

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико – математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____ Бобилев Д.Є.
« ____ » _____ 20__ р.

Реєстраційний № _____
« ____ » _____ 20__ р.

**ЗАДАЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ
КОМПЕТЕНТНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ У НАВЧАННІ
ГЕОМЕТРІЇ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ**

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм – 23
ступеня вищої освіти «Магістр»
спеціальності
«014 Середня освіта (Математика)»
Подскребаєвої Тетяни Володимирівни

Науковий керівник:
доктор педагогічних наук, професор
Лов'янова Ірина Василівна

Оцінка:
Національна шкала _____
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _____
Члени ЕК _____

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Подскребаєва Тетяна Володимирівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ В УМОВАХ КОМПЕТЕНТНІСНОГО НАВЧАННЯ.....	7
1.1. Методичні особливості компетентнісного підходу у навчанні	7
1.2. Сутність задачного підходу у процесі формування математичної компетентності старшокласників	21
Висновки до розділу I	35
РОЗДІЛ II. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЦИЛІНДР» В УМОВАХ ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ	38
2.1. Логіко-математичний аналіз змісту теми «Циліндр» на профільному рівні	38
2.2.Формування предметної математичної компетентності у навчанні теми «Циліндр».....	49
2.3. Формування математичної компетентності як ключової при вивченні теми “Циліндр”	71
2.4. Задачний підхід до вимірювання математичної компетентності.....	75
Висновки до розділу II.....	86
ВИСНОВКИ.....	87
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	89
ДОДАТКИ.....	97

ВСТУП

Задача є інструментом для розвитку математичних здібностей учнів, і значна частина навчального часу в старшій школі присвячена їх розв'язанню. Аналіз змісту навчальних програм з математики у старшій школі свідчить про те, що більшість розділів, які вивчаються учнями, безпосередньо або опосередковано пов'язані із розв'язуваннями різноманітних математичних задач. А це, своєю чергою, дає змогу спираючись на зміст навчання, добирати такі методичні прийоми, які найліпше сприятимуть розвиткові учнів у процесі навчання математики.

Сучасний випускник профільної школи повинен не лише знати математику, але й уміти застосовувати ці знання на практиці. У Концепції Нової української школи підкреслюється важливість взаємозв'язку знань із ціннісними орієнтирами учня для формування життєвих компетентностей для успішної самореалізації. Математична компетентність, яка включає логічне мислення, використання математичних методів та побудову моделей для розв'язання прикладних задач, є ключовою для цього процесу.

Задачний підхід до формування математичної компетентності старшокласників у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки є актуальним, оскільки в сучасному світі для людини важливою є здатність бути мобільною, швидко зорієнтуватися, бачити проблему, чітко її формулювати, всебічно підходити до її розв'язання та здобувати необхідну інформацію. Вивчення геометрії сприяє розвитку цих якостей, оскільки завданнями навчання геометрії в школі є розвитком просторового та логічного мислення, формування розуміння відношень між геометричними об'єктами та об'єктами реального світу, а також вміння застосовувати геометрію для розв'язання практичних задач в життєвих ситуаціях.

Все вище зазначене обумовлює вибір теми дослідження: **«Задачний підхід до формування математичної компетентності старшокласників у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки».**

Мета дослідження дослідити методичні прийоми реалізації задачного підходу до формування математичної компетентності старшокласників у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки.

Об'єктом дослідження є процес формування математичної компетентності старшокласників у навчанні геометрії.

Предметом дослідження є задачний підхід до навчання тем змістово-методичних ліній **«Геометричні фігури та їх властивості. Геометричні величини та їх вимірювання»** на прикладі навчання теми «Циліндр».

Досягнення мети дослідження передбачає виконання таких завдань:

- визначити методичні особливості компетентнісного підходу у формуванні математичної компетентності старшокласників;
- розкрити сутність задачного підходу до навчання геометрії на профільному рівні підготовки;
- здійснити логіко-математичний аналіз змісту теми «Циліндр» за підручником «Геометрія» для 11 класів профільного рівня автора, Є.Неліна, О. Долгова;
- розробити методики та прийоми формування ключової математичної компетентності учнів при вивченні теми «Циліндр» з використанням задач;
- підібрати та систематизувати задачі з теми «Циліндр» з метою формування предметної математичної компетентності учнів.

Практичне значення роботи полягає в тому, що описана нами методика може бути використана:

- вчителями у процесі навчання старшокласників математики з метою підвищення рівня їх знань, умінь та навичок розв'язувати задачі нестандартного та творчого характеру, розвитку творчого мислення учнів та засвоєння способів розумової діяльності;

- учнями для самостійної підготовки до ЗНО/НМТ;
- студентами для ознайомлення з методичними прийомами реалізації задачного підходу під час активної педагогічної практики;
- у процесі навчання старшокласників математики з метою підвищення рівня їх знань, умінь та навичок розв'язувати задачі нестандартного та творчого характеру, розвитку творчого мислення учнів та засвоєння способів розумової діяльності.

Апробація дослідження відбувалася під час участі у V Міжнародній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2024» (21 – 22 листопада 2024 року, м. Суми, Україна) і публікації тез на тему: «Задачний підхід до формування математичної компетентності старшокласників».

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 71 найменування та додатків. Основний зміст кваліфікаційної роботи викладено на 88 сторінках, проілюстровано 6 таблиць, 5 рисунків. Повний обсяг роботи 100 сторінок.

РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ В УМОВАХ КОМПЕТЕНТНІСНОГО НАВЧАННЯ

1.1. Методичні особливості компетентнісного підходу у навчанні

Швидкі зміни в сучасному світі вимагають від людини гнучкості, адаптивності та вміння мислити критично. Саме тому реформування системи освіти в Україні спрямоване на формування всебічно розвиненої особистості, готової до викликів XXI століття. Сучасне суспільство потребує не просто освічених людей, а особистостей які здатні застосовувати свої знання в динамічному середовищі. Для цього випускники загальноосвітніх навчальних закладу повинні уміти приймати самостійні рішення, мають бути гнучкими, адаптивними, вміти знаходити нестандартні рішення, бути ініціативними, здатними до новацій, готовими до перевантажень, стресових ситуацій, вміти виходити з них та нести відповідальність за своє майбутнє [17]. Саме набуття життєво важливих компонентностей дає можливість орієнтуватися у сучасному суспільстві, сприяє формуванню в особистості здатності швидко реагувати на запити часу. Впровадження компетентнісного підходу – найважливіша умова, що працює на підвищення якості освіти.

Компетентнісний підхід в освіті акцентує увагу на особистісно зорієнтованому та діяльнісному навчанні, орієнтуючись на індивідуальні здібності учнів. Це вимагає зміни змісту освіти з загальної моделі для всіх учнів на суб'єктивні досягнення окремого учня, які можна оцінити.

Розвиток компетентнісного підходу в освіті є невід'ємною частиною сучасної освітньої системи, який відбувався в три етапи. *Перший етап* (1960-1970 рр.) був визначальним, саме тоді відбулося введення поняття «комунікативної компетентності», запропоноване Д.Хаймсом, що відіграло важливу роль у формуванні сучасного розуміння компетентності в освіті.

Також цей період був важливим для дослідження різних видів мовної компетентності, що створило підвалини для подальшого розвитку та впровадження компетентнісного підходу. На *другому етапі* розвитку компетентнісного підходу (1980-1990 рр.) спрямовано значну увагу на вдосконалення мовної освіти. В цей період відбувся значний прогрес у розвитку теорії компетентнісного підходу в освіті, зокрема в мовній освіті, що сприяло появі нових методик та завдань для мовної компетентності в учнів. Також були впроваджені нові підходи до оцінювання та створені підґрунтя для подальшого розвитку компетентнісного підходу в освіті. На *третьому етапі* розвитку компетентнісного підходу в освіті (2000-2010 рр.) велике значення мали міжнародні ініціативи з розвитку цього підходу. Різні міжнародні проекти, програми та конференції сприяли обміну досвідом та передачі найкращих практик у реалізації компетентнісного підходу. Це сприяло поширенню цього підходу на міжнародній арені та поглибленню розуміння його методик та ефективності. У цей період дуже важливими були такі міжнародні ініціативи, як взаємний обмін досвідом і найкращими практиками з реалізації компетентнісного підходу. Такі ініціативи допомогли активно впроваджувати цей підхід на міжнародному рівні та глибше вивчати його методологію та результативність. Ці зусилля сприяли зростанню усвідомленості важливості компетентнісного підходу та забезпечили підготовку фахівців, які володіють необхідними навичками та знаннями для впровадження цього підходу у практику навчання.

Компетентнісний підхід в освіті є предметом дослідження українських науковців і педагогів, які акцентують увагу на його визначенні та впровадженні в навчальний процес: А.Акусок [1], Н. Бібік [4], В. Бобрицька [5], М. Головань [13], О. Локшина [27], В. Луговий [28], О. Матяш [30], Т. Мачача [31], О.М. Пометун [38], С. Раков [43], Ю. Рашкевич [45], В. Химинець [51].

А. Акусок вважає компетентністю інтегроване поєднання знань, умінь, здібностей, установ і досвіду, які надають людям здатність виконувати професійну діяльність у сучасному трудовому середовищі [1].

Причинами запровадження компетентнісного підходу Н. Бібік вважає недостатність знань, їх розрізненість, слабкий зв'язок з дійсністю, вимогами сьогодення [4, с. 26].

Відповідно до Закону України «Про вищу освіту» (2014 р.), компетентність зростає як здатність особистості успішно соціалізуватися, навчатися та підтримувати професійну діяльність, що обґрунтовується на динамічній комбінації знань, умінь, навичок та способів мислення, цінностей та інших індивідуальних якостей [42].

Н. Бібік дає визначення компетентності як особистості, яка «забезпечує сприятливість випускника вищого навчального закладу відповідати новим запитам, мати відповідний потенціал ринку для практичного розв'язання життєвих проблем, пошуку свого «Я» у професії, у соціальній структурі» [4, с. 45].

В. Луговий характеризує компетентність як сукупність опанованих основних видів інформації (знань, цінностей, проєктів, консенсусів, художніх образів) і набутих на їх базі відповідних психофізичних новоутворень, які слід трактувати як результати освіти [28].

За визначенням М. Голованя, компетентнісний підхід – це сукупність спільних принципів визначення цілей, відбору змісту освіти, організації освітнього процесу й оцінювання результатів освіти. Основою компетентнісного підходу дослідник покращує якість освіти. Результати здобутої освіти повинні бути визнаними за межами системи освіти [15, с. 19].

У праці Т. Мачачі розглядають теоретико-методологічні основи проєктування змісту технологічної освіти для учнів середньої школи, зокрема аналізують різні підходи до визначення термінів «компетентність» та «ключова компетентність» [31]. Компетентність вчена характеризує так: «Готовність і здатність особистості ефективно вирішувати життєво важливі

проблеми в різних сферах матеріального й нематеріального виробництва зі знанням справи, здатність до творчого сприйняття, розуміння, усвідомлення й перетворення реальності, формування власного соціокультурного середовища» [31, с. 111]. Ключова компетентність, за визначенням вченої, це внутрішній резерв суб'єкта діяльності, що виявляється в системних знаннях, розумінні, здібностях, ставленні та особистісних якостях, які одночасно забезпечують досягнення цілей у різних сферах діяльності [31, с. 111].

О. Матяш у своїй монографії доводить, що компетентнісний підхід зосереджує увагу на результатах освіти, які є вагомими для професійної діяльності. Вчена надає перевагу умінням розв'язувати професійні практичні проблеми, а не широкій обізнаності фахівця про професійну діяльність. Компетентнісний підхід створює передумови для максимального зближення результатів освіти з потребами та вимогами ринку праці, наступного розвитку освітніх технологій загалом і системи освіти в цілому [30, с. 108-109].

Під терміном компетентнісний підхід дослідниця О. Пометун розуміє важливість скерованості освітнього процесу на формування інтегративних характеристик особистості. Цей процес має включати розвиток знань, умінь, навичок, ставлення, досвіду та моделей поведінки, які сприяють повноцінному становленню особи в навчанні. Компетентнісний підхід в освіті поєднаний з особистісно орієнтованим і діяльнісним підходами до навчання, оскільки має відношення до особистості студента й може бути втіленим і перевіреном тільки під час здійснення окремим студентом певного набору дій. Він потребує трансформації змісту освіти, перетворення його з моделі, яка існує об'єктивно, для всіх студентів, на конкретні здобутки окремого студента, які можна виміряти [39, с. 66].

Аналіз психолого-педагогічної літератури засвідчив, що проблему компетентнісного підходу в освіті ґрунтовно досліджують українські та зарубіжні науковці. Перетворення змісту освіти згідно з компетентнісним підходом визначається в першу чергу принципами його обрання та

структурування, спрямованими на кінцевий результат освітнього процесу, а саме, набуттям учнем компетентностей.

О. Пометун підкреслює, що для впровадження змін у зміст освіти необхідна чітко структурована система, яка передбачає наступні кроки:

- визначення ключових компетентностей: створення детального переліку компетентностей, які учень повинен здобути в процесі навчання;

- конкретизація змісту та шляхів формування кожної компетентності: чітке визначення того, що саме учень має знати та вміти для розвитку кожної з ключових компетентностей, а також розробка ефективних методів навчання;

- пов'язання компетентностей з навчальними дисциплінами: визначення, які саме шкільні предмети сприятимуть розвитку кожної з ключових компетентностей. Це дозволить сформувати детальний перелік галузевих та предметних компетентностей;

- оптимізація навчальних програм: вибір лише того навчального матеріалу, який є необхідним для формування визначених компетентностей;

- розробка системи оцінювання: створення інструментів для регулярної оцінки рівня сформованості кожної компетентності на різних етапах навчання;

- створення механізму корекції: розробка системи, яка дозволить вчасно виявляти недоліки у процесі формування компетентностей та вносити відповідні корективи. [39, с. 65].

Таким чином, запропонована система дозволить системно підходити до процесу оновлення освіти, забезпечуючи розвиток учнів як всебічно розвинених особистостей.

С. Раков підкреслює, що компетентнісний підхід в освіті є більш розширеним, ніж традиційний підхід, який зосереджується лише на предметних знаннях, уміннях і навичках. Він охоплює також гуманістичні, морально-етичні, культурні, естетичні та мотиваційні аспекти, що сприяють творчості, активній діяльності та досягненню результатів [43, с. 8].

Ю. Рашкевич, аналізуючи проєкт Тьюнінг, зауважує, що в основу навчання покладено компетентнісний підхід до розробки та реалізації освітніх програм [45, с. 44]. Також дослідник зазначає, що: «в основу навчання покладено ідею максимального забезпечення шансів отримати перше місце на ринку праці, підвищення їхньої «вартості» у працедавців, задоволення тим самим актуальних потреб» [45, с. 16].

В. Химинець підкреслює, що компетентнісний підхід переводить акценти з процесу накопичення знань, умінь і навичок у сферу формування й розвитку в особистості здатності практично діяти та творчо використовувати здобуті знання та досвід у різних життєвих ситуаціях [51].

В. Бобрицька зауважує, що компетентність складається з ключових, надпредметних (загальногалузевих) та предметних компетентностей, зазначаючи, що ключові компетентності уможливають ефективно вирішення типових та нетипових проблем [5]. Вона розглядає ключові компетентності як здатність особистості реалізувати складні багатофункційні, міжпредметні та культуродоцільні види трансформаційної діяльності.

Саме завдяки компетентнісному підходу до навчання ми можемо формувати в учнів необхідні якості для успішного життя. На сьогоднішній день компетентнісний підхід є одним із напрямків оновлення системи базової та повної середньої освіти, що впливає із Законів України «Про освіту» [18], «Про загальну середню освіту» [19], Національної доктрини розвитку освіти [32], державного стандарту базової та повної загальної середньої освіти [16]. Передбачається, що на основі оновленого змісту загальної освіти закладено формування і розвиток ключових компетентностей учнів. Нормативні документи, що регулюють діяльність освітніх закладів і покращують її якість, кінцевим призначеною є формування життєвих компетенцій в учнів.

Компетентнісно-орієнтована освіта спрямована на комплексне освоєння знань і способів практичної діяльності, що забезпечує успішне функціонування людини в ключових сферах життєдіяльності у її інтересах,

так і інтересах суспільства, держави. Основні результати загальної освіти в рамках компетентнісного підходу фіксуються через набір ключових (базових) освітніх компетентностей, які дають основний орієнтир вибору предметного змісту та умов організації основних видів діяльності учня, що йому вдалося опанувати соціальний досвід, отримувати навички життя і практичної діяльності в сучасному суспільстві.

Ключові компетентності охоплюють широкий спектр знань, умінь і навичок. До них належать: здатність до самонавчання, ефективна комунікація державною, рідною та іноземними мовами, міцні знання з математики, природничих наук і техніки, вміння працювати з інформацією та використовувати сучасні технології, соціальні навички, розуміння своїх прав і обов'язків як громадянина, знання культурного надбання та вміння дбати про власне здоров'я.

Окрім ключових компетентностей, спільних для всіх предметних областей, виділяються і предметні компетенції – це специфічні здібності, необхідні для ефективного виконання конкретної дії в конкретній предметній області і які включають вузькоспеціальні знання, особливого роду предметні вміння, навички, способи мислення. Зокрема, математична компетенція - це здібність структурувати дані (ситуацію), виокремлювати математичні відношення, створювати математичну модель ситуації, аналізувати та перетворювати її, інтерпретувати отримані результати. Математична компетентність учня є важливою для ефективного вирішення задач, які виявляються у повсюдному житті, що підкреслює необхідність розвитку математичних навичок.

Поняття «математична компетентність» є предметом досліджень українських науковців (М. Бурда [9], Д. Васильєва [10], М. Головань [14], Г. Гоменюк, І. Зіненко [21], О. Онопрієнко [35], С. Раков [43], Р. Романишин, І. Сафонова [60], С. Скворцова [61], Н. Тарасенкова [49] та ін.). Міжнародний досвід у вивченні математичної компетентності включає аналіз робіт таких вчених, як Т.Дженсен [53], Д. Кілпатрік [52], Йо.Літнер [54],

М. Нісс [53], які присвятили свої дослідження цій темі, та відображає різні підходи, тенденції у вивченні математичної компетентності.

Вчені Д. Кілпатрік [52], М. Нісс [53] визначають математичну компетентність як ключову, і як предметну Т. Дженсен [52],

Д. Кілпатрік [52], М. Нісс [53] та ін.) розглядають математичну компетентність учнів переважно як ключову.

М. Нісс [53] Розуміє математична компетентність як здатність розуміти математичні поняття, судити про їхню доречність у конкретних ситуаціях, виконувати математичні дії та ефективно використовувати математичні знання для аналізу реальних проблем та прийняття обґрунтованих рішень.

Команда вчених з М. Нісс [53] зазначають, що зміст математичної компетентності формують дві групи компонентів. Перша група компонентів математичної компетентності пов'язана зі здатністю ставити запитання й відповідати на них за допомогою математики. До них належать: математичне мислення (оволодіння математичним способом мислення); формулювання й розв'язування математичних задач; математичне моделювання (тобто аналіз і побудова моделі); математичне обґрунтування (розробка формальних і неформальних математичних доказів), тобто доведення тверджень. Друга група компонентів математичної компетентності стосується вміння ефективно використовувати математичні інструменти та символи для розв'язання задач. До них належать: представлення математичної сутності (об'єкти й ситуації); оперування математичними символами й формальними системами; спілкування в математиці, із нею та про неї; використання засобів та інструментів (зокрема ІТ) [53].

Інша група вчених, очолена Йо. Літнером, бере до уваги результати М. Нісса, погоджується з його дефініцією математичної компетентності, однак виділяє шість інших компонентів математичної компетентності (рис.1.1).

Дослідження «PISA» («Programme for International Student Assessment») [55] визначає математичну компетентність учнів як об'єднання математичних знань, умінь, досвіду та навичок людини, які забезпечують успішне розв'язання різноманітних задач із застосуванням математики.



Рис. 1. Компоненти математичної компетентності (Йо. Літнером [54])

Р.Тюрнер, очолюючи проект PISA, виділяє шість основних компонентів математичної компетентності:

- **Комунікація:** здатність розуміти та пояснювати математичні ідеї як самому собі, так і іншим.
- **Математизація:** вміння перекладати реальні ситуації на математичну мову та встановлювати зв'язки між математичними об'єктами та реальністю.
- **Інтерпретація:** здатність представляти математичні поняття за допомогою різних засобів (рівняння, графіки, таблиці тощо) та розуміти їхній зміст.
- **Обґрунтування:** вміння будувати логічні докази та аргументувати свої висновки.
- **Стратегічне мислення:** здатність вибирати найбільш ефективні стратегії для розв'язання математичних задач.

- **Використання математичних символів:** вміння оперувати математичними символами та знаками.

Розглядаючи складові математичної компетентності за Йо. Літнером і фундаментальної математичної компетентності за Р. Тюрнером, доходимо висновку, що спільними рисами є заміна реально існуючих об'єктів математичними; розуміння і вироблення стратегії розв'язування задач: надання інформації математичною мовою та розуміння математичних символів.

Компетентнісний підхід вченими визначається як спрямованість освітнього процесу на формування і розвиток ключових (базових) і предметних компетентностей. Розробка засобів реалізації компетентнісного підходу, дослідження проблем його впровадження в практику загальноосвітньої школи, технологізація цього процесу перебуває в центрі наукових педагогічних досліджень багатьох українських вчених (М. Бурда [5], Д. Васильєва [10], М. Головань [13], Г. Гоменюк [15], І. Зіненко [21], О. Онопрієнко [35], С. Раков [40], І. Сафонова [60], С. Скворцова [61], Н. Тарасенкова [49] та інші).

Вони виділяють ключові, загальногалузеві та предметні компетентності, зокрема, математичну компетентність учнів. Науковці розглядають математичну компетентність як вміння бачити та використовувати математику в реальному житті, вміти будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати. Математична компетентність є однією з 10 ключових компетентностей Нової української школи. Відповідно до концепції Нової української школи учні повинні набути вміння використовувати математичні методи для вирішення прикладних завдань у різних сферах діяльності, здатність до розуміння і використання простих математичних моделей та вміння будувати такі моделі для вирішення задач. Математична компетентність відповідно до галузевої та предметної компетентності, серед її складових виділена процедурна, логічна, технологічна, дослідницька та

методологічна компетентність. Оволодіння учнями складниками предметної математичної компетентності є ключовим етапом у формуванні їхньої математичної компетентності. Вміння логічно мислити, аналізувати та обґрунтовувати математичні теорії є успішним.

М. Бурда зазначає, що математична компетентність — це не просто сума знань, а взаємозв'язок між теорією та практикою. Тобто, для того, щоб учень був математично компетентним, він повинен не лише знати математичні факти, але й вміти застосовувати ці знання на практиці, у різних навчальних ситуаціях. При цьому, не всі знання автоматично перетворюються на компетентність, а лише ті, які активно використовуються учнем [9].

На думку І. Зіненко [21], математична компетентність – це якість особистості, яка компенсує математичну грамотність та досвід самостійної математичної діяльності.

Виділяють три основних рівня математичної компетентності: рівень відтворення, рівень встановлення, рівень міркувань (рис. 1.2.)

Г. Гоменюк визначає предметну математичну компетентність як «якість особистості, що формується й розвивається в процесі навчання математики в загальноосвітній школі, за рахунок усвідомленої потреби в математичних знаннях, розуміння їхньої цінності для розвитку людського суспільства й кожного учня зокрема; мотивацію до провадження навчальної математичної діяльності; математичні знання, уміння, навички, нормативно регламентовані навчальну програму з математики; досвід самостійної математичної діяльності; здатність до самоконтролю самооцінювання в процесі навчальної математичної діяльності; готовність успішно розв'язувати задачі та завдання в навчальних й життєвих ситуаціях, що потребують математичних знань і методів пізнання» [15].

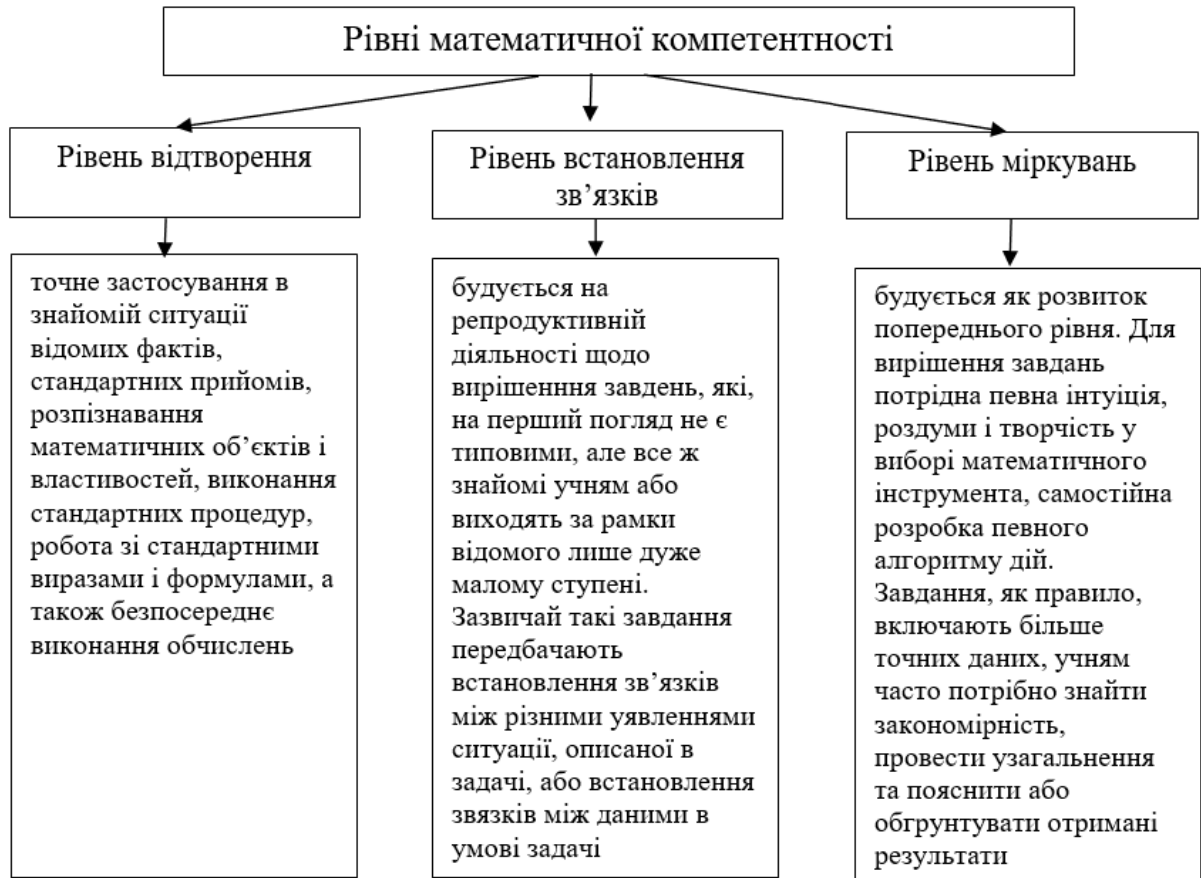


Рис. 1.2. Рівні математичної компетентності [42].

За словами О. Онопрієнко, математична компетентність – це комплексний набір умінь, який дозволяє класифікувати інформацію, встановлювати математичні зв'язки між різними елементами, будувати математичні моделі реальних ситуацій та аналізувати отримані результати. Саме ця компетентність є ключовою для успішного вирішення повсякденних життєвих задач і сприяє розвитку інших важливих умінь [35].

Н. Тарасенкова зазначає, що «математична компетентність як ключова безпосередньо пов'язана з головною загальнокультурною здатністю людини – спроможністю доказово й несуперечливо міркувати. Саме під час навчання математики ця спроможність людини розвивається найбільш інтенсивно та ефективно» [49].

С. Раков [43], під математичною компетентністю розуміє вміння убачати й використовувати математику в реальному житті, усвідомлювати

зміст та метод математичного моделювання, вміння вибудувати математичну модель, вивчати її математичними методами, трактувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. В своїй монографії «Математична освіта: компетентністний підхід з використанням ІКТ» [43], визначає, що математична компетентність поєднує в собі як галузеві так і предметні компетентності разом. (рис.1.3.)

С. Скворцова [61] виділяє три основні компоненти математичної компетентності:

– Професійно-діяльнісний: включає в себе знання математичних методів та вміння застосовувати їх у професійній діяльності, а також здатність працювати з математичною інформацією.

– Комунікативний: передбачає володіння математичною термінологією та вміння ефективно передавати математичну інформацію.

– Особистісний: пов'язаний із прагненням до самовдосконалення та використання нових математичних методів.

Таким чином, всі три компоненти математичної компетентності взаємодіють та доповнюють один одного. Розвиток одного компоненту сприяє розвитку інших, а відсутність або недостатній розвиток одного з компонентів може негативно вплинути на загальний рівень математичної компетентності.

Завдання реалізації компетентнісного підходу у навчанні математики в основній школі включають розвиток усвідомлення математики як універсальної мови, формування логічного і критичного мислення, оволодіння математичною символікою та формулами, а також здатність до аргументованого висловлення суджень. Учні повинні навчитися використовувати математичні методики для розв'язання завдань, працювати з підручниками, критично оцінювати інформацію та приймати рішення в умовах неповної чи надлишкової інформації, що забезпечує їх готовність до використання математики в навчанні інших предметів і в особистому житті.



Рис. 1.3. Складові математичної компетентності за С. Раковим [43].

Отже, математична компетентність відіграє важливу роль у формуванні загальної культурної здатності людини, зокрема спроможності доказово й несуперечливо міркувати. Існує безперечний взаємозв'язок між розвиненням математичних навичок та здатністю до критичного аналізу, умінням робити обґрунтовані висновки. Дослідження підтверджують, що розвиток математичної компетентності сприяє не лише особистісному росту, але й підвищує загальний культурний рівень особистості. Таким чином, високий рівень математичної компетентності необхідний для формування повноцінної загальної культурної здатності людини.

Тільки особистість, у якої в сучасній школі сформовані всі життєві компетентності, зможе успішно самореалізуватися в соціумі як свідомий громадянин, відповідальний сім'янин, висококомпетентний професіонал, матиме здатність захищати свої життєві та професійні цінності.

1.2. Сутність задачного підходу у процесі формування математичної компетентності старшокласників

Математика, як одна з найважливіших шкільних дисциплін, відіграє ключову роль у цьому процесі. Вивчаючи математику, учні розвивають логічне мислення, аналітичні здібності та вміння вирішувати проблеми. Ці навички є незамінними не тільки для подальшого навчання, але й для успішної професійної діяльності та повсякденного життя.

В навчанні математики задачі – це не просто інструмент, а й мета навчання. Вони є рушійною силою, яка спонукає учнів до активної пізнавальної діяльності, до пошуку нових знань і способів їх застосування. Через розв'язання задач учні не тільки закріплюють теоретичний матеріал, а й розвивають свої творчі здібності, критичне мислення та вміння самостійно приймати рішення.

Термін «задача» використовується в житті і науці дуже широко і має багато різних значень. У різних наукових дисциплінах воно набуває

специфічних відтінків. Так, у психології задача розглядається як активний процес, спрямований на досягнення конкретної мети за допомогою певних когнітивних операцій. Філософи, у свою чергу, підкреслюють системний характер задач, акцентуючи на їхній цілісності та взаємозв'язку з ширшим контекстом. Математики ж традиційно аналізують задачі через призму їхньої внутрішньої структури, виокремлюючи такі компоненти як умови, вимога та розв'язок. Деякі представники цієї науки пропонують ще більш широке тлумачення поняття "задача", ототожнюючи його з пошуком областей істинності, що надає йому логіко-гносеологічного виміру.

Організація навчального процесу з математики на профільному рівні полягає в поглибленому вивченні предмету старшокласниками. Це включає застосування спеціальних навчальних програм, методичного забезпечення та інноваційних технологій для підвищення рівня математичної компетентності учнів. Сутність задачного підходу полягає в адаптації навчального процесу до потреб обдарованих учнів, використанні додаткових матеріалів і завдань, а також організації груп з поглибленим вивченням математики, це є складовими успішної реалізації профільного навчання.

Задачний підхід має прямий вплив на формування математичних навичок і вмінь. Це допомагає учням розвивати навички розв'язування реальних проблем, аналізувати математичні ситуації, робити висновки та використовувати математичні знання в різних сферах. Задачний підхід сприяє підвищенню рівня математичної грамотності учнів та їх здатності застосовувати математичні знання в різних областях життя.

Задачний підхід, це метод вирішення проблеми або досягнення мети шляхом розбиття її на окремі задачі, які потребують вирішення. Цей підхід передбачає аналіз проблеми, ідентифікацію основних завдань та розробку стратегії для їх вирішення. Кожна задача може бути детально розглянута та вирішена окремо, що дозволяє зосередитися на конкретних аспектах проблеми та забезпечити ефективне управління процесом досягнення мети.

Задача є об'єктом і засобом вивчення математики. Виділяють чотири основні функції задач – навчальна, розвивальна, виховна і контролююча[.]

Навчальна функція завдань реалізується через формування системи математичних знань учнів: вони вчаться застосовувати свої теоретичні знання та усвідомлюють необхідність опанування нових знань.

Розвивальна функція спрямована на формування в учнів правильного виконання розумових дій, вдосконалення прийомів розумової діяльності, просторового уявлення, алгоритмічного мислення, уміння моделювати тощо.

Виховна функція реалізується через сюжет задачі, сприяючи екологічному, економічному та естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, формує наполегливість, відповідальність та інші важливі риси характеру.

Контролююча відповідає за встановлення рівня знань учня відповідному рівню очікуваних результатів навчання.

Всі функції задач тісно взаємопов'язані і доповнюють одна одну. Кожна з них відіграє важливу роль у навчанні математики. Однак, сучасна педагогіка надає особливого значення розвитку мислення учнів, тому розвивальна функція задач вважається однією з найважливіших. Не випадково Д. Пойа, Е. Резерфорд, Н. Бор, А. Ейнштейн, П.Л.Капіца та інші зазначали, що задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, а тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються.

Залежно від вимог поділ задач на види може здійснюватися різними шляхами, залежно від того, що взяти за основу поділу. Відповідно до поставленої вимоги в задачі, розділяють задачі: на обчислення, доведення, побудову і дослідження. Розглянемо докладніше загальні алгоритми розв'язування кожного виду завдань.

Задачі на обчислення. Під задачею на обчислення зазвичай розуміють таку задачу, де необхідно знайти певні числові дані про геометричну фігуру. «Задача на обчислення характеризується вимогою встановити дані про

невідомий елемент геометричної фігури за допомогою суто геометричних викладок з використанням алгебраїчних залежностей» [2].

Загальний алгоритм розв'язування таких задач можна сформулювати так:

- 1) зробити схематичний малюнок;
- 2) позначити невідомих величин через символ x ;
- 3) виразити через x невідомі величини;
- 4) записати і розв'язати рівняння;
- 5) записати і перевірити відповідь [2].

Задачі на доведення. Задача на доведення в геометрії характеризується вимогою обґрунтувати певне математичне твердження, сформульоване в її умові [2]. Вирішення геометричної задачі шляхом доведення висновку, що базується на аксіомах та раніше доведених теоремах. Існує два типи геометричних задач на доведення.

а) такі, що базуються на припущенні про існування описаних геометричних фігур;

б) такі, де потрібно довести, що фігура, про яку йдеться, взагалі може бути.

Загальний алгоритм розв'язування задачі на доведення:

1. Зробити схематичний малюнок.
2. Сформулювати коротку умову задачі та визначити, які аспекти потрібно довести для її розв'язання.
3. Використовуючи аксіоми та теореми, довести правильність твердження.

Задачі на побудову. Різновид задач, у яких розв'язком виступає побудована геометрична фігура. Розв'язування геометричної задачі на побудову відбувається за схемою, що включає чотири основні етапи. Ця структура дозволяє систематично підходити до вирішення задачі, запускаючи процес і забезпечуючи логічну послідовність дій:

- 1) аналіз;

- 2) побудова;
- 3) доведення;
- 4) дослідження» [2].

Метою цих задач є навчити учнів будувати фігури за допомогою канцелярських інструментів, що задовольняє умову задачі.

Задачі на дослідження. Під задачею на дослідження мається на увазі задача, що передбачає необхідність порівняння, перевірки умов або пошуку якихось аспектів. Такі задачі, як правило, містять запитання: «Чи можна..?», «Як зміниться..?», «Чи правильно..?» тощо [2].

Для розв'язання такого типу задач можуть використовуватися попередньо розглянуті алгоритми. Тобто задачі на дослідження можуть бути зведені до задач на обчислення або на доведення.

У процесі навчання виділяють три *основні функції*: дидактичні, пізнавальні та розвиваючі задачі, які сприяють різним аспектам навчального процесу. Задачі з дидактичною функцією слугують для того, щоб підготувати учнів до сприйняття нового матеріалу, а також закріпити вже вивчене, застосовуючи теоретичні знання на практиці. Задачі з пізнавальними функціями сприяють відпрацюванню та поглибленню основного змісту математичної дисципліни. Задачі з розвиваючими функціями вимагають знань і вмінь, які не є частиною стандартної програми, що робить їх складними та цікавими для навчання.

В залежності від готового способу розв'язання розрізняють:

- а. Алгоритмічні («стандартні задачі»).
- б. Напівалгоритмічні.
- в. Евристичні («творча задача», «нестандартна задача»).

Алгоритмічними є такі задачі, для розв'язання яких в навчальному матеріалі курсу математики вже виведені готові формули, відомі загальні правила та положення або алгоритми їх розв'язання. Так в шкільному курсі математики передбачено розв'язання багатьох типових стандартних задач, які входять в основу математичних знань та умінь (дії з цілими та дробовими

числами, основні види тотожних перетворень виразів, основні типи рівнянь, нерівностей та їх систем).

Евристичні, нестандартні задачі зазвичай не передбачають готового алгоритму, шляху міркувань по її розв'язанню. Такі задачі передбачають самостійного формулювання принципу її розв'язання в ході аналізу завдання на основі наявних знань і накопиченого досвіду. Як правило, такі задачі можна розбити на декілька стандартних під задач, послідовне виконання яких приведе до розв'язання даної евристичної задачі. Тому корисно навчати учнів правилам виконання окремих видів розумових дій, алгоритмам, правилам-орієнтирам, евристичним схемам основних видів задач.

Розв'язати задачу для всіх вище зазначених видів математичних задач (крім задач на доведення) означає знайти її розв'язок. Розв'язок є кінцевим результатом процесу розв'язування задачі. Опис процесу розв'язування у вигляді послідовності міркувань, зокрема подане в символічній формі, називають розв'язанням задачі [40]. Тому при письмовому оформленні процес пошуку розв'язку робиться під рубрикою «Розв'язання».

Процес розв'язування задачі визначається важливою розумовою діяльністю, яку вивчає психологія та аналізує методика математики. Підкреслюється значимість наявності чітких виявлень про структуру завдання для досягнення успіху в її розв'язанні. Відомо, що в кожній задачі є умова (умови) і вимога (вимоги). Слід також зазначити, що процес розв'язування математичних задач являє собою складний багатогранний процес, який складається з таких етапів:

1. Аналіз формулювання задачі включає в себе визначення даних та того, що необхідно знайти, довести або дослідити.
2. Пошук плану розв'язання.
3. Здійснення плану, перевірка і дослідження знайденого розв'язку, тобто доведення того, що знайдений розв'язок задовольняє вимогам задачі.

4. Аналіз знайденого способу розв'язування зосереджується на його раціональності та можливості використання альтернативних методів для вирішення поставленої задачі.

Створення сприятливих умов для розвитку розумової активності та самостійності учнів можливо через навчально-пізнавальну діяльність, зокрема під час розв'язування завдань. Практика свідчить, що застосування теоретичних знань викликає в учнів не менші, а інколи і більші труднощі, ніж їх теоретичне усвідомлення.

У процесі розв'язування задач відбувається засвоєння способів діяльності, що сприяє формуванню навичок і умінь, здобуттю нових знань і їх поглибленню. Будь-який спосіб діяльності, щоб стати навичкою чи умінням, повинен неодноразово повторюватися. Набуття навичок вимагає спочатку одноманітного повторення, а потім варіативного, що включає їх застосування в різних ситуаціях. З цієї точки зору не виправдали себе поради математиків-теоретиків 60-70-х років ХХ століття, тобто за часів переходу до нового змісту навчання: не включати в шкільні підручники і задачники однотипні вправи і задачі, а вчити учнів загального підходу до розв'язування будь-якої задачі. Практика навчання математики в школі підтвердила потребу в тому і іншому. Знання є основою для розвитку навичок і вмінь, проте просто володіти знаннями недостатньо для їх застосування на практиці.

Все це свідчить про необхідність подальшого вдосконалення методики навчання учнів розв'язувати задачі, пошуків ефективних засобів активізації їх самостійної навчально-пізнавальної діяльності. В цьому аспекті надзвичайно важливим виявляється вдалий підбір системи задач, що залежить від загального підходу до самого процесу розв'язування.

Перший методичний підхід зводиться до розв'язування задач на базі спеціально реорганізованого теоретичного матеріалу шляхом виділення операційної основи теоретичних знань; складання різних схем, картотек понять, які полегшують вибір необхідних теоретичних фактів.

Другий методичний підхід передбачає навчання розв'язування задач шляхом зведення їх до підзадач. Тобто складення за різними темами курсу певної групи під задач, які називаються базовими, опорними, і формування прийому їх використання, самостійно шукаючи розв'язання. Такі задачі є допоміжними, оскільки в них пропонується той самий метод, що і для розв'язування більш складної, або використовується її результат, або ці задачі виступають однією частин складної задачі. За такого підходу підзадачі перетворюються в теоретичні чинники і учні змушені їх запам'ятати. Прийоми використання підзадач формуються в процесі роботи, оскільки нову задачу учні розв'язують, підбираючи підзадачі, які вставляються в розв'язання нової як готові блоки.

Навчання математики, а від так формування вмінь розв'язувати задачі здійснюється шляхом виконання різних навчальних завдань. У процесі розв'язування учнями задач реалізуються цілі навчання за такими напрямками:

- здобуття і вдосконалення математичних знань;
- формування математичних вмінь;
- розвиток творчого і логічного мислення.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури показує, що вміння розв'язувати задачі вчені визначають як складне вміння проводити первинний аналіз тексту (уявити задачну ситуацію), виділити умову і вимогу, відоме й невідоме, шукані величини, конструювати простіші моделі задачної ситуації, перекладати залежності між шуканими і даними величинами з мови словесної на математичну.

Важливого значення для розв'язування задач у навчальному процесі набуває ретельний добір навчальних завдань, які мають відповідати певним загально-методичним вимогам:

- **Забезпечення засвоєння програмного матеріалу.** Ця вимога підкреслює основну мету навчання математики – формування міцних знань і вмінь розв'язувати різноманітні задачі. Учитель повинен забезпечувати

засвоєння учнями програмного матеріалу з математики, формувати в них знання про задачу, її склад і процес розв'язування, а також вчити використовувати набуті знання в різних ситуаціях. Це включає в себе ретельний вибір завдань, які сприяють розумінню та усвідомленню учнями математичних концепцій, розвитку навичок розв'язування задач, а також їх вміння застосовувати отримані знання в різних життєвих ситуаціях. Важливо, щоб завдання відповідали вимогам програми, містили числові дані, які відповідають програмовим вимогам, і допомагали учням засвоювати матеріал і розвивати свої навички в математиці.

- **Відповідність змісту завдань темі уроку та меті вивчення матеріалу.** Ця вимога гарантує логічну послідовність навчального процесу та ефективне досягнення поставлених цілей. Вона включає в себе ретельний вибір завдань, які сприяють розумінню та усвідомленню учнями математичних концепцій, розвитку навичок розв'язування задач, а також їх вміння застосовувати отримані знання в різних життєвих ситуаціях. Важливо, щоб завдання відповідали вимогам програми, містили числові дані, які відповідають програмовим вимогам, і допомагали учням засвоювати матеріал і розвивати свої навички в математиці.
- **Послідовність застосування вправ.** Підкреслюється важливість систематичного тренування для закріплення знань і формування навичок. Важливо, щоб завдання були побудовані таким чином, щоб учні могли логічно поєднувати теоретичні знання з їх практичним використанням у розв'язанні конкретних завдань. Це сприятиме глибокому розумінню матеріалу і активізації пізнавальної діяльності учнів. Крім того, вправи повинні стимулювати творчий підхід учнів до вирішення завдань, сприяючи розвитку їхніх логічних та аналітичних здібностей.
- **Автоматизація елементарних дій.** Ця вимога передбачає включення вправ, які спрямовані на розвиток швидкості та точності у виконанні математичних операцій. Такий підхід допомагає учням засвоїти необхідні навички, щоб вони могли використовувати їх автоматично, без

додаткових зусиль. Для цього важливо обирати завдання, які передбачають повторення елементарних арифметичних операцій, різних варіацій обчислень та вирішення задач з використанням цих операцій. Такий підхід сприяє формуванню у школярів навичок швидкого та точного розв'язування завдань без додаткових помилок

- **Створення умов для узагальнення способів діяльності.** Ця вимога розвиває в учнів гнучкість мислення та здатність застосовувати знання в нових ситуаціях. Це означає, що завдання повинні передбачати можливість використання отриманих знань у різних ситуаціях та сприяти свідомому засвоєнню теоретичних знань та розвитку розумової й творчої діяльності учнів. Крім того, вони повинні відповідати логіці та послідовності формування певних вмінь. Такий ретельний добір завдань сприяє ефективному навчанню учнів та допомагає досягти поставлених педагогічних цілей.
- **Індивідуалізація навчання.** Ця вимога враховує різні темпи і стилі навчання учнів, що сприяє підвищенню мотивації та ефективності навчання. Це означає, що кількість завдань повинна бути достатньою для формування певного вміння або навички учня. Важливо враховувати темп навчання, рівень підготовки та індивідуальні особливості кожного учня. Такий ретельний добір кількості вправ допоможе забезпечити ефективне формування навичок і знань учнів, сприяючи їхньому успішному навчанню.
- **Наявність труднощів у завданнях.** Ця вимога стимулює пізнавальну активність учнів і дозволяє вчителю своєчасно виявити і усунути прогалини в їхніх знаннях. Це дозволяє вчителю постійно стежити за точністю виконання вправ, результатами роботи, успіхами і недоліками школярів. Завдання повинні бути достатньо складними, щоб стимулювати учнів до активної роботи, а водночас не настільки складними, щоб призвести до відчуття невдачі. Вони також повинні бути різнорівневими,

щоб враховувати індивідуальні особливості школярів і забезпечувати їхній поступовий успіх у навчанні [23].

Отже, основними критеріями ефективного навчання учнів розв'язувати задачі є такі [24]:

- Ретельний добір вчителем системи задач.
- Цілеспрямованість розв'язування задач.
- Диференційованість системи задач.
- Засвоєння учнями правил-орієнтирів методів і способів розв'язування певних видів задач.
- Націлення здібних і обдарованих учнів на розв'язування нестандартних задач.
- Виділення видів задач, які розв'язуються певним способом.
- Прогнозування, встановлення і використання аналогій у розв'язування задач.
- Органічний взаємозв'язок пояснення вчителя на уроці щодо методів і способів розв'язування задач з фронтальною, груповою, індивідуальною і самостійною роботою в класі і під час виконання домашніх завдань.
- Навчання учнів різних прийомів самоконтролю і взаємоконтролю при розв'язуванні задач [24].

Варто зазначити, що системи задач, що мають високий рівень структурної організації, є не тільки ефективним засобом цілеспрямованого математичного розвитку учнів, а й засобом формування і розвитку їх пізнавальної самостійності, активності, інтересу, світогляду й інших якостей всебічно розвиненої особистості.

Загальним для систем задач, спрямованих на засвоєння учнями понять, теорем і правил, є наявність в них задач, що готують введення відповідного елемента теоретичних знань, пов'язаних з його аналізом (побудовою), з його застосуванням. Серед підготовчих задач, звичайно, виділяються задачі на мотивацію вивчення понять, теорем, правил і задачі на актуалізацію знань, умінь і навичок, необхідних при роботі з новим навчальним матеріалом [24]

Система завдань на засвоєння поняття повинна включати:

1. Завдання, що демонструють практичну значущість нового поняття або його важливість для подальшого вивчення математики.
2. Завдання, що сприяють актуалізації знань і вмінь, основний для формування цього поняття.
3. Завдання, спрямовані на виділення істотних ознак.
4. Завдання для розпізнавання сформованого поняття.
5. Завдання на закріплення формулювання означення поняття.
6. Завдання, що включає використання символіки, пов'язаної з поняттями.
7. Завдання для визначення властивостей поняття.
8. Завдання для застосування поняття на практиці.

Відомо, що не завжди робота з поняттями вимагає формулювання їх позначення. У разі такого завдання на засвоєння змісту визначення в системі відсутнє. Особливості завдань системи для створення правил (алгоритмів) та теорем і їх доведення наведені в додатках. (Додаток А).

Завдяки різноманітним математичним задачам, учні можуть виявити свої сильні сторони, розвинути творчий потенціал та навчитися застосовувати отримані знання на практиці. Це робить навчання математики не лише корисним, а й захопливим процесом. Багато відомих вчених підкреслювали, що в математиці задачі виконують ключову роль. Не варто чітко розмежовувати вивчення теорії та розв'язування задач, останні ці дві складові повинні взаємодіяти і доповнювати одну одну. На уроках математики навчальний процес раніше йде від завдань до теорії, а потім знову повертається до завдань:

Задачі → теорія → задачі.

Перехід від задач до теорії, а потім з теорії до задач, відображає проблему ускладнення на етапі мотивації для вивчення теорії, тоді як перехід від теорії до задач ілюструє її практичне застосування [3]. Я вважаю, що саме на прикладі завдань варто підводити учнів до усвідомлення важливості вивчення теорії. Перехід від задач до теорії сприяє формуванню мотивації,

тоді як зворотний перехід, від теорії до задач, показує можливості практичного застосування отриманих знань.

Одним з засобів досягнення високого рівня творчої діяльності учнів є розв'язання геометричних задач. Відомо що «мистецтво розв'язувати геометричні задачі чимось нагадує трюки ілюзійоністів – іноді, навіть знаючи розв'язування задачі, важко зрозуміти, як можна було до нього додуматися» [43]. Цілком зрозуміло, що цьому мистецтву треба учнів навчити.

Геометричні задачі можна класифікувати по-різному, залежно від того, що покладено в основу класифікації. Розрізняють задачі за: а) вимогами сформульованими в їх умовах; б) кількістю даних вхідної інформації; в) методичним призначенням; г) кількістю розв'язків.

Д. О. Терешин [50] формулює необхідні передумови успішної реалізації задачного підходу під час вивчення геометрії:

- 1) уміння правильно і швидко виконувати рисунок до задачі;
- 2) оперування різними методами розв'язування задач;
- 3) деякий запас опорних задач, який дозволяє здійснити перехід від

теоретичного матеріалу до задачного.

Задачний підхід до навчання, у нашому розумінні, передбачає введення в зміст навчальної інформації таких завдань, які активізують мислинневі процеси учнів, закріплюють у них уміння оперувати теоретичними знаннями в практичних ситуаціях і представлені у такому вигляді:

- тренувальні вправи на засвоєння понять, правил та алгоритмів;
- пізнавальні задачі;
- творчі (евристичні) задачі.

Крім того на специфіку задачного підходу до навчання впливає різний рівень готовності учнів до навчання математики.

Розв'язання задач у загальноосвітній школі вимагає створення таких методичних систем, які б максимально враховували індивідуальні особливості кожного учня. Об'єктивною реальністю, яка зумовлює цю необхідність, є різний степінь готовності учнів до вивчення математики, їх

здібності. Відмінності виявляються насамперед у різному темпі оволодіння навчальним матеріалом, тобто у різній кількості сприймань нової математичної інформації, необхідної для засвоєння, або кількості вправ, необхідних для вироблення вмінь розв'язувати певну типову задачу. Тож виділення рівнів підготовки має здійснюватися за рівнем складності задач. Розрізняють базовий, достатній і високий рівні.

Базовий рівень закладає фундамент для подальшого вивчення математики. Він передбачає засвоєння основних понять, формул та алгоритмів, які є необхідними для розв'язання типових задач. Цей рівень забезпечує учневі міцні знання, які є основою для подальшого розвитку.

Складовими базового змісту є:

1. базові елементи теорії (означення, основні властивості, формули, які учень повинен на основі початкового розуміння міцно запам'ятати);
2. базові навички – дії за елементами теорії, виконання яких повинно бути доведено до автоматизованого;
3. базові уміння – уміння виконувати основні системи дій за елементами теорії;
4. уміння застосовувати базові навички і уміння в основних типових ситуаціях.

Достатній рівень передбачає глибше розуміння матеріалу та вміння застосовувати його в більш складних ситуаціях. Учні на цьому рівні вже можуть доводити теореми, аналізувати задачі та розробляти власні алгоритми розв'язання.

Основними характеристиками достатнього рівня є:

1. уміння учня відтворювати доведення теорем базового змісту і застосовувати його в стандартних ситуаціях на основі нескладного аналізу і складання плану послідовності алгоритмічних дій або розв'язування алгоритмічних задач підвищеної складності;
2. уміння застосовувати базовий зміст на основі міркувань у дещо змінених умовах;

3. уміння здійснювати «перенос» знань на раніше засвоєні теми, на основі відомих методів доведення теорем.

Високий рівень засвоєння – це здійснення діяльності достатнього рівня на більш високому ступені складності, а також застосування змісту теми в нестандартних по відношенню до базового змісту ситуаціях. Застосування знань в таких ситуаціях спирається на інтуїцію, здогад, аналогію, індукцію в поєднанні з дедукцією – логічними міркуваннями.

Характеристика рівнів навчальної підготовки представлена у додатку В. Кожен бал рівня є показником якісно більш високого ступеня оволодіння рівнем, він передбачає поступове ускладнення умінь в порівнянні з попередніми, «приріст» нових видів діяльностей, якими оволодіває учень на певному рівні. На середньому рівні це переважно операційне ускладнення дій, розширення класу об'єктів, з якими виконується дія що вивчається. На достатньому рівні – це «приріст» видів діяльності. Як рівні в цілому, так і степені, є ієрархічними: кожен наступний степінь включає в себе тим чи іншим чином досягнення попередніх.

Висновки до розділу I

Деякі теорії стверджують, що весь наш світ можна розглядати як величезну сукупність задач, а будь-яка дія людини – як процес пошуку розв'язків цих задач. Тобто, ми живемо в світі задач, і все, що ми робимо, – це шукаємо способи їх вирішення.

У процесі вивчення математики задачі відіграють велику і різноманітну роль. Розв'язування задач добре служить досягненню таких цілей, які ставляться перед навчанням математики в школі. Більше половини уроків побудовано таким чином, щоб учні могли самостійно досліджувати математичні явища та формувати власні висновки. Розв'язуючи задачі, учні застосовують найважливіші математичні поняття, оволодівають математичною символікою, навчаються виконувати доведення. Крім того,

математичні задачі можуть підготувати учнів до вирішення нових теоретичних питань, сприяти збереженню набутих знань і показати реальне застосування того, що вони вивчають. У процесі розв'язування задач в учнів розвиваються не тільки навички розумової праці, а й такі важливі якості особистості, як терпіння, уважність і зосередженість.

Історія розвитку математики свідчить про те, що математика як наука виникла з задач, розвивається через розв'язання задач і існує заради подальшого їх розв'язання. Аналіз літератури свідчить, що в психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб'єкта, як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, у якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта.

Розв'язання задач в шкільному курсі математики передбачає реалізацію двох основних цілей:

1. Навчати розв'язувати математичні задачі;
2. Навчати математики через розв'язування задач.

Виходячи з того, що задачі – це мета і засіб навчання математики, зосередимо увагу на функціях задач у процесі навчання, а саме: дидактична, пізнавальна, розвиваюча. Так задачі з дидактичними функціями використовуються для підготовки учнів і введення, а також закріплення навчального матеріалу; задачі з пізнавальними функціями мають мету відпрацювати та поглибити основний зміст знань з математичної дисципліни; розв'язування задач з розвиваючими функціями потребує певних знань і умінь, що явно не передбачені програмою.

В залежності від готового способу розв'язання розрізняють:

- а. Алгоритмічні («стандартні задачі»).
- б. Напівалгоритмічні.
- в. Евристичні («творча задача», «нестандартна задача»).

У процесі розв'язування учнями задач цілі навчання реалізуються за такими напрямками:

- здобуття і вдосконалення математичних знань;
- формування математичних вмінь;
- розвиток творчого і логічного мислення.

Аналіз літератури показує, що процес формування уміння розв'язувати задачі має відповідати певним загально-методичним вимогам і підпорядковуватись основним критеріям ефективного навчання учнів розв'язувати задачі.

Одним із таких критеріїв ми виділяємо добір учнями системи задач, що мають високий рівень структурної організації.

Для реалізації задачного підходу необхідно враховувати особливості компетентнісного навчання, яке складається з таких рівнів: базовий (передбачає оволодіння мінімальною кількістю знань, умінь і навичок, необхідних для подальшого вивчення математики, суміжних предметів і застосувань у практичній діяльності, та достатній для оволодіння на більш високих рівнях), достатній (передбачає оволодіння уміннями застосовувати базовий зміст на основі міркувань у дещо змінених умовах, здійснювати «перенос» знань на раніше засвоєні теми, на основі відомих методів доведення теорем) та високий (здійснення діяльності достатнього рівня на більш високому ступені складності, застосування змісту теми в нестандартних по відношенню до базового змісту ситуаціях).

Задачний підхід сприяє збільшенню мотивації учнів до вивчення математики, підвищенню їхньої інтересу та розвитку творчого мислення. Також він дозволяє здійснювати індивідуалізацію навчання, враховуючи потреби кожного учня, що в свою чергу сприяє покращенню результатів навчання.

РОЗДІЛ II. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЦИЛІНДР» В УМОВАХ ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ

2.1. Логіко-математичний аналіз змісту теми «Циліндр» на профільному рівні

Логіко-математичний аналіз теми передбачає глибоке дослідження її змісту, включаючи: ідентифікацію центральної математичної ідеї, обґрунтування всіх використаних перетворень, досліджень та доведень, а також детальний розбір застосованих математичних методів та прийомів. Кінцевим результатом такого аналізу є чітке визначення ключового матеріалу, оцінка логічної строгості викладу та ідентифікація використаних математичних інструментів.

Розглянемо витяг з програми з геометрії профільного рівня (табл. 2.1.).

Таблиця 2.1.

Програмові вимоги до вивчення теми

Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ	
21 година	
<p>Тіло обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі; перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину. Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Частини кулі: сегмент, сектор, пояс. Площина, дотична до сфери. Комбінації геометричних</p>	<p>Учень/учениця наводить приклади: тіл обертання; пояснює що таке: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс; формулює означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми; формулює і доводить теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною; класифікує геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс; розрізняє елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; видимі і невидимі елементи; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса; зображає рисунком, відповідно до властивостей ортогонального проєкціювання: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданих фігур – висота, твірна, радіус, хорда; площину, дотичну до сфери та</p>

тіл.	<p>переріз кулі площиною; осьові перерізи циліндра та конуса; комбінації просторових фігур;</p> <p>пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; перетин кулі площиною;</p> <p>аналізує та досліджує кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур;</p> <p>обґрунтовує властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного кола;</p> <p>характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; елементи комбінації просторових фігур;</p> <p>розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.</p>
------	---

У шкільному курсі геометрії 11 клас (профільний рівень) вивчення циліндра за підручником Нелін Є. П. охоплює такі теми: «Циліндр і деякі його перерізи», «Поняття об'єму тіл. Об'єм Циліндра».

Аналізуючи підручник з математики, важливо враховувати кілька критеріїв, які допоможуть оцінити його ефективність та корисність. Він повинен відповідати високим стандартам якості, бути зрозумілими та доступними для учнів. Порівняємо підручники за такими критеріями:

- 1) **Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми.** Важлива структура, зручність та послідовність подання матеріалу, підручник охоплює всі необхідні теми та поняття, передбачені навчальною програмою та рівнем складності.
- 2) **Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу.** Автор подає інформацію простою та доступною мовою, уникає складних термінів,

чітко формулює пояснення, щоб учні краще сприймали та розуміли математичні концепції.

- 3) **Наявність демонстративних зображень.** Використання схем, малюнків, таблиць, для полегшення сприйняття абстрактних понять та розвитку візуального мислення. Також наявність ілюстрацій робить вивчення математики більш цікавим та захопливим.
- 4) **Додаткова цікава інформація, для мотивації та заохочення учнів до навчання.** Може містити факти, цікаві історії з життя видатних математиків, приклади застосування математики в реальному житті, загадки та головоломки.
- 5) **Приклади та завдання.** Приклади розв'язування задач, усні та письмові вправи для класних та домашніх робіт, тести, наявність рівнів складності для завдань, перевірка знань, самостійні роботи.
- 6) **Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми.** Має важливе значення, оскільки сприяють закріпленню знань учнів та перевірці їх знань з теми чи параграфа. Допомагають учням оцінити свої досягнення та визначити, де є проблеми, та самовдосконалюватися.

Розглянемо підручник Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. - Харків: Вид-во «Ранок», 2019.- 208 с.з для вивчення теми «Циліндр і деякі його перерізи» в розділі «Тіла обертання» (профільний рівень), та проаналізуємо його за визначеними критеріями.

Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми. Підручник складається з трьох розділів «Многогранники», «Тіла обертання» «Об'єми й площі поверхонь геометричних тіл». Матеріал має логічну послідовність та відповідає навчальному плану.

Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу. Матеріал представлений в доступному вигляді. Параграф починається з представлення довідкової таблиці, які містять основні означення, ознаки та властивості понять певної теми (рис. 2.1). Потім є розділ з поясненнями та

обґрунтуваннями.

Наявність демонстративних зображень. Підручник заповнений довідковими таблицями, зображеннями та фотографіями.

Додаткова цікава інформація для мотивації та заохочення учнів до навчання. Матеріали рубрик «Відомості з історії» та «Видатні постаті в математиці» допоможуть учням дослідити розвиток математики як науки й дізнатися про досягнення видатних учених України та світу від давнини до сьогодення.

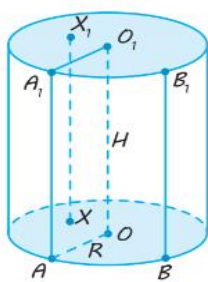
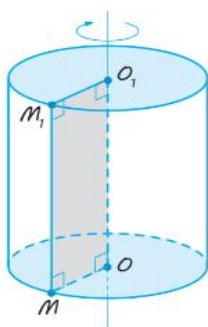
Циліндр	
	<p>Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів. Круги — основи циліндра. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — твірні циліндра.</p> <p>AA_1, BB_1 — твірні циліндра.</p> <p>Циліндр називається <i>прямим</i>, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ.</p> <p>У шкільних підручниках: циліндр = <i>прямий круговий циліндр</i></p>
	<p style="text-align: center;">Властивості</p> <ol style="list-style-type: none"> Основи циліндра рівні й паралельні. $OA = O_1A_1 = R$, пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$. O — центр нижньої основи, O_1 — центр верхньої основи. Твірні циліндра паралельні й рівні. $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$. Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює довжині твірної. $H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1$. У результаті обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр. OMM_1O_1 — прямокутник, OO_1 — вісь утвореного циліндра ($OO_1 \parallel MM_1$). $R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1, H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$. $S_{\text{осн.цил}} = \pi R^2, S_{\text{бічн.цил}} = 2\pi RH$. $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R(H + R)$

Рисунок 2.1. Довідкова таблиця на початок теми

Приклади та завдання. Після теоретичної частини в підручнику наведені приклади розв'язування задач з коментарями, за допомогою яких можна чітко скласти план з розв'язування аналогічних завдань (рис. 2.2).

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі.	Як можна міркувати під час розв'язування такої задачі.

Рисунок 2.2. Приклад розв'язування завдань з коментарями

Звернути увагу на основне та оцінити рівень знань учня допоможе рубрика «Запитання». Вправи поділяються на рівні складності (середній, достатній, високий). «Виявіть свою компетентність» - це завдання, які розраховані на самостійне опрацювання учнями, що сприяють активізації розумової діяльності.

Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми. У кінці розділу розташовані «Завдання для підготовки до оцінювання», учні можуть проходити онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Можемо зробити висновок, що для вивчення теми «Цилиндр і деякі його перерізи» з розділу «Тіла обертання» підручник Є.П. Неліна та О.Є. Долгової "Геометрія (профільний рівень)" для 11 класу загальноосвітніх закладів освіти є вдалим вибором. Він має добре структурований зміст, логічну послідовність, що відповідає навчальному плану та дозволяє учням поступово засвоювати матеріал. Пояснення представлені зрозуміло, з початковими довідковими таблицями, які відповідають основним визначенням та властивостям, що полегшує процес запам'ятовування та подальшого застосування теоретичних знань. Підручник насичений демонстративними зображеннями та ефектами, що робить матеріал видимо привабливим і зрозумілим. Також є додаткова інформація історичного характеру, що додає елемент мотивації, зацікавлює учнів і розширює їхній кругозір. Завдання та приклади після кожного розділу допомагають краще засвоїти матеріал і виробити навички розв'язування аналогічних завдань.

Виконаємо ЛМА змісту теми «Цилиндр» за даним підручником.

Нелін Є. П., Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. - Харків : Вид-во «Ранок»,

2019.- 208 с.

Поняття, факти і способи діяльності, які мають засвоїти та зрозуміти учні, наведені в таблицях 2.2. – 2.5.

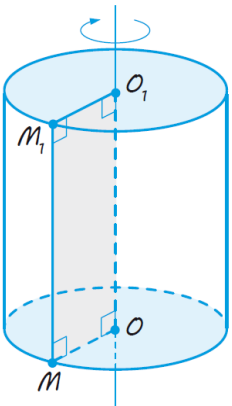
Таблиця 2.2.

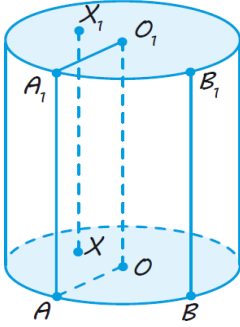
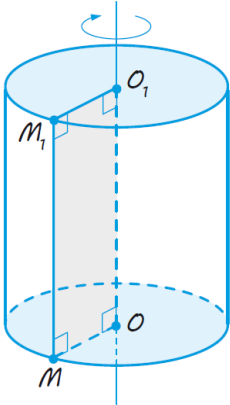
Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

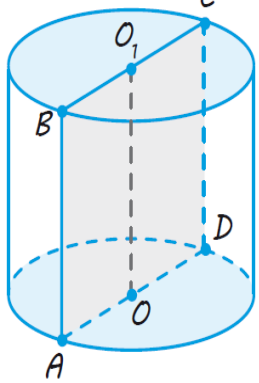
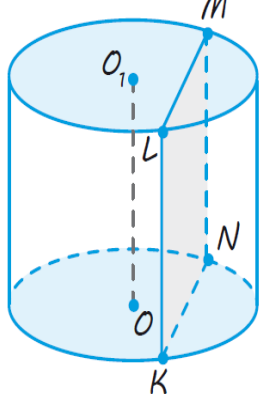
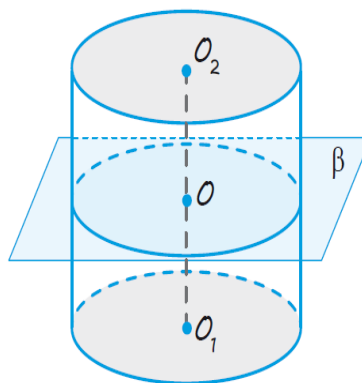
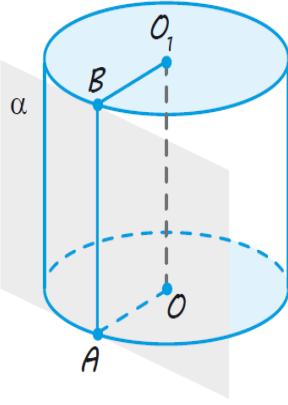
	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Циліндр, твірна циліндра, основи циліндра, висота циліндра, радіус циліндра, вісь циліндра, осьвий переріз, переріз циліндра площиною, комбінація тіл, вписані і описані тіла.	Властивості циліндра. Дотичну до циліндра площина. Площина, паралельна площині основи.	Будувати зображення циліндра, і його елементів, перерізів; обґрунтовувати властивості циліндра, застосовувати їх до розв'язування задач
Базові	Тіло, прямокутник, радіус, діаметр, коло, круг, дотична площина		Задавати вісь та фігуру обертання.

Таблиця 2.3.

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристичні властивості
Циліндр	 <p>Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів</p>	Означення через найближчий рід та істотні властивості

<p>Твірні циліндра</p>		<p>Твірними циліндра є відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів. Твірні циліндра паралельні й рівні AA_1, BB_1 — твірні циліндра</p>	<p>Означення через найближчий рід та істотні властивості</p>
<p>Основи циліндра</p>	<p>Круги називаються <i>основами циліндра</i>.</p>		<p>Рід і відома відмінність</p>
<p>Радіус циліндра</p>	<p>Радіусом циліндра називається радіус його основи.</p>		<p>Рід і відома відмінність</p>
<p>Висота циліндра</p>	<p>Висотою циліндра називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу. Також висотою називають довжину цього перпендикуляра, тобто відстань між площинами його основ. Висота циліндра дорівнює його твірній.</p>		<p>Рід і відома відмінність</p>
<p>Вісь циліндра</p>	<p>Віссю циліндра називається пряма, що проходить через центри його основ. Вісь паралельна твірним.</p>		<p>Рід і відома відмінність</p>
<p>Властивості циліндра</p>	<p>1. Основи циліндра рівні й паралельні. $OA = O_1A_1 = R$, пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$. O - центр нижньої основи, O_1 - центр верхньої основи. 2. Твірні циліндра паралельні й рівні. $AA_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = BB_1$.</p>  <p>3. Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює довжині твірної. $H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1$.</p> <p>4. У результаті обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр. OMM_1O_1 — прямокутник, OO_1 — вісь утвореного циліндра ($OO_1 = MM_1$). $R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1$, $H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$.</p>		<p>Через найближчий рід та істотні властивості</p>

<p>Осьовий переріз циліндра</p>		<p>Переріз циліндра площиною, що проходить через його вісь, називається <i>осьовим перерізом</i>. ABCD — осьовий переріз (переріз, що проходить через вісь OO_1), ABCD — прямокутник. AB і CD — твірні циліндра</p>	<p>Через найближчий рід та істотні властивості</p>
<p>Переріз циліндра площиною, паралельною його осі</p>		<p>Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником. Дві його сторони — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ. KLMN — прямокутник. KL і MN — твірні циліндра,</p>	<p>Означення через найближчий рід та істотні властивості</p>
<p>Переріз циліндра площиною, паралельною його основам</p>		<p>Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.</p> <p>$R_{\text{перерізу}} = R_{\text{цил}}$</p>	<p>Через найближчий рід та істотні властивості</p>
<p>Площина, дотична до циліндра</p>		<p>Площина, що проходить через твірну циліндра перпендикулярно до осьового перерізу, який містить цю твірну, називається <i>площиною, дотичною до циліндра</i>. α — дотична площина до циліндра. AB — твірна, площина α проходить через AB.</p> <p>$\alpha \perp \text{пл. } AOO_1B$</p>	<p>Через найближчий рід та істотні властивості</p>

Будь-які вправи (і взагалі задачі) у навчанні математиці виконуються з певною метою (формування понять, систематизації понять, навчання доведенню тощо).

Щоб по-справжньому засвоїти математичне поняття, недостатньо просто його запам'ятати. Потрібно вміти застосовувати це поняття на практиці, розв'язуючи різноманітні задачі.

Всі математичні вправи, які ми виконуємо, спрямовані на формування вміння застосовувати набуті знання. Саме через розв'язання задач ми вчимося використовувати поняття, теореми та методи в конкретних ситуаціях.

Характерною особливістю навчальних задач, спрямованих на формування в учнів глибокого розуміння математичних понять, теорем і правил, є їхня послідовність. Спочатку пропонуються задачі, які викликають інтерес до теми та актуалізують необхідні знання. Далі слідують завдання, які безпосередньо готують до введення нового матеріалу, а потім – задачі на його застосування. В таблиці 2.4 наведені задачі за видами вправ для введення нових понять теми «Циліндр»

Таблиця 2.4

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

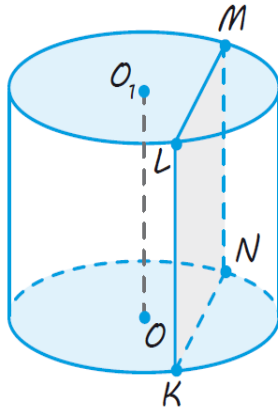
Види вправ Поняття	Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння текстового значення
Циліндр		10.1			
Вісь циліндра		10.6	10.20	10.1, 10.26	10.21
Твірна циліндра				10.19	10.11

Основи циліндра			10.4		10.18
Радіус основи циліндра	10.16	10.7	10.12	10.2	10.11
Висота циліндра	10.16	10.7	10.12	10.5	
Переріз циліндра					
Дотична площина до циліндра					
Площа бічної поверхні	10.3		10.10	10.13, 10.15 10.22, 10.25	
Площа осьового перерізу		10.8		10.22	10.9

Структурно-логічна модель, яка охоплює основні поняття теми
(Схематичне представлення понять теми, опорний конспект)

Розгортка циліндра	
	<p><i>Поверхня циліндра складається з основ і бічної поверхні. Бічну поверхню циліндра утворюють твірні.</i></p> <p>Розгортка циліндра складається з прямокутника - розгортки бічної поверхні циліндра, і двох рівних кругів.</p> <p><i>Площа бічної поверхні циліндра:</i> $S_{\text{бічн. цил}} = 2\pi RH$, де R — радіус циліндра, H — його висота</p> <p><i>Площа повної поверхні циліндра:</i> $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн. цил}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi RH(H+R)$</p>
Переріз циліндра площинами	
Осьовий переріз циліндра	
	<p>Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називається <i>осьовим перерізом циліндра</i>.</p> <p>ABCD — осьовий переріз (переріз, що проходить через вісь OO_1), ABCD — прямокутник. $AD = d_{\text{осн}} = 2R$, $AB = H$. AB і CD — твірні циліндра</p>

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі



Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником, дві сторони якого твірні, а дві інші відповідно рівні хорди основ.

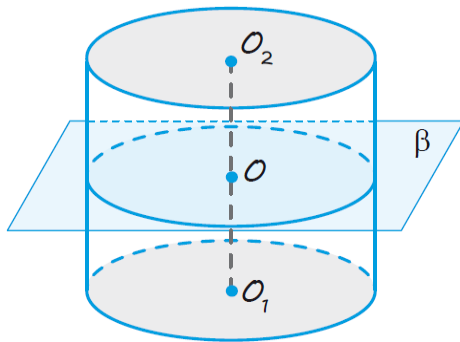
пл. $KLMN \parallel OO_1$,

$KLMN$ — прямокутник.

KL і MN — твірні циліндра,

$KL = H_{\text{цил}}$

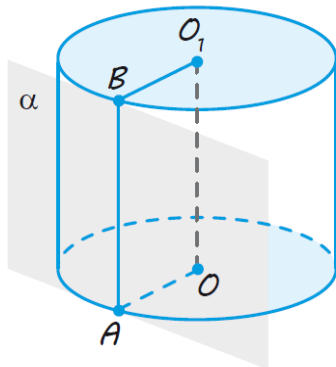
Переріз циліндра площиною, паралельною основам



Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

$R_{\text{перер}} = R_{\text{цил}}$

Площина, дотична до циліндра



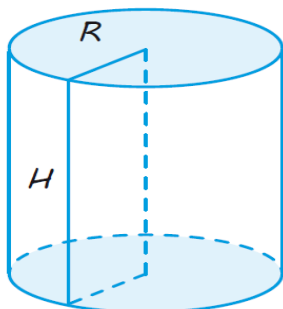
Площина, що проходить через твірну циліндра перпендикулярно до осевого перерізу, який містить цю твірну, називається площиною, *дотичною до циліндра*.

α — дотична площина до циліндра.

AB — твірна, площина α проходить через AB .

$\alpha \perp$ пл. AOO_1B

Об'єм прямого кругового циліндра



Об'єм прямого кругового циліндра, дорівнює

$V = \pi 2R^2 \cdot H$,

де R — радіус циліндра,

H — його висота

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Теорема про площину паралельну площині основи циліндра

Етапи проведення аналізу	Результат
1. Формулювання твердження	Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.
2. Встановлення виду твердження	Просте, словесне, умовна форма
3. Виділення роз'яснювальної частини	Площина
4. Виділення умови	Площина, паралельна площині основи циліндра
5. Виділення вимоги	перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, то вона дорівнює колу основи, і переріз є колом.

Також я вважаю необхідно використовувати такі ресурси, як відеоуроки, анімації, онлайн-тестування та комп'ютерні програми для вивчення матеріалу, щоб урізноманітнити та зробити освітній процес більш цікавим та зрозумілим.

2.2.Формування предметної математичної компетентності у навчанні теми «Циліндр»

Згідно з діючими навчальними програмами до предметних математичних компетентностей, яких набуває учень у процесі вивчення теми «Циліндр» відносять наступні, учень/учениця: **розрізняє** елементи циліндра; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: циліндра; **аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); **обґрунтовує** властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування

прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного кола; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач

Відповідно до цих компетентностей ми пропонуємо систему задач, об'єднаних в групи за такими темами:

- Задачі на елементи циліндра. Переріз циліндра площиною.
- Задачі на площу бічної і повної поверхні циліндра.
- Задачі на об'єм циліндра.
- Задачі на комбінацію циліндра і призми, циліндра і піраміди.

Далі наводимо ці задачі, які були дібрані за джерелами [67, 68, 69, 70].

Задачі на елементи циліндра. Переріз циліндра площиною.

Задача 1. Радіус основи циліндра 4 см, висота 6 см. Знайдіть діагональ основи перерізу.

Відповідь: 10 см.

Задача 2. Діагональ осьового перерізу циліндра 20 см, а радіус основи 6 см. Знайдіть твірну циліндра.

Відповідь: 16 см.

Задача 3. Осьовий переріз циліндра – квадрат, діагональ якого $4\sqrt{2}$. Знайдіть висоту циліндра та площу його основи.

Відповідь: 4 см, 4π см².

Задача 4. Знайдіть твірну циліндра, у якого діагональ осьового перерізу дорівнює m см, а радіус основи – n см.

Відповідь: $\sqrt{m^2 - 4n^2}$ см.

Задача 5. Площа осьового циліндра 24 см². Знайдіть радіус основи і твірну циліндра, якщо твірна на 2 см більша за радіус.

Відповідь: $\sqrt{13} - 1$ см, $\sqrt{13} + 1$ см.

Задача 6. Діагональ осьового перерізу циліндра 24 см. Кут між цією діагоналлю і твірною циліндра дорівнює 60° . Знайдіть висоту циліндра.

Відповідь: 12 см.

Задача 7. Осевим перерізом циліндра є квадрат із діагоналлю $b\sqrt{2}$ см. Знайдіть висоту циліндра та площу його основи.

Відповідь: b см, $\frac{b^2}{4}\pi$ см².

Задача 8. Площа перерізу циліндра, перпендикулярного до його осі, дорівнює 16π см². Знайдіть радіус основи циліндра.

Відповідь: 4 см

Задача 9. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює 8 см², а радіус основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть радіус основи циліндра.

Відповідь: 2 см

Задача 10. Площа осевого перерізу циліндра 8 см², а площа основи – S . Виразіть S через Q (площ осн.), якщо осевий переріз циліндра – квадрат.

Відповідь: $\frac{Q\pi}{4}$

Задача 11. Периметр осевого перерізу циліндра – 30 см, а його твірна в 4 рази більша за радіус основи. Знайдіть твірну циліндра.

Відповідь: 10 см

Задача 12. Площа основи циліндра 4π см², а діагональ осевого перерізу 5 см. Знайдіть висоту циліндра.

Відповідь: 3 см

Задача 13. У циліндра радіуса 10 см, паралельно його осі і на відстані 8 см від неї проведено переріз, (переріз) площа 120 см². Знайдіть висоту циліндра.

Відповідь: 10 см

Задача 14. Висота циліндра 7 см, радіус основи 5 см. У циліндра проведено площину паралельно його осі, яка відтинає від кола основи дугу 60° . Знайдіть площу отриманого перерізу.

Відповідь: 35 см²

Задача 15. Висота циліндра 8 см, радіус основи 4 см. У циліндра проведено площину паралельно його осі, яка відтинає від кола основи дугу 60° . Знайдіть площу перерізу.

Відповідь: 32 см²

Задача 16. Твірна циліндра 12 см, радіус основи 10 см. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі – квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі. Відповідь: 8 см

Задача 17. Відрізок довжиною 20 см сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи й утворює з площею нижньої основи кут 60° . Знайдіть висоту циліндра.

Відповідь: $10\sqrt{3}$ см

Задача 18. Радіус основи циліндра 2 см, висота 4 см. Побудуйте зображення цього циліндра.

Задача 19. У нижній основі циліндра проведено хорду b , яка стягує дугу β . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи із серединою проведеної хорди, утворює з площиною основи кут α . Знайдіть висоту і радіус циліндра.

Відповідь: $\frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}, \frac{b}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$

Задача 20. Площа, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 120° . Знайдіть площу перерізу, якщо висота циліндра дорівнює H , а відстань між віссю циліндра і січною площиною дорівнює b .

Відповідь: $2bH\sqrt{3}$

Задача 21. Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 60° . Твірна циліндра дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а відстань між віссю циліндра і січною площиною 4 см. Знайдіть площу перерізу.

Відповідь: 48 см^2

Задача 22. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут α . Визначити об'єм, якщо його радіус дорівнює r .

Відповідь: $8r^3\pi \operatorname{tg} \alpha$

Задача 23. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут α . Визначити бічну поверхню циліндра, якщо його висота дорівнює H . Відповідь: $\pi H^2 \operatorname{tg} \alpha$

Задача 24. Відрізок, що з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи дорівнює b . Кут між даним відрізком і віссю циліндра

дорівнює β . Визначити відстань від центра нижньої основи циліндра до даного відрізка.

Відповідь: $\frac{b \cdot \sin 2\beta}{2}$

Задача 25. У циліндрі паралельно осі проведено площину на відстані b від неї. Дана площина відтинає від кола основи дугу β , а площина утвореного перерізу дорівнює S . Визначити висоту циліндра.

Відповідь: $\frac{S}{2b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$

Задача 26. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу β . Відрізок, що сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи, дорівнює a і утворює з площиною основи кут α . Визначити площу перерізу.

Відповідь: $a^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \frac{\beta}{2}$

Задача 27. Паралельно осі циліндра, бічна поверхня якого дорівнює Q , проведена площину. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Визначити площу перерізу, якщо відрізок, що сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи, утворює з площиною основи кут α .

Відповідь: $\frac{Q \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2\pi \cdot \operatorname{tg} \beta}$

Задача 28. Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою хорди нижньої основи, утворює з площиною основи кут β , а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи дорівнює l . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом α , Визначити площу перерізу.

Відповідь: $\frac{l^2}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{4\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta}}$

Задача 29. Паралельно осі циліндра проведено січну площину. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює Q . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Визначити площу перерізу якщо відрізок, що сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи, нахиленої до площини основи під кутом α .

Відповідь:

$$\text{Відповідь: } \frac{Q \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2\pi \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Задачі на площу бічної і повної поверхні циліндра.

Задача 1. Радіус основи циліндра 2 см, висота 6 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

Відповідь: $32\pi \text{ см}^2$

Задача 2. Довжина кола основи циліндра дорівнює 4π см, висота 3 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

Відповідь: $20\pi \text{ см}^2$

Задача 3. Висота циліндра 5 см, радіус основи 2 см. Знайдіть $S_{\text{б.п.}}$ і $S_{\text{п.п.}}$.

Відповідь: $20\pi \text{ см}^2$, $28\pi \text{ см}^2$

Задача 4. Осьовий переріз циліндра – квадрат, діагональ якого дорівнює $10\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Відповідь: $100\pi \text{ см}^2$

Задача 5. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см, й утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Відповідь: $36\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$

Задача 6. Осьовий переріз циліндра – квадрат з периметром 24 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Відповідь: $36\pi \text{ см}^2$

Задача 7. Довжина кола основи циліндра C , а його висота H . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

$$\text{Відповідь: } \frac{C^2 + C \cdot H \cdot 2\pi}{2\pi}$$

Задача 8. Переріз циліндра площиною, паралельною осі, - квадрат зі стороною 4 см, який відтинає від кола основи дугу 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

Відповідь: $64\pi \text{ см}^2$

Задача 9. Діагональ прямокутника дорівнює d й утворює з його більшою стороною кут α . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, утвореного обертанням даного прямокутника навколо меншої його сторони.

Відповідь: $2\pi d^2 \cos^2 \alpha + \pi d^2 \sin^2 \alpha$

Задача 10. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом і відтинає від кола основи дугу 90° . Радіус основи циліндра $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Відповідь: $64\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$

Задача 11. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра нижньої основи під кутом 90° , а із центра верхньої основи – під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи циліндра 8 см.

Відповідь: $128\pi \text{ см}^2$

Задача 12. Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом α . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, нахилений до площини основи під кутом β , радіус основи циліндра R . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Відповідь: $2\pi R^2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$

Задача 13. Висота циліндра на 10 см більша за радіус основи, а площа його повної поверхні дорівнює $144\pi \text{ см}^2$. Знайдіть радіус основи циліндра.

Відповідь: 4 см

1.44. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см^2 , а площа основи $4\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

Відповідь: $20\pi \text{ см}^2$

Задача 14. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні, а діагональ осьового перерізу дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

Відповідь: 144π см²

Задача 15. Основа призма – прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см. Діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми.

Відповідь: 25π см²

Задача 16. Відрізок, що з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньою основи, утворює з площиною нижньої основи кут α . Даний відрізок знаходиться від центра нижньої основи на відстані d . Визначити бічну поверхню циліндра.

Відповідь: $\frac{4\pi d^2}{\sin^2 \alpha}$

Задача 17. Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, довжина якої дорівнює a . Ця хорда стягує дугу α . Визначити бічну поверхню циліндра, якщо діагональ утвореного перерізу утворює з площиною основи кут β .

Відповідь: $\frac{\pi a^2 \operatorname{tg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

Задача 18. Паралельно осі циліндра, на відстані d від неї, проведено площину, що відтинає від кола дугу β . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини під кутом α . Визначити бічну поверхню циліндра.

Відповідь: $\frac{4\pi d^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$

Задача 19. Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β . З центра іншої основи ця хорда видно під кутом α . Площа утвореного перерізу дорівнює Q . Визначити площу повної поверхні циліндра.

Відповідь:
$$\frac{\pi Q}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}}} + \frac{\pi Q}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

Задача 20. Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу β . Довжина хорди дорівнює a . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом α . Визначити площу повної поверхні циліндра.

Відповідь:
$$: \frac{\pi a^2}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{\pi a^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

Задачі на об'єм циліндра.

Задача 1. Знайдіть об'єм тіла, яке утворюється обертанням квадрата навколо сторони, яка дорівнює 2 см.

Відповідь: $8\pi \text{ см}^3$

Задача 2. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною 4 см. Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $16\pi \text{ см}^3$

Задача 3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см, а висота циліндра 6 см. Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $96\pi \text{ см}^3$

Задача 4. Довжина кола основи циліндра 12π см, а його висота 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $360\pi \text{ см}^3$

Задача 5. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 4 см і утворює з площиною його основи кут 60° . Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $8\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$

Задача 6. У циліндра площа осьового перерізу S , а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь:
$$\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{S^3 \cdot \operatorname{cosa}}{\operatorname{sina}}} \text{ см}^3$$

Задача 7. Площа основи циліндра $4\pi \text{ см}^2$, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $16\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$

Задача 8. Об'єм циліндра $32\pi \text{ см}^3$, а площа його основи $4\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Відповідь: 32 см^2

Задача 9. Переріз циліндра площиною паралельною його осі, - квадрат зі стороною 2 см, який відтинає від кола основи дугу 90° . Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $4\pi \text{ см}^3$

Задача 10. Хорда нижньої основи циліндра дорівнює 2 см стягує дугу 120° . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм циліндра.

Відповідь: $\frac{4\pi}{3} \text{ см}^3$

Задача 11. Об'єм циліндра V , а площа його основи S . Знайдіть твірну циліндра.

Відповідь: $\frac{V}{S}$

Задача 12. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу β , а площа утвореного перерізу дорівнює S . Визначте об'єм циліндра, якщо його радіус r .

Відповідь: $\frac{\pi r S}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$

Задача 13. В основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом β . Відстань від цього центра до хорди дорівнює d . Відрізок, що сполучає центр однієї основи з точкою кола іншої основи, утворює з площиною основи кут α . Визначте об'єм циліндра.

Відповідь: $\frac{\pi d^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos^3 \frac{\beta}{2}}$

Задача 14. Паралельно до осі циліндра проведено площину, що перетинає основу по хорді. Відстань від середини цієї хорди до центра іншої основи – b . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β , а

відрізок що сполучає центр основи циліндра є точка кола іншої основи нахиленої до площини основи під кутом α . Визначити об'єм.

Відповідь:
$$\frac{\pi \cdot b^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \beta} + 1\right)^3}}$$

Задачі на комбінацію циліндра і призми, циліндра і піраміди.

Задача 1. У циліндр вписано правильну чотирикутну призму, сторона основи якої $5\sqrt{2}$ см, висота 4 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Відповідь: 40 см²

Задача 2. Циліндр вписано в правильну чотирикутну призму, сторона основи якої 4 см, а бічне ребро 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Відповідь: 20 см²

Задача 3. Знайдіть сторону основи правильної трикутної призми, описаної навколо циліндра з радіусом основи $\sqrt{3}$.

Відповідь: 6 см

Задача 4. У циліндр з радіусом основи 12 см, вписано правильну трикутну призму. Знайдіть радіус циліндра, вписаного в дану призму.

Відповідь: 6 см

Задача 5. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а висота 10 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.

Відповідь: $40\sqrt{3}$ см²

Задача 6. Правильну чотирикутну призму вписано в циліндр, радіус якого $2\sqrt{2}$, а висота 3 см. Знайдіть діагональ бічної грані призми.

Відповідь: 5 см

Задача 7. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 18 см і нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть висоту і сторону основи правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр.

Відповідь: $9\sqrt{2}$, 9 см

Задача 8. Навколо циліндра радіус основи якого 5 см, а висота 8 см, описано правильно чотирикутну призму. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що проходить через два несусідні бічні ребра.

Відповідь: 80 см^2

Задача 9. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою, a і кутом α при основі. Діагональ бічної грані, що містить основу рівнобедреного трикутника, утворює з площиною основи призми кут β . Знайдіть твірну і площу основи циліндра, вписаного в призму.

Відповідь: $\alpha \cdot tg\beta, \frac{\pi a^2 \cdot tg^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$

Задача 10. У куб, ребро якого дорівнює a , вписано циліндр. Визначити об'єм циліндра.

Відповідь: $\frac{\pi \cdot a^3}{4}$

Задача 11. У куб ребро якого дорівнює a , вписано циліндр. Визначити бічну поверхню циліндра.

Відповідь: πa^2

Задача 12. Навколо циліндра з висотою 6 см і радіусом 4 см описано прямокутний паралелепіпед. Обчислити повну поверхню паралелепіпеда.

Відповідь: 320 см^2

Задача 13. У циліндр, радіус основи якого r , а висота h , вписано правильно чотирикутну призму. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $4rh\sqrt{2}$

Задача 14. У циліндр, радіус основи якого r , а висота h , вписано правильно чотирикутну призму. Визначити об'єм призми.

Відповідь: $2r^2h$

Задача 15. Сторона основи і висота правильної призми відповідно дорівнюють a і b . Визначити об'єм циліндра, описаного навколо призми

Відповідь: $\frac{\pi a^2 b}{2}$

Задача 16. У циліндр, радіус основи якого r , а висота h , вписано правильну трикутну призму. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $3rh\sqrt{3}$

Задача 17. Радіус основи циліндра дорівнює r , а висота h . Визначити бічну поверхню правильної чотирикутної призми, описаної навколо циліндра.

Відповідь: $8rh$

Задача 18. У правильному чотирикутну призму зі стороною a і висотою h вписано циліндр. Визначити бічну поверхню циліндра.

Відповідь: πah

Задача 19. У правильно трикутну призму зі стороною a і висотою h вписано циліндр. Визначити об'єм циліндра.

Відповідь: $\frac{\pi a^2 h}{12}$

Задача 20. Навколо циліндра з висотою h і радіусом r описано правильно трикутну призму. Визначити бічну поверхню призми.

Відповідь: $6rh\sqrt{3}$

Задача 21. У циліндр об'єм якого дорівнює V , вписано куб. Визначити ребро Куба.

Відповідь: $\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$

Задача 22. У циліндр, об'єм якого дорівнює V , вписано куб. Визначити об'єм Куба.

Відповідь: $\frac{2V}{\pi}$

Задача 23. Обчислити об'єм циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами 10см та 24см і висотою 30 см.

Відповідь: 507 см^3

Задача 24. Обчислити повну поверхню циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами 10см та 24см і 30см.

Відповідь: 1118 см^2

Задача 25. Навколо прямої трикутної призми описано циліндр. Основою призми є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом α при основі. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут β . Визначити бічну поверхню циліндра.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi b^2 \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}$$

Задача 26. Навколо прямої трикутної призми описано циліндр. Основою призми є рівнобедрений трикутник з основою, a і кутом α між бічними сторонами. Діагональ бічної грані, що містить основу трикутника, утворює з площиною основи кут α . Визначити бічну поверхню циліндра.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi a^2}{\cos \alpha}$$

Задача 27. Навколо прямої трикутної призми, висота якої дорівнює h , описано циліндр. Основою призми є прямокутний трикутник з гострим кутом α . Діагональ бічної грані, що містить катет прилеглий до кута α , утворює з площиною основи кут β . Визначити об'єм циліндра.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi h^3 \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta}{4 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Задача 28. Навколо прямої трикутної призми описано циліндр. Основою призми є прямокутний трикутник з гострим кутом α . Діагональ бічної грані, що містить катет, прилеглий до кута α дорівнює d і утворює з площиною основи кут β . Визначити об'єм циліндра.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi d^3 \cos^2 \beta \cdot \sin \beta}{4 \cos^2 \alpha}$$

Задача 29. У клуб вписано циліндр, об'єм якого дорівнює V . Визначити об'єм Куба.

$$\text{Відповідь: } \frac{4V}{\pi}$$

Задача 30. У куб вписано циліндр, повна поверхня якого дорівнює S . Визначити ребро Куба.

$$\text{Відповідь: } \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$$

Задача 31. Об'єм циліндра дорівнює V . Визначити об'єм правильної трикутної призми, описаної навколо даного циліндра.

$$\text{Відповідь: } \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot V$$

Задача 32. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V . Визначити об'єм циліндра, вписаного в призму.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi V}{12}$$

Задача 33. Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює V . Визначити об'єм циліндра, вписаного в призму.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi V}{4}$$

Задача 34. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює S . Визначити бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi S}{12}$$

Задача 35. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, дорівнює b і нахилена до площини основи під кутом β . Визначити бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

$$\text{Відповідь: } pb^2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Задача 36. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гострим кутом β . Діагональ бічної грані, що містить прилеглий до цього кута катит, дорівнює b і нахилена до площини основи під кутом α . Визначити об'єм циліндра, описаного навколо даної призми.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi b^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{4 \cos^2 \beta}$$

Задача 37. Основою призми є ромб з гострим кутом α . Діагональ бічної грані призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут β . Визначити бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi l^2 \sin 2\beta \cdot \sin \alpha}{2}$$

Кожна група містить мінімум 14, максимум 37 задач. Задачі були розв'язані у процесі виконання дослідження і всі супроводжуються відповідями. Запропоновані задачі можна використовувати на уроках, у самостійній роботі учнів, для підготовки до ЗНО і НМТ.

Пропонуємо конспект уроку формування предметних математичних компетентностей учнів.

Тема: Циліндр і деякі його перерізи.

Мета уроку:

Навчальна: сформувати поняття циліндра, його елементів (основ, твірних, радіуса, висоти, осі) та перерізів циліндра; домогтися засвоєння властивостей циліндра; формування вмінь учнів знаходити елементи циліндра.

Розвиваюча: розвивати просторову уяву, логічне мислення, вміння висловлювати та обґрунтовувати свою думку, формувати зацікавленість у вивченні теми «Циліндр», розвивати бажання застосовувати набуті знання, вміння та навички у своїй професії.

Виховна: сприяти вихованню відповідальності учнів за результати виконання завдань, сприяти розвитку комунікативних умінь, взаємоповаги, взаємодопомоги, почуття колективізму, культуру поведінки.

Дидактичне забезпечення: Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків: Вид-во «Ранок», 2019., навчальне відео.

Методичне забезпечення: програма з геометрії (профільний рівень), календарне планування, методичні рекомендації щодо проведення уроків з теми.

Тип заняття: засвоєння нових знань і вмінь.

Хід уроку

I. Організаційна частина.

Перевірка присутніх, налаштування на роботу.

II. Мотивація навчальної діяльності. Повідомлення теми і мети уроку.

Сьогодні ми будемо досліджувати цікаву фігуру – циліндр. Дізнаємося, як вона утворюється і де ми їх можемо зустріти у повсякденному житті. Основну увагу будемо приділяти прямим циліндрам, властивостям циліндра, перерізам циліндра площинами, а також розглянемо їх використання в навколишньому світі.

Тіла циліндричної форми оточують нас у повсякденному житті. Це - олівець, звичайна кружка, цукерка, пробірка, колба, труби, колони будівель, хокейна шайба, катушка, резервуари для нафти, катки для укачування асфальту, рулони паперу, шпалери, валики для побілки і окраски і т.д. Предмети, що мають форму циліндра, називаються предметами циліндричної форми.

До вашою уваги приклади тіл, що мають циліндричну форму.



Воронцовська колонида
в Одесі



Пізанська вежа
(Італія)



ЦИЛІНДРИ у нашому житті: <https://www.youtube.com/watch?v=2zXZGtcm8zI>

На практиці досить часто виникає потреба дізнатися не лише те, яку

геометричну форму мають деякі предмети, а й їхній площу, об'єм та ін. Наприклад, чи вистачить 8500 м^2 ізоляційної стрічки для двократного покриття нею кілометра газопроводу, якщо всі труби мають діаметр 1420 мм?

Відповідь можна дати досить швидко, якщо знати необхідні формули. Ці формули ми вивчатимемо на уроці.

III. Вивчення нового матеріалу.

1. Циліндр та його елементи (основи, твірні, радіуси, висота, вісь).
2. Властивості елементів циліндра.
3. Перерізи циліндра площинами.
4. Приклади задач на застосування означення і властивостей циліндра, його елементів та поняття осьового перерізу циліндра:

1. Циліндр та його елементи

Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, утворене з двох кіл, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кіл.

Прямим круговим циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.

Круги – **основи циліндра**.

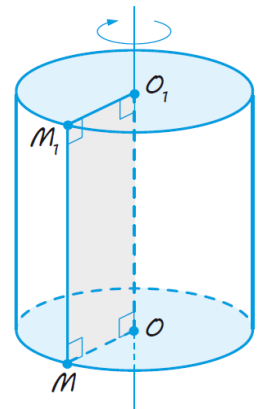
Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, - **твірні циліндра**.

AA_1, BB_1 – твірні циліндра.

Радіусом циліндра називають радіус його основи, OA – радіус циліндра.

Висотою циліндра називається перпендикуляр, проведений з будь якої точки однієї основи на іншу. $OO_1 = AA_1 = H$.

Циліндр називається прямим, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ.



2. Властивості елементів циліндра.

1). Основи циліндра рівні й паралельні.

$$OA = O_1A_1 = R, \text{пл.} AOB \parallel \text{пл.} A_1O_1B_1.$$

O - центр нижньої основи, O_1 - центр верхньої основи.

2). Твірні циліндра паралельні й рівні. $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1.$

3). Висота циліндра (відстань між площинами основ)

дорівнює довжині твірної.

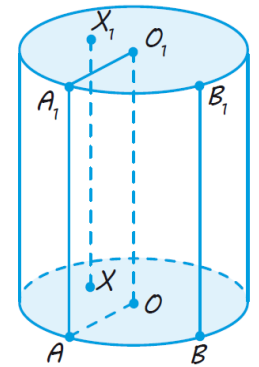
$$H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1.$$

4). У результаті обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр.

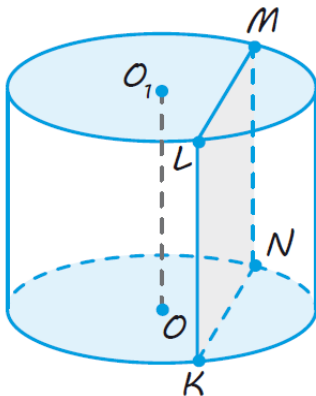
OMM_1O_1 — прямокутник,

OO_1 — вісь утвореного циліндра ($OO_1 = MM_1$).

$$R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1, H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1.$$



3. Перерізи циліндра площинами.



Переріз циліндра площиною, паралельною його осі

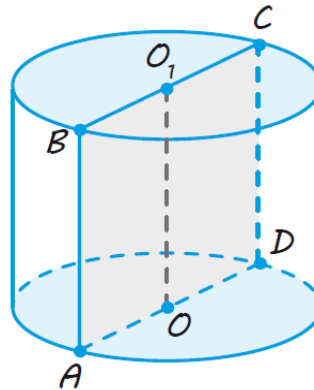
Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником.

пл. $KLMN \parallel OO_1$.

$KLMN$ — прямокутник.

KL і MN — твірні циліндра.

$$KL = H_{\text{цил}}$$



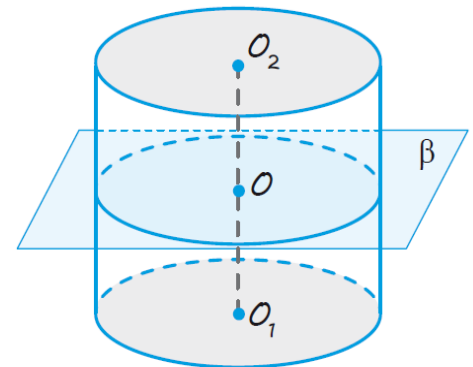
$ABCD$ — осьовий переріз

(переріз, що проходить через вісь OO_1).

$ABCD$ — прямокутник.

$$AD = d_{\text{осн}} = 2R, AB = H_{\text{цил}}.$$

AB і CD — твірні циліндра



Переріз циліндра площиною, паралельною основам

Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

$$R_{\text{перер}} = R_{\text{цил}}$$

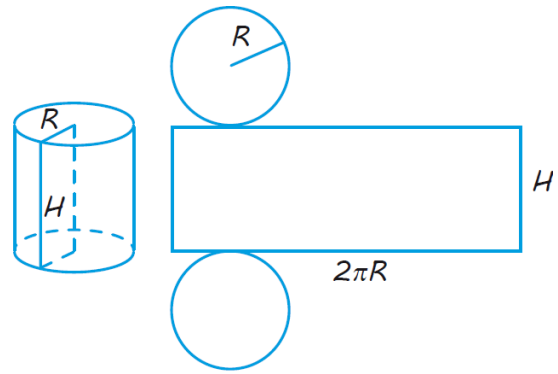
4. Бічна та повна поверхня циліндра

Поверхня циліндра складається з основи бічної поверхні. Бічну поверхню циліндра утворюють твірні.

$$S_{\text{осн.цил}} = 2\pi R^2$$

$$S_{\text{бічн.цил}} = 2\pi RH$$

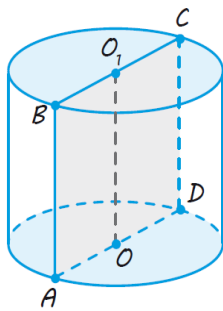
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$$



IV. Засвоєння первинних умінь та навичок

Вчитель пояснює учням застосування теоретичних відомостей означення і властивостей циліндра, його елементів та поняття осьового перерізу циліндра до розв'язування задач.

Задача 1. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює 36 см. Знайдіть площу основи циліндра.



Розв'язання. Оскільки переріз циліндра – осьовий, то сторона квадрата є діаметром кола основи.

Нехай x – діаметр кола основи. Тоді $x^2 = 36 \text{ см}^2$.

Площа основи циліндра $S = \frac{\pi x^2}{4} = \frac{36^2}{4} = 9\pi (\text{см}^2)$

Відповідь: $9\pi (\text{см}^2)$

Задача 2. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює Q . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання. Якщо осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною x , то площа перерізу дорівнює x^2 .

Маємо рівняння $x^2 = Q$, звідки $x = \sqrt{Q}$.

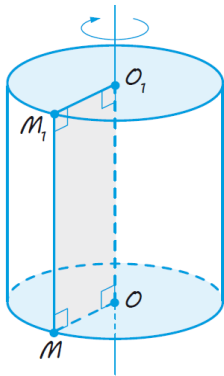
Висота циліндра дорівнює x , діаметр основи також дорівнює x (тобто $2R = x$).

Отже,

$$S_{\text{бічн.цил}} = 2\pi RH = \pi \cdot (2R) \cdot H = \pi \cdot x \cdot x = \pi x^2 = \pi Q.$$

Відповідь: πQ

Задача 3. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 13 см, а одна із сторін на 7 см менша за іншу, обертається навколо своєї більшої сторони. Знайдіть радіус та висоту отриманого циліндра.



Розв'язання. Нехай прямокутник MOO_1M_1 обертається навколо осі OO_1 , $OO_1 > OM$.

Нехай $OM = x$ см, тоді $OO_1 = (x+7)$ см.

За умовою $O_1M = 13$ см.

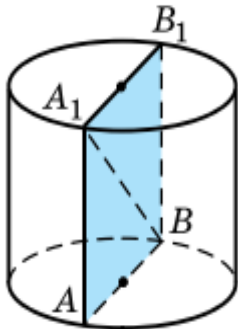
Оскільки $OM^2 + OO_1^2 = O_1M^2$, маємо рівняння:

$x^2 + (x+7)^2 = 13^2$, тобто $x^2 + 7x - 60 = 0$, звідки отримаємо, що $x_1 = 5$; $x_2 = -12$. Отже, $OM = 5$ см – радіус циліндра.

Тоді, $MM_1 = OO_1 = 5 + 7 = 12$ (см) – висота циліндра.

Відповідь: 5 см; 12 см.

Задача 4. Довжина кола основи циліндра дорівнює 15π см, а діагональ осевого перерізу – 17 см. Знайдіть твірну циліндра.



Розв'язання. AA_1B_1B – осевий переріз,

A_1B – діагональ осевого перерізу – 17 см.

Знайдемо твірну AA_1 .

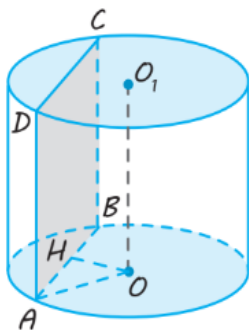
Нехай радіус циліндра дорівнює r . Тоді за умовою та формулою довжини кола маємо: $2\pi r = 15\pi$.

Отже, $AB = 2r = 15$ см.

$$\text{Із } \triangle AA_1B: AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ (см)}$$

Відповідь: 8 см.

Задача 5. Висота циліндра дорівнює 8 см, радіус основи — 5 см. Циліндр перетнули площиною, паралельною осі так, що в перерізі дістали квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі.



Розв'язання. Нехай, $ABCD$ паралельний переріз, OO_1 вісь циліндра, висота.

($AD = AB = 8$ см, $AO = 5$ см). Відстань між віссю й

перерізом дорівнює відстані від точки O до перерізу. Ураховуючи, що твірна $AD \perp$ пл. ABO , маємо: пл. $ABC \perp ABO$.

Проведемо $OH \perp AB$.

Тоді $OH \perp$ пл. ABC .

Тобто відрізок OH — відстань від перерізу до осі.

Якщо $OH \perp AB$, то точка H — середина відрізка AB і $AH = 4$ см. Тоді з прямокутного трикутника AON знаходимо:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 3 (см).

V. Рефлексія. Підсумки уроку

Так чи ні? Для перевірки засвоєного теоретичного матеріалу надайте відповіді на запитання. Якщо ви згодні, то поставте знак “+”, якщо ні “-” Гра «Вірю-не вірю».

Запитання	Вірна відповідь
1. Твірні циліндра рівні.	+
2. Осьовий переріз циліндра – трикутник.	–
3. Твірні циліндра перпендикулярні основі.	+
4. Висота циліндра дорівнює його твірній.	+
5. Переріз циліндра площиною, паралельною основам, – коло.	+
6. Осьовий переріз циліндра – прямокутник.	+
7. Вісь циліндра перпендикулярна до його твірної.	–
8. Переріз циліндра паралельний основі - прямокутник.	-
9. Радіус нижньої основи циліндра не дорівнює радіусу верхньої основи	–
10. Циліндр – це результат обертання прямокутника навколо його сторони.	+
11. Основи циліндра рівні і паралельні.	+
12. Циліндр – це результат обертання рівнобедреного трикутника навколо його сторони.	–

VI. Домашнє завдання. 1. Розв’язати задачі: 10.2, 10.5, 10.12

2.3. Формування математичної компетентності як ключової при вивченні теми “Циліндр”

З метою формування математичної компетентності як ключової доречно пропонувати учням задачі, які потребують методу математичного моделювання. У своїх дослідженнях І.Лов'янова з цією метою пропонує вводити у зміст навчання математики практичні, прикладні та міжпредметні задачі [63].

- практичні – задачі, у яких хоча б один об'єкт є реальним або які відображують побутові чи виробничі ситуації з реальними числовими даними, проте головною у змісті задачі є її математична сутність, розв'язуються практичні задачі за допомогою використання математичних понять, фактів, способів діяльності, зокрема, потребують умінь раціонально обчислювати, розв'язувати рівняння і нерівності, користуватися інформаційними технологіями;

- прикладні – задачі, які виникають за межами математики, і які розв'язуються виключно методом математичного моделювання, якому властиві такі етапи: 1) побудова моделі (переклад з природної мови тієї галузі, де вона виникла на мову математики), 2) дослідження моделі (розв'язування отриманої математичної задачі); 3) аналіз отриманих результатів (переклад розв'язку задачі з мови математики на мову тієї галузі, де вона виникла);

- міжпредметні – практичні або прикладні задачі зміст яких відповідає цілям певної математичної теми й пов'язаний з темами програми інших навчальних дисциплін старшої школи (фізики, хімії, біології, економіки, тощо).

Наведемо приклади задач, дібраних за джерелами [63, 64].

Практичні задачі

Задача 1. Потрібно побудувати відкритий циліндричний резервуар з об'ємом V_0 і товщиною стінки d . Яким повинні бути розміри резервуара при мінімальних витратах матеріалу? (Відповідь: $\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$).

Задача 2. З круглої колоди вирізають балку з прямокутним перетином найбільшої площі. Знайдіть розміри перерізу балки, якщо радіус перерізу колоди дорівнює 30 см. (Відповідь: $30\sqrt{2} \times 30\sqrt{2}$).

Задача 3. Із дроту довжиною 80 см треба зробити прямокутник найбільшої площі. Знайти його розміри.

Задача 4. Скирда сіна має форму циліндра з конічним верхом. Радіус основи дорівнює 2,5 м, висота – 4 м, причому циліндрична частина скирди має висоту 2,2 м. Питома вага сіна $0,03 \text{ г/см}^3$. Визначте масу скирди сіна. (Відповідь: 1,6 т).

Прикладні задачі

Прикладні задачі на уроках математики - це потужний інструмент розвитку різноманітних умінь учнів. Вони допомагають не тільки зрозуміти теоретичні поняття, але й застосувати їх на практиці, аналізувати отримані результати та робити висновки. Розв'язуючи такі задачі, учні вчаться мислити критично, порівнювати різні підходи та розширюють свій кругозір. Крім того, прикладні задачі роблять навчання математики більш цікавим та актуальним, оскільки демонструють, як математичні знання можуть бути використані для вирішення реальних життєвих проблем.

Розглянемо декілька прикладних задач, які доцільно, на нашу думку, запропонувати учням під час вивчення теми «Циліндр».

Задача 1. Скільки банок фарби, місткістю 2,8 кг, потрібно придбати для фарбування в два шари 10 закритих металевих циліндричних бочок із діаметром дна 60 см і висотою 85 см, якщо для фарбування 1 м^2 металевої поверхні витрачається 120 г фарби?

Задача 2. Скільки кубометрів породи треба підняти на гору, щоб зробити шахтний стовбур діаметром 8 м і глибиною 600 м?

Задача 3. Свердло діаметром 12 мм робить 16 об/с при подачі 0,2 мм/об. Визначте об'єм металу, висвердленого цим свердлом за 10 с.

Задача 4. Визначте об'єм хокейної шайби для гри в хокей, виконавши



потрібні вимірювання.

Задача 5. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення ринви завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 3 % її площі?

Задача 6. Чи вистачить 8500 м² ізоляційної стрічки для двократного покриття нею кілометра газопроводу, якщо всі труби мають діаметр 1420 мм?

Задача 7. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої 20 см, опущено деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 12 см. Який об'єм має деталь?

Задача 8. Довжини двох круглих колод рівні, а їхні діаметри співвідносяться як 2:3. Як співвідносяться їхні об'єми?

Задача 9. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної кубометром вилитої нафти, якщо товщина її плівки 1 мм.

Задача 10. Цеглина розмірами 250×120×65 мм має 19 отворів діаметром по 16 мм кожний. Визначте об'єм цеглини?

Моделювання як метод пізнання передбачає: 1) побудову, конструювання моделі; 2) дослідження моделі (експериментальне або уявне); 3) аналіз отриманих результатів та їх перенесення на справжній об'єкт вивчення. Через названі три етапи проходять, розв'язуючи прикладні задачі. Розглядаючи математичне моделювання як специфічне відтворення реальності у вигляді абстракцій і ідеалізацій науки, оперування ними за суворими правилами логіки, слід відзначити його характерні особливості:

- формалізація знання;

- оперування формальними структурами, структурними взаємозв'язками, зв'язками;
- перехід від однієї операції до іншої і встановлення між ними діалектичних взаємозв'язків;
- згортання розумового процесу [63].

Таким чином, розв'язування учнями прикладних задач під час вивчення теми «Циліндр» дозволяє розширити їхній світогляд та активізує розумову діяльність. Задачі прикладного змісту допомагають учням глибше зрозуміти абстрактний теоретичний матеріал з геометрії.

Практичну і прикладну спрямованість математичних понять і фактів також ефективно формувати в учнів методами проєктної діяльності. Проаналізувавши календарне планування теми пропонуємо тематику навчальних проєктів в темі «Циліндр» (табл. 2.6.)

Таблиця 2.6.

Проєктна діяльність в темі «Циліндр»

Тема уроку	Проєкт з теми
ТІЛА ОБЕРТАННЯ. ЦИЛІНДР	
Тіла і поверхні обертання	Циліндр і технології
Циліндр та його елементи	
Осьовий перерізи циліндра	
Перерізи циліндра площинами, паралельними основі	
Перерізи циліндра площинами, паралельними його осі;	
Комбінації геометричних тіл	
Розв'язування задач і вправ	
Узагальнення і систематизація знань	
Тематична контрольна робота	
ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ	
Об'єм циліндра	Циліндри у фізиці Дослідження зв'язків між об'ємом і площею поверхні циліндра
Розв'язування задач і вправ	
Поняття про площу поверхні. Площа бічної і повної поверхонь циліндра	
Розв'язування задач і вправ	
Узагальнення і систематизація знань	
Тематична контрольна робота	

2.4. Задачний підхід до вимірювання математичної компетентності.

Одним із важливих етапів роботи з формування математичної компетентності учнів є її вимірювання, яке як правило здійснюється шляхом оцінювання результатів навчання. Таке оцінювання здійснюється за допомогою різних методів, вибір яких зумовлюється особливостями змісту навчального предмета/ інтегрованого курсу, його обсягом, рівнем узагальнення, віковими особливостями учнів із застосуванням різних способів і засобів. Зокрема в рекомендаціях щодо оцінювання виокремлюють:

- усне опитування (індивідуальне, групове тощо);
- спостереження;
- аналіз портфолію;
- письмові завдання (окремі навчальні завдання, зокрема тестові з використанням ІТ, а також діагностувальні, підсумкові роботи);
- практичних завдань (завдання на лабораторному обладнанні, реальних об'єктах; розрахункові та розрахунково-графічні роботи; навчальний проєкт, робота з картами, діаграмами; заповнення таблиць, побудова схем, моделей, зокрема з використанням електронних засобів навчання тощо);
- завдання із використанням ІТ (онлайн-тести, презентації результатів виконаних завдань та досліджень, комп'ютерні продукти тощо);
- самооцінювання, взаємооцінювання [66].

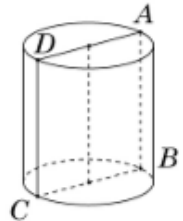
Оцінювання здійснюється із застосуванням завдань різних когнітивних рівнів: на відтворення знань, на розуміння, на застосування в стандартних і змінених навчальних ситуаціях, уміння висловлювати власні судження, ставлення тощо.

Розглянемо задачі з теми «Циліндр», які пропонуються учням в завданнях ЗНО 2021-2019 роки і НМТ в 2024-2022 роках. Задачі дібрані з постійно діючого сайту ОСВІТА.UA [46, 65]

2024 рік

4. На рисунку зображено циліндр, прямокутник $ABCD$ – його осьовий переріз. Укажіть відрізок, який є твірною цього циліндра.

- А AD
- Б BC
- В AC
- Г BD
- Д AB



2023 рік

8. Доберіть закінчення речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Циліндр утворений обертанням...

- А квадрата навколо його сторони».
- Б прямокутника навколо його діагоналі».
- В прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи».
- Г прямокутного трикутника навколо його катета».
- Д квадрата навколо його діагоналі».

21. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 8 см. Визначте площу S (см²) бічної поверхні цього циліндра. У відповіді запишіть значення виразу $\frac{S}{\pi}$.

Відповідь:

2022 рік

10. Об'єм циліндра дорівнює 72π . Визначте висоту цього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 3.

А	Б	В	Г	Д
24	12	9	8	6

2021 рік

рівень стандарту

28. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить в нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і його осьовий переріз $ABCD$.
2. Укажіть кут β , що утворює пряма AC із площиною нижньої основи циліндра.
3. Визначте об'єм циліндра.

профільний рівень

32. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β . На колі нижньої основи вибрано точку K так, що градусна міра дуги AK дорівнює 90° .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і вкажіть кут γ між площиною (KBD) і площиною нижньої основи циліндра. Обґрунтуйте його положення.
2. Визначте кут γ .

2020 рік

24. Установіть відповідність між вимірами циліндра (1–3) та правильним щодо нього твердженням (А – Д).

Виміри циліндра

- 1 радіус основи дорівнює 6, висота – 4
- 2 радіус основи дорівнює 2, висота – 6
- 3 радіус основи дорівнює 4, висота – 6

Твердження щодо циліндра

- А циліндр утворено обертанням прямокутника зі сторонами 4 та 6 навколо більшої сторони
- Б площа основи циліндра дорівнює 12π
- В твірна циліндра дорівнює 4
- Г площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π
- Д об'єм циліндра дорівнює 48π

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

2019 рік

32. У нижній основі циліндра проведено хорду AB , довжина якої дорівнює s . Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом α . Через хорду AB проведено площину β паралельно осі циліндра на відстані d ($d \neq 0$) від неї.

1. Зобразіть переріз циліндра площиною β та вкажіть його вид.
2. Обґрунтуйте відстань d .
3. Визначте площу цього перерізу.

Підготовчі завдання НМТ з розділу геометрії «Стереометрія», тема «Тіла обертання».

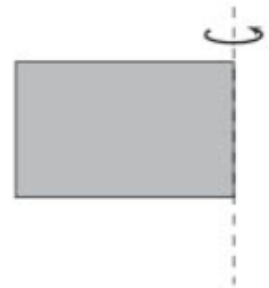
№12

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, діагональ якого дорівнює 10 см. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 8 см.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	3 см	6 см	12 см

№5

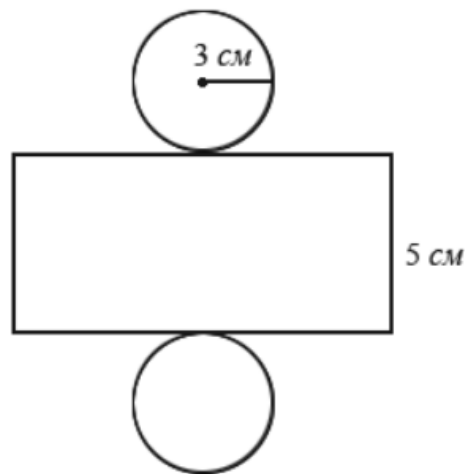
Прямокутник із сторонами 8 см і 10 см обертається навколо меншої сторони (див. рисунок). Знайдіть площу повної поверхні отриманого тіла обертання.



А	Б	В	Г	Д
$360\pi \text{ см}^2$	$160\pi \text{ см}^2$	$260\pi \text{ см}^2$	$288\pi \text{ см}^2$	$800\pi \text{ см}^2$

№8

На рисунку зображено розгортку циліндра. Знайдіть його об'єм.



А	Б	В	Г	Д
9 см^3	$15\pi \text{ см}^3$	$30\pi \text{ см}^3$	$36\pi \text{ см}^3$	$45\pi \text{ см}^3$

№15

Довжина кола основи циліндра дорівнює $18\pi \text{ см}$. Визначте площу бічної поверхні цього циліндра, якщо його висота дорівнює 7 см.

А	Б	В	Г	Д
$126\pi \text{ см}^2$	$207\pi \text{ см}^2$	$252\pi \text{ см}^2$	$288\pi \text{ см}^2$	$567\pi \text{ см}^2$

№20

Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 32 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$30\pi \text{ см}^2$	$60\pi \text{ см}^2$	$90\pi \text{ см}^2$	$120\pi \text{ см}^2$	$360\pi \text{ см}^2$

№ 18

Циліндр, радіус основи якого дорівнює 4 см, висота – 12 см, перетнули площиною, паралельною до його основи (див. рисунок 1). Утворилося два циліндри (див. рисунок 2). Визначте суму площ повних поверхонь утворених циліндрів.

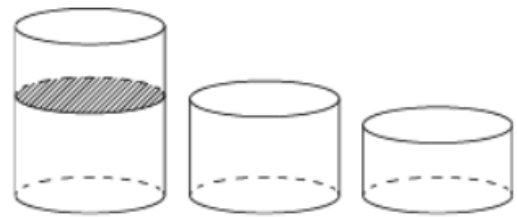


Рис. 1

Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
$96\pi \text{ см}^2$	$108\pi \text{ см}^2$	$128\pi \text{ см}^2$	$144\pi \text{ см}^2$	$160\pi \text{ см}^2$

№27

Через точки A і B , що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу — $60\sqrt{2} \text{ см}^2$. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi \text{ см}^2$.

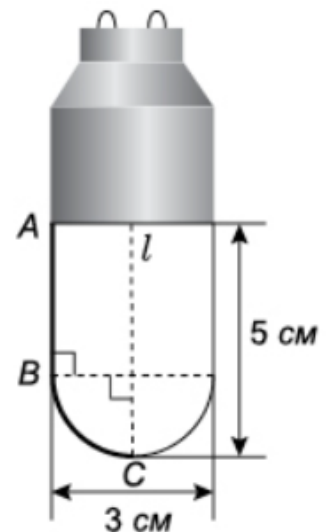
№30

Об'єм циліндра дорівнює $72\pi \text{ см}^3$. Знайдіть висоту цього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 3 см.

А	Б	В	Г	Д
24 см	12 см	9 см	8 см	6 см

№36

На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l . Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної.



А	Б	В	Г	Д
39 см^2	42 см^2	45 см^2	48 см^2	51 см^2

№33

Лист заліза, що має форму прямокутника $ABCD$ ($AB = 50$ см), згортають таким чином, щоб отримати циліндричну трубу (див. рисунки 1 і 2). Краї AB і CD зварюють між собою без накладання одного краю на інший. Обчисліть площу бічної поверхні отриманого циліндра (труби), якщо діаметр його основи дорівнює 20 см. Виберіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною листа заліза та швом від зварювання знехтуйте.

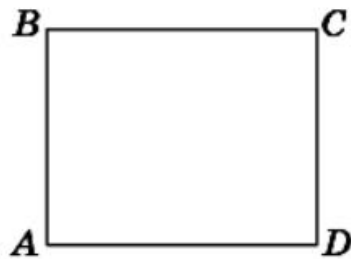


Рис. 1

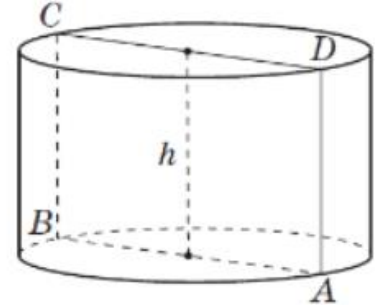


Рис. 1

А	Б	В	Г	Д
1570 см^2	3150 см^2	5240 см^2	6300 см^2	1000 см^2

№39

На рисунку зображено циліндр, радіус основи якого дорівнює 6, а висота – h . Чотирикутник $ABCD$ – осьовий переріз цього циліндра. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

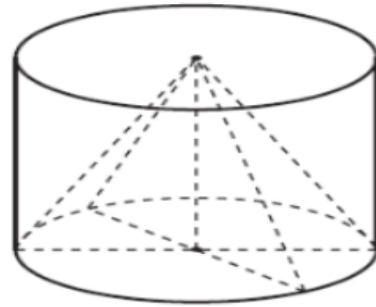
- 1 Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 36, якщо
- 2 Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює 42, якщо
- 3 Об'єм циліндра дорівнює 108л, якщо
- 4 Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 48л, якщо

Закінчення речення

- А $h = 3$.
- Б $h = 3,5$.
- В $h = 4$.
- Г $h = 4,5$.
- Д $h = 6$.

№49

У циліндр з радіусом основи 3 см і висотою 4 см вписано конус (див. рисунок). До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

- | | | | |
|----------|---|----------|------------------------|
| 1 | Площа бічної поверхні циліндра дорівнює | А | $9\pi \text{ см}^2$. |
| 2 | Площа повної поверхні циліндра дорівнює | Б | $12\pi \text{ см}^2$. |
| 3 | Площа основи конуса дорівнює | В | $15\pi \text{ см}^2$. |
| 4 | Площа бічної поверхні конуса дорівнює | Г | $24\pi \text{ см}^2$. |
| | | Д | $42\pi \text{ см}^2$. |

№52

Укажіть формулу для обчислення висоти H циліндра, площа основи якого дорівнює S , а об'єм – V .

А	Б	В	Г	Д
$H = \frac{S}{V}$	$H = \frac{V}{S}$	$H = VS$	$H = \frac{V}{3S}$	$H = \frac{3V}{S}$

№53

Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π , а довжина кола його основи – 4π . Визначте висоту цього циліндра.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	6	8

№54

Укажіть формулу для обчислення площі S бічної поверхні циліндра, довжина кола основи якого дорівнює l , а висота – h .

А	Б	В	Г	Д
$S = \frac{l}{h}$	$S = 2lh$	$S = lh^2$	$S = lh$	$S = \frac{h}{l}$

№57

Площа повної поверхні циліндра дорівнює 92л, а площа його бічної поверхні – 56л. Визначте площу основи цього циліндра.

А	Б	В	Г	Д
6л	18л	13л	48л	36л

№72

Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 8 см. Визначте площу S (см²) бічної поверхні цього циліндра. У відповіді запишіть значення виразу $\frac{S}{\pi}$

№56

Установіть відповідність між вимірами циліндра (1–3) та правильним щодо нього твердженням (А – Д).

Виміри циліндра

Твердження щодо циліндра

- | | |
|--|---|
| 1 радіус основи дорівнює 6,
висота – 4 | А циліндр утворено обертанням
прямокутника зі сторонами 4 та 6
навколо більшої сторони |
| 2 радіус основи дорівнює 2,
висота – 6 | Б площа основи циліндра дорівнює 12л |
| 3 радіус основи дорівнює 4,
висота – 6 | В твірна циліндра дорівнює 4 |
| | Г площа бічної поверхні циліндра
дорівнює 24л |
| | Д об'єм циліндра дорівнює 48л |

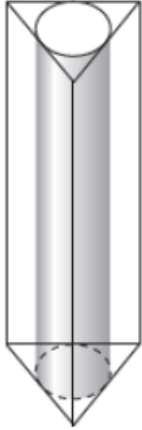
№63

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить в нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β .

- Зобразіть на рисунку заданий циліндр і його осьовий переріз $ABCD$.
- Укажіть кут β , що утворює пряма AC із площиною нижньої основи циліндра.
- Визначте об'єм циліндра.

№60

Цукерку циліндричної форми висотою 10 см і радіусом основи 1 см запаковано в коробку, що має форму правильної трикутної призми (див. рисунок). Основи циліндра вписано у відповідні основи призми. Основи коробки (призми) виготовлено з поліетилену, а всі її бічні грані – з паперу. Визначте площу паперу, витраченого на виготовлення такої коробки. Укажіть відповідь, найближчу до точної. Витратами паперу на з'єднання граней коробки знехтуйте.



- А 55 см^2
- Б 75 см^2
- В 105 см^2
- Г 115 см^2
- Д 135 см^2

№64

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β . На колі нижньої основи вибрано точку K так, що градусна міра дуги AK дорівнює 90° .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і вкажіть кут γ між площиною (KBD) і площиною нижньої основи циліндра. Обґрунтуйте його положення.
2. Визначте кут γ .

№66

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу утворює з площиною верхньої основи циліндра кут β . Діаметр основи циліндра дорівнює d .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і його осьовий переріз $ABCD$.
2. Укажіть кут β , що утворює пряма AC із площиною верхньої основи циліндра.
3. Визначте об'єм циліндра.

№67

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу утворює з площиною верхньої основи циліндра кут β . Діаметр основи циліндра дорівнює d . На колі нижньої основи вибрано точку K так, що відрізок AK видно з точки D під кутом 30° .

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і вкажіть кут γ між площиною (CKA) і площиною нижньої основи. Обґрунтуйте його положення.
2. Визначте кут γ .

№68

Визначте об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота – 10 см.

- А** $40\pi \text{ см}^3$
- Б** $\frac{40\pi}{3} \text{ см}^3$
- В** $\frac{160\pi}{3} \text{ см}^3$
- Г** $80\pi \text{ см}^3$
- Д** $160\pi \text{ см}^3$

№69

Об'єм циліндра дорівнює 72π . Визначте висоту цього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 3.

- А** 24
- Б** 12
- В** 9
- Г** 8
- Д** 6

№71

Доберіть закінчення речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Циліндр утворений обертанням...

- А** квадрата навколо його сторони».
- Б** прямокутника навколо його діагоналі».
- В** прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи».
- Г** прямокутного трикутника навколо його катета».
- Д** квадрата навколо його діагоналі».

Висновки до розділу II

Другий розділ дослідження був присвячений опису методики залучення задачного підходу до навчання теми «Циліндр». Обрання цієї теми обґрунтовуємо наступним, по перше тема відноситься до двох потужних змістових ліній курсу геометрії, а саме «Геометричні фігури та їх властивості», «Геометричні величини та їх вимірювання»; по друге тема «Круглі тіла» є завершальною в курсі стереометрії, а за своїм змістом дозволяє не тільки опанувати нові знання але й узагальнити, систематизувати і використати у процесі навчання такі важливі теми стереометрії, як «Прямі і площини у просторі», «Многоранники». Так властивості паралельності площин використовуються при побудові перерізу циліндра площиною, тема про три перпендикуляри використовується для обґрунтування кутів між площинами, знаходження відстаней від заданої точки до площини; властивості многогранників використовуються в задачах на комбінацію циліндра і призми, циліндра і піраміди. Обрання теми «Циліндр» для дослідження також обумовлене постійною наявністю задач цієї теми в завданнях ЗНО і НМТ. А тому в другому розділі роботи ми представили логіко-математичний аналіз теми за підручником автора Неліна Є.П. та ін., запропонували систему задач для формування предметних математичних компетентностей учнів, визначених діючою програмою, обґрунтували доречність задачного підходу до формування математичної компетентності як ключової. Оскільки вимірювання сформованості математичної компетентності учнів як правило здійснюється шляхом оцінювання результатів навчання, то в роботі нами дібрані задачі рівня ЗНО, як показник вимірювання компетентностей учнів з теми «Циліндр».

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено методичні прийоми реалізації задачного підходу до формування математичної компетентності старшокласників у навчанні геометрії на профільному рівні підготовки.

В ході дослідження були розв'язані наступні завдання:

- Визначені методичні особливості компетентнісного підходу у формуванні математичної компетентності старшокласників.

Аналіз психолого-педагогічної літератури засвідчив, що проблему компетентнісного підходу в освіті ґрунтовно досліджують українські та зарубіжні науковці. Перетворення змісту освіти згідно з компетентнісним підходом визначається в першу чергу принципами його обрання та структурування, спрямованими на кінцевий результат освітнього процесу, а саме, набуттям учнем компетентностей.

Окрім ключових компетентностей, спільних для всіх предметних областей, виділяються і предметні компетенції – це специфічні здібності, необхідні для ефективного виконання конкретної дії в конкретній предметній області і які включають вузькоспеціальні знання, особливого роду предметні вміння, навички, способи мислення. Зокрема, математична компетенція - це здібність структурувати дані (ситуацію), виокремлювати математичні відношення, створювати математичну модель ситуації, аналізувати та перетворювати її, інтерпретувати отримані результати. Математична компетентність учня є важливою для ефективного вирішення проблем, які виявляються у повсякденному житті, що підкреслює необхідність розвитку математичних компетентностей.

- Розкрито сутність задачного підходу до навчання геометрії на профільному рівні підготовки.

Виокремлено основні критерії ефективного навчання учнів розв'язувати задачі, відмічено, що системи задач з високим рівнем структурної організації, є не тільки ефективним засобом цілеспрямованого

математичного розвитку учнів, а й засобом формування і розвитку їх пізнавальної самостійності, активності, інтересу, світогляду й інших якостей всебічно розвиненої особистості. На основі аналізу джерел вироблене розуміння задачного підходу до навчання, а саме це введення в зміст навчальної інформації таких завдань, які активізують мислинневі процеси учнів, закріплюють у них уміння оперувати теоретичними знаннями в практичних ситуаціях і представлені у вигляді тренувальних вправ на засвоєння понять, правил та алгоритмів; пізнавальних задач; творчих (евристичних) задач.

- здійснено логіко-математичний аналіз змісту теми «Циліндр» за підручником «Геометрія» для 11 класів профільного рівня автора, Є.Неліна, О. Долгова;

- розроблені методика та прийоми формування ключової математичної компетентності учнів при вивченні теми «Циліндр» з використанням задач. У дослідженні запропоновані прикладні та практичні задачі розв'язування яких сприяє засвоєнню учнями метода математичного моделювання.

- підібрані та систематизовані задачі з теми «Циліндр» з метою формування предметної математичної компетентності учнів за такими темами: 1.Задачі на елементи циліндра. Переріз циліндра площиною. 2.Задачі на площу бічної і повної поверхні циліндра. 3.Задачі на об'єм циліндра. 4.Задачі на комбінацію циліндра і призми, циліндра і піраміди. .

Поставлені завдання виконані, мета дослідження досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акусок А.М. Теоретичні засади формування змісту загальнопедагогічної підготовки майбутнього вчителя: автореф. Дис. канд. Пед. Наук : 13.00.09 / Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. Київ, 2009. 21 с.
2. Антоненко М. І. Розв'язування геометричних задач: книга для вчителя. Київ : Радянська школа, 1991. 128 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1989.– 376с.;
4. Бібік Н. М. Компетентнісний підхід: рефлексивний аналіз застосування / Н. М. Бібік // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи : [кол. монографія] / [Бібік Н. М., Ващенко Л. С., Савченко О. Я. та ін.] ; заг. ред. О. В.Овчарук. – К. : К.І.С., 2004. – С. 45–53. – (Бібліотека з освітньої політики).
5. Бобрицька В. І. Компетентнісний підхід у професійній підготовці майбутніх викладачів вищої школи. Проблеми освіти. 2011. № 66. Ч. 1. С. 39–43.
6. Богданович М.В., Будна Н. О., Лищенко Г.П. Урок математики в початковій школі : навч.посіб. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004. 208 с. 68
7. Большакова І. О. Практики та підходи до дистанційного навчання – рекомендації для вчителів. Нова українська школа, 23 квітня 2020 р. URL : <https://nus.org.ua/articles/praktyky-ta-pidhody-do-dystantsijnogo-navchannya-rekomendatsiyi-dlya-vchyteliv/>.
8. Болубаш Н.М. Теоретичні засади формування професійної компетентності майбутніх економістів / Н.М. Болубаш. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://referatu.net.ua/newreferats/27/183142>

9. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Колесник Т. В., Мальований Ю. І. Математика : підруч. Для 10 кл. Загальноосвіт. Навч. Закладів: рівень стандарту. Київ: Видавничий дім «Оріон», 2018. 288 с.
10. Васильєва Д. В. Математичні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів. Проблеми сучасного підручника. Вип.21, 2018. С. 83–91.
11. Волошина С. В. Методична розробка на тему: «Методика розв’язування задач з геометрії». URL :<https://naurok.com.ua/metodichna-rozrobka-na-temu-metodika-rozv-yazuvannya-zadach-z-geometri-123264.html>
12. Глобін О. І., Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Вашуленко О. П., Мацько Н. Д., Хмара Т. М. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посібник. Київ: Педагогічна думка, 2015. 245 с.
13. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду. Вища освіта України. 2008. №3. С. 23–30.
14. Головань М. С. Компетенція та компетентність: порівняльний аналіз понять / М. С. Головань // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. Науковий журнал. –Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2011. – № 8(18). – с.224-234.
15. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М.С. Головань // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2012» : матеріали міжнар. наук.-практ. конф. (6–7 груд. 2012 р., м. Суми). Частина I / упорядник Чашечникова О.С. — Суми : Мрія, 2012. — С. 36–38.
16. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]//Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text> Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. [Електронний ресурс] //Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011>

17. Державні стандарти професійної освіти: теорія і методика : [монографія] / за ред. Н. Г.Ничкало. – Хмельницький : ТУП, 2002. – 334 с.
18. Законів України «Про освіту» [Електронний ресурс] // Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text>
19. Законів України «Про повну загальну середню освіту» [Електронний ресурс] // Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text>
20. Зимняя И. А. Ключевые компетентности как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании / Зимняя И. А. – М. : Исслед. центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. – 40 с.
21. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2009. № 2. С. 165–174.
22. Іщик А., Білик Т.С. Формування математичної компетентності учнів початкової школи шляхом розв'язання творчих завдань. Актуальні проблеми формування творчої особистості педагога в контексті наступності дошкільної та початкової освіти: збірник матеріалів V Міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції (Вінниця, ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, 22-23 квітня 2021 р.) / за ред. О.А.Голюк ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, факультет дошкільної і початкової освіти імені Валентини Волошиної. Вінниця: ТОВ «Меркьюрі-Поділля, 2021. Вип. 10. 371–374 с.
23. Король Я.А. Формування практичних умінь і навичок на уроках математики / Я.А.Король. – Тернопіль: Навч. книга – Богдан, 2000. – 136 с.
24. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник— Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 224 с.
25. Лейко С. В. Поняття «компетенція» та «компетентність»: теоретичний аналіз. URL: <https://bit.ly/3ErZWU9>.

26. Лов'янова І.В., Приходько Г.О. Роль задач у формування логічного мислення учнів на уроках математики. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Збірник наукових праць. Випуск ІV.– Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2008.– Т.1: Теорія та методика навчання математики.– С. 352 – 356;

27. Локшина О. І. Розвиток компетентісного підходу в освіті Європейського Союзу. Шлях освіти. 2007. №1. С. 16–25

28. Луговий В. І. Європейська концепція компетентісного підходу у вищій школі та проблеми її реалізації в Україні. Педагогіка і психологія. 2009. №2. С. 13–26.

29. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень Електронний ресурс. Режим доступу <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

30. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії : монографія / наук. Ред. Д. Пед. Н., проф. О. І. Скафа. Вінниця : ТОВ „Нілан-ЛТД”, 2013. 450 с.

31. Мачача Т. С. Теоретико-методологічні засади проектування змісту технологічної освіти учнів середньої загальноосвітньої діяльності школи. Український педагогічний журнал. 2016. № 3. С. 105–114.

32. Національної доктрини розвитку освіти, [Електронний ресурс] // Режим доступу : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/347/2002#Text>

33. Нелін Є. П. Алгебра та початки аналізу. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова – Харків: Гімназія, 2011. –447 с.

34. Нова українська школа: poradnik dla vchytelja. Київ : Літера ЛТД. 2019. 208 с

35. Онопрієнко О., Листопад Н., Скворцова С. Компетентнісний підхід до навчання математики. Київ : Редакції газет з дошкільної та початкової освіти, 2014. 128 с.

36. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA–2006 / [Баранова В.Ю., Ковалева Г.С., Кошеленко Н.Г., Красновский Е.А. и др.]. — М. : Центр оценки качества образования ИСМО РАО, 2007. — 99 с.

37. Передерій І.Г., ОЄ Гомотюк, В. О. Сидоренко - 2020 - reposit.nupr.edu.ua. Документно-інформаційні комунікації в умовах глобалізації: стан, проблеми та перспективи. nupr.edu.ua

38. Пометун О. І. Дискусія українських педагогів навколо питань запровадження компетентнісного підходу в українській освіті. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / за заг. Ред. О. В. Овчарук. Київ : К. І. С., 2004. С. 64-70.

39. Пометун О. І. Компетентнісний підхід до оцінювання рівнів досягнень учнів.— К.: Презентація на нараді Центру тестових технологій 19.10.2004 р.— С. 16–18.

40. Приходько Г.О., Лов'янова І.В. Задачі на уроках математики як засіб розвитку логічного мислення учнів // Студентська практика – ключ до майбутньої професії. Економічні науки: матеріали міжнародної студентської науково-практичної конференції від 26 – 28 жовтня, 2007р.– Ялта: РВВ – КГУ, 2007.– С. 106 – 107;

41. Прус А.В. Про компетентнісний підхід у навчанні математики в класах суспільно-гуманітарного напрямку [Електронний ресурс] // Режим доступу : <http://E:/Documents%20and%20Settings/Admin/Мои%20>

42. Про вищу освіту. Закон України від 1 липня 2014 року № 1556-VII. URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text>

43. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [моногр.] / С.А. Раков. — Х. : Факт, 2005. — 360 с.

44. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. Математика в школі. 2005. № 5. С. 2–8.
45. Рашкевич Ю. М. Компетентнісний підхід в побудові навчальних програм. 2014. 18 с. URL: http://www.mnau.edu.ua/files/03_05/2012-rashkevych1.pdf
46. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2019-2021 Український центр оцінювання якості освіти. 20 с. URL:http://osvita.ua/doc/files/news/608/60848/MatematykaOsnovne-ZNO_2019Zoshyt_1.pdf 552
47. Селевко Г. К. Компетентности и их классификация / Г. К. Селевко // Народное образование. – 2004. – № 4. – С. 138–143..
48. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : підручник / З. І. Слєпкань.– 2-ге вид. – К. : Вища школа, 2006. – 582 с.
49. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів.– К.: Зодіак-ЕКО, 2000.– 512 с.: іл.;
50. Тарасенкова Н. А. Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект. Математика в рідній школі. 2016. № 11 (179). С. 26–30
51. Терешин Д. А. Методическая система обучения геометрии в классах физико-математического профиля на основе задачного подхода : дисс. канд. пед. наук : 13.00.02 / Д. А. Терешин. – Москва, 2014. – 190 с.
52. Химинець В. В. Компетентнісний підхід до професійного розвитку вчителя : Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти. URL : <https://bit.ly/3gaPg2R>
53. Kilpatrick A.J., Swaford J., Findell B. Adding It UP: Helping children learn Mathematcs. Washington, DC: Natonal Academy Press, 2001.
54. Niss M., Jensen T. H. (eds.): Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, Undervisningsministeriet (Ministry of Education). 2002. № 18. P. 1–334.

55. Lithner J., Bergqvist E., Bergqvist T., Boesen J., Palm T., Palmberg B. Mathematical competencies: A research framework. In C. Bergsten, E. Jablonka & T. Wedege (Eds.). *Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions. Proceedings of MADIF 7, the Seventh Mathematics Education Research Seminar, Stockholm, January 26 – 27, 2010.* P. 157–167.
56. Programme for International Student Assessment. URL: <http://pisa.testportal.gov.ua>
57. Артеменко Н.М. Задачі прикладного змісту. Стереометрія. 11 клас / Н.М. Артеменко. // *Математика в школах України.* – 2008. – № 5.
58. Гоменюк Г. В. Методичні засади реалізації компетентнісного підходу в навчанні алгебри учнів основної школи: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2016. 22 с.
59. Прус А. Прикладна спрямованість стереометрії: 10—11 кл. / А. Прус, В. Швець. – К.: Шк. світ, 2007. – 128 с.
60. Сафонова І. Я. Компетентнісний підхід до навчання математики старшокласників. Педагогічна освіта: теорія і практика. Педагогіка. Психологія. 2014. № 21. С. 53–57.
61. Скворцова С. О. Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики. *«Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку».* 2010. Вип. № 4. 34
62. Скворцова С. О., Гаєвець Я. С. Підготовка майбутніх учителів початкових класів до навчання молодших школярів розв'язувати сюжетні математичні задачі: монографія. Харків : «Ранок-НТ», 2013. 332 с.
63. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект: монографія / І. В. Лов'янова. – Черкаси: Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. – 368 с.
64. Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету. – Випуск 8. – Суми: ФМФ, 2014. – 364с. 2. Касіяненко Г.А. Застосування задач практичного та прикладного змісту в курсі математики як

один із шляхів формування компетентної особистості / Г.А. Касіяненко, Т.О. Кіслова: навчально -методичний посібник. – Вінниця: ММК, 2017. – 93 с.

65. Матеріали ЗНО/НМТ сайту ОСВІТА.UA. Режим доступу: <https://osvita.ua/>

66. Оцінювання результатів навчання учнів 5–9 класів НУШ. Режим доступу: <https://osvita.ua/school/estimation/89059/>

67. Геометрія 7 – 11. Планіметрія. Стереометрія. Збірник задач / Гайштут О.Г. – К.: КІМО, 1999. – 144 с.

68. Завдання з математики для екзаменів за курс спеціалізованих фізико-математичних шкіл, ліцеїв і гімназій / Литвиненко Г.М., Собко М.С. – К.: Освіта, 1993. 80 с.

69. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас. За редакцією З.І. Слєпкань. Харків: Гімназія, 2002. – 176 с.

70. Педагогіка та психологія : завдання та тести. посібник – довідник для вступників до вищих навчальних закладів. К.: Генеза, 1993. – Ч.1. 208 с. Ч.2. – 90 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Особливості системи задач на засвоєння теореми і її доведення:

1. Наявність задач на розкриття необхідності знання математичного факту, сформульованого в теоремі.
2. Наявність задач на актуалізацію математичних фактів, що використовуються при доведенні даної теореми, або фактів, для яких дана теорема є узагальненням, а також на актуалізацію способів доведення, аналогічних тим, що використовуються в даній теоремі (наприклад, способу від супротивного).
3. Наявність задач на обчислення і доведення або на побудову, які приводять учнів до усвідомлення факту, сформульованого в теоремі.
4. Наявність задач на засвоєння формулювання теореми.
5. Наявність задач на засвоєння окремих етапів доведення теореми.
6. Наявність задач, в ході розв'язування яких повторюється хід доведення теореми (наприклад, при зміненому кресленні).
7. Наявність задач на знаходження іншого способу доведення факту, сформульованого в теоремі.
8. Наявність задач на застосування факту, сформульованого в теоремі, для отримання нових математичних фактів, встановлення кількісних співвідношень між об'єктами або отримання способів побудови об'єктів.

Особливості системи задач на засвоєння правил (алгоритмів):

1. Наявність задач на обґрунтування необхідності розгляду правила.
2. Наявність задач на актуалізацію знань, необхідних для обґрунтування правил, і умінь, необхідних для виконання правил.
3. Наявність задач на виконання окремих операцій, що входять в алгоритм (правило).
4. Наявність задач на застосування правил в різних ситуаціях.

ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1.

Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів

Рівні навчальних досягнень учнів	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів
<i>I. Початковий</i>	1	Учень(учениця) розпізнає тіла обертання. Зображує ескіз запропонованої фігури; знаходять на малюнку елементи тіл обертання; за допомогою вчителя виконує елементарні завдання.
	2	Учень(учениця) вибирає одно крокові завдання на знаходження елементів тіл обертання. Впізнає радіус, висоту, твірну тіл обертання
	3	Учень(учениця) обчислює площу, об'єм за допомогою вчителя(або опорного конспекту)розв'язує найпростіші завдання.
<i>II. Середній</i>	4	Учень(учениця) формулює означення та основні властивості тіл обертання;називає формули площі та об'ємів тіл обертання Виконує за зразком завдання обов'язкового рівня.
	5	Учень(учениця) дає та ілюструє прикладами з підручника чи конспекту означення та властивості тіл обертання Розв'язує завдання обов'язкового рівня з частковим поясненням.
	6	Учень(учениця) дає та ілюструє власними прикладами означення тіл обертання. Самостійно розв'язує завдання обов'язкового рівня з достатнім поясненням, записує формули площі та об'єм. Розв'язує завдання обов'язкового рівня з частковим поясненням.
<i>III. Достатній</i>	7	Учень(учениця) застосовує означення та властивості тіл обертання для визначення властивостей конкретного тіла. Зображує ескізи тіл обертання. Розв'язує завдання у знайомих ситуаціях. Знає основні способи розв'язування завдань з застосуванням знань з планіметрії. Самостійно виправляє вказані помилки; розв'язує завдання, передбачені програмою, без достатніх пояснень.
	8	Учень(учениця) володіє темою та розв'язує завдання, передбачені програмою (розв'язання на знаходження елементів тіл їх площі та об'єм та ін.) з частковими поясненнями, частково аргументує математичні міркування і розв'язування завдань.
	9	Учень(учениця) вільно володіє поняттями тіл обертання та їх властивостями,способами розв'язування завдань на тіла обертання зазначеними програмою. Самостійно виконує завдання у знайомих ситуаціях з достатнім поясненням; виправляє допущені помилки; повністю аргументує обраний спосіб розв'язування; аналізує можливості різних шляхів під час розв'язування. Будує ескізи тіл обертання та їх елементів;будує перерізи.
<i>IV. Високий</i>	10	Знання вміння й навички повністю відповідають вимогам програми. Учень(учениця) усвідомлює ці знання, вміє достатньо їх обґрунтовувати; під керівництвом вчителя знаходить додаткові джерела інформації та самостійно їх використовує; розв'язує завдання з повним поясненням та обґрунтуванням; застосовує різні методи при розв'язуванні завдань на тіла обертання

	11	Учень(учениця) вільно і правильно висловлює міркування щодо тіл обертання та їх властивостей, розв'язування завдань, переконливо їх аргументує; самостійно знаходить джерела інформації та опрацьовує їх; використовує набуті знання та вміння в незнайомих ситуаціях; знає основні методи розв'язання завдань на площині та просторі; визначає якісну характеристику будь-якої формули й застосовує її; використовує властивості тіл обертання й вміє їх застосовувати з необхідним обґрунтуванням
	12	Учень(учениця) виявляє варіативність мислення, шукає раціональність в виборі способу розв'язання завдань на тіла обертання; вміє узагальнювати і систематизувати знання з теми у вигляді опорного сигналу, таблиці чи моделі здобутих знань; здатний(а) до розв'язання нестандартних задач або застосовувати нестандартні прийоми у їх розв'язанні.

ДОДАТОК В

Характеристика рівнів навчальної підготовки

Таблиця В.1

Характеристика базового рівня

Бал	Результати	Критеріальні завдання і задачі
4	Відтворення елементів теорії базового змісту - означень, теорем, аксіом. Базові навички.	Завдання на відтворення означень, теорем, правил, формул з наведенням прикладів. Завдання на виконання дії за елементом теорії з простими і нескладними об'єктами вивчення.
5	Базові уміння.	Комбіновані (синтетичні) задачі на використання двох елементів теорії. Типи задач: ✓ задача зі схемою підведення під поняття плюс введення наслідку (алгоритмічна дія); ✓ задачі за схемою алгоритм розпізнавання плюс алгоритм перетворення; ✓ задачі зі схемою алгоритм перетворення плюс алгоритм розпізнавання.
6	Уміння застосовувати базовий зміст в основних типових ситуаціях.	Типи задач: ✓ не складні прикладні задачі; ✓ задачі з використанням родового поняття та видової ознаки; ✓ задачі на використання відомого методу, способу; ✓ задачі на основі зв'язків теми з іншими темами (перенос на раніше вивчені об'єкти).

Таблиця В.2

Характеристика достатнього рівня

Бал	Результати	Критеріальні завдання і задачі
7	Уміння застосовувати базовий зміст в стандартних ситуаціях підвищеного ступеня складності.	Стандартні задачі (у відношенні базового змісту). Типи задач: ✓ операційно ускладнені основні алгоритмічні задачі; ✓ ускладнені задачі середнього рівня, що розв'язуються за відомою схемою, зразком; ✓ задачі, що розв'язуються на основі загального правила встановлення порядку виконання дій.
8	Уміння застосовувати базовий зміст в дещо змінених ситуаціях на основі нескладних міркувань.	Задачі на застосування базового змісту в дещо змінених ситуаціях. Типи задач: ✓ задачі дедуктивного виду, які на основі нескладних міркувань зводяться до розв'язання задач стандартного виду; ✓ задачі на розпізнавання об'єктів вивчення в змінених ситуаціях;

9	Уміння застосовувати базовий зміст в нових ситуаціях на основі нескладних аналітико-синтетичних міркувань.	<p>Задачі на застосування базового змісту в нових ситуаціях.</p> <p>Типи задач:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ задачі конструктивного типу, спосіб розв'язання яких конструється на основі нескладних аналітико-синтетичних міркувань; ✓ задачі-теореми, що розвивають, поглиблюють зміст і які доводять на основі методів, прийомів, використаних при доведенні теорем базового змісту; ✓ задачі на перенос знань.
---	--	--

Таблиця В.3

Характеристика високого рівня

Бал	Результати	Критеріальні завдання і задачі
10	Відтворення теорем і доведень теорем повного змісту теми. Уміння застосовувати повний зміст теми в стандартних ситуаціях.	<p>Завдання на відтворення теорем і доведення теорем. Стандартні задачі високого ступеня складності.</p> <p>Типи задач:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ алгоритмічні задачі високого ступеня складності (алгоритмічні дії з найбільш складними типами об'єктів вивчення); ✓ типові задачі високого ступеня складності; ✓ задачі зі значним числом дій, що розв'язуються на основі загального правила встановлення порядку дій; ✓ стандартні задачі на застосування поглибленого змісту.
11	Уміння застосовувати повний зміст в змінених проблемних ситуаціях.	Проблемні задачі, що розв'язуються на основі логічних міркувань і які приводять до встановлення нових знань або способів розв'язання задач.
12	Відтворення додаткових знань, здобутих самоосвітою. Уміння застосовувати зміст теми в нестандартних ситуаціях.	<p>Завдання на відтворення теорем, доведень теорем, розв'язання задач, освоєних самостійно.</p> <p>Нестандартні задачі по відношенню до змісту теми, які розв'язуються на основі здогаду, творчих процедур, евристик.</p>