# РІДНА ШКОЛА

Щомісячний науково-педагогічний журнал
ISSN 0131-6788

СЕРПЕНЬ 2005

## Криворізькому державному педагогічному університету - 75!

# Теоретична математика як методологічна основа створення методичних проектів

***Валентина КИСІЛЬОВА,***
*кандидат педагогічних наук, доцент кафедри змісту і методики початкового навчання*

Математика — це вчення про природу в найчистішому його вигляді. Математика для вченого — те саме, що скальпель для анатома: найнеобхідніший інструмент, без якого неможливе проникнення в суть речей... Ті, хто спробує йти вперед без цього знаряддя, змушені будуть залишитися на порозі (К.Ханстін) *[4, с.85]*.

В умовах інформаційної цивілізації, а таким є сьогодення освіти молодого покоління, значна частина вчених, науковців, дослідників вже усвідомила, що без використання математики як теоретико-методологічного інструментарію неможливо не тільки здійснювати пошук нових знань, а й реалізувати їхню прагматичну функцію. На жаль, про таке усвідомлення не може йти мова щодо освітніх технологій. Але дедалі очевиднішим стає те, що в сучасній освіті на зміну дихотомії — «знання заради знання» і «знання заради перетворення» відкрився логічний простір для математизованих знань. Вони — необхідний компонент у підготовці майбутнього спеціаліста до творчої діяльності, яка ґрунтується на розумінні ситуацій, синтезі теоретичних прийомів і методів, оволодінні навичками і вміннями інноваційної культури, самовизначенні і самореалізації в системі відносин «Людина — світ» *[5]*.

Пропагуючи ідею про те, що математизація сучасної освіти (як шкільної, так і професійної) є фактором її розвитку, звернімося передусім до процесу пізнання. Як стверджують П.В. Кікель і І.О. Новик, «подібно до того, як у практичній діяльності людина між собою і природою ставить знаряддя праці, так і в пізнанні вона між собою й об'єктом дослідження ставить математику як систему вираження і відтворення кількісної визначеності реальності» *[2, с.160]*.

Останнім часом зростає кількість людей, які цікавляться гуманітарними дисциплінами, і зменшується кількість тих, котрі приділяють певну увагу природничо-науковим. Однією із причин такого стану є збільшення питомої ваги навчальних предметів суспільно-гуманітарного спрямування в загальноосвітніх закладах України. У початковій школі тижневе навантаження з математики становить 3—4 години, замість 6 годин, як це було раніше, коли наша наукова математична школа була помітною у світі. І це саме в той період, коли роль математики в розвитку дитини є очевидною. Такий підхід суперечить філософії пізнання. Математика є не просто галуззю знань і універсальним інструментом, який дедалі глибше проникає і в гуманітарні розділи науки. Математика — це, насамперед, невід'ємна частина цивілізації, елемент загальної культури, мова наукового сприймання світу. Пізнання було, є і буде єдиним, і поділ навчальних предметів на гуманітарні й негуманітарні — суто умовний. Процес пізнання є гуманним за своєю суттю. І саме рівноправне співвідношення між суспільно-гуманітарними і природничо-математичними компонентами освіти — запорука тому. Пригадаймо позитивний досвід Царськосельського ліцею. Навчальна програма ліцею (автор М.М. Сперанський) мала загальний освітній характер. Розподіл між гуманітарними, точними і природничими науками був рівноправний. Саме рівновага між точними і гуманітарними науками привела до нового виду творчості — «наукової поезії», яка стверджувала, що світ можливо і необхідно пізнавати не лише за допомогою почуття, а й розуму. Особливе місце в цій програмі відводилося вивченню логіки. Окрім широкого освітнього характеру, ліцейська програма мала ще одну важливу якість: вивчення логіки і фундаментальних наук давало змогу оволодіти методом, за яким можна було розв'язувати довільні конкретні задачі.

Вивчення «абстрактних» наук сприяло моральному вихованню, спонукало до доброділяння. М.Муравйов, майбутній декабрист, у 1815 році писав: «Слід заохочувати абстрактні умоглядні науки, які тягнуть за собою свободу суджень і певну благородну й незалежну основу всієї доброчесності, бо вони вивільняють та відволікають від особистих низьких проявів егоїзму» *[7, с.24]*.

На всіх рівнях математичного пізнання характерним є відволікання від якісної визначеності. Математичне пізнання відбувається тільки тоді, коли кількісна визначеність відокремлена від її матеріального субстрату. Але це неможливо в реальному світі. Отже, математика, здійснюючи таке відокремлення, виконує те, що не можна зробити іншим шляхом у реальному світі. Таким чином, математика виступає універсальною методологією в пошуку прийомів і засобів пізнання. Діяльність людини, котра володіє цією методологією, є особливою формою активності суб'єкта, який пізнає і який засобами абстракцій високого рівня не тільки конструює існуючі стани об'єктивної реальності, а й прогнозує їхні зміни і розвиток у майбутньому.

Математика дає змогу з єдиних позицій поглянути на об'єктивну реальність. Тим самим вона спонукає до формування методологічної культури того, хто залучений до процесу пізнання, вироблення наукового стилю мислення, реалізації його можливостей щодо теоретичного засвоєння і практичного перетворення дійсності.

З огляду на сказане вище, висловлюємо особисту думку про те, як педагогічна наука, психологія і, зокрема, методика навчання математики та сама математика, повинні сприяти створенню дієвої системи оволодіння майбутніми спеціалістами елементами математичного пізнання.

Відповідно до галузевого стандарту вищої освіти ГСВО ДСВО-06-98, освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 6.010100 — початкове навчання передбачено з навчальної дисципліни «Математика» вивчення блоку змістового модуля ПН.02, до складу якого входять два змістові модулі: ПФ.С.14.ЗР.Р.050.ПН.290: Висловлення. Операції над висловленнями та ПФ.С.14.ЗР.Р.050.ПН.291: Предикат. Операції над предикатами. Структурні форми тверджень. Здобуті студентами математичні знання у процесі вивчення цих модулів (перший курс) дають можливість викладачам психології, педагогіки і часткових методик залучати студентів до розроблення методичних проектів, пов'язаних із формуванням понять, та засвоєння їхніх означень (поняття не тільки математичні) учнями початкових класів. Для цього необхідний відповідний рівень логічної компетентності викладачів, який доступний для оволодіння як викладачами природничо-наукових дисциплін, так і суспільно-гуманітарних. Він передбачає вільне оперування такими логічними операціями, як: кон'юнкція ($\wedge$), диз'юнкція ($\vee$), імплікація ($\rightarrow$), еквіваленція ($\leftrightarrow$). Пригадаємо тільки ті логічні операції, які буде використано під час розроблення методичного проекту.

Позначимо: А, В — прості речення розповідного характеру (елементарні висловлення). Тоді **кон'юнкція висловлень ($A \wedge B$)** — таке складене висловлення виду: «А і В», яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення істинні одночасно. У решті випадків кон'юнкція — хибна *(див. табл. 1)*.

*Таблиця 1*

| А | В | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| І | І | І |
| І | Х | Х |
| Х | І | Х |
| Х | Х | Х |

**Диз'юнкція висловлень ($A \vee B$)** — це складене висловлення виду: «А або В», яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне хоч одне із висловлень «А чи В» *(див. табл.2)*.

*Таблиця 2*

| А | В | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| І | І | І |
| І | Х | І |
| Х | І | І |
| Х | Х | Х |

**Імплікація висловлень ($A \rightarrow B$)** — це складене висловлення виду: «якщо А, то В», яке хибне тоді і тільки тоді, коли висловлення А — істинне, а В — хибне. В решті випадків імплікація істинна *(див. табл.3)*.

*Таблиця 3*

| А | В | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| І | І | І |
| І | Х | Х |
| Х | І | І |
| Х | Х | І |

Предикат А(х) — це речення із змінною, яке при підстановці замість х значення може перетворюватися, як в істинне висловлення, так і в хибне. Із урахуванням того, що предикат перетворюється у висловлення, таблиці 1, 2, 3, які складені для висловлень, можна застосувати для з'ясування множини істинності складеного предиката.

Два предикати А(х) і В(х), визначені на певній множині X, називають рівносильними, якщо множини істинності цих предикатів збігаються.

Аналіз природи, генезису понять, що їх засвоюють учні, вивчення їхньої логічної категорії, з'ясування особливостей процесу засвоєння понять молодшими школярами та виявлення вміння правильно формулювати їхні означення дають змогу стверджувати: завдання підведення під поняття або завдання на розпізнавання, які визнаються багатьма психологами, педагогами, методистами (Д.Н. Богоявленський, Л.С. Виготський, П.Я. Гальперін, В.В. Давидов, О.К. Дусавицький, Г.С. Костюк, М.Н. Скаткін, Н.Ф. Тализіна, А.В. Усовова та ін.) як психологічна основа засвоєння змістової сторони кожного поняття є тільки необхідною умовою засвоєння їх учнями *[3]*.

Дослідження математиків і методистів, які вивчають питання щодо забезпечення засвоєння учнями логічної структури кожного поняття, його означення, свідчать, що система завдань на розпізнавання не сприяє розв'язанню цієї проблеми. В.Г. Болтянський, І.Я. Грудьонов, В.С. Нодельман на прикладі означень, які здійснюються через рід і видові ознаки, показали: щоб вирішити завдання засвоєння логічної структури поняття, необхідна повна система завдань, яка складається із таких двох підсистем: завдання на розпізнавання і завдання на виведення наслідків. Обґрунтувати це положення дають змогу ті математичні знання, які студенти здобувають у процесі вивчення змістових модулів, про що вже згадувалось. Але їх застосовують для розв'язання загальнодидактичної проблеми, зокрема проблеми формування наукових понять учнів.

В.Г. Болтянський обґрунтував, що структуру будь-якого поняття, яке означається через рід і видові ознаки, можна у загальному вигляді записати так:

$$(*)(\forall x \in M)(A(x) \xleftrightarrow{def} B(x)),$$

де М — множина об'єктів, що належать родовому поняттю, тобто обсяг родового поняття;

А(х) — предикат, який уводить новий термін, тобто назва означуваного поняття;

В(х) — предикат, який містить всі перелічені видові ознаки *[1]*.

Розглянемо для прикладу такі два означення із курсу математики та української мови початкової школи.

*Приклад 1:* «Рівнянням з однією змінною називається вираз, що містить знак відношення «=» і змінну».

Відповідно до структури означення (*) це означення розпишемо так: М — множина виразів; А(х) — «рівняння з однією змінною», В(х) — «містить знак відношення «=» та змінну». Предикат В(х) — складений, має кон'юнктивну структуру, а саме: $B(x) \leftrightarrow C_1\, C_2$, де $C_1$ — видова ознака: «містить знак відношення «=» і $C_2$ — видова ознака: «містить змінну».

*Приклад 2.* Іменником називається частина мови, яка називає предмет і відповідає на запитання хто? або що?

М — множина частин мови;

А(х) — «іменник»;

В(х) — «називає предмет і відповідає на запитання хто? або що?.

Предикат В(х) — складений, має кон'юнктивно-диз'юнктивну структуру, а саме: $B(x) \leftrightarrow C_1 \wedge (C_2 \vee C_3)$, де $C_1$ — видова ознака: «називає предмет»; $C_2$ — видова ознака: «відповідає на запитання хто?»; $C_3$ — видова ознака: «відповідає на питання що?».

Звернімося до формули

$$(*)(\forall x \in M)(A(x) \xleftrightarrow{def} B(x)).$$

Забезпечити засвоєння логічної структури кожного поняття — означає засвоїти рівнозначність $\xleftrightarrow{def}$, що $\rightleftarrows$ являє собою кон'юнкцію двох імплікацій. Засвоєння нижньої стрілки ($\leftarrow$) є дією розпізнавання, підведення під поняття. Дія розпізнавання полягає в установленні факту: належить чи не належить об'єкт до обсягу нового поняття. Засвоєння верхньої стрілки ($\rightarrow$) є дією виведення висновків, за допомогою якої встановлюють, які властивості має чи не має об'єкт, якщо про нього відомо: належить він чи не належить до обсягу даного поняття.

У більшості означень шкільного курсу математики предикат В(х) має кон'юнктивно-диз'юнктивну структуру. Алгоритму розпізнавання для кожної структури предиката відповідатиме своє «дерево розпізнавання».

Дерево розпізнавання для кон'юнктивної структури В(х) подано на *рис.1*, а для диз'юнктивної структури В(х) — на *рис. 2*.

Розпочнемо пошук логічних типів завдань за *рис. 1*. Якщо ознака $C_1$ у досліджуваному об'єкті відсутня (Х), то ми відразу робимо висновок, що об'єкт не належить до обсягу даного поняття (0). Розпізнавання завершилося: гілка дерева далі не розгалужується. Якщо ж досліджуваний об'єкт має ознаку $C_1$(1), то ще не можна зробити певного висновку про об'єкт. Необ-

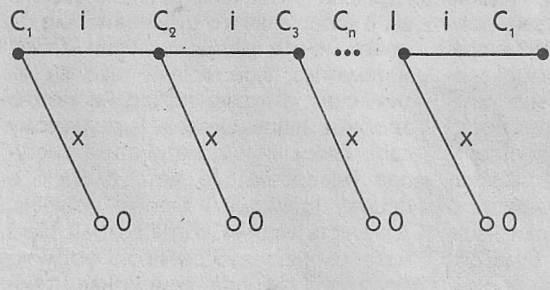


**Рис. 1**

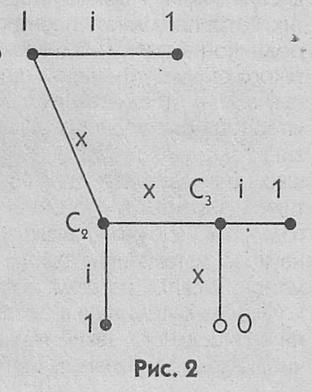


**Рис. 2**

хідно перевіряти ознаку $C_2$. Якщо вона відсутня (X) в об'єкті, то розпізнавання завершилося з негативним виходом (0). Якщо ж ознака $C_2$ є в досліджуваному об'єкті (1), то переходимо до перевірки наявності наступної ознаки $C_3$ і т.д. до ознаки $C_n$. Тільки тоді, коли об'єкт має всі ознаки $C_1$, $C_2$, ... $C_n$, можна зробити висновок, що він належить до обсягу поняття.

Таким чином, з дерева розпізнавання зрозуміло, що потрібно давати рівно n завдань таких логічних типів, в яких об'єкт не належить до обсягу поняття (кількість нуликів на дереві), і одне завдання з об'єктом, що належить до обсягу поняття (кількість одиниць на дереві), тобто всього $\underline{1+n}$ логічних типів завдань.

Для прикладу повернемося до означення **«рівняння»** *(див. приклад 1)*. Кількість видових ознак в означенні **«рівняння»** (n=2). Тому необхідні 1+2=3 логічних типи завдань для засвоєння його означення. Ці типи завдання показано на *рис. 3*.

Це система завдань на розпізнавання. Їх можна запропонувати учням у довільній кількості, але головне, щоб у цій системі були три типи: приклад рівняння і два види контрприкладів.

Перейдемо до складання завдань на засвоєння верхньої стрілки означення поняття ($\longrightarrow$) дії виведення наслідків.

Тривалий час у методичній літературі (М.Д. Волович) панувала думка, що для засвоєння дії виведення наслідків необхідно пропонувати лише завдання, в яких є вказівка, що об'єкт із множини M належить до обсягу даного поняття. Потрібно встановити, що відомо про досліджуваний об'єкт.

В.С. Нодельман *[6]* стверджує, що завдання на виведення наслідків із того, що об'єкт не належить до обсягу даного поняття, відіграють ту саму роль, що й завдання із належності об'єкта до обсягу даного поняття. Все залежить від логічної структури поняття. Так, для диз'юнктивної структури взагалі нічого не можна сказати про те, які наслідки має факт належності об'єкта до обсягу поняття.

Логічні типи завдань на виведення наслідків для понять з кон'юнктивною структурою предиката B(x) розглянемо на прикладі означення «рівняння», використовуючи таблицю 1 істинності предиката $B(x) = C_1 \wedge C_2$ *(див. табл.4)*.

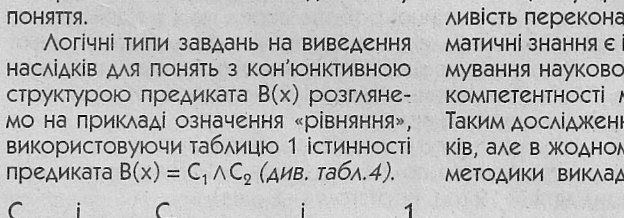


**Рис. 3**

*Таблиця 4*

| $C_1$ | $C_2$ | B(x) |
|---|---|---|
| | | I |
| I | | X |
| | I | X |
| X | ? | X |
| ? | X | X |
| ? | ? | X |

1. Відомо, що деякий вираз є рівняння. Що можна сказати про наявність ознак $C_1$ і $C_2$?

(Для учнів: я записала вираз, який є рівнянням. Чи має цей вираз змінну? А знак «=»?)

2. Відомо, що деякий вираз є не рівнянням, а рівністю. Що можна сказати про те, містить вона змінну чи ні?

3. Відомо, що деякий вираз не є рівнянням, хоч і має змінну. Що можна сказати про те, рівність це чи ні?

4. Відомо, що деякий вираз не є рівнянням і не є рівністю. Що можна сказати про те, містить чи ні цей вираз змінну?

5. Відомо, що деякий вираз не є рівнянням і не містить змінну. Що можна сказати про те, це рівність чи ні?

6. Відомо, що деякий вираз не є рівнянням. Що можна сказати про те, рівність це чи ні? Має він змінну чи ні?

Аналізуємо завдання (4, 5, 6). Відповідь є неоднозначною щодо наявності у об'єкта ознак. У табл. 4 це показано знаками (?). У кожній клітинці із знаком (?) можна ставити (I) — відповідь (Так) і можна ставити (X) — відповідь (Ні).Для випадку (6) набір відповідей такий: (Так; Ні). (Ні; Так), (Ні; Ні).

Отже, створено повну систему завдань, яка включає завдання на розпізнавання і завдання на виведення наслідків для засвоєння такого важливого поняття шкільного курсу математики, як рівняння. Цей методичний проект має загальнодидактичне призначення, оскільки розв'язує проблему формування наукових понять в учнів на основі створення повної системи завдань.

На цьому прикладі ми маємо можливість переконатися в тому, що математичні знання є інструментарієм формування наукового рівня професійної компетентності майбутнього фахівця. Таким дослідженням вже понад 25 років, але в жодному посібнику (навіть з методики викладання математики, не говорячи вже про гуманітарні дисципліни) не знайти технології створення системи завдань, про яку ми писали вище. Для вищих педагогічних закладів освіти має бути аксіомою положення про те, що без використання в навчальному процесі засобів і методів математики, інноваційних технологій, які ґрунтуються на математичних знаннях, неможливо організувати пізнання, яке б сприяло духовному зростанню майбутнього спеціаліста, спонукало б до добродіяння. Без використання математики як методології набуття нових знань неможливо підготувати висококваліфікованого спеціаліста, який би відповідав соціуму XXI століття.

Сьогодні, коли понад 2000 наук утворюють цілісну систему знань про світ, і для кожної з них магістральний шлях розвитку — математизація, наслідком якої є математичні знання, не викликає сумніву, що математика — це елемент людської цивілізації. Не потребує доведення те, що зміст науки необхідно проектувати в зміст освітніх програм, але зробити це сьогодні практично неможливо. Проектування змісту науки в зміст освіти можливе лише внаслідок створення цілісної системи навчальних математизованих дисциплін *[2, с.184]*.

### *Література*


1. *Болтянский В.Г.* Использование логической символики при работе с определениями // Математика в школе. — 1973. — №5. — С.45—50.
2. *Кикель П.В., Новик И.А.* Математизация образования как фактор его развития // Известия Международной славянской академии образования им. Я.А. Коменского. — 2004. — №2. — С.150—164.
3. *Кисільова В.П.* Поняття. Способи означення понять: лекція для студентів педагогічних університетів спеціальності «Початкове навчання». — Кривий Ріг: КДПУ, 2001. — 28 с.
4. *О математике* и математиках / Сост. А.С. Зоря, С.Н. Киро. — К.: Рад. школа, 1981.
5. *Розов Н.Х.* Гуманитарная математика // Известия Международной славянской академии образования им. Я.А. Коменского. — 2004. — №2. — С.153—159.
6. *Система* заданий для освоения определений. Методические рекомендации для студентов физико-математического факультета / Сост. В.С. Нодельман. — Куйбышев, 1979.
7. *Соколова Е.Е.* «Мы все учились понемногу...» // И в просвещении стать с веком наравне: Сб. научных трудов. — СПб.: Образование, 1992. — С.21—26.