». Використовуйте ці знання та рівняння 3.1, щоб показати, що сила, яка діє на електрон в атомі водню, визначається силовим законом Кулона.
8. Яка загальна кількість станів з орбітальним моментом імпульсу $l = 0$? (Ігнорувати спін електрона).
9. Хвильова функція обчислюється в сферичних координатах $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, 45^\circ, 45^\circ)$, де значення радіальної координати задано в умовних одиницях. Які прямокутні координати цієї позиції?
10. Силовий закон Кулона стверджує, що сила між двома зарядженими частинками дорівнює: $F = k \frac{Qq}{r^2}$. Використовуйте цей вираз для визначення функції потенціальної енергії.
11. Напишіть вираз для загальної кількості станів з орбітальним моментом імпульсу l .
12. Розглянемо водень в основному стані ψ_{100} . (а) Використовуйте похідну, щоб визначити радіальне положення, для якого густина ймовірності $P(r)$ є максимальною.
(б) Використовуйте інтегральну концепцію для визначення середнього радіального положення. (Це називається очікуваним значенням радіального положення електрона). Виразіть свої відповіді через радіус Бора, a_0 . Підказка: очікуване значення є середнім значенням. (в) Чому ці значення різні?
13. Яка ймовірність того, що $1s$ електрон атома водню виявиться поза радіусом Бора?
14. Скільки полярних кутів може мати електрон у стані $l = 5$?
15. Яка максимальна кількість станів орбітального моменту електрона в $n = 2$ оболонці атома водню? (Ігнорувати спін електрона).

16. Яка максимальна кількість станів орбітального моменту електрона в $n = 3$ оболонці атома водню? (Ігнорувати спин електрона).

3.2. Орбітальний магнітний дипольний момент електрона

У моделі атома водню Бора електрон рухається по круговій орбіті навколо протона. Електрон проходить повз певну точку кола за певний час, тому ми можемо обчислити струм $I = Q / t$. Тому електрон, який обертається навколо протона в атомі водню, аналогічний струму, що протікає по кільцевому дроту (рис. 3.10). Вивчаючи магнетизм, ми побачили, що дріт зі струмом створює магнітні поля. Тому розумно зробити висновок, що атом водню створює магнітне поле і взаємодіє з іншими магнітними полями.

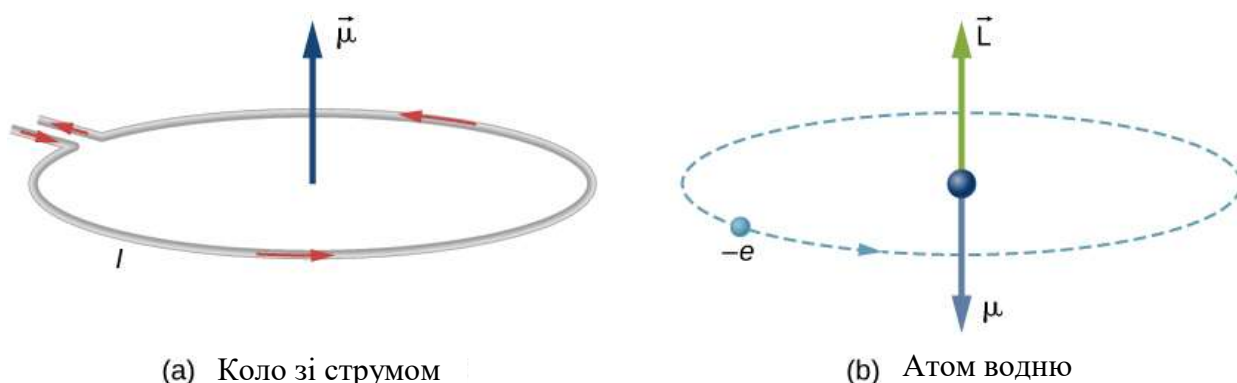


Рис. 3.10. (a) Струм, що протікає через круглий дріт, аналогічний (b) електрону, який обертається навколо протона в атомі водню

Орбітальний магнітний дипольний момент — це міра сили магнітного поля, створюваного орбітальним кутовим моментом електрона. Величина орбітального магнітного дипольного моменту для колового струму дорівнює:

$$\mu = IA, \quad (3.13)$$

де I — струм, а A — площа орбіти (для стислості ми називаємо це магнітним моментом). Струм I , пов'язаний з електроном на орбіті навколо протона в атомі водню, дорівнює:

$$I = \frac{e}{T}, \quad (3.14)$$

де e — величина заряду електрона, а T — його період обертання. Якщо ми припустимо, що електрон рухається по ідеально круговій орбіті, орбітальний період дорівнює:

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad (3.15)$$

де r — радіус орбіти, а v — швидкість електрона на його орбіті. Враховуючи, що площа кола становить πr^2 , абсолютний магнітний момент становить:

$$\mu = IA = \frac{e}{\left(\frac{2\pi r}{v}\right)} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (3.16)$$

Корисно виразити магнітний момент μ через орбітальний момент імпульсу ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$). Оскільки електрон обертається по колу, вектор положення $\vec{r}$ і вектор

імпульсу $\vec{p}$ утворюють прямий кут. Таким чином, величина орбітального моменту імпульсу становить:

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = rp \sin \theta = rp = rmv. \quad (3.17)$$

Об'єднавши ці два рівняння, маємо:

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right) L. \quad (3.18)$$

У повній векторній формі цей вираз записується так:

$$\vec{\mu} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) \vec{L}. \quad (3.19)$$

Від'ємний знак з'являється тому, що електрон має негативний заряд. Зауважте, що напрямок магнітного моменту електрона є антипаралельним орбітальному моменту імпульсу $\vec{L}$, як показано на рис. 3.10 (b). У моделі атома Бора зв'язок між $\vec{\mu}$ і $\vec{L}$ у рівнянні 3.19 не залежить від радіуса орбіти.

Магнітний момент μ також можна виразити через орбітальне кутове квантове число l . Поєднуючи рівняння 3.18 і рівняння 3.15, величина магнітного моменту дорівнює:

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right) L = \left(\frac{e}{2m_e}\right) \sqrt{l(l+1)} \hbar = \mu_B \sqrt{l(l+1)}. \quad (3.20)$$

Z -складова магнітного моменту дорівнює:

$$\mu_z = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) L_z = -\left(\frac{e}{2m_e}\right) m \hbar = -\mu_B m. \quad (3.21)$$

Величина μ_B є фундаментальною одиницею магнетизму, яку називають **магнетон Бора**, і яка має значення $9,3 \times 10^{-24}$ Дж/Тл або $5,8 \times 10^{-5}$ еВ/Тл.

Квантування магнітного моменту є результатом квантування орбітального моменту імпульсу.

Як ми побачимо в наступному підрозділі, загальний магнітний дипольний момент атома водню зумовлений як орбітальним рухом електрона, так і його власним спіном. Наразі ми ігноруємо ефект спіна електрона.

Приклад 3.3. Орбітальний магнітний дипольний момент

Яка величина орбітального дипольного магнітного моменту μ електрона в атомі водню в (a) s -стані, (b) p -стані та (c) d -стані? (Припустимо, що спін електрона дорівнює нулю).

Стратегія

Магнітний момент електрона пов'язаний з його орбітальним моментом імпульсу L . Для атома водню ця величина пов'язана з орбітальним кутовим квантовим числом l . Стани подано в спектроскопічній нотації, яка пов'язує букву (s , p , d тощо) з квантовим числом.

Розв'язок

Величина магнітного моменту наведена у рівнянні 3.20:

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right) L = \left(\frac{e}{2m_e}\right) \sqrt{l(l+1)} \hbar = \mu_B \sqrt{l(l+1)}.$$

а. Для стану s , $l = 0$ так що маємо $\mu = 0$ і $\mu_z = 0$.

б. Для стану p $l = 1$ тому маємо:

$$\mu = \mu_B \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{1(1+1)} = \sqrt{2} \mu_B.$$

$$\mu_z = -\mu_B m, \text{ де } m = (-1, 0, 1), \text{ тому}$$

$$\mu_z = \mu_B, 0, -\mu_B.$$

в. Для стану d , $l = 2$ тому отримуємо:

$$\mu = \mu_B \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{2(2+1)} = \sqrt{6} \mu_B.$$

$$\mu_z = -\mu_B m, \text{ де } m = (-2, -1, 0, 1, 2), \text{ тому}$$

$$\mu_z = 2\mu_B, \mu_B, 0, -\mu_B, -2\mu_B.$$

Обговорення

У s -стані $l = 0$ і, отже, немає магнітного моменту. Це не означає, що електрон перебуває в стані спокою, просто загальний рух електрона не створює магнітного поля. У p - стані електрон має магнітний момент з трьома можливими значеннями для z -компоненти цього магнітного моменту; це означає, що магнітний момент може вказувати в трьох різних полярних напрямках — кожен протипаралельний вектору орбітального кутового моменту. У d -стані електрон має магнітний момент із п'ятьма можливими значеннями z -компоненти цього магнітного моменту. У цьому випадку магнітний момент може вказувати в п'яти різних полярних напрямках.

Атом водню має магнітне поле, тому ми очікуємо, що атом водню буде взаємодіяти із зовнішнім магнітним полем, так як відштовхування і тяжіння відбувається між двома стрижневими магнітами. Ми знаємо, що коли коло струму взаємодіє із зовнішнім магнітним полем $\vec{B}$, воно відчуває обертальний момент, заданий так:

$$\vec{\tau} = I(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (3.22)$$

де $\vec{A}$ — площа кола, $\vec{\mu}$ — магнітний момент, а $\vec{B}$ — зовнішнє магнітне поле. Цей обертальний момент повертає вектор магнітного моменту атома водню, щоб вирівняти його із зовнішнім магнітним полем. Оскільки механічну роботу над атомом водню здійснює зовнішнє магнітне поле, можна говорити про перетворення енергії в атомі. Потенційна енергія атома водню, пов'язана з цією магнітною взаємодією, визначається рівнянням 3.23:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (3.23)$$

Якщо магнітний момент антипаралельний зовнішньому магнітному полю, потенціальна енергія велика, але якщо магнітний момент паралельний полю, потенціальна енергія мала. Таким чином, робота, що виконується над атомом водню для обертання вектора магнітного моменту атома в напрямку зовнішнього магнітного поля, пов'язана зі зниженням потенціальної енергії. Однак енергія системи зберігається, оскільки падіння потенційної енергії створює випромінювання (випромінювання фотона). Ці енергетичні переходи є

квантованими, оскільки магнітний момент може вказувати лише в певних напрямках.

Якщо зовнішнє магнітне поле спрямоване в позитивному напрямку z , потенційна енергія, пов'язана з орбітальним магнітним дипольним моментом, дорівнює:

$$U(\theta) = -\mu B \cos \theta = -\mu_z B = -(-\mu_B m) B = m \mu_B B, \quad (3.24)$$

де μ_B — магнетон Бора, а m — квантове число проекції моменту імпульсу (або **магнітне орбітальне квантове число**), яке має значення:

$$m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l. \quad (3.25)$$

Наприклад, в стані електрона $l = 1$, повна енергія електрона розбивається на три різні рівні енергії, що відповідають:

$$U = -\mu_B B, 0, \mu_B B.$$

Розщеплення енергетичних рівнів зовнішнім магнітним полем називають **ефектом Зеемана**. Ігноруючи ефекти спіну електрона, переходи з $l = 1$ в основний стан з нижчою енергією утворюють три близько розташовані спектральні лінії (рис. 3.11, лівий стовпець).

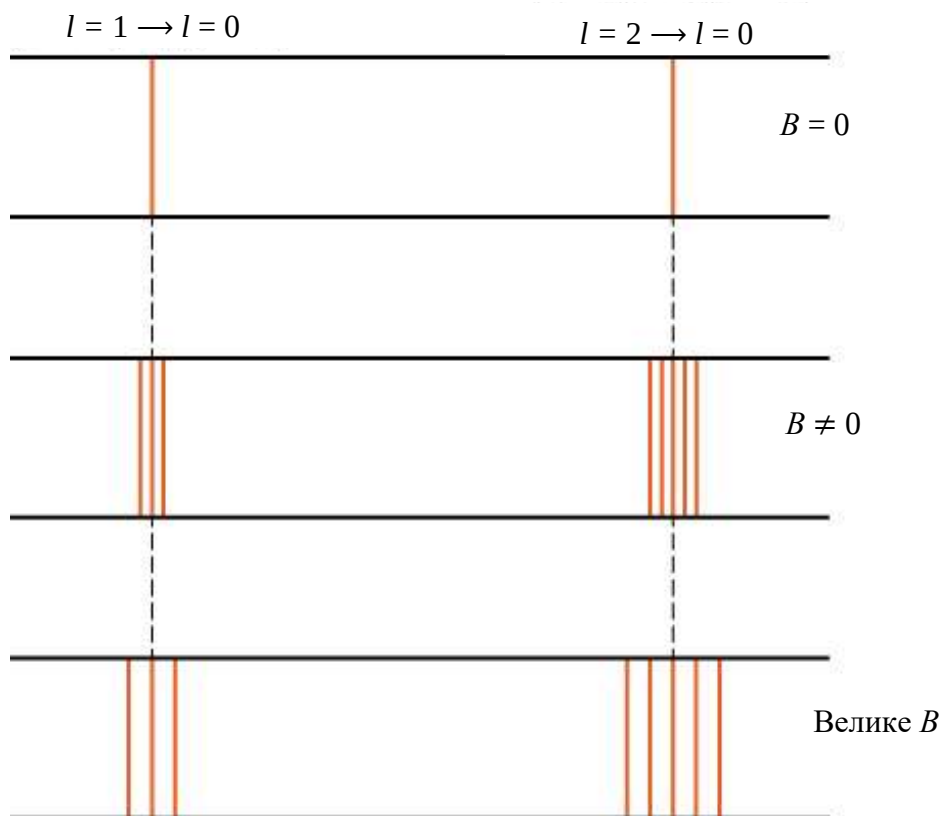


Рис. 3.11. Ефект Зеемана означає розщеплення спектральних ліній зовнішнім магнітним полем. У лівій колонці розщеплення енергії відбувається за рахунок переходів зі стану ($n = 2, l = 1$) до нижчого енергетичного стану; а в правій колонці розщеплення енергії відбувається за рахунок переходів зі стану ($n = 2, l = 2$) до низькоенергетичного стану. Відстань між цими лініями пропорційна силі зовнішнього магнітного поля

Так само переходи від стану $l = 2$ виробляють п'ять близько розташованих спектральних ліній (правий стовпець). Відстань між цими лініями пропорційна

силі зовнішнього магнітного поля. Цей ефект має багато застосувань. Наприклад, розщеплення ліній у водневому спектрі Сонця використовується для визначення сили магнітного поля Сонця. Такі вимірювання магнітного поля можна використовувати для створення карти магнітної активності на поверхні Сонця, яку називають **магнітограмою** (рис. 3.12).

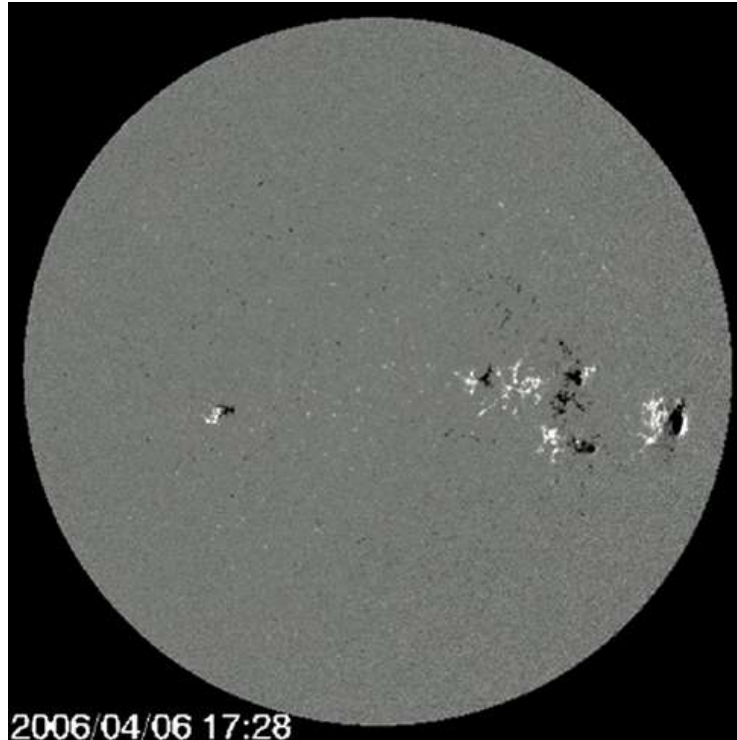


Рис. 3.12. Магнітограма Сонця. Яскраві та темні плями демонструють значну магнітну активність на поверхні Сонця

Вправи до п. 3.2. Орбітальний магнітний дипольний момент електрона

1. Знайти величину орбітального магнітного дипольного моменту електрона в стані $3p$. (Відповідь сформулюйте термінами m_B).
2. Струм $I = 2\text{A}$ протікає через дріт квадратної форми зі стороною 2 см . Який магнітний момент дроту?
3. Оцініть відношення магнітного моменту електрона до магнітного моменту мюона для того самого стану орбітального кутового моменту. (Підказка: $m_\mu = 105,7\text{MeV}/c^2$).
4. Знайти величину орбітального магнітного дипольного моменту електрона в стані $4d$. (Відповідь сформулюйте термінами m_B).
5. Для $3d$ електрона у зовнішньому магнітному полі $2,50 \times 10^{-3}\text{Тл}$ знайдіть (а) струм, пов'язаний з орбітальним кутовим моментом, і (б) максимальний крутний момент.
6. Електрон в атомі водню знаходиться в стані $n = 5$, $l = 4$. Знайдіть найменший кут, який утворює магнітний момент з віссю z . (Відповідь сформулюйте термінами m_B).

7. Знайдіть мінімальну величину крутного моменту $|\vec{\tau}|$ який діє на орбітальний магнітний диполь $3p$ - електрона в зовнішньому магнітному полі $2,50 \times 10^{-3} \text{ Тл}$.

8. Електрон в атомі водню знаходиться в стані $3p$. Знайдіть найменший кут, який утворює магнітний момент з віссю z . (Відповідь сформулюйте термінами m_B).

9. Покажіть, що $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

(Підказка: для вирівнювання магнітного моменту із зовнішнім полем виконується нескінченно мала робота. Ця робота повертає вектор магнітного моменту на кут $-d\theta$ (у напрямку додатного z), де $d\theta$ є позитивною зміною кута).

3.3. Спін електрона

У цьому підрозділі ми розглянемо вплив спіна електрона. Спін вводить два додаткових квантових числа в нашу модель атома водню. Обидва були відкриті шляхом вивчення тонкої структури атомних спектрів. Спін є фундаментальною характеристикою всіх частинок, а не лише електронів, і аналогічний власному обертанню протяжних тіл навколо власних осей, наприклад, добове обертання Землі.

Спін квантується так само, як і орбітальний момент імпульсу. Було встановлено, що величина власного спінового кутового моменту S електрона визначається як

$$S = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar, \quad (3.26)$$

де s визначено як **спінове квантове число**.

Це подібно до квантування L , наведеного в рівнянні 3.4, за винятком того, що єдине дозволене значення s для електрона $s = 1/2$. Електрон називають «частинкою з половинним спіном». Квантове **число проекції спіну** m_s пов'язане з z -компонентами спіну, виражається так:

$$S_z = m_s \hbar. \quad (3.27)$$

Загалом дозволені квантові числа є такими:

$$m_s = -s, -s+1, \dots, 0, \dots, +s-1, s. \quad (3.28)$$

Для окремого випадку електрона ($s = 1/2$),

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

Напрямки власного обертання квантуються, як і для орбітального моменту імпульсу. Стан $m_s = -\frac{1}{2}$ називають станом «розкручування вниз» і має z -компоненту спіну $S_z = -\frac{1}{2}$; стан $m_s = +\frac{1}{2}$ називають станом «розкручування догори» і має z -компоненту спіну $S_z = +\frac{1}{2}$. Ці стани показано на рис. 3.13.

Власний магнітний дипольний момент електрона μ_s також можна виразити через спінове квантове число. За аналогією з орбітальним моментом імпульсу, величина магнітного моменту електрона дорівнює:

$$\mu_s = \left(\frac{e}{2m_e} \right) S. \quad (3.30)$$

Відповідно до спеціальної теорії відносності, це значення в 2 рази менше.

Таким чином, у векторній формі спіновий магнітний момент дорівнює:

$$\vec{\mu} = \left(\frac{e}{m_e}\right) \vec{S}. \quad (3.31)$$

Z – складова магнітного моменту дорівнює:

$$\mu_z = -\left(\frac{e}{m_e}\right) S_z = -\left(\frac{e}{m_e}\right) m_s \hbar. \quad (3.32)$$

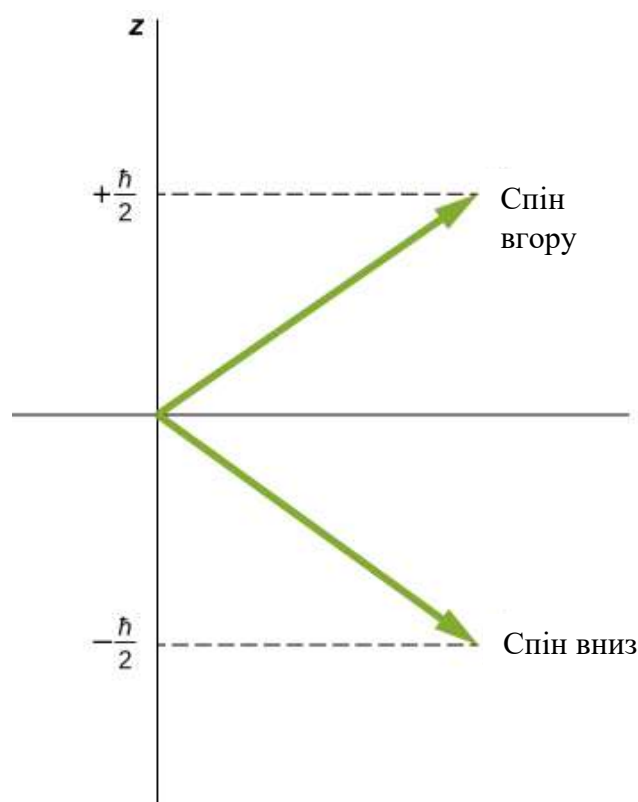


Рис. 3.13. Два можливі стани спіна електрона

Квантове число проекції спіну має лише два значення ($\mu_s = \pm 1/2$), тому z- компонент магнітного моменту також має лише два значення:

$$\mu_z = \pm \left(\frac{e}{2m_e}\right) \hbar = \pm \mu_B \hbar, \quad (3.33)$$

де μ_B є магнетоном Бора.

Електрон є магнітом, тому ми очікуємо, що електрон буде взаємодіяти з іншими магнітними полями. Розглянемо два особливих випадки: взаємодія вільного електрона із зовнішнім (неоднорідним) магнітним полем і електрона в атомі водню з магнітним полем, створеним орбітальним моментом імпульсу електрона.

Приклад 3.4. Спін електрона і випромінювання

Атом водню в основному стані знаходиться в зовнішньому однорідному магнітному полі ($B = 1,5$ Тл). Визначте частоту випромінювання, що утворюється під час переходу між станами зі спіном вгору та спіном вниз.

Стратегія

Квантове число проєкції спіну $\epsilon \mu_s = \pm 1/2$, тому z -компонента магнітного моменту дорівнює:

$$\mu_z = \pm \left(\frac{e}{2m_e} \right) \hbar = \pm \mu_B \hbar,$$

Потенціальна енергія, пов'язана з взаємодією між магнітним моментом електрона і зовнішнім магнітним полем, дорівнює:

$$U = -\mu_z B = \mp \mu_B B.$$

Частота випромінюваного світла пропорційна різниці енергії (ΔE) між цими двома станами.

Розв'язок

Різниця енергії між цими станами становить $\Delta E = 2\mu_B B$, тому частота випромінювання становить:

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu_B}{h} = \frac{2 \left(5,79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{Tл}} \right) (1,5 \text{ Тл})}{4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{с}} = 4,2 \times 10^{10} \frac{1}{\text{с}}.$$

Обговорення

Магнітний момент електрона взаємодіє із зовнішнім магнітним полем. Енергія цієї системи відрізняється незалежно від того, вирівнюється поле електрона з полем протона чи ні. Частота випромінювання, утвореного переходом між цими станами, пропорційна різниці енергій. Якщо ми подвоїмо силу магнітного поля, зберігаючи всі інші параметри незмінними, частота випромінювання подвоюється, а його довжина хвилі скорочується вдвічі.

В атомі водню магнітний момент електрона може взаємодіяти з магнітним полем, утвореним орбітальним кутовим моментом електрона. Це явище називають **спін-орбітальним зв'язком**. Вектори орбітального моменту імпульсу $\vec{L}$, орбітального магнітного моменту $\vec{\mu}_l$, орбітального кутового моменту $\vec{S}$ і спінового магнітного моменту $\vec{\mu}_s$ показані разом на рис. 3.14.

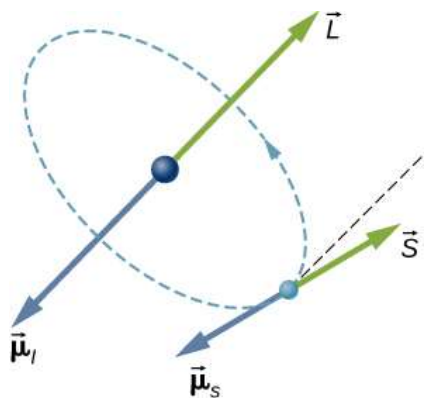


Рис. 3.14. Спін-орбітальний зв'язок — це взаємодія спінового магнітного моменту електрона $\vec{\mu}_s$ з його орбітальним магнітним моментом $\vec{\mu}_l$

Подібно до того, як енергетичні рівні атома водню можуть бути розщеплені зовнішнім магнітним полем, енергетичні рівні атома водню також розщеплюються *внутрішніми* магнітними полями атома. Якщо магнітний момент електрона та орбітальний магнітний момент електрона антипаралельні, потенціальна енергія від магнітної взаємодії є відносно високою, але коли ці моменти паралельні, потенціальна енергія відносно мала. Перехід з кожного з цих двох станів на нижчий енергетичний рівень призводить до випромінювання фотона дещо іншої частоти. Тобто спін-орбітальний зв'язок «розщеплює» спектральну лінію, очікувану від електрона без спіну. Тонка **структура** спектра водню пояснюється спін-орбітальним зв'язком.

Експеримент Штерна-Герлаха надає експериментальні докази того, що електрони мають спіновий кутовий момент. В експерименті потік атомів срібла (Ag) пропускають через зовнішнє неоднорідне магнітне поле. Атом Ag має орбітальний кутовий момент, що дорівнює нулю, і містить один неспарений електрон у зовнішній оболонці. Таким чином, повний кутовий момент атома Ag повністю зумовлений спіном зовнішнього електрона ($s = 1/2$). Завдяки обертанню електронів атоми Ag діють як крихітні магніти, коли вони проходять через магнітне поле. Ці «магніти» мають дві можливі орієнтації, які відповідають станам електрона зі спіном вгору та вниз. Магнітне поле відхиляє атоми зі спіном вгору в одному напрямку, а атоми зі спіном електрона вниз в іншому напрямку. Це створює дві чіткі смуги на екрані (рис. 3.15).

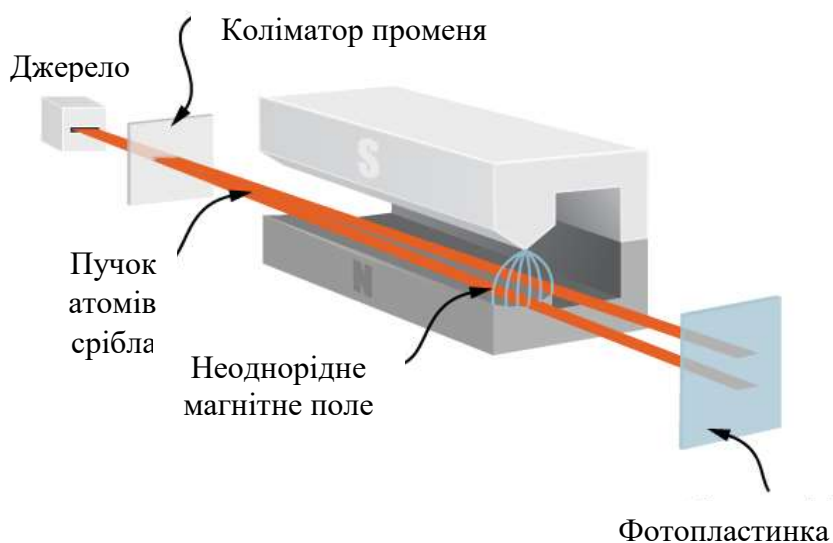


Рис. 3.15. В експерименті Штерна-Герлаха зовнішнє неоднорідне магнітне поле відхиляє пучок електронів у двох різних напрямках. Цей результат зумовлений квантуванням кутового моменту обертання

Згідно з класичними передбаченнями, кутовий момент (i , отже, магнітний момент) атома Ag може вказувати в будь-якому напрямку, тому натомість очікується суцільна пляма на екрані. Отримані дві смуги експерименту Штерна-Герлаха надають разючу підтримку ідеям квантової механіки.

Перевірте своє розуміння 3.2

Якби експеримент Штерна-Герлаха дав чотири чіткі смуги замість двох, який висновок можна зробити про спінове квантове число зарядженої частинки?

Як і електрон, протон має спін $1/2$ і має магнітний момент. (Згідно з ядерною теорією, цей момент зумовлений орбітальним рухом кварків усередині протона). **Надтонка структура** спектра водню пояснюється взаємодією між магнітним моментом протона та магнітним моментом електрона, взаємодією відомою як *спін-спіновий зв'язок*. Енергія електрон-протонної системи різна залежно від того, вирівняні чи ні моменти. Переходи між цими станами (**спін-фліп переходи**) призводять до випромінювання фотона з довжиною хвилі $\lambda \approx 21$ см (в радіодіапазоні). Лінія з довжиною хвилі 21 см в атомній спектроскопії є «відбитком» газоподібного водню. Астрономи використовують цю спектральну лінію для картографування спіральних рукавів галактик, які складаються переважно з водню (рис. 3.16).

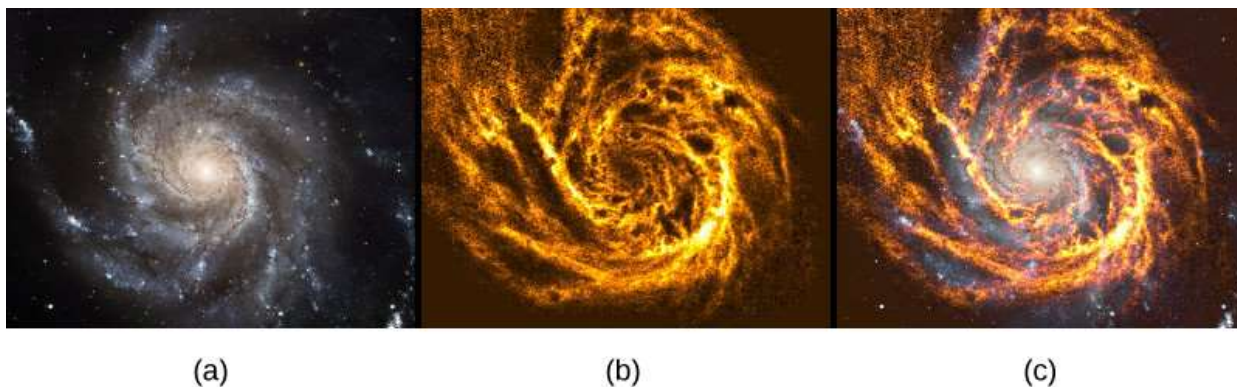


Рис. 3.16. Магнітна взаємодія між електроном і протоном в атомі водню використовується для картографування спіральних рукавів галактики. (а) Галактика, видима у видимому світлі; (b) галактика, видима в 21-см водневому випромінюванні; (с) складене зображення (а) і (b). Зверніть увагу, як випромінювання водню проникає в пил у галактиці, щоб чітко показати спіральні рукави, тоді як ядро галактики краще видно у видимому світлі

Повна характеристика стану електрона в атомі водню потребує п'яти квантових чисел: n , l , m , s і m_s . Назви, символи та дозволені значення цих квантових чисел узагальнено в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Короткий опис квантових чисел електрона в атомі водню

Ім'я	Символ	Допустимі значення
Головне квантове число	n	1, 2, 3, ...
Кутовий момент	l	0, 1, 2, ... $n - 1$
Проекція моменту імпульсу	m	0, ± 1 , ± 2 , ... $\pm l$

Ім'я	Символ	Допустимі значення
Спін	s	$1/2$ (електрони)
Спінова проекція	m_s	$-1/2, +1/2$

Зауважте, що власні квантові числа, введені в цьому розділі (s і m_s), дійсні для багатьох частинок, а не лише для електронів. Наприклад, кварки в атомному ядрі також є частинками зі спіном $1/2$. Як ми побачимо пізніше, квантові числа допомагають класифікувати субатомні частинки та входять у наукові моделі, які намагаються пояснити, як працює Всесвіт.

Вправи до п. 3.3. Спін електрона

1. Яка величина спінового імпульсу електрона? (Відповідь сформулюйте термінами $\hbar$).
2. Які можливі полярні орієнтації вектора спінового імпульсу для електрона?
3. Для $n = 1$ напишіть усі можливі набори квантових чисел (n, l, m, m_s).
4. Атом водню знаходиться в зовнішньому однорідному магнітному полі ($B = 200$ Тл). Обчисліть довжину хвилі світла, що утворюється під час переходу від стану обертання вгору до стану обертання вниз.
5. Якщо магнітне поле в попередній задачі збільшити вчетверо, що станеться з довжиною хвилі світла, яке утворюється при переході від стану обертання вгору до стану обертання вниз?
6. Якщо магнітний момент у попередній задачі подвоїти, що станеться з частотою світла, що утворюється при переході від стану обертання вгору до стану обертання вниз?
7. Для $n = 2$ запишіть усі можливі набори квантових чисел (n, l, m, m_s).

3.4. Принцип Паулі та періодична таблиця Менделєєва

Досі ми вивчали лише водень — найпростіший хімічний елемент. Ми виявили, що електрон в атомі водню можна повністю визначити п'ятьма квантовими числами:

n	головне квантове число
l	квантове число кутового моменту
m	квантове число проекцій кутового моменту
s	спінове квантове число
m_s	квантове число проекції спіну

(3.34)

Щоб побудувати основний стан нейтрального багатоелектронного атома, уявіть, що ми починаємо з ядра із зарядом Ze (тобто ядра з атомним номером Z), а потім додаємо Z електронів один за одним. Припустимо, що кожен електрон

рухається в сферично-симетричному електричному полі, створюваному ядром і всіма іншими електронами атома. Припущення справедливе, оскільки електрони розподілені випадковим чином навколо ядра і створюють середнє електричне поле (і потенціал), яке є сферично симетричним. Електричний потенціал $U(r)$ для кожного електрона не є простим $-1/r$ через взаємодію між електронами, але виявляється, що ми все ще можемо позначити кожен окремий електронний стан квантовими числами, (n, l, m, s, m_s) . Спінове квантове число s однакове для всіх електронів, тому воно не використовуватиметься в цьому підрозділі.

Структура та хімічні властивості атомів частково пояснюються **принципом виключення Паулі**: жодні два електрони в атомі не можуть мати однакові значення для всіх чотирьох квантових чисел (n, l, m, m_s) . Цей принцип пов'язаний з двома властивостями електронів: усі електрони ідентичні («коли ви бачите один електрон, ви бачите їх усіх») і вони мають напівцілий спин ($s = 1/2$). Зразки наборів квантових чисел для електронів в атомі наведено в табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Електронні стани атомів

n	l	m	m_s	Символ підоболонки	Кількість електронів: підоболонка	Кількість електронів: оболонка
1	0	0	$\frac{1}{2}$	1 s	2	2
1	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	0	0	$\frac{1}{2}$	2 s	2	8
2	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	-1	$\frac{1}{2}$	2 p	6	
2	1	-1	$-\frac{1}{2}$			
2	1	0	$\frac{1}{2}$			
2	1	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	1	$\frac{1}{2}$			
2	1	1	$-\frac{1}{2}$			
3	0	0	$\frac{1}{2}$	3 s	2	18
3	0	0	$-\frac{1}{2}$			

n	l	m	m_s	Символ підоболонки	Кількість електронів: підоболонка	Кількість електронів: оболонка
3	1	-1	$\frac{1}{2}$	$3p$	6	
3	1	-1	$-\frac{1}{2}$			
3	1	0	$\frac{1}{2}$			
3	1	0	$-\frac{1}{2}$			
3	1	1	$\frac{1}{2}$			
3	1	1	$-\frac{1}{2}$			
3	2	-2	$\frac{1}{2}$	$3d$	10	
3	2	-2	$-\frac{1}{2}$			
3	2	-1	$\frac{1}{2}$			
3	2	-1	$-\frac{1}{2}$			
3	2	0	$\frac{1}{2}$			
3	2	0	$-\frac{1}{2}$			
3	2	1	$\frac{1}{2}$			
3	2	1	$-\frac{1}{2}$			
3	2	2	$\frac{1}{2}$			
3	2	2	$-\frac{1}{2}$			

Через принцип виключення Паулі немає двох електронів в атомі, які мають однаковий набір із чотирьох квантових чисел.

Відповідно до принципу виключення Паулі, жодні два рядки таблиці не мають абсолютно однакового набору квантових чисел.

Кажуть, що електрони з однаковим головним квантовим числом n знаходяться в одній оболонці, а ті, що мають однакове значення l , займають ту саму підоболонку.

Електрон в стані $n = 1$ атома водню позначається $1s$, де перша цифра вказує на оболонку ($n = 1$), а літера вказує на підоболонку ($s, p, d, f, \dots$, що відповідають $l = 0, 1, 2, 3, \dots$). Два електрони в стані $n = 1$ позначаються як $1s^2$, де верхній індекс вказує на кількість електронів.

Електрон в стані $n = 2$ з $l = 1$ позначається $2p$. Комбінація двох електронів в стані $n = 2$ і $l = 0$ та трьох електронів в стані $n = 2$ і $l = 1$ записується як $2s^2 2p^3$, і так далі. Таке представлення електронного стану називають **електронною конфігурацією** атома.

Електронні конфігурації для кількох атомів подано в табл. 3.6. Електрони у зовнішній оболонці атома називають **валентними електронами**. Хімічний зв'язок між атомами в молекулі пояснюється передачею та спільним використанням валентних електронів.

Таблиця 3.6

Електронні конфігурації електронів в атомі

Елемент	Електронна конфігурація	Напрямок
H	$1s^1$	(↑)
He	$1s^2$	(↑↓)
Li	$1s^2 2s^1$	(↑)
Be	$1s^2 2s^2$	(↑↓)
B	$1s^2 2s^2 2p^1$	(↑↓)(↑)
C	$1s^2 2s^2 2p^2$	(↑↓)(↑)(↑)
N	$1s^2 2s^2 2p^3$	(↑↓)(↑)(↑)(↑)
O	$1s^2 2s^2 2p^4$	(↑↓)(↑↓)(↑)(↑)
F	$1s^2 2s^2 2p^5$	(↑↓)(↑↓)(↑↓)(↑)
Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$	(↑↓)(↑↓)(↑↓)(↑↓)
Na	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$	(↑)
Mg	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$	(↑↓)
Al	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$	(↑↓)(↑)

Символ ($\uparrow$) вказує на неспарений електрон у зовнішній оболонці, тоді як символ ($\uparrow\downarrow$) вказує на пару електронів зі спіном вгору та вниз у зовнішній оболонці.

Максимальна кількість електронів у підоболонці залежить від значення квантового числа l моменту імпульсу. Для даного значення l існують $2l + 1$ стани орбітального кутового моменту. Однак кожен із цих станів може бути заповнений двома електронами (спін вгору і вниз $\uparrow\downarrow$). Таким чином, максимальна кількість електронів в підоболонці становить:

$$N = 2(2l + 1) = 4l + 2. \quad (3.35)$$

У підоболонки $2s$ ($l = 0$) максимальна кількість електронів дорівнює 2. У підоболонки $2p$ ($l = 1$) максимальна кількість електронів становить 6. Отже, загальна максимальна кількість електронів у оболонки $n = 2$ (включаючи обидві підоболонки $l = 0$ і $l = 1$) є $2 + 6 = 8$. Загалом максимальна кількість електронів у n -й оболонці становить $2n^2$.

Приклад 3.5. Підоболонки для оболонки $n = 3$

Скільки підоболонок у оболонки $n = 3$? Визначте кожен підоболонку та обчисліть максимальну кількість електронів, які заповнять кожен. Покажіть, що максимальна кількість електронів, які заповнюють атом дорівнює $2n^2$.

Стратегія

Підоболонки визначаються величиною l ; таким чином, ми спочатку визначаємо, які значення l допустимі, а потім застосовуємо рівняння «максимальна кількість електронів, які можуть бути в підоболонці» = $2(2l + 1)$, щоб знайти кількість електронів у кожній підоболонці.

Розв'язок

Тому що $n = 3$, ми знаємо, що l може бути 0, 1 або 2; таким чином, існує три можливі підоболонки. У стандартній нотації вони позначаються підоболонками $3s$, $3p$ і $3d$. Ми вже бачили, що два електрони можуть перебувати в s -стані, а шість — у p -стані, але скористаємося рівнянням «максимальна кількість електронів, які можуть перебувати в підоболонці» = $2(2l + 1)$, щоб обчислити їх максимальну кількість у кожній підоболонці:

$$3s \text{ має } l = 0; \text{ таким чином, } 2(2l + 1) = 2(0 + 1) = 2$$

$$3p \text{ має } l = 1; \text{ таким чином, } 2(2l + 1) = 2(2 + 1) = 6$$

$$3d \text{ має } l = 2; \text{ таким чином, } 2(2l + 1) = 2(4 + 1) = 10$$

Всього 18 електронів у оболонці $n = 3$.

Рівняння «максимальна кількість електронів, які можуть бути в оболонці = $2n^2$ » дає максимальну кількість у оболонці $n = 3$:

$$\text{Максимальна кількість електронів} = 2n^2 = 2(3)^2 = 2(9) = 18.$$

Обговорення

Загальна кількість електронів у трьох підоболонках, таким чином, така ж, як у формулі $2n^2$. У стандартній (спектроскопічній) нотації заповнена оболонка $n = 3$ позначається як $3s^2 3p^6 3d^{10}$. Рівні не наповнюються простим способом. Перед повним заповненням оболонки $n = 3$, наприклад, ми починаємо знаходити електрони в $n = 4$ оболонці.

Структуру періодичної таблиці (рис. 3.17) можна зрозуміти з точки зору оболонок і підоболонок і, зрештою, повної енергії, орбітального кутового моменту та спіна електронів в атомі.

Символ → **H** ← Електрони

1s ← Підоболонка

Рис. 3.17. Періодична система елементів, що показує будову оболонок і підоболонок

Детальне обговорення періодичної таблиці залишимо для курсу хімії — тут ми накидаємо лише її основні риси. У цьому обговоренні ми припускаємо, що атоми електрично нейтральні; тобто вони мають однакову кількість електронів і протонів. (Нагадаймо, що загальна кількість протонів в атомному ядрі називається атомним номером Z).

По-перше, періодична таблиця впорядкована в стовпці та рядки. Таблиця читається зліва направо і зверху вниз у порядку збільшення атомного номера Z . Атоми, які належать до одного стовпця або **хімічної групи**, мають багато однакових хімічних властивостей.

Наприклад, атоми Li і Na (у першому стовпці) зв'язуються з іншими атомами подібним чином. Перший рядок таблиці відповідає $1s$ ($l = 0$) оболонки атома.

Розглянемо гіпотетичну процедуру додавання електронів по одному до атома. Для водню (H) (верхній лівий кут) $1s$ оболонка заповнена електроном зі спіном вгору або вниз ($\uparrow$ або $\downarrow$). Цей “самотній” електрон легко переходить до інших атомів, тому водень є хімічно активним. Для гелію (He) (праворуч угорі) оболонка $1s$ заповнена електронами зі спіном вгору і спіном вниз ($\uparrow\downarrow$). Це «заповнює» оболонку $1s$, тому атом гелію не ділиться електронами з іншими атомами. Атом гелію називають хімічно неактивним, інертним або благородним; аналогічно газоподібний гелій називають інертним або благородним газом.

Другий ряд відповідає підоболонкам $2s$ і $2p$. Для літію (Li) (ліворуч угорі) $1s$ оболонка заповнена електронами зі спіном вгору та вниз ($\uparrow\downarrow$), а оболонка $2s$ заповнена електроном зі спіном вгору або вниз ($\uparrow$ або $\downarrow$). Отже, його електронна конфігурація $1s^2 2s^1$ або $[\text{He}] 2s$, де $[\text{He}]$ вказує на гелієве ядро. Подібно до водню, валентний електрон у зовнішній оболонці легко переходить до інших атомів. Для берилію (Be) $2s$ оболонка заповнена електронами зі спіном вгору та вниз ($\uparrow\downarrow$), і має електронну конфігурацію $[\text{He}] 2s^2$.

Далі дивимося на праву частину таблиці. Для бору (B) оболонки $1s$ і $2s$ заповнені, а оболонка $2p$ ($l = 1$) містить електрон зі спіном вгору або вниз ($\uparrow$ або $\downarrow$). Від вуглецю (C) до неону (N) ми заповнюємо оболонку $2p$. Максимальна кількість електронів в $2p$ оболонках становить $4l + 2 = 4(1) + 2 = 6$. Для неону (Ne) оболонка $1s$ заповнена електронами зі спіном вгору та вниз ($\uparrow\downarrow$), а оболонка $2p$ заповнена шістьма електронами ($\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$). Це «заповнює» підоболонки $1s$, $2s$ і $2p$, тому, як і гелій, атом неону не ділиться електронами з іншими атомами.

Процес заповнення електронами повторюється в третьому ряду. Однак, починаючи з четвертого ряду, алгоритм заповнення оболонок порушується. Фактичний порядок заповнення електронами буде таким:

$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 7s, \dots$

Зауважте, що підоболонки $3d$, $4d$, $4f$ і $5d$ (виділені жирним шрифтом) заповнені неправильно; це відбувається через взаємодію між електронами в атомі, якою ми досі нехтували.

Перехідні метали — це елементи в проміжку між першими двома стовпцями та останніми шістьма стовпцями, які містять електрони, які заповнюють підоболонку d ($l = 1$). Як і очікувалося, ці атоми розташовані в $4l + 2 = 4(2) + 2 = 10$ колонці. Структуру періодичної таблиці можна зрозуміти з точки зору квантування повної енергії (n), орбітального кутового моменту (l) і спіну (s). Перші два стовпці відповідають підоболонці s ($l = 0$), наступні шість стовпців відповідають підоболонці p ($l = 1$), а проміжок між цими стовпцями відповідає підоболонці d ($l = 2$).

Періодична таблиця також дає інформацію про молекулярний зв'язок. Щоб побачити це, розгляньте атоми в крайньому лівому стовпчику (так звані лужні метали, включаючи: Li, Na та K). Ці атоми містять один електрон у суб-

оболонці s , який легко передається іншим атомам. Навпаки, атоми у другому правому стовпчику (галогени: наприклад, Cl , F та Br) відносно скупі на обмін електронами. Ці атоми радше приймуть електрон, тому що їм потрібен лише один електрон, щоб заповнити оболонку.

Тому, якщо атом Na знаходиться в безпосередній близькості до атома Cl , атом Na вільно віддає свій $2-s$ електрон, а атом Cl охоче приймає його. У процесі атом Na (спочатку нейтральний заряд) стає позитивно зарядженим, а Cl (спочатку нейтральний заряд) стає негативно зарядженим. Заряджені атоми називають йонами. У цьому випадку іони є Na^+ і Cl^- , де верхній індекс вказує на заряд іона. Електричне (кулонівське) притягання між цими атомами утворює молекулу NaCl (солі). Хімічний зв'язок між двома йонами називається **іонним**. Існує багато видів хімічних зв'язків. Наприклад, у молекулі кисню O_2 електрони розподіляються між атомами порівну. Прикладом **ковалентного зв'язку** є зв'язок атомів кисню.

Вправи до п. 3.4. Принцип виключення та періодична таблиця Менделєєва

1. (а) Скільки електронів може бути в $n = 4$ оболонці? (б) Які його підоболонки і скільки електронів може бути в кожній?
2. (а) Яке мінімальне значення l для підоболонки, яка містить 11 електронів? (б) Якщо ця підоболонка знаходиться в $n = 5$ оболонці, яка спектроскопічна нотація для цього атома?
3. Невиправданий результат. Які з наведених спектроскопічних позначень неприпустимі? (а) $5s^1$, (б) $1d^1$, (в) $4s^3$, (г) $3p^7$, (д) $5g^{15}$. Вкажіть, яке правило порушується для кожного неприпустимого позначення.
4. Напишіть електронну конфігурацію калію.
5. Напишіть електронну конфігурацію заліза.
6. Валентний електрон калію збуджується до стану $5d$. (а) Яка величина орбітального моменту імпульсу електрона? (б) Скільки станів може існувати вздовж обраного напрямку?
7. (а) Яке мінімальне значення l має дев'ять електронів, якщо одна оболонка атома містить дев'ять електронів? (б) Яке спектроскопічне позначення для цього атома, якщо ця підоболонка є частиною $n = 3$ оболонки?
8. Напишіть електронну конфігурацію магнію.
9. Напишіть електронну конфігурацію вуглецю.
10. Величини результуючих спінів електронів елементів В через Ne в основному стані: $\sqrt{3}\hbar/2$, $\sqrt{2}\hbar$, $\sqrt{15}\hbar/2$, $\sqrt{2}\hbar$ і $\sqrt{3}\hbar/2$ відповідно. Стверджуйте, що ці обертання узгоджуються з правилом Хунда.

3.5. Атомні спектри та рентгенівські промені

Вивчення атомних спектрів дає більшу частину наших знань про атоми. У сучасній науці атомні спектри використовуються для ідентифікації видів атомів у ряді об'єктів, від далеких галактик до зразків крові на місці злочину. Теоретичною основою атомної спектроскопії є перехід електронів між енергетичними рівнями в атомах. Наприклад, якщо електрон в атомі водню здійснює перехід з $n = 3$ до $n = 2$ оболонки, атом випромінює фотон з довжиною хвилі:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_3 - E_2}, \quad (3.36)$$

де $\Delta E = E_3 - E_2$ це енергія, яку переносить фотон $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{нм}$. Після того, як це випромінювання проходить крізь спектрометр, воно виглядає як різка спектральна лінія на екрані. Модель Бора цього процесу показано на рис. 3.18.

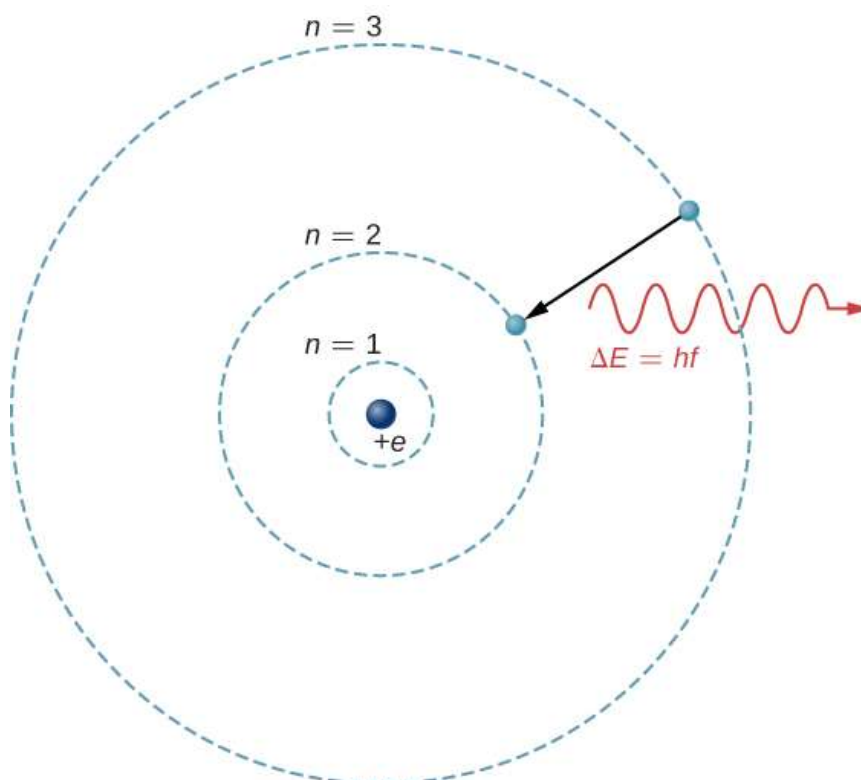


Рис. 3.18. Перехід електрона з оболонки $n = 3$ до $n = 2$ атома водню

Якщо пізніше електрон поглинає фотон з енергією ΔE , електрон повертається до оболонки $n = 3$. (Ми розглянули модель Бора раніше, у фотонах і хвилях речовини).

Щоб зрозуміти атомні переходи в багатоелектронних атомах, необхідно враховувати багато ефектів, включаючи кулонівське відштовхування між електронами та внутрішні магнітні взаємодії (спін-орбітальні та спін-спінові зв'язки). На щастя, багато властивостей цих систем можна зрозуміти, нехтуючи взаємодією між електронами та представляючи кожен електрон його власною одночастинковою хвильовою функцією ψ_{nlm} .

Атомарні переходи повинні підкорятися **правилам відбору**. Ці правила випливають із принципів квантової механіки та симетрії. Правила відбору класифікують переходи як дозволені або заборонені. (Заборонені переходи відбуваються, але ймовірність типового забороненого переходу дуже мала). Для водневоподібного атома атомні переходи, які включають електромагнітні взаємодії (випромінювання та поглинання фотонів), підкоряються наступному правилу відбору:

$$\Delta l = \pm 1, \quad (3.37)$$

де l пов'язаний з величиною орбітального моменту імпульсу,

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar. \quad (3.38)$$

Для багатоелектронних атомів діють аналогічні правила. Щоб проілюструвати це правило, розглянемо спостережувані атомні переходи водню (H), натрію (Na) і ртуті (Hg) (рис. 3.19).

Горизонтальні лінії на цій діаграмі відповідають рівням атомної енергії, а переходи, дозволені цим правилом вибору, показані лініями, проведеними між цими рівнями. Енергія цих станів становить кілька електронвольт, а фотони, що випромінюються при переходах, знаходяться у видимому діапазоні. Технічно атомарні переходи можуть порушувати правило відбору, але такі переходи є рідкістю.

Атом водню має найпростішу діаграму енергетичних рівнів. Якщо знехтувати спіном електрона, усі стани з однаковим значенням n мають однакову повну енергію. Однак спін-орбітальний зв'язок розщеплює стан $n = 2$ на два стани моменту імпульсу (s і p) дещо різних енергій. (Ці рівні не зміщені вертикально, оскільки розщеплення енергії надто мале, щоб відображатися на цій діаграмі). Так само спін-орбітальний зв'язок розщеплює стан $n = 3$ на три стани кутового моменту (s , p і d).

Діаграма рівня енергії для водню подібна до діаграми натрію, оскільки обидва атоми мають по одному електрону на зовнішній оболонці. Валентний електрон натрію рухається в електричному полі ядра, екранованого електронами у внутрішніх оболонках, тому він не відчуває простого кулонівського потенціалу $1/r$, а його повна енергія залежить як від n , так і від l . Цікаво, що ртуть має дві окремі діаграми рівнів енергії; ці діаграми відповідають двом чистим спіновим станам його $6s$ (валентних) електронів.

Приклад 3.6. Дублет натрію

Спектр натрію аналізують за допомогою спектрометра. Спостерігаються дві близько розташовані лінії з довжинами хвиль 589,00 нм і 589,59 нм. (а) Якщо дублет відповідає збудженому (валентному) електрону, який переходить із деякого збудженого стану вниз у стан $3s$, яким був початковий кутовий момент електрона? (б) Яка різниця в енергії між цими двома збудженими станами?

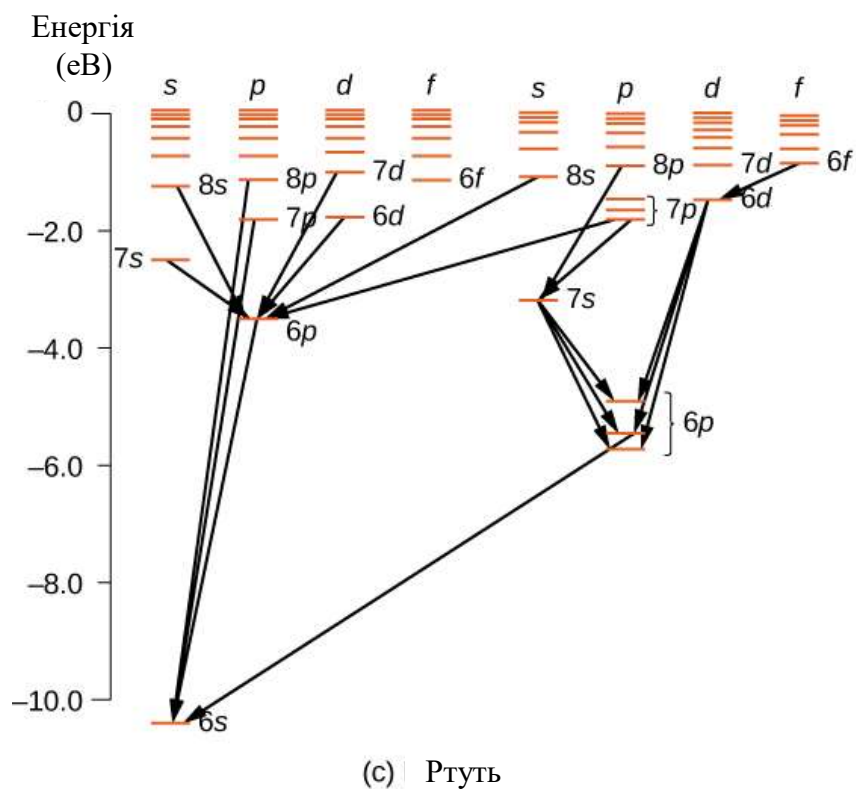
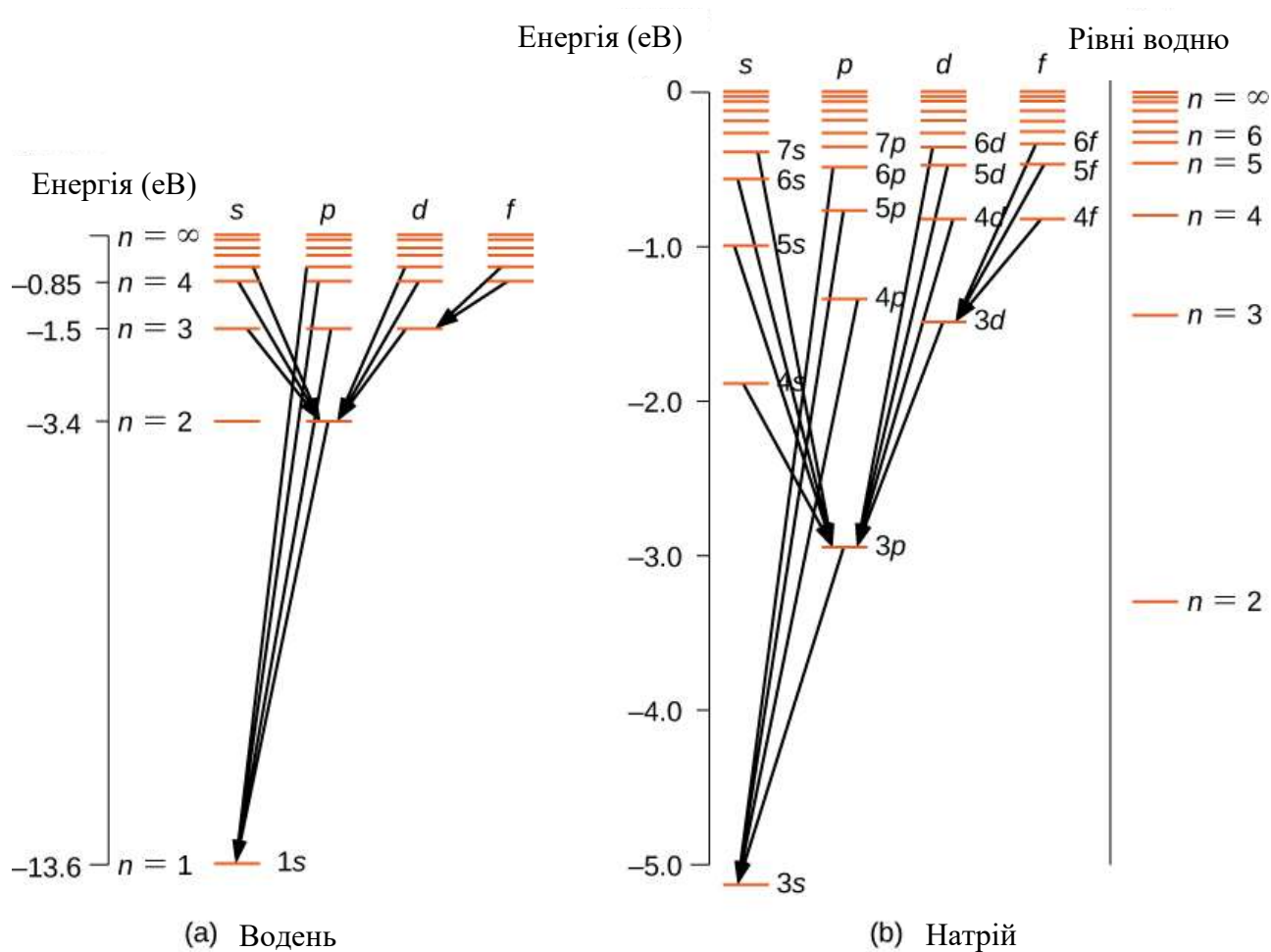


Рис. 3.19. Діаграми енергетичних рівнів для (а) водню, (б) натрію та (с) ртуті. Для порівняння на діаграмі натрію показано рівні енергії водню

Стратегія

Натрій і водень належать до одного стовпця або хімічної групи періодичної таблиці, тому натрій «подібний до водню». Найдавший електрон у натрію знаходиться в $3s (l = 0)$ підоболонці і може збуджуватися до вищих енергетичних рівнів. Що стосується водню, то наступні переходи на нижчі енергетичні рівні повинні підкорятися правилу відбору:

$$\Delta l = \pm 1.$$

Спочатку ми повинні визначити квантове число початкового стану, яке задовольняє правило відбору. Потім ми можемо використовувати це число для визначення величини орбітального кутового моменту початкового стану.

Розв'язок

а. Дозволені переходи мають відповідати правилу вибору. Якщо квантове число початкового стану дорівнює $l = 0$, перехід заборонено тому що $\Delta l = 0$. Якщо квантове число початкового стану дорівнює $l = 2, 3, 4 \dots$ перехід заборонено тому що $\Delta l > 1$. Отже, квант початкового стану повинен бути $l = 1$. Орбітальний момент імпульсу початкового стану дорівнює:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 1,41\hbar.$$

б. Оскільки кінцевий стан для обох переходів однаковий ($3s$), різниця в енергіях фотонів дорівнює різниці в енергіях двох збуджених станів. Використовуючи рівняння

$$\Delta E = hf = h \frac{c}{\lambda},$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta E &= hc \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \\ &= (4,14 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{с}) \left(3 \times 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \right) \times \left(\frac{1}{589 \times 10^{-9} \text{м}} - \frac{1}{589,59 \times 10^{-9} \text{м}} \right) = \\ &= 2,11 \times 10^{-3} \text{eV}. \end{aligned}$$

Обговорення

Щоб зрозуміти складність вимірювання цієї різниці в енергіях, ми порівнюємо цю різницю із середньою енергією двох фотонів, випущених під час переходу. Враховуючи середню довжину хвилі $589,30 \text{ нм}$, середня енергія фотонів становить:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4,14 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{с}) \left(3 \times 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)}{589,30 \times 10^{-9} \text{м}} = 2,11 \text{eV}.$$

Енергетична різниця ΔE становить приблизно $0,1\%$ (1 частина з 1000) цієї середньої енергії. Однак чутливий спектрометр може виміряти різницю.

Атомна флуоресценція

Флуоресценція виникає, коли електрон в атомі збуджується на кілька рівнів вище основного стану внаслідок поглинання ультрафіолетового (УФ) фотона високої енергії. Після збудження електрон «дезбуджується» двома способами. Електрон може повернутися до основного стану, випромінюючи фотон з такою ж енергією, яка його збудила, або він може опуститися серією менших кроків, випромінюючи кілька фотонів низької енергії. Деякі з цих фотонів можуть бути у видимому діапазоні. Флуоресцентний барвник в одязі може зробити кольори яскравішими на сонці, перетворюючи ультрафіолетове випромінювання у видиме світло. Флуоресцентні лампи ефективніше перетворюють електричну енергію у видиме світло, ніж лампи розжарювання (приблизно в чотири рази ефективніше). На рис. 3.20 зображено скорпіона, освітленого УФ-лампю. Білки біля поверхні шкіри випромінюють характерне синє світло.



Рис. 3.20. Скорпіон світиться блакитним світлом під УФ-лампю

Рентгенівські промені

Вивчення переходів атомної енергії дозволяє нам зрозуміти рентгенівські промені та рентгенівську технологію. Як і будь-яке електромагнітне випромінювання, рентгенівське випромінювання складається з фотонів. Фотони рентгенівського випромінювання утворюються, коли електрони з крайніх оболонок атома падають на внутрішні оболонки. (Атоми водню не випромінюють рентгенівське випромінювання, оскільки енергетичні рівні електронів розташовані надто близько один до одного, щоб дозволити випускати високочастотне випромінювання). Переходи такого роду зазвичай заборонені, оскільки нижчі стани вже заповнені. Однак, якщо у внутрішній оболонці є вакансія (внутрішній електрон відсутній, можливо, через те, що він був відбитий

високошвидкісним електроном), електрон з однієї із зовнішніх оболонок може втратити енергію, щоб заповнити вакансію. Енергетична щільність для такого переходу відносно велика, тому довжина хвилі випромінюваного рентгенівського фотона відносно мала.

Рентгенівське випромінювання також може бути створене бомбардуванням металевої мішені електронами високої енергії, як показано на рис. 3.21.

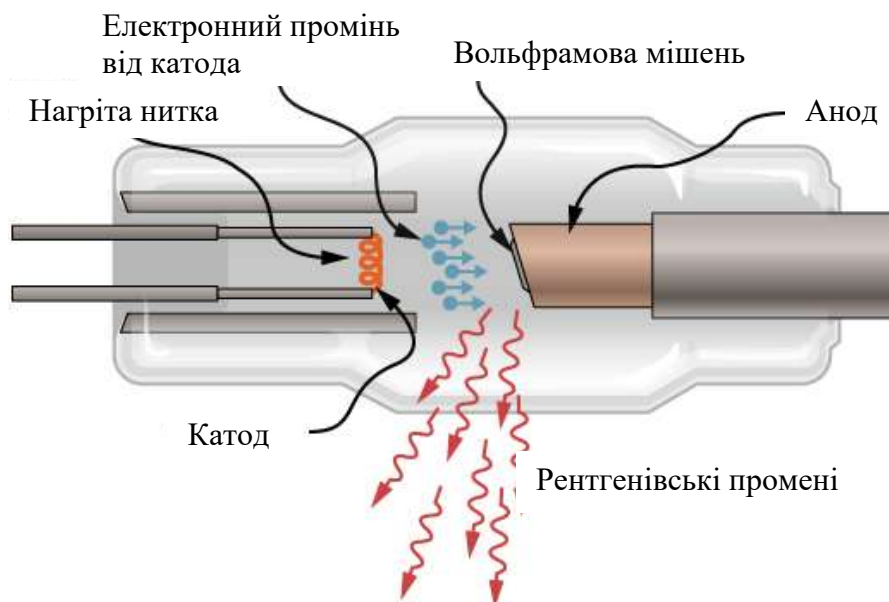


Рис. 3.21. Ескіз рентгенівської трубки. Рентгенівські промені випромінюються від вольфрамової мішені

На малюнку електрони випаровуються з нитки розжарювання та прискорюються електричним полем до вольфрамової мішені. Відповідно до класичної теорії електромагнетизму, будь-яка заряджена частинка, що прискорюється, випромінює випромінювання. Таким чином, коли електрон стикається з вольфрамовою мішенню та раптово сповільнюється, електрон випускає **гальмівне випромінювання**. (Гальмівне випромінювання стосується випромінювання, створюваного будь-якою зарядженою частинкою, яка сповільнюється середовищем). У цьому випадку гальмівне випромінювання містить безперервний діапазон частот, оскільки електрони стикаються з атомами дещо різними способами.

Гальмівне випромінювання — не єдиний тип випромінювання, що утворюється в цій взаємодії. У деяких випадках електрон стикається з іншим електроном внутрішньої оболонки атома мішені і вибиває електрон з атома — у стилі бильярдної кулі. Порожній стан заповнюється, коли електрон у вищій оболонці переходить у нижчий стан (падіння рівня енергії) і випромінює рентгенівський фотон.

Історично рентгенівські спектральні лінії позначалися літерами (K, L, M, N, ...). Ці букви відповідають атомним оболонкам ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$). Рентгенівське випромінювання, утворене переходом від будь-якої вищої

оболонки до K ($n = 1$) оболонки позначені як K -рентгенівські промені. Рентгенівське випромінювання, створене при переході від L ($n = 2$) називається оболонка K_{α} -рентгенівські промені; рентгенівське випромінювання, створене при переході від M ($n = 3$) називається оболонка K_{β} -рентгенівські промені; рентгенівське випромінювання, створене при переході від N ($n = 4$) називається оболонка K_{γ} -рентгенівські промені; і так далі. Аналогічно позначаються переходи від вищих оболонок до оболонок L і M . Ці переходи представлені діаграмою рівня енергії на рис. 3.22.

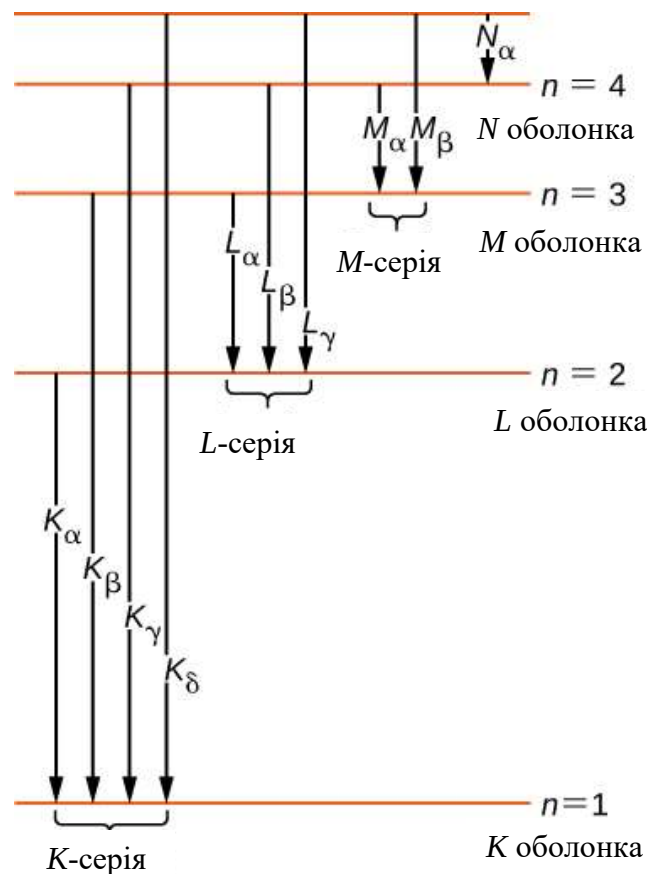


Рис. 3.22. Рентгенівські переходи в атомі

Розподіл довжин хвиль рентгенівського випромінювання, утвореного ударом по металу пучком електронів, наведено на рис. 3.23. Переходи рентгенівського випромінювання в металі мішені виглядають як піки на вершині кривої гальмівного випромінювання. Частоти фотонів, що відповідають стрибкам у розподілі рентгенівського випромінювання, називають **характерними частотами**, оскільки їх можна використовувати для ідентифікації металу мішені.

Різка гранична довжина хвилі (трохи нижче K_{γ}) відповідає електрону, який втрачає всю свою енергію на один фотон. Випромінювання з меншою довжиною хвилі заборонено з точки зору збереження енергії.

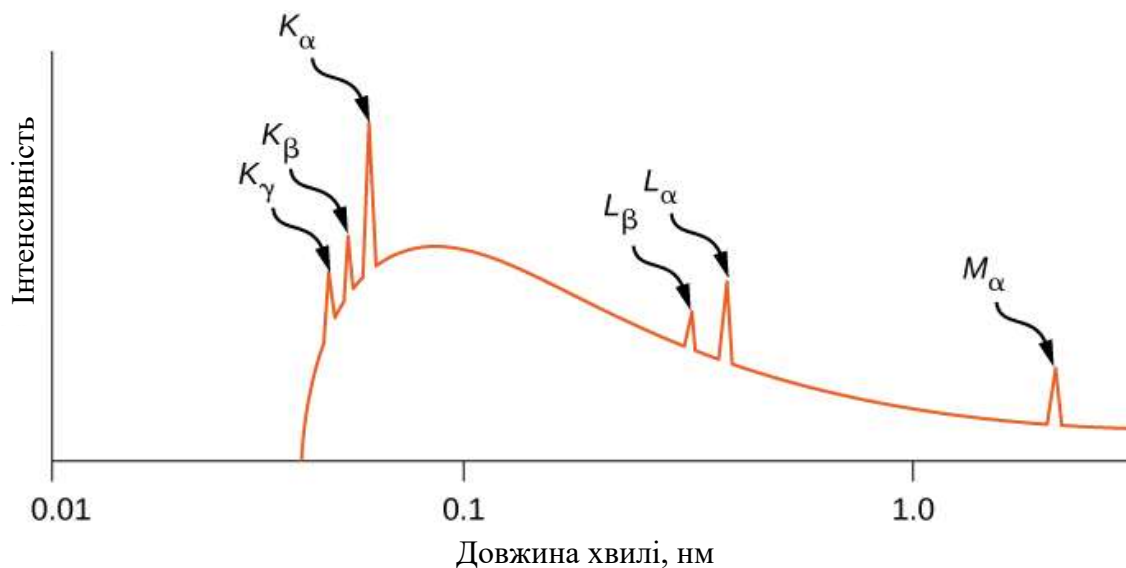


Рис. 3.23. Рентгенівський спектр від срібної мішені. Піки відповідають характерним частотам рентгенівського випромінювання, випромінюваного сріблом при попаданні на нього електронного променя

Приклад 3.7. Рентгенівські промені з алюмінію

Оцініть характеристичну енергію і частоту K_α -рентгенівського випромінювання з алюмінієвої мішені ($Z = 13$).

Стратегія

K_α -рентгенівське випромінювання утворюється переходом електрона з L ($n = 2$) оболонки до K ($n = 1$) оболонки. Електрон в L -оболонці «бачить» заряд $Z = 13 - 1 = 12$, оскільки один електрон у K -оболонці екранує заряд ядра. (Нагадаймо, два електрони не знаходяться в K -оболонці, оскільки інший електронний стан є вакантним) Частоту випромінюваного фотона можна оцінити за різницею енергій між L - і K -оболонками.

Розв'язок

Різниця енергій між L і K оболонками в атомі водню становить 10,2 еВ. Якщо припустити, що інші електрони в L -оболонці або в оболонках з більшою енергією не екранують заряд ядра, різниця в енергіях між L - і K -оболонками в атомі з $Z = 13$ становить приблизно:

$$\Delta E_{L \rightarrow K} \approx (Z - 1)^2 (10,2 \text{ eV}) = (13 - 1)^2 (10,2 \text{ eV}) = 1,47 \times 10^3 \text{ eV}. \quad (3.39)$$

На основі формули $f = (\Delta E_{L \rightarrow K})/h$, частота рентгенівського випромінювання становить:

$$f = \frac{1,47 \times 10^3 \text{ eV}}{4,14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{с}} = 3,55 \times 10^{17} \text{ Гц}.$$

Обговорення

Довжина хвилі типового рентгенівського випромінювання становить 0,1 - 10 нм. У цьому випадку довжина хвилі:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ м/с}}{3,55 \times 10^{17} \text{ Гц}} = 8,5 \times 10^{-10} \text{ м} = 0,85 \text{ нм.}$$

Отже, перехід $L \rightarrow K$ в алюмінії створює рентгенівське випромінювання.

Отримання рентгенівських променів забезпечує важливий тест квантової механіки. Відповідно до моделі Бора, енергія K_α -рентгенівського випромінювання залежить від заряду ядра або атомного номера Z . Якщо Z велике, кулонівські сили в атомі великі, різниця енергій (ΔE) великі, а отже, і енергія випромінюваних фотонів велика. Для ілюстрації розглянемо один електрон у багатоелектронному атомі. Нехтуючи взаємодією між електронами, дозволені рівні енергії є такими:

$$E_n = -\frac{Z^2(13,6 \text{ eV})}{n^2}, \quad (3.40)$$

де $n = 1, 2, \dots$ і Z – атомний номер ядра. Проте електрон у L ($n = 2$) оболонці «бачить» заряд $Z - 1$, оскільки один електрон у K -оболонці екранує заряд ядра. (Нагадаймо, що в K -оболонці є лише один електрон, оскільки інший електрон був «вибитий».) Отже, приблизні енергії електрона в L - і K -оболонках:

$$E_L \approx -\frac{(Z - 1)^2(13,6 \text{ eV})}{2^2},$$

$$E_K \approx -\frac{(Z - 1)^2(13,6 \text{ eV})}{1^2}.$$

Отже, енергія, яку переносить фотон при переході від L -оболонки до K -оболонки дорівнює:

$$\Delta E_{L \rightarrow K} = (Z - 1)^2(13,6 \text{ eV}) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = (Z - 1)^2(10,2 \text{ eV}).$$

де Z – атомний номер.

Загалом, енергія рентгенівського фотона для переходу від зовнішньої оболонки до оболонки K становить:

$$\Delta E_{L \rightarrow K} = hf = \text{const} \times (Z - 1)^2,$$

або

$$(Z - 1) = \text{const} \sqrt{f}, \quad (3.41)$$

де f — частота K_α -рентгену.

Це рівняння є **законом Мозлі**. Для великих значень Z маємо приблизно:

$$Z \approx \text{const} \sqrt{f}.$$

Цей прогноз можна перевірити, вимірявши f для різних металевих мішеней. Ця модель підтримується, якщо графіки залежності Z від $\sqrt{f}$ (так звані **графіки Мозлі**) є лінійними. Порівняння прогнозів моделі та експериментальних результатів для серії K і L показано на рис. 3.24. Дані підтверджують модель, згідно з якою рентгенівське випромінювання виникає, коли електрон зовнішньої оболонки втрачає енергію, щоб заповнити вакансію у внутрішній оболонці.

Перевірте своє розуміння 3.3

Рентгенівські промені утворюються шляхом бомбардування металевої мішені високоенергетичними електронами. Якщо мішень замінити на іншу з

двократним атомним номером, що станеться з частотою рентгенівського випромінювання?

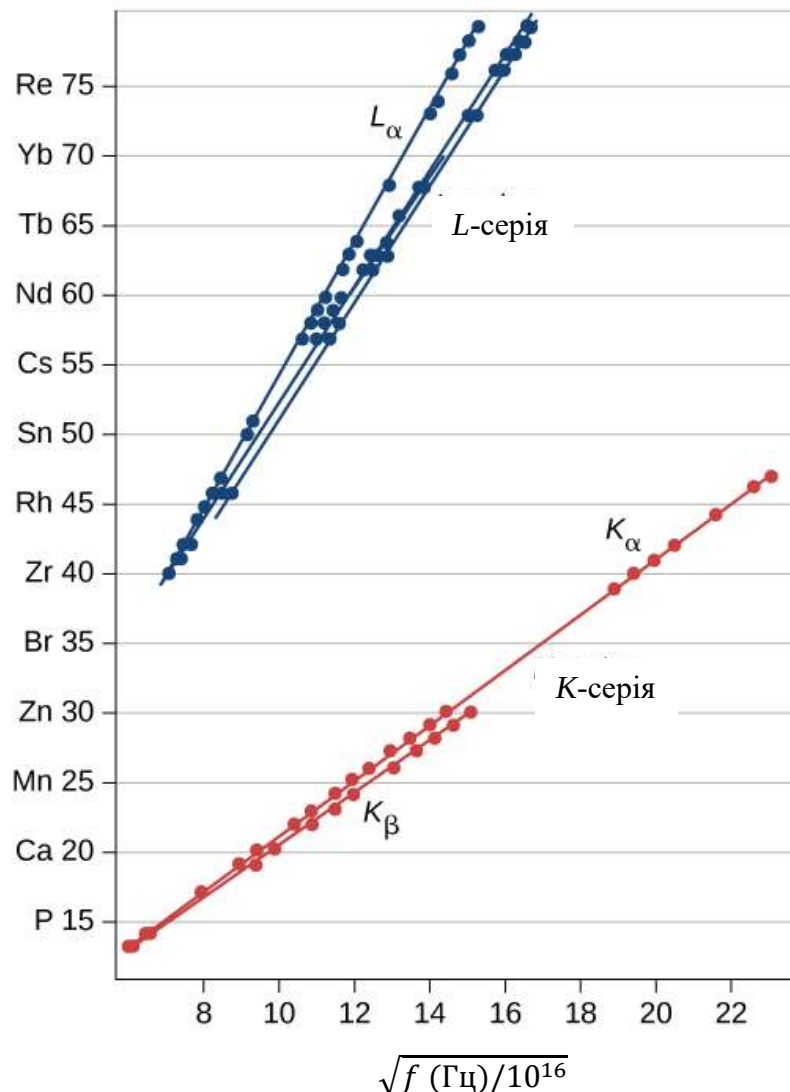


Рис. 3.24. Графіки Мозлі. Ці дані були адаптовані з вихідних даних Мозлі (H.G.J. Moseley, *Philos. Mag.* (6) 77:703, 1914)

Приклад 3.8. Енергія рентгенівського випромінювання

Обчисліть енергію K_{α} -лінії рентгенівського випромінювання від вольфрамового анода в рентгенівській трубці.

Стратегія

Два електрони займають заповнену K -оболонку. Вакансія в цій оболонці залишить один електрон, тому ефективний заряд для електрона в L -оболонці буде $Z - 1$, а не Z . Для вольфраму, $Z = 74$, тому ефективний заряд дорівнює 73. Це число можна використовувати для розрахунку різниці рівнів енергії між L - і K -оболонками, а отже, енергії, яку переносить фотон під час переходу $L \rightarrow K$.

Розв'язок

Ефективний Z дорівнює 73, отже K_α -енергія рентгенівського випромінювання визначається так:

$$E_{K_\alpha} = \Delta E = E_i - E_f = E_2 - E_1,$$

де

$$E_1 = -\frac{Z^2}{1^2} E_0 = -\frac{73^2}{1} (13,6 \text{ eV}) = -72,5 \text{ кеВ}$$

і

$$E_2 = -\frac{Z^2}{2^2} E_0 = -\frac{73^2}{4} (13,6 \text{ eV}) = -18,1 \text{ кеВ}.$$

Таким чином,

$$E_{K_\alpha} = -18,1 \text{ кеВ} - (-72,5 \text{ кеВ}) = 54,4 \text{ кеВ}.$$

Обговорення

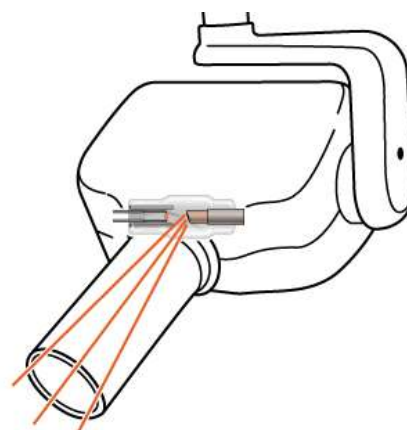
Така велика енергія фотона типова для рентгенівського випромінювання. Енергія рентгенівського випромінювання стає все більшою для важчих елементів, оскільки їхня енергія зростає приблизно як Z^2 . Щоб «вибити» внутрішній електрон з атома вольфраму, потрібна прискорювальна напруга понад 50 000 вольт.

Рентгенівська техніка

Рентгенівське випромінювання має багато застосувань, наприклад, у медичній діагностиці (рис. 3.25), огляді багажу в аеропортах (рис. 3.26) і навіть виявленні тріщин у важливих компонентах літака.



(a)



(b)

Рис. 3.25. (a) Рентгенівський знімок зубів людини. (b) Типовий рентгенівський апарат у кабінеті стоматолога створює випромінювання відносно низької енергії, щоб мінімізувати опромінення пацієнта



Рис. 3.26. Рентгенівський знімок місця багажу. Чим щільніше матеріал, тим темніше тінь. Кольори об'єктів пов'язані зі складом матеріалу — металеві об'єкти на цьому зображенні відображаються синіми

Найбільш поширені рентгенівські зображення обумовлені тінями. Оскільки рентгенівські фотони мають високу енергію, вони проникають через матеріали, непрозорі для видимого світла. Чим більше енергії має рентгенівський фотон, тим далі в матеріал він проникає. Глибина проникнення пов'язана з густиною матеріалу, а також з енергією фотона. Чим щільніший матеріал, тим менше рентгенівських фотонів проходить через нього і темніша тінь. Рентгенівські промені ефективні для виявлення переломів кісток і пухлин; однак надмірне опромінення рентгенівськими променями може пошкодити клітини біологічних організмів.

Стандартне рентгенівське зображення забезпечує двовимірне зображення об'єкта. Однак у медичних додатках ця точка зору часто не дає достатньо інформації, щоб зробити тверді висновки. Наприклад, на двовимірному рентгенівському зображенні тіла кістки можуть легко приховати м'які тканини або органи. Сканер САТ (комп'ютерна аксіальна томографія) вирішує цю проблему, збираючи численні рентгенівські зображення у «зрізах» по всьому тілу. Комплексна комп'ютерна обробка відносного поглинання рентгенівського випромінювання в різних напрямках може створити високодеталізоване тривимірне рентгенівське зображення тіла.

Рентгенівські промені також можна використовувати для дослідження структури атомів і молекул. Розглянемо рентгенівські промені, що падають на поверхню кристалічного твердого тіла. Деякі рентгенівські фотони відбиваються від поверхні, а інші відбиваються від «площини» атомів безпосередньо під

поверхнею. Інтерференція між цими фотонами під різними кутами падіння створює гарне зображення на екрані (рис. 3.27). Взаємодія рентгенівського випромінювання з твердим тілом називається рентгенівською дифракцією. Найвідомішим прикладом використання рентгенівської дифракції є відкриття подвійної спіральної структури ДНК.

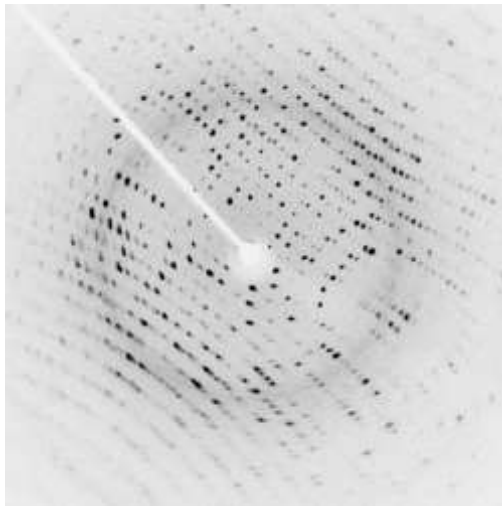


Рис. 3.27. Дифракція рентгенівських променів на кристалі білка (лізоциму курячого яйця) дала цю інтерференційну картину. Аналіз патерну дає інформацію про структуру білка

Вправи до п. 3.5. Атомні спектри та рентгенівські промені

1. Яка мінімальна частота фотона необхідна для іонізації: (а) іона He^+ в основному стані? (б) іона Li^{2+} у своєму першому збудженому стані?
2. Іон Li^{2+} , що здійснює атомарний перехід від стану $n = 4$ до $n = 2$ стану. (а) Яка енергія фотона, випущеного під час переходу? (б) Яка довжина хвилі фотона?
3. Червоне світло, випромінюване рубіновим лазером, має довжину хвилі 694,3 нм. Яка різниця в енергії між початковим станом і кінцевим станом, що відповідає випромінюванню світла?
4. Жовте світло від натрієвого вуличного ліхтаря утворюється переходом атомів натрію зі стану $3p$ у стан $3s$. Якщо різниця в енергіях цих двох станів становить 2,10 еВ, яка довжина хвилі жовтого світла?
5. Оцініть довжину хвилі рентгенівського випромінювання K_α з кальцію.
6. Оцініть частоту хвилі рентгенівського випромінювання K_α з цезію.
7. Рентгенівське випромінювання утворюється шляхом попадання на мішень пучка електронів. Перед тим, як вразити мішень, електрони прискорюються електричним полем через різницю потенціальних енергій:

$$\Delta U = -e \Delta V,$$

де e - заряд електрона і ΔV - це різниця напруг. Якщо $\Delta V = 15\,000$ В, яка мінімальна довжина хвилі випромінюваного випромінювання?

8. Для попередньої задачі, що станеться з мінімальною довжиною хвилі, якщо напругу на рентгенівській трубці подвоїти?
9. Припустимо, що експеримент у попередній задачі проводиться з мюонами. Що відбувається з мінімальною довжиною хвилі?

10. Рентгенівська трубка прискорює електрон прикладеною напругою 50 кВ до металеві мішені. (а) Яка найкоротша довжина хвилі рентгенівського випромінювання генерується мішенню? (б) Обчисліть енергію фотона в еВ. (в) Поясніть зв'язок енергії фотона з прикладеною напругою.
11. Кольоровий телевізійний кінескоп генерує рентгенівське випромінювання, коли його електронний промінь потрапляє на екран. Яка найкоротша довжина хвилі цих рентгенівських променів, якщо для прискорення електронів використовується потенціал 30,0 кВ? (Зверніть увагу, що телевізори мають екрани, щоб запобігти потраплянню рентгенівських променів на глядачів).
12. На рентгенівську трубку прикладена напруга 100 кВ. (а) Який рентгенівський фотон з найбільшою енергією він може створити? Виразіть свою відповідь в електронвольтах і джоулях. б) Знайдіть довжину хвилі такого рентгенівського випромінювання.
13. Максимальна характерна енергія рентгенівського фотона виникає внаслідок захоплення вільного електрона у вакансію K -оболонки. Яка ця енергія фотона в кеВ для вольфраму, якщо припустити, що вільний електрон не має початкової кінетичної енергії?
14. Які приблизні енергії рентгенівського випромінювання K_α і K_β для міді?
15. Порівняйте довжини хвиль фотонів рентгенівського випромінювання для міді та золота.
16. Приблизні енергії рентгенівського випромінювання K_α і K_β для міді є $E_{K_\alpha} = 8,00$ кеВ і $E_{K_\beta} = 9,48$ кеВ, відповідно. Визначте відношення частот рентгенівського випромінювання золота до міді, а потім використовуйте це значення для оцінки відповідних енергій рентгенівського випромінювання K_α і K_β для золота.

3.6. Лазери

Лазер - це пристрій, який випромінює когерентне і монохроматичне світло. Світло є когерентним, якщо фотони, що утворюють світло, є синфазними, і **монохроматичним**, якщо фотони мають одну частоту (колір). Лазери мають три основні компоненти: речовина, відома як середовище підсилення, джерело енергії та механізм створення оптичного зворотного зв'язку (у багатьох лазерах — відбиття). Коли середовище підсилення, таке як газ у лазері, поглинає випромінювання, електрони піднімаються до різних енергетичних рівнів. Більшість електронів відразу повертаються в основний стан, але інші залишаються в так званому **метастабільному стані**. Можна перевести більшість цих атомів у метастабільний стан, що називається **інверсією заселеності**.

Коли фотон збурює електрон у метастабільному стані (рис. 3.28), електрон падає на нижчий енергетичний рівень і випромінює додатковий фотон, і два фотони йдуть разом. Цей процес називається **вимушеним випромінюванням**.

Електрон у метастабільному стані

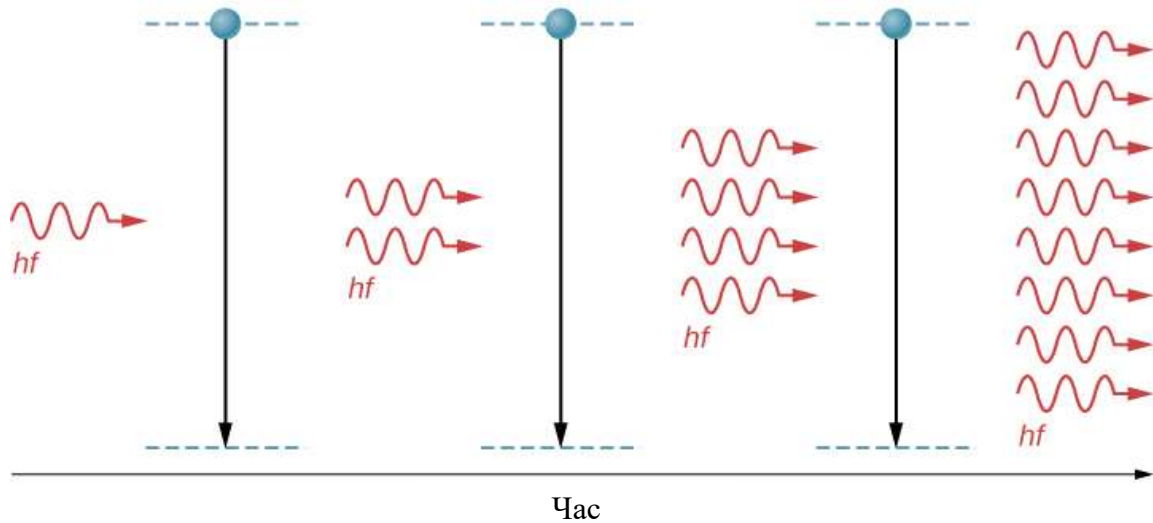


Рис. 3.28. Фізика лазера. Падаючий фотон частоти f викликає каскад фотонів тієї ж частоти

Це відбувається з відносно високою ймовірністю, коли енергія вхідного фотона дорівнює різниці енергій між збудженим і «розбудженим» рівнями енергії електрона ($\Delta E = hf$). Отже, вхідний фотон і фотон, утворений дезбудженням, мають однакову енергію hf . Ці фотони стикаються з більшою кількістю електронів у метастабільному стані, і процес повторюється. Результатом є каскадна або ланцюгова реакція однотипних дезбуджень. Лазерне світло є когерентним, оскільки всі світлові хвилі в лазерному світлі мають однакову частоту (колір) і ту саму фазу (будь-які дві точки вздовж лінії, перпендикулярної до напрямку руху, знаходяться на «однаковій частині» хвилі»). Схематична діаграма когерентної та некогерентної картини світлових хвиль наведена на рис. 3.29.



Когерентний візерунок світлової хвилі



Некогерентний візерунок світлової хвилі

Рис. 3.29. Когерентна світлова хвиля містить світлові хвилі однакової частоти та фази. Некогерентна світлова хвиля містить світлові хвилі різних частот і фаз

Лазери використовуються в широкому діапазоні застосувань, наприклад у зв'язку (волоконно-оптичні телефонні лінії), розвагах (лазерні світлові шоу), медицині (видалення пухлин і припікання судин сітківки) і в роздрібній торгівлі (зчитувачі штрих-кодів).

Лазери також можна виробляти з використанням широкого діапазону середовищ посилення, включаючи тверді тіла (наприклад, кристал рубіна), гази (гелієво-газова суміш), плазму та рідини (органічні барвники). Нещодавно з використанням желатину навіть створили лазер — їстівний лазер! Нижче ми

детально обговорюємо декілька практичних застосувань: цифрове зберігання на носіях, таких як програвачі компакт-дисків і програвачі Blu-Ray, а також підсилення чирпованого імпульсу, яке використовується в різноманітних програмах від корекції зору до досліджень ядерного синтезу.

Цифрове зберігання: CD, DVD та Blu-Ray

Протягом десятиліть до появи інтегрованих медіа-пристроїв (таких як смартфони) і цифрового потокового передавання музики та комп'ютерні дані часто зберігали на компакт-диску (CD). Компакт-диск — це диск діаметром 6 дюймів, виготовлений із пластику, біля поверхні якого є невеликі «горбки» та «ямки» для кодування цифрових або двійкових даних (рис. 3.30).

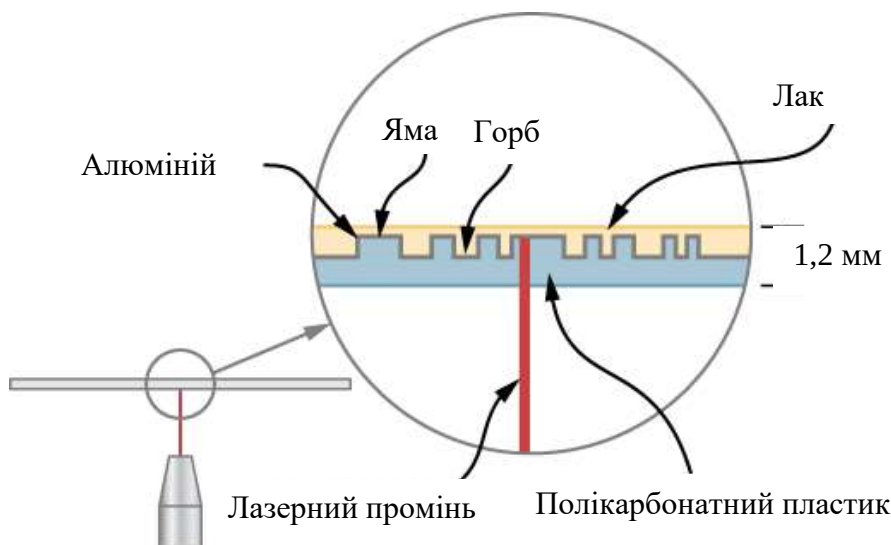


Рис. 3.30. Компакт-диск — це пластиковий диск, на поверхні якого використовуються нерівності для кодування цифрової інформації. Поверхня диска містить кілька шарів, включаючи шар алюмінію та шар полікарбонату

Нерівності та ямки з'являються вздовж дуже тонкої доріжки, яка спіралеподібно обертається назовні від центру диска. Ширина доріжки менша за $1/20$ ширини людської волосини, а висота нерівностей ще менша.

Програвач компакт-дисків використовує лазер для зчитування цієї цифрової інформації. Лазерне світло підходить для цієї мети, оскільки когерентне світло можна сфокусувати на неймовірно малій плямі та, отже, розрізнити нерівності та ямки на компакт-диску. Після обробки компонентами програвача (зокрема дифракційною ґраткою, поляризатором і коліматором) лазерне світло фокусується лінзою на поверхню компакт-диска. Світло, яке потрапляє на горб, просто відбивається, але світло, яке потрапляє на «ямку» не повертається (подробіці цього процесу не важливі для цього обговорення). Відбите світло інтерпретується як «1», а невідбите світло інтерпретується як «0». Отриманий цифровий сигнал перетворюється на аналоговий, а аналоговий сигнал подається на підсилювач, який живить такий пристрій, як навушники. Лазерна система програвача компакт-дисків показана на рис. 3.31.

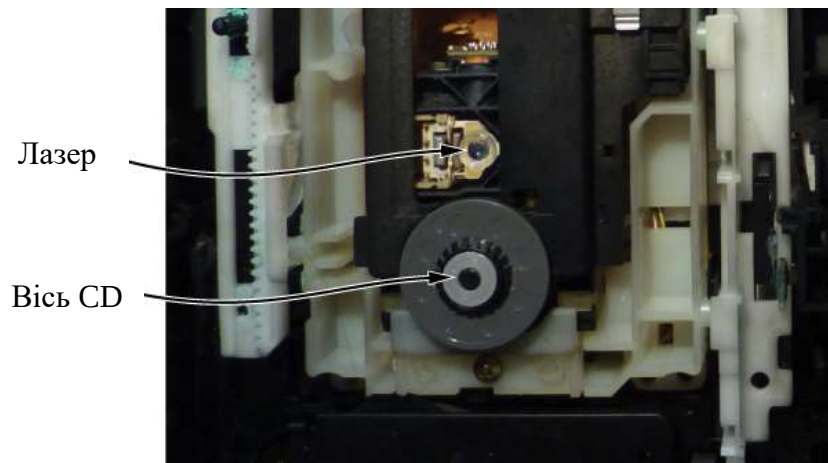


Рис. 3.31. Програвач компакт-дисків і його лазерний компонент

Відео та ігровий вміст зазвичай зберігається на цифровому універсальному диску, який використовує ті самі принципи, що й компакт-диск, але має набагато більшу ємність. Відеоігри, такі як ті, що використовуються на PlayStation або Xbox, використовують схожі технології, хоча вони можуть бути запатентованими або спеціально розробленими для певної системи. Програвач Blu-Ray зчитує цифрову інформацію (відео чи аудіо), що зберігається на диску, а для запису цієї інформації використовується лазер. Ямки на диску Blu-Ray набагато менші й розташовані щільніше, ніж на компакт-диску, тому можна зберегти набагато більше інформації. У результаті роздільна здатність лазера повинна бути більшою. Це досягається за допомогою коротких хвиль ($\lambda = 405\text{nm}$) синього лазерного світла — звідси й назва «Blu-Ray». (Компакт-диски та DVD-диски використовують червоне лазерне світло). Різні розміри ямки та апаратні конфігурації програвача CD, DVD та Blu-Ray показано на рис. 3.32.

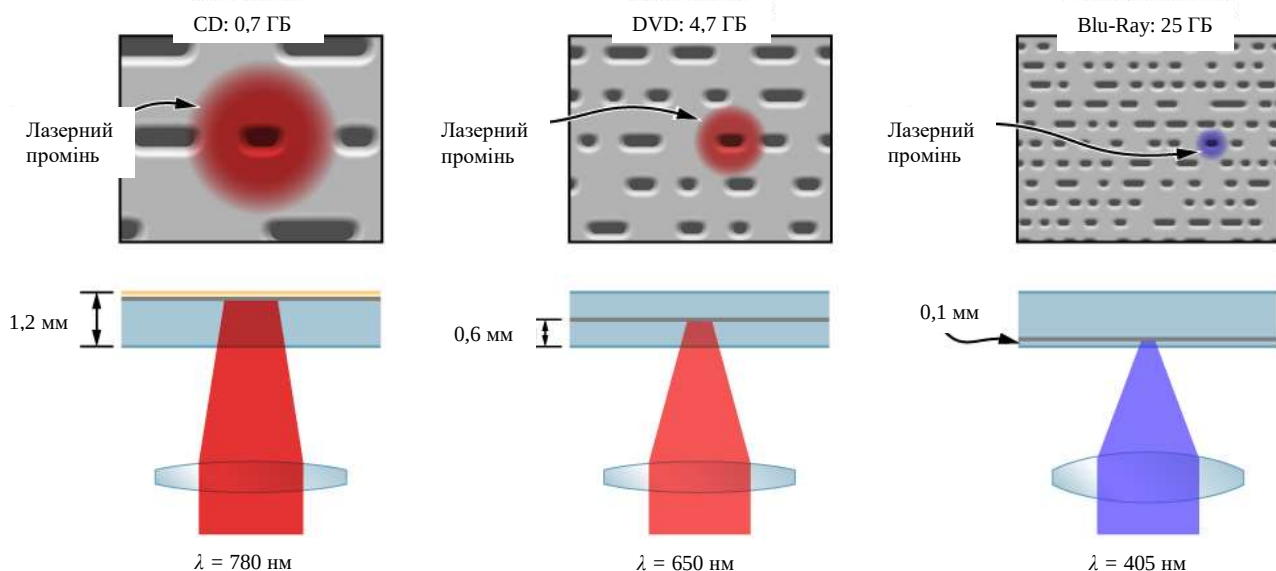


Рис. 3.32. Порівняння роздільної здатності лазера в програвачі CD, DVD і Blu-Ray

Розміри диска Blu-Ray більш ніж удвічі менші, ніж розміри дисків DVD або CD. На відміну від компакт-диска, диск Blu-Ray зберігає дані на

полікарбонатному шарі, який розміщує дані ближче до об'єктива та дозволяє уникнути проблем з читанням. Тверде покриття використовується для захисту даних, оскільки воно дуже близько до поверхні.

Посилення імпульсу: від синтезу до хірургії ока

Лазери, що використовуються в розважальних системах, споживають мало енергії та не дуже інтенсивні. Такі види використання, як різання, свердління та гравірування, вимагають набагато більше енергії. А такі застосування, як індукований лазером ядерний синтез, вимагають надзвичайної потужності та інтенсивності. Однак створення більш інтенсивних лазерів — порядку гігават на квадратний сантиметр — це не просто питання пошуку кращих матеріалів і збільшення джерела живлення, оскільки ультраінтенсивні лазерні імпульси мають фундаментальну складність: вони можуть знизити якість лазерного променя і навіть пошкодити сам лазерний пристрій.

Деталі цих результатів виходять за рамки цієї глави, але є результатами оптичних процесів, які призводять до фактичного згортання лазерного променя (втрачають його властивості), значного підвищення температури в середовищі посилення (пошкодження середовища) або відбиття які можуть пошкодити компоненти лазера. Десятиліттями для уникнення цих процесів були потрібні надзвичайно великі лазерні установки та обмеження інтенсивності лазера, що забороняло досягнення наукових і суспільних результатів.

У 1980-х роках Донна Стрікланд і Жерар Муру розробили процес подолання цих проблем. Їхній метод використовує ультракороткі лазерні імпульси, що пропускаються через ґрати, які змінюють промінь і роблять його безпечним для підсилення. Дифракційні решітки по суті розділяють початкові імпульси на високо- та низькочастотні складові та «розтягують» їх перед входом у середовище підсилення. Після посилення (в мільйони чи більше) компоненти рекомбінуються, і промінь продовжує рухатися до своєї цілі.

Підсилення чирпованих імпульсів (CPA), як цей процес став відомий, використовувалося для розробки більшості найпотужніших лазерів у світі, а також деяких із найменших і найпоширеніших. Через десятиліття після першого відкриття Стрікланд і Муру були удостоєні Нобелівської премії з фізики, а Стрікланд стала третьою жінкою, яка отримала цю нагороду. Муру був визнаним новатором у лазерних дослідженнях (виявивши одну з проблем, яка допомогла подолати CPA), а Стрікланд створила лазер із чирпованим імпульсом як частину кандидатської дисертації.

CPA відіграє ключову роль у все більш поширеній практиці лазерної корекції зору — застосування, яке не планувалося під час їх початкових досліджень. Він також використовується для створення багатьох пристроїв, якими ми користуємося щодня, наприклад для точного різання міцного скла, яке використовується в смартфонах. CPA використовується в лікуванні раку для націлювання на пухлини без впливу на навколишні тканини (особливо ефективні ультракороткі промені високої інтенсивності). І він використовується в одному з

типів термоядерного синтезу – термоядерного синтезу, де надзвичайно потужні лазери стискають і нагрівають цілі для запуску ядерного синтезу.

Вправи до п. 3.6. Лазери

1. Вуглекислотний лазер, який використовується в хірургії, випромінює інфрачервоне випромінювання з довжиною хвилі 10,6 мкм. За 1,00 мс цей лазер підвищив температуру 1,00 см³ плоті до 100°C і випарував його. (а) Скільки фотонів було потрібно? Ви можете припустити, що плоть має таку ж теплоту випаровування, як і вода. (б) Якою була мінімальна вихідна потужність під час спалаху?
2. Ексімерний лазер, який використовується для корекції зору, випромінює УФ-випромінювання з довжиною хвилі 193 нм. (а) Обчисліть енергію фотона в еВ. (б) Ці фотони використовуються для випаровування тканини рогівки, яка за своїми властивостями дуже схожа на воду. Обчисліть кількість енергії, необхідної одній молекулі води, щоб здійснити перехід фази з рідини в газ. Тобто розділіть теплоту пароутворення в кДж/кг на кількість молекул води в кілограмі. (в) Перетворіть це в еВ і порівняйте з енергією фотона. Обговоріть наслідки.

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

3.1. Атом водню

1. Визначте фізичне значення кожного з квантових чисел атома водню.
2. Опишіть основний стан водню в термінах хвильової функції, густини ймовірності та атомних орбіталей.
3. Розрізняють моделі атома водню Бора та Шредінгера. Зокрема, порівняйте енергію та орбітальний момент імпульсу основних станів.

3.2. Орбітальний магнітний дипольний момент електрона

4. Поясніть, чому спектральні лінії атома водню розщеплюються зовнішнім магнітним полем. Що визначає кількість і інтервал між цими рядками?
5. Атом водню знаходиться в магнітному полі. На які з наступних величин впливає? (а) повна енергія; (б) кутовий момент; (с) z-компонента кутового моменту; (д) полярний кут.
6. Від яких факторів залежить орбітальний магнітний дипольний момент електрона?

3.3. Спін електрона

7. Поясніть, як атом водню в основному стані ($l = 0$) може магнітно взаємодіяти із зовнішнім магнітним полем.

8. Порівняйте орбітальний кутовий момент із спіновим кутовим моментом електрона в атомі водню.
9. Перелічіть усі можливі значення s і m_s для електрона. Чи є частинки, для яких ці значення різні?
10. Вектори моменту імпульсу $\vec{L}$ і $\vec{S}$ обов'язково вирівняні?
11. Що таке спін-орбітальний зв'язок?

3.4. Принцип Паулі та періодична таблиця Менделєєва

12. Що таке принцип виключення Паулі? Поясніть важливість цього принципу для розуміння будови атома та молекулярного зв'язку.
13. Порівняйте електронні конфігурації елементів в одному стовпці періодичної системи.
14. Порівняйте електронні конфігурації елементів, які належать до одного ряду періодичної системи елементів.

3.5. Атомні спектри та рентгенівські промені

15. Атомний і молекулярний спектри дискретні. Що означає «дискретний» і як дискретні спектри пов'язані з квантуванням енергії та орбітами електронів в атомах і молекулах?
16. Поясніть процес поглинання світла речовиною з погляду атомної будови поглинаючого середовища.
17. NGC1763 — це емісійна туманність у Великій Магеллановій Хмарі неподалік від нашої Галактики Чумацький Шлях. Ультрафіолетове світло гарячих зірок іонізує атоми водню в туманності. Коли протони й електрони рекомбінуються, випромінюється світло у видимому діапазоні. Порівняйте енергії фотонів, які беруть участь у цих двох переходах.
18. Чому рентгенівське випромінювання випромінюється лише для переходів електронів на внутрішні оболонки? Який тип фотонів випромінюється для переходів між зовнішніми оболонками?
19. Чим дозволені орбіти для електронів в атомах відрізняються від дозволених орбіт для планет навколо Сонця?

3.6. Лазери

20. Чим розрізняються когерентне і монохроматичне світло?
21. Чому для виробництва лазерного світла необхідний метастабільний стан?
22. Чим відрізняється світло лампи розжарювання від лазерного?
23. Чому програвач Blu-Ray може читати більше інформації, ніж програвач компакт-дисків?
24. У чому схожість і відмінності між програвачем компакт-дисків і програвачем Blu-Ray?

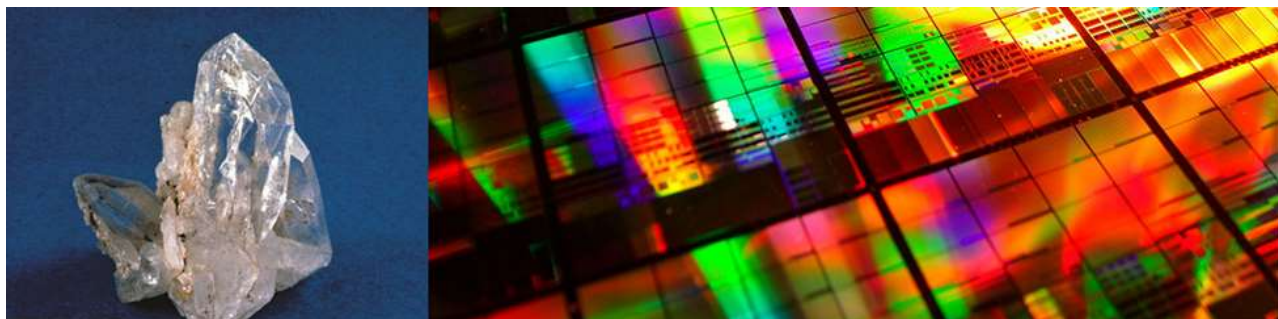


Рис. 4.1. Кристалічна структура кварцу дозволяє йому розщеплюватися на гладкі площини, які заломлюють світло, що робить його придатним для ювелірних виробів. Кремній, основний елемент кварцу, також утворює кристали в чистому вигляді, і ці кристали складають основу всесвітньої промисловості напівпровідникової електроніки

У цьому розділі ми розглядаємо застосування квантової теорії до більш складних систем, таких як молекули, метали, напівпровідники та надпровідники. Ми переглядаємо та розвиваємо концепції попередніх розділів, включаючи хвильові функції, орбіталі та квантові стани. Ми також представляємо багато нових понять, зокрема ковалентний зв'язок, обертальні рівні енергії, енергію Фермі, енергетичні зони, легування та пари Купера.

Основною темою цього розділу є кристалічна структура твердих тіл. Століттями тверді кристали цінувалися за їх красу, включаючи дорогоцінні камені, такі як діаманти та смарагди, а також геологічні кристали кварцу та металевих руд. Але кристалічні структури напівпровідників, таких як кремній, також зробили можливою сучасну електронну промисловість. У цьому розділі ми вивчаємо, як структури твердих тіл надають їм властивості від міцності та прозорості до електропровідності.

4.1. Типи молекулярних зв'язків

Квантова механіка надзвичайно успішно пояснює структуру та зв'язки в молекулах, і тому є основою для всієї хімії. Квантова хімія, як її іноді називають, пояснює чому існують молекули H_2O , чому кут зв'язку між атомами водню в цій молекулі дорівнює саме $104,5^\circ$, і чому ці молекули зв'язуються разом, утворюючи рідку воду при кімнатній температурі. Застосування квантової механіки до молекул може бути дуже складним математично, тому наше обговорення буде лише якісним.

Коли ми вивчаємо молекули, а потім тверді тіла, ми будемо використовувати багато різних наукових моделей. У деяких випадках ми розглядаємо молекулу або кристал як набір точкових ядер з електронами, що кружляють навколо за чітко визначеними траєкторіями, як у моделі Бора. В інших випадках ми використовуємо наші повні знання квантової механіки для вивчення цих систем за допомогою хвильових функцій і концепції спіна електрона. Важливо пам'ятати, що ми вивчаємо сучасну фізику за допомогою моделей і що різні моделі корисні для різних цілей. Ми не завжди використовуємо найпотужнішу модель, тоді як менш потужна, простіша у використанні модель виконає свою роботу.

Види хімічних зв'язків

Хімічні одиниці утворюються за допомогою багатьох різних видів хімічних зв'язків. **Іонний зв'язок** утворюється, коли електрон переходить від одного атома до іншого. **Ковалентний зв'язок** виникає, коли два або більше атомів ділять електрони. **Ван-дер-Ваальсовий зв'язок** виникає внаслідок притягання поляризованих зарядом молекул і значно слабкіший за іонні або ковалентні зв'язки. Існує також багато інших типів склеювання. Часто зв'язування відбувається за допомогою кількох механізмів. У центрі уваги цього розділу – іонний і ковалентний зв'язок.

Іонні зв'язки

Іонний зв'язок є, мабуть, найлегшим для розуміння типом зв'язку. Це пояснює утворення сольових сполук, таких як хлорид натрію, NaCl . Атом натрію (символ Na) має таке ж розміщення електронів, як і атом неону плюс один $3s$ -електрон. Щоб видалити цей один електрон з атома натрію, потрібно лише $5,14$ еВ енергії. Тому Na може легко віддати цей електрон сусідньому атому, досягаючи більш стабільного розташування електронів. Хлору (символ Cl) потрібен лише один електрон, щоб завершити свою валентну оболонку, тому він легко приймає цей електрон, якщо він знаходиться поблизу атома натрію. Тому ми говоримо, що хлор має велику **спорідненість до електрона**, яка є енергією, пов'язаною з прийнятим електроном. Енергія, віддана атомом хлору в цьому

процесі, становить 3,62 еВ. Після переходу електрона від атома натрію до атома хлору атом натрію стає позитивним іоном, а атом хлору — негативним. Загальна енергія, необхідна для цього перенесення, визначається як

$$E_{\text{перехід}} = 5,14 \text{ еВ} - 3,62 \text{ еВ} = 1,52 \text{ еВ}.$$

Позитивний іон натрію та негативний іон хлориду відчують притягальну силу Кулона. Потенціальна енергія, пов'язана з цією силою, визначається як

$$U_{\text{кул}} = -\frac{ke^2}{r_0}, \quad (4.1)$$

де $ke^2 = 1,440 \text{ еВ} \cdot \text{нм}$ і r_0 — це відстань між іонами.

Коли іони натрію та хлору рухаються разом («спускаються з пагорба потенційної енергії»), сила притягання між іонами стає сильнішою. Однак, якщо іони стають занадто близькими, хвильові функції орбиталь-електрон у двох іонах починають накладатися. Завдяки принципу виключення ця дія сприяє переведенню основних електронів, а отже, й усієї молекули, у вищий енергетичний стан. **Рівноважна відстань** (або довжина зв'язку) між іонами виникає, коли молекула знаходиться в найнижчому енергетичному стані. Для двоатомного NaCl ця відстань становить 0,236 нм. На рис. 4.2 показано повну енергію NaCl як функцію відстані між іонами.

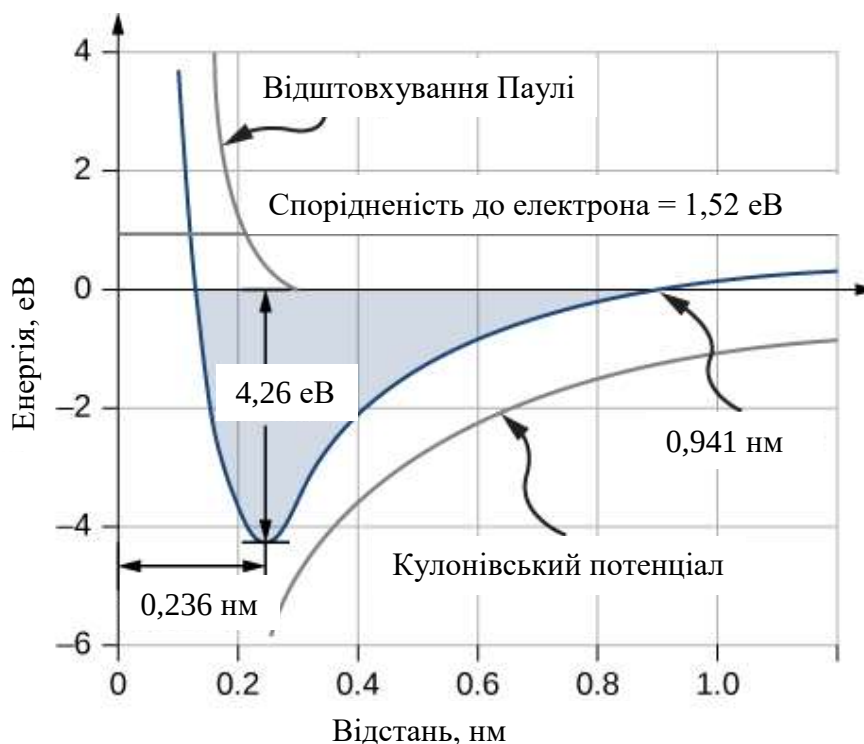


Рис. 4.2. Графік залежності енергії від відстані між іонами для хлориду натрію. Рівновага відбувається, коли повна енергія мінімальна (- 4,36 еВ)

Загальна енергія, необхідна для утворення однієї одиниці солі, становить:

$$U_{\text{форм}} = E_{\text{перенос}} + U_{\text{кул}} + U_{\text{відшт}}, \quad (4.2)$$

де $U_{\text{відшт}}$ це енергія, пов'язана з відштовхуванням між основними електронами завдяки принципу виключення Паулі. Значення $U_{\text{форм}}$ має бути негативним, щоб зв'язок утворився спонтанно.

Енергія дисоціації визначається як енергія, необхідна для розділення одиниці на складові іони:

$$U_{\text{дис}} = -U_{\text{форм}} \quad (4.3)$$

Кожна двохатомна формульна одиниця має свою характерну енергію дисоціації та рівноважну довжину зв'язку. Зразкові значення наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Довжина зв'язку

Молекула	Енергія дисоціації, еВ	Довжина зв'язку, нм
NaCl	4,26	0,236
NaF	4,99	0,193
NaBr	3,8	0,250
NaI	3,1	0,271
NaH	2,08	0,189
LiCl	4,86	0,202
LiH	2,47	0,239
LiI	3,67	0,238
KCl	4,43	0,267
KBr	3,97	0,282
RbF	5,12	0,227
RbCl	4,64	0,279
CsI	3,57	0,337
HH	4,5	0,075
NN	9,8	0,11
OO	5,2	0,12
FF	1,6	0,14
Cl-Cl	2,5	0,20

Приклад 4.1. Енергія дисоціації солі

Яка енергія дисоціації формульної одиниці солі (NaCl)?

Стратегія

Хлорид натрію (NaCl) — сіль, утворена іонними зв'язками. Зміна енергії, пов'язана з цим зв'язком, залежить від трьох основних процесів: іонізації Na; прийом електрона від атома Na атомом Cl; і кулонівське притягання отриманих іонів (Na^+ і Cl^-). Якщо іони підходять занадто близько, вони відштовхуються за принципом виключення (0,32 еВ). Рівноважна відстань між іонами становить $r_0 = 0,236$ нм.

Розв'язок

Зміна енергії, пов'язана з перенесенням електрона від Na до Cl, становить 1,52 еВ, як обговорювалося раніше в цьому розділі. При рівноважній відстані між іонами атоми знаходяться на відстані $r_0 = 0,236$ нм. Електростатична потенціальна енергія атомів дорівнює:

$$U_{\text{кул}} = -\frac{ke^2}{r_0} = -\frac{1,44 \text{ еВ} \cdot \text{нм}}{0,236 \text{ нм}} = -6,10 \text{ еВ}.$$

Повна різниця енергії, пов'язана з утворенням формульної одиниці NaCl, становить:

$$U_{\text{форм}} = E_{\text{перенос}} + U_{\text{кул}} + U_{\text{відшт}} = 1,53 \text{ еВ} + (-6,10 \text{ еВ}) + 0,32 \text{ еВ} = -4,26 \text{ еВ}.$$

Отже, енергія дисоціації NaCl становить 4,26 еВ.

Обговорення

Енергетично вигідним є утворення формульної одиниці NaCl шляхом іонного зв'язку. Енергія дисоціації або енергія, необхідна для розділення одиниці іонів Na^+ і Cl^- становить 4,26 еВ, що відповідає рис. 4.2.

Перевірте своє розуміння 4.1

Чому потенційна енергія, пов'язана з принципом виключення, додатна в прикладі 4.1?

Для іона натрію в іонному кристалі NaCl вираз для потенціальної енергії Кулона $U_{\text{кул}}$ має бути змінено фактором, відомим як **константа Маделунга**. Цей коефіцієнт враховує взаємодію іона натрію з усіма сусідніми іонами хлору та натрію. Стала Маделунга для кристала NaCl становить приблизно 1,75. Це значення означає рівноважну відстань між іонами Na^+ і Cl^- 0,280 нм — трохи більше, ніж у двоатомного NaCl. Ми повернемося до цього питання пізніше.

Ковалентні зв'язки

При іонному зв'язку електрон переходить від одного атома до іншого. Однак у ковалентному зв'язку електрон розподіляється між двома атомами. Механізм іонного зв'язку не може пояснити існування таких молекул, як H_2 , O_2

і CO , оскільки не існує відстані, для якої негативна потенційна енергія притягання була б більшою за величиною, ніж енергія, необхідна для створення іонів. Точне розуміння того, як такі молекули пов'язані ковалентним зв'язком, залежить від глибшого розуміння квантової механіки, яке виходить за межі цієї книги, але ми якісно опишемо механізми в наступному розділі.

Ковалентні зв'язки можна зрозуміти на простому прикладі молекули H_2^+ , яка складається з одного електрона в електричному полі двох протонів. Цю систему можна моделювати за допомогою електрона в подвійній квадратній ямі (рис. 4.3). Електрон з однаковою ймовірністю знайдеться в кожній лунці, тому хвильова функція є або симетричною, або антисиметричною відносно точки посередині між ямками.

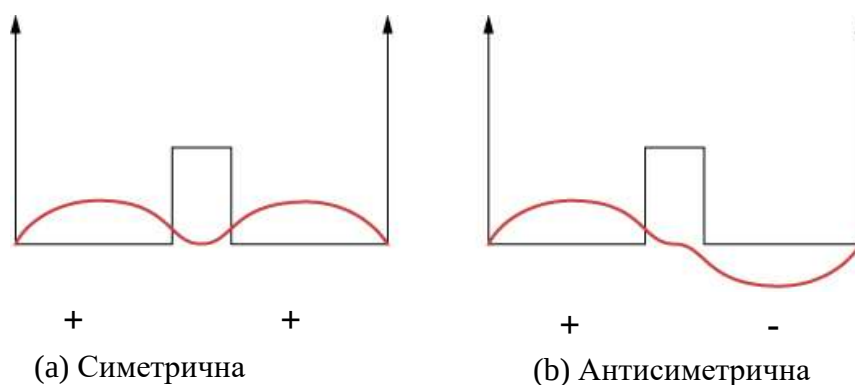


Рис. 4.3. Одновимірний модель ковалентного зв'язку в H_2^+ молекулі. (a) Симетрична хвильова функція електрона, спільного для двох позитивно заряджених протонів (представлена двома кінцевими квадратними ямами). (b) Відповідна антисиметрична хвильова функція

А тепер уявіть, що дві ями розділені великою відстанню. В основному стані хвильова функція існує в одному з двох можливих станів: або один позитивний пік (синусоїда, подібна до «горба») в обох лунках (симетричний випадок), або позитивний пік в одній ямі та негативний пік в іншому (антисиметричному випадку). Ці стани мають однакову енергію. Однак, коли ями зближуються, симетрична хвильова функція стає основним станом, а антисиметричний стан стає першим збудженим станом, іншими словами, енергетичний рівень електрона розщеплюється. Зауважте, що просторово-симетричний стан стає енергетично сприятливим (з меншою енергією) станом.

Такий самий аналіз підходить для електрона, зв'язаного з двома атомами водню. Тут форми хвильових функцій основного стану мають вигляді e^{-r/a_0} або $e^{(-|x|/a_0)}$ в одному вимірі. Енергетично сприятливий, просторово-симетричний стан передбачає високу густину заряду посередині між протонами, де електрони, ймовірно, зближують позитивно заряджені протони.

Якщо до цієї системи додати другий електрон для утворення молекули H_2 , хвильова функція повинна описувати обидві частинки, включаючи їх просторове співвідношення та відносні спіни. Ця хвильова функція також повинна враховувати нерозрізнення електронів. («Якщо ви бачили один електрон, ви бачили їх усіх»). Зокрема, обмін електронами *не* повинно спричиняти

спостережуваного ефекту, властивість, яку називають **обмінною симетрією**. Обмінна симетрія може бути *симетричною*, що не викликає змін у хвильовій функції, або *антисиметричною*, що спричиняє загальну зміну знака хвильової функції — жодна з них не спостерігається.

Як ми обговоримо пізніше, повна хвильова функція двох електронів повинна бути антисиметричною при обміні. Наприклад, два електрони, зв'язані з молекулою водню, можуть перебувати в просторово-симетричному стані з антипаралельними спінами ($\uparrow \downarrow$) або просторово-антисиметричному стані з паралельними спінами ($\uparrow \uparrow$). Стан з антипаралельними спінами є енергетично вигідним і тому використовується в ковалентному зв'язку. Проте, якщо протони притягуються занадто близько один до одного, відштовхування між протонами стає важливим. (В інших молекулах цей ефект забезпечується принципом виключення). В результаті, H_2 досягає рівноважної відстані приблизно 0,074 нм з енергією зв'язку 4,52 еВ.

Квантова механіка виключає багато типів молекул. Наприклад, молекула H_3 не утворюється, оскільки якщо третій атом Н наближається до двоатомного водню, хвильова функція електрона в цьому атомі перекриває електрони в двох інших атомах. Якщо всі три електрони знаходяться в основних станах своїх відповідних атомів, одна пара електронів має однакові квантові числа, що заборонено принципом виключення. Замість цього один з електронів переходить у стан вищої енергії. Не існує відстані між трьома протонами, для якої загальна зміна енергії цього процесу є від'ємною, тобто зв'язок виникає спонтанно. Так He_2 не має ковалентного зв'язку за звичайних умов, оскільки ці атоми не мають валентних електронів, які можна було б поділити. Коли атоми зближуються, хвильові функції електронів ядра перекриваються, і завдяки принципу виключення електрони змушені переходити у стан з вищою енергією. Не існує відстані, для якої така молекула була б енергетично сприятливою.

Зв'язок у багатоатомних молекулах

Багатоатомна молекула — це молекула, що складається з більш ніж двох атомів. Приклади варіюються від простої молекули води до складної молекули білка. Структури цих молекул часто можна зрозуміти з точки зору ковалентного зв'язку та **гібридизації**. Гібридизація — це зміна енергетичної структури атома, при якій змішані стани (стани, які можна записати як лінійну суперпозицію інших) беруть участь у зв'язуванні.

Щоб проілюструвати гібридизацію, розглянемо зв'язок у простій молекулі води, H_2O . Електронна конфігурація кисню $1s^2 2s^2 2p^4$. Електрони $1s$ і $2s$ знаходяться в «закритих оболонках» і не беруть участі в зв'язку. Решта, чотири електрони, є валентними електронами. Ці електрони можуть заповнювати шість можливих станів ($l = 1$, $m = 0, \pm 1$, плюс спін вгору та вниз). Енергії цих станів однакові, тому атом кисню може використовувати будь-яку лінійну комбінацію цих станів у зв'язку з атомами водню. Ці лінійні комбінації (про які ви дізналися

в розділі про структуру атома) називають **атомними орбітальми** і позначають як p_x , p_y , p_z . Розподіл зарядів електронів для цих орбіталей наведено на рис. 4.4.

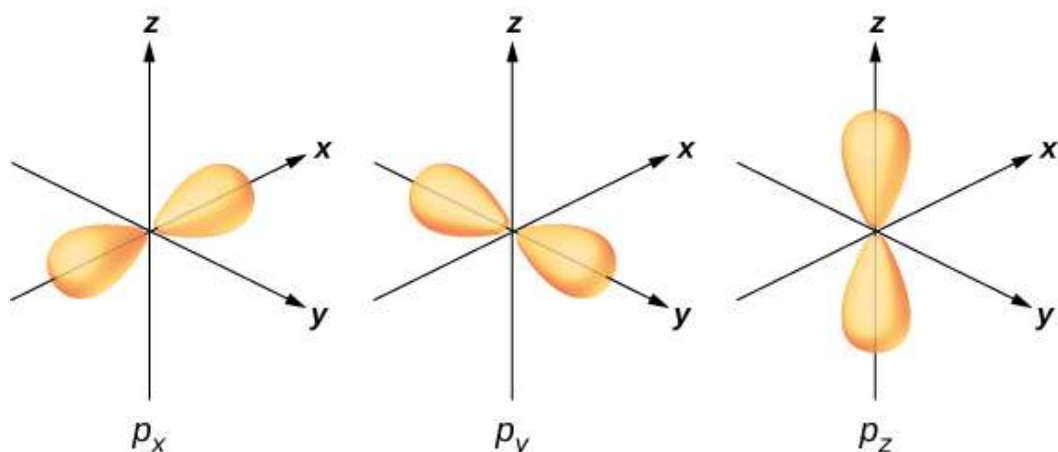


Рис. 4.4. Кисень має чотири валентні електрони. У контексті молекули води два валентних електрони заповнюють p_z орбіталь і один електрон заповнює кожен з p_x і p_y орбіталей. p_x і p_y орбіталі використовуються для зв'язку з атомами водню для утворення H_2O . Без відштовхування атомів Н зв'язувальний кут між атомами водню становив би 90 градусів

Перетворення хвильової функції електрона кисню p_x , p_y і p_z орбіталей у присутності атомів водню є прикладом гібридизації. Два електрони знаходяться в p_z орбіталі з парними спінами ($\uparrow\downarrow$). У кожній з них міститься один електрон p_x і p_y орбіталей, з непарними спінами. Останні орбіталі беруть участь у зв'язку з атомами водню. На основі рис. 4.4 ми очікуємо, що кут зв'язку для H—O—H має бути 90°. Однак, якщо ми включимо ефекти відштовхування між атомами, кут зв'язку дорівнює 104,5°. Ці ж аргументи можна використовувати для розуміння тетраедричної форми метану (CH_4) та інших молекул.

Вправи до п. 4.1. Типи молекулярних зв'язків

1. Електронна конфігурація вуглецю така $1s^2 2s^2 2p^2$. Враховуючи цю електронну конфігурацію, який інший елемент може демонструвати такий самий тип гібридизації, як вуглець?
2. Хлорид калію (KCl) — це молекула, утворена іонним зв'язком. При рівноважному розділенні атоми знаходяться на відстані $r_0 = 0,279\text{ нм}$. Визначте електростатичну потенціальну енергію атомів.
3. Електронна спорідненість Cl становить 3,89 еВ, а енергія іонізації K — 4,34 еВ. Використайте попередню задачу, щоб знайти енергію дисоціації. (Енергією відштовхування знехтувати).
4. Виміряна енергія дисоціації KCl становить 4,43 еВ. Використайте результати попередньої задачі, щоб визначити енергію відштовхування іонів за принципом виключення.

4.2. Молекулярні спектри

Рівні енергії молекули є складнішими, ніж рівні енергії атома, оскільки молекули також можуть вібрувати та обертатися. Енергії, пов'язані з такими рухами, знаходяться в різних діапазонах і тому можуть вивчатися окремо. Електронні переходи мають порядок 1 eV, коливальні – порядку 10^{-2} eV, і обертальні переходи порядку 10^{-3} eV. Для складних молекул ці зміни енергії важко охарактеризувати, тому ми починаємо з простого випадку двоатомної молекули.

Відповідно до класичної механіки, енергія обертання двоатомної молекули визначається як

$$E_r = \frac{L^2}{2I}, \quad (4.4)$$

де I – момент інерції, а L – кутовий момент. Відповідно до квантової механіки кутовий момент квантується:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.5)$$

де l – орбітальне кутове квантове число. Таким чином, допустимий **рівень енергії обертання** двоатомної молекули дорівнює:

$$E_r = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1)E_{0r}, \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.6)$$

де характерна обертова енергія молекули визначається так:

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I}. \quad (4.7)$$

Для двоатомної молекули — момент інерції зведеною масою μ є:

$$I = \mu r_0^2, \quad (4.8)$$

де r_0 це відстань між атомами. Отже, різниця енергії між обертальними рівнями дорівнює:

$$\Delta E_r = E_{l+1} - E_l = 2l(l+1)E_{0r}. \quad (4.9)$$

Детальне вивчення переходів між рівнями обертальної енергії, викликаних поглинанням або випромінюванням випромінювання (так званий **електричний дипольний перехід**), вимагає, щоб

$$\Delta l = \pm 1. \quad (4.10)$$

Це правило, відоме як **правило відбору**, обмежує можливі переходи з одного квантового стану в інший. Рівняння 4.10 є правилом відбору для обертальних енергетичних переходів. Це стосується лише двоатомних молекул, які мають електричний дипольний момент. З цієї причини симетричні молекули, такі як H_2 і N_2 не відчують обертальних енергетичних переходів через поглинання або випускання електромагнітного випромінювання.

Приклад 4.2. Енергія обертання HCl

Визначте три найнижчі рівні енергії обертання молекули хлорида водню (HCl).

Стратегія

Хлорид водню (HCl) — двоатомна молекула з рівноважною відстанню поділу 0,127 нм. Обертальні рівні енергії залежать лише від моменту інерції I та квантового числа орбітального кутового моменту l (в цьому випадку $l = 0, 1$ і 2). Момент інерції залежить, у свою чергу, від рівноважної відстані поділу (яка задана) і приведеної маси, яка залежить від мас атомів H і Cl.

Розв'язок

Спочатку ми обчислюємо приведену масу. Якщо частинка 1 є воднем, а частинка 2 – хлором, ми маємо:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1,0u)(35,4u)}{1,0u + 35,4u} = 0,97u = 0,97u \left(\frac{931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{1u} \right) = 906 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Отже, відповідна енергія маси спокою дорівнює:

$$\mu c^2 = 9,06 \times 10^8 \text{ eV}.$$

Це дозволяє розрахувати характеристичну енергію:

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2(\mu r_0^2)} = \frac{(\hbar c)^2}{2(\mu c^2) r_0^2} = \frac{(197,3 \text{ eV} \cdot \text{нм})^2}{2(9,06 \cdot 10^8 \text{ eV})(0,127 \text{ нм})^2} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ eV}.$$

(Зверніть увагу, як цей вираз записується в термінах енергії маси спокою. Ця техніка поширена в сучасних фізичних розрахунках). Рівні енергії обертання задані за формулою:

$$E_r = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1) E_{0r},$$

де l – орбітальне квантове число. Таким чином, три найнижчі рівні енергії обертання молекули HCl такі:

$$\begin{aligned} l = 0; E_r &= 0 \text{ eV (без обертання)}, \\ l = 1; E_r &= 2E_{0r} = 2,66 \times 10^{-3} \text{ eV}, \\ l = 2; E_r &= 6E_{0r} = 7,99 \times 10^{-3} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Обговорення

Обертальний спектр пов'язаний зі слабкими переходами (від 1/1000 до 1/100 eV). Для порівняння, енергія електрона в основному стані водню становить 13,6 eV.

Перевірте своє розуміння 4.2

Про що говорить енергетичний розрив між лініями поглинання в обертальному спектрі двоатомної молекули?

Рівень **коливальної енергії**, який є рівнем енергії, пов'язаним з вібраційною енергією молекули, оцінити важче, ніж рівень обертальної енергії. Однак ми можемо оцінити ці рівні, припустивши, що два атоми в двоатомній молекулі з'єднані ідеальною пружиною з постійною пружини k . Потенціальна енергія цієї пружинної системи становить:

$$U_{\text{осц}} = \frac{1}{2} k \Delta r^2, \quad (4.11)$$

де Δr це зміна «природної довжини» молекули вздовж лінії, яка з'єднує атоми. Розв'язування рівняння Шредінгера для цього потенціалу дає:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.12)$$

де ω — власна кутова частота вібрації, а n — вібраційне квантове число. Передбачення рівномірного розподілу рівнів коливальної енергії ($\Delta E = \hbar \omega$) виявляється хорошим при низьких енергіях.

Для детального вивчення переходів між коливальними рівнями енергії, викликаних поглинанням або випромінюванням випромінювання (і зокрема так званого електричного дипольного переходу), необхідно, щоб

$$\Delta n = \pm 1. \quad (4.13)$$

Рівняння 4.13 представляє правило відбору для переходів коливальної енергії. Як згадувалося раніше, це правило стосується лише двоатомних молекул, які мають електричний дипольний момент. У симетричних молекулах таких переходів немає.

Завдяки правилам відбору поглинання або випускання випромінювання двоатомною молекулою включає перехід у коливальний та обертальний стани. Зокрема, якщо коливальне квантове число (n) змінюється на одну одиницю, то обертове квантове число (l) змінюється на одну одиницю. Діаграма енергетичних рівнів можливого переходу наведена на рис. 4.5.

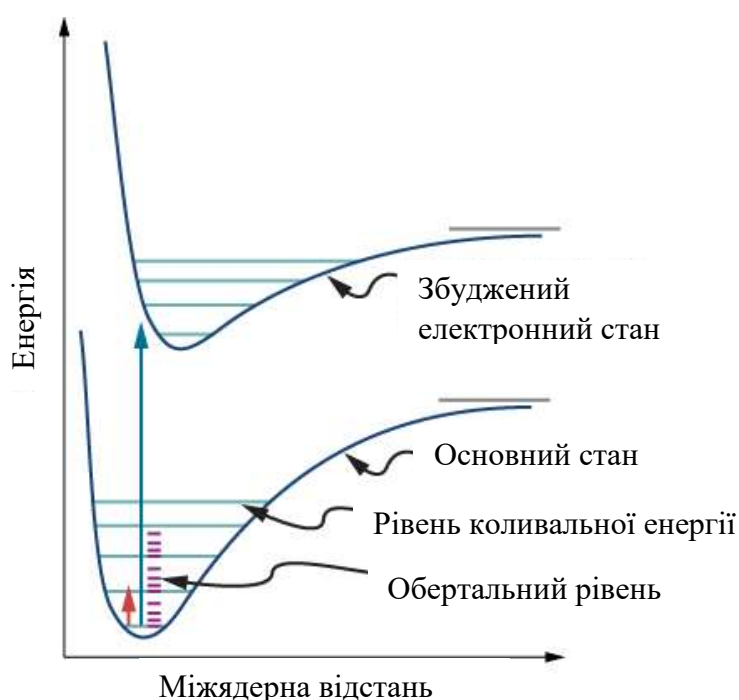


Рис. 4.5. Три види енергетичних рівнів у двоатомній молекулі: електронний, коливальний і обертальний. Якщо коливальне квантове число (n) змінюється на одну одиницю, то обертове квантове число (l) змінюється на одну одиницю

Спектр поглинання для таких переходів у хлористому водні (HCl) показаний на рис. 4.6.

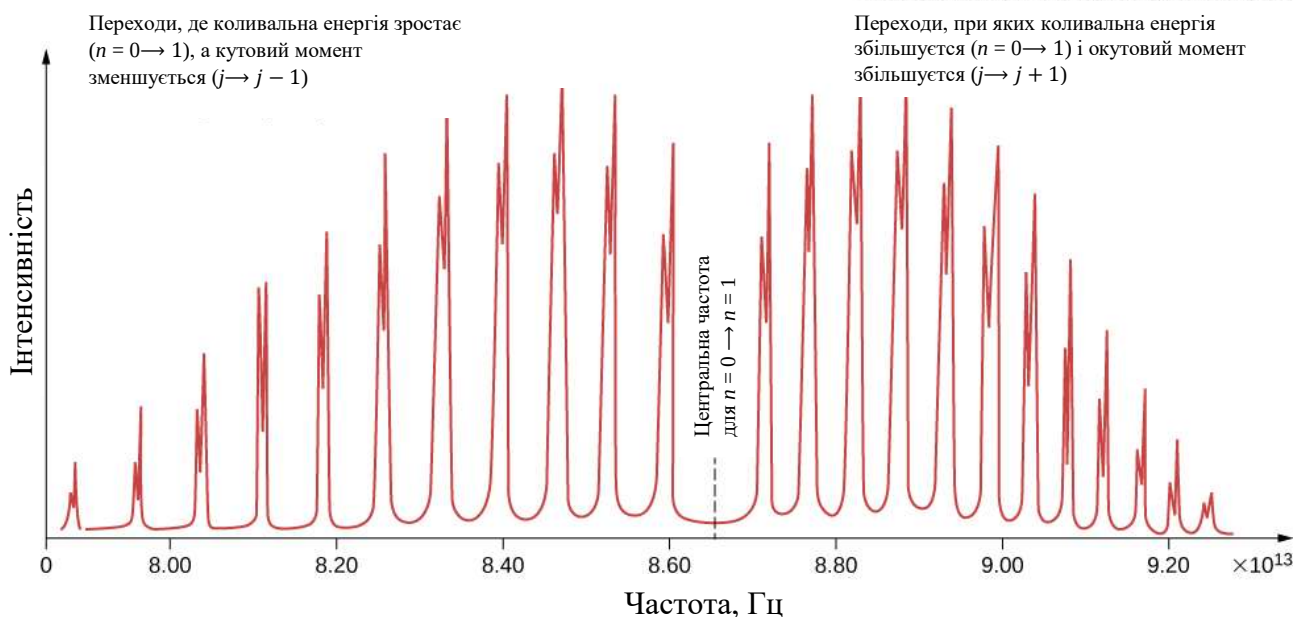


Рис. 4.6. Спектр поглинання хлористого водню (HCl) з вібраційного рівня $n = 0$ до $n = 1$. Дискретні піки вказують на квантування кутового моменту молекули. Смути ліворуч вказують на зменшення моменту імпульсу, тоді як смути справа вказують на його збільшення

Піки поглинання зумовлені переходами від вібраційного стану $n = 0$ до $n = 1$. Різниця в енергії для смути піків ліворуч і праворуч становить, відповідно, для правої смути:

$$\Delta E_{l \rightarrow l+1} = \hbar\omega + 2(l+1)E_{0r} = \hbar\omega + 2E_{0r}, \hbar\omega + 4E_{0r}, \hbar\omega + 6E_{0r}, \dots$$

і лівої смути:

$$\Delta E_{l \rightarrow l-1} = \hbar\omega - 2lE_{0r} = \hbar\omega - 2E_{0r}, \hbar\omega - 4E_{0r}, \hbar\omega - 6E_{0r}, \dots$$

Тоді момент інерції можна визначити за енергетичним інтервалом між окремими піками ($2E_{0r}$) або від проміжку між лівою та правою смугою ($4E_{0r}$). Частота в центрі цього проміжку є частотою вібрації.

Вправи до п. 4.2. Молекулярні спектри

- У фізичній лабораторії ви вимірюєте вібраційно-обертальний спектр HCl. Розрахункова відстань між піками поглинання становить $\Delta f \approx 5,5 \times 10^{11}$ Гц. Центральна частота смути становить $f_0 = 9,0 \times 10^{13}$ Гц. (а) Чому дорівнює момент інерції молекули (I)? (б) Яка енергія коливання молекули?
- Для попередньої задачі знайдіть рівноважну відстань між атомами Н і Cl. Порівняйте це з фактичним значенням.
- Рівноважна відстань між атомами кисню в молекулі O_2 становить близько 0,121 нм. Визначити характерну енергію обертання в еВ.
- Характерна енергія в молекулі N_2 є $2,48 \times 10^{-4}$ еВ. Визначте відстань між атомами азоту.
- Характерна енергія для KCl становить $1,4 \times 10^{-5}$ еВ. (а) Визначити μ для молекули KCl. (б) Знайдіть відстань між атомами К і Cl.
- Двоатомна молекула F_2 знаходиться в стані $l = 1$. а) Яка енергія молекули? (б) Скільки енергії випромінюється при переході від стану $l = 2$ до $l = 1$?

7. У фізичній лабораторії ви вимірюєте вібраційно-обертальний спектр броміду калію (KBr). Розрахункова відстань між піками поглинання становить $\Delta f \approx 5,35 \times 10^{10}$ Гц. Центральна частота смуги становить $f_0 = 8,75 \times 10^{12}$ Гц. (а) Чому дорівнює момент інерції (I)? (б) Яка енергія коливання молекули?

4.3. Зв'язок у кристалічних твердих тілах

Починаючи з цього підрозділу, ми вивчаємо кристалічні тверді тіла, які складаються з атомів, розташованих у регулярній структурі, яку називають **решіткою**. Тверді речовини, які не утворюють або не можуть утворювати кристали, класифікуються як аморфні тверді речовини. Хоча аморфні тверді речовини (наприклад, скло) мають різноманітні цікаві технологічні застосування, у цьому розділі основна увага буде зосереджена на твердих кристалах.

Атоми об'єднуються в решітку, утворюючи кристал, завдяки сумарній силі тяжіння між електронами, що їх утворюють, і атомними ядрами. Кристали, утворені зв'язком атомів, належать до однієї з трьох категорій, класифікованих за їхнім зв'язком: іонний, ковалентний і металевий. Молекули також можуть зв'язуватися разом, утворюючи кристали; ці зв'язки, які тут не обговорюються, класифікуються як молекулярні. На початку двадцятого століття атомна модель твердого тіла була спекулятивною. Тепер ми маємо прямі докази існування атомів у твердих тілах (рис. 4.7).

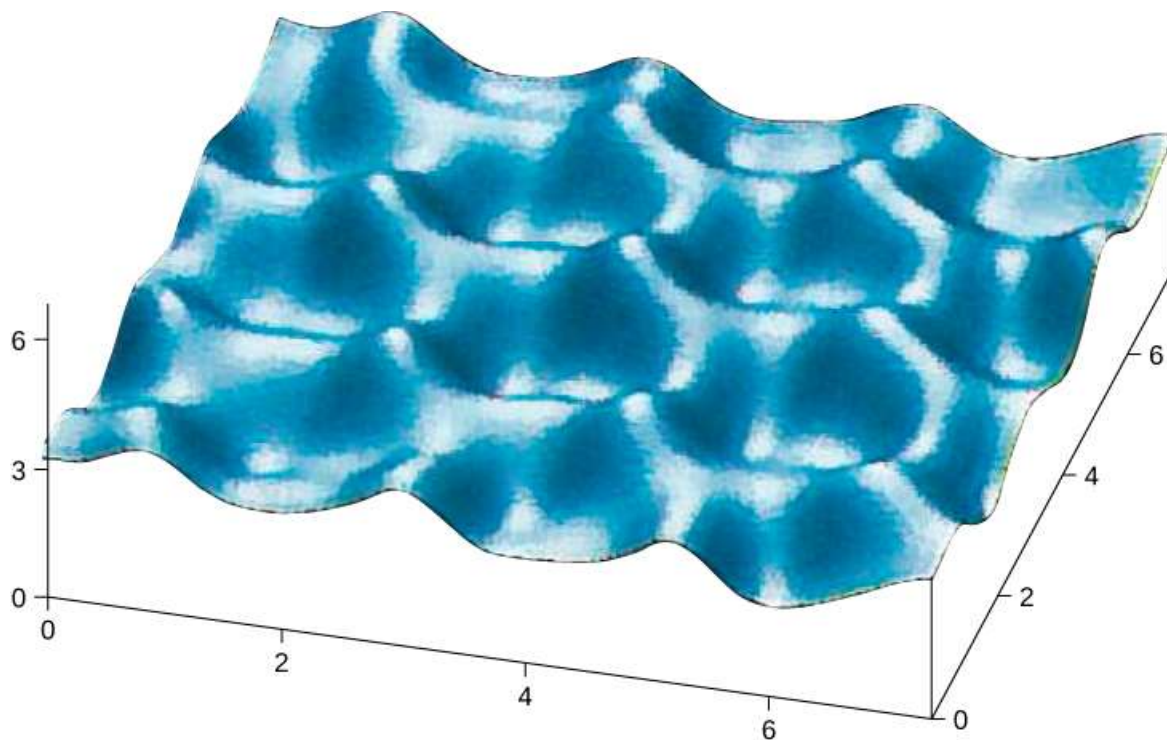


Рис. 4.7. Зображення поверхні графіту, зроблене за допомогою скануючого тунельного мікроскопа. Піки представляють атоми, які розташовані в шестикутниках. Шкала в ангстремах

Іонний зв'язок у твердих тілах

Багато твердих речовин утворюються за рахунок іонного зв'язку. Прототипом є кристал хлориду натрію, про який ми говорили раніше. Електрони переходять від атомів натрію до сусідніх атомів хлору, оскільки валентні електрони в натрію слабо зв'язані, а хлор має велику спорідненість до електронів. Позитивно заряджені іони натрію та негативно заряджені іони хлору організовуються в розширений правильний масив атомів (рис. 4.8).

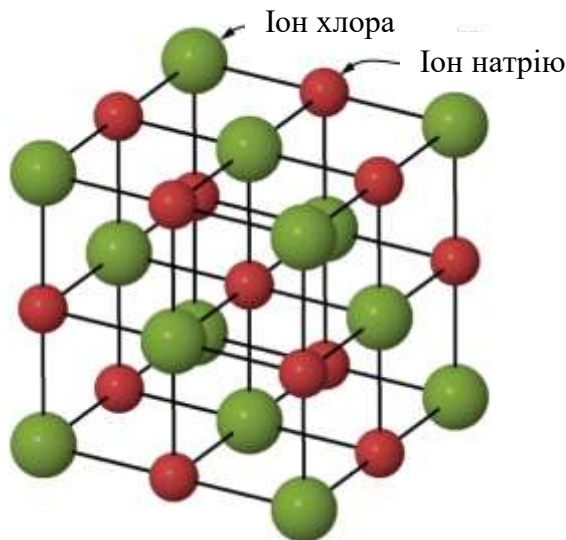


Рис. 4.8. Будова кристала NaCl. Іони натрію та хлору розташовані в гранецентрованій кубічній (ГЦК) структурі

Розподіл зарядів іонів натрію та хлору є сферично симетричним, а діаметр іона хлору приблизно в два рази більший за діаметр іона натрію. Найнижча енергетична структура цих іонів називається **гранецентрованою кубічною (ГЦК)** структурою. У цій структурі кожен іон найближче до шести іонів іншого виду. Елементарною коміркою є куб — атом займає центр і кути кожної «грані» куба. Потенційна енергія притягання Na^+ через поля цих шести іонів Cl^- дорівнює:

$$U_1 = -6 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.14)$$

де знак мінус позначає потенціал притягання (і ми ідентифікуємо $k = 1/4\pi\epsilon_0$). На відстані $\sqrt{2}r$ є його найближчі сусіди: дванадцять іонів Na^+ однакового заряду. Загальна потенційна енергія відштовхування, пов'язана з цими іонами, становить:

$$U_2 = 12 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}r}. \quad (4.15)$$

Наступні найближчі вісім іонів Cl^- на відстані $\sqrt{3}r$ від іона Na^+ . Потенціальна енергія іона Na^+ в полі цих восьми іонів дорівнює:

$$U_3 = -8 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}r}. \quad (4.16)$$

Продовжуючи таким же чином, чергуючи набори Cl^- і Na^+ іонів, ми знаходимо, що сумарна потенційна енергія притягання $U_{\text{кул}}$ одного іону Na^+ можна записати так:

$$U_{\text{кул}} = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.17)$$

де α є сталою Маделунга, введеною раніше. З цього аналізу ми бачимо, що ця константа є нескінченною збіжною сумою:

$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} + \dots \quad (4.18)$$

Віддалені іони роблять значний внесок у цю суму, тому вона сходиться повільно, і для обчислення потрібно використовувати багато членів. Для всіх іонних твердих речовин α становить приблизно 1,75.

Інші можливі схеми упаковки атомів у твердих тілах включають **просту кубічну** та **об'ємно-центровану кубічну (ОЦК)**. Ці три різні структури упаковки твердих тіл порівнюються на рис. 4.9.

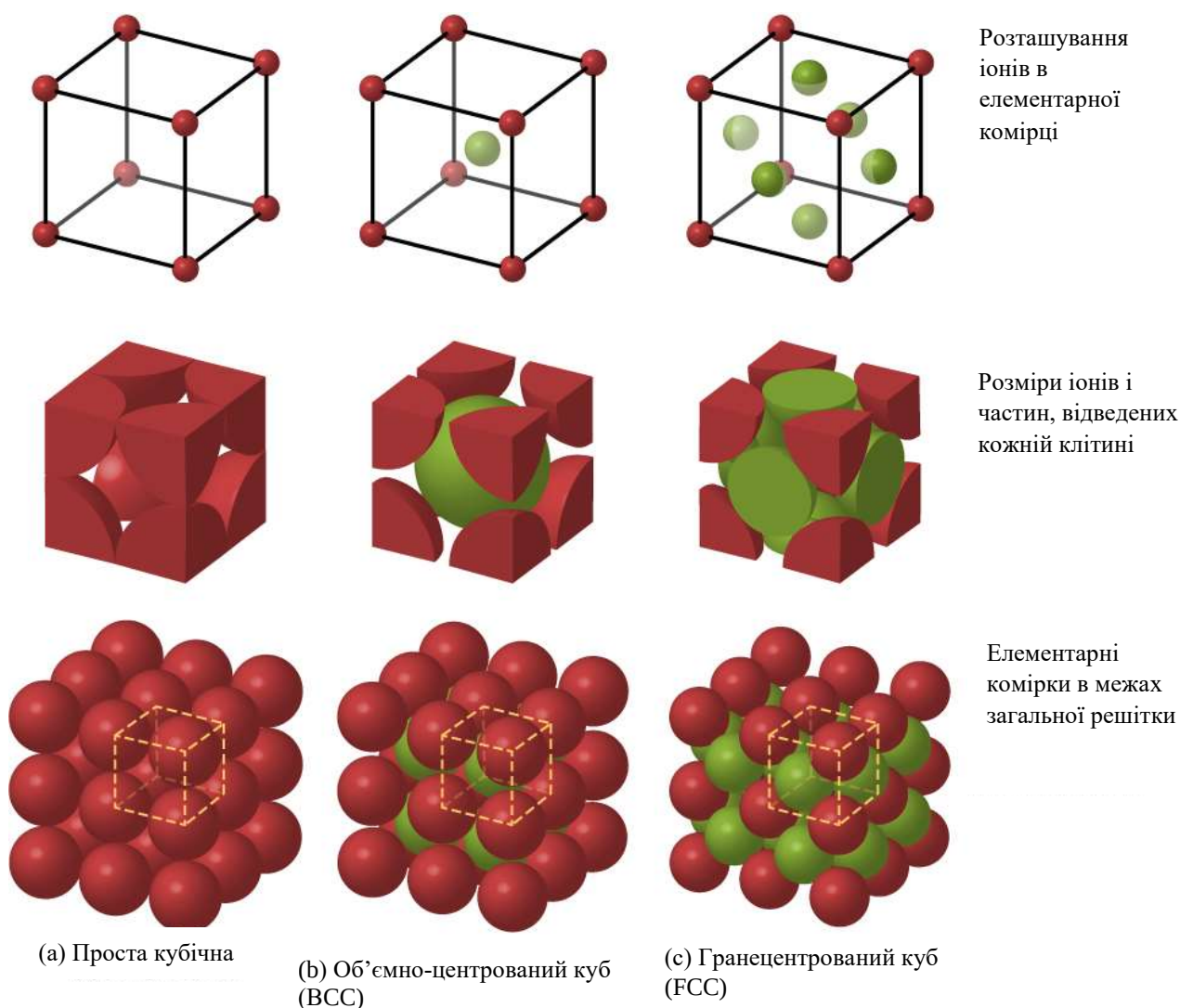


Рис. 4.9. Структури упаковки для твердих тіл зліва направо: (a) проста кубічна, (b) об'ємно-центрована кубічна (BCC) і (c) гранецентрована кубічна (FCC). Кожна кристалічна структура мінімізує енергію системи

Перший рядок представляє розташування, але не розмір іонів; другий рядок вказує на елементарні комірки кожної структури або решітки; а третій рядок представляє розташування та розмір іонів. Структура ВСС має вісім найближчих сусідів із константою Маделунга приблизно 1,76, що лише трохи відрізняється від структури FCC. Визначення постійної Маделунга для конкретних твердих тіл є важкою роботою і є предметом поточних досліджень.

Енергія іонів натрію не повністю зумовлена силами тяжіння між протилежно зарядженими іонами. Якщо іони розташовані занадто близько один до одного, хвильові функції остовних електронів іонів перекриваються, і електрони відштовхуються за принципом виключення. Повна потенційна енергія іона Na^+ є сумою притягального потенціалу Кулона ($U_{\text{кул}}$) і потенціалу відштовхування, пов'язаного з принципом виключення ($U_{\text{відшт}}$). Для обчислення цього потенціалу відштовхування потрібні потужні комп'ютери. Однак, на щастя, цю енергію можна точно описати простою формулою, яка містить настроювані параметри:

$$U_{\text{відшт}} = \frac{A}{r^n}, \quad (4.19)$$

де параметри A і n вибираються так, щоб дати передбачення, узгоджені з експериментальними даними.

Для задачі в кінці цього розділу параметр n називається **константою відштовхування**. Повна потенційна енергія іона Na^+ дорівнює:

$$U = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{A}{r^n}. \quad (4.20)$$

У стані рівноваги на іон не діє сумарна сила, тому відстань між сусідніми іонами Na^+ і Cl^- повинна дорівнювати r_0 , для якого U є мінімумом. Для $dU/dr = 0$, маємо:

$$0 = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} - \frac{nA}{r_0^{n+1}}. \quad (4.21)$$

Звідки

$$A = -\frac{\alpha e^2 r_0^{n-1}}{4\pi\epsilon_0 n}. \quad (4.22)$$

Підставляючи цей вираз у вираз для повної потенціальної енергії маємо:

$$U = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left[\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]. \quad (4.23)$$

Зауважте, що повна потенціальна енергія тепер має лише один регульований параметр n . Параметр A було замінено функцією, що включає r_0 , рівноважну довжину зв'язку, яку можна виміряти за допомогою дифракційного експерименту. Повна потенційна енергія зображена на рис. 4.10 для $n = 8$, наближене значення n для NaCl .

Поки $n > 1$ крива для U має таку ж загальну форму: U наближається до нескінченності коли $r \rightarrow 0$ і U наближається до нуля коли $r \rightarrow \infty$. Мінімальне значення потенціальної енергії визначається формулою:

$$U_{\text{min}}(r = r_0) = -\frac{\alpha e^2}{r_0} \left[1 - \frac{1}{n} \right]. \quad (4.24)$$

Отже, енергія на пару іонів, необхідна для розділення кристала на іони, дорівнює:

$$U_{\text{дис}} = \frac{\alpha e^2}{r_0} \left[1 - \frac{1}{n} \right]. \quad (4.25)$$

Це **енергія дисоціації** твердого тіла. Енергія дисоціації також може бути використана для опису загальної енергії, необхідної для розщеплення моля твердої речовини на складові іони, часто виражається в кДж/моль.

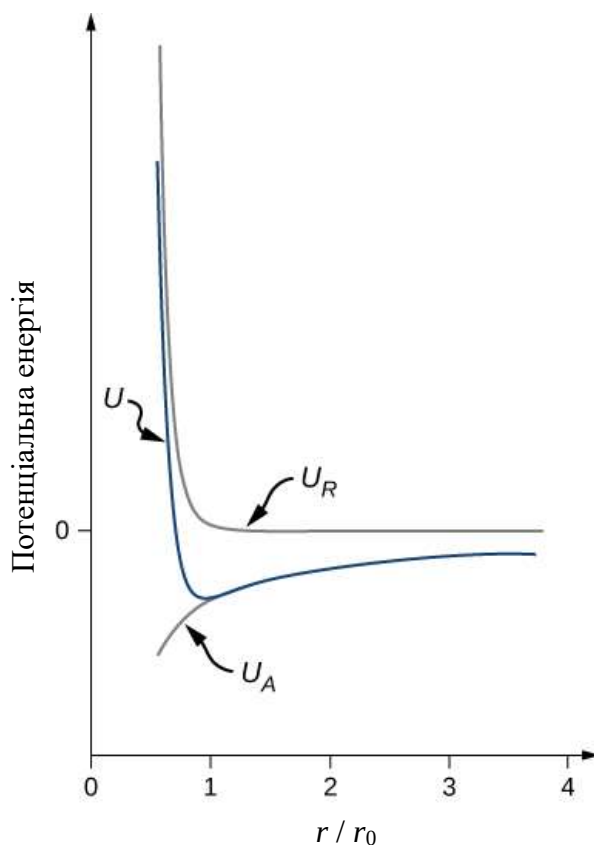


Рис. 4.10. Потенціальна енергія іона натрію в кристалі NaCl для $n = 8$. Рівноважна довжина зв'язку виникає, коли енергія мінімізована

Енергію дисоціації можна визначити експериментально, використовуючи приховану теплоту пароутворення. Зразкові значення наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Енергія решітки для галогенідів лужних металів

	F^-	Cl^-	Br^-	I^-
Li^+	1036	853	807	757
Na^+	923	787	747	704
K^+	821	715	682	649
Rb^+	785	689	660	630
Cs^+	740	659	631	604

Таким чином, ми можемо визначити сталу Маделунга з кристалічної структури та n з енергії решітки. Для NaCl ми маємо $r_0 = 0,281$ нм, $n \approx 8$, і $U_{\text{дис}} = 7,84$ еВ/(іонна пара). Ця енергія дисоціації відносно велика. Найбільш енергійний фотон з видимого спектру, наприклад, має енергію:

$$hf = (4,14 \times 10^{-15} \text{ еВ} \cdot \text{с})(7,5 \times 10^{14} \text{ Гц}) = 3,1 \text{ еВ.}$$

Оскільки іони в кристалах дуже міцно зв'язані, іонні кристали мають такі загальні характеристики:

1. Вони досить жорсткі і стійкі.
2. Вони випаровуються при відносно високих температурах (1000-2000 К).
3. Вони прозорі для видимого випромінювання, оскільки фотони у видимій частині спектру не мають достатньої енергії, щоб збуджувати електрон та переводити його з основного стану у збуджений стан.
4. Вони є поганими електропровідниками, оскільки фактично не містять вільних електронів.
5. Зазвичай вони розчиняються у воді, оскільки молекула води має великий дипольний момент, електричне поле якого достатньо сильне, щоб розірвати електростатичні зв'язки між іонами.

Приклад 4.3. Енергія дисоціації солі

Визначте енергію дисоціації хлориду натрію (NaCl) у кДж/моль. (Підказка: константа відштовхування n NaCl дорівнює приблизно 8.)

Стратегія

Кристал хлориду натрію має рівноважну відстань 0,282 нм. (Порівняйте це значення з 0,236 нм для NaCl). Енергія дисоціації залежить від рівноважної відстані, константи відштовхування та константи Маделунга для FCC структури. Рівноважна відстань залежить, у свою чергу, від молярної маси та вимірної густини. Ми можемо визначити рівноважну відстань, а потім використовувати це значення для визначення енергії дисоціації для одного моля твердої речовини.

Розв'язок

Атомні маси Na і Cl дорівнюють 23,0 у і 35,4 у, тому молярна маса NaCl дорівнює 58,4 г/моль. Густина NaCl становить $2,16 \text{ г/см}^3$. Зв'язок між цими величинами такий:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2N_A r_0^3},$$

де M – маса одного моля солі, N_A – є числом Авогадро, і r_0 рівноважна відстань. Коефіцієнт 2 необхідний, оскільки іони натрію та хлориду мають кубічний об'єм r_0^3 . Розв'язуючи рівняння відносно відстані, отримуємо:

$$r_0^3 = \frac{M}{2N_A \rho} = \frac{58,4 \text{ г/моль}}{2(6,02 \times 10^{23})(2,160 \text{ г/см}^3)} = 2,23 \times 10^{-23} \text{ см}^3,$$

або

$$r_0 = 2,80 \times 10^{-8} \text{ см} = 0,280 \text{ нм.}$$

Потенціальна енергія однієї іонної пари (Na^+Cl^-) дорівнює:

$$U = -\frac{\alpha k e^2}{r_0} \left[1 - \frac{1}{n} \right],$$

де α – постійна Маделунга, r_0 – рівноважна відстань, а n константа відштовхування. NaCl є FCC, отже константа Маделунга $\alpha = 1,7476$. Підставивши ці значення, отримаємо:

$$U = -1,75 \frac{1,44 \text{ eV} \cdot \text{нм}}{0,280 \text{ нм}} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = -7,88 \frac{\text{eV}}{\text{іонна пара}}.$$

Отже, енергія дисоціації одного моля хлориду натрію дорівнює:

$$D = \left(7,88 \frac{\text{eV}}{\text{іонна пара}} \right) \left(\frac{\frac{23 \text{ ккал}}{1 \text{ моль}}}{\frac{1 \text{ eV}}{1 \text{ іонна пар}}} \right) = \frac{182 \text{ ккал}}{\text{моль}} = 766 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}.$$

Обговорення

Це теоретичне значення енергії дисоціації 766 кДж/моль близьке до прийнятого експериментального значення 787 кДж/моль. Зверніть увагу, що для більшої густини рівноважна відстань між парами іонів менша, як і очікувалося. Ця невелика рівноважна відстань збільшує силу між іонами і, отже, енергію дисоціації. Перетворення в кінці рівняння враховує коефіцієнт перетворення 1 кДж = 0,239 ккал.

Перевірте своє розуміння 4.3

Якби енергія дисоціації була більшою, чи було б легше чи складніше розбити тверду речовину?

Ковалентний зв'язок у твердих тілах

Кристали також можуть утворюватися шляхом ковалентного зв'язку. Наприклад, ковалентні зв'язки відповідають за утримання атомів вуглецю разом у кристалах алмазу. Електронна конфігурація атома Карбону така $1s^2 2s^2 2p^2$ — ядро He плюс чотири валентні електрони. У цій електронній конфігурації на чотири електрони менше повної оболонки, тому, якщо розділити ці чотири електрони з іншими атомами вуглецю в ковалентному зв'язку, оболонки всіх атомів вуглецю заповнюються. Алмаз має більш складну структуру, ніж більшість іонних кристалів (рис. 4.11). Кожен атом Карбону є центром правильного тетраедра, а кут між зв'язками дорівнює 110° . Цей кут є прямим наслідком спрямованості p -орбіталей атомів вуглецю.

Кристали з ковалентним зв'язком не такі однорідні, як іонні кристали, але досить тверді, важко розплавляються та нерозчинні у воді. Наприклад, алмаз має надзвичайно високу температуру плавлення (4000 K) і прозорий для видимого світла. Для порівняння, ковалентно зв'язане олово (також відоме як альфа-олово, яке є неметалом) є відносно м'яким, плавиться при 600 K і відбиває видиме світло. Двома іншими важливими прикладами кристалів з ковалентним зв'язком

є кремній і германій. Обидва ці тверді речовини широко використовуються у виробництві діодів, транзисторів та інтегральних схем. Ми повернемося до цих матеріалів пізніше в нашому обговоренні напівпровідників.

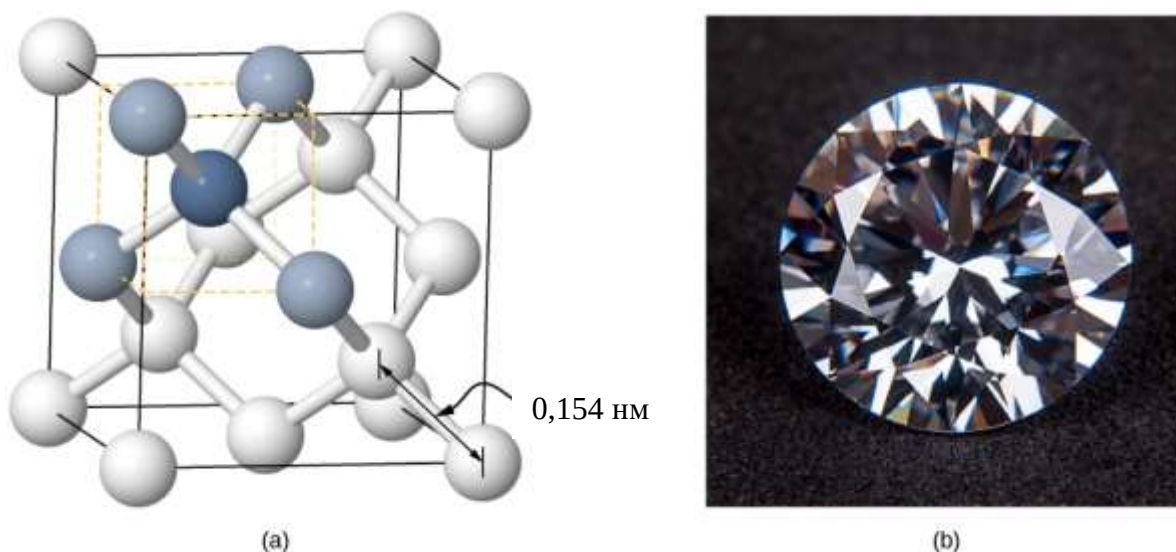


Рис. 4.11. Будова кристала алмазу. (а) Один атом вуглецю, представлений темно-синьою сферою, ковалентно зв'язаний з чотирма атомами вуглецю, представленими світло-блакитними сферами. (б) Алмази дорогоцінної якості можна розколувати вздовж гладких площин, що дає велику кількість кутів, які спричиняють повне внутрішнє відбиття падаючого світла, і таким чином надає діамантам їх цінного блиску

Металевий зв'язок у твердих тілах

Як впливає з назви, металеві зв'язки відповідають за утворення металевих кристалів. Валентні електрони по суті вільні від атомів і здатні відносно легко переміщатися по всьому металевому кристалу. Зв'язок виникає завдяки силам тяжіння між позитивними іонами та електронами провідності. Металеві зв'язки слабкіші, ніж іонні або ковалентні, з енергією дисоціації в діапазоні 1 – 3 еВ.

Вправи до п. 4.3. Зв'язок у кристалічних твердих тілах

1. Кристалічна структура CsI — ВСС. Рівноважна відстань становить приблизно $r_0 = 0,46$ нм. Якщо іон Cs^+ займає кубічний об'єм r_0^3 , яка відстань цього іона до його «найближчого сусіда» — іона I^- ?
2. Потенціальна енергія кристала дорівнює $-8,10$ еВ/іонна пара. Знайти енергію дисоціації для чотирьох молей кристала.
3. Виміряна густина кристала NaF становить $2,558$ г/см³. Чому дорівнює рівноважна роздільна відстань між іонами Na^+ та F^- ?
4. Яке значення константи відштовхування n дає виміряну енергію дисоціації 221 ккал/моль для NaF?
5. Визначте енергію дисоціації 12 молей хлориду натрію (NaCl). (Підказка: константа відштовхування n дорівнює приблизно 8)

6. Виміряна густина кристала KCl дорівнює $1,984 \text{ г/см}^3$. Чому дорівнює рівноважна відстань між іонами K^+ і Cl^- ?
7. Яке значення константи відштовхування n дає виміряну енергію дисоціації 171 ккал/моль для KCl?
8. Виміряна густина кристала CsCl становить $3,988 \text{ г/см}^3$. Чому дорівнює рівноважна роздільна відстань між іонами Cs^+ і Cl^- ?

4.4. Модель металів з вільними електронами

Метали, такі як мідь і алюміній, утримуються разом зв'язками, які дуже відрізняються від зв'язків між молекулами. Замість того, щоб ділитися та обмінюватися електронами, метал, по суті, утримується разом системою вільних електронів, які блукають по всьому твердому тілу. Найпростішою моделлю металу є **модель вільного електрона**. Ця модель розглядає електрони як газ. Спочатку ми розглянемо простий одновимірний випадок, коли електрони вільно рухаються вздовж лінії, наприклад, через дуже тонкий металевий стрижень. Потенціальна функція $U(x)$ для цього випадку є одновимірною нескінченною квадратною ямою, де стінки ями відповідають торцям стрижня. Ця модель ігнорує взаємодію між електронами, але дотримується принципу виключення. Для окремого випадку $T = 0 \text{ К}$, N електронів заповнюють енергетичні рівні, від найнижчого до найвищого, по два разом (спін обернений вгору та вниз), доки не буде заповнено найвищий енергетичний рівень. Найвищу наповнену енергію називають **енергією Фермі**.

Одновимірну модель вільного електрона можна покращити, розглянувши тривимірний випадок: електрони вільно рухаються в тривимірному металевому блоці. Ця система моделюється тривимірною нескінченною ямою. Визначення дозволених енергетичних станів вимагає розв'язання рівняння Шредінгера, незалежного від часу:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z), \quad (4.26)$$

де ми припускаємо, що потенційна енергія всередині ями дорівнює нулю, а в іншому випадку нескінченна. Дозволені хвильові функції, що описують квантові стани електрона, можна записати так:

$$\psi(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin \frac{n_y \pi y}{L_y} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin \frac{n_z \pi z}{L_z} \right), \quad (4.27)$$

де n_x , n_y , і n_z додатні цілі числа, що представляють квантові числа, які відповідають руху в x -, y - і z -напрявках, відповідно, і L_x , L_y , і L_z – це розміри коробки в цих напрямках. Рівняння 4.27 є добутком трьох одновимірних хвильових функцій. Дозволені енергії електрона в кубі ($L = L_x = L_y = L_z$) є такими:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (4.28)$$

Енергії пов'язані з кожним набором квантових чисел (n_x , n_y , n_z) є двома квантовими станами, спіном вгору та спіном вниз. У реальному матеріалі кількість заповнених станів величезна. Наприклад, в кубічному сантиметрі

металу це число становить порядку 10^{22} . Підрахувати, скільки частинок у якому стані знаходиться, є важкою роботою, яка часто потребує допомоги потужного комп'ютера. Однак зусилля варті того, оскільки ця інформація часто є ефективним способом перевірки моделі.

Приклад 4.4. Енергія металевго куба

Розглянемо твердий металевий куб із довжиною ребра 2,0 см. (а) Який найнижчий рівень енергії для електрона в металі? (б) Яка відстань між цим рівнем і наступним енергетичним рівнем?

Стратегія

Електрон у металі можна моделювати як хвилю. Найменша енергія відповідає найбільшій довжині хвилі та найменшому квантовому числу: $n_x, n_y, n_z = (1, 1, 1)$. Рівняння 4.28 забезпечує це значення енергії «основного стану». Оскільки енергія електрона зростає разом із квантовим числом, наступний найвищий рівень передбачає найменше збільшення квантових чисел, або $(n_x, n_y, n_z) = (2, 1, 1)$, або $(1, 1, 2)$.

Розв'язок

Найнижчий енергетичний рівень відповідає квантовим числам $n_x, n_y, n_z = 1$. З рівняння 4.28 енергія цього рівня дорівнює:

$$E(1, 1, 1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (1^2 + 1^2 + 1^2) = \frac{3\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})^2}{2(9,11 \times 10^{-31} \text{ кг})(2 \times 10^{-2} \text{ м})^2} = 4,48 \times 10^{-34} \text{ Дж} = 2,8 \times 10^{-15} \text{ еВ}.$$

Наступний вищий енергетичний рівень досягається шляхом збільшення будь-якого з трьох квантових чисел на 1. Отже, фактично існує три квантові стани з однаковою енергією. Припустимо, ми збільшуємо n_x на 1. Тоді енергія стає рівною:

$$E(2, 1, 1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (2^2 + 1^2 + 1^2) = \frac{6\pi^2 (1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})^2}{2(9,11 \times 10^{-31} \text{ кг})(2 \times 10^{-2} \text{ м})^2} = 8,96 \times 10^{-34} \text{ Дж} = 5,6 \times 10^{-15} \text{ еВ}.$$

Таким чином, енергетичний інтервал між найнижчим енергетичним станом і наступним за ним найвищим енергетичним станом дорівнює:

$$E(2, 1, 1) - E(1, 1, 1) = 2,8 \times 10^{-15} \text{ еВ}.$$

Обговорення

Це дуже мала різниця в енергії. Порівняйте це значення із середньою кінетичною енергією частинки, $k_B T$, де k_B – постійна Больцмана, а T – температура. Величина $k_B T$ приблизно в 1000 разів перевищує енергетичну відстань між рівнями енергії.

Перевірте своє розуміння 4.4

Що відбувається з енергією основного стану електрона, якщо розміри твердого тіла збільшуються?

Часто нас цікавить не загальна кількість частинок у всіх станах, а кількість частинок dN з енергіями E у вузькому інтервалі енергій dE . Це значення можна виразити так:

$$dN = n(E)dE = g(E)dE \cdot F,$$

де $n(E)$ – **густина електронів**, або кількість електронів в одиниці об'єму; $g(E)$ – **густина станів**, або кількість дозволених квантових станів на одиницю енергії; dE – розмір енергетичного інтервалу; F – фактор **Фермі**. Фактор Фермі – це ймовірність того, що стан буде заповнений. Наприклад, якщо $g(E)dE$ — це 100 доступних станів, а F — лише 5%, то кількість частинок у цьому вузькому інтервалі енергії становить лише п'ять. Знаходження $g(E)$ вимагає розв'язання рівняння Шредінгера (у трьох вимірах) для дозволених рівнів енергії. Розрахунок використовується навіть для грубої моделі, але результат простий:

$$g(E) = \frac{\pi V}{2} \left(\frac{8m_e}{h^2} \right)^{3/2} E^{1/2}, \quad (4.29)$$

де V – об'єм твердої речовини, m_e – маса електрона, E – енергія стану. Зауважте, що густина станів зростає разом із коренем квадратним з енергії. При високій енергії доступно більше станів, ніж при низькій. Цей вираз надає інформацію *не* про густину електронів у фізичному просторі, а скоріше про густину рівнів енергії в «енергетичному просторі». Наприклад, у нашому дослідженні атомної структури ми дізналися, що енергетичні рівні атома водню рознесені набагато ширше для малих значень енергії (біля основного стану), ніж для більших значень.

Це рівняння говорить нам, скільки електронних станів доступно в тривимірному металевому твердому тілі. Однак це не говорить нам, наскільки ймовірно ці стани будуть заповнені. Таким чином, нам потрібно визначити фактор Фермі F . Розглянемо простий випадок $T = 0$ К. З класичної фізики ми очікуємо, що всі електрони ($\sim 10^{22}/\text{см}^3$) просто перейдуть в основний стан, щоб досягти найменшої можливої енергії. Однак це порушує *принцип виключення Паулі*, який стверджує, що два електрони не можуть перебувати в однаковому квантовому стані. Отже, коли ми починаємо заповнювати стани електронами, спочатку заповнюються стани з найменшою енергією, а потім стани з більшою енергією. Останній електрон, який ми вводимо, має найбільшу енергію. Ця енергія є енергією Фермі E_F вільного електронного газу. Стан з енергією $E < E_F$ займає один електрон і стан з енергією $E > E_F$ є незайнятим. Щоб описати це в термінах ймовірності $F(E)$, що енергетичний стан E зайнятий, ми пишемо для $T = 0$ К:

$$\begin{aligned} F(E) &= 1 \quad (E < E_F) \\ F(E) &= 0 \quad (E > E_F). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Густина станів, фактор Фермі та густина електронів відображені в залежності від енергії на рис. 4.12.

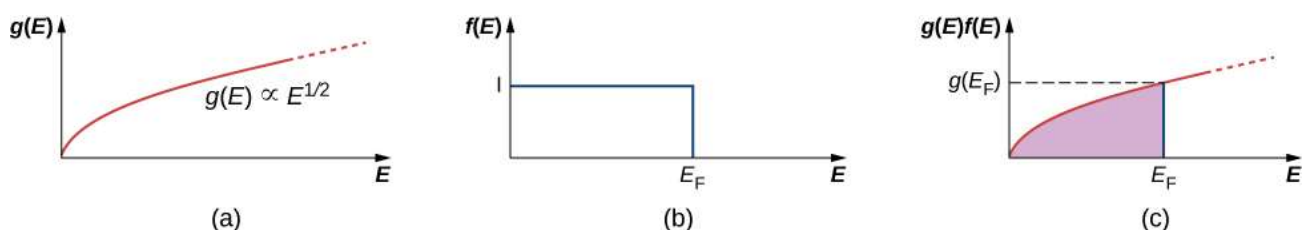


Рис. 4.12. (а) Густина станів для вільного електронного газу; (б) ймовірність того, що стан зайнятий, коли $T = 0\text{K}$; (с) густина зайнятих станів при $T = 0\text{K}$

Кілька приміток по порядку. По-перше, розподіл густини електронів (останній рядок) різко падає при енергії Фермі. Згідно з теорією, ця енергія дорівнює:

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}. \quad (4.31)$$

Енергії Фермі для вибраних матеріалів наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Густини електронів провідності та енергії Фермі для деяких металів

Елемент	Електронна густина зони провідності (10^{28}м^{-3})	Модель вільного електрона. Енергія Фермі (eV)
Al	18,1	11,7
Ba	3,15	3,64
Cu	8,47	7,00
Au	5,90	5,53
Fe	17,0	11,1
Ag	5,86	5,49

Зауважте також, що лише графік у частині (с) малюнка, який відповідає на запитання «Скільки частинок знайдено в діапазоні енергій?» перевіряється дослідним шляхом. **Температура Фермі** або ефективна «температура» електрона при енергії Фермі дорівнює:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}. \quad (4.32)$$

Приклад 4.5. Енергія Фермі срібла

Металеve срібло є прекрасним провідником: $5,86 \times 10^{28}$ електронів провідності на кубічний метр. (а) Обчисліть його енергію Фермі. (б) Порівняйте цю енергію з тепловою енергією $k_B T$ електронів при кімнатній температурі 300 К.

Розв'язок

(а) З рівняння 4.31 енергія Фермі дорівнює:

$$E_F = \frac{h^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} = \frac{(1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с})^2}{2(9,11 \times 10^{-31} \text{ кг})} \times [3\pi^2 (5,86 \times 10^{28} \text{ м}^{-3})]^{2/3} = 8,79 \times 10^{-19} \text{ Дж} = 5,49 \text{ еВ},$$

тобто типове значення енергії Фермі для металів, як видно з табл. 4.3.

(б) Ми можемо пов'язати температуру Фермі T_F з енергією Фермі шляхом запису $k_B T_F = E_F$. Звідси знаходимо температуру Фермі:

$$T_F = \frac{8,79 \times 10^{-19} \text{ Дж}}{1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}} = 6,37 \times 10^4 \text{ К},$$

яка набагато вища за кімнатну температуру, а також типову температуру плавлення ($\sim 10^3 \text{ К}$) металу. Відношення енергії Фермі срібла до теплової енергії кімнатної температури становить:

$$\frac{E_F}{k_B T} = \frac{T_F}{T} \approx 210.$$

Щоб візуалізувати, як заповнюються квантові стани, ми можемо уявити, як повільно наливаємо воду в склянку, як на рис. 4.13.



Рис. 4.13. Аналогія того, як електрони заповнюють енергетичні стани в металі. Коли електрони заповнюють енергетичні стани, від найнижчого до найвищого, кількість доступних станів збільшується. Найвищим енергетичним станом (відповідним ватерлінії) є енергія Фермі

Перші краплі води (електрони) займають дно склянки (стани з найменшою енергією). Під час підвищення рівня займаються стани все вищої і вищої енергії. Крім того, оскільки склянка має широкий отвір і вузьку ніжку, більше води займає верхню частину склянки, ніж нижню. Це відображає той факт, що густина станів $g(E)$ пропорційна $E^{1/2}$, тому у вільному електронному газі є відносно велика кількість електронів з вищою енергією. Нарешті, рівень, до якого заповнюється склянка, відповідає енергії Фермі.

Припустимо, що при $T = 0 \text{ К}$, кількість електронів провідності на одиницю об'єму в нашому зразку становить n_i . Оскільки кожен стан має один електрон,

кількість заповнених станів на одиницю об'єму дорівнює кількості електронів на одиницю об'єму.

Вправи до п. 4.4. Модель металів з вільними електронами

1. Яка різниця в енергії між станами $n_x = n_y = n_z = 4$ і станами із наступною вищою енергією? Яка у відсотках зміна енергії між станами $n_x = n_y = n_z = 4$ і станами із наступною вищою енергією? (б) Порівняйте це з різницею в енергії та відсотковою зміною енергії між станами $n_x = n_y = n_z = 400$ і станами із наступною вищою енергією.
2. Електрон обмежений металевим кубом $l = 0,8\text{ см}$ з кожного боку. Визначити густину станів при (а) $E = 0,80\text{ еВ}$; (б) $E = 2,2\text{ еВ}$; і (в) $E = 5,0\text{ еВ}$.
3. Яке значення енергії відповідає густині станів $1,10 \times 10^{24} \text{ еВ}^{-1}$?
4. Порівняйте густину станів при $2,5\text{ еВ}$ і $0,25\text{ еВ}$.
5. Розглянемо мідний куб із ребрами довжиною $1,50\text{ мм}$. Оцініть кількість квантових станів електрона в цьому кубі, енергія якого знаходиться в діапазоні від $3,75$ до $3,77\text{ еВ}$.
6. Якщо на атом міді припадає один вільний електрон, то яка електронна густина цього металу?
7. Визначити енергію Фермі та температуру для міді при $T = 0\text{ К}$.

4.5. Зонна теорія твердих тіл

Модель вільного електрона пояснює багато важливих властивостей провідників, але є слабкою принаймні у двох областях. По-перше, вона передбачає постійну потенціальну енергію в твердому тілі. (Пам'ятайте, що постійна потенціальна енергія не пов'язана з відсутністю сил). На рис. 4.14 порівнюється припущення про постійну потенціальну енергію (пунктирна лінія) з періодичним кулонівським потенціалом, який падає як $-1/r$ в кожній точці решітки, де r — відстань від ядра іона (суцільна лінія).

По-друге, модель вільного електрона передбачає непроникний бар'єр на поверхні. Це припущення невірне, оскільки за певних умов електрони можуть вийти з поверхні, наприклад, у фотоелектричному ефекті. На додаток до цих припущень, модель вільного електрона не пояснює різких відмінностей в електронних властивостях провідників, напівпровідників та ізоляторів. Тому потрібна більш повна модель.

Ми можемо створити покращену модель, розв'язавши рівняння Шредінгера для періодичного потенціалу, показаного на рис. 4.14. Однак розв'язок потребує математики, що виходить за межі наших можливостей. Ми знову шукаємо якісний аргумент, заснований на квантовій механіці, щоб знайти шлях вперед.

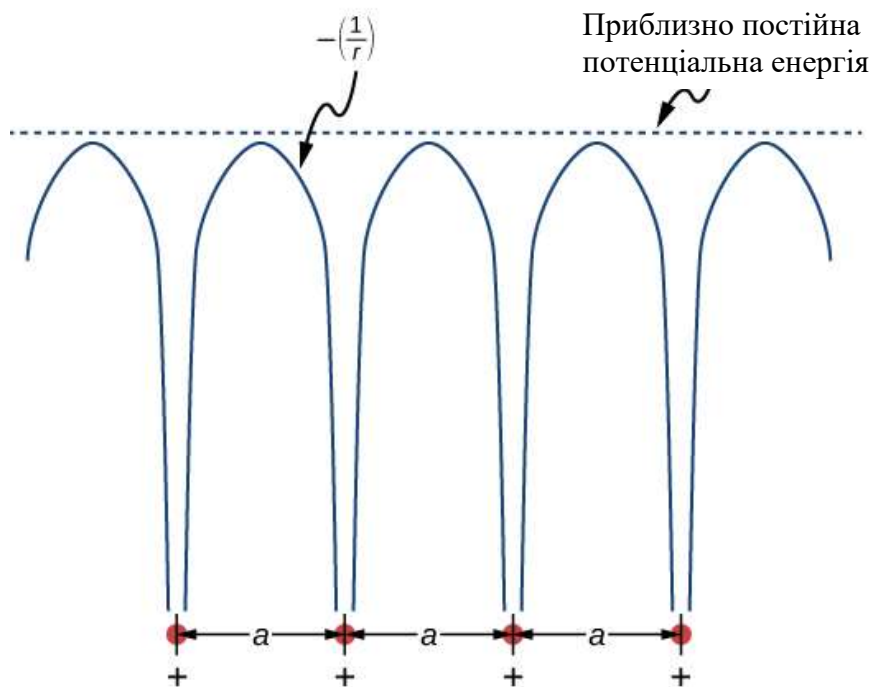


Рис. 4.14. Періодичний потенціал, який використовується для моделювання електронів у провіднику. Кожен іон у твердому тілі є джерелом кулонівського потенціалу. Зауважте, що модель вільного електрона є продуктивною, оскільки середнє значення цього поля є приблизно постійним

Спочатку ми розглянемо аргумент, використаний для пояснення енергетичної структури ковалентного зв'язку. Розглянемо два ідентичних атома водню настільки далеко один від одного, що між ними немає ніякої взаємодії. Далі припустимо, що електрон у кожному атомі знаходиться в тому самому основному стані: 1 s електрон з енергією $-13,6$ eV (ігноруємо обертання). Коли атоми водню наближаються один до одного, окремі хвильові функції електронів перекриваються і, згідно з принципом виключення, більше не можуть перебувати в тому самому квантовому стані, що розділяє вихідні еквівалентні енергетичні рівні на два різних енергетичних рівня. Енергії цих рівнів залежать від міжатомної відстані, a (рис. 4.15).

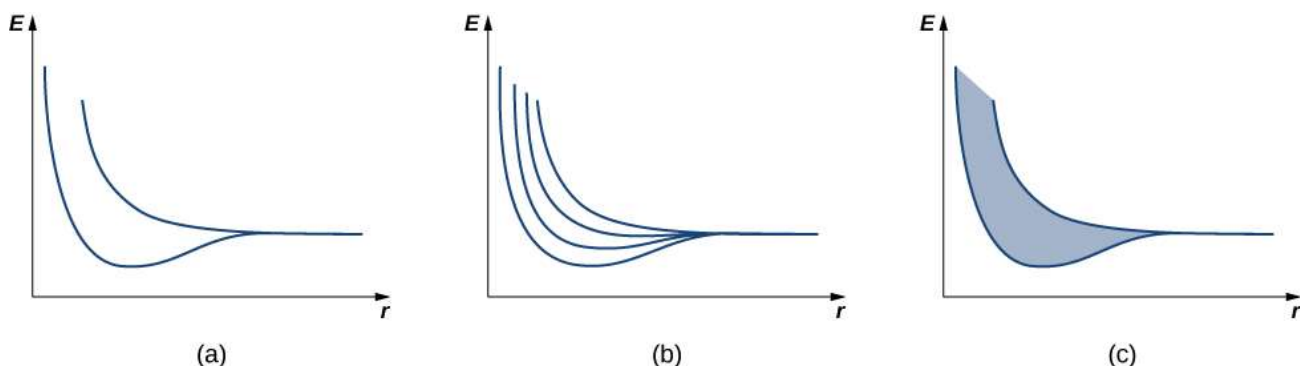


Рис. 4.15. Залежність розщеплення рівня енергії від середньої відстані між (а) двома атомами, (б) чотирма атомами і (в) великою кількістю атомів. Для великої кількості електронів утворюється безперервна смуга енергій

Якщо об'єднати чотири атоми водню, утвориться чотири рівні з чотирьох можливих симетрій — єдиний «горб» синусоїди в кожній лунці, що чергується вгору та вниз, і так далі. У межах дуже великої кількості N атомів ми очікуємо поширення майже безперервних смуг електронних енергетичних рівнів у твердому тілі (див. рис. 4.15 (с)). Кожна з цих смуг відома як **енергетична смуга**. (Дозволені стани енергії та хвильового числа все ще технічно квантовані, але для великої кількості атомів ці стани настільки близькі один до одного, що їх вважають безперервними або «в континуумі»).

Енергетичні зони відрізняються кількістю електронів, які вони утримують. У енергетичних смугах $1s$ і $2s$ кожен енергетичний рівень утримує до двох електронів (спін вгору та спін вниз), тому ця смуга має максимальне заповнення $2N$ електронів. У енергетичній смузі $2p$ кожен енергетичний рівень містить до шести електронів, тому ця смуга має максимальне заповнення $6N$ електронів (рис. 4.16).

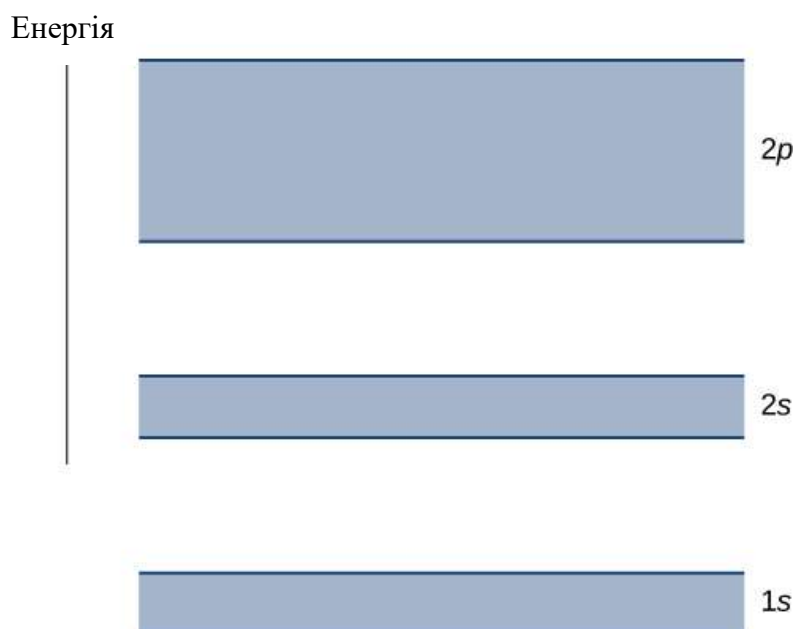


Рис. 4.16. Просте зображення енергетичної структури твердого тіла. Електрони належать до енергетичних зон, розділених енергетичними проміжками

Кожна смуга енергії відокремлена від іншої **енергетичним проміжком**. Електричні властивості провідників та ізоляторів можна зрозуміти з точки зору енергетичних зон і проміжків. Найвища заповнена енергетична зона відома як **валентна зона**. Наступна доступна зона в енергетичній структурі відома як **зона провідності**. У провіднику найвища енергетична зона, яка містить електрони, заповнена частково, тоді як в ізоляторі найвища енергетична зона, що містить електрони, заповнена повністю. Різницю між провідником і ізолятором показано на рис. 4.17.

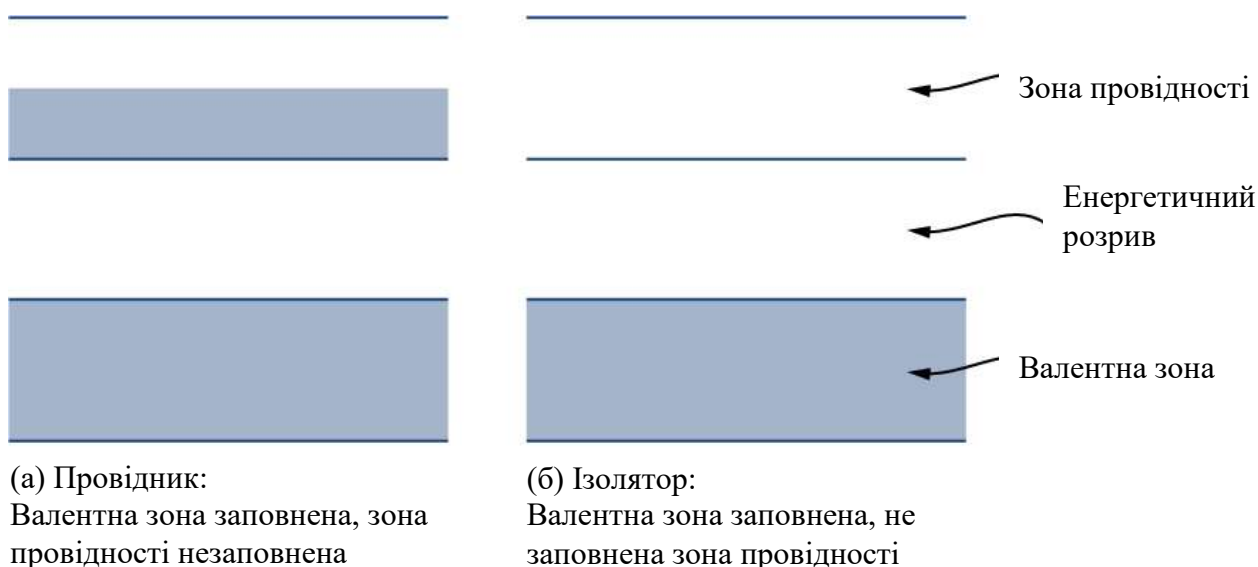


Рис. 4.17. Порівняння провідника та ізолятора. Найвища енергетична зона частково заповнена в провіднику, але повністю заповнена в ізоляторі

Провідник відрізняється від ізолятора тим, як його електрони реагують на прикладене електричне поле. Якщо поле приводить в рух значну кількість електронів, матеріал є провідником. З точки зору зонної моделі, електрони в частково заповненій зоні провідності отримують кінетичну енергію від електричного поля, заповнюючи стани з вищою енергією в зоні провідності. Навпаки, в ізоляторі електрони належать до повністю заповнених зон. Коли поле прикладено, електрони не можуть здійснювати такі переходи (набувати кінетичної енергії від електричного поля) через принцип виключення. В результаті матеріал не проводить електрику.

Напівпровідник має енергетичну структуру, подібну до ізолятора, за винятком відносно невеликого енергетичного проміжку між найнижчою повністю заповненою зоною та наступною доступною незаповненою зоною. Цей тип матеріалу є основою сучасної електроніки. Коли $T = 0 \text{ K}$, напівпровідник і ізолятор мають повністю заповнені зони. Єдина відмінність полягає в розмірі енергетичної щілини (або *забороненої зони*) E_g між найвищою заповненою енергетичною зоною (валентною зоною) і наступною вищою порожньою зоною (зоною провідності). У напівпровіднику цей зазор достатньо малий, щоб значна кількість електронів із валентної зони термічно збуджувалася в зону провідності при кімнатній температурі. Тоді ці електрони перебувають у майже порожній зоні й можуть реагувати на прикладене поле. Як правило, ширина забороненої зони напівпровідника становить близько 1 еВ (табл. 4.4 для кремнію). Ширина забороненої зони більше 1 еВ вважається ізолятором. Для порівняння, енергетична щілина алмазу (діелектрика) становить кілька електрон-вольт.

Ширина забороненої зони різних матеріалів при 300 К

Матеріал	E_g (eV)
Si	1,14
Ge	0,67
GaAs	1,43
GaP	2,26
GaSb	0,69
InAs	0,35
InP	1,35
InSb	0,16
C (діамант)	5,48

Примітка: за винятком алмазу, всі перелічені матеріали є напівпровідниками.

Вправи до п. 4.5. Зонна теорія твердих тіл

1. Для одновимірного кристала запишіть відстань (a) через довжину хвилі електрона.
2. У чому головна відмінність ізолятора від напівпровідника?
3. Яка найбільша довжина хвилі для фотона, який може перевести валентний електрон у зону провідності через енергетичну щілину 0,80 eV?
4. Валентний електрон у кристалі поглинає фотон з довжиною хвилі $\lambda = 0,300$ нм. Цієї енергії якраз достатньо, щоб дозволити електрону перейти з валентної зони в зону провідності. Який розмір енергетичної щілини?

4.6. Напівпровідники та легування

У попередньому розділі ми розглядали лише внесок в електричний струм за рахунок електронів, що займають стани в зоні провідності. Однак переміщення електрона з валентної зони в зону провідності залишає незайнятий стан або **дірку** в енергетичній структурі валентної зони, в яку може переміститися сусідній електрон. Коли ці дірки заповнюються іншими електронами, створюються нові дірки. Електричний струм, пов'язаний із цим

заповненням, можна розглядати як колективний рух багатьох негативно заряджених електронів або рух позитивно заряджених електронних дірок. Для ілюстрації розглянемо одновимірну решітку на рис. 4.18.

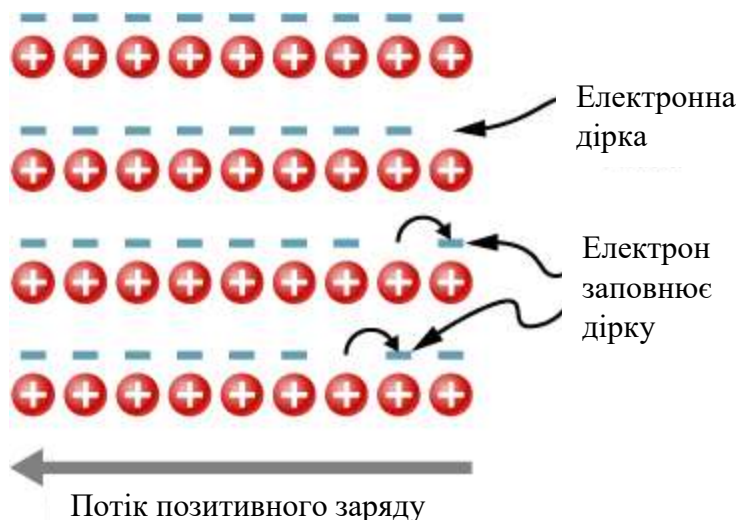


Рис. 4.18. Рух дірок у кристалічній решітці. Коли електрони зміщуються вправо, електронна дірка переміщується вліво

Припустимо, що кожен атом решітки вносить один валентний електрон в струм. Коли дірка праворуч заповнюється, ця дірка переміщується ліворуч. Струм можна інтерпретувати як потік позитивного заряду вліво. Густина дірок або кількість дірок на одиницю об'єму позначається як p . Кожен електрон, який переходить у зону провідності, залишає за собою дірку. Якщо спочатку зона провідності порожня, то густина електронів провідності p дорівнює густині дірок, тобто $n = p$.

Як згадувалося, напівпровідник — це матеріал із заповненою валентною зоною, незаповненою зоною провідності та відносно малим енергетичним зазором між зонами. Надлишок електронів або дірок можна ввести в матеріал шляхом заміщення в кристалічній решітці атома **домішкою**, яка є атомом з дещо іншим числом валентності. Цей процес відомий як **легування**. Наприклад, припустимо, що ми додаємо атом миш'яку до кристала кремнію (рис. 4.19 (а)).

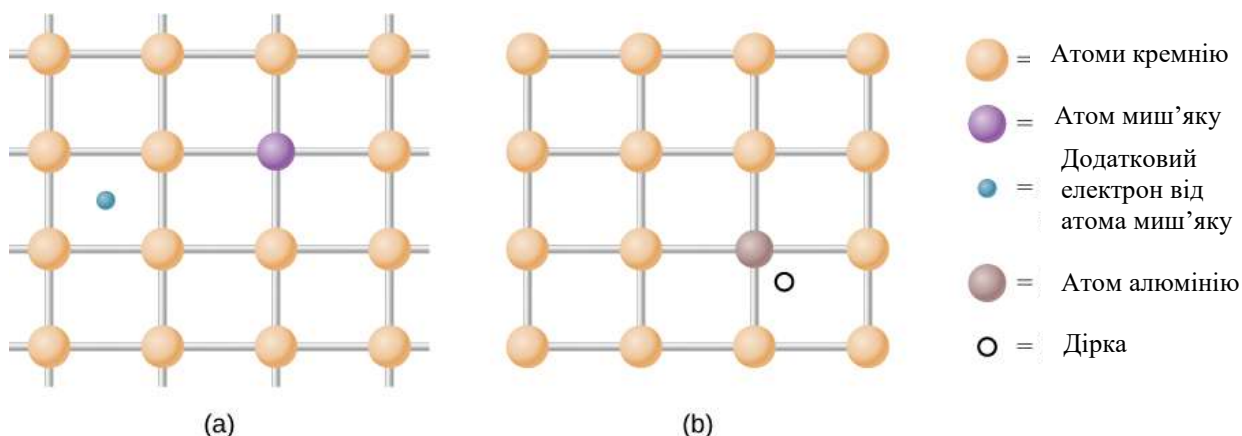


Рис. 4.19. (а) Донорна домішка і (б) акцепторна домішка. Введення в напівпровідник домішок і акцепторів істотно змінює електронні властивості цього матеріалу

Миш'як має п'ять валентних електронів, тоді як кремній має лише чотири. Тому цей додатковий електрон повинен піти в зону провідності, оскільки у валентній зоні немає місця. Іон миш'яку, що залишився, має сумарний позитивний заряд, який слабо зв'язує делокалізований електрон. Зв'язування слабе, тому що навколишня атомна решітка екранує електричне поле іона. У результаті енергія зв'язку додаткового електрона становить лише близько 0,02 еВ. Іншими словами, рівень енергії домішкового електрона знаходиться в забороненій зоні нижче зони провідності на 0,02 еВ, що значно менше, ніж енергія зазору, 1,14 еВ. При кімнатній температурі цей домішковий електрон легко збуджується в зоні провідності і, отже, сприяє провідності (рис. 4.20 (а)). Домішку з додатковим електроном називають **донорною домішкою**, а легований напівпровідник називають напівпровідником ***n*-типу**, оскільки первинні носії заряду (електрони) є негативними.

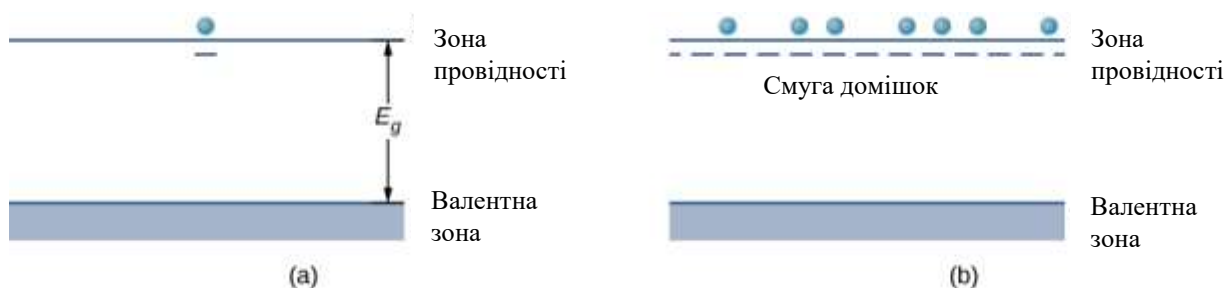


Рис. 4.20. (а) Додатковий електрон від донорної домішки збуджується в зоні провідності; (б) утворення домішкової зони в напівпровіднику *n*-типу

Додаючи більше донорних домішок, ми можемо створити **домішкову зону**, нову енергетичну зону, утворену легуванням напівпровідника, як показано на рис. 4.20 (б). Рівень Фермі тепер знаходиться між цією зоною та зоною провідності. При кімнатній температурі багато домішкових електронів термічно збуджуються в зону провідності та сприяють провідності. Тоді провідність також може виникати в смузі домішок, оскільки там створюються вакансії. Зверніть увагу, що зміни в енергії електрона відповідають зміні руху (швидкостей або кінетичної енергії) цих носіїв заряду з напівпровідником, але не об'ємному руху самого напівпровідника.

Легування також можна здійснити за допомогою домішкових атомів, які зазвичай мають на один валентний електрон *менше*, ніж атоми напівпровідника. Наприклад, Al, який має три валентні електрони, можна замінити на Si, як показано на рис. 4.19 (б). Така домішка відома як **акцепторна домішка**, а легований напівпровідник називають напівпровідником ***p*-типу**, оскільки первинні носії заряду (дірки) позитивні. Якщо дірку розглядати як позитивну частинку, слабо зв'язану з домішковим центром, то порожній електронний стан створюється в забороненій зоні трохи вище валентної зони. Коли цей стан заповнюється електроном, термічно збудженим із валентної зони (рис. 4.21 (а)), у валентній зоні створюється рухлива дірка. Додаючи більше акцепторних домішок, ми можемо створити смугу домішок, як показано на рис. 4.21 (б).

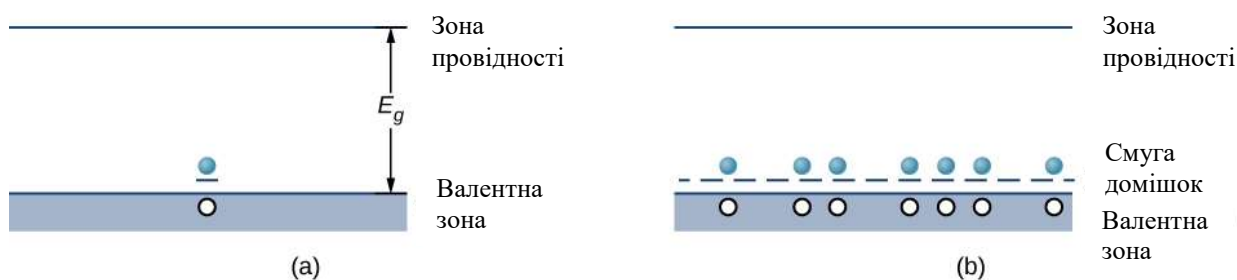


Рис. 4.21. (а) Електрон із зони провідності збуджується в порожній стан у результаті акцепторної домішки; (b) утворення домішкової смуги в напівпровіднику p -типу

Електричний струм у легованому напівпровіднику може бути зумовлений рухом основного **носія**, в якому дірки вносяться домішковим атомом, або через **неосновний носій**, в якому дірки вносяться виключно тепловими збудженнями електронів через енергетичну щілину. У напівпровіднику n -типу основними носіями є вільні електрони, внесені домішковими атомами, а неосновними носіями є вільні дірки, що залишилися внаслідок заповнення станів через термічне збудження електронів у проміжку. У напівпровіднику p -типу основними носіями є вільні електрони, що утворюються тепловими збудженнями від валентної до зони провідності. Загалом кількість носіїв більшості значно перевищує кількість носіїв меншості. У наступному розділі для пояснення роботи діодів і транзисторів буде використано поняття основних і неосновних носіїв.

Вивчаючи легування p - і n -типу, природно запитати: чи справді «електронні дірки» діють як частинки? Існування дірок у легованому напівпровіднику p -типу демонструє ефект Холла. Ефект Холла — це утворення різниці потенціалів унаслідок руху провідника в зовнішньому магнітному полі. Схема ефекту Холла показана на рис. 4.22 (а).

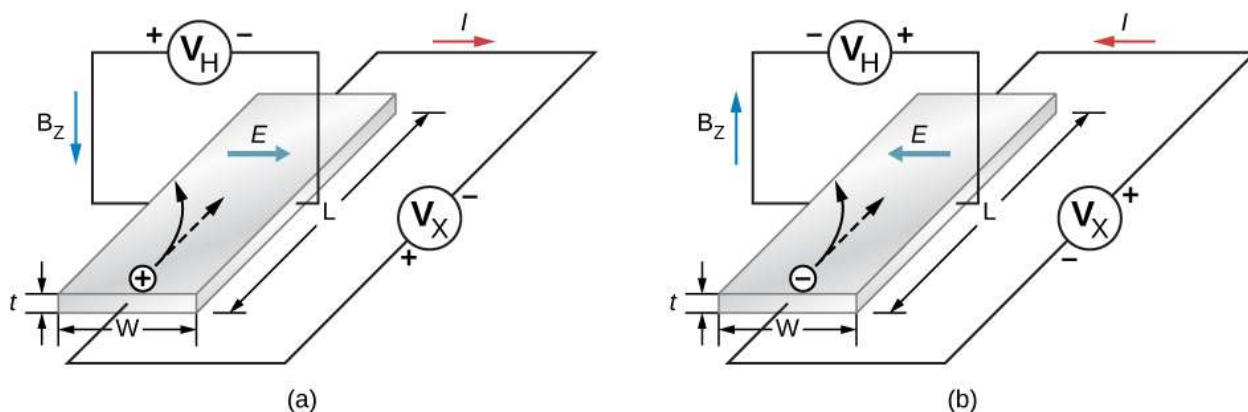


Рис. 4.22. Ефект Холла. (а) Позитивно заряджені електронні дірки притягуються вліво однорідним магнітним полем, спрямованим вниз. Праворуч утворюється електричне поле. (b) Негативно заряджені електрони притягуються вліво магнітним полем, спрямованим вгору. Зліва утворюється електричне поле

Напівпровідникова смужка знаходиться в однорідному магнітному полі (яке вказує на папір). Коли електронні дірки рухаються зліва направо через напівпровідник, сила Лоренца рухає ці заряди до верхнього кінця смужки.

(Нагадаймо, що рух позитивно заряджених носіїв визначається правилом правої руки). Позитивний заряд продовжує накопичуватися на верхньому краю смужки, поки сила, пов'язана зі спрямованим вниз електричним полем між верхнім і нижнім краями смужки ($F_E = Eq$) просто врівноважує висхідну магнітну силу ($F_B = qvB$). Поставивши ці сили рівними одна одній, маємо $E = vB$. Тому напруга, яка виникає на смужці, дорівнює:

$$V_H = vBw, \quad (4.33)$$

де V_H – напруга Холла; v — дрейфова **швидкість дірки** або середня швидкість частинки, яка рухається частково випадковим чином; B – напруженість магнітного поля; w – ширина смуги. Зверніть увагу, що напруга Холла є поперечною до напруги, яка спочатку створює струм через матеріал. Вимірювання знака цієї напруги (або різниці потенціалів) підтверджує наявність дірок на верхній стороні смужки. Величина напруги Холла дає швидкість дрейфу (v) основних носіїв.

Додаткову інформацію також можна отримати з напруги Холла. Зверніть увагу, що густина електронного струму (кількість струму на одиницю площі поперечного перерізу напівпровідникової стрічки) дорівнює:

$$j = nqv, \quad (4.34)$$

де q — величина заряду, n — кількість носіїв заряду в одиниці об'єму, v — дрейфова швидкість. Густина струму легко визначити, поділивши загальний струм на площу поперечного перерізу смужки, q — це заряд дірки (величина заряду окремого електрона), а v — з рівняння ефекту Холла (4.34).

Отже, наведений вище вираз для густини електронного струму дає кількість носіїв заряду в одиниці об'єму n . Подібний аналіз можна провести для негативно заряджених носіїв у матеріалі n -типу (див. рис. 4.22).

Вправи до п. 4.6. Напівпровідники та легування

1. Для демонстрації ефекту Холла проводиться експеримент. Тонка прямокутна смужка напівпровідника шириною 10 см і довжиною 30 см прикріплена до батареї і занурена в поле 1,50 Тл перпендикулярно до її поверхні. При цьому виникла напруга Холла 12 В. Яка швидкість дрейфу носіїв заряду?
2. Припустимо, що площа поперечного перерізу смужки (площа грані, перпендикулярної до електричного струму), представлені в попередній задачі, дорівнює 1 мм^2 а струм, незалежно виміряний, становить 2 мА. Яка густина носіїв заряду?
3. Струмопровідний мідний дріт поперечного перерізу $\sigma = 2\text{ мм}^2$ має швидкість дрейфу 0,02 см/с. Знайдіть загальну силу струму, що проходить по дроту.
4. Ефект Холла продемонстровано в лабораторії. Тонка прямокутна смужка напівпровідника шириною 5 см і площею поперечного перерізу 2 мм^2 прикріплюється до батареї і занурюється в поле, перпендикулярне її поверхні. Напруга Холла показує 12,5 В, а виміряна швидкість дрейфу становить 50 м/с. Чому дорівнює магнітне поле?

4.7. Напівпровідникові прилади

Напівпровідникові технології були рушійною силою обчислювальної техніки, інформаційних технологій, мобільних пристроїв і суміжних галузей. Транзистор — пристрій, який може підсилювати або перемикає електричні сигнали — є ключовим компонентом. Наприкінці 1940-х і на початку 1950-х років ряд відкриттів і винаходів продемонстрували перспективність цієї технології. Дослідники Вільям Шоклі, Джон Бардін і Уолтер Браттейн винайшли перший робочий транзистор, а також зробили кілька інших досягнень. Незабаром після цього їхній колега Мохаммад М. Аталла розробив поверхневий процес, який значно покращив продуктивність транзисторів і дозволив дослідникам (а згодом і виробникам) використовувати кремній як основний матеріал. Разом з Давоном Кангом Аталла винайшов особливий тип транзистора, МОП-транзистор, який можна було мініатюризувати та, отже, включити в інтегральну схему високої щільності. Чі-Танг Сах і Френк Ванлас ґрунтувалися на цій роботі, розробивши метод виготовлення схеми MOSFET, який став (і досі є) домінуючим способом виробництва мікропроцесорів.

Результати цих зусиль були широко поширеними та негайними. Менші й ефективніші обчислювальні пристрої призвели до прогресу в різноманітних сферах діяльності: від космічних польотів (де кожен грам на рахунок) до наручних годинників і радіо. Комп'ютери ставали все меншими і меншими, дозволяючи компаніям і звичайним споживачам володіти ними і, зрештою, носити їх у своїх кишенях у формі смартфонів. Усі ці зміни були спричинені кремнієвими напівпровідниками, через що регіон, відомий електронікою, був перейменований у Кремнієву долину.

Нижче ми опишемо два основних напівпровідникових прилади.

Діоди

Мабуть, найпростішим пристроєм, який можна створити з напівпровідника, є діод. Діод — це елемент схеми, який пропускає електричний струм лише в одному напрямку, як односторонній клапан. Діод створюється шляхом з'єднання напівпровідника p -типу з напівпровідником n -типу (рис. 4.23). Перехід між цими матеріалами називають **pn -переходом**. Порівняння енергетичних зон діода на основі кремнію показано на рис. 4.23 (b).

Положення валентної зони та зони провідності однакові, але рівні домішок досить різні. Коли утворюється pn -перехід, електрони із зони провідності матеріалу n -типу дифундують до p -сторони, де вони поєднуються з дірками у валентній зоні. Ця міграція заряду залишає позитивні іонізовані донорні іони на n -стороні та негативні іонізовані акцепторні іони на p -стороні, утворюючи вузький подвійний шар заряду на p - n -переході, який називають **шаром виснаження**. Електричне поле, пов'язане з виснаженим шаром, запобігає подальшій дифузії.

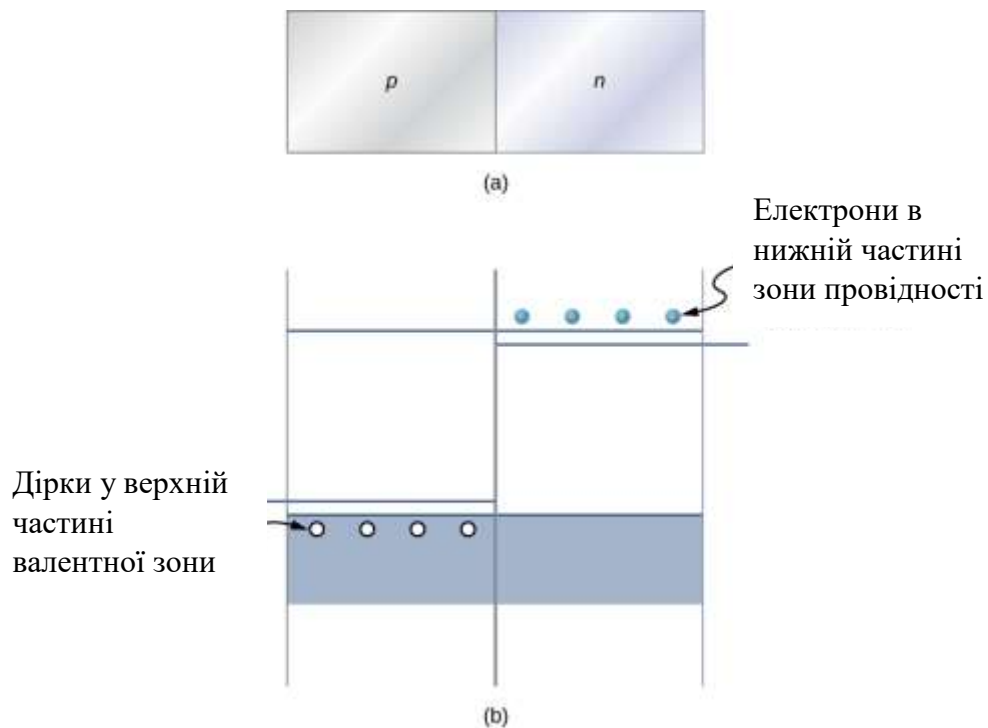


Рис. 4.23. (а) Зображення pn -переходу. (б) Порівняння енергетичних зон кремнію p -типу та n -типу до досягнення рівноваги

Потенціальну енергію для електронів через pn -перехід подано на рис. 4.24.

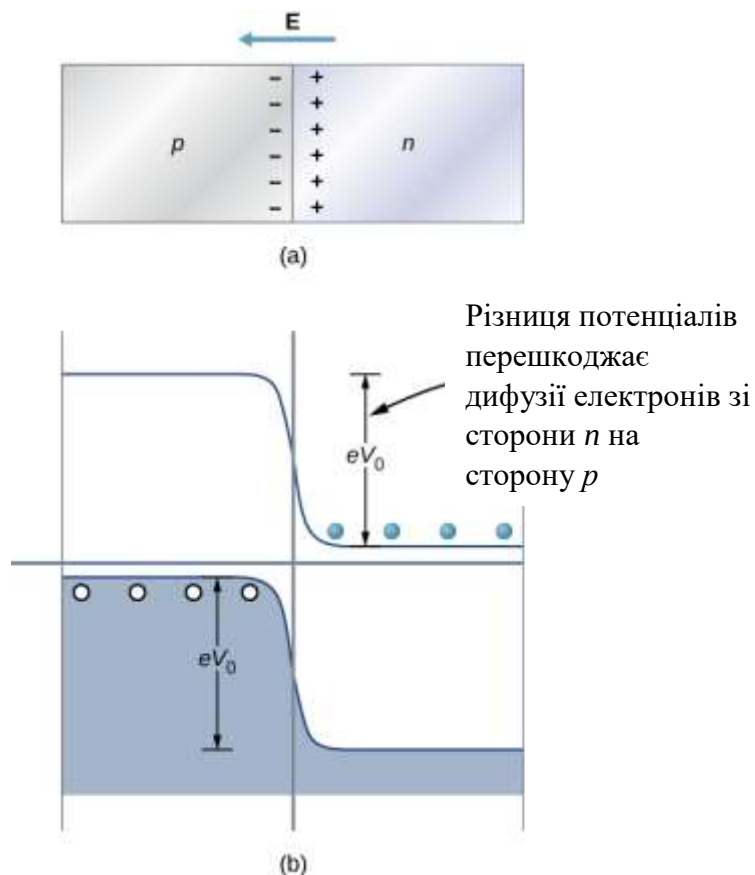


Рис. 4.24. У стані рівноваги (а) надлишковий заряд знаходиться поблизу межі розділу, а сумарний струм дорівнює нулю, і (б) різниця потенціальних енергій для електронів (світло-блакитні) перешкоджає подальшій дифузії електронів у бік p

Тепер можна зрозуміти поведінку напівпровідникового діода. Якщо позитивна сторона батареї підключена до матеріалу n -типу, виснажений шар розширюється, а різниця потенціальної енергії на pn -переході збільшується. Мало або жоден з електронів (дірок) не мають достатньої енергії, щоб піднятися через потенційний бар'єр, і струм значно зменшується. Це називається **конфігурацією зворотного зсуву**. З іншого боку, якщо позитивна сторона батареї з'єднана з матеріалом p -типу, виснажений шар звужується, різниця потенціальної енергії на pn -переході зменшується, і електрони (дірки) легко перетікають. Це називається **конфігурацією прямого зсуву** діода. Загалом, діод дозволяє струму вільно протікати в одному напрямку, але запобігає протіканню струму в протилежному напрямку. У цьому сенсі напівпровідниковий діод є одностороннім вентилям.

Ми можемо оцінити математичне співвідношення між струмом і напругою для діода, використовуючи концепцію електричного потенціалу. Розглянемо N негативно заряджених основних носіїв (електронів, відданих домішковими атомами) у матеріалі n -типу та потенційний бар'єр V на pn -переході. Відповідно до розподілу Максвелла-Больцмана, частка електронів, які мають достатню енергію, щоб дифундувати через потенційний бар'єр, становить величину $Ne^{-eV/k_B T}$. Однак якщо батарея напруги V_b застосовано в конфігурації прямого зміщення, ця частка покращується до $Ne^{-e(V-V_b)/k_B T}$. Таким чином, електричний струм через більшість носіїв від n -сторони до p -сторони буде дорівнювати:

$$I = Ne^{-eV/k_B T} \cdot e^{\frac{eV_b}{k_B T}} = I_0 e^{\frac{eV_b}{k_B T}}, \quad (4.35)$$

де I_0 – струм без напруги, а T – температура. Струм через неосновні носії (теплове збудження електронів із валентної зони в зону провідності на p -стороні та подальше притягання до n -сторони) – I_0 , незалежно від напруги зміщення. Отже, сумарний струм дорівнює:

$$I_\Sigma = I_0 \left(e^{\frac{eV_b}{k_B T}} - 1 \right). \quad (4.36)$$

Приблизний графік залежності струму від напруги зсуву наведено на рис. 4.25.

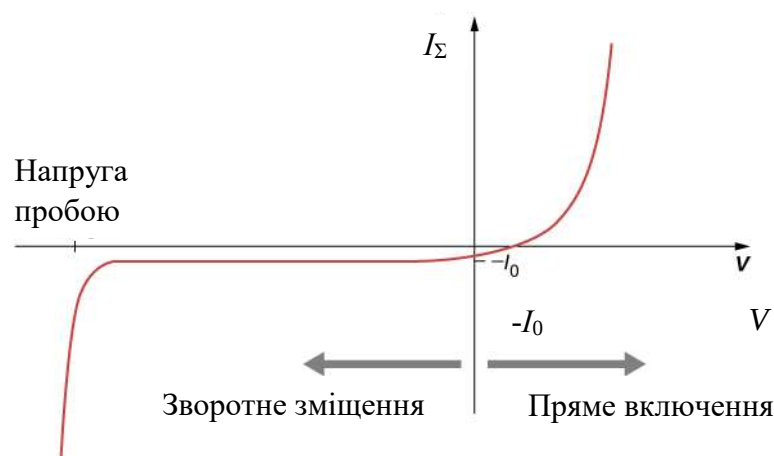


Рис. 4.25. Залежність струму від напруги на pn -переході (діод). У конфігурації прямого зміщення електричний струм тече легко. Однак у конфігурації зворотного зміщення електричний струм є незначним

У конфігурації прямого зміщення невеликі зміни напруги зміщення призводять до великих змін струму. У конфігурації зворотного зміщення струм становить $I_{\Sigma} \approx -I_0$. Для екстремальних значень зворотного зміщення атоми в матеріалі іонізуються, що викликає лавину струму. Цей випадок має місце при напрузі пробою.

Приклад 4.6. Струм діода

Приєднання позитивної клеми акумулятора до p -сторони, а негативної клеми до n -сторони напівпровідникового діода створює струм $4,5 \times 10^{-1} \text{ А}$. Зворотний струм насичення дорівнює $2,2 \times 10^{-8} \text{ А}$. (Зворотний струм насичення — це струм діода в такій конфігурації зворотного зсуву). Напруга акумулятора становить 0,12 В. Яка температура діода?

Стратегія

Перше розташування є конфігурацією прямого зсуву, а друге є конфігурацією зворотного зсуву. У будь-якому випадку рівняння 4.36 дає струм.

Розв'язок

Струм у конфігураціях прямого та зворотного зміщення визначається як

$$I_{\Sigma} = I_0 \left(e^{\frac{eV_b}{k_B T}} - 1 \right).$$

Струм без зміщення пов'язаний зі зворотним струмом насичення:

$$I_0 \approx -I_{sat} = 2,2 \times 10^{-8} \text{ А}.$$

Тому

$$\frac{I_{\Sigma}}{I_0} = \frac{4,5 \times 10^{-1} \text{ А}}{2,2 \times 10^{-8} \text{ А}} = 2,0 \times 10^8.$$

Рівняння 4.36 можна записати так:

$$\frac{I_{\Sigma}}{I_0} + 1 = e^{\frac{eV_b}{k_B T}}.$$

Це відношення набагато більше одиниці, тому другий член у лівій частині рівняння дорівнює нулю. Взяття натурального логарифму обох сторін дає:

$$\frac{eV_b}{k_B T} = 19.$$

Тому температура дорівнює:

$$T = \frac{eV_b}{k_B} \left(\frac{1}{19} \right) = \frac{e(0,12 \text{ В})}{8,617 \times 10^{-5} \text{ еВ/К}} = 73 \text{ К}.$$

Обговорення

Струм, що проходить через діод у конфігурації прямого та зворотного зміщення, чутливий до температури діода. Якщо потенціальна енергія, що постачається батареєю, велика порівняно з тепловою енергією оточення діода, $k_B T$, тоді прямий струм зміщення дуже великий порівняно зі зворотним струмом насичення.

Перевірте своє розуміння 4.5

Як величина струму прямого зміщення порівнюється зі струмом зворотного зміщення?

Перехідний транзистор

Якщо діоди є односторонніми вентилями, то транзистори є односторонніми вентилями, які можна відкривати та закривати для регулювання струму. Особливим різновидом транзисторів є перехідний транзистор. Перехідний **транзистор** складається з трьох частин, включаючи напівпровідник n -типу, який також називають емітером; тонкий напівпровідник p -типу, який є основою; та інший напівпровідник n -типу, який називається колектором (рис. 4.26).

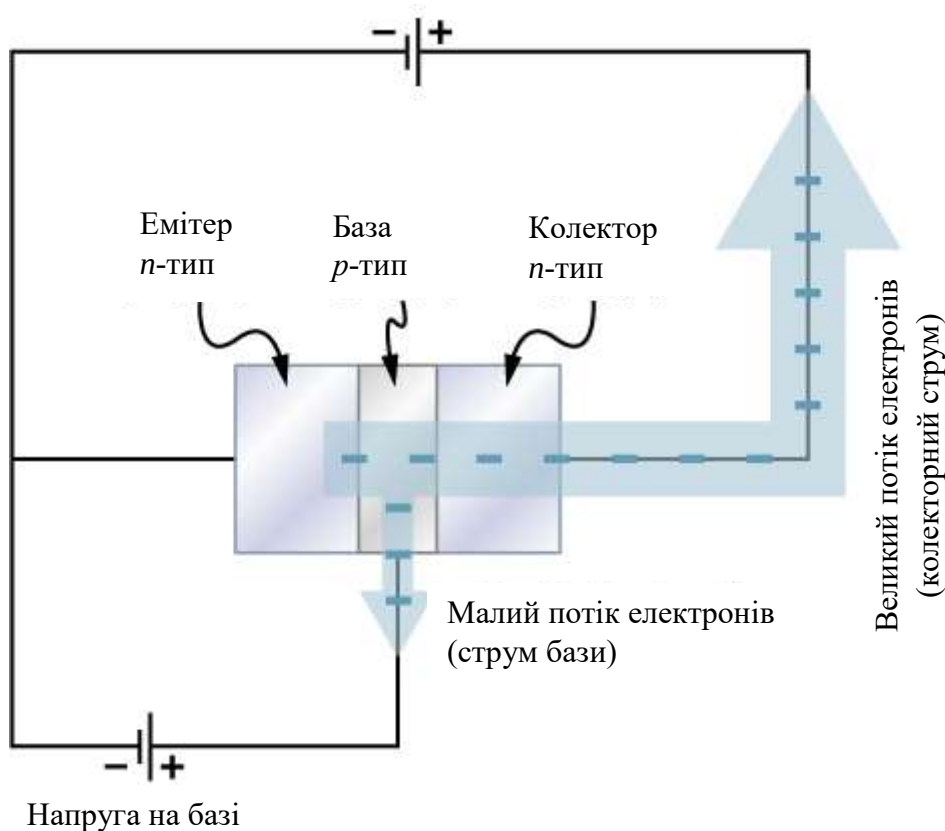


Рис. 4.26. Перехідний транзистор складається з трьох частин: емітер, база і колектор. Напруга, що подається на базу, діє як клапан для контролю електричного струму від емітера до колектора

Коли позитивна клемма батареї з'єднана із шаром p -типу (основою), виникає невеликий струм електронів, який називається **базовим струмом** I_B , що тече до батареї. Це викликає великий **струм колектора** I_K , що протікає через колектор. Струм бази можна регулювати, щоб контролювати великий струм колектора. Отже, коефіцієнт підсилення струму становить:

$$I_K = \beta I_B. \quad (4.37)$$

Перехідний транзистор можна використовувати для посилення напруги від мікрофона для керування гучномовцем. У цій програмі звукові хвилі викликають швидке переміщення діафрагми всередині мікрофона (рис. 4.27). Коли діафрагма знаходиться в положенні «включено», до бази транзистора прикладається невелика позитивна напруга. Це відкриває «клапан» транзистора і дозволяє великому електричному струму надходити до гучномовця. Коли діафрагма знаходиться в положенні «вимкнено», до бази транзистора прикладається невелика негативна напруга, яка закриває вентиль транзистора, щоб струм не надходив до гучномовця. Це закриває «клапан» транзистора, тому струм не тече до гучномовця. Таким чином струм, що надходить до динаміка, контролюється звуковими хвилями, і звук посилюється. **Підсилювачем** називають будь-який електричний пристрій, що підсилює сигнал.

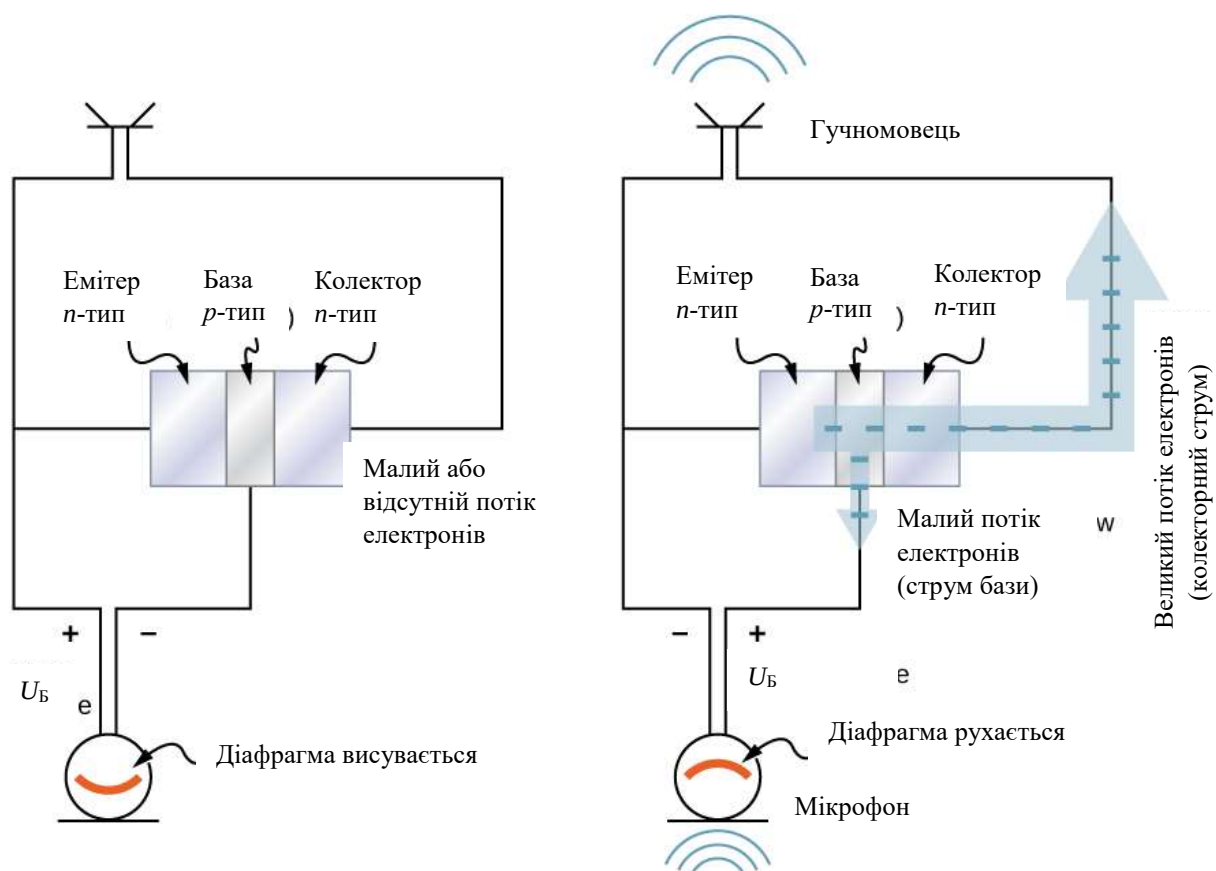


Рис. 4.27. Підсилювач звуку на основі транзистора з переходом. Напруга, що подається на базу мікрофоном, діє як клапан для регулювання більшого електричного струму, який проходить через гучномовець

У сучасних електронних пристроях цифрові сигнали використовуються з діодами та транзисторами для виконання таких завдань, як маніпулювання даними. Електричні кола передають електричні сигнали двох типів: аналогові та цифрові (рис. 4.28).

Аналоговий сигнал постійно змінюється, тоді як цифровий сигнал перемикається між двома фіксованими значеннями напруги, наприклад, плюс 1 вольт і нуль вольт. У цифрових схемах, подібних до комп'ютерних, транзистор поводить як перемикач. Транзистор або включений, тобто вентиль повністю

відкритий, або вимкнений, тобто клапан повністю закритий. Інтегральні схеми містять величезну кількість транзисторів на одному шматку кремнію. Вони призначені для обробки цифрових сигналів, які представляють одиниці та нулі, що також називають двійковим кодом. Винахід мікросхеми допоміг розпочати сучасну комп'ютерну революцію.

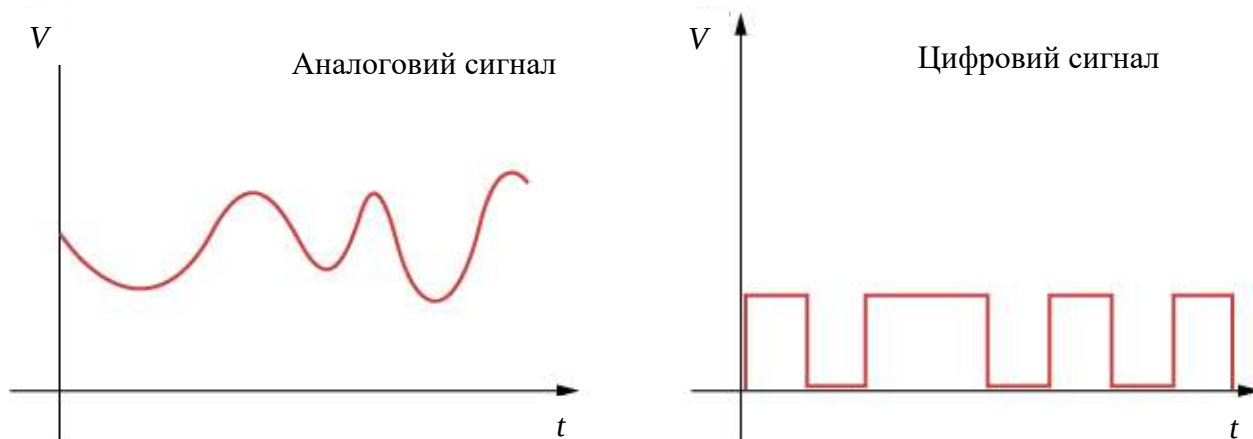


Рис. 4.28. Реальні дані часто є аналоговими, тобто дані можуть постійно змінюватися. Значення інтенсивності звукових або візуальних зображень зазвичай є аналоговими. Ці дані перетворюються в цифрові сигнали для електронної обробки в записуючих пристроях або комп'ютерах. Цифровий сигнал генерується з аналогового сигналу, вимагаючи певного граничного значення напруги

Вправи до п. 4.7. Напівпровідникові прилади

1. Покажіть, що для V менше нуля, $I_{\text{net}} \approx -I_0$.
2. Діод p - n має зворотний струм насичення $1,44 \times 10^{-8} \text{ А}$. Під час прямого включення він має струм $6,78 \times 10^{-1} \text{ А}$. Яка напруга зміщення прикладається, якщо температура 300 К ?
3. Колекторний струм транзистора становить $3,4 \text{ А}$ при струмі бази $4,2 \text{ мА}$. Який коефіцієнт підсилення?
4. Приклавши позитивний кінець батареї до p -сторони та негативний кінець до n -сторони pn -переходу, виміряний струм дорівнює $8,76 \times 10^{-1} \text{ А}$. Зміна полярності дає зворотний струм насичення $4,41 \times 10^{-8} \text{ А}$. Яка температура, якщо напруга зміщення $1,2 \text{ В}$?
5. Базовий струм транзистора дорівнює $4,4 \text{ А}$, а його коефіцієнт підсилення за струмом 1126 . Чому дорівнює колекторний струм?

4.8. Надпровідність

Електричний опір можна розглядати як міру сили тертя в електричному струмі. Таким чином, електричний опір є основним джерелом розсіювання енергії в електричних системах, таких як електромагніти, електродвигуни та лінії електропередач. Мідний дріт зазвичай використовується в електропроводці, оскільки він має один із найнижчих питомих електричних опорів за кімнатної температури серед звичайних провідників. (Насправді срібло має нижчий

питомий опір, ніж мідь, але висока вартість і обмежена доступність срібла переважають його економію енергії в порівнянні з міддю).

Хоча наше обговорення провідності, здається, означає, що всі матеріали повинні мати електричний опір, ми знаємо, що це не так. Коли температура падає нижче критичного значення для багатьох матеріалів, їхній питомий електричний опір падає до нуля, і матеріали стають надпровідниками.

Властивості надпровідників

Крім нульового електричного опору, надпровідники також мають ідеальний діамagnetизм. Іншими словами, за наявності прикладеного магнітного поля сумарне магнітне поле всередині надпровідника завжди дорівнює нулю (рис. 4.29). Таким чином, будь-які силові лінії магнітного поля, які проходять через надпровідний зразок, коли він перебуває у своєму нормальному стані, витісняються, коли зразок стає надпровідним. Це прояви ефекту Мейснера, про який ви дізналися в розділі про струм і опір.

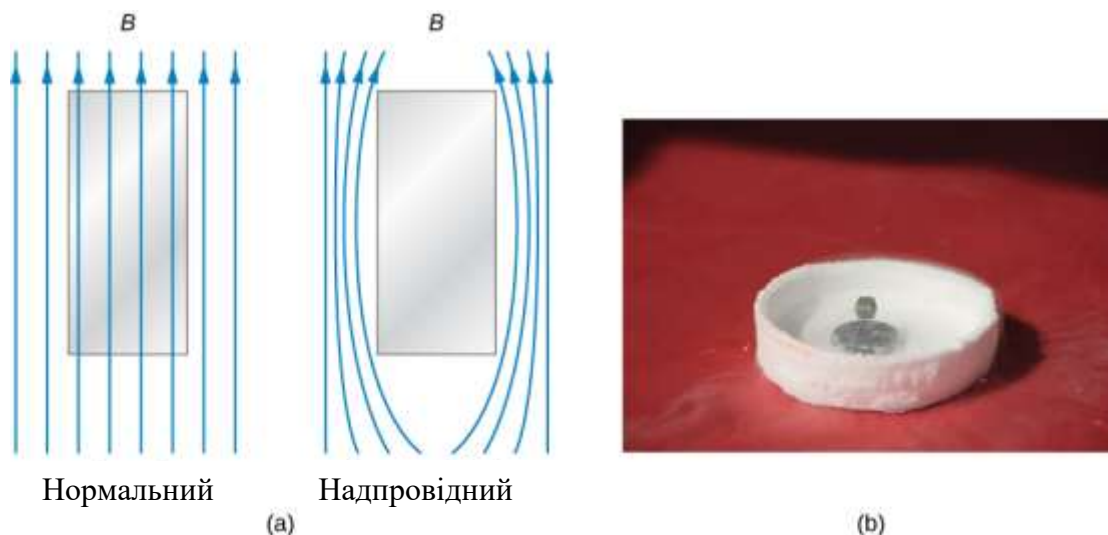


Рис. 4.29. (a) В ефекті Мейснера магнітне поле витісняється з матеріалу, коли він стає надпровідним. (b) Магніт може левітувати над надпровідним матеріалом, підтримуваний силою, що виштовхує магнітне поле

Цікаво, що ефект Мейснера не є наслідком нульового опору. Щоб зрозуміти чому, припустимо, що зразок, поміщений у магнітне поле, зазнає переходу, під час якого його опір падає до нуля. Відповідно до закону Ома, густина струму j у зразку пов'язана з внутрішнім електричним полем E та питомим опором ρ так: $j = E/\rho$. Якщо ρ дорівнює нулю, E також має дорівнювати нулю, щоб j залишалося кінцевим. Напруженість E і магнітний потік Φ_m пов'язані законом Фарадея:

$$\oint E dl = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.38)$$

Якщо E дорівнює нулю, $d\Phi_m/dt$ також дорівнює нулю, тобто магнітний потік через зразок не може змінитися. Таким чином, лінії магнітного поля всередині зразка не повинні витіснятися, коли відбувається перехід. Отже, з цього не

впливає, що матеріал, опір якого дорівнює нулю, повинен демонструвати ефект Мейснера. Швидше, ефект Мейснера є особливою властивістю надпровідників.

Іншою важливою властивістю надпровідного матеріалу є його **критична температура** T_C , температура, нижче якої матеріал є надпровідним. Відомий діапазон критичних температур становить від часток 1 К до трохи вище 100 К. Надпровідники з критичними температурами поблизу цієї вищої межі широко відомі як «високотемпературні» надпровідники. З практичної точки зору надпровідники для яких $T_C \gg 77$ К дуже важливі. В даний час застосування надпровідників часто вимагає занурення надпровідних матеріалів у рідкий гелій (4,2 К), щоб підтримувати їх температуру нижче критичної. Ванни з рідким гелієм необхідно постійно поповнювати через випаровування, а витрати на охолодження можуть легко переважити економію при використанні надпровідника. Однак 77 К — це температура рідкого азоту, який набагато більш поширений і дешевший, ніж рідкий гелій. Було б набагато рентабельніше, якби ми могли легко виготовити та використовувати високотемпературні надпровідникові компоненти, які потрібно лише тримати в ваннах з рідким азотом, щоб підтримувати їх надпровідність.

Високотемпературні надпровідні матеріали в даний час використовуються в різних сферах застосування. Прикладом є створення магнітних полів у деяких прискорювачах елементарних частинок. Кінцева мета — виявити матеріали, які є надпровідними при кімнатній температурі. Без будь-яких вимог до охолодження більшість електронних компонентів і ліній передачі можуть бути надпровідними, що призведе до різкого та безпрецедентного підвищення ефективності та продуктивності.

Іншою важливою властивістю надпровідного матеріалу є його **критичне магнітне поле** $B_C(T)$, що є максимальним прикладеним магнітним полем при температурі T , яке дозволить матеріалу залишатися надпровідним. Прикладене поле, яке перевищує критичне, зруйнує надпровідність. Критичне поле дорівнює нулю при критичній температурі і зростає зі зниженням температури. Графіки залежності критичного поля від температури для кількох надпровідних матеріалів показано на рис. 4.30.

Температурну залежність критичного поля можна наближено описати за допомогою рівняння:

$$B_C(T) = B_C(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right], \quad (4.39)$$

де $B_C(0)$ — критичне поле при абсолютному нулі температури.

У табл. 4.5 наведено критичні температури та поля для двох класів надпровідників: **надпровідників типу I** та **надпровідників типу II**.

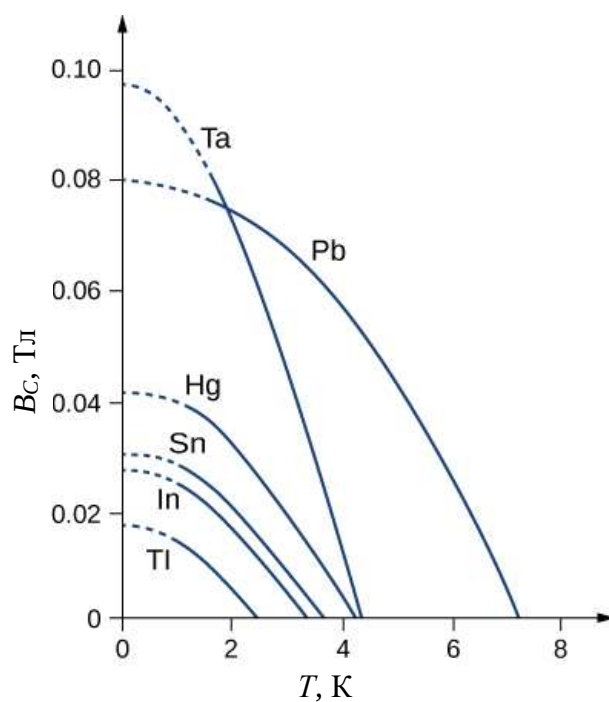


Рис. 4.30. Температурна залежність критичного поля для кількох надпровідників. Надпровідність виникає для магнітних полів і температур, нижчих від показаних кривих

Таблиця 4.5

Критична температура і критичне магнітне поле при $T=0\text{K}$ для різних надпровідників

Матеріал	Критична температура(К)	Критичне магнітне поле (Тл)
Тип I		
Al	1,2	0,011
Ga	1,1	0,0051
Hg (α)	4,2	0,041
In	3,4	0,029
Nb	9,3	0,20
Pb	7,2	0,080
Sn	3,7	0,031
Th	1,4	0,00016
Zn	0,87	0,0053

Матеріал	Критична температура(К)	Критичне магнітне поле (Тл)
II тип		
Nb ₃ Al	18	32
Nb ₃ Ge	23	38
Nb ₃ Sn	18	25
NbTi	9,3	15
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	92	>100

Загалом надпровідниками типу I є такі елементи, як алюміній і ртуть. Вони абсолютно діамагнітні нижче критичного поля $B_C(T)$ і переходять у нормальний ненадпровідний стан, коли це поле перевищено. Критичні поля надпровідників типу I, як правило, досить низькі (значно нижче одного тесла). З цієї причини їх не можна використовувати в програмах, що вимагають створення сильних магнітних полів, які знищили б їх надпровідний стан.

Надпровідники типу II, як правило, є сполуками або сплавами, що містять перехідні метали або елементи ряду актиноїдів. Майже всі надпровідники з відносно високими критичними температурами належать до II типу. Вони мають два критичні поля, представлені $B_{C1}(T)$ і $B_{C2}(T)$. Коли поле мале $B_{C1}(T)$, надпровідники типу II є абсолютно діамагнітними, і магнітний потік не може проникнути в матеріал. Для перевищення поля $B_{C2}(T)$, їх приводять у нормальний стан. Коли поле більше ніж $B_{C1}(T)$, але менше ніж $B_{C2}(T)$, надпровідники II типу перебувають у змішаному стані. Хоча в змішаному стані є деяке проникнення магнітного потоку, опір матеріалу дорівнює нулю. У надпровіднику існують ниткоподібні області, які мають нормальні електричні та магнітні властивості, вкраплені між областями, які є надпровідними з ідеальним діамагнетизмом. Відображення цього стану наведено на рис. 4.31. Магнітне поле витісняється з надпровідних областей, але існує в нормальних областях. Загалом, $B_{C2}(T)$ дуже велика величина в порівнянні з критичними полями надпровідників типу I, тому дріт, виготовлений з надпровідного матеріалу типу II, підходить для обмоток магнітів із сильним полем.

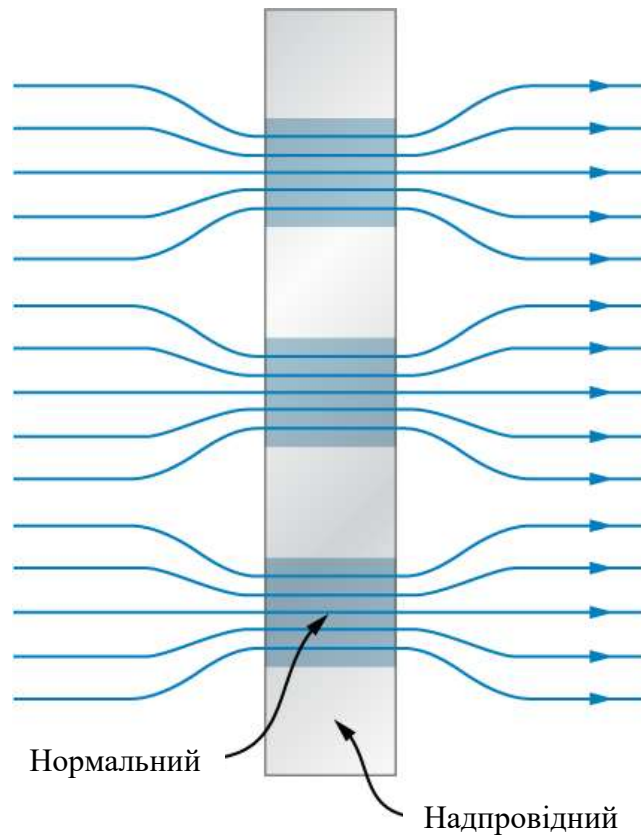


Рис. 4.31. Схематичне зображення змішаного стану надпровідника II типу. Надпровідники (сірі квадрати) викидають магнітні поля поблизу себе

Приклад 4.7. Ніобієвий дріт

У досліді ніобієвий (Nb) дріт радіусом 0,25 мм занурюють у рідкий гелій ($T = 4,2\text{ K}$) і пропускають струм 300 А. Чи залишається дріт надпровідним?

Стратегія

Прикладене магнітне поле можна визначити за радіусом дроту та струмом. Критичне магнітне поле можна визначити з 4.39, властивостей надпровідника та температури. Якщо прикладене магнітне поле більше, ніж критичне поле, то надпровідність у Nb дроті руйнується.

Розв'язок

$$B_c(4,2\text{ K}) = B_c(0) \left[1 - \left(\frac{4,2\text{ K}}{9,3\text{ K}} \right)^2 \right] = (0,2\text{ Тл})(0,8) = 0,16\text{ Тл}.$$

У попередньому розділі ми дізналися, що магнітне поле всередині струмопровідного дроту радіуса a визначається як

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a},$$

де r – відстань від центральної осі дроту. Таким чином, поле на поверхні дроту $B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a}$. Для ніобієвого дроту це поле дорівнює:

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А})(300 \text{ А})}{2\pi(2,5 \times 10^{-4} \text{ м})} = 0,24 \text{ Тл.}$$

Оскільки це перевищує критичні 0,16 Тл, дріт не залишається надпровідним.

Обговорення

Надпровідність вимагає низьких температур і слабких магнітних полів. Ці одночасні умови виконуються важче для Nb, ніж для багатьох інших металів. Наприклад, алюміній надпровідний при температурах у 7 разів нижчих, а магнітних полях у 18 разів нижчих.

Перевірте своє розуміння 4.6

Які умови необхідні для надпровідності?

Теорія надпровідників

Успішна теорія надпровідності була розроблена в 1950-х роках Джоном Бардіном, Леоном Купером і Дж. Робертом Шріффером, за що вони отримали Нобелівську премію в 1972 році. Ця теорія відома як **теорія БКШ**. Теорія БКШ (BCS) є складною, тому ми коротко підсумовуємо її якісно нижче.

У нормальному провіднику електричні властивості матеріалу зумовлені найбільш енергійними електронами поблизу енергії Фермі. У 1956 році Купер показав, що якщо існує будь-яка притягальна взаємодія між двома електронами на рівні Фермі, то електрони можуть утворювати зв'язаний стан, у якому їх загальна енергія менша ніж $2E_F$. Два таких електрона називають **куперівською парою**.

Важко уявити, щоб два електрони притягувалися один до одного, оскільки вони мають однаковий заряд і повинні відштовхуватися. Однак запропонована взаємодія відбувається лише в контексті атомної решітки. Зображення диспозицій показано на рис. 4.32. Електрон 1 злегка зміщує позитивно заряджені атомні ядра до себе під час проходження через кулонівське притягання. Електрон 2 «бачить» область з більшою щільністю позитивного заряду відносно навколишнього середовища і тому притягується в цю область і, отже, опосередковано до електрона 1. Через принцип виключення два електрони куперівської пари повинні мати протилежні спіни.

Теорія БКШ поширює ідеї Купера, які стосуються однієї пари електронів, на весь газ вільних електронів. Коли відбувається перехід у надпровідний стан, усі електрони спаровуються, утворюючи куперівські пари. В атомному масштабі відстань між двома електронами, що утворюють куперівську пару, досить велика. Між цими електронами зазвичай знаходиться о 10^6 інші електрони, кожен з яких також утворює пару з віддаленим електроном.

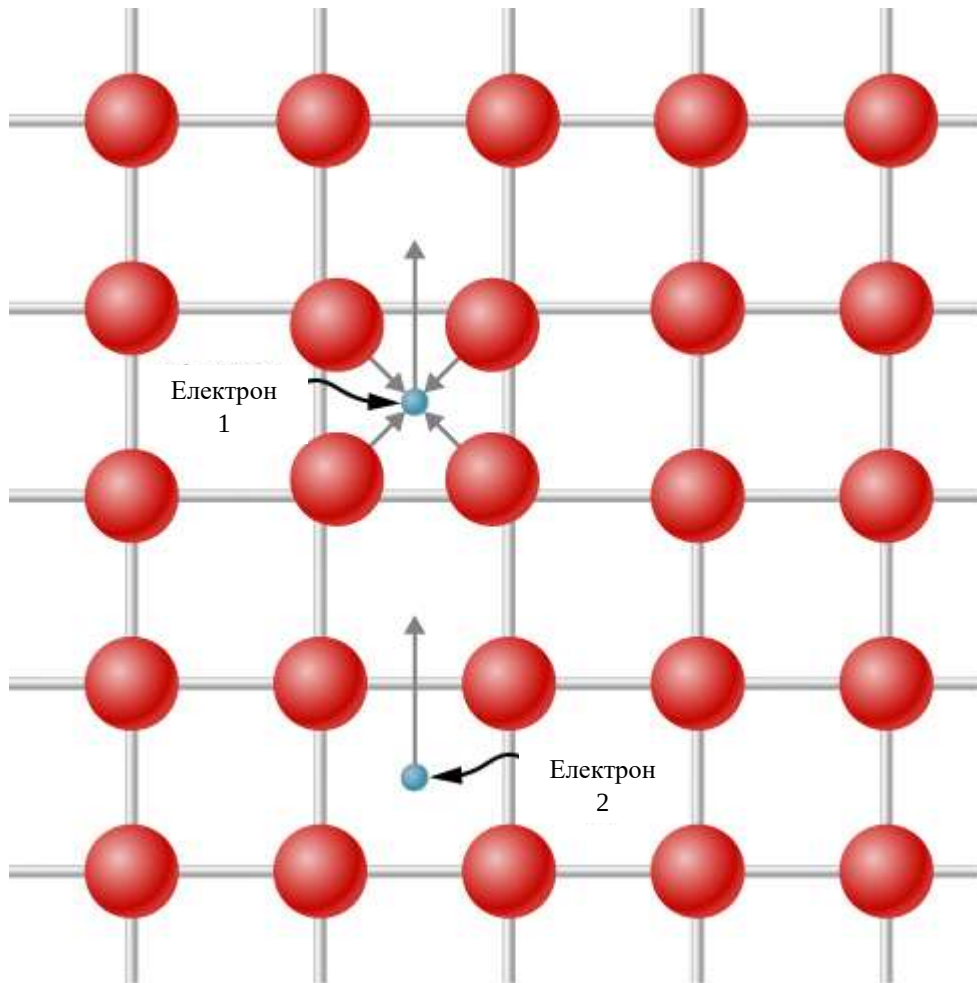


Рис. 4.32. Куперівська пара може утворитися в результаті зміщення позитивних атомних ядер. Електрон 1 злегка зміщує позитивно заряджені атомні ядра до себе під час проходження через кулонівське притягання. Електрон 2 «бачить» область з більшою щільністю позитивного заряду відносно навколишнього середовища і тому притягується в цю область

Отже, існує значне перекриття між хвильовими функціями окремих пар Купера, що призводить до сильної кореляції між рухами пар. Вони всі разом рухаються «в ногу», як учасники оркестру. При надпровідному переході щільність станів різко змінюється поблизу рівня Фермі. Як показано на рис. 4.33, навколо з'являється енергетичний розрив E_F оскільки набір куперівських пар має меншу енергію основного стану, ніж газ Фермі невзаємодіючих електронів. Поява цієї щілини характеризує надпровідний стан. Якщо цей стан руйнується, то щілина зникає, і густина станів повертається до густини вільного електронного газу.

Теорія БКШ здатна передбачити багато властивостей, що спостерігаються в надпровідниках. Приклади включають ефект Мейснера, критичну температуру, критичне поле і, можливо, найголовніше, питомий опір, що стає нульовим при критичній температурі. Про це останнє явище ми можемо якісно поміркувати наступним чином.

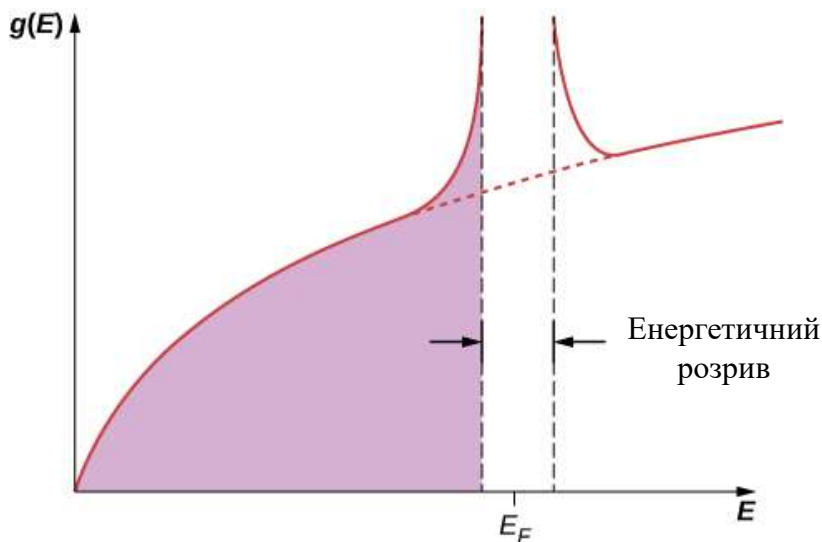


Рис. 4.33. Навколо енергії Фермі утворюється відносно велика енергетична щілина, коли матеріал стає надпровідним. Якщо цей стан руйнується, то щілина зникає, і густина станів повертається до густини вільного електронного газу

У нормальному провіднику питомий опір є результатом взаємодії електронів провідності з решіткою. У цій взаємодії обмінюється енергією порядку $k_B T$, тепловою енергією. У надпровіднику електричний струм переноситься куперівськими парами. Єдиний спосіб для решітки розсіяти куперівську пару — розбити її. Руйнування однієї пари потім руйнує спільний рух усіх пар. Це руйнування потребує енергії порядку 10^{-3} eV , що є розміром енергетичного розриву. Нижче критичної температури для цього процесу недостатньо теплової енергії, тому куперівські пари безперешкодно рухаються по надпровіднику.

Нарешті, цікаво відзначити, що жодних доказів надпровідності не було знайдено в найкращих нормальних провідниках, таких як мідь і срібло. Це не є несподіваним, враховуючи теорію БКШ. Основою утворення надпровідного стану є взаємодія між електронами і решіткою. У найкращих провідниках взаємодія електрон-гратка найслабша, як видно з їх мінімального питомого опору. Тоді ми могли б очікувати, що в цих матеріалах взаємодія настільки слабка, що куперівські пари не можуть утворюватися, а тому надпровідність виключається.

Вправи до п. 4.8. Надпровідність

1. При якій температурі T_C , критичне поле надпровідника має половину значення від того, коли $T = 0 \text{ K}$?
2. Яке критичне магнітне поле для свинцю коли $T = 2,8 \text{ K}$?
3. Провід Pb, намотаний як щільний соленоїд діаметром 4,0 мм, охолоджується до температури 5,0 K. Провід з'єднаний послідовно з 50 – Омним резистором і джерелом змінної е.р.с. Яке значення ЕРС, коли надпровідність дроту руйнується?

4. Щільно намотаний соленоїд при 4,0 К має довжину 50 см і виготовлений з Nb дроту радіусом 1,5 мм. Який максимальний струм може проходити соленоїд, якщо дріт залишається надпровідним?

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

4.1. Типи молекулярних зв'язків

1. У чому головна відмінність між іонним зв'язком, ковалентним зв'язком і зв'язком Ван-дер-Ваальса?
2. Який тип з'єднання очікується для наступних випадків? а) молекула KCl; (б) N₂ молекула.
3. Опишіть три типи іонного зв'язку.
4. Що заважає позитивному і негативному іонам мати нульовий поділ?
5. Чому спіни електронів у H₂ молекули, повинні бути антипаралельними?

4.2. Молекулярні спектри

6. Чи залежить спектр поглинання двоатомної молекули HCl від ізотопу хлору, що міститься в молекулі? Поясніть свої міркування.
7. Ранжуйте енергетичну відстань (ΔE) наступних переходів від найменшого до найбільшого: перехід енергії електрона в атомі (атомна енергія), енергія обертання молекули чи енергія коливань молекули?
8. Поясніть ключові особливості коливально-обертального енергетичного спектру двоатомної молекули.

4.3. Зв'язок у кристалічних твердих тілах

9. Чому рівноважна відстань між K⁺ і Cl⁻ для двоатомної молекули відрізняється від кристалічного KCl?
10. Опишіть різницю між гранецентричною кубічною структурою (FCC) і об'ємно-центрованою кубічною структурою (BCC).
11. Скільки атомів Cl⁻ в натрій хлориді є «найближчими сусідами» Na⁺? Скільки Na⁺ атомів є «найближчими сусідами» Cl⁻?
12. Скільки атомів Cl⁻ у йодида цезію є «найближчими сусідами» Cs⁺? Скільки атомів Cs⁺ є «найближчими сусідами» Cl⁻?
13. Кристалічна структура NaCl є FCC. Рівноважний відстань дорівнює $r_0 = 0,282\text{ нм}$. Якщо кожен іон займає кубічний об'єм r_0^3 , оцініть відстань між «найближчим сусідом» іонів Na⁺ (від центру до центру).

4.4. Модель металів з вільними електронами

14. Чому енергія Фермі (E_F) зростає зі збільшенням кількості електронів у металі?
15. Якщо густина електронів металу (N/V) збільшується у 8 разів, що відбувається з енергією Фермі (E_F)?
16. Чому горизонтальна лінія на графіку на малюнку 4.12 раптом зупиняється на енергії Фермі?
17. Чому графік на малюнку 4.12 поступово збільшується від початку координат?
18. Чому різкі переходи при енергії Фермі «згладжуються» підвищенням температури?

4.5. Зонна теорія твердих тіл

19. Які два основні підходи використовуються для визначення енергетичних рівнів електронів у кристалі?
20. Опишіть дві особливості енергетичних рівнів електрона в кристалі.
21. Як кількість енергетичних рівнів у зоні залежить від числа N атомів?
22. Чому одні матеріали є дуже хорошими провідниками, а інші дуже поганими?
23. Чому деякі матеріали є напівпровідниками?
24. Чому опір напівпровідника з підвищенням температури зменшується?

4.6. Напівпровідники та легування

25. Який тип напівпровідника виходить, якщо германій легувати (а) миш'яком і (б) галієм?
26. Який тип напівпровідника виходить, якщо кремній легувати (а) фосфором і (б) індієм?
27. Що таке ефект Холла і для чого він використовується?
28. Як домішкові атоми змінюють енергетичну структуру твердого тіла для напівпровідника n -типу?
29. Як домішкові атоми змінюють енергетичну структуру твердого тіла для напівпровідника p -типу?

4.7. Напівпровідникові прилади

30. Чому під час з'єднання матеріалів p - і n -типу поблизу місця з'єднання створюється однорідне електричне поле?
31. Чому виснажений шар не зростає нескінченно, коли з'єднуються матеріали p - і n -типу?
32. Як дізнатися, чи є діод у конфігурації прямого зміщення ?
33. Чому конфігурація зворотного зміщення призводить до дуже малого струму?
34. Що відбувається в екстремальному випадку, коли матеріали n - і p -типу сильно леговані?

35. Поясніть, як працює підсилювач звуку, використовуючи концепцію транзистора.

4.8. Надпровідність

36. Опишіть дві основні властивості надпровідника.

37. Як теорія БКШ пояснює надпровідність?

38. Що таке ефект Мейснера?

39. Як впливає збільшення магнітного поля на критичну температуру напівпровідника?

ЯДЕРНА ФІЗИКА

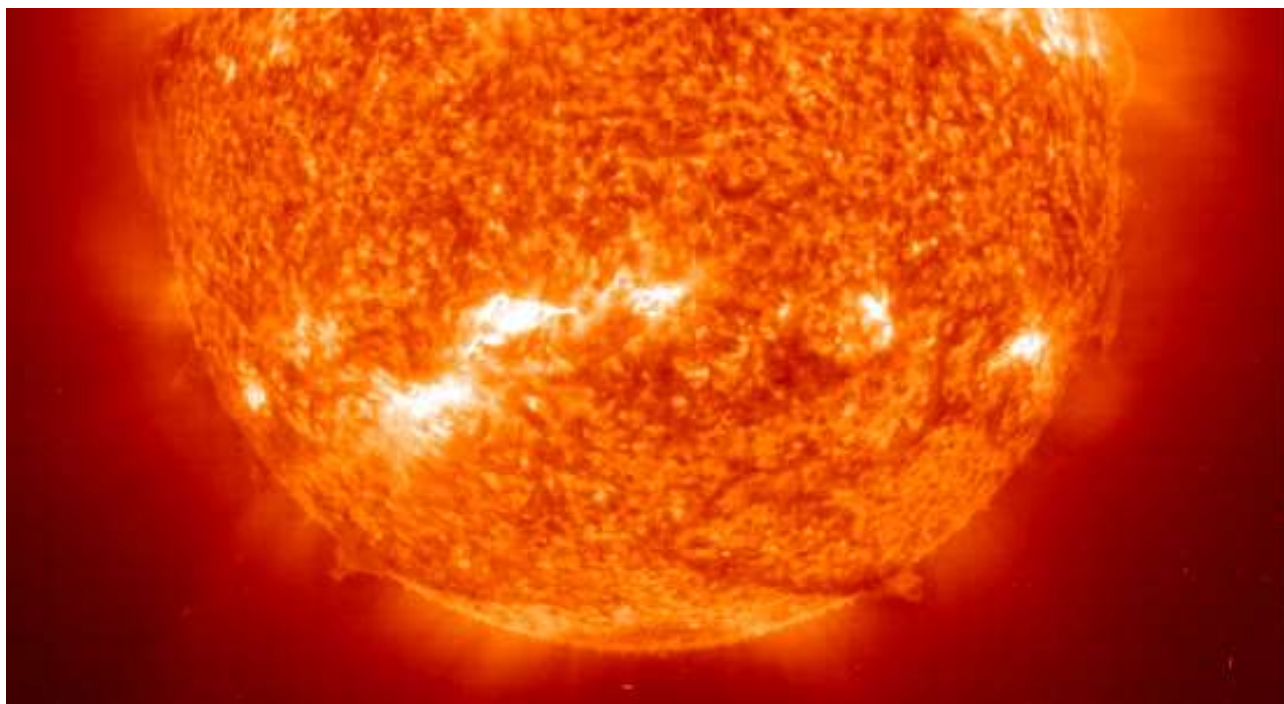


Рис. 5.1. Ядро Сонця живиться завдяки ядерному синтезу. Ядро Сонця конвертує приблизно 10^{38} протонів/секунду в гелій при температурі 14 мільйонів кельвін. Цей процес вивільняє енергію у формі фотонів, нейтрино та інших частинок

У цьому розділі ми вивчаємо склад і властивості атомного ядра. Ядро знаходиться в центрі атома і складається з протонів і нейтронів. Глибоке розуміння ядра веде до численних цінних технологій, включаючи пристрої для визначення віку стародавніх порід, картографування галактичних рукавів Чумацького Шляху та генерування електроенергії.

Сонце є основним джерелом енергії в Сонячній системі. Діаметр Сонця становить 109 земних діаметрів, що становить більше ніж 99 % від загальної маси Сонячної системи. Сонце світить, зливаючи ядра водню — протони — глибоко всередині нього. Коли це паливо буде витрачено, Сонце буде спалювати гелій, а пізніше й інші ядра. Ядерний синтез на Сонці обговорюється в кінці цього розділу. Тим часом ми будемо досліджувати ядерні властивості, які керують усіма ядерними процесами, включаючи термоядерний синтез.

5.1. Властивості ядер

Атомне **ядро** складається з **протонів** і **нейтронів** (рис. 5.2). Протони і нейтрони мають приблизно однакову масу, але протони несуть одну одиницю позитивного заряду (+ e), а нейтрони не несуть заряду. Ці частинки зібрані разом у надзвичайно малий простір у центрі атома. Згідно з експериментами з розсіюванням, ядро має сферичну або еліпсоїдну форму і складає приблизно 1/100 000 розміру атома водню. Якби атом був розміром із бейсбольний стадіон вищої ліги, ядро було б приблизно розміром із бейсбольний м'яч. Протони і нейтрони в ядрі називають **нуклонами**.

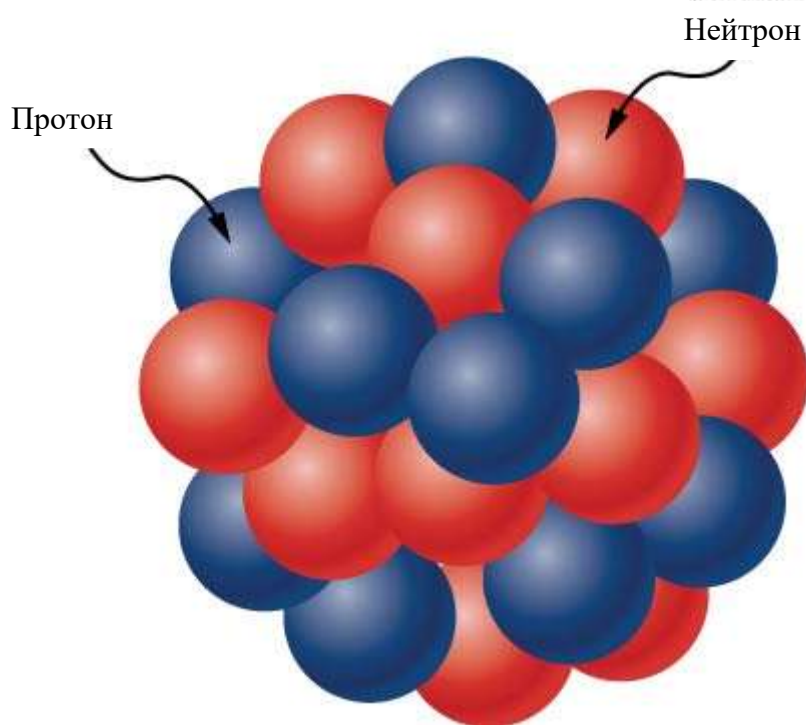


Рис. 5.2. Атомне ядро складається з протонів і нейтронів. Протони показані синім кольором, а нейтрони — червоним

Підрахунок нуклонів

Число протонів у ядрі визначається атомним номером Z . Число нейтронів у ядрі — нейтронним числом N . Загальна кількість нуклонів є масовим числом A . Ці числа пов'язані між собою так:

$$A = Z + N. \quad (5.1)$$

Ядро символічно представляють так:

$${}^A_ZX, \quad (5.2)$$

де X — хімічний елемент, A — масове число, а Z — атомний номер. Наприклад, ${}^{12}_6\text{C}$ є ядро вуглецю з шістьма протонами і шістьма нейтронами (або 12 нуклонами).

Графік залежності числа N нейтронів від числа Z протонів для ряду стабільних ядер (**нуклідів**) показано на рис. 5.3.

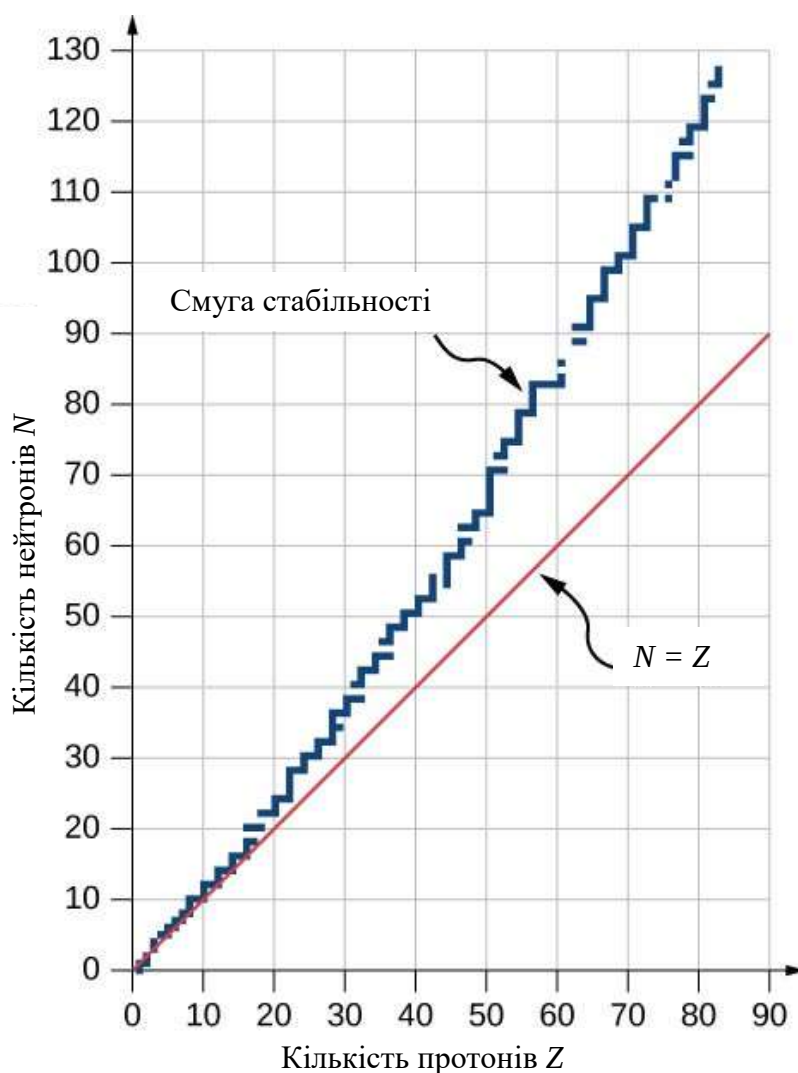


Рис. 5.3. На цьому графіку зображено кількість нейтронів N в залежності від числа протонів Z для стабільних атомних ядер. Більші ядра мають більше нейтронів, ніж протонів

Для даного значення Z можливі кілька значень N (сині точки). При малих значеннях Z число нейтронів дорівнює числу протонів ($N = Z$) і дані потрапляють на червону лінію. При великих значеннях Z число нейтронів більше числа протонів ($N > Z$) і точки даних знаходяться вище червоної лінії. Кількість нейтронів, як правило, більше, ніж число протонів, коли $Z > 15$.

Діаграма, заснована на цьому графіку, яка містить більш детальну інформацію про кожне ядро, наведена на рис. 5.4. Цю діаграму називають **картою нуклідів**. Кожна клітинка або плитка представляє окреме ядро. Ядра на цій діаграмі розташовані в порядку зростання N (вздовж горизонтального напрямку) та зростання Z (вздовж вертикального напрямку). Атоми, які містять ядра з однаковою кількістю протонів (Z) і різною кількістю нейтронів (N), називають **ізотопами**. Наприклад, водень має три ізотопи: звичайний водень (1 протон, без нейтронів), дейтерій (один протон і один нейтрон) і тритій (один протон і два нейтрони). Ізотопи даного атома мають однакові хімічні властивості, оскільки ці властивості визначаються взаємодією між зовнішніми електронами атома, а не нуклонами.

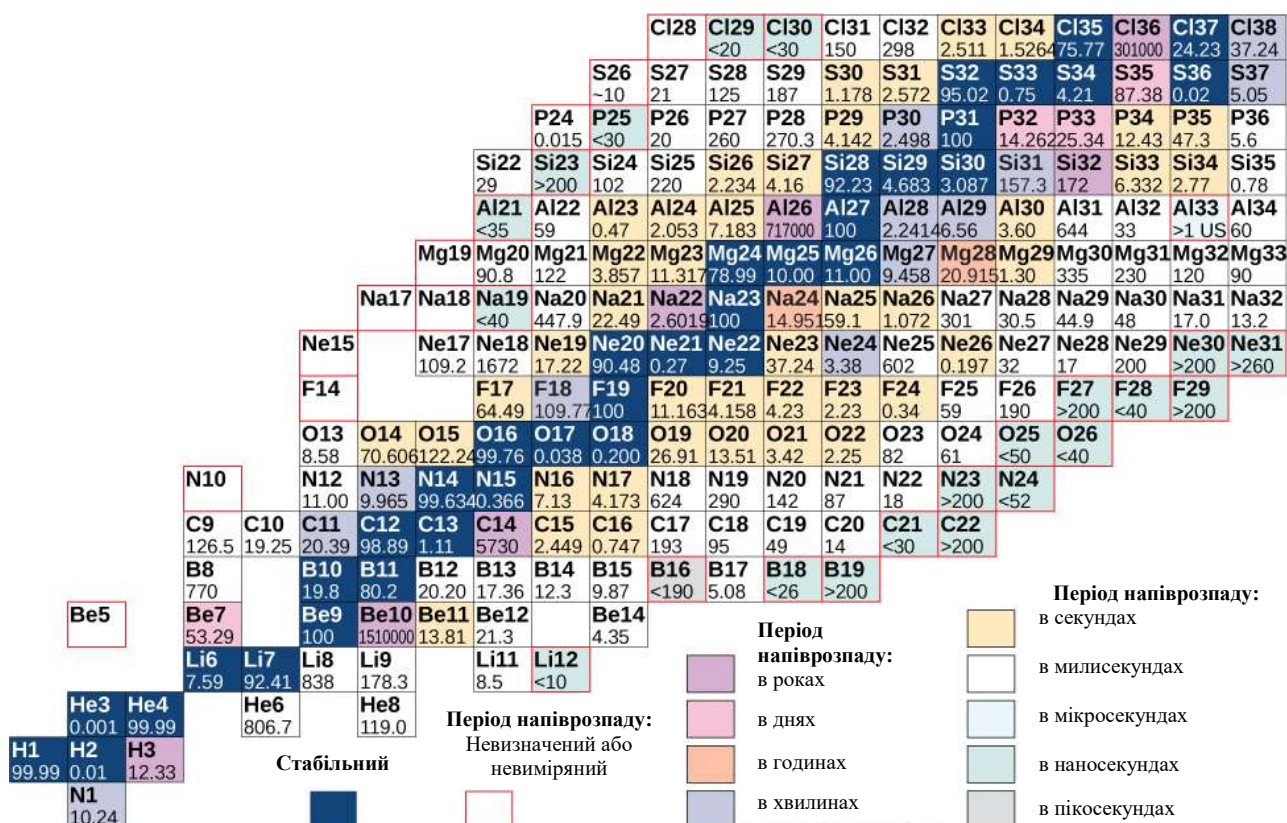


Рис. 5.4. Часткова діаграма нуклідів. Для стабільних ядер (темно-синій фон) значення клітинок представляють відсоток знайдених на Землі ядер з однаковим атомним номером (відсоток поширеності). Для нестабільних ядер число представляє період напіврозпаду

Наприклад, вода, яка містить дейтерій, а не водень («важка вода»), виглядає та смакує як звичайна вода. У табл. 5.1 наведено список поширених ізотопів.

Таблиця 5.1

Ізотопи

Елемент	Символ	Масове число	Маса (атомні одиниці маси)	Відсоток від загальної кількості*	Період напіврозпаду**
Водень	H	1	1,0078	99,99	стабільний
	² H або D	2	2,0141	0,01	стабільний
	³ H	3	3,0160	—	12,32 років
Вуглець	¹² C	12	12,0000	98,91	стабільний
	¹³ C	13	13,0034	1,1	стабільний
	¹⁴ C	14	14,0032	—	5730 років

Елемент	Символ	Масове число	Маса (атомні одиниці маси)	Відсоток від загальної кількості*	Період напіврозпаду**
Азот	^{14}N	14	14,0031	99,6	стабільний
	^{15}N	15	15,0001	0,4	стабільний
	^{16}N	16	16,0061	–	7,13 с
Кисень	^{16}O	16	15,9949	99,76	стабільний
	^{17}O	17	16,9991	0,04	стабільний
	^{18}O	18	17,9992	0,20	стабільний
	^{19}O	19	19,0035	–	26,46 с

*Заборонено запис, якщо менше 0,001. **Стабільний, якщо > 10 с

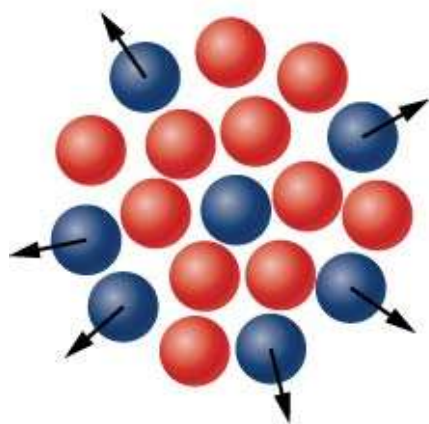
Чому у важких ядрах нейтронів більше, ніж протонів (рис. 5.5)? Відповідь на це питання вимагає розуміння сил всередині ядра. Існує два типи сил: (1) далекосяжна електростатична (кулонівська) сила, яка змушує позитивно заряджені протони відштовхуватися один від одного; і (2) **сильна ядерна сила** короткої дії, яка змушує всі нуклони в ядрі притягуватися один до одного.

Можливо, ви також чули про «слабку» ядерну силу. Ця сила відповідає за деякі ядерні розпади, але, як випливає з назви, вона не відіграє ролі в стабілізації ядра проти сильного кулонівського відштовхування, яке воно відчуває. Ми обговорюємо сильну ядерну силу більш детально в наступному розділі, коли ми розглядатимемо фізику елементарних частинок.

Ядерна стабільність виникає, коли сили тяжіння між нуклонами компенсують електростатичні сили відштовхування між усіма протонами в ядрі. Для важких ядер ($Z > 15$) надлишок нейтронів необхідний, щоб електростатичні взаємодії не розбили ядро, як показано на рис. 5.3.

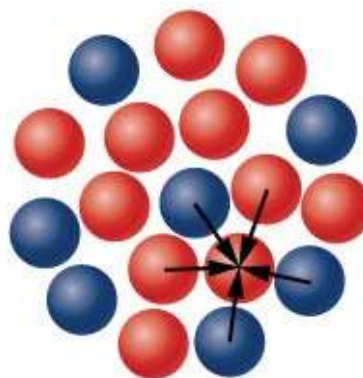
Детальне дослідження показує більшу стабільність і більш привабливі ядерні сили, коли нейтрони і протони знаходяться в парах. Фізик німецького походження Марія Гепперт-Майєр визначила ці характеристики на основі певної кількості нуклонів, що призвело до розробки нею теорії ядерної оболонки. Гепперт Майєр та інші дослідники визнали, що «закриті» ядерні оболонки стабільніші за інші. Ця теорія виявилася дуже успішною в поясненні рівнів ядерної енергії, ядерного розпаду та більшої стабільності ядер із закритими оболонками. Разом з Йоганнесом Йенсенем і Юджином Вігнером Марія Гепперт Майєр отримала Нобелівську премію за цю роботу, ставши другою жінкою, яка отримала цю нагороду.

Сила відштовхування між
віддаленими протонами



(a)

Сила притягання між
сусідніми нуклонами



(b)

Рис. 5.5. (a) Електростатична сила є відштовхуючою та має велику дію. Стрілки представляють зовнішні сили, що діють на протони (синім кольором) на ядерній поверхні, а протон (також синім кольором) знаходиться в центрі. (b) Сильна ядерна сила діє між сусідніми нуклонами. Стрілки представляють сили тяжіння, що діють нейтроном (червоним) на його найближчих сусідів

Через існування стабільних ізотопів ми повинні бути особливо обережними, вказуючи масу елемента. Наприклад, мідь (Cu) має два стабільні ізотопи:

$^{63}_{29}\text{Cu}$ (62,929595 г/моль) за кількістю 69,09 %,
 $^{65}_{29}\text{Cu}$ (64,927786 г/моль) за кількістю 30,91 %.

Враховуючи ці дві «версії» Cu, яка маса цього елемента? **Атомна маса** елемента визначається як середньозважене значення мас його ізотопів. Таким чином, атомна маса Cu становить:

$$m_{\text{Cu}} = (62,929595) 0,6909 + (64,927786) (0,3091) = 63,55 \text{ г/моль.}$$

Масу окремого ядра часто виражають в **атомній одиниці маси** (u), де $u = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ кг}$. (Одиниця атомної маси визначається як 1/12 маси ядра ^{12}C). В атомних одиницях маси маса ядра гелію ($A = 4$) дорівнює приблизно 4 u. Ядро гелію також називають альфа (α -) частинкою.

Розмір ядра

Найпростішою моделлю ядра є щільно упакована нуклонами сфера. Тому об'єм ядра V пропорційний числу нуклонів A :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = kA,$$

де r — **радіус ядра**, а k — константа з одиницями об'єму. Розв'язуючи r , маємо:

$$r = r_0 A^{1/3}, \quad (5.3)$$

де r_0 є константою. Для водню ($A = 1$), r_0 відповідає радіусу одного протона. Експерименти з розсіювання підтверджують це загальне співвідношення для широкого діапазону ядер, і вони означають, що нейтрони мають приблизно такий

же радіус, як і протони. Експериментально виміряне значення для r_0 становить приблизно 1,2 фемтометра (нагадаємо, що $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$).

Приклад 5.1. Залізне ядро

Знайдіть радіус (r) і густину (ρ) ядра Fe-56. Припустимо, що маса ядра Fe-56 дорівнює приблизно 56 у.

Стратегія

(а) Знаходження радіуса ^{56}Fe є простим застосуванням формули $r = r_0 A^{1/3}$, де $A = 56$. (б) Щоб знайти приблизну густину цього ядра, припустимо, що ядро сферичне. Обчисліть його об'єм, використовуючи радіус, знайдений у частині (а), а потім знайдіть його густину $\rho = m / V$.

Розв'язок

а. Радіус ядра визначається так:

$$r = r_0 A^{1/3}.$$

Підставляючи значення для r_0 і A отримуємо:

$$r = (1,2 \text{ фм})(56)^{1/3} = (1,2 \text{ фм})(3,83) = 4,6 \text{ фм}.$$

б. Густина визначається як $\rho = m / V$, так що для кулі радіуса r

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{(4/3)\pi r^3}.$$

Підстановка відомих значень дає:

$$\rho = \frac{56 \text{ у}}{(1,33)(3,14)(4,6 \text{ фм})^3} = 0,138 \text{ у/фм}^3.$$

Перетворення в одиниці кг/м^3 , дає:

$$\rho = (0,138 \text{ у/фм}^3)(1,66 \times 10^{-27} \text{ кг/у}) \left(\frac{1 \text{ фм}}{10^{-15}} \right) = 2,3 \times 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Обговорення

а. Встановлено, що радіус ядра Fe-56 становить приблизно 5 фм, отже, його діаметр становить близько 10 фм, або 10^{-14} м . У попередніх обговореннях експериментів Резерфорда з розсіювання легке ядро було оцінено як 10^{-15} м в діаметрі. Тому результат, показаний для ядра середнього розміру, є розумним.

б. Виявлена тут густина може здатися неймовірною. Однак це узгоджується з попередніми коментарями про те, що ядро містить майже всю масу атома в крихітній області простору. Один кубічний метр ядерної речовини має таку саму масу, як і куб води зі стороною 61 км.

Перевірте своє розуміння 5.1

Ядро X у два рази більше за ядро Y. Яке співвідношення їхніх атомних мас?

Вправи до п. 5.1 Властивості ядер

1. Знайдіть атомні номери, масові числа та числа нейтронів для (а) $^{58}_{29}\text{Cu}$, (б) $^{24}_{11}\text{Na}$, (в) $^{210}_{84}\text{Po}$, (г) $^{45}_{20}\text{Ca}$, та (д) $^{206}_{82}\text{Pb}$.
2. Срібло має два стабільних ізотопи. Ядро $^{107}_{47}\text{Ag}$ має атомну масу 106,905095 г/моль у кількості 51,83%; тоді як $^{109}_{47}\text{Ag}$ має атомну масу 108,904754 г/моль у кількості 48,17%. Знайдіть атомну масу елемента срібла.
3. Маса (M) і радіус (r) ядра можна виразити через масове число A . (а) Покажіть, що густина ядра не залежить від A . (б) Обчисліть густину ядра золота (Au). Порівняйте свою відповідь із відповіддю щодо заліза (Fe).
4. Частинка має масу, що дорівнює 10 у. Якщо ця маса повністю перетворюється на енергію, скільки енергії виділяється? Виразіть відповідь у мегаелектронвольтах (MeV). (Нагадуємо, що $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Дж}$).
5. Знайти довжину сторони куба, маса якого дорівнює 1,0 кг і густина ядерної речовини.
6. Деталі, які ви можете спостерігати за допомогою зонда, обмежені його довжиною хвилі. Обчисліть енергію частинки, яка має довжину хвилі $1 \times 10^{-16} \text{ м}$, досить малою, щоб виявити деталі приблизно в одну десяту розміру нуклона.

5.2. Ядерна енергія зв'язку

Сили, які зв'язують нуклони в атомному ядрі, набагато більші, ніж сили, які зв'язують електрон з атомом за допомогою електростатичного притягання. Це видно з відносних розмірів атомного ядра й атома (10^{-15} і 10^{-10} м, відповідно). Таким чином, енергія, необхідна для виділення нуклона з ядра, набагато більша, ніж енергія, необхідна для видалення (або іонізації) електрона в атомі. Загалом, усі ядерні зміни включають велику кількість енергії на частинку, що вступає в реакцію. Це має численні практичні застосування.

Дефект маси

Згідно з експериментами з ядерними частинками, загальна маса ядра ($m_{\text{яд}}$) менше суми мас складових його нуклонів (протонів і нейтронів). Різниця мас, або **дефект маси**, визначається так:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{яд}}, \quad (5.4)$$

де Zm_p – загальна маса протонів, $(A - Z)m_n$ – загальна маса нейтронів, $m_{\text{яд}}$ – маса ядра. Відповідно до спеціальної теорії відносності Ейнштейна, маса є мірою повної енергії системи ($E = mc^2$). Отже, повна енергія ядра менша від суми енергій нуклонів, що входять до його складу. Таким чином, утворення ядра із системи ізольованих протонів і нейтронів є **екзотермічною реакцією**, що означає вивільнення енергії. Енергія, що випромінюється в цьому процесі, дорівнює (Δmc^2).

А тепер уявіть, що цей процес відбувається у зворотному напрямку. Замість утворення ядра в систему вводиться енергія, щоб розбити ядро (рис. 5.6). Кількість необхідної енергії називають повною **енергією зв'язку**, $E_{зв}$.

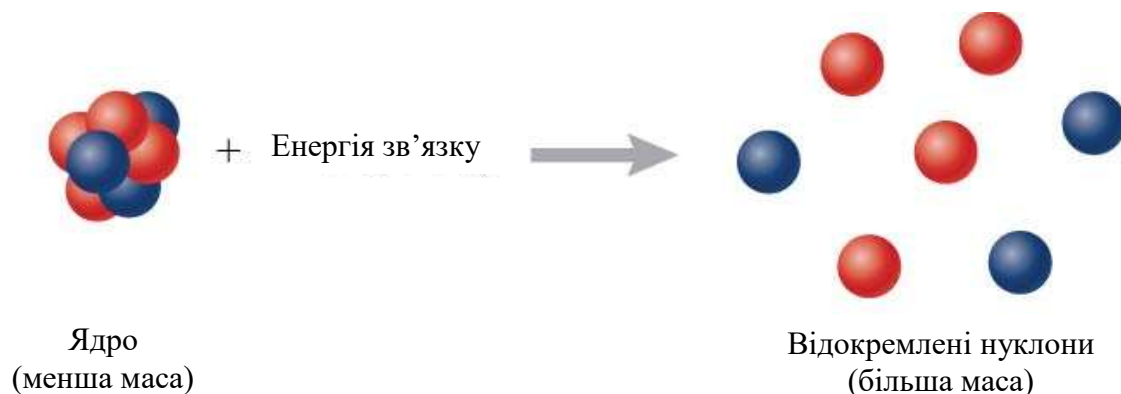


Рис. 5.6. Енергія зв'язку — це енергія, необхідна для розщеплення ядра на складові протони та нейтрони. Система розділених нуклонів має більшу масу, ніж система зв'язаних нуклонів

Енергія зв'язку

Енергія зв'язку дорівнює кількості енергії, що виділяється при утворенні ядра, і тому визначається так:

$$E_{зв} = (\Delta m)c^2. \quad (5.5)$$

Експериментальні результати показують, що енергія зв'язку для ядра з масовим числом $A > 8$ приблизно пропорційна загальній кількості нуклонів у ядрі A . Енергія зв'язку ядра магнію (^{24}Mg), наприклад, приблизно вдвічі більше, ніж для ядра вуглецю (^{12}C).

Приклад 5.2. Дефект маси та енергія зв'язку дейтрона

Обчисліть дефект маси та енергію зв'язку дейтрона. Маса дейтрона становить $m_D = 3,34359 \times 10^{-27}$ кг, або $m_D = 1875,61$ MeV/c².

Розв'язок

З рівняння 5.4 дефект маси для дейтрона дорівнює:

$$\Delta m = m_p + m_n - m_D = (938,28 + 939,57 - 1875,61) \text{ MeV}/c^2 = 2,24 \text{ MeV}/c^2$$

Тоді енергія зв'язку дейтрона дорівнює:

$$E_{зв} = (\Delta m)c^2 = (2,24 \text{ MeV}/c^2)(c^2) = 2,24 \text{ MeV}.$$

Щоб розщепити дейтрон на протон і нейтрон, потрібно понад два мільйони електронвольт. Це дуже велике значення вказує на велику силу ядерної сили. Для порівняння, найбільша кількість енергії, необхідна для вивільнення електрона, зв'язаного з атомом водню силою Кулона (електромагнітною силою), становить приблизно 10 eV.

Графік енергії зв'язку на один нуклон

У ядерній фізиці однією з найважливіших експериментальних величин є **енергія зв'язку на нуклон**, яка визначається як

$$\delta E_{\text{зв}} = \frac{E_{\text{зв}}}{A}. \quad (5.6)$$

Ця величина є середньою енергією, необхідною для видалення окремого нуклона з ядра, аналогічно енергії іонізації електрона в атомі. Якщо $\delta E_{\text{зв}}$ відносно велике, ядро відносно стабільне. Значення $\delta E_{\text{зв}}$ розраховуються з експериментів ядерного розсіювання.

Графік залежності енергії зв'язку на один нуклон від масового числа A наведено на рис. 5.7.

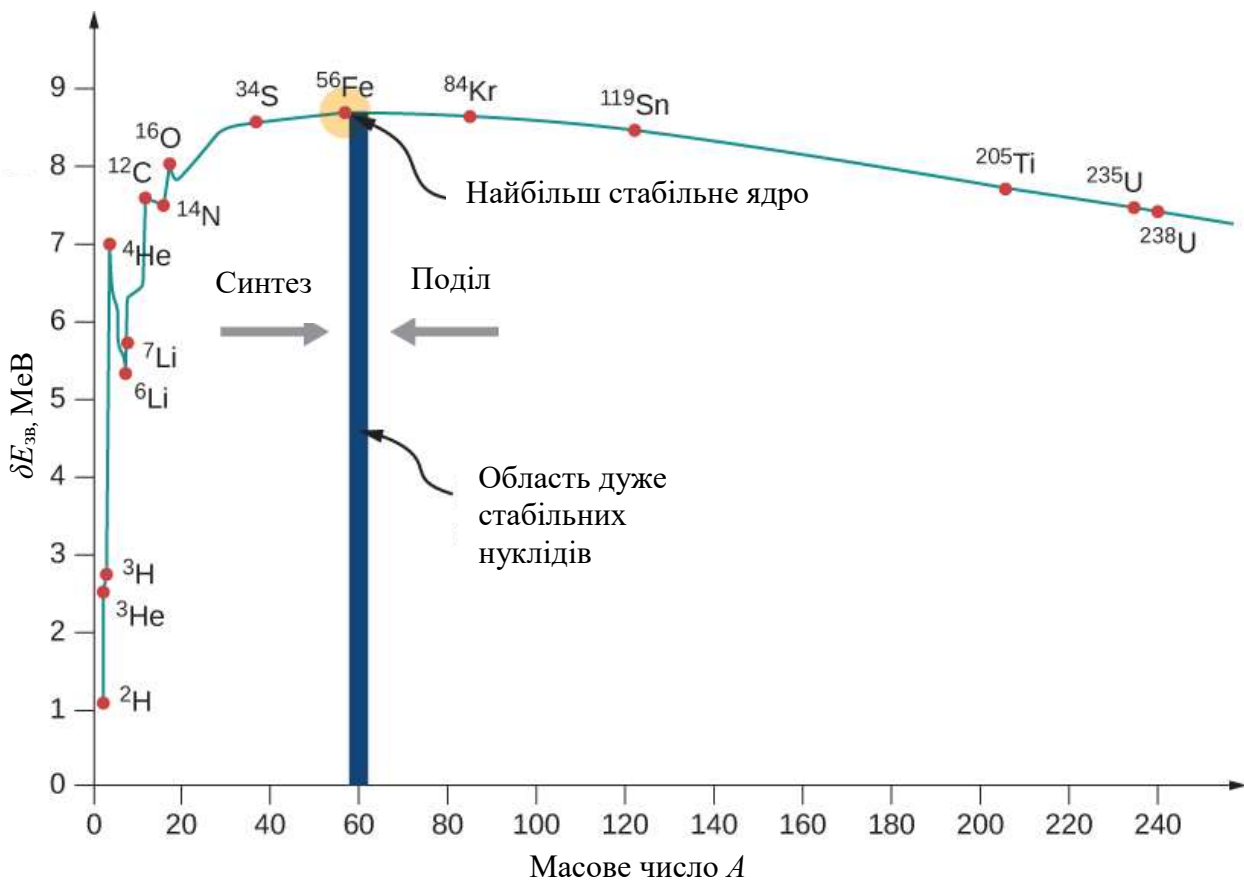


Рис. 5.7. На цьому графіку енергії зв'язку на нуклон для стабільних ядер $\delta E_{\text{зв}}$ є найбільшим для ядер з масою близько ^{56}Fe . Тому злиття ядер з масовими числами, значно меншими за Fe, і поділ ядер з масовими числами, більшими за Fe, є екзотермічними процесами

Багато фізиків вважають цей графік одним із найважливіших у фізиці. Два зауваження: по-перше, типові значення $\delta E_{\text{зв}}$ коливаються від 6 MeV до 10 MeV із середнім значенням приблизно 8 MeV. Іншими словами, потрібно кілька мільйонів електронвольт, щоб вирвати нуклон із типового ядра, у порівнянні з 13,6 eV, щоб іонізувати електрон в основному стані водню. Ось чому ядерну силу називають «сильною» ядерною силою.

По-друге, графік піднімається при малих A , пік дуже близько до заліза (Fe, $A = 56$), а потім знижується зі збільшенням A . Пікове значення свідчить про те,

що ядро заліза є найстабільнішим ядром у природі (саме тому ядерний синтез у ядрах зірок закінчується Fe). Причина, по якій графік піднімається і знижується, пов'язана з конкуруючими силами в ядрі. При малих значеннях A ядерні сили тяжіння між нуклонами переважають над електростатичними силами відштовхування між протонами. Але при великих значеннях A електростатичні сили відштовхування між протонами починають домінувати, і ці сили мають тенденцію розбивати ядро, а не утримувати його разом.

Як ми побачимо, графік залежності $\delta E_{\text{зв}}$ від A вказує, що ядра, під час розділення або об'єднання (синтезу), вивільняють величезну кількість енергії. Це є основою для широкого кола явищ, від виробництва електроенергії на атомній електростанції до сонячного світла.

Приклад 5.3. Зв'язані альфа-нукліди

Обчисліть енергію зв'язку на один нуклон ${}^4\text{He}$ (α -частинка).

Стратегія

Визначте загальну енергію зв'язку ($E_{\text{зв}}$) за допомогою рівняння $E_{\text{зв}} = (\Delta m)c^2$, де Δm – це дефект маси. Для отримання енергії зв'язку на нуклон $E_{\text{зв}}$ ділиться на A .

Розв'язок

Для ${}^4\text{He}$, маємо $Z = N = 2$. Повна енергія зв'язку становить:

$$E_{\text{зв}} = \{[2m_p + 2m_n] - m({}^4\text{He})\}c^2.$$

Маса $m({}^4\text{He}) = 4,002602 \text{ у}$, $m_p = 1,007825 \text{ у}$, $m_n = 1,008665 \text{ у}$. Таким чином маємо:

$$E_{\text{зв}} = (0,030378 \text{ у})c^2.$$

Відзначаючи, що $1 \text{ у} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$, ми знаходимо

$$E_{\text{зв}} = (0,030378)(931,5 \text{ MeV}/c^2)c^2 = 28,3 \text{ MeV}.$$

Оскільки $A = 4$, повна енергія зв'язку на нуклон становить:

$$\delta E_{\text{зв}} = 7,07 \text{ MeV/нуклон}.$$

Обговорення

Зверніть увагу, що енергія зв'язку на нуклон для ${}^4\text{He}$ значно більше, ніж для ізоотопів водню (лише $\approx 3 \text{ MeV/нуклон}$). Тому ядра гелію не можуть розщепити ізотопи водню без введення в систему енергії.

Перевірте своє розуміння 5.2

Якщо енергія зв'язку на один нуклон велика, це ускладнює чи полегшує відрив нуклона від ядра?

Вправи до п. 5.2. Ядерна енергія зв'язку

1. Скільки енергії буде виділено, якщо шість атомів водню та шість нейтронів об'єднуються, щоб утворитися ${}^{12}_6\text{C}$?

2. Знайти дефект маси та енергію зв'язку ядра гелію-4.
3. ^{56}Fe є одним з найбільш міцно зв'язаних з усіх нуклідів. Це становить більше ніж 90% природного заліза. Зауважте, що ^{56}Fe має парне число протонів і нейтронів. Обчисліть енергію зв'язку на один нуклон для ^{56}Fe і порівняйте його з наближеним значенням, отриманим з графіка на рис. 5.7.
4. ^{209}Bi є найважчим стабільним нуклідом, і його питома енергія зв'язку низька порівняно з нуклідами середньої маси. Обчисліть питому енергію зв'язку для цього ядра та порівняйте її з наближеним значенням, отриманим із графіка на рис. 5.7.
5. (а) Обчисліть питому енергію зв'язку для ^{235}U , рідший із двох найпоширеніших ізоотопів урану; (б) Обчислити питому енергію зв'язку для ^{238}U . (Більшість у природі урану ^{238}U .)
6. Той факт, що пік питомої енергії зв'язку досягає приблизно $A = 60$ означає, що діапазон дії сильної ядерної сили становить приблизно діаметр цього ядра. (а) Обчисліть діаметр ядра $A = 60$. (б) Порівняйте питому енергію зв'язку для ^{58}Ni і ^{90}Sr . Перший є одним із найбільш міцно зв'язаних нуклідів, тоді як другий є більшим і менш міцно зв'язаним.

5.3. Радіоактивний розпад

У 1896 році Антуан Беккерель виявив, що багата на уран порода випромінює невидимі промені, які можуть затемнити фотопластинку в закритому контейнері. Вчені пропонують три аргументи на користь ядерного походження цих променів. По-перше, вплив випромінювання не змінюється залежно від хімічного стану; тобто, чи є випромінюючий матеріал у формі елемента чи сполуки. По-друге, випромінювання не змінюється зі змінами температури чи тиску — обидва фактори можуть достатньою мірою впливати на електрони в атомі. По-третє, дуже велика енергія невидимих променів (до сотень еВ) не узгоджується з переходами атомних електронів (лише кілька еВ). Сьогодні це випромінювання пояснюється перетворенням маси в енергію глибоко в ядрі атома. Спонтанне випромінювання ядер називають **ядерною радіоактивністю** (рис. 5.8).



Рис. 5.8. Міжнародний символ іонізуючого випромінювання є загальновизнаним символом попередження про ядерне випромінювання

Закон радіоактивного розпаду

Коли окреме ядро перетворюється на інше з випромінюванням випромінювання, кажуть, що ядро **розпадається**. Радіоактивний розпад відбувається для всіх ядер с $Z > 82$, а також для деяких нестабільних ізотопів с $Z < 83$. Швидкість розпаду пропорційна кількості вихідних ядер N у речовині. Кількість ядер – dN , які розпалися в інтервалі часу dt , дорівнює:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (5.7)$$

де λ називають **постійною розпаду**. (Знак «мінус» вказує на те, що кількість початкових ядер зменшується з часом). Іншими словами, чим більше ядер доступне для розпаду, тим більше вони розпадаються (за час dt). Це рівняння можна переписати так:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \quad (5.8)$$

Інтегрування (5.8) дозволяє визначити N_0 – число ядер у момент часу $t = 0$:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N} = -\int_0^t \lambda dt'. \quad (5.9)$$

Це дає нам:

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t. \quad (5.10)$$

Звідки маємо **закон радіоактивного розпаду**: загальна кількість N радіоактивних ядер, що не розпалися після часу t дорівнює:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (5.11)$$

де λ – є константою розпаду для конкретного ядра.

Загальна кількість ядер N зменшується спочатку дуже швидко, а потім повільніше (рис. 5.9).

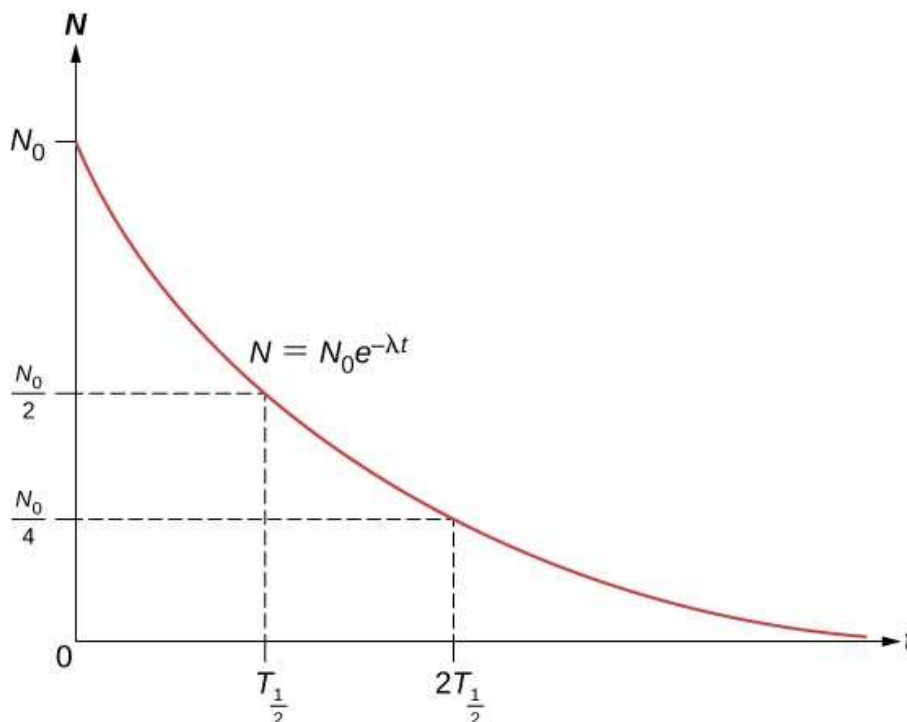


Рис. 5.9. Графік закону радіоактивного розпаду демонструє, що кількість ядер, що не розпалися у зразку, швидко зменшується протягом перших моментів розпаду

Період **напіврозпаду** ($T_{1/2}$) радіоактивної речовини визначається як час розпаду половини початкових ядер (або час, протягом якого залишається половина початкових ядер). Періоди напіврозпаду нестабільних ізотопів наведено на діаграмі нуклідів на рис. 5.4. Тому кількість радіоактивних ядер, що залишилися після цілого (n) періоду напіврозпаду, дорівнює:

$$N = \frac{N_0}{2^n}. \quad (5.12)$$

Якщо константа розпаду (λ) велика, період напіврозпаду малий, і навпаки. Щоб визначити залежність між цими величинами, зауважте, що коли $t = T_{1/2}$, тоді $N = N_0/2$. Таким чином, рівняння 5.10 можна переписати так:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}. \quad (5.13)$$

Розділивши обидві сторони на N_0 і взявши натуральний логарифм, отримуємо:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda T_{1/2}}, \quad (5.14)$$

що зводиться до виразу:

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}. \quad (5.15)$$

Таким чином, якщо ми знаємо період напіврозпаду $T_{1/2}$ радіоактивної речовини, ми можемо знайти константу її розпаду. Тривалість **життя** $\bar{T}$ радіоактивної речовини визначається як середній проміжок часу, протягом якого ядро існує до розпаду. Тривалість життя речовини – це просто величина, зворотна константі розпаду:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.16)$$

Активність A визначається як величина швидкості розпаду:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (5.17)$$

Нескінченно мала зміна dN в інтервалі часу dt є від'ємною, оскільки кількість батьківських (що нерозпалися) частинок зменшується, тому активність (A) додатна. Визначивши початкову активність як $A_0 = \lambda N_0$, маємо:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (5.18)$$

Отже, радіоактивність A експоненціально спадає з часом (рис. 5.10).

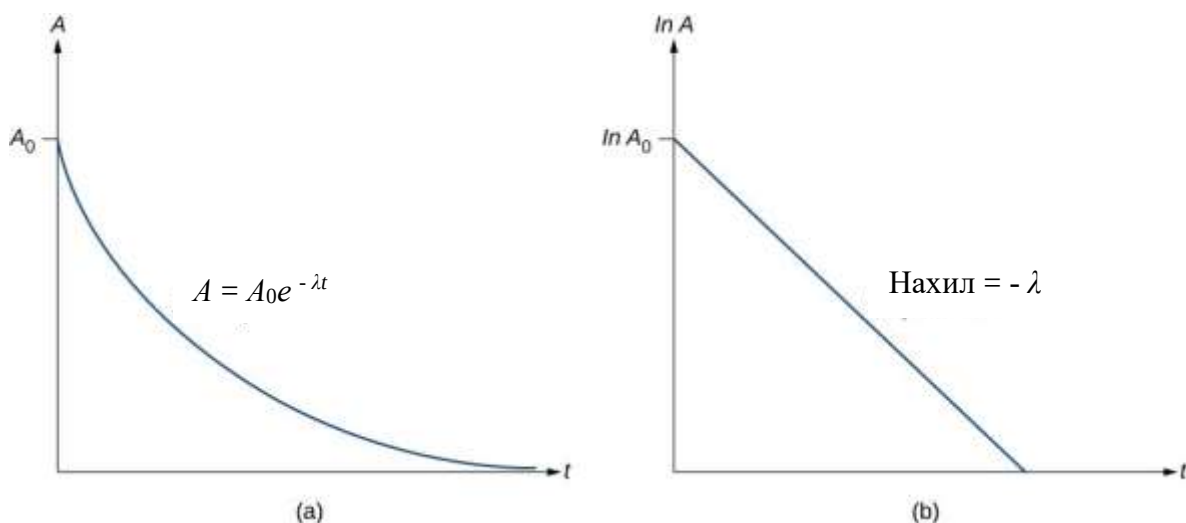


Рис. 5.10. (а) Графік радіоактивності як функції часу (б) Якщо побудувати графік залежності $\ln A$ від t , тоді отримуємо пряму лінію з коефіцієнтом нахилу $-\lambda$

Приклад 5.4. Константа розпаду та активність стронцію-90

Період напіврозпаду стронцію-90, $^{90}_{38}\text{Sr}$, становить 28,8 років. Знайдіть (а) константу його розпаду та (б) початкову активність 1,00 г матеріалу.

Стратегія

Можемо знайти константу розпаду безпосередньо з рівняння 5.15. Щоб визначити активність, нам спочатку потрібно знайти кількість присутніх ядер.

Розв'язок

а. Знайдемо константу розпаду:

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \left(\frac{0,693}{T_{1/2}} \right) \left(\frac{1 \text{ рік}}{3,16 \times 10^7 \text{ с}} \right) = 7,61 \times 10^{-10} \text{ с}^{-1}.$$

б. Молярна маса $^{90}_{38}\text{Sr}$ становить 89,91 г/моль. Використавши число Авогадро $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, знаходимо початкову кількість ядер в 1,00 г:

$$N_0 = \frac{1,00 \text{ г}}{89,91 \text{ г}} \cdot 6,022 \times 10^{23} = 6,7 \times 10^{21} \text{ ядер}.$$

Тоді активність A_0 1,00 г стронцію-90 в момент часу $t = 0$ дорівнює:

$$A_0 = \lambda N_0 = (7,61 \times 10^{-10} \text{ с}^{-1})(6,7 \times 10^{21} \text{ ядер}) = 5,1 \times 10^{12} \text{ розпад/с}.$$

Використавши формулу $A = A_0 e^{-\lambda t}$, де $t = T_{1/2}$, а $\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}$, отримуємо:

$$A = A_0 e^{-(0,693/T_{1/2})T_{1/2}} = A_0 e^{-0,693} = A_0/2. \quad (5.19)$$

Таким чином, активність зменшується вдвічі після одного періоду напіврозпаду.

Ми можемо визначити константу розпаду λ шляхом вимірювання активності як функції часу. Беручи натуральний логарифм лівої та правої частин рівняння 5.17, отримуємо:

$$\ln A = -\lambda t + \ln A_0. \quad (5.20)$$

Це рівняння має лінійну форму $y = mx + b$. Якщо ми побудуємо графік залежності $\ln A$ від t , то отримаємо пряму лінію з нахилом $-\lambda$ і $y_0(t = 0) = \ln A_0$ (рис. 5.10 (b)).

Активність A виражається в одиницях **беккерелів** (Бк), де один 1 Бк = 1 розпад за секунду. Ця величина також може бути виражена в розпадах за хвилину або розпадах за рік. Однією з найпоширеніших одиниць вимірювання активності є **кюри (Ки)**, що визначається як активність 1 г ^{226}Ra . Зв'язок між Бк і Ки є таким:

$$1 \text{ Ки} = 3,70 \times 10^{10} \text{ Бк}.$$

Приклад 5.5. Чому дорівнює активність ^{14}C у живій тканині?

Приблизно 20 % тіла людини за масою становить вуглець. Розрахувати активність за рахунок ^{14}C в 1,00 кг вуглецю, що міститься в живому організмі. Виразіть активність в одиницях Бк і Ки.

Стратегія

Активність ^{14}C визначається за допомогою рівняння $A_0 = \lambda N_0$, де λ – константа розпаду, N_0 – кількість радіоактивних ядер. Кількість ^{14}C ядер у

пробі 1,00 кг визначають у два прийоми. Спочатку визначаємо кількість ^{12}C ядер за допомогою поняття моль. По-друге, ми множимо це значення на $1,3 \times 10^{-12}$ (відома кількість ^{14}C у зразку вуглецю з живого організму) для визначення кількості ^{14}C ядер в живому організмі. Константа розпаду визначається за відомим періодом напіврозпаду ^{14}C (доступно на рис. 5.4).

Розв'язок

Один моль вуглецю має масу 12,0 г, оскільки він є майже чистим ^{12}C . Отже, кількість ядер вуглецю в кілограмі дорівнює:

$$N(^{12}\text{C}) = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{12,0 \text{ г/моль}} \times (1000 \text{ г}) = 5,02 \times 10^{25}.$$

Кількість ядер ^{14}C в 1 кг вуглецю дорівнює:

$$N(^{14}\text{C}) = (5,02 \times 10^{25})(1,3 \times 10^{-12}) = 6,52 \times 10^{13}.$$

Тепер ми можемо знайти активність A за допомогою рівняння $A = \frac{0,693N}{T_{1/2}}$:

$$A = \frac{0,693(6,52 \times 10^{13})}{5730 \text{ років}} = 7,89 \times 10^9 \text{ років}^{-1},$$

або $7,89 \times 10^9$ розпадів на рік. Щоб перетворити це в одиницю Бк, ми просто перетворюємо роки в секунди. Таким чином,

$$A = (7,89 \times 10^9 \text{ років}^{-1}) \frac{1 \text{ рік}}{3,16 \times 10^7} = 250 \text{ Бк}.$$

або 250 розпадів за секунду. Щоб виразити A в кюрі, ми використовуємо визначення кюрі,

$$A = \frac{250 \text{ Бк}}{3,7 \times 10^{10} \text{ Бк/Ки}} = 6,76 \times 10^{-9} \text{ Ки}.$$

Таким чином,

$$A = 6,76 \text{ нКи}.$$

Обговорення

Приблизно 20 % маси людського тіла становить вуглець. Сотні ^{14}C розпадів відбуваються в організмі людини щосекунди. Вуглець-14 та інші природні радіоактивні речовини в організмі складають фонове опромінення людини ядерним випромінюванням. Як ми побачимо далі в цьому розділі, цей рівень активності значно нижчий від максимально рекомендованих доз.

Радіоактивне датування

Радіоактивне датування — це метод, який використовує природну радіоактивність для визначення віку матеріалу, такого як скеля чи стародавній артефакт. Основний підхід полягає в оцінці початкової кількості ядер у матеріалі та поточної кількості ядер у матеріалі (після розпаду), а потім використання відомого значення константи розпаду λ і рівняння 5.10 для розрахунку загального часу розпаду t .

Важливою речовиною радіоактивного датування є **вуглець-14**. Ядра вуглецю-14 утворюються під час високоенергетичного сонячного випромінювання ядер ^{14}N у верхніх шарах атмосфери, які згодом розпадаються з періодом напіврозпаду 5730 років. Радіоактивний вуглець має таку ж хімічну структуру, як і стабільний вуглець, тому він поєднується з екосферою і з часом стає частиною кожного живого організму. Вуглець-14 містить 1,3 частини на трильйон нормального вуглецю. Тому, якщо ви знаєте кількість ядер вуглецю в об'єкті, ви помножите це число на $1,3 \times 10^{-12}$, щоб знайти число ядер ^{14}C у цьому об'єкті. Коли організм гине, обмін вуглецю з навколишнім середовищем припиняється, і ^{14}C не поповнюється під час розпаду.

Порівнюючи чисельність ^{14}C в артефакті, такому як обгортки мумії, з нормальною кількістю живих тканин можна визначити вік мумії (або час після смерті людини). Датування вуглецем-14 можна використовувати для біологічних тканин віком до 50 000 років, але, як правило, найточніше для молодших зразків, оскільки велика кількість ^{14}C ядер у них більше. Дуже старі біологічні матеріали не містять ^{14}C взагалі. Достовірність вуглецевого датування можна перевірити іншими способами, такими як історичні знання або підрахунок деревних кілець.

Приклад 5.6. Стародавня могилярна печера

У стародавній могилярній печері ваша команда археологів знаходить старовинні дерев'яні меблі. Тільки 80 % оригіналу ^{14}C залишається в деревині. Скільки років меблям?

Стратегія

Постановка задачі передбачає, що $N/N_0 = 0,80$. Тому рівняння $N = N_0 e^{-\lambda t}$ можна використовувати для пошуку добутку λt . Ми знаємо період напіврозпаду ^{14}C , який дорівнює 5730 років, тому ми також знаємо константу розпаду, а отже, і загальний час розпаду t .

Розв'язок

Розв'язування рівняння $N = N_0 e^{-\lambda t}$ і N/N_0 дає нам рівняння:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}.$$

Таким чином,

$$0,80 = e^{-\lambda t}.$$

Взявши натуральний логарифм обох сторін рівняння, знаходимо:

$$\ln 0,80 = -\lambda t,$$

так що

$$-0,223 = -\lambda t.$$

Звідси отримуємо:

$$t = \frac{0,223}{\lambda},$$

де

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{5730 \text{ років}}.$$

Об'єднання цієї інформації дає нам:

$$t = \frac{0,223}{\left(\frac{0,693}{5730 \text{ років}}\right)} = 1844 \text{ р.}$$

Обговорення

Меблям майже 2000 років — вражаюче відкриття. Типова невизначеність при датуванні вуглецем-14 становить приблизно 5 %, тому вік меблів десь між 1750 і 1950 роками. Цей діапазон дат має бути підтверджено іншими доказами, наприклад історичними записами.

Перевірте своє розуміння 5.3

Радіоактивний нуклід має високу швидкість розпаду. Що це означає для його періоду напіврозпаду та активності?

Вправи до п. 5.3. Радіоактивний розпад

1. Зразок радіоактивного матеріалу отримують із дуже старої породи. Графік залежності $\ln A$ від t дає значення нахилу -10^{-9}с^{-1} (див. рис. 5.10 (b)). Який період напіврозпаду цієї речовини?
2. Покажіть, що: $T = \frac{1}{\lambda}$.
3. Період напіврозпаду стронцію $^{91}_{38}\text{Sr}$ становить 9,70 год. Знайдіть (а) його константу розпаду та (б) для початкового зразка 1,00 г — активність через 15 годин.
4. Зразок чистого вуглецю-14 ($T_{1/2} = 5730$ років) має активність 1,0 мкКі. Яка маса зразка?
5. Радіоактивний зразок містить $2,40 \times 10^{-2}$ моль радіоактивного матеріалу, період напіврозпаду якого становить 6,00 год. Скільки моль радіоактивного матеріалу залишається через 6 годин? Через 12 годин? Через 36 годин?
6. Під час археологічних розкопок знайшли старе багаття. Встановлено, що його деревне вугілля містить менше $1/1000$ нормальної кількості ^{14}C . Оцініть мінімальний вік деревного вугілля, зауваживши, що $2^{10} = 1024$.
7. Розрахувати активність R , в кюрі 1,00 г ^{226}Ra . (б) Поясніть, чому ваша відповідь не дорівнює точно 1,00 Кі, враховуючи, що кюрі спочатку мало дорівнювати активності грама радю.
8. Природний уран складається з ^{235}U (відсоток = 0,720 %, $\lambda = 3,12 \times 10^{-17}/\text{с}$) і ^{238}U (відсоток = 99,27 %, $\lambda = 4,92 \times 10^{-18}/\text{с}$). Які були значення у відсоткової кількості ^{235}U і ^{238}U , коли утворилася Земля $4,5 \times 10^9$ років тому?
9. Літаки Другої світової війни мали прилади з сяючими радієвими циферблатами. Радіоактивність одного з таких інструментів була $1,0 \times 10^5$ Бк, коли він був новий. (а) Яка маса ^{226}Ra була присутня? (б) Через кілька років

люмінофор на циферблатах хімічно зіпсувався, але радій не вийшов. Яка активність цього інструменту через 57,0 років після його виготовлення?

10. Джерело ^{210}Po , що використовується у фізичній лабораторії, має активність 1,0 мкКі на дату його підготовки. Студент вимірює радіоактивність цього джерела за допомогою лічильника Гейгера та спостерігає 1500 відліків за хвилину. Він зауважує, що джерело було підготовлено за 120 днів до вимірювань. Яку частку розпадів він спостерігає за допомогою свого детектора?

11. По танках літаки стріляють бронебійними снарядами з сердечниками зі збідненого урану. (Висока густина урану робить їх ефективними). Уран називають збідненим, оскільки з нього ^{235}U видаляється для використання в реакторі і тому він є майже чистим ^{238}U . Збіднений уран помилково називають нерадіоактивним. Щоб продемонструвати, що це неправильно: (а) Обчисліть активність 60,0 г чистого ^{238}U . (б) Обчисліть активність 60,0 г природного урану, нехтуючи ^{234}U і всіма дочірніми нуклідами.

5.4. Ядерні реакції

Ранні експерименти виявили три типи ядерних «променів» або радіації: **альфа (α) промені, бета (β) промені та гамма (γ) промені**. Ці три типи випромінювання розрізняються за здатністю проникати в речовину. Альфа-випромінювання ледь здатне пройти через тонкий аркуш паперу. Бета-випромінювання може проникати в алюміній на глибину близько 3 мм, а гамма-випромінювання може проникати в свинець на глибину 2 і більше сантиметрів (рис. 5.11).

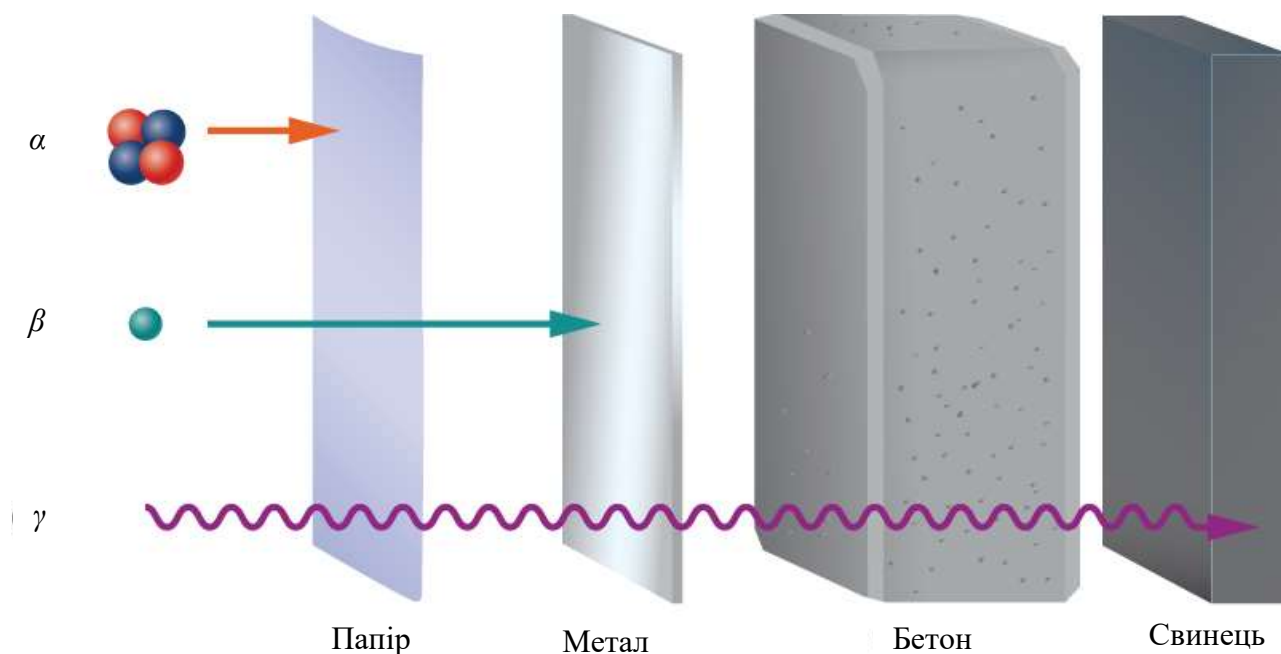


Рис. 5.11. Порівняння глибини проникнення альфа (α), бета (β), і гамма (γ) випромінювання через різні матеріали

Електричні властивості цих трьох типів випромінювання досліджуються, пропускаючи їх через однорідне магнітне поле, як показано на рис. 5.12.

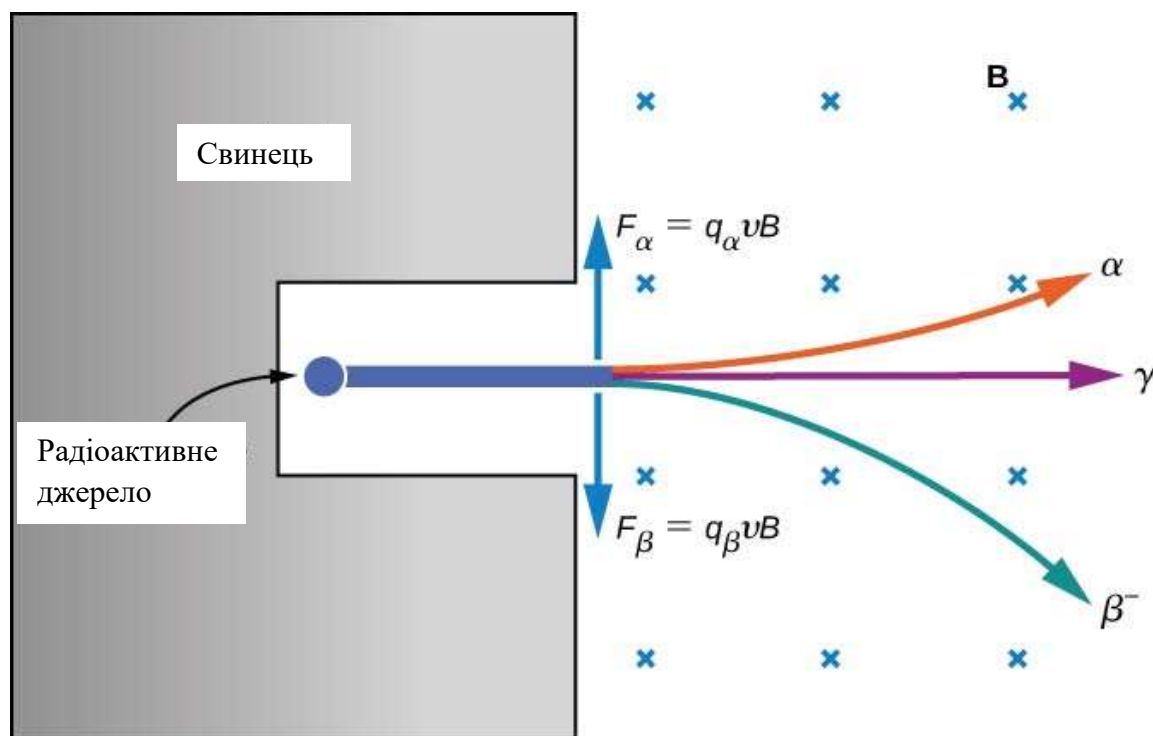


Рис. 5.12. Вплив магнітного поля на альфа (α), бета (β), і гамма (γ) випромінювання. Цей малюнок є лише схематичним. Відносні шляхи частинок залежать від їх мас і початкової кінетичної енергії

Відповідно до рівняння магнітної сили $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, позитивно заряджені частинки відхиляються вгору, негативно заряджені частинки відхиляються вниз, а частинки без заряду проходять крізь магнітне поле без відхилення. Зрештою, α -промені ототожнювалися з ядрами гелію (${}^4\text{He}$), β -промені – з електронами та **позитронами** (позитивно заряджені електрони або **антиелектрони**), і γ -промені – з фотонами високої енергії. Ми детально обговорюємо альфа-, бета- та гамма-випромінювання в решті цього розділу.

Альфа-розпад

Випромінюють α -частинки важкі нестабільні ядра. Під час α -розпаду ядро втрачає два протони і два нейтрони, тому атомний номер зменшується на два, тоді як його масове число зменшується на чотири. Ядро перед розпадом називають **материнським ядром**. Ядро або ядра, що утворюються в результаті розпаду, називають **дочірнім ядром** або дочірніми ядрами. Ми представляємо α -розпад символічно так:

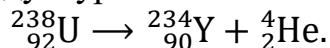


де ${}_Z^AX$ є материнським ядром, ${}_{Z-2}^{A-4}Y$ є дочірнім ядром, і ${}_2^4\text{He}$ є α -частинка.

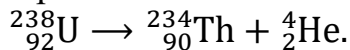
В α -розпаді, ядро з атомним номером Z розпадається на ядро з атомним номером $Z-2$ і атомною масою $A-4$. Цікаво, що мрія стародавніх алхіміків

перетворити інші метали на золото є науково здійсненою за допомогою процесу альфа-розпаду. Зусилля алхіміків провалилися, оскільки вони покладалися на хімічні взаємодії, а не на ядерні.

Прикладом альфа-розпаду є уран-238:



Атомний номер знизився з 92 до 90. Хімічний елемент с $Z = 90$ є торій. Таким чином, уран-238 розпався на торій-234 шляхом випромінювання α -частинки:



Згодом ${}_{90}^{234}\text{Th}$ розкладається завдяки β -випромінюванню з періодом напіврозпаду 24 дні. Енергія, що виділяється в цьому альфа-розпаді, приймає форму кінетичної енергії ядер торію та гелію, хоча кінетична енергія торію менша, ніж гелію, через його більшу масу та меншу швидкість.

Приклад 5.7. Альфа-розпад плутонію

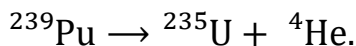
Знайти енергію, випромінювану в α -розпаді ${}^{239}\text{Pu}$.

Стратегія

Енергію, що випромінюється в α -розпаді ${}^{239}\text{Pu}$ можна знайти за допомогою рівняння $E = (\Delta m)c^2$. Треба спочатку знайти Δm , різницю мас між материнським ядром і продуктами розпаду.

Розв'язок

Рівняння розпаду таке:



Таким чином, відповідними масами є маси ${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{235}\text{U}$, і α -частинки або ${}^4\text{He}$, які всі відомі. Початкова маса була $m({}^{239}\text{Pu}) = 239,052157\text{u}$. Кінцева маса – це сума:

$$m({}^{235}\text{U}) + m(\text{He}) = 235,043924\text{u} + 4,002602\text{u} = 239,046526\text{u}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}\Delta m &= m({}^{239}\text{Pu}) - [m({}^{235}\text{U}) + m(\text{He})] = 239,052157\text{u} - 239,046526\text{u} = \\ &= 0,0005631\text{u}\end{aligned}$$

Тепер ми можемо знайти E , ввівши Δm в рівняння:

$$E = (\Delta m)c^2 = (0,0005631\text{u})c^2.$$

Ми знаємо, що $1\text{u} = 931,5\text{MeV}/c^2$, так що маємо:

$$E = (0,0005631)(931,5\text{MeV}/c^2)(c^2) = 5,25\text{MeV}.$$

Обговорення

Енергія, що виділяється при цьому α -розпаді знаходиться в діапазоні МеВ, що у багато разів перевищує енергію хімічної реакції. Більша частина цієї енергії стає кінетичною енергією α -частинки (${}^4\text{He}$ ядро), яке віддаляється з великою швидкістю. Енергія, що забирається від віддачі ядра ${}^{235}\text{U}$ значно менше через його відносно велику масу. Ядро ${}^{235}\text{U}$ можна залишити у збудженому стані, щоб пізніше випромінювати фотони (γ -промені).

Бета-розпад

У більшості β -частинка розпадається (**бета-розпад**) так: або електрон (β^-) або позитрон (β^+) випромінюється ядром. Позитрон має таку саму масу, як і електрон, але заряд $+$. З цієї причини позитрон іноді називають антиелектроном. Як відбувається β -розпад? Можливим поясненням є те, що електрон (позитрон) утримується в ядрі перед розпадом і якимось чином виривається. Щоб отримати приблизну оцінку енергії виходу, розглянемо спрощену модель електрона, захопленого ящиком (або, за термінологією квантової механіки, одновимірною квадратною ямою), яка має ширину типового ядра (10^{-14}м). Згідно з принципом невизначеності Гейзенберга в квантовій механіці, невизначеність імпульсу електрона дорівнює:

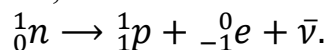
$$\Delta p > \frac{h}{\Delta x} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{м}^2 \cdot \text{кг/с}}{10^{-14} \text{м}} = 6,6 \times 10^{-20} \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Взявши це значення імпульсу (мінімальне) за «справжнє значення», кінетична енергія електрона при виході буде дорівнювати:

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{(6,6 \times 10^{-20} \text{кг} \cdot \text{м/с})^2}{2(9,1 \times 10^{-31} \text{кг})} = 2,0 \times 10^{-9} \text{Дж} = 12,4 \text{МеВ}.$$

Експериментально встановлено, що випущені в β^- -розпаді електрони мають кінетичну енергію порядку лише кількох МеВ. Тому ми робимо висновок, що електрон якимось чином утворюється під час розпаду, а не виходить з ядра. Утворення частинок (анігіляція) описується теоріями, які поєднують квантову механіку та теорію відносності, що є предметом більш складного курсу фізики.

Бета-розпад ядра включає перетворення одного нуклона в інший. Наприклад, нейтрон може розпадатися на протон шляхом випускання електрона (β^-) і майже безмасової частинки, яка називається **антинейтрино** ($\bar{\nu}$):

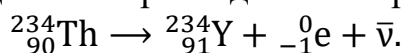


Позначення ${}_{-1}^0e$ використовується для позначення електрона. Його масове число дорівнює 0, оскільки він не є нуклоном, а його атомний номер -1 є таким, щоб позначити, що він має заряд $-e$. Протон представлений ${}_1^1p$ оскільки його масове число та атомний номер дорівнюють 1. Коли це відбувається в атомному ядрі, ми маємо таке рівняння для бета-розпаду:

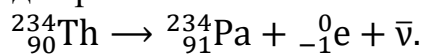


Енріко Фермі запропонував теорію бета-розпаду в 1934 році, але його робота спочатку була відхилена. Експерименти інших фізиків, щоб довести це, виявилися невдалими, що ще більше поставило під сумнів теорію. Фізик китайського походження Чієн-Шіунг Ву, яка розробила ряд процесів, важливих для Манхеттенського проекту та пов'язаних з ним досліджень, виявила ряд недоліків у попередніх експериментальних методах і матеріалах. Вона розробила новий метод, перевірила теорію Фермі, а пізніше продовжила встановлення основних принципів бета-розпаду. Як обговорювалося в іншому розділі, цей процес відбувається через слабку ядерну силу.

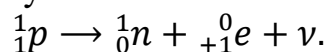
Наприклад, ізотоп ${}^{234}_{90}\text{Th}$ нестійкий і розпадається β^- випромінюванням з періодом напіврозпаду 24 дні. Його розпад можна представити так:



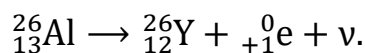
Оскільки хімічним елементом з атомним номером 91 є протактиній (Pa), ми можемо написати β^- -розпад торію так:



Можливий і зворотний процес: протон може розпадатися на нейтрон шляхом випускання позитрона (β^+) і майже безмасову частинку, яка називається **нейтрино** (ν). Ця реакція записується так:



Позитрон ${}^0_{+1}\text{e}$ випромінюється з нейтрино ν , а нейтрон залишається в ядрі. (Під час β^- -розпаду позитрон не передуює розпаду, а утворюється під час розпаду). Для ізольованого протона цей процес неможливий, оскільки нейтрон важчий за протон. Однак цей процес можливий всередині ядра, оскільки протон може отримати енергію від інших нуклонів для переходу. Як приклад, ізотоп алюмінію ${}^{26}_{13}\text{Al}$ розпадається з β^+ випромінюванням з періодом напіврозпаду $7,40 \times 10^5$ років. Розпад записується так:



Атомний номер 12 відповідає магнію. Отже,



Як ядерну реакцію з випромінюванням позитронів можна записати так:



Нейтрино не було виявлено в ранніх експериментах β -розпаду. Однак закони збереження енергії та імпульсу, здавалося, вимагали такої частинки. Пізніше нейтрино були виявлені через їх взаємодію з ядрами.

Приклад 5.8. Альфа- і бета-розпад вісмуту

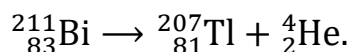
Ядро ${}^{211}_{83}\text{Bi}$ зазнає α - і потім β^- -розпад. Визначте для кожного випадку, що є дочірнім ядром?

Стратегія

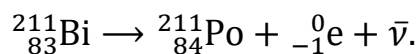
Ми можемо використовувати процеси, описані рівнянням 5.21 і рівнянням 5.22, а також Періодичну таблицю, щоб ідентифікувати отримані елементи.

Розв'язок

Атомний номер і масове число для α -частинки 2 і 4 відповідно. Таким чином, коли ядро вісмуту-211 випромінює α -частинку дочірнє ядро має атомний номер 81 і масове число 207. Елементом з атомним номером 81 є талій, тому розпад визначається так:



При β^- -розпаді атомний номер збільшується на 1, а масове число залишається незмінним. Елемент з атомним номером 84 є полонієм, тому розпад визначається так:



Перевірте своє розуміння 5.4

Під час радіоактивного бета-розпаду атомне масове число A зростає чи зменшується?

Гамма-розпад

Ядро у збудженому стані може розпадатися до стану нижчого рівня за допомогою випромінювання фотона «гамма-променів», і це відомо як гамма-розпад. Це аналогічно дезбудженню атомного електрона. Гамма-розпад символічно представлений формулою:



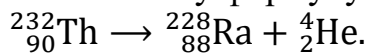
де зірочка (*) на ядрі вказує на збуджений стан.

При γ -розпаді не змінюється ні атомний номер, ні масове число, тому тип ядра не змінюється.

Серії ядерних розпадів

Ядра с $Z > 82$ є нестабільними і розкладаються природним шляхом. Багато з цих ядер мають дуже короткий час життя, тому вони не зустрічаються в природі. Помітні винятки включають ${}_{90}^{232}\text{Th}$ (або Th-232) з періодом напіврозпаду $1,39 \times 10^{10}$ років, ${}_{92}^{238}\text{U}$ (або U-238) з періодом напіврозпаду $7,04 \times 10^8$ років. Коли важке ядро розпадається на легше, легше дочірнє ядро може стати батьківським ядром для наступного розпаду і так далі. Цей процес може спричинити довгу серію ядерних розпадів, яка називається серією розпадів. Ряд закінчується стійким ядром.

Щоб проілюструвати концепцію серії розпаду, розглянемо розпад серії Th-232 (рис. 5.13). Число нейтронів N відкладено на вертикальній осі y , а атомне число Z відкладено на горизонтальній осі x , тому Th-232 знаходиться в координатах $(N, Z) = (142, 90)$. Th-232 розпадається α -випромінюванням з періодом напіврозпаду $1,39 \times 10^{10}$ років. Альфа-розпад зменшує атомний номер на 2 і масове число на 4, тому ми маємо таку формулу розпаду:



Нейтронне число для радію-228 дорівнює 140, тому воно знаходиться на діаграмі за координатами $(N, Z) = (140, 88)$. Радій-228 також нестабільний і розпадається β^- -випромінюванням з періодом напіврозпаду 5,76 років до актінію-228. Атомне число збільшується на 1, масове число залишається незмінним, а число нейтронів зменшується на 1. Зверніть увагу, що на графіку α -випромінювання виглядає як лінія, що нахилена вниз вліво, при цьому N і Z

зменшуються на 2. Бета-випромінювання, з іншого боку, виглядає як лінія, що нахилена вниз вправо, де N зменшується на 1, а Z збільшується на 1. Бачимо ще кілька додаткових альфа- і бета-розпадів і серія закінчується стабільним ядром Pb-208.

Відносна частота різних типів радіоактивних розпадів (альфа-, бета- і гамма-розпадів) залежить від багатьох факторів, у тому числі від сили діючих сил і кількості способів, якими дана реакція може відбуватися без порушення закону збереження енергії та імпульсу. Як часто відбувається радіоактивний розпад, залежить від чутливого балансу сильних і електромагнітних сил. Ці сили обговорюються у фізиці елементарних частинок і космології.

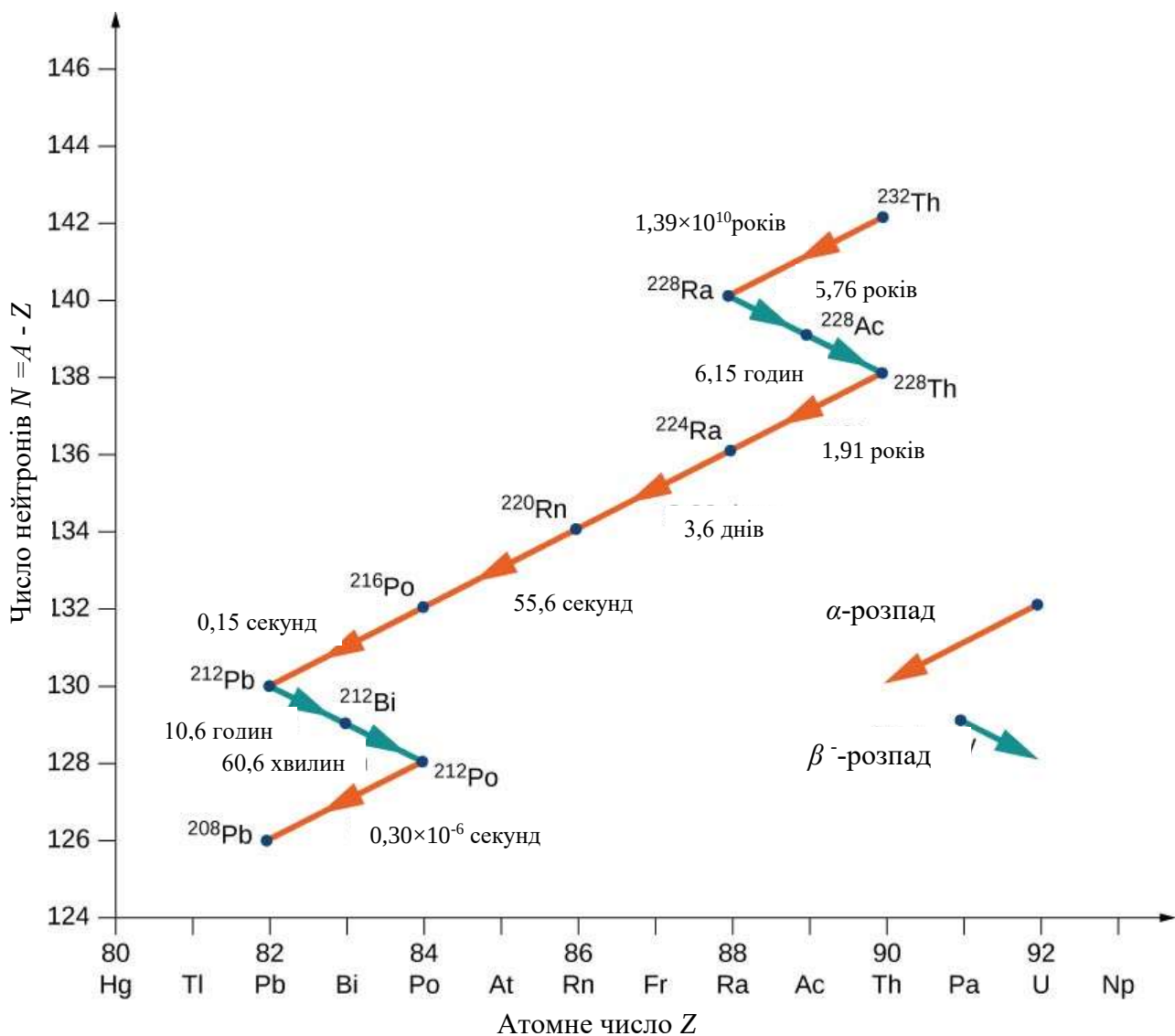


Рис. 5.13. У серії розпаду торію $^{232}_{90}\text{Th}$ альфа (α -) розпади зменшують атомний номер, як показано червоними стрілками. Бета (β^-) розпади збільшують атомний номер, як показано синіми стрілками. Ряд закінчується на стабільному ядрі Pb-208

Як інший приклад розглянемо серію розпаду U-238, показану на рис. 5.14. Після численних альфа- і бета-розпадів серія закінчується стабільним ядром Pb-206.

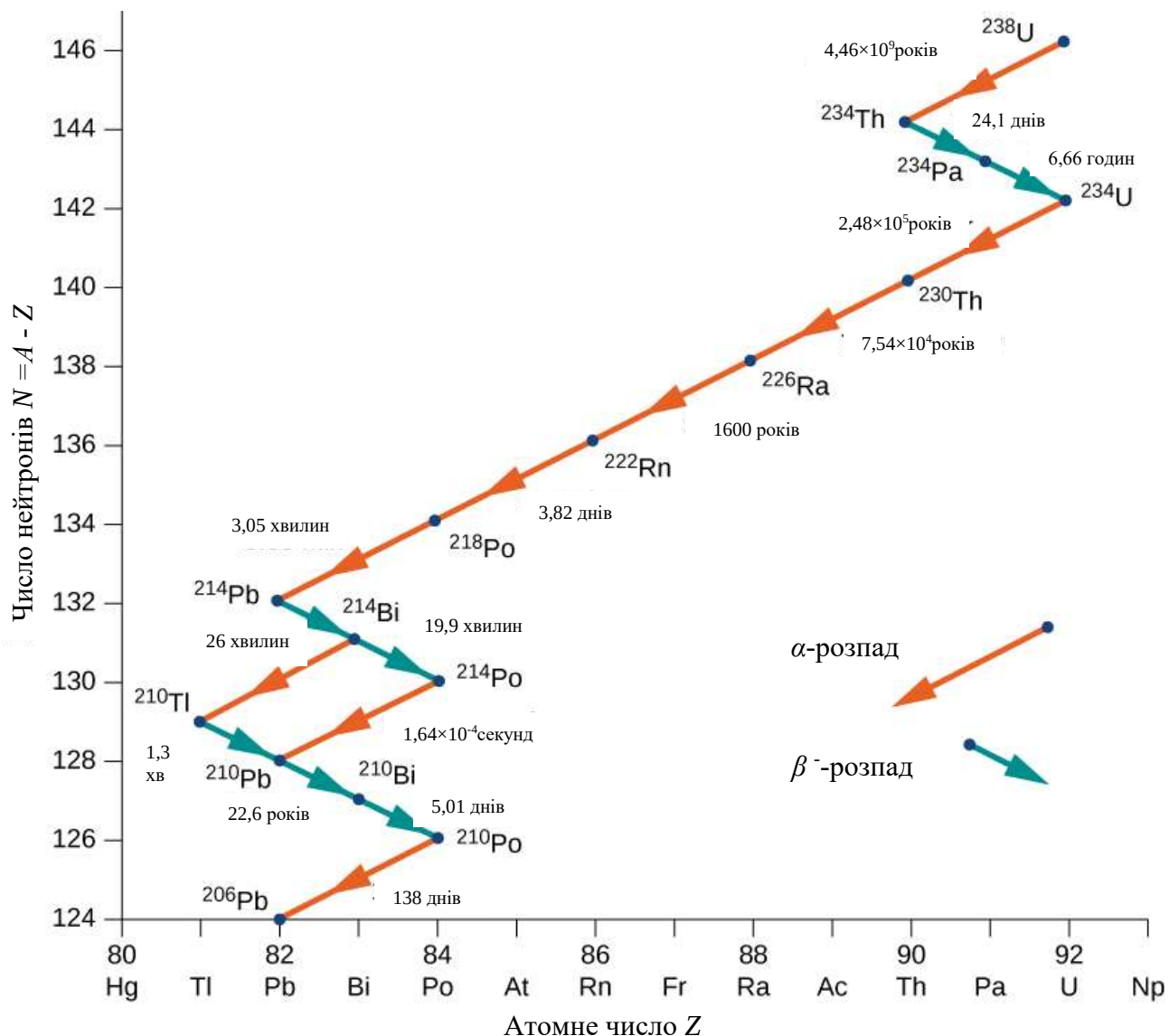


Рис. 5.14. У серії розпаду урану-238 альфа (α) розпади зменшують атомний номер, як показано червоними стрілками. Бета (β^-) розпади збільшують атомний номер, як показано синіми стрілками. Ряд закінчується на стабільному ядрі Pb-206

Приклад розпаду, батьківське ядро якого більше не існує в природі, показано на рис. 5.15. Він починається з нептунію-237 і закінчується стабільним ядром вісмут-209. Нептуній називають **трансурановим елементом**, оскільки він лежить за ураном у періодичній таблиці. Уран має найвищий атомний номер ($Z = 92$) будь-якого елемента, що зустрічається в природі. Елементи с $Z > 92$ можна виготовити тільки в лабораторії. Швидше за все, вони також існували в природі під час формування Землі, але через їх відносно короткий термін життя вони повністю розпалися. Між природними та штучними елементами немає нічого принципового. Зауважте, що для Bi (21) розпад може проходити через альфа- або бета-розпад.

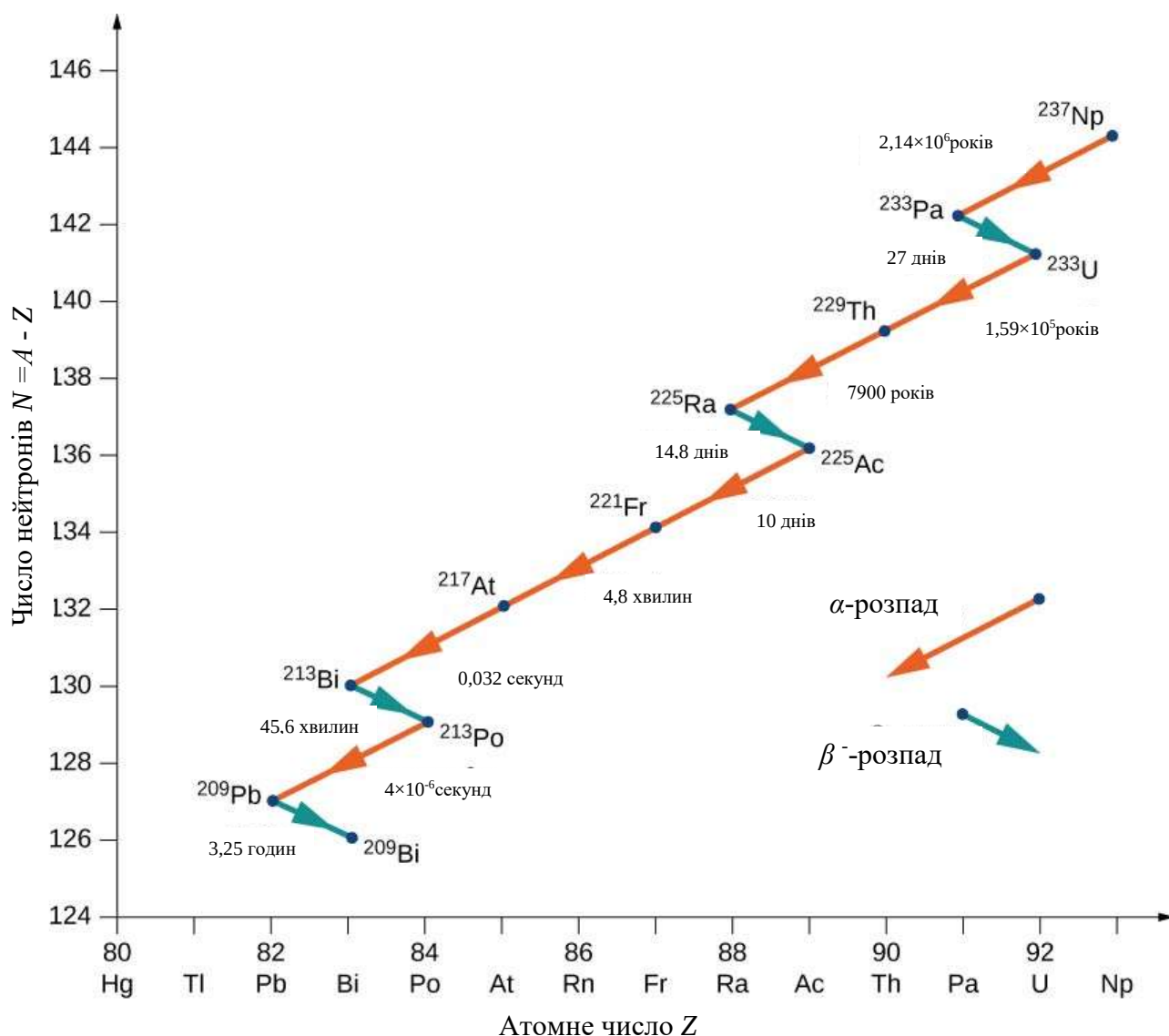


Рис. 5.15. У серії розпаду Нептунію-237 альфа (α) розпади зменшують атомний номер, як показано червоними стрілками. Бета (β^-) розпади збільшують атомний номер, як показано синіми стрілками. Ряд закінчується на стабільному ядрі Bi-209

Радіоактивність в Землі

За словами геологів, якби не було джерела тепла, Земля мала б охолонути до нинішньої температури не більше ніж за 1 мільярд років. Але Землі більше 4 мільярдів років. Чому Земля так повільно охолоджується? Відповідь полягає в ядерній радіоактивності, тобто частинки високої енергії, що утворюються в результаті радіоактивного розпаду, нагрівають Землю зсередини (рис. 5.16).

Ядра-кандидати для цієї моделі опалення є ^{238}U і ^{40}K , які мають період напіврозпаду, подібний до віку Землі або довший за нього. Енергія, вироблена цим розпадом (за секунду на кубічний метр), невелика, але енергія не може легко вийти, тому ядро Землі дуже гаряче. Теплова енергія в ядрі Землі передається на поверхню Землі та від неї через процеси конвекції, провідності та випромінювання.

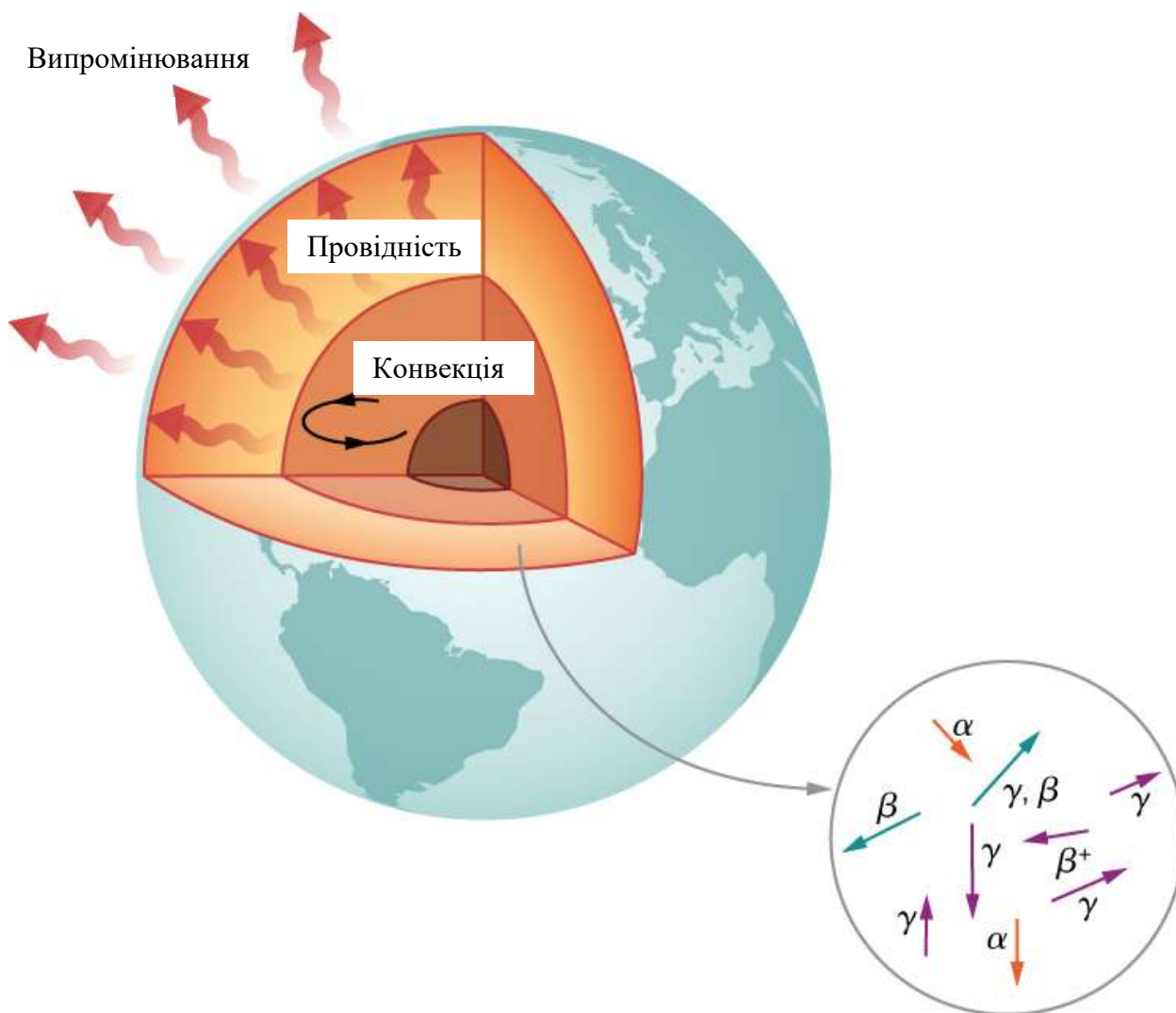


Рис. 5.16. Земля нагрівається в результаті ядерних реакцій (альфа-, бета- і гамма-розпадів). Без цих реакцій ядро та мантія Землі були б набагато холоднішими, ніж зараз

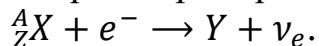
Вправи до п. 5.4. Ядерні реакції

- ^{249}Cf піддається альфа-розпаду. а) Напишіть рівняння реакції. (б) Знайдіть енергію, що виділяється при розпаді.
- (а) Обчисліть енергію, що виділяється під час α -розпаду ^{238}U . (б) Яка частка маси одного ядра ^{238}U руйнується в розпаді? Маса ^{234}U становить 234,043593 у. (в) Хоча часткова втрата маси є великою для окремого ядра, її важко спостерігати для цілого макроскопічного зразка урану. Чому це так?
- β^- частинки, що виділяються при розпаді ^3H (третій), взаємодіють з речовиною, створюючи спалахи світла в темряві як знак виходу. На момент виготовлення такий зразок містить 15,0 Кі ^3H . а) Яка маса тритію? (б) Яка його активність через 5,00 років після виготовлення?
- (а) Запишіть повністю рівняння розпаду β^- для ^{90}Sr , основного продукту відходів ядерних реакторів. (б) Знайдіть енергію, що виділяється при розпаді.
- Напишіть ядерну реакцію β^- -розпаду, яка виробляє ядро ^{90}Y . (Підказка: вихідний нуклід є основним відходом реакторів і має хімічні властивості, подібні до кальцію, тому при попаданні всередину він концентрується в кістках).

6. Запишіть повне рівняння розпаду ядра A_ZX_N для бета-версії (β^-) розпаду ${}^3\text{H}$ (тритій), промислового ізоотопу водню, який використовується в деяких дисплеях цифрових годинників і виготовляється переважно для використання у водневих бомбах.

7. Якщо шматок свинцю товщиною 1,50 см може ввібрати 90,0 % променів від радіоактивного джерела, скільки сантиметрів свинцю потрібно, щоб поглинути всі, крім 0,100% променів?

8. Електрон може взаємодіяти з ядром через процес бета-розпаду:



(а) Напишіть повне рівняння реакції захоплення електрона за допомогою ${}^7\text{Be}$.
(б) Обчисліть виділену енергію.

9. (а) Напишіть повне рівняння реакції захоплення електрона за допомогою ${}^{15}\text{O}$.
(б) Обчисліть виділену енергію.

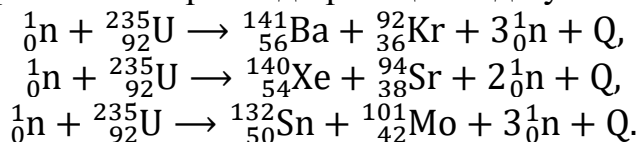
10. Спостерігався рідкісний режим розпаду, в якому ${}^{222}\text{Ra}$ випромінює ядро ${}^{14}\text{C}$.
(а) Рівняння розпаду є

11. Спостерігався рідкісний режим розпаду, в якому ${}^{222}\text{Ra} \rightarrow {}^AX + {}^{14}\text{C}$.
(а) Визначте нуклід AX . (б) Знайдіть енергію, що виділяється при розпаді. Маса ${}^{222}\text{Ra}$ дорівнює 222,015353 а.

5.5. Поділ ядра

У 1934 році Енріко Фермі бомбардував хімічні елементи нейтронами, щоб створити ізоотопи інших елементів. Він припустив, що бомбардування урану нейтронами зробить його нестабільним і дасть новий елемент. На жаль, Фермі не зміг визначити продукти реакції. Декілька вчених, зокрема Ліза Мейтнер, Отто Ган і Фріц Штрассман, почали відтворювати та розширювати ці експерименти та працювати над незрозумілими результатами. Простіше кажучи, дослідники очікували, що продуктами їхніх експериментів є ізоотопи радію чи урану; натомість результатами були зовсім інші. Отримали елементи, такі як барій (атомний номер 56). Мейтнер, яка була єврейкою, була змушена втекти з рідної Австрії після того, як Німеччина її анексувала, і більше не могла їздити до Берліна, де працювали інші. Завдяки міжміському листуванню групи розвивали роботу одна одної. Мейтнер та її колега Отто Фріш провели експерименти, щоб перевірити результати та створити теоретичну основу для ядерного поділу, включаючи врахування енергії, яка виділяється в реакції. Ган і Штрассман опублікували власну роботу, яка показала, що продукти реакцій були меншими ядрами. Вони прийшли до висновку, що ядро урану розпалося на два менших ядра. Цей результат зробив революцію у фізиці та проклав шлях для абсолютно нової науки та застосувань.

Розщеплення ядра називається **поділом**. Цікаво, що поділ U-235 не завжди створює однакові фрагменти. Приклади реакцій поділу:



У кожному разі сума мас ядер-продуктів менша за маси реагентів, тому поділ урану є екзотермічним процесом ($Q > 0$). Це ідея, що лежить в основі використання реакторів поділу як джерела енергії (рис. 5.17).



Рис. 5.17. Філіпсбурзька атомна електростанція в Німеччині використовує реактор ділення для виробництва електроенергії

Енергія, що переноситься реакцією, набуває форми частинок з кінетичною енергією. Відсоток виходу фрагментів від поділу U-235 наведено на рис 5.18.

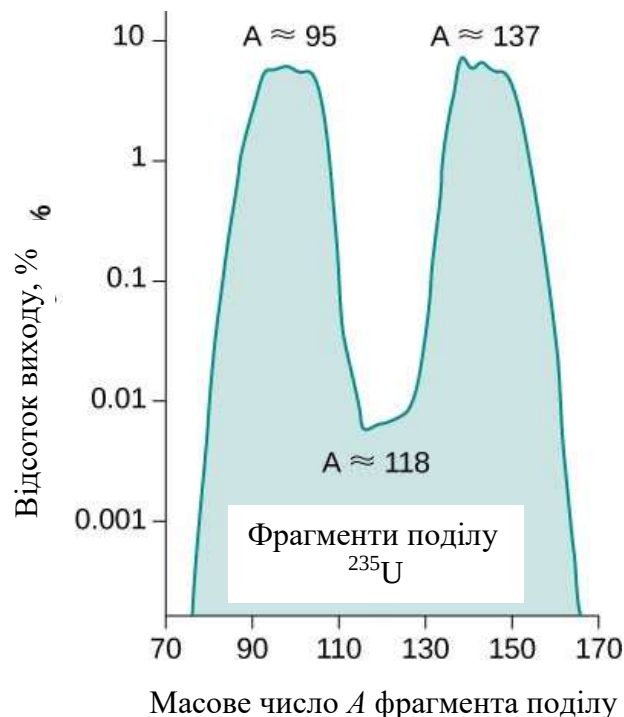


Рис. 5.18. На цьому графіку фрагментів поділу U-235 піки на графіку вказують на ядра, які утворюються в найбільшій кількості в процесі поділу

Зміни енергії в реакції поділу ядер можна зрозуміти в термінах кривої енергії зв'язку на один нуклон (рис. 5.7). Значення $\delta E_{\text{зв}}$ для урану ($A = 236$) трохи нижче, ніж його дочірніх ядер, які лежать ближче до піку заліза (Fe). Це означає, що нуклони у ядерних фрагментах більш міцно зв'язані, ніж нуклони в ядрі U - 235. Тому реакція поділу призводить до падіння середньої енергії нуклона. Ця енергія переноситься нейтронами високої енергії.

Нільс Бор і Джон Вілер розробили модель краплі рідини, щоб зрозуміти процес поділу. Згідно з цією моделлю, постріл нейтрона в ядро аналогічний збуренню краплі води (рис. 5.19). Аналогія працює, оскільки короткодіючі сили між нуклонами в ядрі подібні до сил притягання між молекулами води в краплі води.

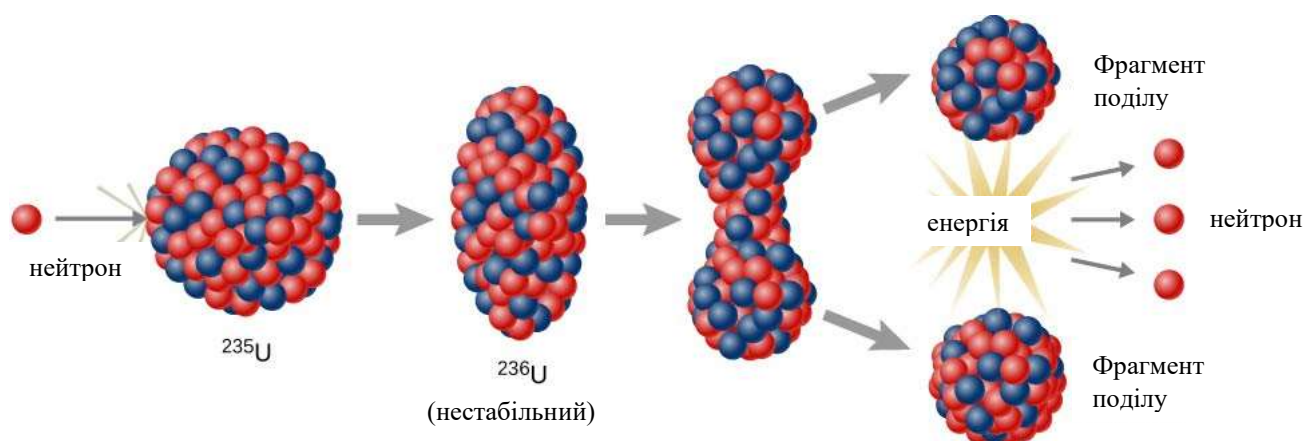


Рис. 5.19. У рідкокраплинній моделі ядерного поділу ядро урану розщеплюється на два легших ядра нейтроном високої енергії

Зокрема, сили між нуклонами на поверхні ядра призводять до поверхневого натягу, подібного до поверхневого натягу краплі води. Нейтрон, випущений у ядро урану, може викликати вібрацію ядра. Якщо ця вібрація досить сильна, ядро ділиться на менші ядра і також випромінює два або три окремі нейтрони.

Поділ U-235 може викликати ланцюгову реакцію. У сполукі, що складається з багатьох ядер U-235, нейтрони під час розпаду одного ядра U-235 можуть ініціювати поділ додаткових ядер U-235 (рис. 5.20). Ця ланцюгова реакція може протікати контрольовано, як у ядерному реакторі на електростанції, або протікати неконтрольовано, як під час вибуху.

Атомна бомба

Можливість ланцюгової реакції в урані з його надзвичайно великим виділенням енергії спонукала вчених-ядерників до ідеї створення бомби — атомної бомби. (Ці відкриття відбулися в роки, що передували Другій світовій війні, і багато європейських фізиків, які брали участь у цих відкриттях, походили з країн, які були захоплені). Природний уран містить 99,3 % U-238 і тільки 0,7 %

U-235, і не викликає ланцюгової реакції. Щоб забезпечити контрольовану стійку ланцюгову реакцію, відсоток U-235 має бути збільшений до приблизно 50 %

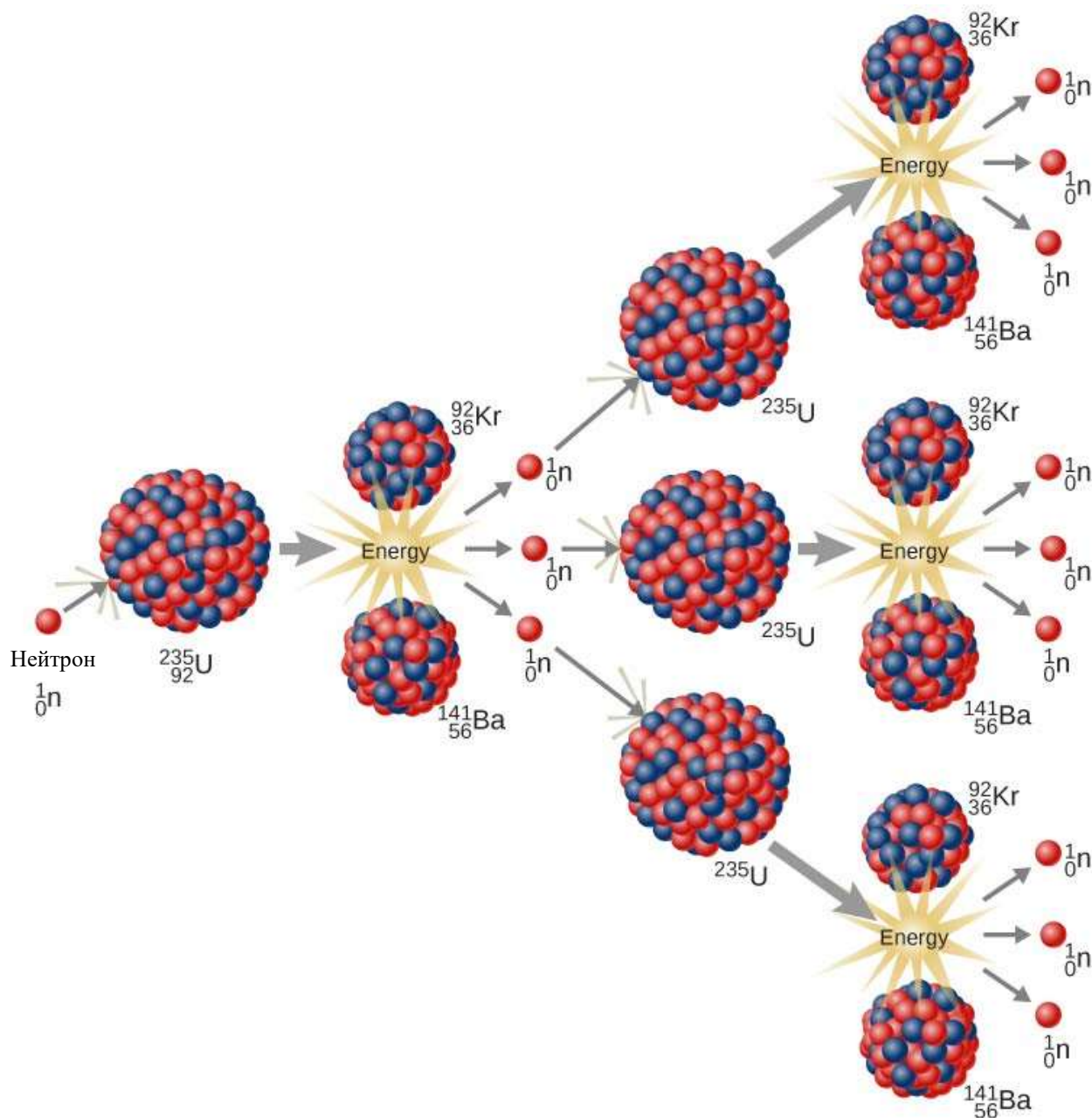


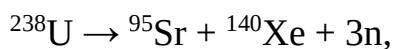
Рис. 5.20. У ланцюговій реакції поділу U-235 поділ ядра урану виробляє нейтрони високої енергії, які продовжують розщеплювати більше ядер. Енергія, що виділяється в цьому процесі, може бути використана для виробництва електроенергії

Крім того, зразок урану має бути досить масивним, щоб типовий нейтрон з більшою ймовірністю викликав поділ, ніж вирвався. Мінімальна маса, необхідна для виникнення ланцюгової реакції, називається **критичною масою**. Коли критична маса досягає точки, в якій ланцюгова реакція стає самопідтримуваною, це стан, відомий як **критичність**. Оригінальна конструкція вимагала двох частин U-235 з масою менше критичної. Коли один шматок у формі кулі потрапляє в другий шматок, критична маса перевищується і виникає ланцюгова реакція.

Важливою перешкодою для бомби U-235 є виробництво критичної маси матеріалу, що розщеплюється. Тому вчені розробили бомбу з плутонієм-239, оскільки Pu-239 є більш здатним до розщеплення, ніж U-235, і тому потрібна менша критична маса. Бомба була зроблена у формі кулі з шматочками плутонію, кожен нижче критичної маси, на краю кулі. Серія хімічних вибухів одночасно вистрілила шматки плутонію до центру сфери. Коли всі ці частинки плутонію зійшлися разом, їхня маса перевищила критичну масу й викликала ланцюгову реакцію. І бомби U-235, і Pu-239 використовувалися під час Другої світової війни. Розробка та застосування атомної зброї залишаються двома найважливішими питаннями, з якими стикається людська цивілізація.

Приклад 5.9. Розрахунок енергії, що виділяється при поділі

Обчисліть енергію, що виділяється в наступній рідкісній реакції спонтанного поділу:



Атомні маси $m(^{238}\text{U}) = 238,050784\text{u}$, $m(^{95}\text{Sr}) = 94,919388\text{u}$,
 $m(^{140}\text{Xe}) = 139,921610\text{u}$ і $m(\text{n}) = 1,008665\text{u}$.

Стратегія

Вивільнена енергія дорівнює добутку різниці мас на c^2 , тож ми повинні знайти різницю мас між материнськими ядрами ^{238}U і продуктами поділу.

Розв'язок

Продукти мають загальну масу:

$$m_{\text{продуктів}} = 94,919388\text{u} + 139,921610\text{u} + 3(1,008665\text{u}) = 237,866993\text{u}.$$

Втрачена маса – це маса ^{238}U – $m_{\text{продуктів}}$:

$$\Delta m = 238,050784\text{u} - 237,866993\text{u} = 0,183791\text{u}.$$

Тому виділяється енергія:

$$E = (\Delta m)c^2 = (0,183791\text{u}) \frac{931,5\text{ MeV}/c^2}{\text{u}} c^2 = 171,2\text{ MeV}.$$

Обговорення

У цьому прикладі виникає кілька важливих речей. Виділення енергії велике, але менше, ніж було б, якби ядро розділилося на дві рівні частини, оскільки енергія переноситься нейтронами. Однак ця реакція поділу виробляє нейтрони і не розщеплює ядро на дві рівні частини. Поділ даного нукліда, наприклад ^{238}U , не завжди виробляє однакові продукти. Поділ — це статистичний процес, у якому з різною ймовірністю утворюється цілий ряд продуктів. Більшість поділів виробляє нейтрони, хоча кількість змінюється. Це надзвичайно важливий аспект поділу, оскільки *нейтрони можуть індукувати більше поділу*, уможливорюючи самопідтримувані ланцюгові реакції.

Ядерні реактори поділу

Перший ядерний реактор був побудований Енріко Фермі на майданчику для сквошу в кампусі Чиказького університету 2 грудня 1942 року. Сам реактор містив U-238, збагачений 3,6 % U-235. Нейтрони, утворені ланцюговою реакцією, рухаються занадто швидко, щоб ініціювати реакції поділу. Один із способів уповільнити їх – помістити весь реактор у водяну баню під високим тиском. Нейтрони стикаються з молекулами води та сповільнюються достатньо, щоб використовувати їх у процесі поділу. Уповільнені нейтрони розщеплюють більше ядер U-235 і відбувається ланцюгова реакція. Швидкість, з якою протікає ланцюгова реакція, контролюється серією «керуючих» стрижнів, виготовлених з кадмію, вставлених у реактор. Кадмій здатний поглинати велику кількість нейтронів, не стаючи нестабільним.

Конструкція ядерного реактора, яка називається реактором з водою під тиском, також може бути використана для виробництва електроенергії (рис. 5.21).

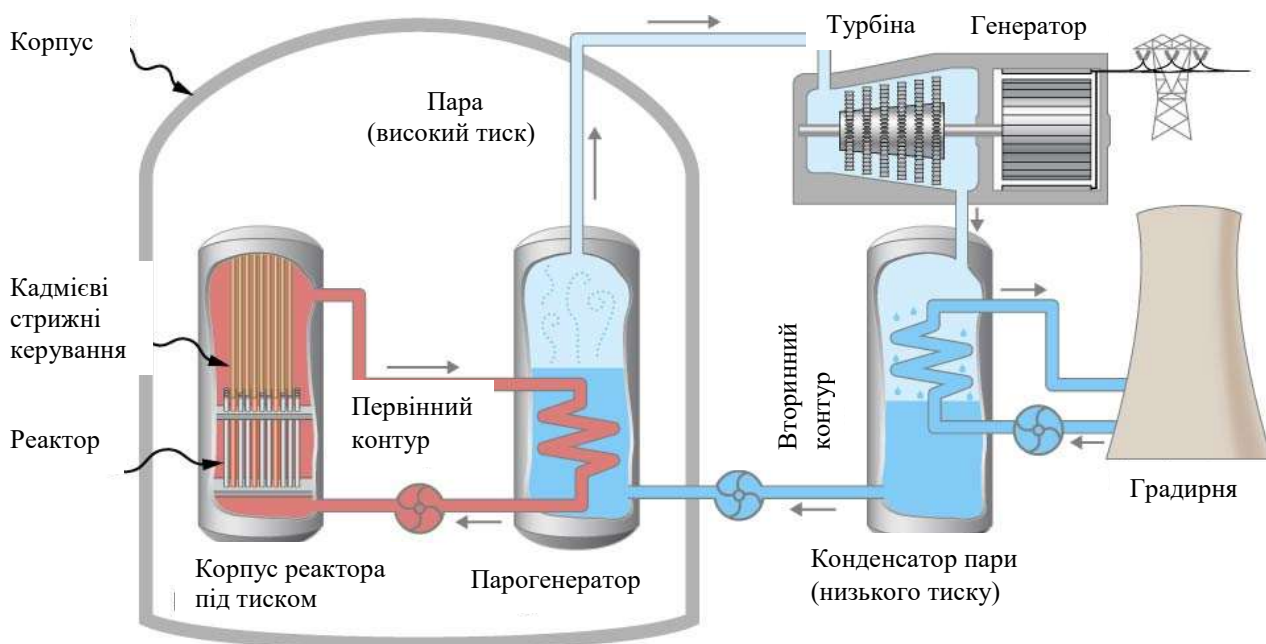


Рис. 5.21. Ядерний реактор використовує енергію, вироблену в результаті поділу U - 235, для виробництва електроенергії. Енергія ядерної реакції поділу виробляє гарячу пару під високим тиском, яка обертає турбіну. Під час обертання турбіни виробляється електроенергія

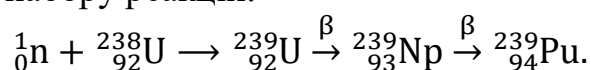
Водяний реактор під тиском (ліворуч на малюнку) призначений для контролю розщеплення великих кількостей ^{235}U . Енергія, що виділяється в цьому процесі, поглинається водою, що протікає через труби в системі («первинний контур»), і утворюється пара. Кадмієві керуючі стрижні регулюють потік нейтронів (швидкість потоку нейтронів, що проходять через систему) і, таким чином, контролюють реакцію. Якщо реактор перегрівається і вода википає, ланцюгова реакція припиняється, оскільки вода використовується для термізації нейтронів. (Ця функція безпеки може бути перевантажена в екстремальних

обставинах.) Гаряча вода під високим тиском потім проходить через трубу до другого резервуару з водою під нормальним тиском у парогенераторі. Пара, що утворюється на одному кінці парогенератора, заповнює камеру, яка містить турбіну. Ця пара знаходиться під дуже високим тиском. Тим часом паровий конденсатор, підключений до іншої сторони турбінної камери, підтримує низький тиск пари. Різниця тиску проштовхує пару через камеру, яка обертає турбіну. Турбіна, у свою чергу, живить електрогенератор.

Головним недоліком реактора поділу є ядерні відходи. Поділ U-235 утворює ядра з довгим періодом напіврозпаду, наприклад ^{236}U , що треба зберігати. Ці продукти не можна скидати в океани або залишати в будь-якому місці, де вони можуть забруднювати довкілля, наприклад через ґрунт, повітря чи воду. Багато вчених вважають, що найкращим місцем для зберігання ядерних відходів є дно старих соляних шахт або всередині стійких гір.

Багато людей бояться, що ядерний реактор може вибухнути, як атомна бомба. Однак ядерний реактор не містить достатньо U-235 для цього. Крім того, ядерний реактор сконструйований так, що відмова будь-якого механізму реактора призводить до того, що кадмієві керуючі стрижні повністю потрапляють у реактор, зупиняючи процес поділу. Як свідчать катастрофи на Фукусімі та Чорнобилі, такі системи можуть виходити з ладу. У багатьох країнах атомні електростанції належать і управляються компаніями, але регулюються урядовими установами. Інструкції з техніки безпеки та перевірки, протоколи ризиків і нещасних випадків, вплив на навколишнє середовище, а також розвиток і вдосконалення станцій – усе це основна діяльність регулятора, і часто існує напруга щодо витрат і контролю за безпекою та екологічними проблемами. У Сполучених Штатах Комісія з ядерного регулювання використовує імовірнісний метод оцінки ризику — вперше застосований, коли агентство перебувало під керівництвом фізика Ширлі Енн Джексон — для розгляду ймовірності подій низького та високого ризику на основі умов і даних. Пізніше Джексон керував розробкою Міжнародної асоціації ядерних регуляторів, покликаної підвищити ядерну безпеку. Більш відоме Міжнародне агентство з атомної енергії має аналогічний мандат, але воно також зосереджується на дотриманні заходів щодо запобігання розповсюдженню (розширенню) ядерної зброї.

Якби вся електроенергія вироблялася шляхом ядерного поділу U-235, відомі запаси урану на Землі були б вичерпані менш ніж за століття. Проте запаси матеріалу, що розщеплюється, на Землі можна значно збільшити за допомогою **реактора-розмножувача**. Реактор-розмножувач працює вперше з використанням розщеплення U-235, як щойно описано для реактора з водою під тиском. Але окрім виробництва енергії, деякі швидкі нейтрони, що утворюються в результаті поділу U-235, поглинаються U-238, що призводить до виробництва Pu-239 за допомогою набору реакцій:



Pu-239 сам по собі здатний до розщеплення, тому його можна використовувати як ядерне паливо замість U-235. Оскільки 99,3 % природного урану є ізотоп U-238, використання реакторів-розмножувачів повинно збільшити

наші постачання ядерного палива приблизно в 100 разів. Реактори-розмножувачі зараз працюють у Великій Британії, Франції та Росії. Реактори-розмножувачі також мають недоліки. По-перше, реактори-розмножувачі виробляють плутоній, який у разі витoku в навколишнє середовище може спричинити серйозні проблеми для здоров'я населення. По-друге, плутоній можна використовувати для створення бомб, що значно підвищує ризик розповсюдження ядерної зброї.

Приклад 5.10. Розрахунок енергії палива, що розщеплюється

Обчисліть кількість енергії, отриманої в результаті поділу 1,00 кг ^{235}U враховуючи, що середня реакція поділу ^{235}U виробляє 200 MeV.

Стратегія

Загальна вироблена енергія є кількістю атомів ^{235}U , помножених на задану енергію на ^{235}U розщеплення. Тому ми повинні знайти кількість ^{235}U атомів в 1кг.

Розв'язок

Кількість ^{235}U атомів в 1,00 кг — це число Авогадро, помножене на кількість молей. Один моль ^{235}U має масу 235,0 г; таким чином, кількість молей дорівнює:

$$(1000 \text{ г}) / (235,04 \text{ г / моль}) = 4,25 \text{ моль.}$$

Кількість атомів ^{235}U :

$$(4,25 \text{ моль}) (6,02 \times 10^{23} \text{ } ^{235}\text{U} / \text{моль}) = 2,56 \times 10^{24} \text{ } ^{235}\text{U}.$$

Таким чином, загальна енергія, що виділяється, становить величину:

$$E = (2,56 \times 10^{24} \text{ } ^{235}\text{U}) \left(\frac{200 \text{ MeV}}{^{235}\text{U}} \right) \left(\frac{1,6 \times 10^{-13} \text{ Дж}}{\text{MeV}} \right) = 8,21 \times 10^{13} \text{ Дж.}$$

Обговорення

Це ще одна вражаюче велика кількість енергії, еквівалентна приблизно 14000 барелів сирої нафти або 600 000 галонів бензину. Однак це лише одна чверть енергії, виробленої синтезом кілограмової суміші дейтерію та тритію. Незважаючи на те, що кожна реакція поділу дає приблизно в 10 разів більше енергії, ніж реакція термоядерного синтезу, енергія на кілограм палива поділу менша, оскільки на кілограм важких нуклідів припадає набагато менше молей. Палива для ядерного розщеплення також набагато менше, ніж палива для синтезу.

Перевірте своє розуміння 5.5

Який має більший вихід енергії на реакцію поділу, великий чи малий зразок чистого ^{235}U ?

Вправи до п. 5.5. Поділ

1. Великий енергетичний реактор, який працював кілька місяців, вимкнено, але залишкова активність в активній зоні все ще виробляє 150 МВт потужності.

Якщо середня енергія розпаду продуктів поділу становить 1,00 MeV, яка активність ядра?

2. (а) Обчисліть енергію, що виділяється під час цього рідкісного поділу, викликаного нейтронами: $n + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{96}\text{Sr} + {}^{140}\text{Xe} + 3n$. Дано: $m({}^{96}\text{Sr}) = 95,921750 \text{ u}$ і $m({}^{140}\text{Xe}) = 139,92164 \text{ u}$.

(б) Цей результат приблизно на 6 MeV більший, ніж результат для спонтанного поділу. Чому?

(в) Доведіть, що загальна кількість нуклонів і загальний заряд у цій реакції зберігаються.

3. (а) Обчисліть енергію, що виділяється в реакції поділу, викликаній нейтронами: $n + {}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{92}\text{Kr} + {}^{142}\text{Ba} + 2n$. Дано: $m({}^{92}\text{Kr}) = 91,926269 \text{ u}$ і $m({}^{142}\text{Ba}) = 141,916361 \text{ u}$. (б) Доведіть, що загальна кількість нуклонів і загальний заряд у цій реакції зберігаються.

4. Електрична потужність великої ядерної реакторної установки становить 900 МВт. Він має 35,0% ефективність перетворення ядерної енергії в електричну.

(а) Яка потужність теплової ядерної енергії в мегаватах?

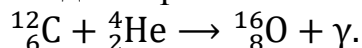
(б) Скільки ядер ${}^{235}\text{U}$ діляться кожен секунду, припускаючи, що в середньому поділ виробляє 200 MeV?

(в) Яка маса ${}^{235}\text{U}$ розщеплюється за 1 рік роботи на повній потужності?

5. Знайдіть загальну енергію, яка виділилася, якщо 1,00 кг ${}^{235}_{92}\text{U}$ повинен зазнати поділу.

5.6. Ядерний синтез

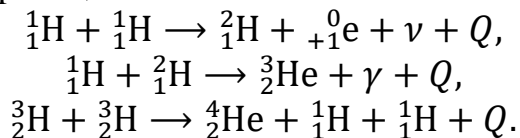
Процес об'єднання легших ядер для отримання більш важких ядер називають **ядерним синтезом**. Як і реакції поділу, реакції термоядерного синтезу є екзотермічними — вони вивільняють енергію. Припустимо, що ми зливаємо ядра вуглецю та гелію для отримання кисню:



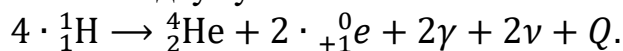
Зміни енергії в цій реакції можна зрозуміти за допомогою графіка енергії зв'язку на один нуклон (рис. 5.7). Порівнюючи енергію зв'язку на нуклон для кисню, вуглецю та гелію, ядро кисню набагато міцніше зв'язане, ніж ядра вуглецю та гелію, що вказує на те, що реакція призводить до падіння енергії системи. Ця енергія виділяється у вигляді гамма-випромінювання. Реакції термоядерного синтезу називають екзотермічними, якщо кількість вивільненої енергії (відома як значення Q) у кожній реакції перевищує нуль ($Q > 0$).

Важливим прикладом ядерного синтезу в природі є виробництво енергії на Сонці. У 1938 році Ганс Бете припустив, що Сонце виробляє енергію, коли ядра водню (${}^1\text{H}$) зливаються в ядра стабільного гелію (${}^4\text{He}$) в ядрі Сонця (рис. 5.22).

Цей процес, який називають **протон-протонним ланцюгом**, узагальнюється трьома реакціями:



Таким чином, в результаті злиття ядер атома водню утворюється стабільне ядро гелію. Ці три реакції можна підсумувати так:



Сумарне значення Q становить близько 26 МеВ. Вивільнення цієї енергії створює тиск назовні теплового газу, який запобігає гравітаційному колапсу Сонця. Астрофізики виявили, що синтез водню забезпечує енергію, необхідну зіркам для підтримки енергетичного балансу протягом більшої частини життя зірки.

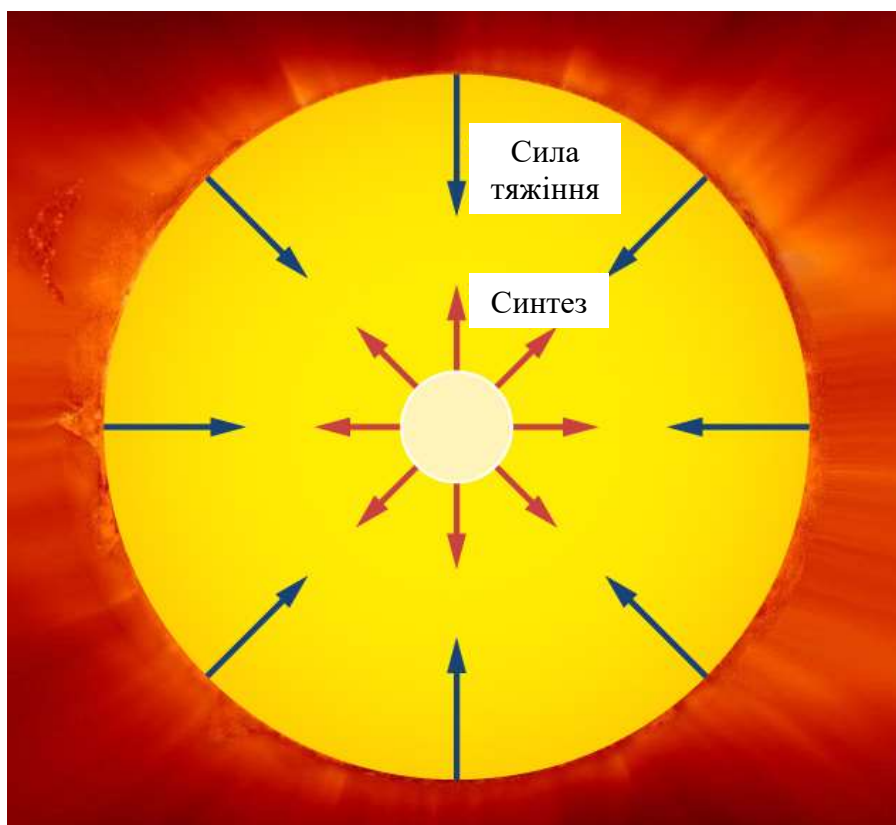
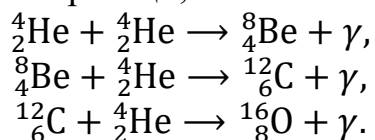


Рис. 5.22. Сонце виробляє енергію шляхом злиття водню в гелій у ядрі Сонця. Червоні стрілки показують тиск через термальний газ, який прагне розширити Сонце. Сині стрілки показують внутрішній тиск через силу тяжіння, яка має тенденцію стискати Сонце. Ці два впливи рівноважують один одного

Нуклеосинтез

Зараз вчені вважають, що багато важких елементів, знайдених на Землі та у всьому Всесвіті, були спочатку отримані шляхом синтезу в гарячих ядрах зірок. Цей процес відомий як **нуклеосинтез**. Наприклад, у легших зірках водень об'єднується з утворенням гелію через протон-протонний ланцюг. Коли водневе паливо вичерпується, зірка переходить на наступний етап свого життя і зливає гелій. Приклад ланцюга ядерної реакції, який може відбутися:



Ядра вуглецю та кисню, що утворюються в таких процесах, зрештою досягають поверхні зірки шляхом конвекції. Ближче до кінця свого життя зірка втрачає свої зовнішні шари в космос, збагачуючи міжзоряне середовище ядрами важчих елементів (рис. 5.23).

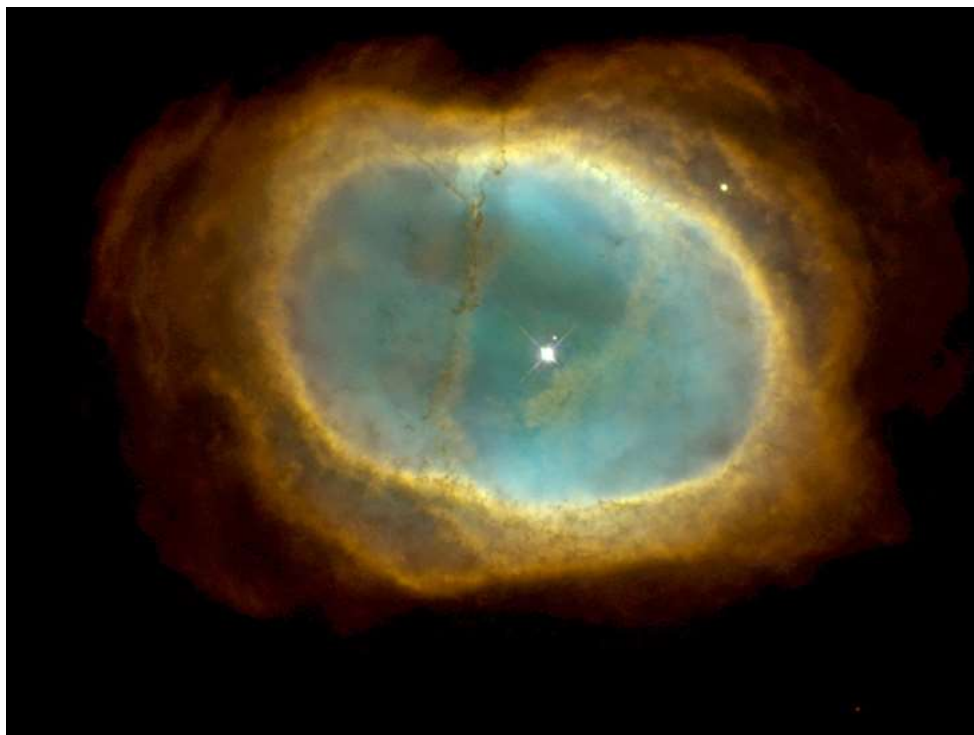
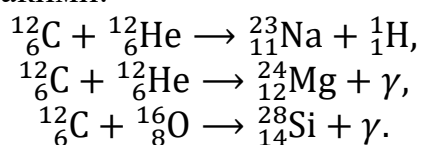


Рис. 5.23. Планетарна туманність утворюється в кінці життя зірки. Зеленоватий колір цієї планетарної туманності походить від іонів кисню

Зірки, подібні за масою до Сонця, не стають настільки гарячими, щоб злити ядра, такі важкі (або важчі), ніж ядра кисню. Однак у масивних зірок ядра стають набагато гарячішими ($T > 6 \times 10^8 \text{K}$), утворюються ще більш складні ядра. Деякі репрезентативні реакції є такими:



Нуклеосинтез триває до тих пір, поки ядро не буде переважно залізо-нікелевим металом. Тепер залізо має особливу властивість, що будь-яка реакція синтезу або поділу за участю ядра заліза є ендотермічною, тобто енергія поглинається, а не виробляється. Отже, ядерна енергія не може вироблятися в багатому залізом ядрі. Не маючи тиску від реакцій термоядерного синтезу, зірка починає стискатися через силу тяжіння. Цей процес нагріває серцевину до температури порядку $5 \times 10^9 \text{K}$. Ударні хвилі розширення, що утворюються всередині зірки внаслідок колапсу, призводять до швидкого вибуху зірки. Яскравість зірки може тимчасово збільшитися майже до яскравості всієї галактики. Під час цієї події потік енергійних нейтронів реагує із залізом та іншими ядрами, утворюючи елементи, важчі за залізо. Ці елементи разом із більшою частиною зірки викидаються в космос у результаті вибуху. Наднові зірки та утворення планетарних

туманностей разом відіграють головну роль у поширенні хімічних елементів у космосі.

Згодом значна частина матеріалу, втраченого зірками, об'єднується силою гравітації, і він конденсується в нове покоління зірок і супутніх планет. Останні зображення, зроблені космічним телескопом Хаббл, дають змогу побачити цей чудовий процес, що відбувається в сузір'ї Змії (рис. 5.24). Нове покоління зірок починає процес нуклеосинтезу заново, з більшим відсотком важчих елементів. Таким чином, зірки є «фабриками» для хімічних елементів, і багато атомів у наших тілах колись були частиною зірок.



Рис. 5.24. На цьому зображенні, зробленому космічним телескопом Spitzer NASA та Two Micron All Sky Survey (2MASS), показано Хмарне Ядро Змії, область зореутворення в сузір'ї Змії. Це скупчення зірок, розташоване на відстані приблизно 750 світлових років від нас, утворене пилом і газами, що охолоджуються. Інфрачервоне світло було використано для виявлення наймолодших зірок помаранчевого і жовтого кольору

Приклад 5.11. Енергія Сонця

Вихідна потужність Сонця становить приблизно $3,8 \times 10^{26}$ Дж / с. Більша частина цієї енергії виробляється в ядрі Сонця протон-протонним ланцюгом. Ця енергія передається назовні за допомогою процесів конвекції та випромінювання. (а) Скільки цих реакцій термоядерного синтезу має відбуватися за секунду, щоб забезпечити енергію, що випромінюється Сонцем? б) Яка швидкість зменшення маси Сонця? (в) Приблизно через п'ять мільярдів років у центральному ядрі Сонця буде вичерпано водень. На скільки відсотків зменшиться маса Сонця від теперішнього значення, коли в ядрі буде вичерпано водень?

Стратегія

Загальний вихід енергії за секунду наведено в постановці задачі. Якщо ми знаємо енергію, що виділяється в кожній реакції синтезу, ми можемо визначити швидкість реакцій синтезу. Якщо відома втрата маси на реакцію термоядерного синтезу, відома швидкість втрати маси. Помноживши цю швидкість на п'ять мільярдів років, ви отримаєте загальну втрачену Сонцем масу. Це значення ділиться на початкову масу Сонця, щоб визначити відсоток маси Сонця, який було втрачено, коли водневе паливо вичерпалося.

Розв'язок

а. Зменшення маси для реакції синтезу є таким:

$$\begin{aligned}\Delta m &= 4m({}_1^1\text{H}) - m({}_2^4\text{He}) - 2m({}_{+1}^0\text{e}) = \\ &= 4(1,007825\text{u}) - 4,002603\text{u} - 2(0,000549\text{u}) = 0,0276\text{u}.\end{aligned}$$

Енергія, що виділяється за реакцію синтезу, становить:

$$Q = (0,0276\text{u})(931,49 \text{ MeV/u}) = 25,7 \text{ MeV}.$$

Таким чином, щоб постачати $3,8 \times 10^{26} \text{ Дж/с} = 2,38 \times 10^{39} \text{ MeV/с}$, має бути

$$\frac{2,38 \times 10^{39} \text{ MeV/с}}{25,7 \text{ MeV/реакція}} = 9,26 \times 10^{37} \text{ реакцій/с}.$$

б. Маса Сонця зменшується на $0,0276 \text{ u} = 4,58 \times 10^{-29} \text{ кг}$ на реакцію термоядерного синтезу, тому швидкість, з якою його маса зменшується, дорівнює:

$$(9,26 \times 10^{37} \text{ реакцій/с})(4,58 \times 10^{-29} \text{ кг/реакція}) = 4,24 \times 10^9 \text{ кг/с}.$$

в. П'ять мільярдів років – це $5 \times 10^9 \text{ років} = 1,6 \times 10^{17} \text{ с}$, тому маса Сонця зменшиться на:

$$\Delta M = (4,24 \times 10^9 \text{ кг/с})(1,6 \times 10^{17} \text{ с}) = 6,8 \times 10^{26} \text{ кг}.$$

Поточна маса Сонця становить приблизно $2,0 \times 10^{30} \text{ кг}$, тому відсоток зменшення його маси, коли його водневе паливо вичерпано, буде складати:

$$\left(\frac{6,8 \times 10^{26} \text{ кг}}{2,0 \times 10^{30} \text{ кг}} \right) \times 100\% = 0,034\%.$$

Обговорення

Через п'ять мільярдів років маса Сонця майже така ж, як зараз. Спалювання водню дуже мало змінює масу Сонця. Цей розрахунок припускає, що лише протон-протонний розпад відповідає за вихідну потужність Сонця.

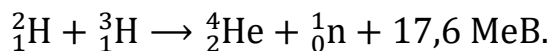
Перевірте своє розуміння 5.6

Звідки бере початок енергія Сонця?

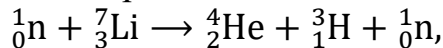
Воднева бомба

У 1942 році Роберт Опенгеймер припустив, що надзвичайно високу температуру атомної бомби можна використати для запуску реакції термоядерного синтезу між дейтерієм і тритієм, таким чином створивши

термоядерну (або водневу) бомбу. Реакція між дейтерієм і тритієм, ізотопами водню, представлена так:



Дейтерію в океанській воді відносно багато, але тритію мало. Однак тритій може утворюватися в ядерному реакторі за допомогою реакції за участю літію. Нейтрони з реактора викликають реакцію:

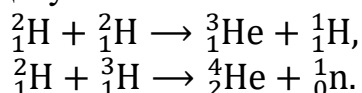


щоб отримати необхідний тритій.

Перша воднева бомба була підірвана в 1952 році на віддаленому острові Еніветок на Маршаллових островах. Воднева бомба ніколи не використовувалася на війні. Сучасні водневі бомби приблизно в 1000 разів потужніші, ніж бомби, скинуті на Хіросіму і Нагасакі під час Другої світової війни. (*Примітка:* перша радянська (плутонієва) атомна бомба випробувана в 1949 році, в 1951 році — уранова атомна бомба, а в 1953 році — воднева бомба).

Термоядерний реактор

Ланцюг термоядерного синтезу, який вважається найбільш практичним для використання в **ядерному термоядерному реакторі**, складається з наступного двоетапного процесу:



Цей ланцюг, як і протон-протонний ланцюг, виробляє енергію без будь-яких радіоактивних побічних продуктів. Однак існує дуже складна проблема, яку необхідно подолати, перш ніж термоядерний синтез можна використовувати для отримання значної кількості енергії: надзвичайно високі температури ($\sim 10^7 \text{ K}$) необхідні для керування процесом синтезу. Щоб вирішити цю проблему, розробляються тестові термоядерні реактори, здатні витримувати температури, які в 20 разів перевищують температуру ядра Сонця. Прикладом є спільний європейський тор (JET), показаний на рис. 5.25.

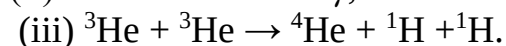
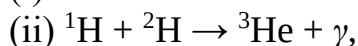
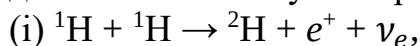


Рис. 5.25. Об'єднаний європейський тор (JET). Термоядерний детектор на токамаку використовує магнітні поля для злиття ядер дейтерію та тритію

Над технологією термоядерного реактора ще потрібно багато попрацювати, але багато вчених прогнозують, що енергія термоядерного синтезу буде жити міста світу до кінця двадцять першого століття.

Вправи до п. 5.6. Ядерний синтез

1. Переконайтеся, що загальна кількість нуклонів і загальний заряд зберігаються для кожної з наступних реакцій синтезу в протон-протонному ланцюзі:



(Перелічіть значення кожної із збережених величин до та після кожної з реакцій.)

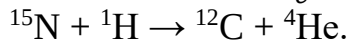
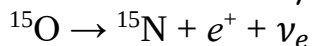
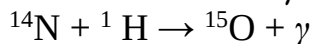
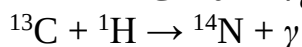
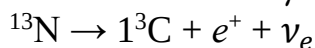
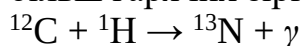
2. Обчисліть вихід енергії в кожній із реакцій синтезу в протон-протонному ланцюзі та перевірте значення, визначені в попередній задачі.

3. Покажіть, що повна енергія, що виділяється в протон-протонному ланцюзі, становить 26,7 МеВ, враховуючи загальний ефект у реакціях: ${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$, ${}^1\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$ і ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H}$. Обов'язково включіть енергію анігіляції.

4. У тексті згадуються дві реакції термоядерного синтезу: $n + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$ і $n + {}^1\text{He} \rightarrow {}^2\text{H} + \gamma$. Обидві реакції вивільняють енергію, але друга також створює більше палива. Доведіть, що енергії, вироблені в реакціях, становлять 20,58 і 2,22 МеВ відповідно. Прокоментуйте, який нуклід продукту найміцніше зв'язаний, ${}^4\text{He}$ або ${}^2\text{H}$.

5. Вихідна потужність Сонця становить 4×10^{26} Вт. (а) Якщо 90 % цієї енергії постачається протон-протонним ланцюгом, скільки протонів витрачається за секунду? (б) Скільки нейтрино в секунду повинно бути на квадратний метр на поверхні Землі внаслідок цього процесу?

6. Інший набір реакцій, які перетворюють водень у гелій на Сонці та особливо в більш гарячих зірках, називається циклом CNO:



Цей процес є «циклом», оскільки ${}^{12}\text{C}$ з'являється на початку і в кінці цих реакцій. Запишіть загальний ефект цього циклу (як це зроблено для протон-протонного ланцюга $2e^- + 4{}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu_e + 6\gamma$). Припустимо, що позитрони анігілюють електрони, щоб утворити більше γ променів.

7. (а) Обчисліть енергію, що виділяється при синтезі 1,00 кг суміші дейтерію та тритію, у результаті якого утворюється гелій. У суміші є однакова кількість ядер дейтерію і тритію. (б) Якщо цей процес відбувається безперервно протягом року, яка середня вихідна потужність?

5.7. Медичне застосування та біологічні ефекти ядерного випромінювання

Ядерна фізика є невід'ємною частиною нашого повсякденного життя (рис. 5.26).



Рис. 5.26. Доктор Торі Рендалл, куратор Музею людини в Сан-Дієго, використовує ядерне випромінювання для вивчення 500-річної перуанської мумії. Причиною цього випромінювання є перетворення одного ядра в інше

Радіоактивні сполуки використовуються для виявлення раку, вивчення стародавніх артефактів і живлення наших міст. Ядерний синтез також живить Сонце, основне джерело енергії на Землі. У центрі уваги цього розділу – ядерне випромінювання. У цьому розділі ми ставимо такі питання: як ядерне випромінювання використовується для користі суспільства? Які ризики для здоров'я? Якій кількості ядерного випромінювання в середньому піддається людина протягом життя?

Більшість медичних і суміжних застосувань ядерної фізики в основі своїй обумовлені різницею між радіоактивною речовиною та нерадіоактивною речовиною. Одним із перших таких методів є прецизійний метод вимірювання та виявлення, відомий як радіоімунний аналіз (RIA). Розроблений Розалін Сассман Ялоу та Соломоном Берсоном наприкінці 1950-х років, RIA спирається на принцип конкуренції. Для конкретної вимірюваної речовини готується зразок, що містить радіоактивний ізотоп. Потім вводиться відома кількість антитіл. Вимірюючи кількість «незв'язаних» антитіл після реакції, техніки можуть виявити та виміряти точну кількість цільової речовини. Радіоімунологічний аналіз необхідний для скринінгу раку, діагностики гепатиту, дослідження наркотиків та інших аналізів.

Одним із найважливіших застосувань ядерного випромінювання є визначення місця розташування та дослідження ураженої тканини. Для цього потрібен спеціальний препарат під назвою **радіофармацевтичний** препарат. Радіофармацевтичний препарат містить нестабільний радіоактивний ізотоп. Коли препарат потрапляє в організм, він має тенденцію концентруватися в

запалених областях тіла. (Нагадаймо, що взаємодія препарату з організмом не залежить від того, чи замінено дане ядро одним із його ізотопів, оскільки ця взаємодія визначається хімічними взаємодіями). Радіаційні детектори, що використовуються поза тілом, використовують ядерне випромінювання радіоізотопів для знаходження хворої тканини. Радіофармацевтичні препарати називаються **радіоактивними мітками**, оскільки вони дозволяють лікарям відстежувати рух ліків в організмі. Радіоактивні мітки використовуються для багатьох цілей, зокрема для ідентифікації ракових клітин у кістках, пухлин мозку та хвороби Альцгеймера (рис. 5.27). Радіоактивні мітки також використовуються для моніторингу функцій органів тіла, таких як кровообіг, діяльність серцевого м'яза та поглинання йоду щитовидною залозою.

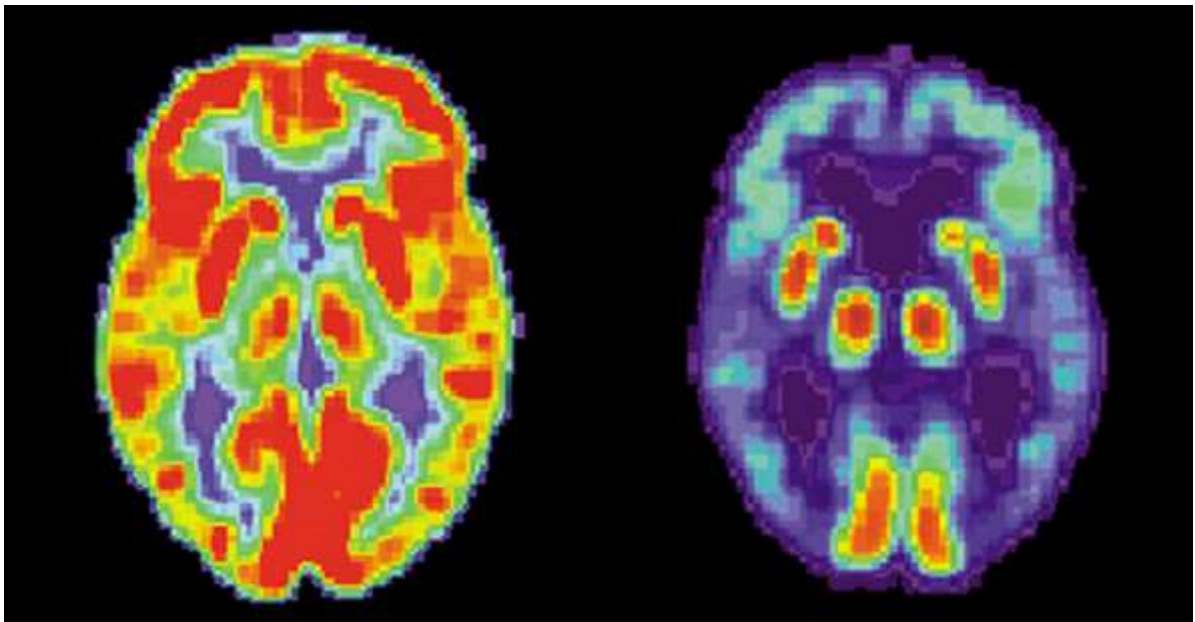


Рис. 5.27. Ці зображення мозку створені за допомогою радіофармпрепарату. Кольори вказують на відносну метаболічну або біохімічну активність (червоний означає високу активність, а синій — низьку). На малюнку ліворуч зображено нормальний мозок людини, а на малюнку праворуч — мозок людини з діагнозом хвороба Альцгеймера. Зображення нормального мозку вказує на набагато більшу метаболічну активність (більша частка червоних і оранжевих областей)

У табл. 5.2 наведено деякі медичні діагностичні види використання радіофармацевтичних препаратів, включаючи ізотопи та типові рівні активності (А). Один з поширених діагностичних тестів використовує йод для зображення щитовидної залози, оскільки йод зосереджений у цьому органі. Іншою поширеною ядерною діагностикою є талієве сканування серцево-судинної системи, яке виявляє закупорки коронарних артерій і досліджує серцеву діяльність. Можна використовувати сіль $TlCl$, оскільки вона діє як $NaCl$ і слідує за кров'ю. Зауважте, що в табл. 5.2 перераховано багато діагностичних застосувань для ^{99m}Tc , де «m» означає метастабільний стан ядра технецію. Цей ізотоп використовується в багатьох сполуках для зображення скелета, серця, легенів і нирок 80 % усіх радіофармацевтичних препаратів. Вибрано ^{99m}Tc тому,

що він виробляє один легко ідентифікований 0,142 MeV γ -промінь і має короткий період напіврозпаду 6,0 годин, що зменшує вплив радіації.

Таблиця 5.2

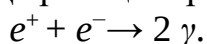
Використання радіофармацевтичних препаратів для діагностики

Процедура, ізотоп	Активність, мКі	Процедура, ізотоп	Активність, мКі
<i>Сканування мозку</i>		<i>Сканування щитовидної залози</i>	
^{99m}Tc	7,5	^{131}I	0,05
^{15}O	50	^{123}I	0,07
<i>Сканування легень</i>		<i>Сканування печінки</i>	
^{133}Xe	7,5	^{198}Au (колоїдний)	0,1
^{99m}Tc	2	^{99m}Tc (колоїдний)	2
<i>Серцево-судинний басейн крові</i>		<i>Сканування кісток</i>	
^{131}I	0,2	^{85}Sr	0,1
^{99m}Tc	2	^{99m}Tc	10
<i>Серцево-судинний артеріальний потік</i>		<i>Сканування нирок</i>	
^{201}Tl	3	^{197}Hg	0,1
^{24}Na	7,5	^{99m}Tc	1,5

1 мКі = $3,7 \times 10^7$ Бк

Перші детектори випромінювання створювали двовимірні зображення, як фото, зроблене з камери. Однак круглий масив детекторів, який можна обертати, можна використовувати для отримання тривимірних зображень. Цей метод схожий на той, який використовується в рентгенівській комп'ютерній томографії (КТ). Один із застосувань цієї методики називається **КТ з однофотонним випромінюванням (SPECT)** (рис. 5.28). Просторова роздільна здатність цієї техніки становить близько 1 см.

Покращена роздільна здатність зображення досягається за допомогою методики, відомої як **позитронно-емісійна томографія (ПЕТ)**. Ця техніка використовує радіоізотопи, які розпадаються з β^+ -випромінюванням. Коли позитрон стикається з електроном, ці частинки анігілюють, утворюючи два фотони гамма-випромінювання. Ця реакція представлена так:



Ці γ -фотони мають однакову енергію 0,511 MeV і рухаються прямо один від одного (рис. 5.29). Цю легко ідентифіковану ознаку розпаду можна використовувати для ідентифікації розташування радіоактивного ізотопу. Приклади β^+ -випромінюючих ізотопів, що використовуються в ПЕТ, включають ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O й ^{18}F . Ядра мають перевагу в тому, що вони можуть функціонувати як мітки для природних сполук тіла. Їого роздільна здатність 0,5 см, тобто краща, ніж у SPECT.



Рис. 5.28. Апарат SPECT використовує радіофармацевтичні сполуки для отримання зображення людського тіла. Машина використовує переваги фізики ядерних бета-розпадів і електрон-позитронних зіткнень

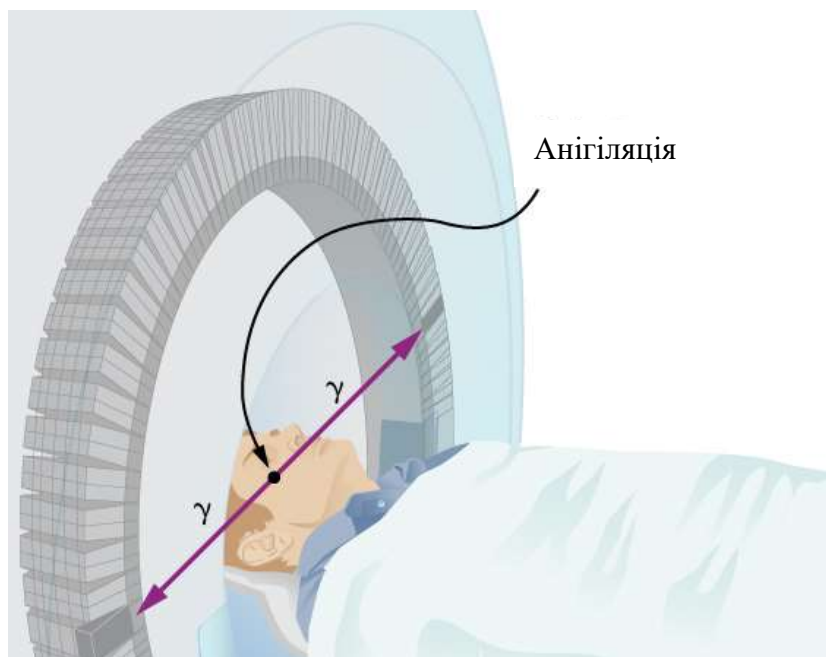


Рис. 5.29. Система ПЕТ використовує переваги двох ідентичних γ -фотонів, утворених позитронно-електронною анігіляцією. Ці γ -промені випромінюються в протилежних напрямках, так що визначається лінія, уздовж якої випромінюється кожна пара

ПЕТ-сканування особливо корисно для вивчення анатомії та функції мозку. Наприклад, ПЕТ-сканування можна використовувати для моніторингу споживання мозком кисню та води, виявлення областей зниженого метаболізму (пов'язаних із хворобою Альцгеймера) і визначення місцезнаходження різних частин мозку, відповідальних за зір, мову та дрібну моторику.

Біологічні ефекти

Ядерне випромінювання може мати як позитивний, так і негативний вплив на біологічні системи. Однак його також можна використовувати для лікування і навіть лікування раку. Як ми розуміємо ці ефекти? Щоб відповісти на це питання, розглянемо молекули в клітинах, зокрема молекули ДНК.

Клітини мають довгі двоспіральні молекули ДНК, що містять хімічні коди, які керують функціями та процесами клітини. Ядерне випромінювання може змінювати структурні особливості ланцюга ДНК, що призводить до змін у генетичному коді. У людських клітинах ми можемо мати до мільйона окремих випадків пошкодження ДНК на клітину на день. ДНК містить коди, які перевіряють, чи ДНК пошкоджена і чи може сама відновлюватися. Ця здатність ДНК до відновлення життєво важлива для підтримки цілісності генетичного коду та нормального функціонування всього організму. Він має бути постійно активним і має швидко реагувати. Швидкість відновлення ДНК залежить від різних факторів, таких як тип і вік клітини. Якщо ядерне випромінювання пошкоджує здатність клітини відновлювати ДНК, клітина може

1. Відійти до незворотного стану спокою (відомого як старіння);
2. Вчинити самогубство (відоме як запрограмована смерть клітини); або
3. Прогресувати до нерегульованого поділу клітин, що може призвести до пухлин і раку.

Ядерне випромінювання може завдати шкоди організму людини також багатьма іншими способами. Наприклад, високі дози ядерного випромінювання можуть викликати опіки і навіть випадання волосся.

Біологічні ефекти ядерного випромінювання виражаються багатьма різними фізичними величинами та різними одиницями. Загальною одиницею для вираження біологічних ефектів ядерного випромінювання є **рад** або **одиниця дози радіації**. Один рад дорівнює 1/100 джоуля ядерної енергії, падаючої на кілограм тканини тіла:

$$1\text{рад} = 0,01\text{Дж} / \text{кг}.$$

Наприклад, якщо людина вагою 50,0 кг зазнає впливу ядерного випромінювання на все тіло і поглинає 1,00 Дж, то доза опромінення всього тіла становить

$$(1,00 \text{ Дж}) / (50,0\text{кг}) = 0,02 \text{ Дж} / \text{кг} = 2,00\text{рад}.$$

Ядерне випромінювання пошкоджує клітини, іонізуючи атоми в клітинах, коли вони проходять крізь клітини (рис. 5.30). Вплив іонізуючого випромінювання залежить від дози в радах, а також від типу випромінювання (альфа-, бета-, гамма- чи рентгенівське) і типу тканини. Наприклад, якщо діапазон випромінювання малий, як для α -променів, то іонізація та створена шкода є

більш концентрованими, і організму їх важче відновити. Щоб врахувати такі впливи, ми визначаємо **відносну біологічну ефективність** (ВБЕ). Приблизні значення ВБЕ для кількох видів іонізуючого ядерного випромінювання наведені в табл. 5.3 .

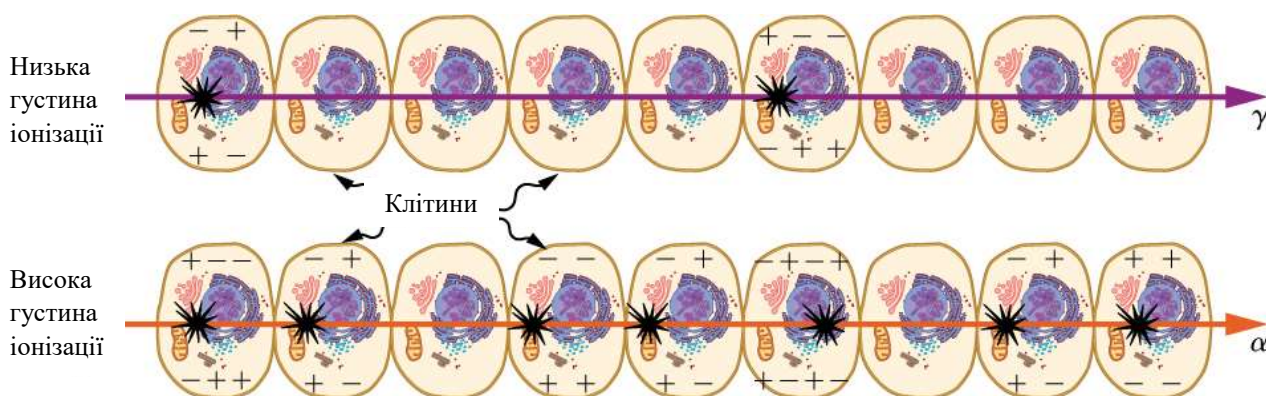


Рис. 5.30. На зображенні показано іонізацію, створену в клітинах α - і β -випромінюванням. Через менший радіус дії іонізація та пошкодження, створені α -променями є більш концентрованими і організму важче відновлюватися. Таким чином, ВБЕ для α -променів більше ВБЕ для β -променів, навіть якщо вони створюють однакову кількість іонізації з однаковою енергією

Таблиця 5.3

Відносна біологічна ефективність

Тип і енергія випромінювання	ВБЕ ^[1]
Рентгенівські промені	1
β -промені	1
β -промені понад 32 кеВ	1
β -промені менше 32 кеВ	1,7
Нейтрони, від теплових до повільних (< 20 кеВ)	2–5
Нейтрони швидкі (1–10 МеВ)	10 (тіло), 32 (очі)
Протони (1–10 МеВ)	10 (тіло), 32 (очі)
α - промені від радіоактивного розпаду	10–20
Важкі іони з прискорювачів	10–20

^[1] Значення приблизні. Важко визначити.

Одиниця дози, більш тісно пов'язана з ефектами в біологічній тканині, називається **рентгенівським еквівалентом людини (бер)** і визначається як доза

(в радах), помножена на відносну біологічну ефективність (ВБЕ). Таким чином, якщо людина отримала дозу опромінення всього тіла 2,00 рад γ -радіації, дійсна доза була б (2,00рад) (1) = 2,00 бер для всього тіла. Якщо людина отримала дозу на все тіло 2,00 рад γ -випромінювання, то дійсна доза становитиме (2,00 рад) (20) = 40,0 бер для всього тіла. α -промені мали б у 20 разів сильніший вплив на людину, ніж γ -промені для тієї самої вкладеної енергії. Еквівалентом бера в системі СІ і більш стандартним терміном є зіверт (**Зв**):

$$1 \text{ Зв} = 100 \text{ бер.}$$

ВБЕ, наведені в табл. 5.3, є приблизними, але відображають розуміння ядерного випромінювання та його взаємодії з живою тканиною. Наприклад, відомо, що нейтрони завдають більшої шкоди, ніж β -промені, хоча обидва є нейтральними і мають великий діапазон, завдяки вторинному випромінюванню. Будь-яка доза менше 100 мЗв (10 бер) називається **низькою дозою**, від 0,1 Зв до 1 Зв (10 до 100 бер) називається **помірною дозою**, а все, що перевищує 1 Зв (100 бер), називається **високою дозою**. Важко визначити, чи зазнала людина опромінення менше 10 мЗв.

Біологічний вплив різних рівнів ядерного випромінювання на організм людини наведено в табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Негайні наслідки радіації (дорослі, все тіло, одноразове опромінення)

Доза в Зв ^[1]	Ефект
0–0,10	Немає помітного ефекту.
0,1–1	Від легкого до помірного зниження кількості лейкоцитів.
0,5	Тимчасова стерильність; 0,35 для жінок, 0,50 для чоловіків.
1–2	Значне зниження кількості кров'яних тілець, короточасна нудота і блювання. Рідко летальний результат.
2–5	Нудота, блювота, випадання волосся, серйозне ураження крові, крововилив, летальні випадки.
4,5	Смертельна для 50% населення протягом 32 днів після контакту, якщо не лікувати.
5–20	Найгірші наслідки через порушення роботи тонкої кишки та систем крові. Обмежене виживання.
> 20	Смертельний результат протягом кількох годин внаслідок колапсу центральної нервової системи.

^[1] Помножте на 100, щоб отримати дійсну дозу.

Першою ознакою того, що людина зазнала опромінення, є зміна показників крові, що не дивно, оскільки кров'яні клітини є клітинами, що найшвидше відтворюються в організмі. При більш високих дозах спостерігаються нудота і випадання волосся, що може бути пов'язано з порушенням репродукції клітин. Клітини слизової оболонки травної системи також швидко відтворюються, і їх руйнування викликає нудоту. Коли ріст волоссяних клітин сповільнюється, волоссяні фолікули стають тонкими і відламуються. Високі дози спричиняють значну загибель клітин у всіх системах, але найнижчі дози, які спричиняють летальний результат, ослаблюють імунну систему через втрату лейкоцитів.

Джерела радіації

Людина також піддається впливу багатьох джерел ядерного випромінювання. Зведення середніх доз опромінення для різних джерел по країнах наведено в табл. 5.5. Земля випромінює радіацію за рахунок ізотопів урану, торію та калію. Рівень радіації від цих джерел залежить від місця розташування та може змінюватися в 10 разів. Добрива містять ізотопи калію та урану, які ми перетравлюємо з їжею, яку їмо. Добрива мають радіоактивність понад 3000 Бк/кг, у порівнянні з лише 66 Бк/кг для вуглецю-14.

Ці дози, як правило, низькі, їх можна ще більше знизити за допомогою вдосконалених методів і більш чутливих детекторів. Можливо, за винятком звичайних рентгенівських знімків зубів, медичне використання ядерного випромінювання використовується лише тоді, коли співвідношення ризик/користь є сприятливим. Рентген грудної клітки дає найнижчі дози — близько 0,1 мЗв на уражену тканину, менше ніж 5 % розсіювання в тканини, які безпосередньо не зображені. Інші рентгенівські процедури досягають приблизно 10 мЗв при комп'ютерній томографії та приблизно 5 мЗв (0,5 бер) на рентгенівському знімку зуба, знову ж таки, обидві впливають лише на зображену тканину. Медичні зображення з радіофармацевтичними препаратами дають дози в діапазоні від 1 до 5 мЗв та зазвичай локалізовані.

Таблиця 5.5

Джерела фонового випромінювання та середні дози

Джерело	Доза (мЗв/рік) ^[1]			
	Австралія	Німеччина	США	світ
Природне випромінювання — зовнішнє				
Космічні промені	0,30	0,28	0,30	0,39

Джерело	Доза (мЗв/рік) ^[1]			
Грунт, будівельні матеріали	0,40	0,40	0,30	0,48
Газ радон	0,90	1,1	2,0	1,2
⁴⁰ K, ¹⁴ C, ²²⁶ Ra	0,24	0,28	0,40	0,29
<i>Штучне випромінювання</i>				
Медичне та стоматологічне	0,80	0,90	0,53	0,40
РАЗОМ	2,6	3,0	3,5	2,8

^[1] Помножте на 100, щоб отримати значення в мбер/рік.

Відвідування лікаря також є джерелом ядерного випромінювання. Зразок загальних доз ядерного опромінення наведено в табл. 5.6.

Таблиця 5.6

Типові дози, отримані під час діагностичних рентгенівських досліджень

Процедура	Ефективна доза (мЗв)
Груди	0,02
Стоматологічна	0,01
Череп	0,07
Ніжка	0,02
Мамографія	0,40
Барієва клізма	7,0
Верхній GI	3,0
КТ голови	2,0
КТ живота	10,0

Приклад 5.12. Яку масу ^{137}Cs отримано від Чорнобиля?

Аварія на Чорнобильській АЕС в Україні (колишній Радянський Союз) піддала навколишнє населення великій кількості радіації через розпад ^{137}Cs . Початковий рівень радіоактивності був приблизно $A = 6,0 \text{ МКі}$. Обчисліть загальну масу ^{137}Cs , отриману учасниками цієї аварії.

Стратегія

Загальну кількість ядер N , можна визначити за відомим періодом напіврозпаду та активністю ^{137}Cs (30,2 р.). Масу можна обчислити з N за допомогою поняття моль.

Розв'язок

Розв'язування рівняння $A = 0,693N/T_{1/2}$ для N дає вираз:

$$N = \frac{AT_{1/2}}{0,693}.$$

Введення заданих значень дає результат:

$$N = \frac{(6,0 \text{ МКі})(30,2 \text{ р.})}{0,693}.$$

Щоб перетворити кюрі в бекерелі та роки в секунди, ми пишемо

$$N = \frac{(6,0 \times 10^6 \text{ Кі})(3,7 \times 10^{10} \text{ Бк/Кі})(30,2 \text{ р.})(3,16 \times 10^7 \text{ с/р.})}{0,693} = 3,1 \times 10^{26}.$$

Один моль нукліда ^{137}Cs має масу A грам, так що один моль ^{137}Cs має масу 137 г. Моль має $6,02 \times 10^{23}$ ядра. Таким чином маса ^{137}Cs дорівнювала:

$$m = \left(\frac{137 \text{ г}}{6,02 \times 10^{23}} \right) (3,1 \times 10^{26}) = 70 \times 10^3 \text{ г} = 70 \text{ кг}.$$

Обговорення

Маса ^{137}Cs Чорнобильської аварії є невеликою кількістю матеріалу порівняно зі звичайною кількістю палива, що використовується в ядерному реакторі. Однак приблизно 250 людей потрапили до місцевих лікарень відразу після аварії з діагнозом гострий радіаційний синдром. Вони отримали дози зовнішнього опромінення від 1 до 16 Зв. З огляду на біологічні ефекти в табл. 5.4, ці дози є надзвичайно небезпечними. Кінцева кількість загиблих оцінюється в близько 4000 осіб, головним чином через рак, спричинений радіацією.

Перевірте своє розуміння 5.7

Випромінювання поширюється в усіх напрямках від джерела, подібно до електромагнітного випромінювання лампочки. Чи концепція *активності* більш аналогічна потужності, інтенсивності чи яскравості?

Вправи до п. 5.7. Медичне застосування та біологічні ефекти ядерного випромінювання

1. Яка доза в мЗв для: (а) рентгенівського випромінювання 0,1 Гр? (б) 2,5 мГр нейтронного впливу на око? (в) 1,5 мГр α -випромінювання?
2. Знайдіть дозу опромінення в Гр для: (а) Серії рентгенівських знімків 10 мЗв. (б) 50 мЗв опромінення шкіри α -випромінювачем. (в) 160 мЗв β^- і γ -променів від ^{40}K у вашому тілі.
3. Знайдіть масу ^{239}Pu , що має активність 1,00 мкКі.
4. У 1980-х роках термін пікохвилі використовувався для опису опромінення їжі, щоб подолати спротив громадськості, граючи на загальновідомій безпеці мікрохвильового випромінювання. Знайти енергію в МеВ фотона з довжиною хвилі пікометра.
5. Яка доза в Зв при лікуванні раку, при якому пацієнт опромінюється 200 Гр γ -променів?
6. Одна половина γ -променів від $^{99\text{m}}\text{Tc}$ поглинається свинцевим екраном товщиною 0,170 мм. Половина γ -променів, які проходять через перший шар свинцю, поглинаються другим шаром такої ж товщини. Яка товщина свинцю поглине всі γ -фотони, крім одного з 1000?
7. Скільки Гр опромінення необхідно, щоб ракова пухлина отримала дозу 40 Зв, якщо вона опромінена α -частинками?
8. Сантехнік на атомній електростанції отримує дозу 30 мЗв на все тіло за 15 хвилин під час ремонту важливого клапана. Знайдіть спричинений радіацією річний ризик смерті від раку та ймовірність генетичного дефекту від цього максимально допустимого опромінення.
9. Розрахувати дозу в рентген/рік для легень працівника збройового заводу, який вдихає і зберігає активність 1,00 мкКі ^{239}Pu під час можливої аварії. Маса ураженої легеневої тканини становить 2,00 кг, а плутоній розпадається випромінюванням 5,23 МеВ α -частинок. Припустимо, що значення RBE дорівнює 20.

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

5.1. Властивості ядер

1. Дайте визначення та чітко розмежуйте терміни нейтрон, нуклон, ядро та нуклід.
2. Що таке ізотопи? Чому ізотопи одного атома мають однакові хімічні властивості?

5.2. Ядерна енергія зв'язку

3. Поясніть, чому зв'язана система повинна мати меншу масу, ніж її компоненти. Чому це традиційно не дотримується, скажімо, для цегляної будівлі?

4. Чому кількість нейтронів більша за кількість протонів у стабільних ядрах, які мають A більше ніж 40? Чому цей ефект більш виражений для найважчих ядер?
5. Щоб отримати найточніше значення енергії зв'язку на нуклон, важливо врахувати сили між нуклонами на поверхні ядра. Поверхневі ефекти збільшать або зменшать величину питомої енергії зв'язку (BEN)?

5.3. Радіоактивний розпад

6. Як початкова активність радіоактивної речовини пов'язана з періодом її напіврозпаду?
7. Що стосується вуглецевого датування, описаного в цьому розділі, яке важливе припущення зроблено щодо зміни інтенсивності космічних променів у часі?

5.4. Ядерні реакції

8. У чому полягає ключова відмінність і ключова схожість між бета (β^-) розпадом і альфа-розпадом?
9. Яка різниця між γ -променем, характеристичним рентгенівським променем та видимим світлом?
10. Які характеристики радіоактивності показують, що вона має ядерне походження, а не атомне?
11. Розгляньте малюнок 5.12. Якщо магнітне поле замінити електричним полем, спрямованим у бік сторінки, у яких напрямках будуть α -, β^+ -, і γ -промені згинатися?
12. Чому ядро Землі розплавлене?

5.5. Поділ

13. Чи справді атомну бомбу слід називати ядерною?
14. Чому під час реакції поділу відбувається ланцюгова реакція?
15. Чим атомне ядро подібне до краплі рідини?

5.6. Ядерний синтез

16. Поясніть різницю між ядерним поділом і ядерним синтезом.
17. Чому при синтезі легких ядер у більш важкі звільняється енергія?

5.7 Медичне застосування та біологічні ефекти ядерного випромінювання

18. Чому PET сканування точніше, ніж сканування SPECT?
19. Ізотопи, які випромінюють α радіацію відносно безпечні поза організмом і виключно небезпечні всередині. Поясніть чому.
20. Іонізуюче випромінювання може погіршити здатність клітини відновлювати ДНК. Якими трьома способами може реагувати клітина?

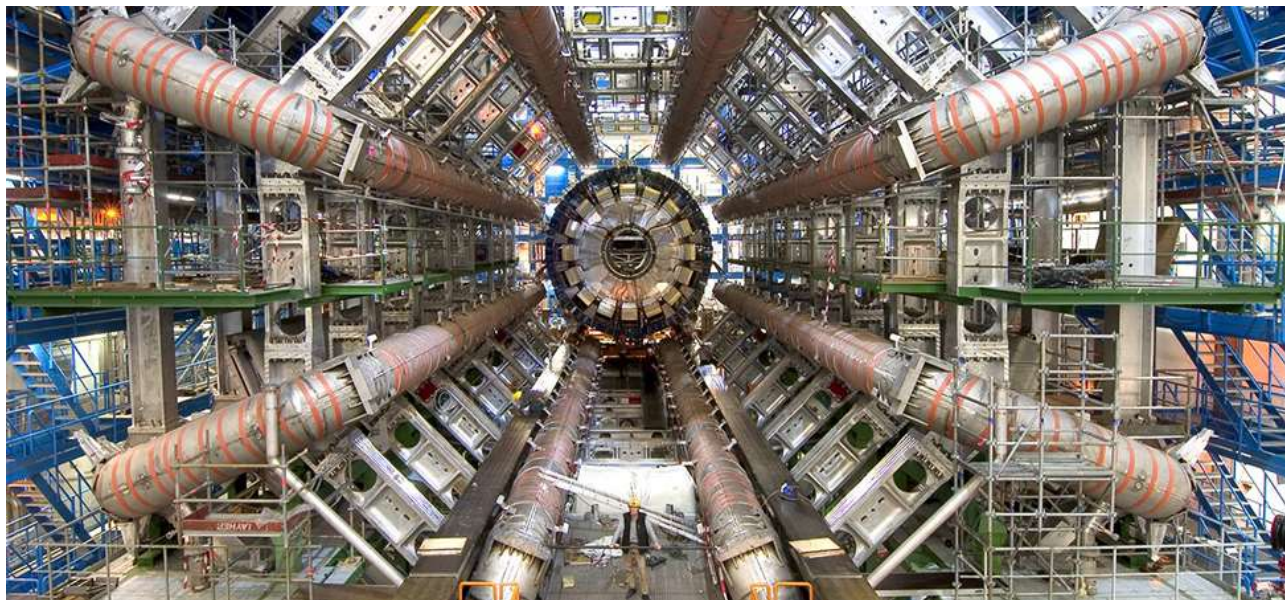


Рис. 6.1. Великий адронний колайдер (LHC) розташований на глибині понад 150 метрів під землею на кордоні Швейцарії та Франції поблизу Женеви, Швейцарія. LHC є найпотужнішою машиною, коли-небудь розробленою для перевірки нашого розуміння взаємодії елементарних частинок. Тут показано детектор ATLAS, який допомагає ідентифікувати нові частинки, що утворюються під час зіткнень

На самому початку ми обговорювали широкий спектр масштабів, які охоплює фізика, від найдрібніших частинок до найбільшого можливого масштабу — самого Всесвіту. У цьому останньому розділі ми розглядаємо деякі межі досліджень у цих екстремальних масштабах. Фізика елементарних частинок має справу з основними будівельними блоками матерії та силами, які утримують їх разом. Космологія — це наука про зірки, галактики та галактичні структури, які населяють наш Всесвіт, а також про їх минулу історію та майбутню еволюцію.

Ці дві галузі фізики не такі роз'єднані між собою, як можна подумати. Вивчення елементарних частинок потребує величезної енергії для виробництва ізольованих частинок, залучаючи деякі з найбільших машин, які коли-небудь створювали люди. Але такі високі енергії були присутні на ранніх стадіях Всесвіту, і Всесвіт, який ми бачимо навколо нас сьогодні, був частково сформований природою та взаємодією елементарних частинок, створених тоді. Майте на увазі, що фізика елементарних частинок і космологія є областями інтенсивних сучасних досліджень, які є предметом багатьох спекуляцій з боку фізиків (а також письменників-фантастів). У цьому розділі ми намагаємося підкреслити те, що відомо на основі висновків із даних спостережень, і визначити ідеї, які є припущеннями, але все ще недоведеними.

6.1. Вступ до фізики елементарних частинок

Фізика елементарних частинок — це дослідження **фундаментальних частинок** та їх взаємодії в природі. Ті, хто вивчає фізику елементарних частинок, відрізняються від інших фізиків масштабом систем, які вони вивчають. Фізик елементарних частинок не задовольняється вивченням мікроскопічного світу клітин, молекул, атомів чи навіть атомних ядер. Їх цікавлять фізичні процеси, які відбуваються в масштабах навіть менших, ніж атомні ядра. Водночас вони відкривають найглибші таємниці природи: як виник Всесвіт? Що пояснює структуру мас у Всесвіті? Чому матерії у Всесвіті більше, ніж антиматерії? Чому енергія та імпульс зберігаються? Як буде розвиватися Всесвіт?

Поле фізики елементарних частинок було розроблено завдяки спостереженням, які спочатку не можна було пояснити, але які спонукали дослідників поглибити свої дослідження та зробити висновки, що призвело до створення цілої субдисципліни фізики (**субатомної фізики**), яка має значні застосування в науці та промисловості. Відкриття елементарних частинок сталося частково завдяки розробці та часто простому застосуванню нових технологій. Як обговорювалося раніше, експерименти Ернеста Резерфорда з використанням фотопластинок були, по суті, початковими набігами на фізику елементарних частинок. Австрійський фізик Марієтта Блау почала вдосконалювати процес виготовлення фотопластинки, відомий як ядерна емульсія, шляхом включення нових матеріалів і створення нових методів для проведення експериментів. Їй вдалося виявити протонні треки і визначити енергію нейтронів і протонів. Розмістивши на вершині гори спеціально підготовлені пластини для захоплення космічних променів, вона зафіксувала перші докази ядерного розпаду. Дебендра Мохан Боуз, Бібха Чоудурі, Сесіл Пауелл та інші ґрунтувалися на цих знаннях і відкрили нові частинки, такі як мезон. Ці зусилля призведуть до все глибшого знання найменших частинок матерії, їх застосування та сил всередині атомів.

Чотири фундаментальні сили

Важливим кроком до відповіді на ці запитання є розуміння частинок та їх взаємодії. Взаємодії частинок виражаються через чотири **фундаментальні сили**. У порядку зменшення інтенсивності ці сили є: **сильною ядерною силою**, електромагнітною силою, **слабкою ядерною силою** та силою тяжіння.

1. Сильна ядерна сила. Сильна ядерна сила – це дуже могутня сила тяжіння, яка діє лише на дуже короткій відстані (приблизно 10^{-15} м). Потужна ядерна сила відповідає за зв'язування протонів і нейтронів в атомних ядрах. Не всі частинки беруть участь у сильній ядерній силі; наприклад, на електрони та нейтрино вона не впливає. Як впливає з назви, ця сила набагато сильніша за інші сили.

2. Електромагнітна сила. Електромагнітна сила може діяти на дуже великих відстанях (вона має нескінченний діапазон), але становить лише 1/100

сили сильної ядерної сили. Частинки, які взаємодіють через цю силу, називаються «зарядженими». У класичній теорії статичної електрики (закон Кулона) електрична сила змінюється як добуток зарядів взаємодіючих частинок і як обернений квадрат відстаней між ними. На відміну від сильної, електромагнітна сила може бути притягальною або відштовхуючою (протилежні заряди притягуються, а однакові заряди відштовхуються). Магнітна сила більш складним чином залежить від зарядів і їх руху. Об'єднання електричної та магнітної сил в єдину електромагнітну силу (досягнення Джеймса Клерка Максвелла) вважається одним із найбільших інтелектуальних досягнень дев'ятнадцятого століття. Ця сила є центральною для наукових моделей атомної структури та молекулярного зв'язку.

3. Слабка ядерна сила. Слабка ядерна сила діє на дуже короткій відстані (10^{-15} м) і, як випливає з назви, дуже слабка. Це приблизно 10^{-6} потужної ядерної сили. Найбільше ця сила проявляється в розпадах елементарних частинок і взаємодії нейтрино. Наприклад, нейтрон може розпадатися на протон, електрон і електронне нейтрино через слабку силу. Слабка сила життєво важлива, оскільки вона необхідна для розуміння зоряного нуклеосинтезу — процесу, який створює нові атомні ядра в ядрах зірок.

4. Сила гравітації. Як і електромагнітна сила, гравітаційна сила може діяти на нескінченно великих відстанях; однак це лише 10^{-38} від потужної ядерної сили. У класичній теорії гравітації Ньютона сила тяжіння змінюється як добуток мас взаємодіючих частинок на обернений квадрат відстані між ними. Ця сила є силою тяжіння, яка діє між усіма частинками з масою. У сучасних теоріях гравітації така поведінка сили вважається окремим випадком низькоенергетичних макроскопічних взаємодій. Порівняно з іншими силами природи гравітація є найслабшою.

Фундаментальні сили можуть не бути справді «фундаментальними», але насправді можуть бути різними аспектами однієї сили. Подібно до того, як електричні та магнітні сили були об'єднані в електромагнітну силу, фізики 1970-х років об'єднали електромагнітну силу зі слабкою ядерною силою в **електрослабку силу**. Будь-яка наукова теорія, яка намагається об'єднати електрослабку силу і сильну ядерну силу, називається **великою об'єднаною теорією**, а будь-яка теорія, яка намагається об'єднати всі чотири сили, називається теорією **всього**. Ми повернемося до концепції уніфікації пізніше в цьому розділі.

Класифікації елементарних частинок

У природі існує велика кількість субатомних частинок (~ 500). Ці частинки можна класифікувати двома способами: за спіном та участю у чотирьох фундаментальних силах. Нагадаємо, що спін частинки аналогічний обертанню макроскопічного об'єкта навколо власної осі. Ці типи класифікації описані окремо нижче.

Класифікація за спіном

Частинки речовини можна розділити на **ферміони** та **бозони**. Ферміони мають напівцілий спін ($\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$), а бозони мають цілочисельний спін ($0\hbar, 1\hbar, 2\hbar, \dots$). Відомими прикладами ферміонів є електрони, протони та нейтрони. Відомим прикладом бозона є фотон. Ферміони і бозони поведуться дуже по-різному в групах. Наприклад, коли електрони обмежені невеликою областю простору, принцип виключення Паулі стверджує, що два електрони не можуть займати однаковий квантово-механічний стан. Однак, коли фотони обмежені великою областю простору, такого обмеження немає.

Поведінку ферміонів і бозонів у групах можна зрозуміти з точки зору властивості нерозрізненості. Частинки називають «нерозрізними», якщо вони ідентичні одна одній. Наприклад, електрони неможливо розрізнити, тому що кожен електрон у Всесвіті має таку саму масу та спін, як і всі інші електрони: «коли ви бачите один електрон, ви бачите їх усіх». Якщо поміняти дві нерозрізнені частинки в тій самій невеликій області простору, квадрат хвильової функції, яка описує цю систему і може бути виміряна ($|\psi|^2$) є незмінним. Якби це було не так, ми могли б сказати, чи були частинки замінені чи ні, і частинка не була б дійсно нерозрізненою. Ферміони і бозони відрізняються тим, чи знак хвильової функції (ψ) — не спостерігається безпосередньо — перевертається:

$$\psi \rightarrow -\psi \text{ (нерозрізнені ферміони),}$$

$$\psi \rightarrow +\psi \text{ (нерозрізнені бозони).}$$

Ферміони називають «антисиметричними при обміні», а бозони «симетричними при обміні». Принцип виключення Паулі є наслідком **обмінної симетрії** ферміонів — зв'язку, розробленого в більш просунутому курсі сучасної фізики. Електронна структура атомів базується на принципі виключення Паулі і тому безпосередньо пов'язана з нерозрізненістю електронів.

Класифікація за силовими взаємодіями

Ферміони можна далі розділити на **кварки** та **лептони**. Основна відмінність між цими двома типами частинок полягає в тому, що кварки взаємодіють через сильну силу, а лептони — ні. Кварки та лептони (а також бозони, які обговорюватимуться пізніше) упорядковані на рис. 6.2. Два верхніх рядки (перші три стовпці фіолетового кольору) містять шість кварків. Ці кварки поділяються на дві родини частинок: up, charm і top (u, c, t), і down, strange і bottom (d, s, b). Члени одного сімейства частинок мають однакові властивості, але відрізняються масою (наведено в MeV/c²). Наприклад, маса топ-кварка набагато більша, ніж шарм-кварка, а маса чарівного кварка набагато більша, ніж верхнього кварка. Всі кварки взаємодіють один з одним через сильну ядерну силу.

Три покоління матерії (ферміони)				
	I	II	III	
маса спокою→	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
електричний заряд→	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
спін→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
назва→	верхній	зачарований	істинний	фотон
Кварки	4.8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d нижній	104 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s дивний	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b чарівний	0 0 1 g глюон
	<2.2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e електронне нейтрино	<0.17 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ мюонне нейтрино	<15.5 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ тау-нейтрино	91.2 GeV 0 1 Z^0 Z-бозон
	0.511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e електрон	105.7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ мюон	1.777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ тау	80.4 GeV ± 1 1 $W^\pm$ W-бозон
Лептони				Калібрувальні бозони (переносники взаємодії)

Рис. 6.2. Сімейства субатомних частинок, класифіковані за типами сил, з якими вони взаємодіють

Звичайна матерія складається з двох типів кварків: верхній кварк (елементарний заряд $q = +2/3$) і нижній кварк ($q = -1/3$). Важчі кварки нестабільні і швидко розпадаються на легші через слабку силу. Кварки зв'язуються разом у групи з двох і трьох, які називають **адронами** через сильну силу. Адрони, що складаються з двох кварків, називають **мезонами**, а ті, що складаються з трьох кварків, — **баріонами**. Прикладом мезонів є піон і каон, а прикладом баріонів є знайомі протон і нейтрон. Протон – це два верхніх кварка та нижній кварк ($p = uud, q = +1$) і нейтрон – це один верхній кварк і два нижніх кварки ($n = udd, q = 0$). Властивості мезонів і баріонів наведені в табл. 6.1. Кварки беруть участь у всіх чотирьох фундаментальних силах: сильній, слабкій, електромагнітній і гравітаційній.

Два нижні ряди на малюнку (зелені) містять шість лептонів, упорядкованих у дві родини частинок: електрон, мюон і тау (e, μ, τ), а також електронне нейтрино, мюонне нейтрино та тау-нейтрино (ν_e, ν_μ, ν_τ). Мюон більш ніж у 200 разів важчий за електрон, але в іншому схожий на електрон. Тау приблизно в 3500 разів важчий за електрон, але в іншому схожий на мюон і електрон. Після створення мюон і тау швидко розпадаються на більш легкі частинки через слабку силу. Лептони не беруть участі в сильній силі. Про кварки

та лептони йтиметься далі в цьому розділі. Лептони беруть участь у слабкій, електромагнітній і гравітаційній силах, але не беруть участі в сильній силі.

Таблиця 6.1

Частинки та їх властивості

	Назва частинки	Символ	Античастинка	Маса, (MeV/c ²)	Середній термін життя, (с)
Лептони					
	Електрон	e^-	e^+	0,511	Стабільний
	Електронне нейтрино	ν_e	$\bar{\nu}_e$	≈ 0	Стабільний
	Мюон	μ^-	μ^+	105,7	$2,20 \times 10^{-6}$
	Мюонне нейтрино	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	≈ 0	Стабільний
	Тау	τ^-	τ^+	1784 років	$< 4 \times 10^{-13}$
	Тау-нейтрино	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	≈ 0	Стабільний
Адрони					
Баріони	Протон	p	p^-	938,3	Стабільний
	Нейтрон	n	$\bar{n}$	939,6	920
	Лямбда	Λ^0	Λ^0	1115,6	$2,6 \times 10^{-10}$
	Сигма	Σ^+	Σ^-	1189,4	$0,80 \times 10^{-10}$
	Ксі	Ξ^+	Ξ^-	1315	$2,9 \times 10^{-10}$
	Омега	Ω^+	Ω^-	1672 років	$0,82 \times 10^{-10}$
Мезони	Піон	π^+	π^-	139,6	$2,60 \times 10^{-8}$
	Піон-нуль	π^0	π^0	135,0	$0,83 \times 10^{-16}$
	Каон	K^+	K^-	493,7	$1,24 \times 10^{-8}$
	K - short	K_S^0	$\overline{K_S^0}$	497,6	$0,89 \times 10^{-10}$

	Назва частинки	Символ	Античастинка	Маса, (MeV/c ²)	Середній термін життя, (с)
	K -long	K_L^0	$\overline{K}_L^0$	497,6	$5,2 \times 10^{-8}$
	J/ψ	J/ψ	J/ψ	3100	$7,1 \times 10^{-21}$
	Іпсилон	Υ	Υ	9460	$1,2 \times 10^{-20}$

Бозони (показані червоним коліром) є носіями сили ферміонів. У цій моделі лептони та кварки взаємодіють один з одним, посилаючи та приймаючи бозони. Наприклад, кулонівська взаємодія виникає, коли дві позитивно заряджені частинки посилають і приймають (обмінюються) фотонами. Кажуть, що фотони «переносять» силу між зарядженими частинками.

Подібним чином притягання між двома кварками в атомному ядрі виникає, коли два кварки посилають і приймають **глюони**.

Додаткові приклади включають **бозони W і Z** (які несуть слабку ядерну силу) і гравітони (які несуть гравітаційну силу). Бозон Хіггса є особливою частинкою: коли він взаємодіє з іншими частинками, він наділяє їх не силою, а масою. Іншими словами, бозон Хіггса допомагає пояснити, *чому* частинки мають масу. Ці твердження є частиною попередньої, але дуже продуктивної наукової моделі (**Стандартної моделі**), яка обговорюється пізніше.

Частинки та античастинки

Наприкінці 1920-х років спеціальна теорія відносності і квантова механіка були об'єднані в релятивістську квантову теорію електрона. Дивовижним результатом цієї теорії було передбачення двох енергетичних станів для кожного електрона: один пов'язаний з електроном, а інший – з іншою частинкою з такою ж масою, як електрон, але із зарядомі $+e$. Цю частинку називають антиелектроном або **позитроном**. Позитрон був відкритий експериментально в 1930-х роках.

Незабаром було виявлено, що для кожної частинки в природі існує відповідна **античастинка**. Античастинка має ту саму масу та час життя, що й пов'язана з нею частинка, і протилежний знак електричного заряду. Ці частинки утворюються в реакціях з високою енергією. Приклади високоенергетичних частинок включають антимюон ($\bar{\mu}^+$), анти- u кварк ($\bar{u}$), і анти- d кварк ($\bar{d}$). (Зауважте, що античастинки для кварків позначені рискою). Багато мезонів і баріонів містять античастинки. Наприклад, антипротон ($\bar{p}$) є $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$, позитивно заряджений піон (π^+) є $u\bar{d}$. Деякі нейтральні частинки, такі як фотон і π^0 -мезон, є власними античастинками. Приклади частинки, античастинки та їхні властивості наведені в табл. 6.1.

Ті самі сили, які утримують разом звичайну матерію, також утримують разом антиматерію. За відповідних умов можна створити такі антиатоми, як антиводень, антикисень і навіть антивода. В антиатомах позитрони обертаються навколо негативно зарядженого ядра з антипротонів і антинейтронів. На рис. 6.3 порівнюються атоми та антиатоми.

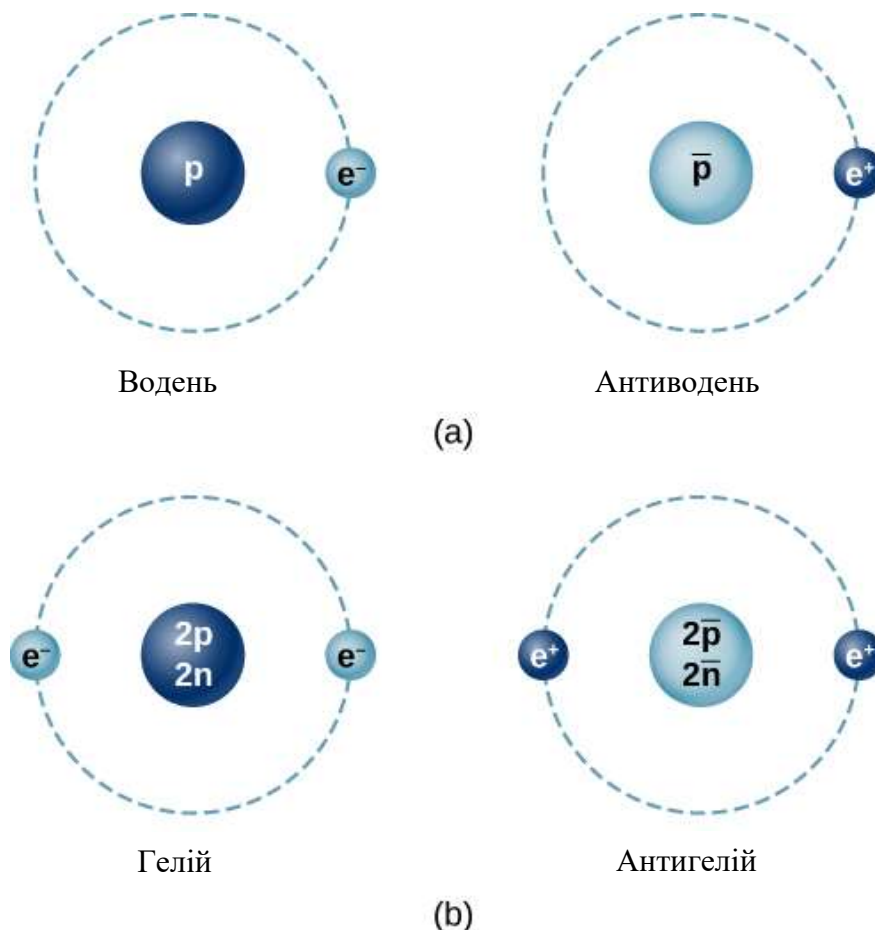
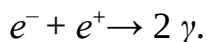


Рис. 6.3. Порівняння найпростіших атомів речовини та антиматерії. (a) У моделі Бора атом антиводню складається з позитрона, який обертається навколо антипротона. (b) Атом антигелію складається з двох позитронів, які обертаються навколо ядра з двох антипротонів і двох антинейтронів

Антиматерія не може довго існувати в природі, тому що частинки та античастинки анігілюють одна одну, створюючи випромінювання високої енергії. Типовим прикладом є електрон-позитронна анігіляція. Цей процес протікає шляхом реакції:



Електрон і позитрон повністю зникають, а на їх місці утворюються два фотони. (Виявляється, що утворення одного фотона порушить закон збереження енергії та імпульсу). Ця реакція також може відбуватися у зворотному напрямку: два фотони можуть анігілювати один одного, утворюючи пару електронів і позитронів. Або один фотон може створити пару електрон-позитрон у полі ядра, цей процес називають утворенням пари. Реакції такого типу регулярно

вимірюються в сучасних детекторах частинок. Існування античастинок у природі не є науковою фантастикою.

Вправи до п. 6.1. Вступ до фізики елементарних частинок

1. Скільки енергії виділяється, коли електрон і позитрон у стані спокою анігілюють один одного? (Маси частинок див. у таблиці 6.1).
2. Якщо $1,0 \times 10^{30} \text{ MeV}$ енергії вивільняється при анігіляції кулі матерії та антиматерії, і кулі мають однакову масу, які маси куль?
3. Коли і електрон, і позитрон перебувають у спокої, вони можуть анігілювати один одного відповідно до реакції

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Якими в цьому випадку є енергія, імпульс і частота кожного фотона?

4. Яка повна кінетична енергія переноситься частинками наступних розпадів?

(а) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

(б) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$

(в) $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$

(г) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$.

6.2. Закони збереження частинок

Закони збереження мають вирішальне значення для розуміння фізики елементарних частинок. Існують переконливі докази того, що енергія, імпульс і кутовий момент зберігаються в усіх взаємодіях частинок. Наприклад, анігіляція електрона та позитрона в стані спокою не може створити лише один фотон, оскільки це порушує закон збереження лінійного імпульсу. Як обговорювалося в теорії відносності, спеціальна теорія відносності змінює визначення імпульсу, енергії та інших знайомих величин. Зокрема, релятивістський імпульс частинки відрізняється від її класичного імпульсу в $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ разів, що змінюється від 1 до ∞ , в залежності від швидкості частинки. У попередніх розділах ми також стикалися з іншими законами збереження. Наприклад, заряд зберігається в усіх електростатичних явищах. Заряд, втрачений в одному місці, отримується в іншому, оскільки заряд переноситься частинками. Жоден відомий фізичний процес не порушує збереження заряду. У наступному підрозділі ми опишемо три менш відомі закони збереження: баріонного числа, лептонного числа та дивності. Це далеко не єдині закони збереження у фізиці елементарних частинок.

Збереження числа баріонів

Жоден закон збереження, розглянутий досі, не запобігає розпаду нейтрона через таку реакцію, як

$$n \rightarrow e^+ + e^-.$$

Цей процес зберігає заряд, енергію та імпульс. Однак цього не відбувається, оскільки порушується закон збереження баріонного числа. Цей закон вимагає, щоб загальне баріонне число реакції було однаковим до і після реакції. Для визначення повного баріонного числа кожній елементарній частинці присвоюється **баріонне число** B . Баріонне число має значення $B = +1$ для баріонів, -1 для антибаріонів і 0 для всіх інших частинок. Повертаючись до наведеного вище випадку (розпад нейтрона на електрон-позитронну пару), нейтрон має значення $B = +1$, тоді як електрон і позитрон мають значення 0 . Таким чином, розпад не відбувається, оскільки загальне баріонне число змінюється від 1 до 0 . Однак процес зіткнення протон-антипротон:

$$p + \bar{p} \rightarrow p + p + \bar{p} + \bar{p},$$

задовольняє закон збереження баріонного числа, оскільки баріонне число дорівнює нулю до та після взаємодії. Баріонне число для кількох поширених частинок наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

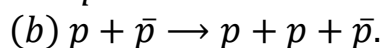
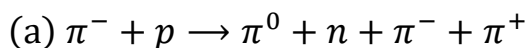
Властивості частинок

Назва частинки	Символ	Лептонне число (L_e)	Лептонне число (L_μ)	Лептонне число (L_τ)	Баріонне число, B	Число дивності
Електрон	e^-	1	0	0	0	0
Електронне нейтрино	ν_e	1	0	0	0	0
Мюон	μ^-	0	1	0	0	0
Мюонне нейтрино	ν_μ		1	0	0	0
Тау	τ^-	0	0	1	0	0
Тау-нейтрино	ν_τ	0	0	1	0	0
Піон	π^+	0	0	0	0	0
Каон позитивно	K^+	0	0	0	0	1
Каон негативний	K^-	0	0	0	0	-1
Протон	p	0	0	0	1	0
Нейтрон	n	0	0	0	1	0
Лямбда нуль	Λ^0	0	0	0	1	-1
Позитивна сигма	Σ^+	0	0	0	1	-1

Назва частинки	Символ	Лептонне число (L_e)	Лептонне число (L_μ)	Лептонне число (L_τ)	Баріонне число, B	Число дивності
Від'ємна сигма	Σ^-	0	0	0	1	-1
Ксі нуль	Ξ^0	0	0	0	1	-2
Негативний ксі	Ξ^-	0	0	0	1	-2
Омега	Ω^-	0	0	0	1	-3

Приклад 6.1. Збереження баріонного числа

Яка з наведених реакцій може відбуватися, виходячи із закону збереження баріонного числа?



Стратегія

Визначте загальне баріонне число для реагентів і продуктів і вимагайте, щоб це значення не змінювалося в реакції.

Розв'язок

Для реакції (а) сумарне баріонне число двох реагентів становить $0 + 1 = 1$, а сумарне баріонне число чотирьох продуктів дорівнює $0 + 1 + 0 + 0 = 1$. Оскільки сумарні баріонні числа реагентів і продуктів рівні, ця реакція допускається на основі закону збереження баріонного числа.

Для реакції (b) сумарне баріонне число реагентів становить $1 + (-1) = 0$ і сумарне баріонне число пропонуванних продуктів становить $1 + 1 + (-1) = 1$. Оскільки сумарні баріонні числа реагентів і запропонованих продуктів не однакові, ця реакція не може відбутися.

Обговорення

Баріонне число зберігається в першій реакції, але не в другій. Збереження баріонного числа обмежує, які реакції можуть і не можуть відбуватися в природі.

Перевірте своє розуміння 6.1

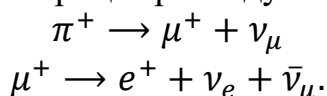
Чому дорівнює баріонне число ядра водню?

Збереження лептонного числа

Закон збереження лептонного числа стверджує, що сума лептонних чисел до та після взаємодії має бути однаковою. Існує три різних **лептонних числа**: електронно-лептонне число L_e , мюон-лептонне число L_μ , і тау-лептонне число L_τ .

У будь-якій взаємодії кожна з цих величин повинна зберігатися *окремо*. Для електронів і електронних нейтрино, $L_e = 1$; для їхніх античастинок, $\bar{L}_e = -1$; всі інші частинки мають $L_e = 0$. Так само $L_\mu = 1$ для мюонів і мюонних нейтрино, $\bar{L}_\mu = -1$ для їх античастинок, і $L_\mu = 0$ для всіх інших частинок. Нарешті, $L_\tau = 1, -1$, або 0 , залежно від того, маємо ми тау або тау-нейтрино, їхні античастинки чи будь-яку іншу частинку відповідно. Збереження лептонного числа гарантує, що кількість електронів і позитронів у Всесвіті залишається відносно постійною. (Примітка. Наскільки нам відомо, загальне лептонне число зберігається в природі. Однак спостереження показали варіації лептонного числа (наприклад, L_e) у явищі, яке називають *осциляціями нейтрино*).

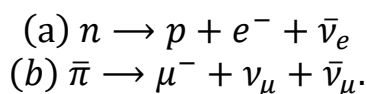
Щоб проілюструвати закон збереження лептонного числа, розглянемо наступний відомий двоетапний процес розпаду:



У першому розпаді всі лептонні числа для π^+ дорівнюють 0 . Для продуктів цього розпаду $L_\mu = -1$ для μ^+ і $L_\mu = 1$ для ν_μ . Тому мюон-лептонне число зберігається. У цьому розпаді не беруть участь ні електрони, ні тау $L_e = 0$ і $L_\tau = 0$ для початкової частинки та всіх продуктів розпаду. Таким чином, електронно-лептонне і тау-лептонне числа також зберігаються. При другому розпаді, μ^+ має мюон-лептонне число $L_\mu = -1$, тоді як сумарне мюон-лептонне число продуктів розпаду становить $0 + 0 + (-1) = -1$. Таким чином, мюон-лептонне число зберігається. Електронно-лептонне число також зберігається, як $L_e = 0$ для μ^+ , тоді як сумарне електронно-лептонне число продуктів розпаду становить $(-1) + 1 + 0 = 0$. Нарешті, оскільки в цьому розпаді не беруть участь ні тау-, ні тау-нейтрино, число тау-лептонів також зберігається.

Приклад 6.2. Збереження лептонного числа

Який із наведених розпадів може відбутися, виходячи із закону збереження лептонного числа?



Стратегія

Визначте загальне лептонне число для реагентів і продуктів і вимагайте, щоб це значення не змінювалося в реакції.

Розв'язок

Для розпаду (a) електронно-лептонне число нейтрона дорівнює 0 , а сумарне електронно-лептонне число продуктів розпаду дорівнює $0 + 1 + (-1) = 0$. Оскільки сумарні електронно-лептонні числа до і після розпаду однакові, розпад можливий на основі закону збереження електронно-лептонного числа. Крім того, оскільки в цьому розпаді немає мюонів або тау, мюон-лептонне і тауон-лептонне числа зберігаються.

Для розпаду (b) мюон-лептонне число π^- дорівнює 0, а сумарне мюон-лептонне число запропонованих продуктів розпаду дорівнює $1 + 1 + (-1) = 1$. Таким чином, на основі закону збереження мюон-лептонного числа цей розпад не може відбутися.

Обговорення

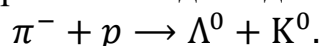
Лептонне число зберігається в першій реакції, але не в другій. Збереження лептонного числа обмежує, які реакції можуть і не можуть відбуватися в природі.

Перевірте своє розуміння 6.2

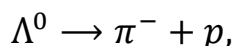
Що таке лептонне число електрон-позитронної пари?

Збереження дивності

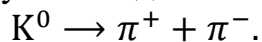
Наприкінці 1940-х і на початку 1950-х років експерименти з космічними променями виявили існування частинок, які ніколи не спостерігалися на Землі. Ці частинки утворилися в результаті зіткнень піонів з протонами або нейтронами в атмосфері. Їх виникнення та розпад були незвичними. Вони виникали в результаті сильних ядерних взаємодій піонів і нуклонів, і тому були прийняті як адрони; однак їх розпад був опосередкований значно повільнішою слабкою ядерною взаємодією. Тривалість їхнього життя була порядку 10^{-10} - 10^{-8} с, тоді як типовий час життя для частинки, яка розпадається через сильну ядерну реакцію, становить 10^{-23} с. Ці частинки також були незвичайними, оскільки вони завжди виникали парами під час зіткнень піон-нуклон. З цих причин ці нещодавно відкриті частинки були описані як *дивні*. Виникнення та подальший розпад пари дивних частинок показано на рис. 6.4 і відповідає реакції:



Потім лямбда-частинка розпадається через слабку ядерну взаємодію відповідно до формули:



а каон розпадається через слабку взаємодію:



Щоб раціоналізувати поведінку цих дивних частинок, фізики елементарних частинок винайшли властивість частинки, яка зберігається при сильній взаємодії, але не при слабкій взаємодії. Ця властивість називається **дивністю** і, як випливає з назви, пов'язана з наявністю дивного кварка. Дивність частинки дорівнює числу дивних кварків у частинці. Збереження дивності вимагає, щоб загальна дивність реакції або розпаду (підсумовуючи дивність усіх частинок) була однаковою до та після взаємодії. Збереження дивності не є абсолютним: воно зберігається в сильних і електромагнітних взаємодіях, але не в слабких.

Число дивності для кількох звичайних частинок наведено в табл. 6.2.

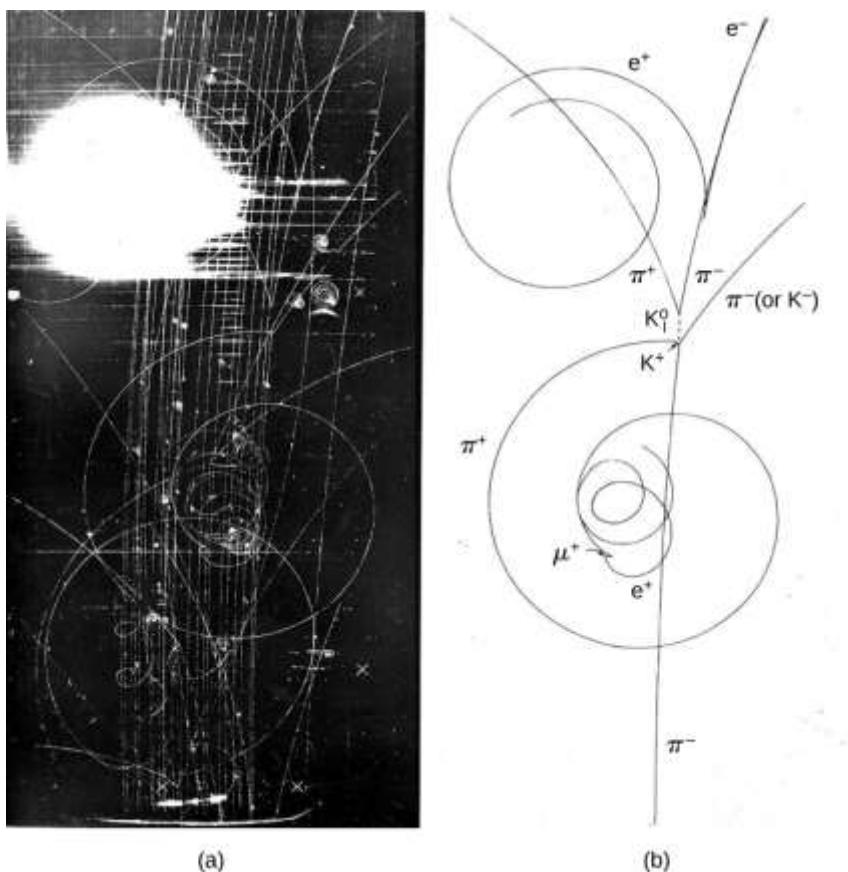
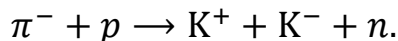


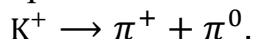
Рис. 6.4. Взаємодія адронів. (а) Фотографія бульбашкової камери; (б) ескіз, який представляє фотографію

Приклад 6.3. Збереження дивності

(а) Виходячи зі збереження дивності, чи може відбутися наступна реакція?



(б) Наступний розпад опосередкований слабкою ядерною силою:



Чи розпад зберігає дивність? Якщо ні, чи може відбутися розпад?

Стратегія

Визначте дивність реагентів і продуктів і вимагайте, щоб це значення не змінювалося в реакції.

Розв'язок

а. Сумарна дивність реагентів є $0 + 0 = 0$, і сумарна дивність продуктів $1 + (-1) + 0 = 0$. Таким чином, сильна ядерна взаємодія між піоном і протоном не заборонена законом збереження дивності. Зверніть увагу, що баріонне число також зберігається в реакції.

б. Сумарна дивність до і після цього розпаду дорівнює 1 і 0, тому розпад не зберігає дивності. Однак розпад все ще може бути можливим, оскільки закон збереження дивності не поширюється на слабкі розпади.

Обговорення

Дивність зберігається в першій реакції, але не в другій. Збереження дивності обмежує, які реакції можуть, а які не можуть відбуватися в природі.

Перевірте своє розуміння 6.3

Чому дорівнює число дивності мюона?

Вправи до п. 6.2. Закони збереження частинок

1. Який із наведених розпадів не може відбутися через порушення закону збереження лептонного числа?

- (а) $n \rightarrow p + e^-$
- (б) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$
- (в) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$
- (г) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$
- (д) $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$
- (е) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$
- (ж) $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$
- (з) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

2. Яка з наведених реакцій не може відбутися через порушення закону збереження дивності?

- (а) $p + n \rightarrow p + p + \pi^-$
- (б) $p + n \rightarrow p + p + K^-$
- (в) $K^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$
- (г) $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$
- (д) $K^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^+ + \pi^-$
- (е) $K^- + p \rightarrow \Xi^0 + \pi^- + \pi^-$
- (ж) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$
- (з) $\pi^- + n \rightarrow K^- + \Lambda^0$.

3. Визначте один можливий розпад для кожної з наступних античастинок:

- (а) $\bar{n}$, (б) $\bar{\Lambda}^0$, (в) Ω^+ , (г) K^- і (д) $\bar{\Sigma}$.

4. Кожна з наступних сильних ядерних реакцій заборонена. Визначте закон збереження, який порушується для кожного з них.

- (а) $p + \bar{p} \rightarrow p + n + \bar{p}$
- (б) $p + n \rightarrow p + \bar{p} + n + \pi^+$
- (в) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$
- (г) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + n$.

6.3. Кварки

У 1960-х роках фізики елементарних частинок почали усвідомлювати, що адрони не є елементарними частинками, а складаються з частинок, які називають кварками. (Назву «кварк» придумав фізик Мюррей Гелл-Манн із фрази в романі

Джеймса Джойса «Поминки за Фіннеганом»). Спочатку вважалося, що існує лише три типи кварків, які називають *up* (*u*), *down* (*d*), і дивний *strange* (*s*). Однак невдовзі це число зросло до шести — що цікаво, таке ж, як і кількість лептонів — і включало чарівний *charmed* (*c*), красивий *bottom* (*b*) і істинний *top* (*t*).

Усі кварки є ферміонами – спін-напівцілий ($s = 1/2$), мають дробовий заряд ($1/3 e$ або $2/3 e$), і мають баріонне число $B = 1/3$. Кожен кварк має антикварк з такою ж масою, але протилежним зарядом і баріонним числом. Назви та властивості шести кварків наведено в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3

Кварки

Кварк	Заряд (одиниці e)	Спін (s)	Баріоне число	Число дивності
Нижній (<i>d</i>)	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0
Верхній (<i>u</i>)	$+ 2/3$	$1/2$	$1/3$	0
Дивний (<i>s</i>)	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	-1
Чарівний (<i>c</i>)	$+ 2/3$	$1/2$	$1/3$	0
Красивий (<i>b</i>)	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0
Істинний (<i>t</i>)	$+ 2/3$	$1/2$	$1/3$	0

Комбінації кварків

Як згадувалося раніше, кварки зв'язуються разом у групи по два або три, утворюючи адрони. *Баріони утворюються з трьох кварків*. Зразки баріонів, включаючи вміст і властивості кварків, наведені в табл. 6.4. Цікаво, що дельта плюс баріон (Δ^+) утворюється з тих самих трьох кварків, що й протон, але загальний спін частинки становить $3/2$, а не $1/2$. Так само маса Δ^+ зі спіном $3/2$ дорівнює 1,3 маси протона, а дельта нуль баріон (Δ^0) зі спіном $3/2$ в 1,3 рази більший за масу нейтрона. Очевидно, що енергія, пов'язана зі спіном (або кутовим моментом) частинки, вносить вклад в її масову енергію. Також цікаво, що не вважається, що баріони існують із топ-кварками, оскільки топ-кварки розпадаються надто швидко, щоб зв'язуватися з іншими кварками під час їх утворення.

Кваркові баріони

Ім'я	Символ	Кварки	Заряд (e)	Спін (s)	Маса GeV/c^2
Протон	p	uud	1	1/2	0,938
Нейтрон	n	udd	0	1/2	0,940
Дельта плюс	Δ^{++}	uuu	2	3/2	1,232
Дельта плюс	Δ^+	uud	1	3/2	1,232
Дельта нуль	Δ^0	udd	0	3/2	1,232
Дельта мінус	Δ^-	ddd	-1	3/2	1,232
Лямбда нуль	Λ^0	uds	0	1/2	1,116
Позитивна сигма	Σ^+	uus	1	1/2	1,189
Нейтральна сигма	Σ^0	uds	0	1/2	1,192
Негативний ксі	Ξ^-	sds	-1	1/2	1,321
Нейтральний ксі	Ξ^0	sus	0	1/2	1,315
Омега мінус	Ω^-	ccc	-1	3/2	1,672
Чарівна лямбда	Λ_c^+	udc	1	1/2	2,281
Красива лямбда	Λ_b^0	udb	0	1/2	5,619

Мезони утворюються двома кварками — парою кварк-антикварк. Зразки мезонів, включаючи вміст і властивості кварків, наведені в табл. 6.5. Розглянемо утворення піона ($\pi^+ = u\bar{d}$). Виходячи з вмісту кварків, заряд піона становить:

$$\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = e.$$

Обидва кварки мають спін напівцілий ($s = 1/2$), тому результуючий спін дорівнює 0 або 1. Спін π^+ мезона дорівнює 0. Така ж комбінація кварк-антикварк дає ρ мезон зі спіном 1. Цей мезон має масу приблизно в 5,5 разів більшу за маса π^+ мезон.

Таблиця 6.5

Кваркові мезони

Ім'я	Символ	Кварки	Заряд (e)	Спін	Маса(Гев/с ²)
Позитивний піон	π^+	$u\bar{d}$	1	0	0,140
Позитивний ро	ρ^+	$u\bar{d}$	1	1	0,768
Піон негативний	π^-	$\bar{u}d$	-1	0	0,140
Негативний ро	ρ^-	$\bar{u}d$	-1	1	0,768
Нейтральний піон	π^0	$\bar{u}u$ або $\bar{d}d$	0	0	0,135
Нейтральний ета	η^0	$\bar{u}u, \bar{d}d$ або $\bar{s}s$	0	0	0,547
Позитивний каон	K^+	$u\bar{s}$	1	0	0,494
Нейтральний каон	K^0	$d\bar{s}$	0	0	0,498
Негативний каон	K^-	$u\bar{s}$	-1	0	0,494
Джі/пси	J/ψ	$\bar{c}c$	0	1	3,10
Зачарована ета	η_0	$c\bar{c}$	0	0	2,98
Нейтральний D	D^0	$\bar{u}c$	0	0	1,86
Нейтральний D	D^{*0}	$\bar{u}c$	0	1	2,01
Позитивний D	D^+	$\bar{d}c$	1	0	1,87
Нейтральний B	B^0	$\bar{d}b$	0	0	5,26
Іпсилон	Υ	$b\bar{b}$	0	1	9,46

Приклад 6.4. Структура кварків

Покажіть, що кварковий склад, наведений у табл. 6.5 для Ξ^0 узгоджується з відомим зарядом, спіном і дивністю цього баріона.

Стратегія

Ξ^0 складається з двох дивних кварків і верхнього кварка (*sus*). Ми можемо скласти разом властивості кварків, щоб передбачити кінцеві властивості Ξ^0 -баріона.

Розв'язок

Заряд *s*-кварка становить $-e/3$, а заряд *u*-кварка дорівнює $2e/3$. Таким чином, комбінація (*sus*) не має в підсумку заряду, відповідно до відомого заряду Ξ^0 . З трьох спінів $-\frac{1}{2}$ кварки можуть об'єднуватися, утворюючи частинку зі спіном $1/2$ або $3/2$, склад кварків узгоджується з відомим спіном ($s = 1/2$) з Ξ^0 . Нарешті, сумарна дивність комбінації (*sus*) дорівнює $(-1) + 0 + (-1) = -2$, що також узгоджується з експериментом.

Обговорення

Заряд, спін та дивність Ξ^0 частинки можна визначити за властивостями складових її кварків. Велике розмаїття баріонів і мезонів можна простежити за властивостями лише шести кварків: верхнього, нижнього, чарівного, дивного, красивого і істинного.

Перевірте своє розуміння 6.4

Чому дорівнює баріонне число піона?

Колір

Кварки — це ферміони, які підкоряються принципу виключення Паулі, тому було б несподівано дізнатися, що три кварки можуть зв'язуватися разом у ядрі. Наприклад, як два верхні кварки можуть існувати в тій самій маленькій області простору всередині протона? Рішення полягає в тому, щоб винайти третю нову властивість, щоб розрізняти їх. Цю властивість називають **кольором**, і вона відіграє таку саму роль у сильній ядерній взаємодії, як заряд в електромагнітній взаємодії. З цієї причини колір кварка іноді називають «**сильним зарядом**».

Кварки бувають трьох кольорів: червоного, зеленого та синього. (Це лише позначки — кварки насправді не забарвлені). Кожен тип кварків (*u, d, c, s, b, t*) може мати будь-які інші кольори. Наприклад, існують три дивні кварки: червоний дивний кварк, зелений дивний кварк і синій дивний кварк. Антикварки мають антиколір. Кварки, які зв'язуються разом, утворюючи адрони (баріони та мезони), мають бути нейтрального кольору, безбарвними або «білими». Таким чином, баріон повинен містити червоний, синій і зелений кварк. Подібним чином мезон містить пару кварків червоний-античервоний, синій-антисиній або

зелений-антизелений. Таким чином, два кварки можуть бути знайдені в одному спіновому стані в адроні, не порушуючи принципу виключення Паулі, оскільки їхні кольори різні.

Кварковий конфайнмент

Перші переконливі докази існування кварків були отримані в результаті серії експериментів, проведених у Стенфордському центрі лінійних прискорювачів (SLAC) і в CERN приблизно в 1970 році. Цей експеримент був розроблений для дослідження структури протона, подібно до того, як Резерфорд вивчав структуру всередині атом зі своїм α -дослідом з розсіювання частинок. Електрони зіткнулися з протонами з енергією понад 20 Гев. При цій енергії $E \approx pc$, тому довжина хвилі де Бройля електрона дорівнює:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} \approx 6 \times 10^{-17} \text{ м.} \quad (6.1)$$

Довжина хвилі електрона набагато менша за діаметр протона (приблизно 10^{-15} м).

Експерименти SLAC виявили, що деякі електрони були відхилені на дуже великі кути, що вказує на малі центри розсіювання всередині протона. Розподіл розсіювання узгоджувався з тим, що електрони розсіювалися на ділянках зі спіном $1/2$, тобто спіном кварків.

Експерименти в CERN використовували нейтрино замість електронів. Цей експеримент також виявив докази крихтих центрів розсіювання. В обох експериментах результати свідчать про те, що заряди частинок, що розсіювали, були $+2/3 e$ або $-1/3 e$, що узгоджується з кварковою моделлю.

Модель кварків виявилася надзвичайно успішною в класифікації складного світу субатомних частинок. Цікаво, однак, що жоден експеримент ніколи не створив ізольований кварк. Усі кварки мають дробовий заряд, і тому їх слід легко відрізнити від відомих елементарних частинок, усі заряди яких є цілим числом, кратним e . Чому ізольовані кварки не спостерігаються? У сучасних моделях взаємодії частинок відповідь виражається в термінах утримання кварків. Утримання кварків означає утримання кварків групами по два або три в невеликій області простору. Кварки абсолютно вільно пересуваються в цьому просторі, посилають і приймають *глюони* (носії сильної взаємодії). Однак, якщо ці кварки віддаляються занадто далеко один від одного, сильна сила тягне їх назад. Ця дія подібна до бола, зброї, яка використовується для полювання (рис. 6.5). Каміні прив'язані до центральної точки мотузкою, тому жоден камінь не може відійти занадто далеко від інших. Бола відповідає баріону, каміні відповідають кваркам, а мотузка відповідає глюонам, які утримують систему разом.

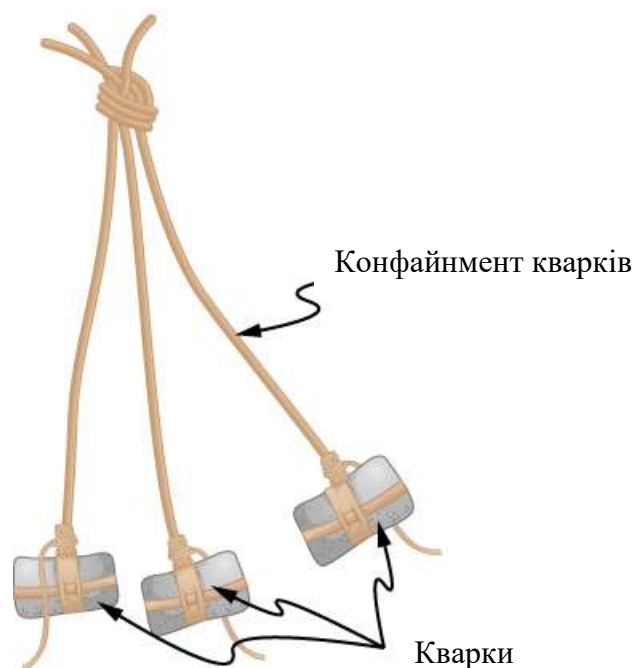


Рис. 6.5. Баріон є аналогом бола, зброї, яка використовується для полювання. Камені на цьому зображенні відповідають баріонним кваркам. Кварки можуть вільно рухатися, але повинні залишатися поруч з іншими кварками

Вправи до п. 6.3. Кварки

1. Спираючись на кварковий склад протона, доведіть, що його заряд дорівнює $+1$.
2. На основі кваркового складу нейтрона покажіть, що його заряд дорівнює 0 .
3. Доведіть, що кварковий склад, наведений у таблиці 6.5 для позитивного каону, узгоджується з відомим зарядом, спіном і дивністю цього баріона.
4. Мезони утворюються з наступних комбінацій кварків (нижні індекси позначають колір і AR (antired) = античервоний):
 $(d_R, \bar{d}_{AR}), (s_G, \bar{u}_{AG}), (s_R, \bar{s}_{AR})$.
 (а) Визначте заряд і дивність кожної комбінації. (б) Ідентифікуйте один або більше мезонів, утворених кожною комбінацією кварк-антикварк.
5. Чому жоден із наведених нижче наборів кварків не може утворити адрон?



(a)



(b)

6. Експериментальні результати вказують на ізолювану частинку із зарядом $+2/3$ — ізолюваний кварк. Який це може бути кварк? Чому це відкриття було б важливим?

7. Виразіть β -розпади $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ та $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ з точки зору β -розпадів кварків. Переконайтеся, що виконуються закони збереження заряду, лептонного числа та баріонного числа для кварка під час β -розпаду.

6.4. Прискорювачі частинок і детектори

Метою експериментальної фізики елементарних частинок є точне вимірювання параметрів елементарних частинок. Основним методом, який використовується для досягнення цієї мети, є отримання цих частинок у високоенергетичних зіткненнях, а потім вимірювання параметрів продуктів за допомогою високочутливих детекторів частинок. Ці експерименти використовуються для перевірки та перегляду наукових моделей взаємодії частинок. Метою цього розділу є опис прискорювачів і детекторів частинок. Сучасні машини засновані на попередніх, тому корисно представити коротку історію прискорювачів і детекторів.

Ранні прискорювачі частинок

Прискорювач частинок — це машина, призначена для прискорення заряджених частинок, які досягаються за допомогою сильних електричних, магнітних полів або обох.

Простим прикладом прискорювача частинок є прискорювач Ван де Граафа. Цей тип прискорювача збирає заряди на порожнисту металеву сферу за допомогою рухомого ремня. Коли електростатична різниця потенціалів кулі достатньо велика, поле використовується для прискорення частинок через вакуумну трубку. Енергія, вироблена прискорювачем Ван де Граафа, недостатньо велика для створення нових частинок, але машина була важливою для ранніх досліджень атомного ядра.

Лінійний прискорювач (так званий «лінак») може виробляти більшу енергію. Заряджені частинки, що утворюються на початку лінакового двигуна, прискорюються безперервною лінією заряджених порожнистих трубок. Напруга між певною парою трубок встановлюється так, щоб заряджена частинка втягувалася, а коли частинка приходить, напруга між наступною парою трубок встановлюється так, щоб виштовхувати заряджену частинку. Іншими словами, напруга подається таким чином, що трубки видають серію ретельно синхронізованих електричних імпульсів (рис. 6.6). У сучасних лінійних прискорювачах використовуються радіочастотні (РЧ) резонатори, які створюють коливальні електромагнітні поля, які рухають частинку вперед, як серфер на океанській хвилі. Лінаки можуть прискорювати електрони до понад 100 MeV. (Електрони з кінетичною енергією понад 2 MeV рухаються дуже близько до

швидкості світла). У сучасних дослідженнях частинок лінійні прискорювачі часто використовуються на першому етапі прискорення.

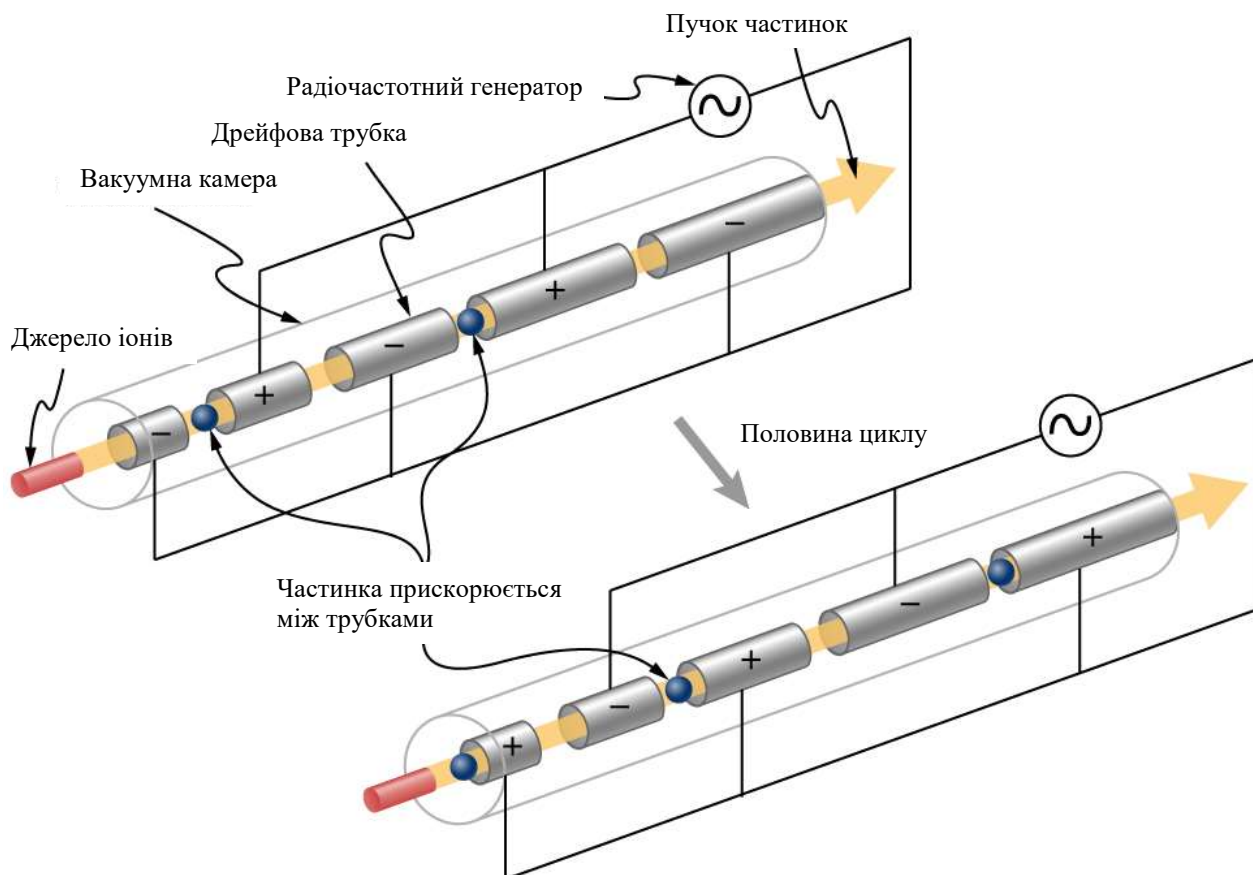


Рис. 6.6. У лінійному прискорювачі заряджені трубки прискорюють частинки серією електромагнітних імпульсів. Кожна трубка довша за попередню, тому що частинка рухається швидше, коли вона прискорюється

Приклад 6.5. Прискорювальні трубки

Лінійний прискорювач, призначений для отримання пучка протонів з енергією 800 MeV, має 2000 прискорювальних трубок, розділених проміжками. Яку середню напругу необхідно прикласти між трубками, щоб отримати бажану енергію? (Підказка: $U = qV$)

Стратегія

Енергія, надана протону в кожному проміжку між трубками, дорівнює $U = qV$, де q — заряд протона, а V — різниця потенціалів (напруга) на проміжку. Оскільки $q = q_e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$ і $1 \text{ eV} = (1 \text{ V}) (1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл})$, протон отримує 1 eV енергії на кожен вольт через зазор, який він проходить. Напруга змінного струму, що подається на трубки, синхронізується так, що вона додає до енергії в кожному зазорі. Ефективна напруга є сумою напруг на проміжку і дорівнює 800 МВ, щоб надати кожному протону енергію 800 MeV.

Розв'язок

Існує 2000 розривів, а сума напруг на них становить 800 МВ. Тому середня прикладена напруга становить 0,4 МВ або 400 кВ.

Обговорення

Напругу такої величини неважко досягти у вакуумі. Набагато більші напруги проміжку були б потрібні для більшої енергії, як, наприклад, на установці SLAC 50 Гев. Синхротронам допомагає круговий шлях прискорених частинок, які можуть обертатися багато разів, фактично помножуючи кількість прискорень на кількість орбіт. Це дає можливість досягти енергій більше 1 Тев.

Перевірте своє розуміння 6.5

Скільки енергії отримує електрон, прискорюючись через різницю потенціалів 1 В?

Прискорювач наступного покоління після лінійного прискорювача — **циклотрон** (рис. 6.7).

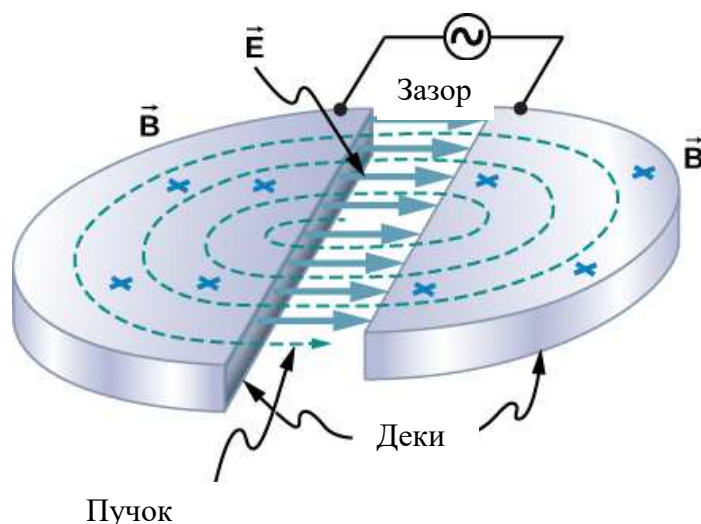


Рис. 6.7. Циклотрони використовують магнітне поле, щоб змушувати частинки рухатися по кругових орбітах. Коли частинки проходять між пластинами «Деками», напруга в зазорі змінюється на протилежну, тому частинки прискорюються двічі на кожній орбіті

Циклотрон використовує змінні електричні поля та нерухомі магніти для прискорення частинок по круговій спіралі. Частинка в центрі циклотрона спочатку прискорюється електричним полем у зазорі між двома D-подібними магнітами (деками). Коли частинка перетинає D-подібний магніт, її траєкторія стає круговою під дією сили Лоренца.

Якщо припустити, що втрати енергії відсутні, імпульс частинки пов'язаний з її радіусом кривизни формулою:

$$p = 0,3Br, \quad (6.2)$$

де p — імпульс у Гев/с, B — у теслах, а r — радіус траєкторії («орбіти») у метрах.

Цей вираз справедливий для класичної та релятивістської швидкостей. Кругова траєкторія повертає частинку в проміжок електричного поля, електричне поле змінюється, і процес продовжується. Коли частинка прискорюється, радіус кривизни стає все більшим і більшим — спіралью назовні — доки електрони не покинуть пристрій.

Синхротрон — це круговий прискорювач, який використовує змінну напругу та збільшення напруженості магнітного поля для прискорення частинок до вищих енергій. Заряджені частинки прискорюються радіочастотними резонаторами, а також спрямовуються та фокусуються магнітами. Радіочастотні резонатори *синхронізовані*, щоб надавати «штовхи» частинкам, коли вони проходять повз, звідси і назва. Керування високоенергетичними частинками вимагає сильних магнітних полів, тому для зменшення втрат тепла часто використовуються надпровідні магніти. Коли заряджені частинки рухаються по колу, вони випромінюють енергію: згідно з класичною теорією, будь-яка заряджена частинка, яка прискорюється (а рух по колу є прискореним рухом), також випромінює. У синхротроні таке випромінювання називають **синхротронним**. Це випромінювання корисне для багатьох інших цілей, таких як медичне дослідження та дослідження матеріалів.

Приклад 6.6. Енергія електрона в циклотроні

Електрон прискорюють за допомогою циклотрона. Яка кінетична енергія частинки, що вилітає, якщо магнітне поле дорівнює 1,5 Тл, а радіус «деки» — 1,2 м?

Стратегія

Якщо радіус орбіти електрона перевищує радіус «деки», електрон виходить з пристрою. Таким чином, радіус «деки» визначає верхню межу радіуса і, отже, імпульсу та енергії прискореної частинки. Вихідний імпульс частинки визначається за допомогою радіуса орбіти та сили магнітного поля. Енергію виходу частинки можна визначити за імпульсом частинки.

Розв'язок

За умови відсутності втрат енергії імпульс частинки в циклотроні дорівнює:

$$p = 0,3Br = 0,3(1,5 \text{ Тл})(1,2 \text{ м}) = 0,543 \text{ ГеВ/с.}$$

Енергія імпульсу $pc^2 = 0,543 \text{ ГеВ} = 543 \text{ МеВ}$ набагато більша за енергію маси спокою електрона, $mc^2 = 0,511 \text{ МеВ}$, тому необхідно використовувати релятивістський вираз для енергії електрона. Повна енергія електрона становить

$$E_{\Sigma} = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = \sqrt{(543)^2 + (0,511)^2} \approx 543 \text{ МеВ},$$
$$K = E_{\Sigma} - mc^2 = 543 \text{ МеВ} - 0,511 \text{ МеВ} \approx 543 \text{ МеВ}.$$

Обговорення

Повна енергія електрона набагато більша за енергію його маси спокою. Іншими словами, повна енергія електрона майже вся представлена у вигляді

кінетичної енергії. Циклотрони можна використовувати для проведення ядерно-фізичних експериментів або в терапії елементарними елементами для лікування раку.

Перевірте своє розуміння 6.6

Заряджена частинка з певним імпульсом рухається по дузі в однорідному магнітному полі. Що станеться, якщо магнітне поле збільшити вдвічі?

Прискорювачі на зустрічних променях

Нові частинки можуть утворюватися шляхом зіткнення частинок при високих енергіях. Відповідно до співвідношення маси та енергії Ейнштейна, енергії частинок, що стикаються, перетворюються на масову енергію створеної частинки. Найефективніший спосіб зробити це за допомогою прискорювачів зі зіштовхуванням пучка частинок. Прискорювач зустрічних променів створює два протилежні промені в круговому прискорювачі, зберігає промені при постійній енергії, а потім у потрібний момент фокусує промені один на одного в центрі чутливого детектора.

Прототипом машини зі зустрічними променями є кільце зберігання електронів Cornell Electron Storage Ring, розташоване в Ітаці, штат Нью-Йорк (рис. 6.8).

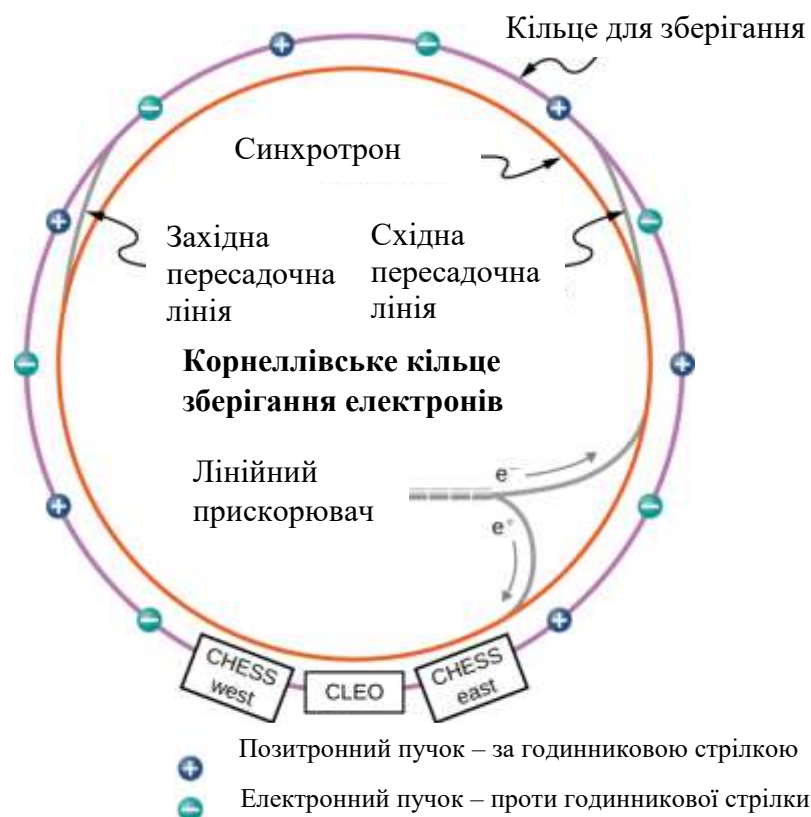


Рис. 6.8. Корнеллівське кільце зберігання електронів використовує лінійний прискорювач і синхротрон для прискорення електронів і позитронів до 4,5–6 ГеВ. Частинки утримуються у зовнішньому накопичувальному кільці з такою енергією, доки вони не зіткнуться в детекторі частинок

Електрони (e^-) і позитрони (e^+) створюються на початку лінійного прискорювача і прискорюються до 150 MeV. Потім частинки вводять у внутрішнє синхротронне кільце, де вони прискорюються радіочастотними резонаторами до 4,5-6 GeV. Коли промені набирають швидкість, вони передаються та «зберігаються» у зовнішньому кільці накопичувача з тією самою енергією. Два пучки, що обертаються протилежно, проходять через ту саму вакуумну трубу, але тримаються окремо, доки не буде потрібно зіткнення. Електрони та позитрони обертаються навколо машини групами 390000 разів щосекунди.

Коли електрон і позитрон стикаються, вони анігілюють один одного, утворюючи фотон, який існує занадто короткий час, щоб бути виявленим. Фотон створює або пару лептонів (наприклад, електрон і позитрон, мюон або антимюон, або тау і антитау), або пару кварків. Якщо утворюються кварки, утворюються мезони, наприклад $c\bar{c}$ і $b\bar{b}$. Ці мезони створюються майже в стані спокою, оскільки початковий загальний імпульс електрон-позитронної системи дорівнює нулю.

Зауважте, що мезони не можуть утворюватися при будь-якій енергії зіткнення, а лише при «резонансних» енергіях, які відповідають унікальним масам мезонів (табл. 6.5). Утворені таким чином мезони дуже нестабільні та швидко розпадаються на більш легкі частинки, такі як електрони, протони та фотони. «Фрагменти» зіткнення надають цінну інформацію про взаємодію частинок.

У міру розвитку галузі фізики елементарних частинок машини зі зустрічними променями стають все потужнішими. **Великий адронний колайдер** (LHC), наразі найбільший прискорювач у світі, зіштовхує протони з енергією пучка, що перевищує 6 TeV. Енергія центру мас (W) відноситься до загальної енергії, доступної для створення нових частинок у машині, що стикається, або до загальної енергії вхідних частинок у системі центру мас. (Концепція системи відліку центру мас обговорюється в Лінійному імпульсі та зіткненнях.) Таким чином, LHC здатний виробляти одну або більше частинок із загальною масою, що перевищує 12 TeV. Енергія центру мас визначається так:

$$W^2 = 2[E_1 E_2 + (p_1 c)(p_2 c)] + (m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2, \quad (6.3)$$

де E_1 і E_2 – повні енергії частинок (1 і 2), що налітають, p_1 і p_2 – величини їх імпульсів, і m_1 і m_2 їх маси спокою.

Приклад 6.7. Створення нової частинки

Маса (Y) іпсилона, мезон ($b\bar{b}$), створюється в симетричному електронно-позитронному колайдері. Яка енергія променя потрібна?

Стратегія

Particle Data Group заявила, що енергія маси спокою цього мезона становить приблизно 10,58 GeV. Наведений вище вираз для енергії центру мас можна спростити, оскільки симетричний колайдер передбачає $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$.

Крім того, маси спокою електронів і позитронів, що стикаються, однакові ($m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$) і набагато менша за масу утвореної частинки енергії. Таким чином, енергію (W) у системі центру мас можна повністю виразити через енергію променя: $E_{\text{промінь}} = E_1 = E_2$.

Розв'язок

Виходячи з наведених вище припущень, ми маємо:

$$W^2 \approx 2[E_1 E_2 + E_1 E_2] = 4E_1 E_2 = 4E_1^2.$$

Отже, енергія променя дорівнює

$$E_{\text{промінь}} \approx E_1 = \frac{W}{2}.$$

Енергія маси спокою частинки, що утворилася в результаті зіткнення, дорівнює енергії центру мас, тому

$$E_{\text{промінь}} \approx \frac{10,58 \text{ GeV}}{2} = 5,29 \text{ GeV}.$$

Обговорення

Враховуючи енергетичний масштаб цієї задачі, енергія маси спокою (Υ) іпсилон мезона майже повністю обумовлено початковими кінетичними енергіями електрона і позитронів. Цей мезон дуже нестабільний і швидко розпадається на більш легкі та стабільніші частинки. Існування частинки іпсилону (Υ) проявляється як різке збільшення таких подій при 5,29 GeV.

Перевірте своє розуміння 6.7

Чому симетричний колайдер «симетричний»?

Вищі енергії пучка вимагають більших прискорювачів, тому сучасні машини зі зустрічним пучком дуже великі. Наприклад, LHC має 17 миль в окружності (рис. 6.1). (У 1940-х роках Енріко Фермі задумав прискорювач, який оточував би всю Землю!). Важливим науковим викликом двадцять першого століття є зменшення розміру прискорювачів частинок.

Детектори частинок

Метою детектора **частинок** є точне вимірювання результатів зіткнень, створених прискорювачем частинок. Детектори багатофункціональні. Іншими словами, детектор розділений на багато піддетекторів, кожен з яких призначений для вимірювання різних аспектів події зіткнення. Наприклад, один детектор може бути розроблений для вимірювання фотонів, а інший – для вимірювання мюонів. Щоб проілюструвати, як субдетектори сприяють розумінню всієї події зіткнення, ми опишемо субдетектори компактного мюонного соленоїда (CMS), який використовувався для виявлення бозона Хіггса на LHC (рис. 6.9).

Променева труба детектора виходить із (і всередину) сторінки ліворуч. Частинки, утворені pp -зіткненнями («фрагменти зіткнення»), випромінюються

із детектора в усіх напрямках. Ці частинки стикаються з кількома шарами субдетекторів.

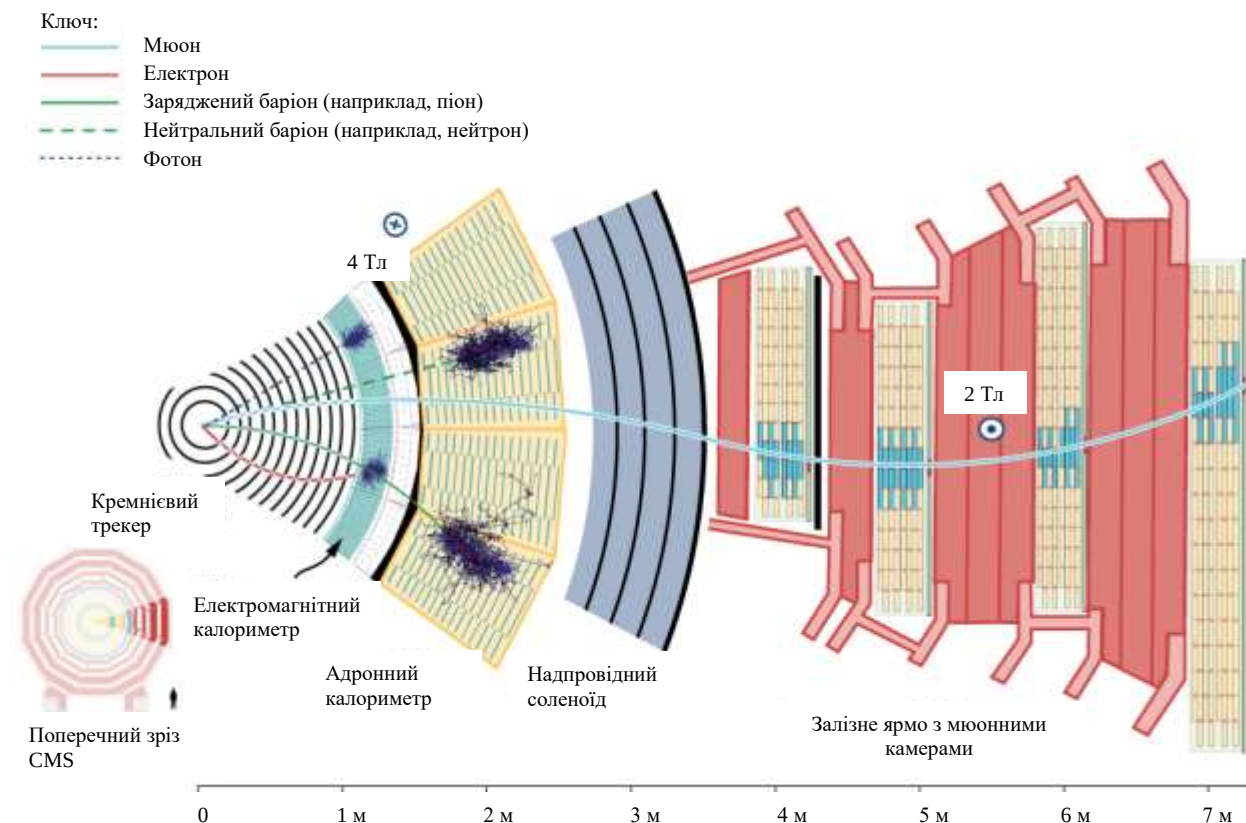


Рис. 6.9. Компактний мюонний електромагнітний детектор. Детектор складається з кількох шарів, кожен з яких відповідає за вимірювання різних типів частинок

Субдетектор — це детектор частинок у більшій системі детекторів, призначених для вимірювання певних типів частинок. Існує кілька основних типів субдетекторів. Слідкуючі пристрої визначають шлях і, отже, імпульс частинки; калориметри вимірюють енергію частинки; і детектори ідентифікації частинок визначають ідентичність (масу) частинки.

Першим набором субдетекторів, з якими стикаються частинки, є кремнієва система відстеження. Ця система призначена для вимірювання імпульсу заряджених частинок (наприклад, електронів і протонів). Детектор купаститься в однорідному магнітному полі, тому заряджені частинки згинаються по круговій траєкторії силою Лоренца (як для циклотрона). Якщо імпульс частинки великий, радіус траєкторії великий, а шлях майже прямий. Але якщо імпульс малий, радіус траєкторії малий, і траєкторія дуже викривлена. Коли частинки проходять через детектор, вони взаємодіють із кремнієвими мікросмужковими детекторами в кількох точках. Ці детектори створюють невеликі електричні сигнали, коли заряджені частинки проходять поблизу елементів детектора. Потім сигнали посилюються та записуються. Серія електричних «імпульсів» використовується для визначення траєкторії частинки в системі стеження. Створена комп'ютером «найкраща відповідність» цій траєкторії дає радіус треку і, отже, імпульс

частинки. На LHC записується велика кількість треків для однієї події зіткнення. Підгонки до доріжок показано синіми та зеленими лініями на рис. 6.10.

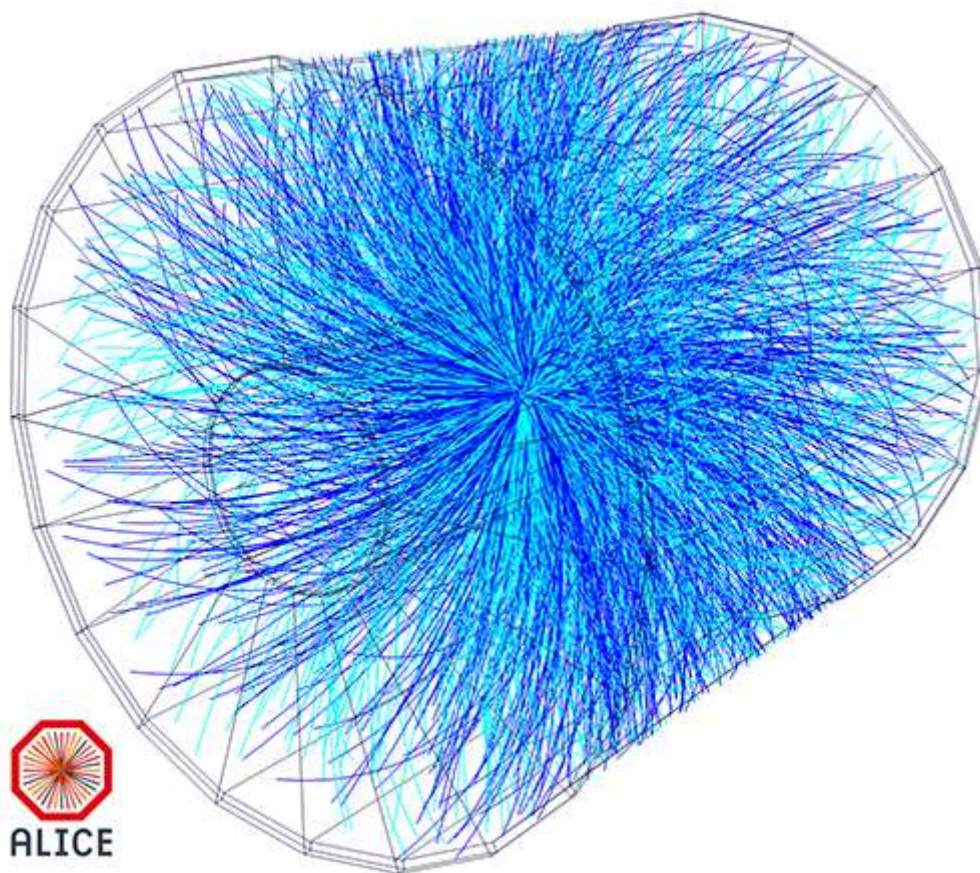


Рис. 6.10. Тривимірне зображення події зіткнення важких іонів у LHC, як це видно на детекторі ALICE

За шарами відстеження знаходиться електромагнітний калориметр. Цей детектор виготовлено з прозорих кристалів на основі свинцю. Коли електрони взаємодіють з кристалами, вони випромінюють фотони високої енергії. Фотони взаємодіють із кристалом, утворюючи електрон-позитронні пари. Тоді ці частинки випромінюють більше фотонів. Процес повторюється, утворюючи дощ частинок (кристал «світиться»). Груба модель цього процесу така. Електрон з енергією E_0 вдаряється об кристал і втрачає половину своєї енергії у вигляді фотона. Фотон створює електрон-позитронну пару, і кожна частинка відходить з половиною енергії фотона. Тим часом вихідний електрон знову випромінює. Отже, у нас залишилося чотири частинки: два електрони, один позитрон і один фотон, кожна з яких має енергію $E_0 / 4$. Кількість частинок у зливі зростає геометрично. Після n радіаційних подій є $N = 2^n$ частинки. Отже, повна енергія на частинку після n подій випромінювання дорівнює:

$$E(t) = \frac{E_0}{2^n},$$

де E_0 – енергія падіння, а $E(t)$ – кількість енергії на частинку після n подій. Вхідний фотон запускає подібний ланцюг подій (рис. 6.11).

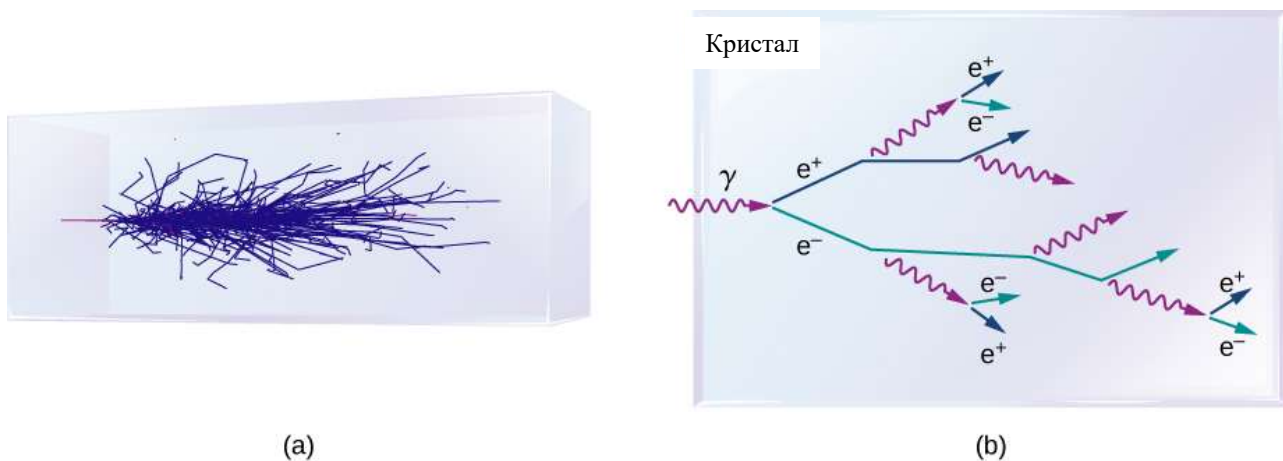


Рис. 6.11. (а) Злива частинок, створена в кристалічному калориметрі. (b) Діаграма, що показує типову послідовність реакцій у зливі частинок

Якщо енергія на частинку падає нижче певного порогового значення, інші типи радіаційних процесів стають важливими, і дощ частинок припиняється. Зрештою, загальна енергія вхідної частинки поглинається та перетворюється на електричний сигнал.

За межами кристалічного калориметра є адронний калориметр. Як випливає з назви, цей субдетектор вимірює адрони, такі як протони та піони. Адронний калориметр складається з шарів латуні та сталі, розділених пластиковими сцинтиляторами. Його мета — поглинати енергію частинок і перетворювати її в електронний сигнал.

Поза цим детектором розташована велика магнітна котушка, яка використовується для створення однорідного поля для відстеження.

Останнім піддетектором є мюонний детектор, який складається із залізних пластин, через які можуть проникнути лише мюони (і нейтрино). Між залізними плитами розташовано декілька типів елементів відстеження мюонів, які точно вимірюють імпульс мюона. Мюонні детектори важливі, тому що бозон Хіггса (про нього буде обговорено незабаром) можна виявити через його розпади на чотири мюони — звідси і назва детектора.

Після збору даних з кожного субдетектора частинок можна оцінити всю подію зіткнення. Запишемо енергію i -ї частинки:

$$E_i = \sqrt{(p_i c)^2 + (m_i c^2)^2},$$

де p_i — абсолютна величина імпульсу i -ї частинки, а m_i є його масою спокою.

Отже, загальна енергія всіх частинок дорівнює:

$$E_{\Sigma} = \sum_i E_i.$$

Якщо всі частинки виявлені, загальна енергія повинна дорівнювати енергії центру мас машини зустрічного променя (W). На практиці не всі частинки ідентифікуються або через те, що ці частинки занадто важко виявити (нейтрино), або через те, що ці частинки «прослизгають». У багатьох випадках цілі ланцюги розпадів можна «реконструювати», як зібрати годинник, розбитий на шматки.

Інформація про ці ланцюжки розпаду має вирішальне значення для оцінки моделей взаємодії частинок.

Вправи до п. 6.4. Прискорювачі частинок і детектори

1. Траєкторія зарядженої частинки в магнітному полі 2,0 Тл згинається в коло радіусом 75 см. Чому дорівнює імпульс частинки?
2. Трек протона проходить через магнітне поле радіусом 50 см. Напруженість магнітного поля 1,5 Тл. Яка повна енергія протона?
3. Виведіть рівняння $p = 0,3Br$ використавши поняття доцентрового прискорення (рух у двох і трьох вимірах) і релятивістського імпульсу (теорія відносності).
4. Припустимо, що енергія пучка електрон-позитронного колайдера становить приблизно 4,73 ГеВ. Яка загальна маса (W) частинки, що утворюється в результаті анігіляції електрона та позитрона в цьому колайдері? Який мезон може утворитися?
5. При повній енергії протони в синхротроні Fermilab діаметром 2,00 км рухаються майже зі швидкістю світла, оскільки їхня енергія приблизно в 1000 разів перевищує енергію маси спокою. (а) Скільки часу потрібно протону, щоб здійснити одну подорож? (б) Скільки разів на секунду він проходитиме через цільову область?
6. Припустимо, W^- , створений у детекторі частинок, живе $5,00 \times 10^{-25}$ с. Яку відстань він пройде за цей час, якщо він рухається зі швидкістю 0,9 c ? (Зауважте, що час довший за тривалість життя W^- , яке може бути наслідком статистичної природи розпаду або затримки часу).
7. Доріжку якої довжини робить π^+ в бульбашковій камері, подорожуючи 0,100 с, якщо він там створений і живе $2,60 \times 10^{-8}$ с? (Ті, хто рухаються швидше або живуть довше, можуть вийти за межі детектора перед розпадом).
8. SLAC довжиною 3,20 км створює пучок електронів з енергією 50,0 ГеВ. Якщо існує 15 000 прискорювальних трубок, яка середня напруга повинна бути в проміжках між ними, щоб отримати цю енергію?

6.5. Стандартна модель

Основною інтелектуальною діяльністю будь-якого вченого є розробка та перегляд наукових моделей. Фізика елементарних частинок прагне розробити моделі взаємодії частинок. Ця робота базується безпосередньо на роботах із гравітації та електромагнетизму в сімнадцятому, вісімнадцятому та дев'ятнадцятому століттях. Кінцевою метою фізики є єдина «теорія всього», яка описує всі взаємодії частинок у термінах єдиного елегантного рівняння та картини. Саме рівняння може бути складним, але багато вчених підозрюють, що *ідея* рівняння змусить нас вигукнути: «Як ми могли це пропустити? Це було так очевидно!»

У цьому розділі ми представляємо Стандартну модель, яка є найкращою поточною моделлю взаємодії частинок. Ми детально описуємо Стандартну модель з точки зору електромагнітних, слабких ядерних і сильних сил. Наприкінці цього розділу ми розглядаємо теорії об'єднання у фізиці елементарних частинок.

Вступ до стандартної моделі

Стандартна модель взаємодії частинок містить дві ідеї: *електрослабку теорію* та **квантову хромодинаміку (КХД)** (сила, що діє між кольоровими зарядами). Електрослабка теорія об'єднує теорію **квантової електродинаміки (КЕД)**, сучасний еквівалент класичного електромагнетизму, і теорію слабких ядерних взаємодій. Стандартна модель поєднує теорію відносності та квантову механіку.

У Стандартній моделі взаємодії частинок відбуваються через обмін бозонами, «носіями сили». Наприклад, електростатична сила передається між двома позитивно зарядженими частинками шляхом посилення та отримання безмасових фотонів. Це може статися в теоретично нескінченному діапазоні. Результатом цих взаємодій є кулонівське відштовхування (або притягання). Подібним чином кварки зв'язуються разом через обмін безмасовими глюонами. Лептони розсіюються від інших лептонів (або розпадаються на більш легкі частинки) шляхом обміну масивними W - і Z -бозонами. Підсумок сил, як описано в Стандартній моделі, наведено в табл. 6.6. Гравітаційна сила, спричинена обміном безмасовими силами тяжіння, додається до цієї таблиці для повноти, але не є частиною Стандартної моделі.

Таблиця 6.6

Чотири сили і стандартна модель

Сила	Відносна інтенсивність	Обмінна частинка (бозони)	Взаємодіяли частинки	Діапазон
Сильна	1	глюон	Кварки	10^{-15}м
Електромагнітна	1/137	фотон	Заряджені частинки	∞
Слабка	10^{-10}	W^+ , W^- , Z -бозони	Кварки, лептони, нейтрино	10^{-18}м
Гравітаційна	10^{-38}	гравітон	Всі частинки	∞

Стандартну модель можна виразити у вигляді рівнянь і діаграм. Рівняння є складними і зазвичай розглядаються в більш складному курсі сучасної фізики.

Однак суть Стандартної моделі можна охопити за допомогою **діаграми Фейнмана**. Діаграма Фейнмана, винайдена американським фізиком Річардом Фейнманом (1918–1988), є просторово-часовою діаграмою, яка описує, як частинки рухаються та взаємодіють. Для різних частинок використовуються різні символи. Взаємодії частинок в одному вимірі показано як графік час-положення (а не графік положення-час). Як приклад розглянемо розсіяння електрона та електронного нейтрино (рис. 6.12).

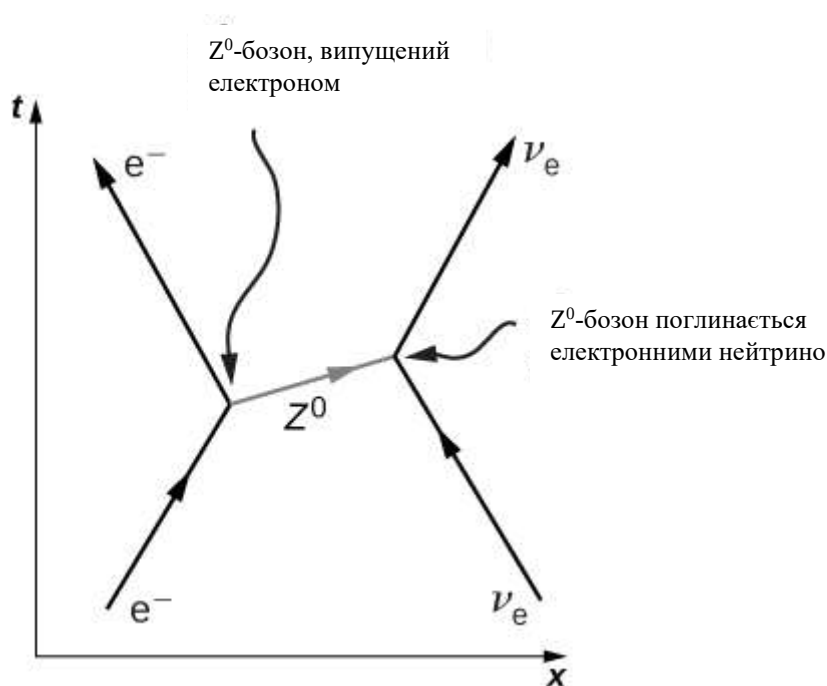


Рис. 6.12. На цій діаграмі Фейнмана обмін віртуальним Z^0 переносить слабку ядерну силу між електроном і нейтрино

Електрон рухається в напрямку позитивних значень x (вправо) і стикається з електронним нейтрино, що рухається вліво. Електрон обмінюється на Z -бозон (нульовий заряд). Електрон розсіюється вліво, а нейтрино – вправо. Цей обмін не відбувається миттєво. Z -бозон переміщується від однієї частинки до іншої протягом короткого періоду часу. Кажуть, що взаємодія електрона і нейтрино відбувається через слабку ядерну силу. Ця сила не може бути пояснена класичним електромагнетизмом, оскільки заряд нейтрино дорівнює нулю. Слабка ядерна сила знову обговорюється далі в цьому розділі.

Електромагнітна сила

Відповідно до КЕД, електромагнітна сила передається між зарядженими частинками через обмін фотонами. Теорія базується на трьох основних процесах: електрон подорожує з одного місця в інше, випускає або поглинає фотон і знову подорожує з одного місця в інше. Коли два електрони взаємодіють, один електрон випромінює фотон, а інший приймає його (рис. 6.13).

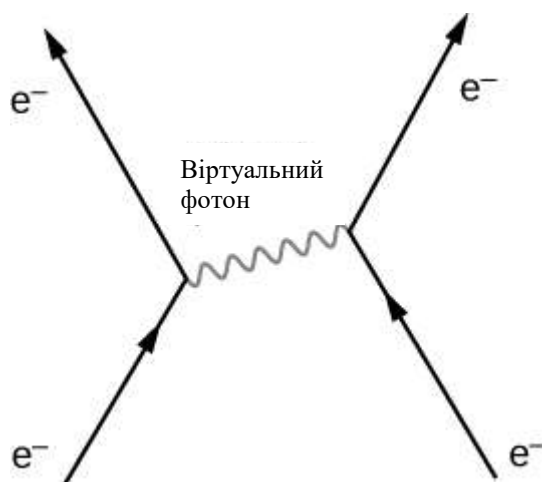


Рис. 6.13. Діаграма Фейнмана двох електронів, які взаємодіють шляхом обміну фотоном

Фотони передають енергію та імпульс від одного електрона до іншого. Кінцевим результатом у цьому випадку є сила відштовхування. Фотони, якими обмінюються, є віртуальними. **Віртуальна частинка** - це частинка, яка існує занадто короткий час, щоб її можна було спостерігати. Оскільки час проходження фотона Δt надзвичайно малий, принцип невизначеності Гейзенберга стверджує, що невизначеність енергії фотона, ΔE , може бути дуже великою. Щоб оцінити дальність електромагнітної взаємодії, припустимо, що невизначеність енергії порівнянна з енергією самого фотона,

$$\Delta E \approx E. \quad (6.4)$$

Принцип невизначеності Гейзенберга стверджує, що

$$\Delta E \approx \frac{h}{\Delta t}. \quad (6.5)$$

Об'єднавши ці рівняння, маємо:

$$\Delta t \approx \frac{h}{E}. \quad (6.6)$$

Енергія фотона визначається як $E = hf$, отже

$$\Delta t \approx \frac{h}{hf} \approx \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}. \quad (6.7)$$

Таким чином, відстань d , яку може пройти фотон за цей час, дорівнює:

$$d = c\Delta t \approx c \left(\frac{\lambda}{c} \right) = \lambda. \quad (6.8)$$

Енергія віртуального фотона може бути як завгодно малою, тому його довжина хвилі може бути як завгодно великою — в принципі навіть нескінченно великою. Отже, електромагнітна сила є силою далекої дії.

Слабка ядерна сила

Слабка ядерна сила відповідає за радіоактивний розпад. Радіус дії слабкої ядерної сили дуже малий (лише близько 10^{-18} м) і, як і інші сили в Стандартній моделі, слабку силу можна описати в термінах обміну частинками. (Немає такої простої функції, як сила Кулона, щоб описати ці взаємодії). Обмінна частинка є одним із трьох бозонів: W^+ , W^- , і Z^0 . Стандартна модель передбачає існування

цих частинок зі спіном 1, а також передбачає їх питому масу. У поєднанні з попередніми експериментами було передбачено, що маса заряджених W -бозонів становитиме $81 \text{ ГВ}/c^2$ і що для Z^0 було передбачено $90 \text{ ГВ}/c^2$. Експеримент CERN у 1980-х роках виявив частинки саме з такою масою — вражаюча перемога моделі.

Слабка ядерна сила найчастіше пов'язана з розсіюванням і розпадом нестабільних частинок на легкі частинки. Наприклад, нейтрони розпадаються на протони через слабку ядерну силу. Ця реакція записується так:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

де n – нейтрон, p – протон, e^- – електрон, а ν_e – майже безмасовим електронним нейтрино. Цей процес, званий бета-розпадом, важливий у багатьох фізичних процесах. Діаграма Фейнмана бета-розпаду наведена на рис. 6.14 (а).

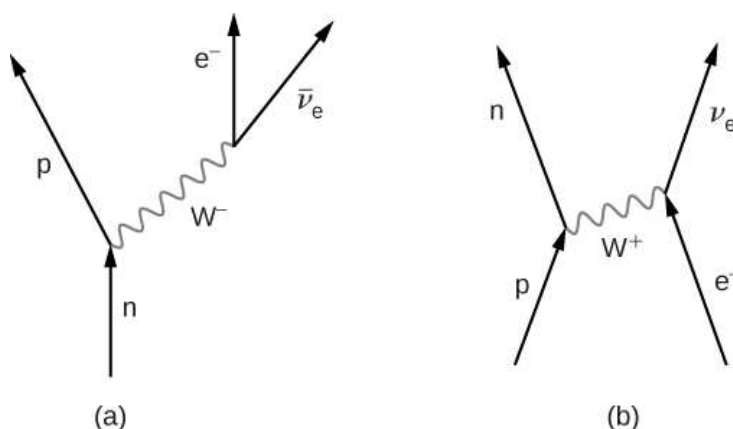


Рис. 6.14. Діаграма Фейнмана частинок, які взаємодіють через обмін W -бозоном: (а) бета-розпад; (б) перетворення протона в нейтрон

Нейтрон випускає W^- і стає протоном, потім W^- утворює електрон і антинейтрино. Цей процес подібний до події розсіювання:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e.$$

У цьому процесі протон випускає W^+ і перетворюється на нейтрон (б). W^+ потім з'єднується з електроном, утворюючи нейтрино. У вправах розглядаються інші електрослабкі взаємодії.

Дальність слабкої ядерної сили можна оцінити за допомогою аргументу, подібного до попереднього. Припускаючи, що невизначеність енергії порівнянна з енергією обмінної частинки ($E \approx mc^2$), отримуємо:

$$\Delta t \approx \frac{h}{mc^2}. \quad (6.9)$$

Таким чином, максимальна відстань d , яку може пройти обмінна частинка (за умови, що вона рухається зі швидкістю, близькою до c), дорівнює:

$$d \approx c\Delta t = \frac{h}{mc}. \quad (6.10)$$

Для одного із заряджених векторних бозонів $mc^2 \approx 80 \text{ Гев} = 1,28 \times 10^{-8} \text{ Дж}$, тоді ми отримуємо $mc = 4,27 \times 10^{-17} \text{ Дж}\cdot\text{с} / \text{м}$. Отже, діапазон дії сили, опосередкованої цим бозоном, становить:

$$d \approx \frac{1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}}{4,27 \times 10^{-17} \text{ Дж}\cdot\text{с}/\text{м}} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ м}. \quad (6.11)$$

Сильна ядерна сила

Сильні ядерні взаємодії описують взаємодії між кварками. Деталі цих взаємодій описані КХД. Згідно з цією теорією, кварки зв'язуються разом, посилаючи та приймаючи глюони. Так само, як кварки несуть електричний заряд [або $(+2/3)e$ або $(-1/3)e$], який визначає силу електромагнітної взаємодії між кварками, кварки також несуть «кольоровий заряд» (червоний, синій або зелений), який визначає силу сильних ядерних взаємодій. Як обговорювалося раніше, кварки об'єднуються в групи в нейтральних за кольором (або «білих») комбінаціях, таких як червоний-синьо-зелений і червоний-античервоний.

Цікаво, що самі глюони несуть кольоровий заряд. Існує вісім відомих глюонів: шість мають колір і антиколір, і два нейтральні за кольором (рис. 6.15 (a)).

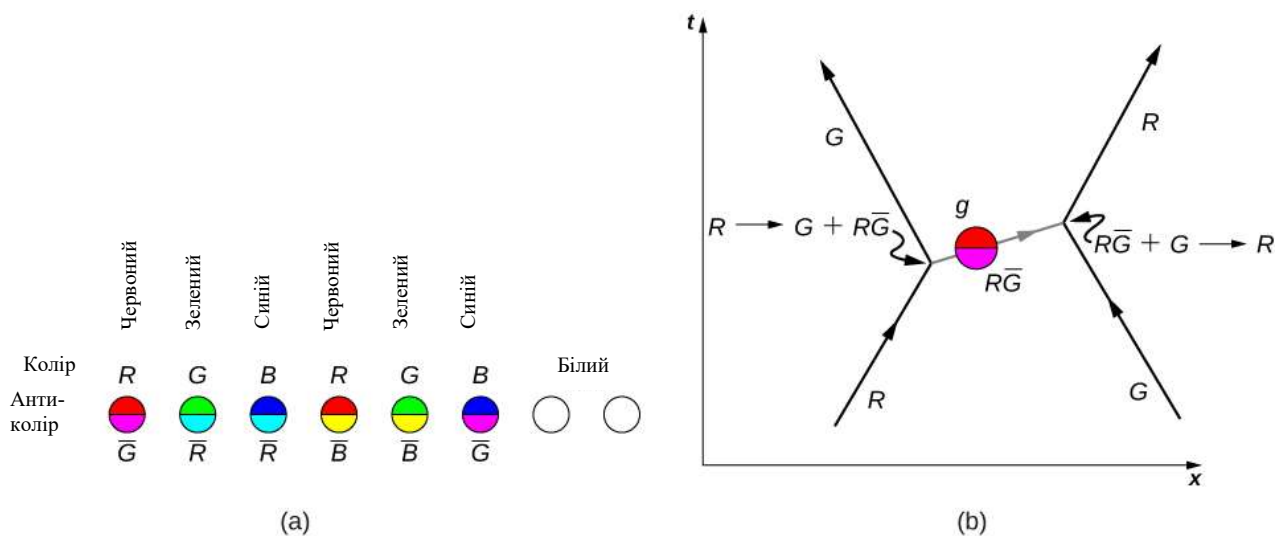


Рис. 6.15. (a) Вісім типів глюонів несуть сильну ядерну силу. Білі глюони є сумішшю пар колір-антиколір. (b) Взаємодія між двома кварками через обмін глюоном

Щоб проілюструвати взаємодію між кварками через обмін зарядженими глюонами, розглянемо діаграму Фейнмана в частині (b). Зі збільшенням часу червоний нижній кварк рухається праворуч, а зелений дивний кварк рухається ліворуч. (Вони з'являються на нижньому краю графіка). Верхній кварк обмінюється червоно-антизеленим глюоном з дивним кварком. (Антикольори показані як вторинні кольори. Наприклад, античервоний представлений блакитним, оскільки блакитний змішується з червоним, утворюючи біле світло.) Відповідно до КХД, усі взаємодії в цьому процесі — ототожнені з вершинами — мають бути нейтральними за кольором. Тому нижній кварк перетворюється з червоного на зелений, а дивний кварк перетворюється із зеленого на червоний. Як видно з цього прикладу, взаємодія між кварками в атомному ядрі може бути дуже складною.

На рис. 6.16 показано взаємодію між протоном і нейтроном. Зверніть увагу, що під час взаємодії протон перетворюється на нейтрон, а нейтрон — на протон.

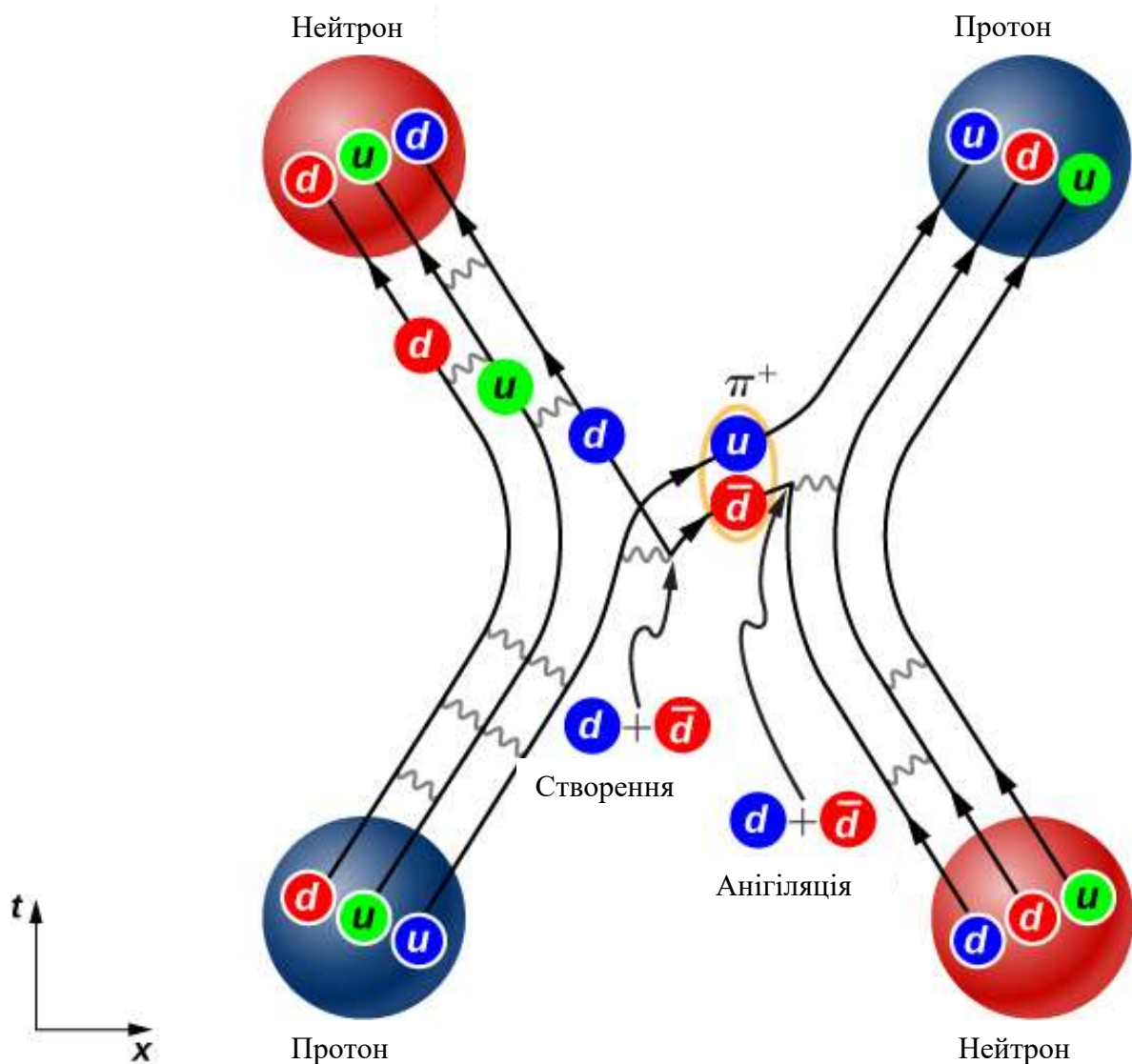


Рис. 6.16. Діаграма Фейнмана, яка описує сильну ядерну взаємодію між протоном і нейтроном

Наявність пар кварк-антикварк в обміні свідчить про те, що зв'язок між нуклонами можна моделювати як обмін піонами.

На практиці прогнози КХД зробити важко. Ця складність виникає через властиву силу сили та неможливість знехтувати членами в рівняннях. Таким чином, розрахунки КХД часто виконуються за допомогою суперкомп'ютерів.

Існування глюонів підтверджено експериментами з розсіювання електрон-нуклонів. Розрахункові імпульси кварків, пов'язані з цими подіями розсіювання, набагато менші, ніж ми очікували б без глюонів, оскільки глюони забирають частину імпульсу кожного зіткнення.

Теорії об'єднання

Фізикам давно відомо, що сила взаємодії між частинками залежить від відстані взаємодії. Наприклад, дві позитивно заряджені частинки відчують більшу силу відштовхування на короткій відстані, ніж на великій відстані. В

експериментах з розсіюванням сила взаємодії залежить від енергії взаємодіючої частинки, оскільки більша енергія передбачає як тіснішу, так і сильнішу взаємодію.

Зараз фізики підозрюють, що сили всіх взаємодій елементарних частинок (чотири сили) зливаються при високих енергіях, і деталі взаємодії частинок при цих енергіях можна описати в термінах однієї сили (рис. 6.17). Уніфікована теорія описує, як виглядають ці взаємодії, і пояснює, чому цей опис руйнується на низькоенергетичних масштабах. Велика уніфікована теорія — це теорія, яка намагається описати сильну та електрослабку взаємодію в термінах лише однієї сили. Теорія всього (ТОЕ) просуває концепцію об'єднання на один крок далі. ТОЕ поєднує всі чотири фундаментальні сили (включаючи гравітацію) в одну теорію.

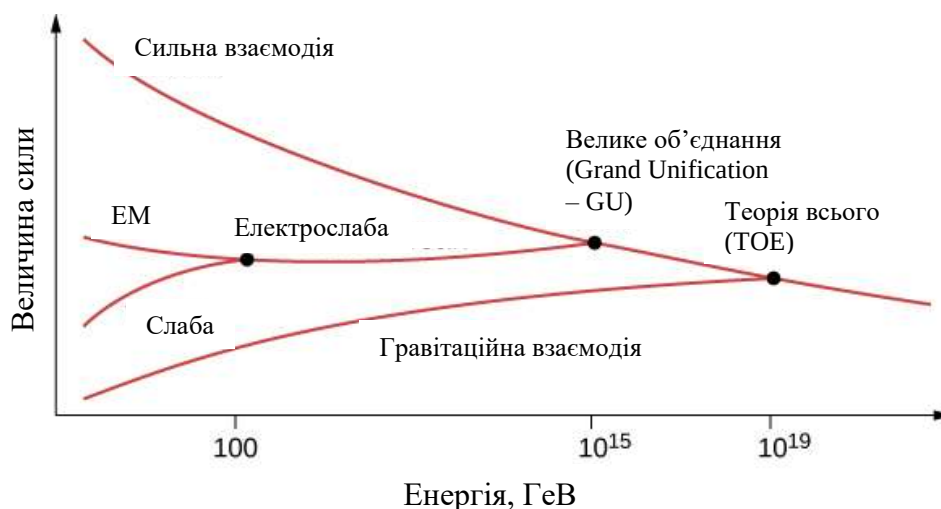


Рис. 6.17. Велике об'єднання сил при високих енергіях

Вправи до п. 6.5. Стандартна модель

1. Використовуючи принцип невизначеності Гейзенберга, визначте діапазон слабкої сили, якщо ця сила виникає в результаті обміну Z -бозоном.

2. Використовуйте принцип невизначеності Гейзенберга, щоб оцінити діапазон слабого ядерного розпаду за участю гравітону.

3. (a) Наступний розпад опосередкований електрослабкою силою:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$$

Намалюйте діаграму Фейнмана для розпаду.

(b) Наступне розсіювання опосередковується електрослабкою силою:

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-.$$

Намалюйте діаграму Фейнмана для розсіювання.

4. Якщо припустити збереження імпульсу, яка енергія кожного з γ -променя, що утворюється при розпаді нейтрального піона в спокої в реакції

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma?$$

5. Яка довжина хвилі електрона з енергією 50 Гев, який виробляється в SLAC? Це дає уявлення про обмеження деталей, які він може дослідити.

6. Основним способом розпаду негативного піона є

$$\pi^{-} \rightarrow \mu^{-} + \bar{\nu}_{\mu}.$$

(а) Яка величина виділеної енергії в МеВ при цьому розпаді?

(б) Використовуючи закон збереження імпульсу, скільки енергії отримує кожен із продуктів розпаду, враховуючи, що π^{-} знаходиться в спокої, коли розпадається? Ви можете припустити, що мюонне антинейтрино безмасове і має імпульс $p = E / c$, як фотон.

7. Припустімо, що ви розробляєте експеримент з розпаду протона і можете виявити 50 відсотків розпаду протона в резервуарі з водою. (а) Скільки кілограмів води вам знадобиться, щоб побачити один розпад на місяць, припускаючи, що тривалість життя 10^{31} років? (б) Скільки це кубічних метрів води? (в) Якщо фактична тривалість життя становить 10^{33} років, скільки в середньому вам доведеться чекати, щоб побачити розпад одного протона?

6.6. Великий вибух

Ми обговорювали елементарні частинки, які є одними з найменших предметів, які ми можемо вивчати. Зараз ми збираємося вивчити те, що ми знаємо про Всесвіт, що є найбільшим, що ми можемо вивчити. Зв'язок між цими двома темами полягає у високій енергії: для вивчення взаємодії частинок потрібні дуже високі енергії, а найвищі енергії, про які ми знаємо, існували під час ранньої еволюції Всесвіту. Деякі фізики вважають, що єдині теорії сили, які ми описали в попередньому розділі, могли насправді керувати поведінкою Всесвіту в його найперші моменти.

Закон Хаббла

У 1929 році Едвін Хаббл опублікував одне з найважливіших відкриттів у сучасній астрономії. Хаббл виявив, що (1) галактики ніби віддаляються від Землі і (2) швидкість відступу (v) пропорційна відстані (d) галактики від Землі. Як v , так і d можна визначити за допомогою спектрів зоряного світла. Найкраща відповідність зразку ілюстративних даних наведена на рис. 6.18. (Початковий сюжет Хаббла мав значний розкид, але загальна тенденція була очевидною). Тенденція в даних свідчить про просте пропорційне співвідношення:

$$v = H_0 d, \quad (6.12)$$

де $H_0 = 70$ км/с/Мпк відома як **постійна Хаббла**. (Примітка: 1 Мпк дорівнює одному мегапарсеку або одному мільйону парсеків, де один парсек дорівнює 3,26 світлових років). Це співвідношення, яке називають **законом Хаббла**, стверджує, що далекі зірки та галактики віддаляються від нас зі швидкістю 70 км/с за кожен один мегапарсек відстані від нас. Стала Хаббла відповідає нахилу прямої на рис. 6.18.

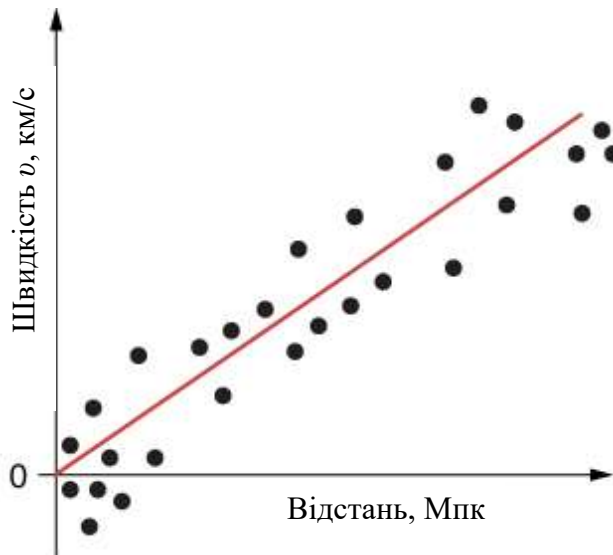


Рис. 6.18. Цей графік червоного зміщення від відстані для галактик демонструє лінійну залежність із більшими червоними зміщеннями на більших відстанях, що свідчить про розширення Всесвіту. Нахил дає приблизне значення швидкості розширення

Постійна Хаббла є дещо неправильною назвою, оскільки вона змінюється з часом. Наведена тут величина є лише *сьогоднішньою*.

Закон Хаббла описує середню поведінку всіх галактик, крім найближчих. Наприклад, галактика на відстані 100 Мпк (що визначається її розміром і яскравістю) зазвичай віддаляється від нас зі швидкістю:

$$v = \left(\left(70 \frac{\text{км}}{\text{с}} \right) / \text{Мпк} \right) = 7000 \text{ км/с.}$$

Ця швидкість може змінюватися через взаємодію з сусідніми галактиками. І навпаки, якщо виявляється, що галактика віддаляється від нас зі швидкістю 10 000 км/с на основі її червоного зсуву, вона знаходиться на відстані:

$$d = \frac{v}{H_0} = \left(10000 \frac{\text{км}}{\text{с}} \right) / \left(\left(70 \frac{\text{км}}{\text{с}} \right) / \text{Мпк} \right) = 143 \text{ Мпк.}$$

Цей останній розрахунок є приблизним, оскільки він припускає, що швидкість розширення була такою самою 5 мільярдів років тому, як зараз.

Модель великого вибуху

Вчені, які вивчають походження, еволюцію та остаточну долю Всесвіту (**космологія**), вважають, що Всесвіт виник у результаті вибуху, який називають **Великим вибухом (Big Bang)**, приблизно 13,7 мільярдів років тому. Цей вибух був не вибухом частинок у просторі, як феєрверк, а швидким розширенням самого простору. Відстані та швидкості зірок і галактик, що рухаються назовні, дозволяють нам оцінити, коли вся матерія у Всесвіті колись була разом — на початку часів.

Вчені часто пояснюють розширення Великого вибуху за допомогою моделі надутої повітряної кулі (рис. 6.19).

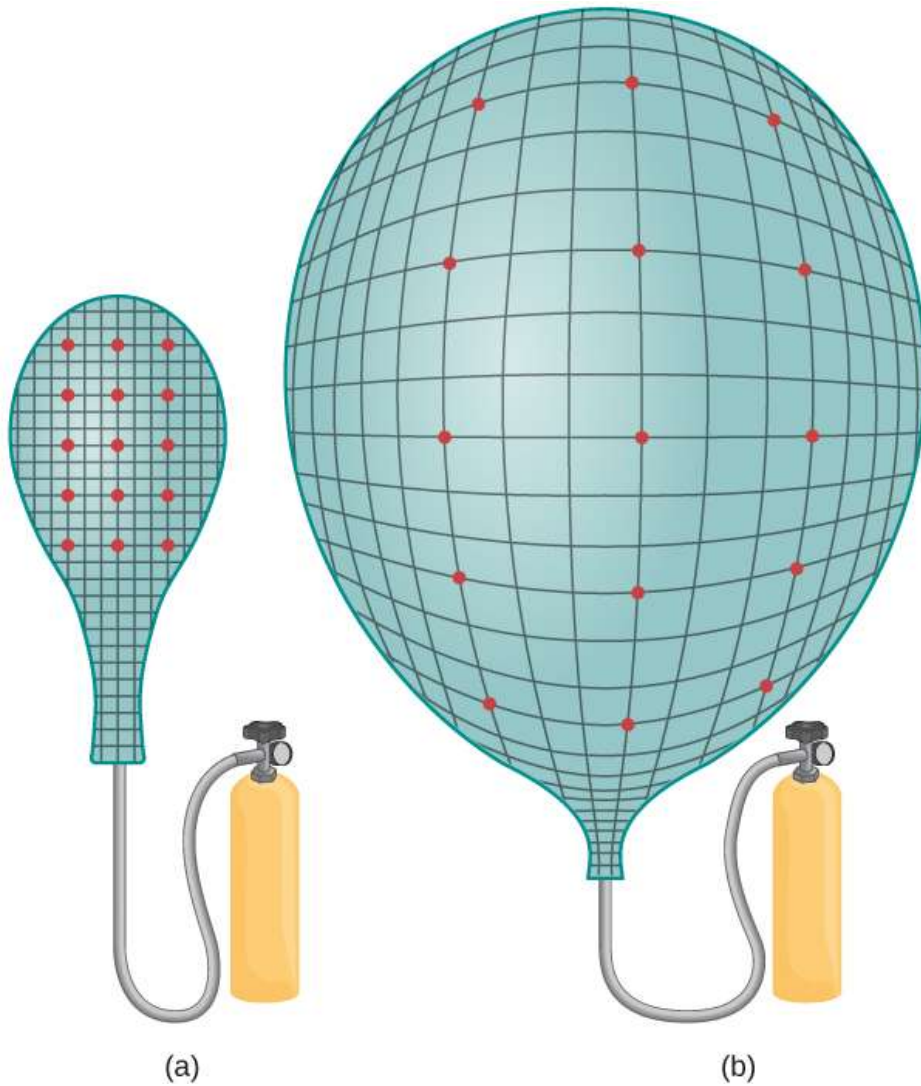


Рис. 6.19. Аналогія всесвіту, що розширюється: точки віддаляються одна від одної, коли повітряна куля розширюється; порівняйте (a) з (b) після розширення

Точки, позначені на поверхні повітряної кулі, представляють галактики, а оболонка повітряної кулі представляє чотиривимірний простір-час. Коли повітряна куля надувається, кожна крапка «бачить», як інші крапки віддаляються. Ця модель дає два висновки. По-перше, розширення спостерігають усі спостерігачі у Всесвіті, незалежно від того, де вони знаходяться. «Центру розширення» не існує, тому Земля не знаходиться в «привілейованому» центрі розширення (див. вправу 6.24).

По-друге, як уже згадувалося, розширення Великого вибуху відбувається внаслідок розширення простору, а не збільшення розриву галактик у звичайному (статичному) тривимірному просторі. Це космологічне розширення впливає на все: пил, зірки, планети і навіть світло. Отже, довжина хвилі випромінювання світла (λ) далеких галактик «розтягнуте». Через це світло виглядає «червонішим» (з меншою енергією) для спостерігача — це явище називається космологічним **червоним зміщенням**. Космологічне червоне зміщення можна виміряти лише для галактик, віддалених понад 50 мільйонів світлових років.

Приклад 6.8. Обчислення швидкостей і галактичних відстаней

Спостерігається червоне зміщення галактики:

$$z = \frac{\lambda_{\text{спостерігаєма}} - \lambda_{\text{емітована}}}{\lambda_{\text{емітована}}} = 4,5.$$

Це значення вказує на те, що галактика рухається зі швидкістю, близькою до світла. Використовуючи формулу релятивістського червоного зміщення, визначте (а) Як швидко віддаляється галактика відносно Землі? (б) Як далеко знаходиться галактика?

Стратегія

Нам потрібно використовувати релятивістську формулу Доплера, щоб визначити швидкість за червоним зміщенням, а потім використовувати закон Хаббла, щоб знайти відстань за швидкістю.

Розв'язок

а) Відповідно до формули релятивістського червоного зсуву:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1,$$

де $\beta = v/c$. Підставляючи значення для z і розв'язуючи β , отримуємо $\beta = 0,93$. Це значення означає, що швидкість галактики дорівнює $2,8 \times 10^8 \text{ м/с}$.

б) Використовуючи закон Хаббла, ми можемо знайти відстань до галактики, якщо знаємо її швидкість відступу:

$$d = \frac{v}{H_0} = \left(2,8 \times 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right) / \left(\left(73,8 \times 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right) / \text{Мпк}\right) = 3,8 \times 10^3 \text{ Мпк}.$$

Обговорення

Здається, віддалені галактики дуже швидко віддаляються від Землі. Червоне зміщення зоряного світла від цих галактик можна використовувати для визначення точної швидкості спаду, протягом 90 % швидкості світла в цьому випадку. Цей рух відбувається не через рух галактики в просторі, а через розширення самого простору.

Перевірте своє розуміння 6.8

Світло галактики, яка віддаляється від нас, є «червоним зміщенням». Що відбувається зі світлом галактики, яке рухається до нас?

Будова і динаміка Всесвіту

У великих масштабах Всесвіт вважається як ізотропним, так і однорідним. Вважається, що Всесвіт ізотропний, тому що він здається однаковим у всіх напрямках, і однорідний, оскільки він здається однаковим у всіх місцях. Всесвіт, який є ізотропним і однорідним, називається гладким. Припущення про гладкий

Всесвіт підтверджено Автоматичним дослідженням галактик, проведеним у 1980-х і 1990-х роках (рис. 6.20). Однак ще до того, як ці дані були зібрані, теоретики використовували припущення про гладкий Всесвіт для спрощення моделей розширення Всесвіту. Це припущення про гладкий Всесвіт іноді називають **космологічним принципом**.

Доля цього всесвіту, що розширюється, залишається відкритим. Відповідно до загальної теорії відносності, важливим способом характеристики стану Всесвіту є метрика простору-часу:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\Sigma^2, \quad (6.13)$$

де c — швидкість світла, a — масштабний коефіцієнт (функція часу) і $d\Sigma$ є елементом довжини простору. У сферичних координатах (r, θ, ϕ) , цей елемент довжини можна записати так:

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.14)$$

де k — константа з одиницями оберненої площі, яка описує кривизну простору.

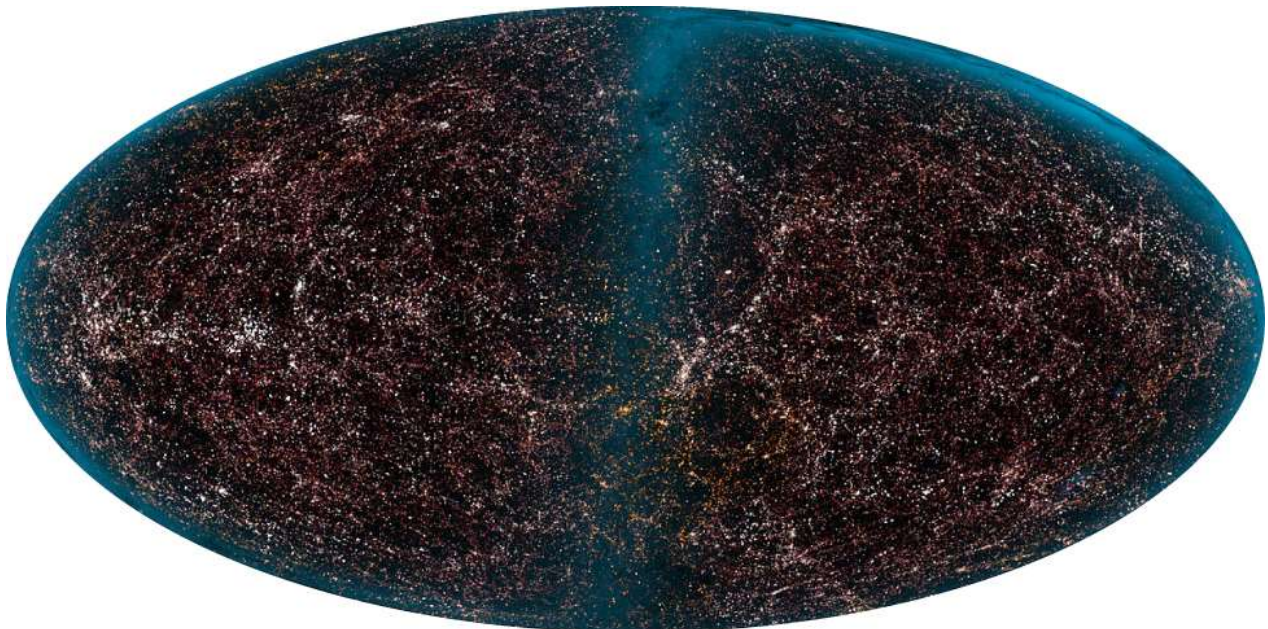


Рис. 6.20. Автоматизоване вимірювання галактик (АРМ). Понад 2 мільйони галактик зображені в області 100 градусів у поперечнику з центром до південного полюса Чумацького Шляху

Ця константа розрізняє відкриті, закриті та плоскі всесвіти:

- $k = 0$ (плоский всесвіт)
- $k > 0$ (закритий всесвіт, наприклад сфера)
- $k < 0$ (відкритий всесвіт, наприклад гіпербола).

З точки зору масштабного коефіцієнта a , ця метрика також розрізняє статичні, розширювані та звужувані всесвіти:

- $a = 1$ (статичний всесвіт)
- $da/dt > 0$ (всесвіт, що розширюється)
- $da/dt < 0$ (всесвіт скорочується).

Масштабний коефіцієнт a і кривизна k визначаються із загальної теорії відносності Ейнштейна. Якщо розглядати Всесвіт як газ галактик густиною ρ і тиском p , і припустимо $k = 0$ (плоский Всесвіт), тоді масштабний коефіцієнт a підпорядковується рівнянню:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a, \quad (6.15)$$

де G – універсальна гравітаційна стала. (Для звичайної речовини ми очікуємо значення $\rho + 3p$ більше нуля). Якщо масштабний коефіцієнт позитивний ($a > 0$), значення масштабного коефіцієнта “сповільнюється” ($d^2a/dt^2 < 0$), і розширення Всесвіту з часом сповільнюється. Якщо чисельник менше нуля (чому-сь тиск у Всесвіті негативний), значення масштабного коефіцієнта «прискорюється», і розширення Всесвіту з часом прискорюється. Згідно з останніми космологічними даними, схоже, що Всесвіт розширюється. Багато вчених пояснюють поточний стан Всесвіту термінами дуже швидкого розширення в ранньому Всесвіті. Це розширення називається **інфляцією**.

Вправи до п.6.6. Великий вибух

1. Якщо швидкість віддаленої галактики дорівнює 0,99 с, то яка відстань галактики від спостерігача, що знаходиться на Землі?
2. Відстань галактики від нашої Сонячної системи становить 10 Мпк. (а) Яка швидкість розширення галактики? (б) Яке червоне зміщення зоряного світла від цієї галактики (тобто яке його значення z)?
3. Якщо галактика знаходиться на відстані 153 Мпк від нас, як швидко ми очікуємо, що вона рухатиметься і в якому напрямку?
4. У середньому, на якій відстані розташовані галактики, які віддаляються від нас з 2,0% від швидкості світла?
5. Наша Сонячна система обертається навколо центру галактики Чумацький Шлях. Якщо припустити, що кругова орбіта має радіус 30 000 Па і орбітальну швидкість 250 км/с, скільки років потрібно для одного оберту? Зауважте, що це приблизне значення, припускаючи постійну швидкість і кругову орбіту, але воно показує час, протягом якого наша система та місцеві зірки роблять один оберт навколо галактики.
6. (а) Яка приблизна швидкість відносно нас галактики поблизу краю відомого Всесвіту, приблизно 10 ГПа від нас? (б) Яка частка це від швидкості світла? Зверніть увагу, що ми спостерігали, як галактики віддаляються від нас на більш ніж 0,9 с .
7. (а) Обчисліть приблизний вік Всесвіту за середнім значенням постійної Хаббла, $H_0 = 20 \text{ км/с} \cdot \text{МПа}$. Для цього обчисліть час, який знадобиться для проходження 0,307 Мпк при постійній швидкості розширення 20 км/с. (б) Якщо якимось трапиться прискорення, чи буде фактичний вік Всесвіту більшим чи меншим, ніж знайдений тут? Поясніть.
8. Галактика Андромеди є найближчою великою галактикою, яку можна побачити неозброєним оком. Оцініть його яскравість відносно Сонця,

припускаючи, що воно має світність у 10^{12} разів більше, ніж Сонце, і лежить на відстані 0,613 Мпк.

9. Покажіть, що швидкість зірки, яка обертається навколо своєї галактики по круговій орбіті, обернено пропорційна квадратному кореню з радіуса її орбіти, припускаючи, що маса зірок всередині її орбіти діє як єдина маса в центрі галактики. Ви можете використовувати рівняння з попереднього розділу, щоб підтвердити свій висновок, але ви повинні обґрунтувати його використання та визначити всі використані терміни.

6.7. Еволюція раннього Всесвіту

У попередньому розділі ми обговорювали структуру та динаміку Всесвіту. Зокрема, здається, що Всесвіт розширюється і навіть прискорюється. Але яким був Всесвіт на початку часів? У цьому розділі ми обговорюємо, які докази вдалося зібрати вченим про ранній Всесвіт і його еволюцію до теперішнього часу.

Ранній Всесвіт

До короткого періоду космічної інфляції космологи вважають, що вся матерія у Всесвіті була втиснута в простір, набагато менший за атом. Крім того, космологи вважають, що Всесвіт був надзвичайно щільним і гарячим, а взаємодія між частинками керувалася однією силою. Іншими словами, чотири фундаментальні сили (сильна ядерна, електромагнітна, слабка ядерна та гравітаційна) зливаються в одну при цих енергіях (рис. 6.21). Як і чому ця «єдність» руйнується при нижчих енергіях є важливою невирішеною проблемою фізики.

Наукові моделі раннього Всесвіту дуже спекулятивні. На рис. 6.22 показано ескіз однієї можливої шкали часу подій.

1. *Великий вибух* ($t < 10^{-43}$ с): Нинішні закони фізики руйнуються. Наприкінці початкової події Великого вибуху температура Всесвіту становить приблизно $T = 10^{32}$ К.

2. *Інфляційна фаза* ($t = 10^{-43}$ - 10^{-35} с): Всесвіт експоненціально розширюється, а гравітація відокремлюється від інших сил. Всесвіт охолоджується до приблизно $T = 10^{27}$ К.

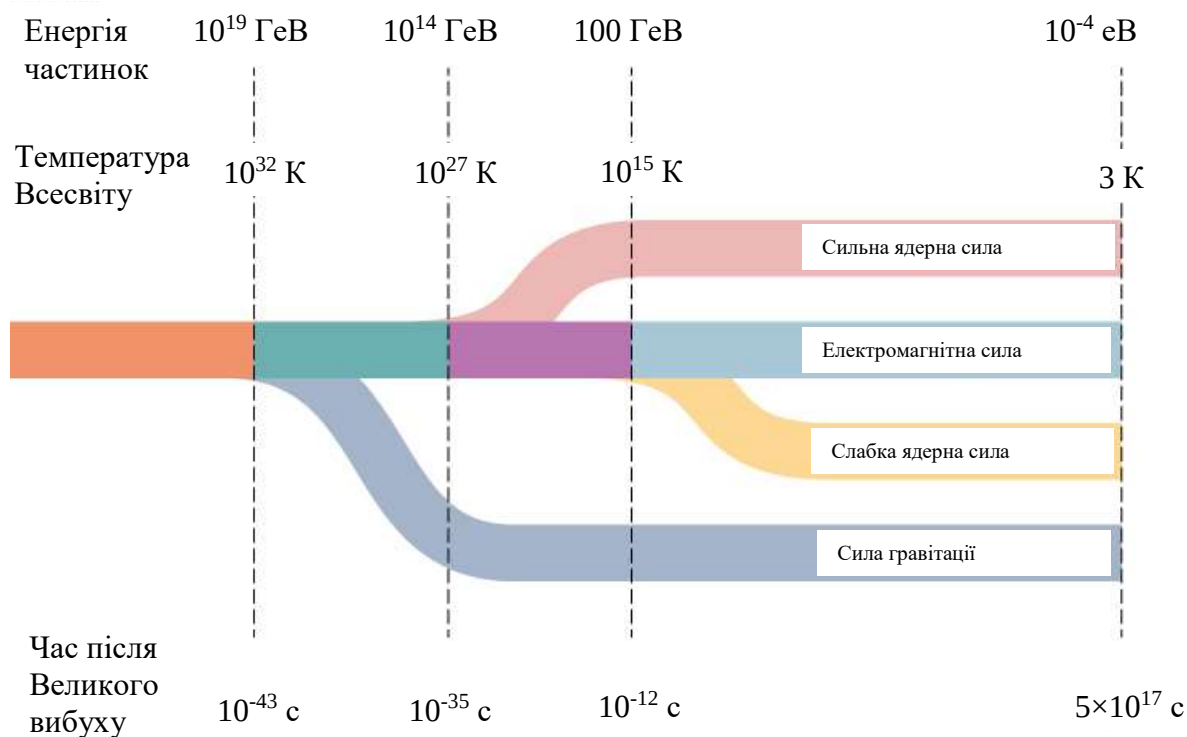


Рис. 6.21. Розділення чотирьох фундаментальних сил у ранньому Всесвіті

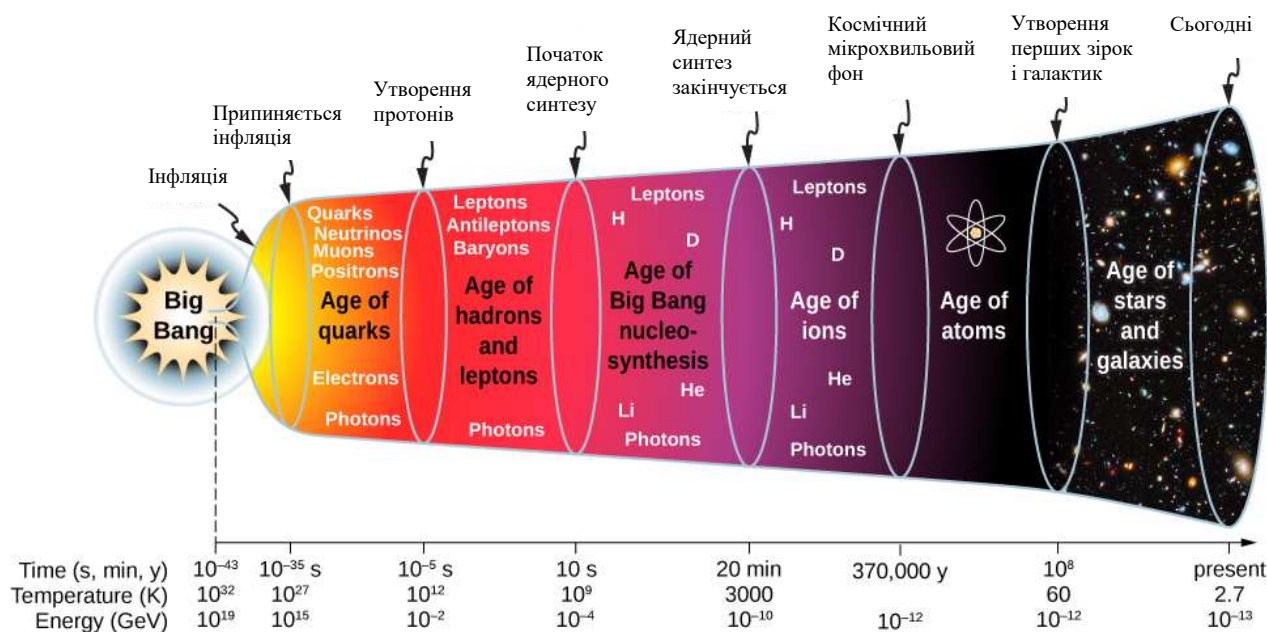


Рис. 6.22. Приблизний графік еволюції Всесвіту від Великого вибуху до сьогодення

3. Вік кварків ($t = 10^{-35} - 10^{-5}$ c): Оскільки Всесвіт продовжує розширюватися, сильна ядерна сила відокремлюється від електромагнітної та слабкої ядерних сил (або електрослабкої сили). Незабаром після цього слабка ядерна сила відокремлюється від електромагнітної сили. Всесвіт — це гарячий суп із кварків, лептонів, фотонів та інших частинок.

4. Вік адронів і лептонів ($t = 10^{-5} - 10$ c): Всесвіт складається з лептонів (електронів, мюонів, таунів і нейтрино) і адронів (таких як протони, нейтрони і

мезони), які знаходяться в тепловій рівновазі. Утворення пар і анігіляція пар відбувається однаково легко, тому фотони залишаються в тепловій рівновазі:

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^- + e^+,$$

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow p + \bar{p},$$

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow n + \bar{n}.$$

Кількість протонів приблизно дорівнює кількості нейтронів приблизно до 1 с через взаємодію з нейтрино:

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p,$$

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n.$$

Температура Всесвіту встановлюється приблизно 10^{11}K — занадто низька для подальшого утворення нуклон-антинуклонних пар. Число протонів і нейтронів починають переважати над їх античастинками, тому протон-антипротон ($p\bar{p}$) і нейтрон-антинейтрон ($n\bar{n}$) анігіляції спадають. Починають утворюватися дейтрони (пари протон-нейтрон).

5. *Період нуклеосинтезу Великого вибуху* (від $t = 225$ с до 1000 років): починають утворюватися дейтрони (пари протон-нейтрон). Оскільки Всесвіт продовжує розширюватися, дейтрони реагують з протонами та нейтронами, утворюючи більші ядра; ці більші ядра реагують з протонами та нейтронами, утворюючи ще більші стабільні ядра. Наприкінці цього періоду приблизно $\frac{1}{4}$ маси Всесвіту становить гелій. (Це пояснює поточну кількість гелію у Всесвіті). Фотонам не вистачає енергії для продовження виробництва електронів і позитронів, тому електрони й позитрони анігілюють один одного лише до фотонів.

6. *Вік іонів* (від $t = 1000$ років до 3000 років): Всесвіт достатньо гарячий, щоб іонізувати будь-які утворені атоми. Всесвіт складається з електронів, позитронів, протонів, легких ядер, утворених під час нуклеосинтезу Великого вибуху, і фотонів.

7. *Вік атомів* (від $t = 3000$ років до 300000 років): Всесвіт охолоджується нижче 10^5K і утворюються атоми. Фотони не сильно взаємодіють з нейтральними атомами, тому вони «розпарюються» (відокремлюються) від атомів. Ці фотони утворюють **космічне мікрохвильове фонове випромінювання**, яке буде обговорено пізніше.

8. *Вік зірок і галактик* ($t = 300000$ років до теперішнього часу): Атоми та частинки стягуються разом під дією сили тяжіння і утворюють великі грудки. Атоми та частинки в зірках піддаються реакції ядерного синтезу

Щоб кількісно описати умови раннього Всесвіту, пригадайте співвідношення між середньою тепловою енергією частинки (E) у системі взаємодіючих частинок і рівноважною температурою (T) цієї системи:

$$E = k_B T, \quad (6.16)$$

де k_B є постійною Больцмана. У гарячих умовах раннього Всесвіту енергії частинок були неймовірно великими.

Приклад 6.9

Якою була середня теплова енергія частинки відразу після Великого вибуху?

Стратегія

Середня теплова енергія частинки в системі взаємодіючих частинок залежить від рівноважної температури цієї системи (рівняння 6.1). Нам надано цю приблизну температуру на наведеній вище шкалі часу.

Розв'язок

Космологи вважають, що температура Всесвіту відразу після Великого вибуху була приблизною $T = 10^{32}\text{K}$. Отже, середня теплова енергія частинки була б такою:

$$k_B T \approx \left(8,62 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}\right) (10^{32}\text{K}) \approx 10^{28}\text{eV} = 10^{19}\text{GeV}.$$

Обговорення

Ця енергія на багато порядків перевищує енергію частинок, створених штучними прискорювачами частинок. В даний час ці прискорювачі працюють на енергіях менше 10^4GeV .

Перевірте своє розуміння 6.9

Порівняйте кількість гелію за масою через 10 000 років після Великого вибуху та зараз.

Нуклони утворюються при енергіях, приблизно рівних масі спокою протона, або 1000 MeV. Таким чином, температура, що відповідає цій енергії, дорівнює:

$$T = \frac{1000 \text{ MeV}}{8,62 \times 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{K}^{-1}} = 1,2 \times 10^{13} \text{ K}.$$

Температура такого значення або вище існувала протягом першої секунди раннього Всесвіту. Подібний аналіз можна зробити для атомів. Атоми утворюються з енергією, що дорівнює енергії іонізації основного стану водню (13 eV). Отже, ефективна температура для утворення атомів дорівнює:

$$T = \frac{13 \text{ eV}}{8,62 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}} = 1,6 \times 10^5 \text{ K}.$$

Це відбувається задовго до того, як чотири фундаментальні сили розділилися, включаючи сили, необхідні для зв'язування протонів і нейтронів у ядрі (сильна ядерна сила) і зв'язування електронів з ядром (електромагнітна сила).

Нуклеосинтез легких елементів

Відносна кількість легких елементів водню, гелію, літію та берилію у Всесвіті є ключовим доказом Великого вибуху. Ці дані свідчать про те, що значна

частина гелію у Всесвіті є первинною. Наприклад, виявилося, що 25% матерії у Всесвіті становить гелій, що є надто високим вмістом і не може бути пояснено на основі виробництва гелію в зірках.

Скільки елементів у Всесвіті було створено під час Великого вибуху? Якщо повернути годинник назад, Всесвіт стає все більш і більш стиснутим і гарячішим і гарячішим. Згодом досягаються температури, які дозволяють **нуклеосинтез**, період утворення ядер, подібний до того, що відбувається в ядрі Сонця. Вважається, що нуклеосинтез Великого вибуху відбувся протягом кількох сотень секунд після Великого вибуху.

Як відбувся нуклеосинтез Великого вибуху? Спочатку протони і нейтрони об'єднувалися, утворюючи дейтрони, ${}^2\text{H}$. Дейтрон захопив нейтрон і утворив тритій, ${}^3\text{H}$ — ядро радіоактивного водню під назвою тритій. Дейтрони також захоплювали протони для отримання гелію ${}^3\text{He}$. Коли ${}^3\text{He}$ захоплює протон або ${}^3\text{He}$ захоплює нейтрон, отримуємо гелій ${}^4\text{He}$ в результаті. На цьому етапі Великого вибуху співвідношення протонів і нейтронів дорівнювало приблизно 7:1. Таким чином, процес перетворення на ${}^4\text{He}$ витратив майже всі нейтрони. Процес тривав близько 3 хвилин і майже 25 % Всесвіту перетворилося на ${}^4\text{He}$, а також невеликі відсотки ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$. Невеликі кількості ${}^7\text{Li}$ і ${}^7\text{Be}$ також були сформовані. Розширення протягом цього часу настільки охолодило Всесвіт, що ядерні реакції припинилися. Кількість легких ядер ${}^2\text{H}$, ${}^4\text{He}$, і ${}^7\text{Li}$, що створені після Великого вибуху, дуже залежить від густини матерії.

Прогнозована кількість елементів у Всесвіті забезпечує сувору перевірку Великого вибуху та нуклеосинтезу Великого вибуху. Нещодавні експериментальні оцінки густини речовини, отримані за допомогою зонда Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), узгоджуються з прогнозами моделі. Це є переконливим доказом моделі Великого вибуху.

Космічне мікрохвильове фонове випромінювання

Згідно з космологічними моделями, подія Великого вибуху мала залишити теплове випромінювання, яке називається космічним мікрохвильовим фоновим випромінюванням (CMBR). Інтенсивність цього випромінювання має відповідати кривій випромінювання чорного тіла. Закон Віна стверджує, що довжина хвилі випромінювання на піку інтенсивності дорівнює:

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{T}, \quad (6.17)$$

де T — температура в кельвінах. Вчені очікували, що розширення Всесвіту «розтягне світло», а температура буде дуже низькою, тому космічне фонове випромінювання має бути довгохвильовим і низької енергії.

У 1960-х роках Арно Пензіас і Роберт Вілсон з Bell Laboratories помітили, що незалежно від того, що вони робили, вони не могли позбутися слабкого фонового шуму в своїй супутниковій системі зв'язку. Шум виник через випромінювання з довжиною хвилі в сантиметровому діапазоні (мікрохвильова область). Пізніше цей шум пов'язали з космічним фоновим випромінюванням.

Карту інтенсивності космічного фонового випромінювання показано на рис. 6.23.

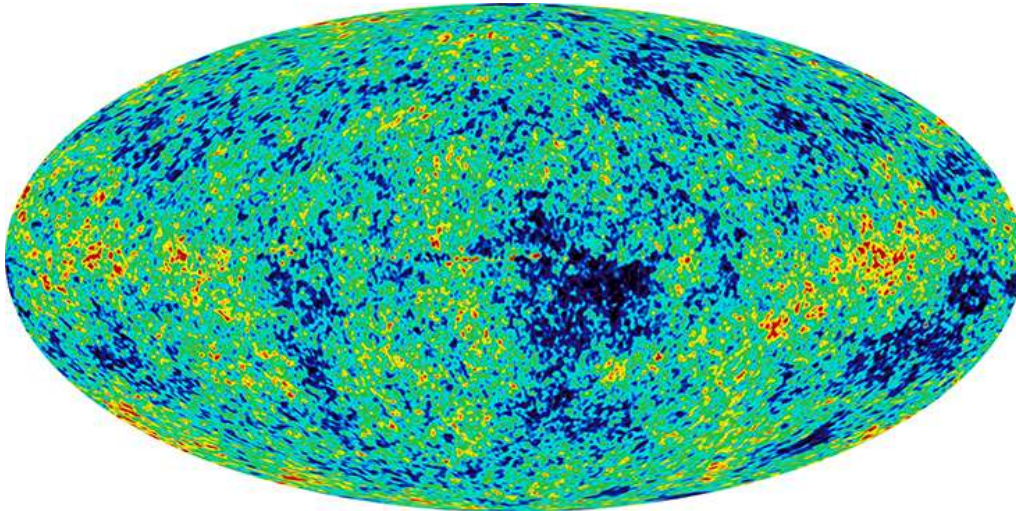


Рис. 6.23. Ця карта неба використовує колір, щоб показати коливання або зморшки на космічному мікрохвильовому фоні, які спостерігаються за допомогою космічного корабля WMAP. Чумацький Шлях видалено для ясності. Червоний означає вищу температуру та вищу щільність, тоді як синій вказує на нижчу температуру та щільність. Ця карта не суперечить попереднім твердженням про плавність, оскільки найбільші коливання становлять лише одну частину з мільйона.

Тепловий спектр добре моделюється кривою чорного тіла, яка відповідає температурі $T = 2,7 \text{ K}$ (рис. 6.24).

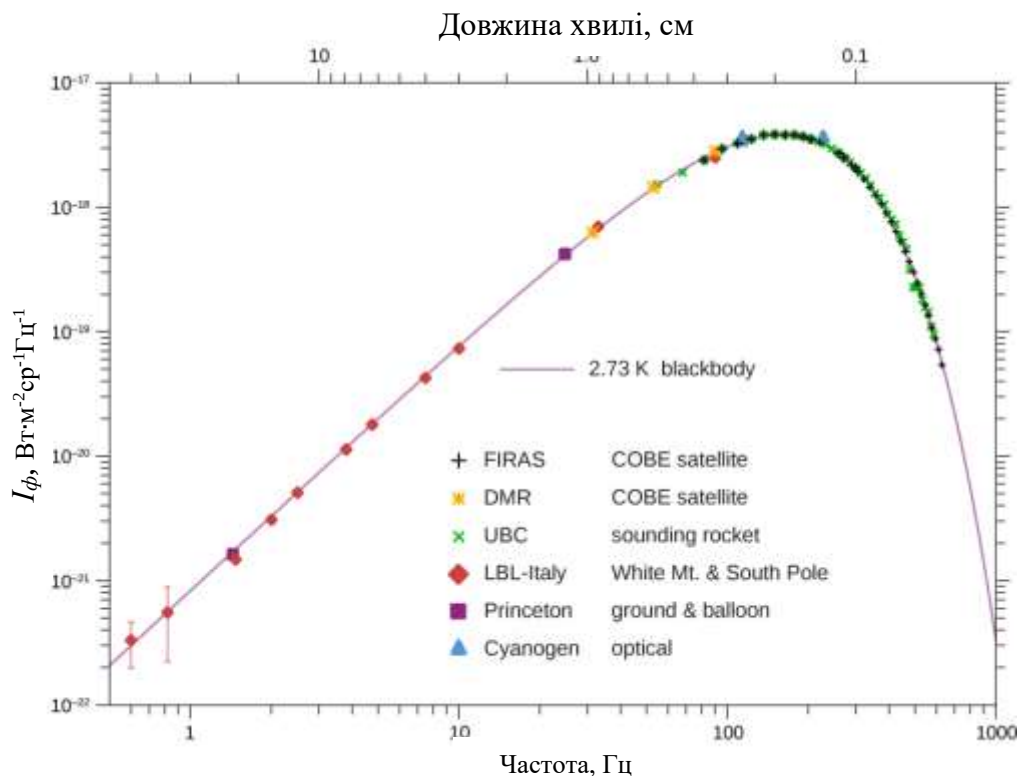


Рис. 6.24. Розподіл інтенсивності фонового космічного мікрохвильового випромінювання. Прогнози моделі (лінія) дуже добре узгоджуються з експериментальними результатами (точки). Значення частоти та яскравості відображаються на осі логарифму

Утворення атомів у ранньому Всесвіті зменшує ймовірність взаємодії цих атомів зі світлом. Отже, фотони, які належать до космічного фонового випромінювання, повинні були відокремитися від матерії при температурі T , пов'язаній з 1 eV (приблизна енергія іонізації атома). Температура Всесвіту в цей момент становила

$$k_B T \sim 1 \text{ eV} \Rightarrow T = \frac{1 \text{ eV}}{8,62 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}} \sim 10^4 \text{ K}.$$

Згідно з космологічними моделями, час, коли фотони востаннє розсіювалися від заряджених частинок, був приблизно через 380 000 років після Великого вибуху. До цього часу матерія у Всесвіті була у формі плазми, а фотони були «термалізовані».

Антиматерія і матерія

З прямих спостережень ми знаємо, що антиматерія зустрічається рідко. Земля та Сонячна система — це майже чиста матерія, і більша частина Всесвіту, здається, також домінує матерії. Це підтверджується відсутністю анігіляційного випромінювання, що надходить до нас із космосу, зокрема відносно відсутністю 0,511 MeV γ -променів, створених взаємною анігіляцією електронів і позитронів. (Антиматерія в природі створюється в результаті зіткнень частинок і β^+ розпаду, але лише в невеликих кількостях, які швидко анігілюють, залишаючи майже чисту речовину вцілілою).

Незважаючи на спостережуване домінування матерії над антиматерією у Всесвіті, Стандартна модель взаємодії частинок і експериментальні вимірювання припускають лише невеликі відмінності у способах взаємодії матерії та антиматерії. Наприклад, розпади нейтральних каонів утворюють лише трохи більше матерії, ніж антиматерії. Проте, якщо в результаті такого розпаду в ранньому Всесвіті утворилося трохи більше матерії, ніж антиматерії, решта могла б анігілювати пару за парою, залишаючи здебільшого звичайну матерію для формування зірок і галактик. Таким чином, величезна кількість зірок, які ми спостерігаємо, може бути лише крихітним залишком первісної матерії, створеної під час Великого вибуху.

Темна матерія і темна енергія

У 1970-х роках досвідчений астроном Віра Рубін почала досліджувати рух спіральних галактик. Вона помітила, що їхні крайні частини обертаються так само швидко, як і їхні центри, що не було передбаченим явищем. Вона підрахувала, що швидкість обертання галактик повинна була бути достатньою, щоб змусити їх розлетітися, якщо не було значної розбіжності між їхньою спостережуваною речовиною та їх реальною матерією. Це стало відомо як проблема обертання галактики. Рубін припустила, що величезна кількість невидимої або темної матерії повинна бути присутня в галактиках і навколо них, щоб мати місце обертання.

За останні два десятиліття нові та більш потужні методи виявили, що Всесвіт наповнений **темною матерією**. Цей тип матерії цікавий і важливий, оскільки наразі вчені не знають, що це таке. Однак ми можемо зробити висновок про його існування за відхиленням світла далеких зірок. Наприклад, якщо світло від віддаленої галактики викривляється гравітаційним полем згустку темної матерії між нами та галактикою, можливо, можна отримати два зображення однієї галактики (рис. 6.25).

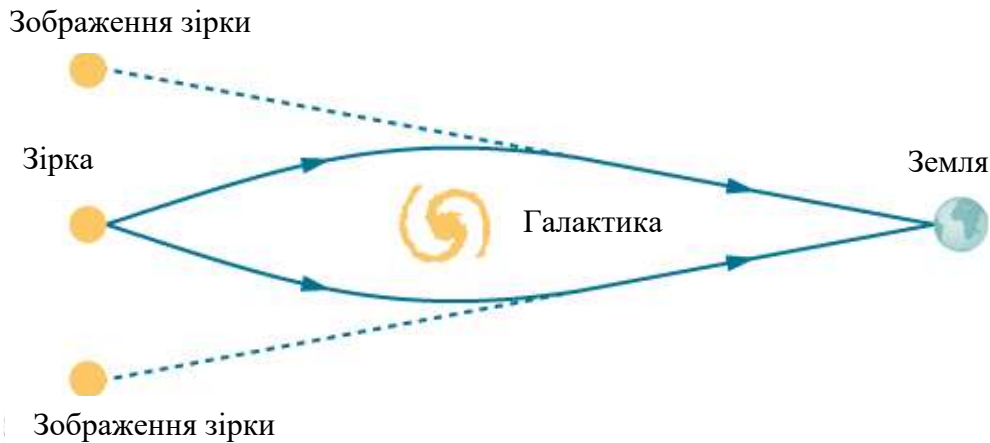


Рис. 6.25. Світло від далекої зірки огинається навколо галактики. За відповідних умов можна побачити два повторюваних зображення однієї зірки

Викривлення світла гравітаційним полем речовини називається **гравітаційним лінзуванням**. У деяких випадках зоряне світло доходить до спостерігача кількома шляхами навколо галактики, утворюючи кільце (рис. 6.26).

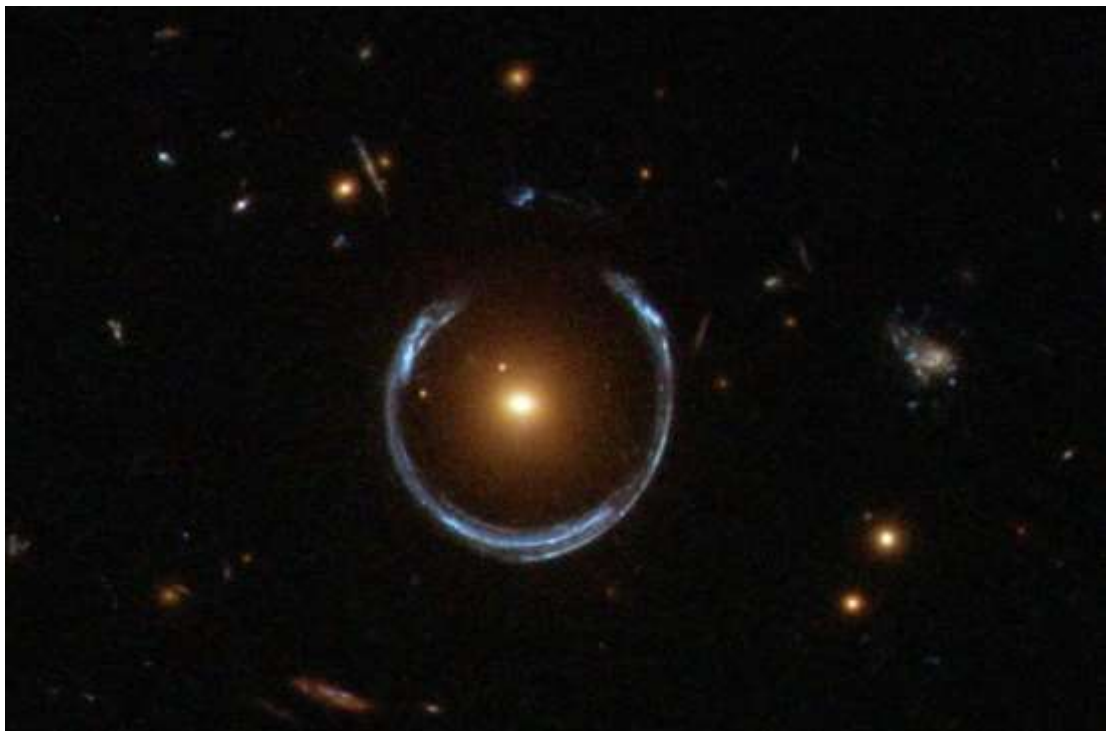


Рис. 6.26. Світло від далекої зірки огинається навколо галактики. За відповідних умов ми можемо побачити світлове кільце замість однієї зірки

Грунтуючись на поточних дослідженнях, вчені знають лише те, що темна матерія холодна, повільно рухається і слабо взаємодіє зі звичайною матерією. Кандидатами темної матерії є нейтраліно (партнери Z-бозонів, фотонів і бозонів Хіггса в «теорії суперсиметрії») і частинки, які циркулюють у крихтих кільцях, утворених додатковими просторовими вимірами.

Дедалі точніші астрономічні вимірювання Всесвіту, що розширюється, також виявляють наявність нової форми енергії, яка називається **темною енергією**. Вважається, що ця енергія пояснює більші, ніж очікувалося, значення спостережуваних галактичних червоних зсувів для далеких галактик. Ці червоні зсуви вказують на те, що Всесвіт не тільки розширюється, але розширюється зі зростаючою швидкістю. Про природу і властивості темної енергії практично нічого не відомо. Разом темна енергія і темна матерія представляють дві найцікавіші та нерозгадані головоломки сучасної фізики. Вчені приписують 68,3 % енергії всесвіту до темної енергії, 26,8 % до темної матерії, і просто 4,9 % до маси-енергії звичайних частинок (рис. 6.27).

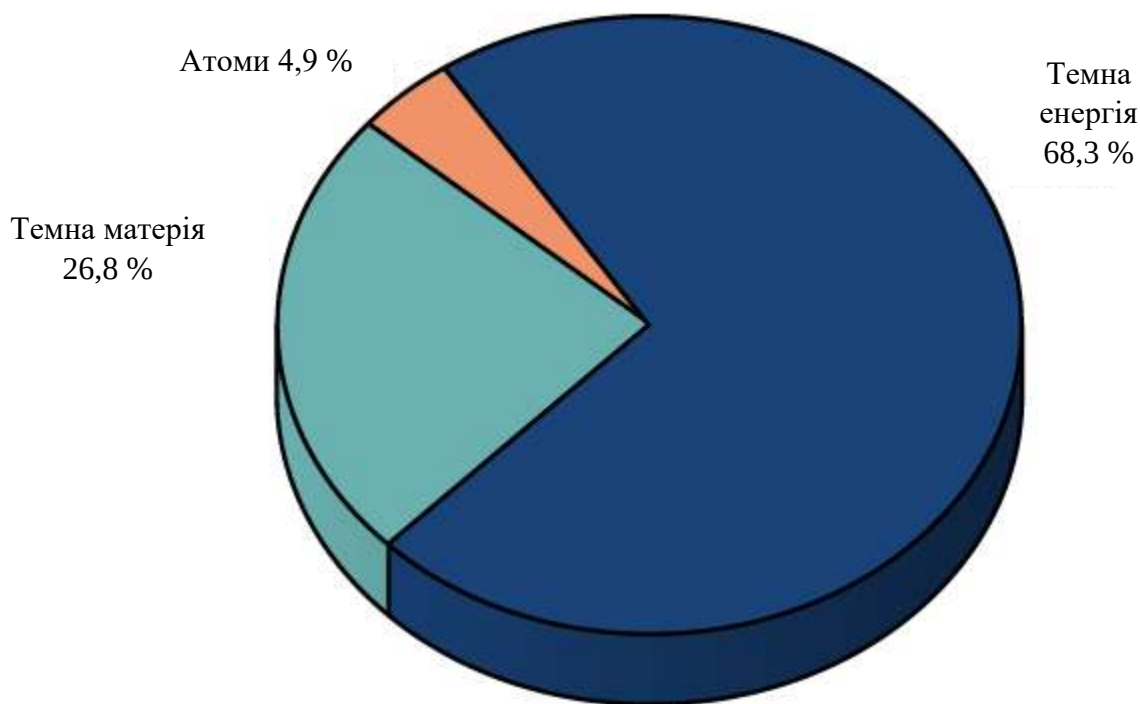


Рис. 6.27. Розрахунковий розподіл речовини та енергії у Всесвіті

Враховуючи нинішню велику таємницю природи темної матерії та темної енергії, скромні слова Ісаака Ньютона є такими ж правдивими зараз, як і століття тому:

«Я не знаю, яким я можу здатися світові, але для себе я здається лише схожим на хлопчика, який грається на березі моря, час від часу відволікаючись, знаходячи гладкіший камінчик або красивішу мушлю, ніж звичайна, тоді як великий океан правди лежав переді мною невідкритим».

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 6

6.1. Вступ до фізики елементарних частинок

1. Які є чотири фундаментальні сили? Коротко охарактеризуйте їх.
2. Розрізніть ферміони та бозони за допомогою понять нерозрізнюваності та обмінної симетрії.
3. Перелічіть сімейства кварків і лептонів
4. Розрізняють елементарні частинки та античастинки. Опишіть їх взаємодію.

6.2. Закони збереження частинок

5. Які є шість законів збереження частинок? Коротко охарактеризуйте їх.
6. Загалом, як визначити, чи відбувається реакція частинок чи розпад?
7. Чому виявлення взаємодії частинок, яка порушує встановлений закон збереження частинок, може вважатися хорошою справою для вченого?

6.3. Кварки

8. Які є шість відомих кварків? Узагальніть їх властивості.
9. Який загальний кварковий склад баріона? Мезона?
10. Які існують докази існування кварків?
11. Чому баріони з однаковим кварковим складом іноді відрізняються за енергією маси спокою?

6.4. Прискорювачі частинок і детектори

12. Коротко порівняйте прискорювач Ван де Граафа, лінійний прискорювач, циклотрон і синхротрон.
13. Опишіть основні компоненти та функції типової прискорювальної машини зі зустрічними променями.
14. Які піддетектори використовують у експериментах Compact Muon Solenoid? Коротко охарактеризуйте їх.
15. У чому полягає перевага прискорювача на зустрічних променях над прискорювачем, який стріляє частинками у нерухому ціль?
16. У мюонних детекторах CMS з'являється електрон. Як це можливо?

6.5. Стандартна модель

17. Що таке стандартна модель? Виразіть свою відповідь у термінах чотирьох фундаментальних сил і обмінних частинок.
18. Намалуйте діаграму Фейнмана, щоб показати анігіляцію електрона та позитрона в фотон.

19. Яка мгіпотеза лежить в основі теорій великого об'єднання?
20. Якщо буде розроблена теорія, яка об'єднує всі чотири сили, чи все одно буде правильним сказати, що орбіта Місяця визначається силою тяжіння? Поясніть чому.
21. Якщо бозон Хіггса виявлено та знайдено його масу, чи вважатиметься він остаточною носієм слабкої сили? Поясніть свою відповідь.
22. Один із поширених способів розпаду $\Lambda^0 \in \Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$. Незважаючи на те, що в цьому розпаді беруть участь лише адрони, він відбувається через слабку ядерну силу. Звідки ми знаємо, що цей розпад не відбувається через сильну ядерну силу?

6.6. Великий вибух

23. Що мається на увазі під космологічним розширенням? Виразіть свою відповідь за допомогою графіка Хаббла та червоного зсуву світла далеких зірок.
24. Опишіть аналогію повітряної кулі для космологічного розширення. Поясніть, чому лише здається, що ми перебуваємо в центрі розширення Всесвіту.
25. Відстані до місцевих галактик визначають шляхом вимірювання яскравості зірок, званих змінними цефеїд, які можна спостерігати окремо та які мають добре відомі абсолютні яскравості на стандартній відстані. Поясніть, як змінюється виміряна яскравість із відстанню порівняно з абсолютною яскравістю.

6.7. Еволюція раннього Всесвіту

26. Що мається на увазі під «космологічною моделлю раннього Всесвіту»? Коротко опишіть цю модель з точки зору чотирьох фундаментальних сил.
27. Опишіть два докази, які підтверджують модель Великого вибуху.
28. У якому сенсі ми, як колись сказав Ньютон, «хлопчик, що грається на березі моря»? Висловіть свою відповідь у термінах понять темної матерії та темної енергії.
29. Якщо якась невідома причина червоного зміщення, наприклад, «втома» світла від подорожі на великі відстані через порожній простір, буде виявлена, який вплив це матиме на космологію?
30. У минулому багато вчених вважали Всесвіт нескінченним. Однак, якщо Всесвіт нескінченний, то будь-який промінь зору в кінцевому підсумку повинен падати на поверхню зірки, а нічне небо має бути дуже яскравим. Як цей парадокс вирішується в сучасній космології?