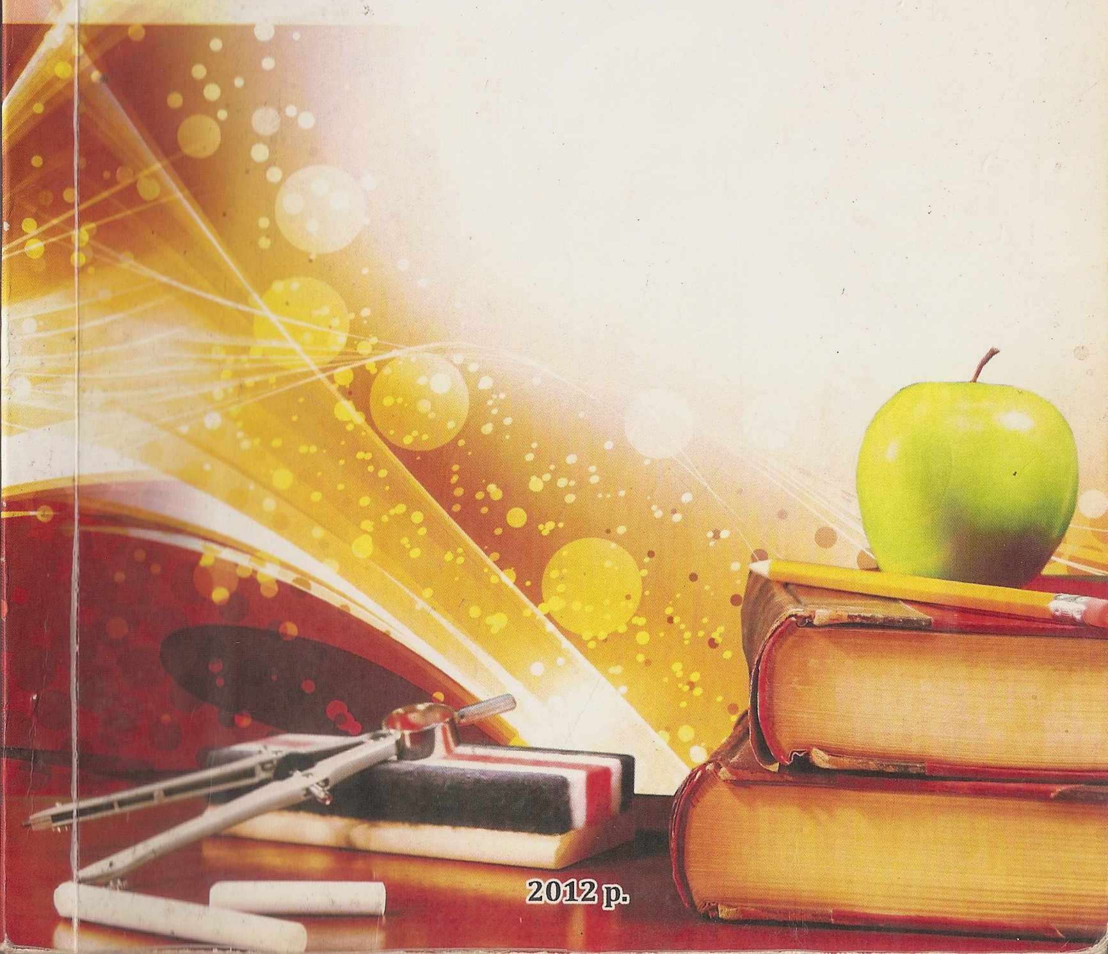
Кисільова-Біла В. П.

Система організації самостійної роботи студентів з математики в умовах кредитно-модульної системи навчання



2012 р.

Кисільова-Біла В. П.

Система організації самостійної роботи студентів з математики в умовах кредитно-модульної системи навчання

2012 р.

УДК 378.147:51 (07)
ББК 74.58:221
К 44

Кісільова-Біла В. П. Система організації самостійної роботи студентів з математики в умовах кредитно-модульної системи навчання: Навчальний посібник для студентів та викладачів математики вищих педагогічних навчальних закладів спеціальності 6.010100. Початкове навчання. – Кривий Ріг: КПІ ДВНЗ «КНУ», Видавництво «Діоніс» (ФО-П Чернявський Д. О.), 2012. – 144 с.

ISBN 978-966-2775-15-0

У посібнику подана система організації самостійної роботи студентів з математики, яка розроблялася за умовами модульно-рейтингової системи навчання.

Посібник призначається для студентів, що здобувають вищу педагогічну освіту кваліфікації 2331 «вчитель початкових класів», та викладачів математики вищих педагогічних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації.

УДК 378.147:51 (07)

Рецензенти:

Соловйов В. М. доктор фізико-математичних наук, професор, завідуючий кафедрою економічної кібернетики Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького

Семеріков С. О. доктор педагогічних наук, професор кафедри фундаментальних дисциплін Криворізького металургійного факультету Національної металургійної академії України

Остапчук О. Є. кандидат педагогічних наук, доцент кафедри практичної психології Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет».

Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів *(Лист № 1/11-11251 від 01.12.2011 р.)*

ISBN 978-966-2775-15-0

ПЕРЕДМОВА

У відповідності до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 6.010100.Початкове навчання, кваліфікації 2331 вчитель початкових класів одна із головних вимог до підготовки спеціалістів у вищому педагогічному навчальному закладі пов'язана з необхідністю самостійного вивчення дисциплін і, зокрема математики, студентами денного відділення в обсязі до 30 %, а студентами заочного відділення в обсязі 80-90 %.

В умовах модульно-рейтингової системи навчання збільшується не лише обсяг матеріалу, що відводиться на самостійне опрацювання, а й ускладнюється його зміст. Тому необхідність чіткої системи організації самостійної роботи студентів з математики – це не тільки одна з умов підготовки їх до професійно-педагогічної діяльності, а й засіб самореалізації у педагогічному процесі в якості його повноправного суб'єкта.

Система самостійних робіт з математики, на опрацювання яких відведено 76 годин, складається із 17 робіт. Система побудована на таких принципах: системність та послідовність; посильність; індивідуалізація та диференціація; успішність та позитивність; активність та інтерактивність; оптимальність.

Принцип системності та послідовності передбачає поступове ускладнення як математичного змісту, так і виду самостійної пізнавальної діяльності студента, причинно-наслідковий та логічний зв'язок між усіма елементами системи, логічну завершеність кожного елемента системи, поетапність подання змісту матеріалу та елементарних операцій самостійної діяльності студентів. Це відображається у чіткому виділенні у певних змістових модулях програмного матеріалу, який виноситься на самостійне опрацювання, що фіксується у назві теми самостійної роботи.

Принцип посильності передбачає наявність різнорівневих завдань для студентів, які б відповідали наявному рівню математичної компетентності кожного студента і враховували рівень розвитку навичок самостійної діяльності їх на конкретному етапі навчання. До практичної частини самостійної роботи пропонуються як правило завдання чотирьох рівнів: низький, середній, достатній і високий. Студент сам обирає для розв'язання завдання, які за його самооцінкою відповідають рівню його навчальних досягнень, наперед знаючи, яку максимальну кількість балів він може отримати за правильне його розв'язання.

Принцип індивідуалізації та диференціації вимагає врахування якісних показників прояву самостійності студентів на кожному етапі виконання самостійної роботи та необхідність поділу студентів на групи за цими показниками як на період виконання, так і під час захисту самостійних робіт. За цим принципом кожен студент поділяє для себе як теоретичну, так і практичну частину самостійної роботи на такі три блоки: перший блок – це матеріал, який студент може опрацювати самостійно без будь-якої допомоги чи консультації з боку викладача або студента з більш високим рівнем математичної компетентності; другий блок – це матеріал, який студент може опрацювати з частковою допомогою ззовні; третій блок – це матеріал, який студент може опрацювати тільки після неодноразової допомоги студентів, або з обов'язковою індивідуальною консультацією викладача. У період захисту самостійної роботи (до оцінювання її викладачем) кожен студент повинен до захисту мати власну самооцінку своїх досягнень і оцінку групи, в якій він працював у період виконання роботи.

Принцип успішності та позитивності передбачає безпосередній зв'язок з принципом посильності і на цій основі сприяння формуванню позитивного ставлення до проведення самостійних досліджень уже на якісно більш високому рівні. Просуванню студента на якісно більш високий рівень сприяють методичні рекомендації до кожного завдання самостійної роботи (вивчення теорії та зразки її застосування для практичних цілей); тестові завдання для самоконтролю; виставки індивідуальних навчально-творчих завдань, на яких студент має можливість порівняти власний рівень успішності з успішністю інших студентів групи та ін.

Принцип активності та інтерактивності передбачає формування активної позиції студента – свідомого ставлення до виконання самостійної роботи, яке проявляється в підвищенні міри безпосередньої участі кожного студента в плануванні та отриманні результатів у процесі роботи. Інтерактивність передбачає передусім виявлення здатності до колективної праці, створення тимчасових груп з більш-менш чітко розподіленими ролями задля виконання того чи іншого завдання самостійної роботи.

Принцип оптимальності вимагає використання таких видів, форм і методів самостійної роботи студентів, які б сприяли результативному і швидкому зростанню якісних показників розвитку навичок самостійної діяльності студентів за якомога короткий відрізок часу.

Тематику самостійних робіт і час, відведений на їх опрацювання у змістових модулях, орієнтовно можна розподілити так:

Таблиця 1

№ п/п	*Назва змістового модуля*	*Тема самостійної роботи*	*Кількість годин* відведених на самостійне опрацювання	*Кількість годин* усього
1	2	3	4	5
1.	Відношення на множині та їх властивості	Способи завдання відношень між елементами однієї множини	2	8
2.	Розміщення, перестановки та комбінації без повторень. Основні комбінаторні задачі з повторенням	Основні правила і поняття комбінаторики. Розв'язування комбінаторних задач	4	8
3.	Підмодуль 1 змістового модуля 4: Додавання цілих невід'ємних чисел	Поняття суми і дії додавання в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого	4	12

№ п/п	Назва змістового модуля	Тема самостійної роботи	Кількість годин	
			відведених на самостійне опрацювання	усього
		невід'ємного числа		
4	Підмодуль 2 змістового модуля 4: Віднімання цілих невід'ємних чисел	Поняття різниці і дії віднімання в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	4	10
5	Підмодуль 3 змістового модуля 4: Множення цілих невід'ємних чисел	Поняття добутку і дії множення в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	4	10
6	Підмодуль 4 змістового модуля 4: Ділення цілого невід'ємного числа на натуральне	Поняття частки і дії ділення в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа та в теорії вимірювання величин	2	10
7.	Підмодуль 2 змістового модуля 5: Множина дійсних чисел	Десяткові дроби. Арифметичні дії над ними. Перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки	4	6
8	Підмодуль 2 змістового модуля 6: Система числення відмінна від десяткової. Дії над числами в різних системах	Недесяткові позиційні системи числення	2	10
9.	Підмодуль 1 змістового модуля 7: Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел	Числа порівняльні за модулем	3	9
10.	Підмодуль 2 змістового модуля 7: Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11. НСД і НСК. Алгоритм знаходження НСД і НСК	Застосування ознаки подільності Паскаля	1	9
11.	Змістовий модуль 8: Поняття числового виразу та його значення. Вираз із змінною	Тотожні перетворення числових виразів та вирізів із змінною	4	20
12.	Підмодуль 1 змістового модуля 9: Рівняння з однією змінною. Рівносильні рівняння	Основні способи розв'язування алгебраїчних рівнянь у шкільному курсі математики	4	10
13.	Підмодуль 2 змістового модуля 9: Нерівності. Властивості числових нерівностей. Нерівності з однією і двома змінними	Розв'язування нерівностей із однією змінною в шкільному курсі математики. Пропедевтика розв'язування нерівностей у початковому курсі	4	14

№ п/п	*Назва змістового модуля*	*Тема самостійної роботи*	*Кількість годин* відведених на самостійне опрацювання	*Кількість годин* усього
		математики		
14.	Підмодуль 2 змістового модуля 10: Основні елементарні функції шкільного курсу математики, їх властивості і графіки	Дослідження властивостей функцій методами елементарної математики: пряма і обернена пропорційні залежності, лінійна функція. Їх властивості і графіки	6	16
15.	Підмодуль 1 змістового модуля 11: Означення і основні властивості фігур на площині	Основні геометричні фігури, які вивчаються в початковому курсі математики: означення, властивості і побудова зображення	2	4
16.	Підмодуль 2 змістового модуля 11: Основні за-дачі на побудову на пло-щині	Розв'язування задач на побудову на площині за допомогою циркуля і лінійки в шкільному курсі математики	4	10
17.	Підмодуль 3 змістового модуля 11: Доведення геометричних тверджень. Способи доведення. Задачі на доведення	Розв'язування задач на доведення. Пропедевтика доведень математичних тверджень у початковому курсі математики	4	10
Усього			**58**	**176**

Примітка: загальна кількість годин на вивчення математики – 234 год. У таблиці – 176 год. Не враховані 40 год тих змістових модулів, для вивчення яких не виділені теми самостійних робіт та 18 год. на виконання індивідуальних навчально-творчих завдань № 1- № 3 і навчального проекту.

Посібник складається з трьох розділів, додатків та списку літератури.

У першому розділі «Роль самостійної роботи студента у сучасній математичній освіті його» подана класифікація і основні види самостійних робіт з математики. Студент знайде поради: як готуватися до захисту самостійної роботи і як правильно працювати над засвоєнням змісту математичного тексту.

У другому розділі «Планування самостійної роботи студентів з математики» представлений варіант посеместрового планування самостійних робіт у відповідності до програми курсу математики напряму освіти 0101 «Педагогічна освіта», спеціальності 6.010100 «Початкове навчання», освітньо-кваліфікаційного рівня: бакалавр, та графіки захисту самостійних робіт студентами і різні форми контролю і самоконтролю за їх виконанням.

Третій розділ «Інструкція та методичні рекомендації до виконання самостійних робіт студентами» містить інструкції до 17 самостійних робіт та методичні поради і вимоги щодо виконання конкретних завдань до кожної теми. Інструкціями передбачено роботу студентів над виконанням завдань репродуктивного (за зразком), продуктивного та творчого характеру.

Зміст матеріалу «Додатків» спрямований допомогти студентам виробити навички самостійної пізнавальної діяльності над математичним текстом. Тут представлені варіанти уже відібраного математичного тексту до теми деяких самостійних робіт, а завдання студента полягає у відшуканні готових відповідей на пункти плану самостійної роботи та їх конспектуванні, осмисленні й запам'ятовуванні. «Додатки» також містять зразки до виконання практичної частини окремих самостійних робіт.

За захист кожної роботи студент може отримати від 5 до 10 балів у залежності від ступеня складності, які додаються до суми балів, що виставляються за виконання інших видів навчальних робіт залікового кредиту.

РОЗДІЛ І
РОЛЬ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА У СУЧАСНІЙ МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ ЙОГО

Одним із основних завдань вивчення математики у вищому педагогічному навчальному закладі на основі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання» є забезпечення природничо-наукової підготовки фахівця. Мета сучасної математичної освіти студента має концептуальний напрям, який полягає у посиленні ролі математики у загальному розвитку людини.

Зміст математичної освіти майбутнього вчителя початкових класів формується з урахуванням класичних теоретичних основ математики, тенденцій розвитку науки, техніки, технології та культури, сучасного розуміння закономірностей побудови світу і ролі людини в ньому.

Для математичної підготовки студентів вищих педагогічних навчальних закладів на сьогодні характерним є суттєве зниження її обсягу. Якщо порівняти обсяг аудиторної математичної підготовки студентів вище названої спеціальності, то за останні 30 років він знизився у середньому на 41,5 % (270 год. у 1980 р. і 158 год. у 2011 р.).

Навчальна дисципліна «Математика» включає одинадцять змістових модулів, на вивчення яких передбачено 234 годин. Із них: теоретична підготовка – 70 год; практичні заняття – 88 год; самостійна робота – 76 год. Засвоєння змісту матеріалу навчального курсу «Математика» контролюється 6,5 заліковими кредитами.

Приблизно 30 % часу, відведеного на вивчення курсу, передбачено на самоосвіту, яка ґрунтується на самостійній роботі студентів. Як загальновизнано, найбільш вживаними і ґрунтовними, стабільними є ті знання, які студент набуває у процесі самостійної діяльності, самоосвіти. А тому питання системи організації самостійної роботи студентів з математики в нових умовах навчання потребує великої уваги.

Організація навчального процесу студентів в умовах кредитно-модульної системи навчання має ряд специфічних особливостей. Одна із них, і це основна особливість, – підвищення ролі самостійного опрацювання навчального матеріалу. До того ж, ускладнюється зміст та збільшується обсяг самостійної роботи в силу значного скорочення обсягу аудиторної математичної підготовки.

Самостійна пізнавальна діяльність сучасного студента вищого навчального закладу є надзвичайно значущою, без неї неможливе становлення майбутнього висококваліфікованого спеціаліста. Самостійна пізнавальна діяльність є складним процесом системного характеру. Він містить багато компонентів, які впливають на його результативність. Це і психічні особливості учасників цього процесу, і організаційні, мотиваційні компоненти та фактори зовнішнього впливу, які значним чином зумовлюють кінцевий результат такого виду діяльності та впливають на формування такої якості особистості студента, як самостійність. «Самостійність – це здатність студента працювати самостійно, організовувати і реалізовувати свою діяльність без стороннього керівництва чи допомоги» [8, с. 7].

Реалізація усіх складових цього процесу є необхідною умовою навчання студента і реалізації його особистісних та суспільних цілей.

1.1. Самостійна робота студента з математики в системі вищої педагогічної освіти

Самостійна робота студентів з математики (СРСМ) у широкому розумінні – це вся робота з оволодіння науковими знаннями і практичними навичками, активна розумова діяльність в усіх формах навчально-виховного процесу.

Самостійна робота – це така форма навчальної діяльності, при якій процес одержання знань, умінь і навичок здійснюється за рахунок свідомих розумових і фізичних зусиль репродуктивно-творчого характеру самих студентів, але за підтримки викладача і з необхідною корекцією з його боку, за його завданнями і вказівками щодо мети, організації, змісту і результатів роботи над завданнями, однак без безпосередньої участі викладача. Роль викладача під час організації самостійної роботи в основному зводиться до наставництва, кураторства (tutorship). Основні функції викладача такі: спрямування, консультування та поради студентам у виконанні самостійної роботи. У такий спосіб організації самостійної роботи значна увага приділяється самоконтролю студентів під наглядом викладача. Студент повинен усвідомити мету такого навчання, а викладач акцентувати увагу не стільки на самостійність дій студента, скільки на тому, як він визначає додаткову (до визначеної навчальним планом та викладачем) мету самостійної позааудиторної роботи.

Самостійна робота студента за дидактичним призначенням поділяється на самостійну робота для здобуття нових знань, застосування знань на практиці, повторення, перевірки знань, умінь, навичок [8, с. 3]. За класифікацією М. Н. Скаткіна ми виділяємо наступні чотири типи самостійної роботи з математики [9].

Перший тип – самостійна робота за зразком

Характер, ступінь самостійності виявляються у знаходженні готових відповідей у запропонованому тексті, розв'язанні типових завдань, прикладів за зразком, оформленні схем, діаграм, графіків за рекомендаціями викладача. До цього типу ми відносимо самостійні роботи №№ 1, 9, 10 (див.: розділ 2).

Другий тип – реконструктивні самостійні роботи

Самостійність у процесі виконання даного типу робіт виявляється у виборі необхідних текстуальних формулювань, усному і письмовому їх відтворенні на основі збільшення кількості джерел інформації. Пропонується список рекомендованої літератури і лекція викладача з даної теми, як додаток до роботи, з метою відбору і систематизації пізнавальної інформації. На основі складання конспектів, короткого анотування запропонованих джерел інформації, самостійного добору літератури з відповідних тем ми робимо висновок про уміння студентів працювати з математичним текстом. До цього типу ми відносимо самостійні роботи за №№ 2, 3, 4, 5, 7 (див.: розділ 2).

Третій тип – варіативні самостійні роботи щодо застосування математичних понять

Самостійна діяльність виявляється в застосуванні фундаментальних математичних понять (категорій) до розв'язування завдань певного класу, в ході яких добираються способи, методи, засоби для досягнення мети, порівнюються різні точки зору, підходи до тлумачення одного і того самого поняття в запропонованих викладачем ситуаціях. Як правило, це роботи – практикуми. До них ми відносимо самостійні роботи №№ 6, 11, 12, 13 (див.: розділ 2).

Четвертий тип – творчі самостійні роботи

Рівень самостійності виявляється в: розкритті суті математичних понять, що вивчаються; висловленні власних суджень, оцінок на основі всебічного аналізу вихідних даних розв'язуваного завдання; самостійному опрацюванні теми і доборі методики оформлення результатів засвоєння теми; виявленні й формулюванні проблем, що мають вихід у курс математики початкової школи із запропонованої теми. До цього типу ми відносимо самостійні роботи №№ 8, 14, 15, 16, 17 (див.: розділ 2).

1.2. Як готуватися до захисту самостійної роботи з математики

Процедурі захисту самостійної роботи передує допуск до захисту. Студент одержує допуск за умов:

– наявності інструкції по виконанню самостійної роботи;
– виконання теоретичної і практичної частин самостійної роботи.

Теоретичну частину самостійної роботи необхідно виконувати конспектуванням математичного тексту згідно плану самостійної роботи, використовуючи рекомендовану літературу для вивчення даної теми та матеріали додатка (якщо додаток вказаний у списку літератури).

Роботи, до яких вказані додатки (№№ 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 14), – це роботи, для яких уже відібраний математичний текст, і завдання студента полягає у знаходженні готових відповідей на питання плану самостійної роботи, їх конспектуванні, усвідомленні та запам'ятовуванні. Саме ці роботи носять навчальний характер для студента в оволодінні вмінням працювати з науковим текстом: розуміти його, вивчати математичні поняття та засвоювати їх означення. Про це читати далі та в розділі 1.3 даного посібника.

Самостійні роботи, до яких відсутні додатки, потребують ретельної роботи з інструкцією, в якій подані методичні поради до кожного питання самостійної роботи. Вивчаючи їх уважно, Ви знайдете відповідь на запитання: що ж саме треба законспектувати з рекомендованої літератури для вивчення даної теми. Це такі роботи, як №№ 6, 8, 9, 11, 15, 16, 17.

Практичну частину самостійної роботи необхідно виконувати за зразками, які подані в рекомендованих навчальних посібниках, у додатках або в рекомендованих тренувальних вправах, які розроблені до самостійної роботи.

Деякі завдання із самостійних робіт виконуються за зразками завдань, які були розв'язані на практичних заняттях з математики.

Наявність виконаної теоретичної і практичної частини самостійної роботи – є допуском студента до захисту її. Захист самостійної роботи – це процедура звітування студента перед викладачем в одній із форм: індивідуальна співбесіда; колективний захист; захист в мікрогрупах; тестова перевірка; письмовий експрес-контроль «Летучка»; контрольна робота; математичні практикуми; конкурси; самооцінка готовності студента до захисту роботи та ін. В якій формі і коли буде проходити захист самостійної роботи, Ви дізнаєтесь із другого розділу цього посібника, в якому подані графіки контролю за самостійною роботою студентів на кожен навчальний семестр. Незважаючи на форму контролю, кожен студент під час захисту повинен показати, що він володіє системою математичних понять, має необхідні знання, вміння та навички з теми самостійної роботи, яка захищається. Щоб знати, які саме знання, вміння та навички перевіряються, ми передбачили в інструкції до кожної самостійної роботи такі вимоги, які супроводжуються твердженнями: «Студент повинен знати...» і «Студент повинен вміти...». Щоби бути впевненим у тому, що захист роботи пройде результативно для Вас і Ви отримаєте позитивну оцінку, радимо Вам перевірити себе, чи засвоїли Ви систематичні (наукові) поняття до захисту роботи за такими показниками:

– якщо Ви засвоїли поняття, то Ви повинні вміти використати свій життєвий досвід, навести приклади із власних спостережень, проаналізувати їх, дати їм оцінку, співставивши з даним поняттям; співставити нове поняття з іншим, знайти риси схожості і відмінності між ними (наприклад: вираз (3+2; 3x+2), рівність (17+12=29), рівняння (2x+3=13) та ін.); побудувати логічну структуру його означення (вказати рід та видові ознаки). Наприклад:

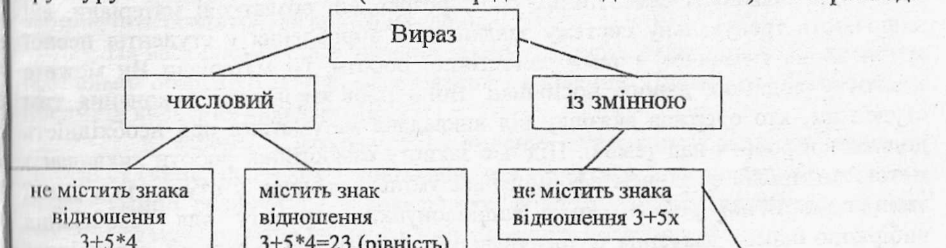


Рис. 1. Класифікація виразів

– якщо Ви засвоїли поняття, то Ви вмієте застосовувати його для розв'язування певного класу типових задач, включаючи і задачі з практичним змістом;

– якщо Ви оволоділи певним математичним поняттям – це означає, що воно стало здобутком вашого мислення і пам'яті;

– якщо Ви засвоїли суть даного поняття, то Ви вмієте застосовувати його у відповідних умовах;

– якщо Ви безпомилково можете переказати або відновити формулювання означення систематизованого поняття – це ще не означає, що Ви засвоїли його суть. Засвоїти поняття – це вміти передати його зміст у формі, яка суттєво відрізняється від тієї, в якій Ви його сприйняли (запропонувати схему, графік, рисунок, діаграму та ін.);

– якщо Ви засвоїли певне поняття, то Ви можете використати дане поняття для розв'язування нестандартних, творчих завдань та задач.

Пам'ятайте! Наукові поняття не заучуються, не беруться пам'яттю, а виникають і утворюються за допомогою великого напруження всієї активності вашої власної думки (Л. С. Виготський).

Для активізації мислення під час оволодіння новим математичним поняттям радимо: максимально мобілізувати наявність знань та життєвий досвід; дотримуватися логічних вимог до означення поняття; подолати негативний вплив так званих життєвих понять; уважно ставитися до наукових термінів; раціонально організовувати роботу над математичним текстом; застосовувати проблемний метод для оволодіння поняттями.

Робота вважається захищеною студентом, якщо є позитивна оцінка її окремо за теоретичну і за практичну частини.

До більшості самостійних робіт розроблені роздаткові матеріали, які включають тренувальну систему завдань для вироблення у студентів певної групи вмінь і навичок з теми самостійної роботи. Ці матеріали Ви можете знайти у додатках даного посібника. Вони обов'язкові для виконання тим студентам, хто одержав вказівку від викладача математики про необхідність додаткової роботи над темою. Під час захисту самостійної роботи викладач з метою контролю за рівнем сформованих умінь і навичок у студентів з даної теми самостійної роботи може запропонувати студенту для розв'язання вибірково окреме завдання із тренувальної системи або із завдань відповідної самостійної роботи. Обов'язкове правильне розв'язання запропонованого викладачем завдання є однією із основних вимог захисту її. Тому питання про те, розв'язувати всі запропоновані завдання з практичної частини самостійної роботи чи ні, кожен студент вирішує індивідуально, спираючись на самооцінку своєї готовності до захисту.

Усвідомлення і дотримання студентом порад: «Як підготуватися до захисту самостійної роботи з математики» допоможе йому досягти успіху в процедурі захисту.

1.3. Як самостійно працювати над вивченням математичного тексту

У процесі самостійної роботи з навчальною математичною літературою відбувається поєднання вивчення нового матеріалу і навчання студента працювати над науковим текстом. Слід мати на увазі, що працюючи з навчальною математичною літературою, Ви сприймаєте певну порцію інформації, частина якої може бути Вам незрозумілою. Ви повинні розібратися в ній самостійно, причому використавши той же самий текст. Читання з розумінням навчального матеріалу математичного тексту є лише першою сходинкою в оволодінні студентом умінням працювати з математичною літературою.

Розуміння нового навчального математичного тексту – складний, багатоланцюговий процес, який передбачає в більшості випадків багаторазове читання математичного тексту. Пояснюють це «вузькістю свідомості» : людина не в змозі в одну мить, коли сприйнятий матеріал утримується в короткочасній пам'яті, усвідомити всі його суттєві аспекти. Ефективність повторення значно зросте, якщо Ви надасте кожному повторенню цілеспрямованого характеру. Почніть із з'ясування змісту понять, спеціальних термінів, формулювань і означень, які використані в математичному тексті. Випишіть їх окремо, як тезаурус (повний систематизований набір понять у даній темі, який дозволяє Вам орієнтуватися у ній) до даної теми. Попрацюйте з математичними довідниками, шкільними підручниками з математики, якщо Ви не в змозі відновити (не знаєте або забули) тлумачення того чи іншого необхідного математичного поняття. Саме розуміння суті і значення математичних термінів сприятиме результативному засвоєнню Вами змісту математичного тексту та забезпечить розвиток логічного мислення.

На наступному етапі читання тексту приділіть увагу виробленню вміння правильно обмірковувати предмет вашого вивчення. Правильне обміркування предмета вивчення виявляється:

– в ясному і чіткому усвідомленні студентом основних понять і суджень, основних умовиводів, що містяться в прочитаному тексті; в умінні розібратися в доведеннях, обґрунтуваннях, що підтверджують правильність тих чи інших математичних положень, фактів;
– у достатньому розумінні студентом доречності й доцільності наведених у тексті прикладів, рисунків, схем, таблиць, що ілюструють доказовість і висновки автора тексту. А ще краще, якщо Ви зумієте за асоціацією знайти до цих висновків додаткові приклади і пояснення зі свого власного досвіду;
– в умінні відділити від основних тверджень і доказів ті додаткові дані, які не відіграють суттєвої ролі й мають другорядне значення;
– у здатності студента критично розбиратися у змісті прочитаного тексту.

На більш високому рівні розвитку вміння «читання з розумінням навчального матеріалу математичного тексту» студент повинен бути здатним не тільки засвоювати одержану інформацію з навчальної літератури, але й уміти творчо осмислити прочитане, тобто вміти на основі одержаної інформації самостійно приходити до нових знань, які безпосередньо не виражені в математичному тексті, а з'являються у результаті продуктивних роздумів над прочитаним. Цей рівень уміння працювати з навчальною математичною літературою досить вдало характеризується таким відомим афоризмом: «Чужие мысли полезно изучать лишь в том случае, если возникают свои».

Для правильної самоорганізації в роботі з навчальним математичним текстом ми радимо дотримуватися таких рекомендацій, які допоможуть вам забезпечити цілеспрямованість і порядок у цій роботі.

- При вивченні заданого розділу вказаного посібника необхідно мати під рукою чистий аркуш паперу і олівець.
- Вдумливо прочитати весь розділ в цілому і виділити в ньому ті його частини, які мають самостійне значення.
- Під час розбору кожної із цих частин необхідно уважно прочитати її формулювання, зрозуміти її зміст, використавши наявний в посібнику рисунок, схему та інше. Якщо такого рисунку (схеми, таблиці) немає, то доцільно виконати його самому; якщо такий рисунок (схема, таблиця) є, то доцільно його відтворити на аркуші паперу.
- Вивчаючи дане питання (теорему) в цілому, необхідно перейти до його вивчення в деталях.
- Починаючи читання доведення теореми, необхідно повільно, крок за кроком вивчити його; при цьому необхідно послідовно відтворювати це доведення на аркуші паперу.
- При першому читанні слід намагатися зрозуміти лише основну думку даної частини доведення, незрозумілі моменти можна на деякий час пропустити.
- При повторному читанні слід приділити увагу незрозумілим моментам доведення, а також, тим математичним поняттям, на основі яких ведуться міркування. Якщо Ви щось забули, то слід відновити його в пам'яті, звертаючись до попередніх розділів навчального посібника.
- Після того, як необхідний розділ тексту навчального посібника (доведення теореми) став зрозумілим, необхідно намагатися один-два рази в усній формі відтворити його.
- Тепер доцільно звернути особливу увагу на те головне, що необхідно запам'ятати; прочитати ці положення декілька раз до тих пір, поки не зможете відтворити їх якщо не дослівно, то неодмінно правильно. Дуже корисно скласти короткий план (план-схему, запис у символах доведення теореми) вивченого і намагатися запам'ятати цей план.
- Якщо розділ, який вивчається, супроводжується ілюстративними прикладами або задачами, їх необхідно досить ретельно розібрати.

- Засвоївши теорію, необхідно починати розв'язувати задачі і виконувати завдання. Необхідно пам'ятати, що правильність розв'язку кожної задачі є результатом міцних і якісних знань відповідної теорії.

- По закінченню всієї роботи над вивченням математичного тексту доцільно подумати над тим, як провести доведення теореми іншим способом, якщо це можливо.

- Якщо в розділі, який Ви вивчаєте, не все зрозуміло, необхідно виділити незрозуміле і обов'язково звернутися за допомогою до однокурсників або викладача (індивідуальна консультація). Не треба соромитися свого нерозуміння, так як в математиці кожне знання спирається на попереднє і необхідне для наступного.

РОЗДІЛ 2
ПЛАНУВАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З МАТЕМАТИКИ

У цьому розділі Ви ознайомитеся з посеместровим розподілом самостійних робіт, індивідуальних навчально-творчих завдань та навчального проекту, а також разом з викладачем заповните графіки контролю за самостійною роботою студентів, яких Ви повинні чітко дотримуватися. 76 годин, які відведені на самостійну роботу студентів з математики, розподіляються між самостійними роботами – 58 год., індивідуальними навчально-творчими завданнями – 9 год. і навчальним проектом – 9 год.

У схемі посеместрового розподілу виконання самостійної роботи студентів вказана кількість і тематика самостійних робіт на кожен семестр, орієнтовна кількість годин на опрацювання теми, форми контролю за результатами їх виконання та максимальна кількість балів, яку можна отримати за виконання і захист самостійної роботи. Як вже було зазначено у розділі 1, набрана кількість балів за виконання і захист кожної самостійної роботи враховується до залікового кредиту.

Система самостійної роботи студентів з математики включає в себе, крім виконання 17 самостійних робіт, 3 індивідуальні навчально-творчі завдання та навчальний проект. За захист кожного навчально-творчого завдання студент може отримати від 5 до 10 балів, а за навчальний проект – 20 балів, які також зараховуються до залікового кредиту.

У першому семестрі, як видно із схеми, студент повинен виконати і захистити 4 самостійні роботи і 2 навчально-творчі завдання. У другому – навчальний проект і 4 самостійні роботи, у третьому – 5 самостійних робот, а в четвертому – 4 самостійні роботи й одне навчально-творче завдання.

Індивідуальні навчально-творчі завдання спрямовані на формування у студентів методичної компетентності на інтуїтивному рівні, адже виконання цих завдань потребує вміння адаптувати теоретичні основи початкового курсу математики до особливостей сприймання математичного змісту молодшими школярами. І це в той період, коли навчальний предмет – методику викладання математики в початкових класах студенти ще не вивчають. Виконання таких завдань завершується виставками-конкурсами, на яких студенти презентують свої перші навчально-методичні проекти.

Індивідуальне навчально-творче завдання № 1 (змістовий модуль № 1: Відношення на множині та їх властивості): *Використання графів для розв'язування задач на відношення у початковому курсі математики.*

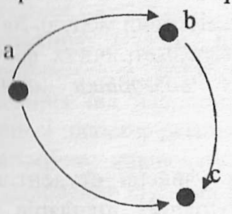
Методичний супровід до виконання:

- для виконання цього завдання студенти утворюють тимчасові групи із трьох чоловік. Кожна група повинна підібрати задачу на відношення з логічним навантаженням для учнів 1-4 класів і розв'язати її за допомогою графів, естетично оформити на цупкому папері формату А3.

Приступаючи до розв'язання задачі з використанням графів, домовтеся в першу чергу про те, граф з яким іменем Ви будете будувати (адже в умові задачі одночасно можуть бути присутні декілька видів відношень). Зобразіть усі елементи множини, про які йде мова в умові задачі точками. Це будуть вершини графу. Об'єднайте їх замкненим контуром, відповідно до умови задачі, в якій відношення задається між елементами деякої множини.

По-друге, напрям стрілки графу повинен відповідати його імені: наприклад, якщо Ви будуєте граф з іменем «Більше», то стрілка повинна виходити з точки, що відповідає більшому значенню і входити в точку (вершину графу) з меншим значенням.

По-третє, виділіть на графі наявний замкнений трикутник, що свідчить про прояв властивості транзитивності для заданого виду відношення:



Якщо aRb і bRc, то aRc.
Наприклад: Якщо a>b і b>c, то a>c.

Рис. 2. Зображення властивості транзитивності на графі (наявність замкненого трикутника)

По-четверте, використайте один колір стрілок для зв'язку тих елементів, про які йде мова в умові задачі, а інший колір для зображення зв'язку між елементами, який виникає на основі властивості транзитивності.

По-п'яте, формулюючи відповідь до задачі, читайте граф правильно. Пам'ятайте, що вершина графу, з якої виходять усі стрілочки графу, відповідає заданому відношенню (у графі з іменем «Більше» – це є точка з найбільшим значенням), а вершина, в яку входять всі стрілочки – оберненому відношенню. У нашому прикладі – це найменше значення.

На допомогу студенту можливий варіант виконання навчально-творчого завдання №1 ми подаємо у додатку А.

Індивідуальне навчально-творче завдання № 2 (змістовий модуль № 2: Розміщення, перестановки та комбінації без повторень. Основні комбінаторні задачі з повторенням): *Розв'язування комбінаторних задач для учнів 1-4 класів способом побудови «дерева можливих варіантів».*

Методичний супровід до виконання:

• мета цієї індивідуальної роботи полягає в усвідомленні студентом способу розв'язування комбінаторних задач, який доступний молодшим школярам і забезпечує можливість вивчати комбінаторику без формул. Це спосіб побудови «дерева можливих варіантів» (скорочено «дерево можливостей»). Як правило, учні молодших класів розв'язують комбінаторні задачі так: спочатку утворюють всі комбінаторні об'єкти (незважаючи на те, що умова задачі цього не вимагає), а потім перераховують їх і відповідають на питання «скільки їх». Такий спосіб дає правильну відповідь у тих випадках, коли кількість комбінаторних об'єктів невелика. У випадках великої кількості комбінаторних об'єктів він є нераціональним і, як правило, дає неправильну відповідь.

Студенту пропонується на вибір комбінаторна задача олімпіадного змісту для учнів 3-4 класів. Надається загальний методичний супровід: які запитання і в якій послідовності доцільно ставити перед учнями, щоб вони глибоко усвідомили суть способу «дерево можливостей», зрозуміли його раціональність і результативність. Завдання виконується кожним студентом індивідуально відповідно до вимог щодо оформлення сторінки зошита для учня на форматі А4 з використанням кольорової гами. Зразок оформлення сторінки зошита з комбінаторики для учня ми подаємо у додатку Б.

Індивідуальне навчально-творче завдання № 3 (змістовий модуль № 11 (підмодуль № 4): Означення і властивості основних стереометричних фігур. Зображення стереометричних фігур): *Виготовлення розгортки моделі стереометричної фігури*.

Методичний супровід до виконання:

- мета цієї роботи – розвиток просторових уявлень студентів і підготовка їх до організації навчальної діяльності молодших школярів по формуванню вмінь орієнтуватися в тривимірному просторі.

Завдання студенту: Виберіть одну із фігур, що належить до групи призм чи групи пірамід, чи круглих тіл. Виготовить розгортку моделі вибраної Вами фігури. За розгорткою представте модель. Матеріал для виготовлення за вибором студента. Під час представлення моделі на захисті необхідно дати визначення фігури та описати її основні властивості. Оцінка на захисті враховує правильність і естетичність виготовлення як розгортки моделі стереометричної фігури, так і самої моделі і зараховується до залікового кредиту № 6.

Навчальний проект (індивідуальне навчально-дослідне завдання)

Тема: Недесяткові позиційні системи числення у початковому курсі математики (система розвивального навчання Д. Ельконіна-В. Давидова)

Мета: Усвідомлення ролі і значення різних позиційних систем числення для розвитку альтернативного мислення людини

Характеристика змісту

Навчальний проект включає в себе розробку двох частин: *теоретичної* і *експериментальної*.

У теоретичній частині треба відобразити: *розділ 1. Характеристика недесяткових позиційних систем числення.* У цьому розділі необхідно означити найбільш уживані недесяткові позиційні системи числення з основою $p = 2, 5, 8, 12$. Для кожної із чотирьох систем показати (проілюструвати) основний принцип утворення одиниці вищого розряду з певної кількості одиниць нижчого розряду, а також записати для кожної системи числення перші 45 чисел та прочитати їх; *розділ 2. Система завдань для формування поняття багатоцифрового числа в учнів першого класу.* У цьому розділі необхідно представити в повному обсязі розв'язані завдання з розділу 3:

Як з'явилося багатоцифрове число? підручника Е. І. Александрової «Математика» для 1 кл.: (система розвивального навчання): В 2 ч. / Харк. держ. ун-т, центр психології і методики розвивального навчання. – Х.: Логос, 1998. – С. 81-99.

Експериментальна частина проекту повинна відображати: *розділ 1. Опис практичного винаходу* (розробка системи мірок для запису багатоцифрового числа в одній із вибраної Вами недесяткової позиційної системи числення); *розділ 2. Опис, аудіозапис, відеозапис (за вибором студента) уроку математики у першому класі за програмою розвивального навчання* (розділ програми: формування поняття багатоцифрового числа). Для виконання завдань цього розділу Вам необхідно відвідати і записати спостереження уроку математики у першому класі за програмою розвивального навчання під час проходження пасивної педагогічної практики в школі. У процесі спостереження акцентуйте увагу на тому, як учитель організовує повноцінну навчальну діяльність учнів по оволодінню основним способом моделювання системи мірок для утворення і запису багатоцифрового числа в будь-якій системі числення.

Результати виконання навчального проекту необхідно представити на захист в окремій папці на листках формату А4 (всі поля 20 мм) з додатком – виготовленим практичним засобом для демонстрації утворення одиниць вищих розрядів обраної Вами системи числення.

Кращі навчальні проекти беруть участь у виставці-конкурсі «Мій перший навчально-методичний проект з математики». Усі навчальні проекти, які беруть участь у конкурсі, оцінюються додатково заохочувальними балами: від 5 до 10 балів у залежності від зайнятого місця. Ці бали також зараховуються до залікового кредиту № 3.

Про структуру, зміст і порядок виконання самостійних робіт з математики читайте у розділі 3.

Посеместровий розподіл виконання самостійних робіт, індивідуальних навчально-творчих завдань та навчального проекту з математики

Перший курс					
Перший семестр			**Другий семестр**		
Перелік тем, які виносяться на самостійне опрацювання	*Форми контролю*	*Максимальна можлива кількість балів*	*Перелік тем, які виносяться на самостійне опрацювання*	*Форми контролю*	*Максимальна можлива кількість балів*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Самостійна робота № 1 (2 год) Способи завдання відношень між елементами однієї множини	Письмовий експрес-контроль	5 бал.	*Навчальний проект (9 год):* Недесяткові позиційні системи числення в початковому курсі математики (програма розвивального навчання Д.Ельконіна – В.Давидова)	Індивідуальна співбесіда Виставка-конкурс	20 бал.
Самостійна робота № 2 (4 год) Основні правила і поняття комбінаторики. Розв'язування комбінаторних задач	Колективний захист з наступною самооцінкою	10 бал.	*Самостійна робота № 5 (2 год)* Поняття добутку і дії множення в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	Індивідуальна співбесіда Виставка-конкурс	10 бал.
Самостійна робота № 3 (2 год) Поняття суми і дії додавання в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	Перевірка конспектів, індивідуальна співбесіда (вибірково)	10 бал.	*Самостійна робота № 6 (2 год)* Поняття частки і дії ділення в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа та в теорії вимірювання величин	Колективний захист в поєднанні з експрес-контролем	10 бал.

Самостійна робота № 4 (2 год) Поняття різниці і дії віднімання в початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа	Перевірка конспектів, індивідуальна співбесіда (вибірково)	10 бал.	*Самостійна робота № 7 (4 год)* Десяткові дроби. Арифметичні дії над ними. Перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки	Самооцінка практичної частини за поданим зразком Домашнє тестування	10 бал. Дод-во 15 бал. за тестування
Навчально-творче завдання № 1 (3год) Використання графів для розв'язування задач на відношення у початковому курсі математики	Виставка робіт студентів під девізом «Діти і графи»	10 бал.	*Самостійна робота № 8 (2 год)* Недесяткові позиційні системи числення	Колективний захист, індивідуальне моделювання різних систем числення	10 бал.
Навчально-творче завдання № 2 (3 год) Розв'язування комбінторних задач для учнів 1-4 класів способом побудови «дерева можливих варіантів»	Виставка робіт студентів під девізом: «Комбінаторика без формул»	10 бал.			
Другий курс					
Третій семестр			**Четвертий семестр**		
Самостійна робота № 9 (2 год) Числа порівняльні за модулем	Письмовий експрес-контроль	5 бал.	*Самостійна робота № 14 (3 год)* Дослідження властивостей функцій методами елементарної математики: пряма і обернено пропорційні залежності, лінійна функція, їх властивості і графіки	Виступ біля дошки Самооцінка за поданим зразком	10 бал.
Самостійна робота № 10 (1 год) Застосування ознаки подільності Паскаля	Індивідуальний письмовий захист за варіантами	10 бал.	*Самостійна робота № 15 (2 год)* Основні геометричні фігури, які вивчаються у початковому курсі математики: означення, побудова, моделі	Експрес-опитування Відповідь біля дошки	10 бал.

Самостійна робота № 11 (2 год) Тотожні перетворення числових виразів та виразів із змінною	Самооцінка виконання практичної частини за поданим зразком Різнорівнева самостійна робота (рівень за вибором студента)	10 бал. Високий достатній середній рівні	*Самостійна робота № 16 (2 год)*Розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки у початковому курсі математики	Презентація міні-таблиць – зразків розв'язання задач	10 бал.
Самостійна робота № 12 (2 год) Основні способи розв'язування алгебраїчних рівнянь в шкільному курсі математики	Самооцінка за поданим зразком Математичний практикум(письмовий контроль за відібраними завданнями)	10 бал. Додат-во 10 бал.	*Самостійна робота № 17 (2 год)* Розв'язування задач на доведення. Пропедефтика доведень у початковому курсі математики	Перевірка конспектів Індивідуальна співбесіда	10 бал.
Самосійна робота № 13 (4 год) Розв'язування нерівностей із однією змінною в шкільному курсі математики. Пропедевтика розв'язування нерівностей в початковому курсі математики	Письмовий експрес-контроль Презентація основних способів розв'язування нерівностей початкового курсу математики	10 бал.	*Навчально-творче завдання № 3 (3 год)* Виготовлення розгортки і моделі стереометричної фігури	Виставка-конкурс виготовлених моделей	15 бал.

Графік контролю за самостійною роботою студентів з математики потоку ПНП (А,Ф) – 20... – 1, 2, 3

Перший курс											
Перший семестр						Другий семестр					
Шифр групи	*Порядковий номер самостійної роботи / Дата захисту*					*Шифр групи*	*Порядковий номер самостійної роботи / Дата захисту*				
ПНП –	С.Р.№1	НТЗ№1	С.Р.№2	НТЗ№2	С.Р.№3 -4	**ПНП –**	Н.П.	С.Р.№5	С.Р.№6	С.Р.№7	С.Р.№8
ПНА –	С.Р.№1	НТЗ№1	С.Р.№2	НТЗ№2	С.Р.№3 -4	**ПНА –**	Н.П.	С.Р.№5	С.Р.№6	С.Р.№7	С.Р.№8
ПНФ –	С.Р.№1	НТЗ№1	С.Р.№2	НТЗ№2	С.Р.№3 -4	**ПНФ –**	Н.П.	С.Р.№5	С.Р.№6	С.Р.№7	С.Р.№8

ПОЗНАЧЕННЯ: С.Р. – самостійна робота;
НТЗ – навчально-творче завдання
(індивідуальна робота студента).

ПОЗНАЧЕННЯ: Н.П. – навчальний проект

ПРИМІТКА: захист і оцінювання результатів виконання навчально-творчих завдань № 1 і № 2 відбувається під час виставки робіт студентів. Перша виставка під девізом «Діти і графи», друга «Комбінаторика без формул»

Графік контролю за самостійною роботою студентів з математики потоку ПНП (А,Ф) – 200... – 1, 2, 3

Другий курс											
Третій семестр						Четвертий семестр					
Шифр групи	*Порядковий номер самостійної роботи / Дата захисту*					*Шифр групи*	*Порядковий номер самостійної роботи / Дата захисту*				
ПНП –	С.Р.№9	С.Р.№10	С.Р.№11	С.Р.№12	С.Р.№13	**ПНП –**	С.Р.№14	С.Р.№15	С.Р.№16	С.Р.№17	НТЗ№3
ПНА –	С.Р.№9	С.Р.№10	С.Р.№11	С.Р.№12	С.Р.№13	**ПНА –**	С.Р.№14	С.Р.№15	С.Р.№16	С.Р.№17	НТЗ№3
ПНФ –	С.Р.№9	С.Р.№10	С.Р.№11	С.Р.№12	С.Р.№13	**ПНФ –**	С.Р.№14	С.Р.№15	С.Р.№16	С.Р.№17	НТЗ№3

ПРИМІТКА: захист і оцінювання результатів виконання навчально-творчого завдання № 3 відбувається під час проведення виставки-конкурсу студентських робіт-моделей стереометричних фігур

РОЗДІЛ 3
ІНСТРУКЦІЇ ТА МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ СТУДЕНТАМИ

Головне для студента в самостійній роботі з математики, як правило, таке питання: як організуватися, щоб виконати і захистити самостійну роботу? А це в свою чергу потребує відповіді на такі запитання: в якому порядку виконувати навчальні завдання? яка організація самостійної роботи найбільш раціональна? коли доцільно працювати одному, а коли разом з однокурсниками? як організувати самоконтроль і самооцінку своєї роботи?

Кожна самостійна робота складається з теоретичної частини і практичних завдань до кожного питання теорії. Кожне теоретичне питання супроводжується методичним коментарієм, в якому вказано на які основні поняття, властивості, теореми необхідно звернути увагу. Тому перш ніж приступити до конспектування питань теорії ознайомтеся послідовно з методичними порадами до кожного питання окремо. Пам'ятайте, що конспектування математичного змісту – це досить повне відображення письмової інформації. Конспектування передбачає виклад засвоюваних математичних понять своїми словами і по можливості більш конкретно й узагальнено. Щоб цього досягти, треба скористатися тими порадами, які ми подаємо у першому розділі: як працювати над математичним текстом (див.: п. 1.3).

Якщо Ви законспектували теорію, а це значить відобразили у конспекті вже засвоєний Вами математичний зміст, то приступайте до виконання практичної частини самостійної роботи. Практична частина – це система навчальних завдань з вимогою: розв'язати, спростити, обчислити, довести, побудувати та ін. Навчальні завдання пропонуються різного ступеня складності.

Порядок виконання завдань кожен студент повинен встановити сам для себе на підставі своїх спостережень над власною працездатністю. При цьому слід мати на увазі, що Ви легше ввійдете в самостійну діяльність, якщо на початку виконання роботи працюєте з більшим піднесенням, продуктивніше, ніж в кінці. Якщо Ви порівняно швидко втомлюєтеся, починати роботу слід з підготовки найскладнішого завдання. Якщо ж Ви втягуєтеся в роботу повільно, продуктивність праці зростає поступово і втома з'являється не одразу, то роботу слід розпочинати виконувати з легшого і цікавішого завдання, а потім переходити до найскладнішого.

Більших позитивних результатів Ви можете досягти якщо правильно розподілите в часі обсяг матеріалу, який треба опрацювати. Краще засвоюється математичний зміст, якщо Ви розподілите його більш-менш рівномірно в часі і щодня будете опрацьовувати певну порцію матеріалу.

Доцільно над виконанням самостійної роботи працювати і колективно. Незважаючи на те, що при цьому витрачається більше часу на вивчення математичного джерела, оскільки частина його йде на колективне обговорення прочитаного, на з'ясування того, що ж записати в зошит (конспект), які математичні символи використати. Однак таке обговорення допомагає краще засвоїти суть питань, що вивчаються. Тут особливо виграють ті студенти, які мають більш високий рівень математичної підготовки. Вони виступають у ролі посередників-консультантів, яких обирає група студентів. Саме консультанти допомагають іншим студентам засвоїти більш складні питання самостійної роботи. Неодноразове пояснення своїм одногрупникам доведення теореми або розв'язання певної задачі з крейдою в руках біля дошки чи з олівцем на аркуші паперу забезпечує усвідомлене запам'ятовування змісту цього матеріалу, а також формує у студента вміння доводити, аргументовано переконувати, що свідчить про набуття професійних навичок краще, ніж коли кожен студент працює над вивченням математичної інформації спочатку самостійно, а обговорюються питання і контролюється правильність викладу матеріалу колективно. Але у цьому випадку кожен має можливість проконтролювати свій рівень готовності до захисту самостійної роботи і здійснити об'єктивну самооцінку своєї готовності.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

ТЕМА: Способи завдання відношень між елементами однієї множини

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти* основні поняття: графік рівняння з двома змінними та спосіб завдання відношень за допомогою двохмісного предикату; *вміти*: записувати і будувати графіки бінарних відношень.

План вивчення теми

1. Задання відношень за допомогою двохмісного предикату.
2. Графік рівняння. Приклади графіків рівнянь з двома змінними.

Література

1. Гусев В. А. Математика. Справочные материалы / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1988. – С. 196-198.

2. Кухар В. М. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: [практикум] / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. За заг.ред.В. М. Кухар. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1989. – С. 40-41.

3. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – К.: Вища школа, 1988. – С. 133-137.

4. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 122-131.

Методичний коментарій та завдання

Зміст *першого питання* становить вичерпна характеристика способу завдання відношень між двома елементами однієї і тієї ж множини за допомогою двохмісного предикату.

Виконуючи завдання № 1,2, Ви навчитеся «перекладати» на мову формул словесне формулювання предикату, який виражає відношення між двома елементами заданої множини X.

Завдання № 1. У початковому курсі математики на множині цілих невід'ємних чисел вивчаються такі відношення: «більше», «більше на», «більше в», «дорівнює», «безпосередньо слідує за», «слідує за», «одне число ділиться на інше без залишку», «більше або дорівнює» та інші. Сформулюйте ці відношення і запишіть їх за допомогою двохмісного предикату.

Наприклад: R: «число x кратне числу y», де $x \in Z_0$, $y \in N$ або R: «$x \vdots y$», де $x \in Z_0,\ y \in N$.

Завдання № 2. Запишіть задані нижче відношення за допомогою рівняння з двома змінними:

«число y на 3 менше числа x»,

«число x на 2 менше числа y»,

«число x обернене за своїм значенням числу y»,

«число y при діленні на 3 дає залишок 2»,

«число y дорівнює квадрату числа x».

Вивчаючи зміст *другого питання* теми, Вам необхідно з'ясувати, що ми будемо називати графіком рівняння з двома змінними: прямої, кола, параболи, гіперболи. Вміти знаходити переріз і об'єднання графіків рівнянь з двома змінними.

Завдання № 3. Побудувати в прямокутній системі координат графіки наступних відношень, які задані рівняннями з двома змінними на множині:

а) $x = 2$, якщо $-3 < y < 4$; б) $x = 2y$, якщо $-2 < y < 4$;

в) $x + y = 6$, якщо $x > 0$, $y > 0$; г) $y = 11x$, якщо $x \in R$;

д) $y = [x]$, якщо $x \in R$; е) $y = \{x\}$, якщо $x \in R$;

ж) $y = 3x^2 - 2x + 1$, якщо $x \in R$; з) $y = 1 / (x-2)$, якщо $x \in R$.

Завдання № 4. Побудувати в прямокутній системі координат графіки таких відношень і знайти переріз і об'єднання їх:

а) $x^2 + y^2 = 9$ і $x - y = 2$;

б) $2x - 3y = 4$ і $4x - 6y = -1$;

в) $y + 2 = -1 / (x + 1)$ і $2x - y = 1$.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

ТЕМА: Основні правила і поняття комбінаторики. Розв'язування комбінаторних задач.

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти основні поняття*: перестановки, розміщення, комбінації; *вміти*: безпомилково визначити в конкретній задачі вид комбінаторного поняття, застосувати формули числа перестановок, числа розміщень, числа комбінації. *Розвивати* бачення виходу цих питань в курс математики початкової школи.

План вивчення даної теми

1. Поняття про комбінаторну задачу.
2. Правила суми і добутку.
3. Перестановки. Формула числа перестановок.
4. Розміщення з m елементів по k елементів без повторення.
5. Комбінації.
6. Уявлення про сполуки з повтореннями.

Література.

1. Кисільова В. П. Розв'язування комбінаторних задач з учнями початкових класів. – Кривий ріг: Вид-во КДПУ, 2001. – 35 с.

2. Кухар В. М. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: [практикум] / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. За заг.ред. В. М. Кухар. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1989. – С. 56-76.

3. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – К.: Вища школа, 1988. – С. 31-47.

4. Математика: [навч.посібник для студ. пед.інстиутів] / [В. Н. Боровик, Л. М. Вівальнюк, В. М. Костарчук, Ю. В. Костарчук, З. Г. Шефтел]. – К.: Вища школа, 1980. – С. 54-64.

5. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] /

Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 38-50.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання* теми, Вам необхідно чітко з'ясувати, які задачі відносяться до класу комбінаторних задач, у чому їх особливість. Занотувати в конспект у вигляді відповіді на поставлені вище питання та підібрати декілька задач комбінаторного характеру для учнів початкової школи. З цією метою використайте підручники з математики для 1-4 класів (розділ задач підвищеної складності), а також журнал "Квант" розділ ("Квант для молодшого школяра").

Вивчаючи зміст *другого питання* теми, Вам необхідно засвоїти два правила:

- правило суми (два випадки: $A \cap B = \varnothing$,і $A \cap B \neq \varnothing$ (для двох множин);
- правило суми для 3-х множин.

Для кращого засвоєння правила суми обов'язково використайте діаграми Ейлера для конкретного прикладу – задачі на правило суми.

Для кращого засвоєння правила добутку Вам необхідно повторити поняття декартового добутку множин та знаходження числа елементів декартового добутку.

Перевірити себе, як Ви засвоїли зміст цього питання, допоможуть Вам задачі. Розв'яжіть їх, зверніть увагу, що серед запропонованих задач є задачі з курсу математики початкової школи.

Задача 1. Приїхало 100 туристів. Із них 10 чоловік не знали ні німецької, ні французької мови. 75 чоловік знали німецьку і 83 французьку. Скільки туристів знали обидві мови?

Задача 2. Вибрана деяка множина натуральних чисел. Відомо, що серед них 100 чисел, які кратні 2,115 чисел, які кратні 3,120 чисел, які кратні 5,45 чисел, які кратні 6,38 чисел, які кратні 10,50 чисел, які кратні 15,20 чисел, які кратні 30. Побудувати діаграму Ейлера і визначити, скільки елементів у даній множині?

Задача 3. Скільки і які саме трицифрові числа можна записати, якщо:

A = {5, 4, 6} – множина цифр для позначень сотень,

B = {2, 3} - множина цифр для позначень десятків,

C = {7, 9} - множина цифр для позначення одиниць шуканих чисел.

Задача 4. Маємо 5 сортів конвертів без марок і 4 види марок одного і того ж достоїнства. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправлення листа?

Задача 5. Скількома способами можна одягти ляльку, якщо в неї є 3 платтячка і 2 капелюшки?

Вивчаючи зміст *третього питання,* Вам необхідно особливу увагу звернути на графічну модель розпізнавання виду запропонованої задачі. Вона допоможе вам краще засвоїти характерні особливості комбінаторних задач на різні сполуки.

З метою перевірки, як Ви навчилися розпізнавати комбінаторні об'єкти, пропонуємо розв'язати наступні задачі та виконати практичну роботу.

Задача 6. Скільки двоцифрових чисел з різними цифрами можна утворити з цифр 0,1,2,3,4?

Задача 7. За допомогою цифр 4,5,6 записати всі можливі трицифрові числа так, щоб кожна цифра у них не повторювалась.

Задача 8. Скількома способами можна розсадити12 гостей на 12 різних стільців?

Завдання для практичної роботи: Візьміть звичайну дитячу мозаїку. Виберіть із фішок 6 червоних, 6 синіх і 6 жовтих. Вставляючи їх у гніздечка, порахуйте скількома способами ви можете переставити 3 кольори: червоний, синій, жовтий.

Графічну модель розв'язку цієї задачі запишіть до свого зошита.

ПРИМІТКА: Таку роботу Ви з успіхом зможете виконати з учнями початкових класів. Пам'ятаючи, що в дітей молодшого шкільного віку переважає конкретно-образне мислення, Ви створите виконанням цієї роботи відповідну базу для розв'язування задач на перестановки в початковому курсі математики.

Завдання: Знайдіть 2-3 приклади таких задач в курсі математики початкової школи, запропонуйте їх розв'язання за допомогою мозаїки позначаючи кожну фішку певним об'єктом або запропонуйте свою наочну модель для розв'язання задачі.

Вивчення змісту *четвертого питання* теми рекомендуємо провести за матеріалами літератури[2], яка вказана в плані. Пам'ятайте, що ви повинні чітко усвідомити зміст формули:

A_m^k = m(m-1)*(m-2)…(m-(k-1))= $\frac{m!}{(m-k)!}$, яка визначає число розміщень з m елементів по k. Уміти її застосовувати та усвідомити: в чому ж різниця в знаходженні числа розміщень з m елементів по k елементів та числа перестановок Pm з m елементів. Перевірте, як Ви засвоїли зміст цього питання розв'язанням таких задач:

Задача 9. З 12 членів профкому потрібно вибрати голову, його заступника, секретаря і культторга. Скількома способами це можна зробити?

Задача 10. У класі 43 вільних місця. Скількома способами можна посадити на них 8 учнів.

Задача 11. Записати всі двоцифрові числа за допомогою цифр 3,4,6,8 так, щоб цифри не повторювалися.

Завдання: Як Ви вважаєте, чи можливо з учнями початкової школи розв'язати задачу № 11? Якщо да, то яким чином? Формулу числа розміщень вони не вивчають. Запропонуйте подібні 2-3 задачі з підручників: Математика 1-4 класи (автор М. В. Богданович, Л. П. Кочина, Н. П. Листопад).

Вивчаючи зміст *п'ятого питання* теми, Ви повинні засвоїти поняття комбінації C_m^k з m елементів по k без повторення елементів. Уміти розрізняти комбінації C_m^k від розміщення A_n^k не лише за формулою, а й за змістом конкретної задачі (дивися як це показано в літературі [1]), доводити формулу: $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ та знати властивості 1-3 числа комбінацій.

Для учнів початкових класів може бути цікавим завдання про числа трикутника Паскаля. Для цього Ви повинні знати, що, використовуючи властивості числа комбінацій $C_m^k + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1}$ і $C_m^k = C_m^{m-k}$, результати обчислення зручно розмістити у вигляді таблиці, яку називають трикутником Паскаля.

Наприклад: $C_3^2 = C_2^1 + C_2^2$; $C_4^3 = C_3^2 + C_3^3$ і т.д.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Неважко помітити, що кожен рядок починається з 1 і закінчується 1. Рівновіддалені від кінців рядка елементи рівні між собою. В непарному рядку є один середній найбільший елемент, у парному рядку-два. Сума елементів (k+1)-го рядка дорівнює 2^k, тобто: $C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_{k-1}^k + C_k^k = 2^k$.

Запишіть ще три наступні рядки трикутника Паскаля і перевірте виконання для них властивостей числа комбінацій. Знайдіть історичну довідку про трикутник Паскаля та можливості його застосування. Розв'яжіть такі задачі:

Задача 12. Відбувся шаховий турнір, у якому взяли участь кілька шахістів. Кожен зіграв з рештою по одній партії. Всього було зіграно 45 партій. Скільки було шахістів?

Задача 13. Скільки діагоналей має опуклий дванадцятикутник?

Задача 14. Накресліть шестикутник, позначте літерами всі його вершини. З'єднайте вершини, які не з'єднано відрізками. Скільки відрізків дістали? Полічіть на рисунку і обчисліть за допомогою певних міркувань.

Зміст *шостого питання* вивчіть конспектуванням за рекомендованим джерелом [2] – С. 65-68.

Перевірте, як ви засвоїли поняття про сполуки з повторенням елементів, розв'язуючи такі задачі:

Задача 15. Скільки п'ятицифрових чисел можна записати цифрами 1, 2, 3, якщо допускається повторення цифр?

Задача 16. Скількома способами можна скласти букет із 7 однакових або різних квіток, якщо є 9 сортів квітів?

Задача 17. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви в слові "прапороносці" (слово може і не мати ніякого смислу)?

САМОСТІЙНІ РОБОТИ № 3, 4, 5

ТЕМА: Поняття арифметичних дій у початковому курсі математики на основі кількісної теорії цілого невід'ємного числа

Вивчаючи дану тему, студент *повинен усвідомити* роль кількісної теорії в обґрунтуванні арифметичних дій у початковому курсі математики; *вміти* визначати теоретичну основу кожної арифметичної дії: додавання, віднімання, множення.

План вивчення теми

1. Поняття дії додавання і суми в початковому курсі математики.
2. Поняття дії віднімання і різниці в початковому курсі математики.
3. Поняття дії множення і добутку в початковому курсі математики.

Література

1. В. М. Кухар. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: [практикум] / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. За заг.ред. В. М. Кухар. – К.: Вища школа, 1989. – С. 229-274.

2. В. М. Кухар. Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – К.: Вища школа, 1988. – С. 169-188.

3. Математика: [підручники для 1 кл.] / М. В. Богданович, Г. П. Лишенко, Ф. М. Рівкінд, Л. В. Оляницька, С. О. Скворцова, О. В. Оноприєнко – К.: Освіта, 2012.

4. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики: [учеб.пособие для учащихся пед. уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразоват.шк.»] / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 169-175; С. 192-196.

5. Додаток до самостійних робіт № 3-5: Як правильно виконувати самостійну роботу з математики (Зразок).

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання,* повторіть теоретичну основу суми двох і декілька доданків, пригадайте означення суми на основі кількісної теорії. Перегляньте програму з математики для 1-го класу і встановіть, коли учні вперше зустрічаються з такими поняттями, як сума і дія додавання. До першого питання плану виконайте завдання № 1-№ 3.

Завдання № 1. Використовуючи підручник з математики для 1-го класу, розпишіть фрагмент етапу уроку засвоєння нових знань, на якому вводиться поняття суми і дії додавання.

Завдання № 2. Поясніть, які правила треба використати при додаванні таких чисел, щоб обчислення було виконано найзручнішим способом:

$5 + 3 + (189 + 327) =$

$(277 + 169) + (431 + 323) =$

$(1998 + 396) + 76002 =$

Завдання № 3. Підберіть із курсу математики для 2-го класу завдання, які підтверджують використання правил додавання, і розв'яжіть їх з поясненням.

Вивчаючи зміст *другого питання,* повторіть теоретичну основу дії віднімання цілих невід'ємних чисел, пригадайте означення різниці в кількісній теорії. Вивчаючи програму і підручники з математики для початкової школи, встановіть, коли учні вперше знайомляться з такими поняттями, як різниця і дія віднімання. До другого питання плану виконайте завдання № 4-№ 6.

Завдання № 4. Умову завдання дивись у завданні №1 тільки для поняття різниці і дії віднімання.

Завдання № 5. Розв'язати задачу: "На складі було 185м^3 березових дров і 216м^3 дубових. Скільки дров залишилося на складі після того, як продали 78м^3?" Запишіть розв'язання задачі числовим виразом.

Обчислення виконайте трьома способами, змінюючи відповідно умову задачі. Змініть числові дані так, шоб обчислення можна було виконати лише одним способом; двома способами.

Завдання № 6. Обчислити найзручнішим способом і дати його теоретичне обґрунтування:

243–(43+28) =

243–(28+15) =

(56709+7845)–(36709+845) =

Вивчаючи зміст *третього питання,* встановіть, яким способом означають дію множення і добуток натуральних чисел у початковому курсі математики. Що виступає засобом засвоєння змісту цих понять? До третього питання плану виконайте завдання № 7-№ 8.

Завдання № 7. Поясніть, чому 3*2 = 6; 1*4 = 4; 0*2 = 0; 4*1 = 4; 2*0 = 0, використовуючи означення добутку, через:

1) суму рівних доданків;

2) декартів добуток;

3) знаходження чисельності об'єднання скінчених, рівнопотужних між собою множин.

Завдання № 8. Поясніть, чому запропоновані задачі розв'язуються за допомогою дії множення:

1) на кожну із 4-х тарілок поклали по 3 яблука. Скільки всього яблук на тарілках?

2) для прикрашення ялинки кожен із п'яти хлопчиків виготовив по 4 іграшки. Скільки всього іграшок виготовили хлопчики?

Додаток до самостійних робіт № 3-5: Як правильно виконувати самостійну роботу з математики (Зразок)

<u>**Перше питання плану:**</u>

Дано: A, B – скінченні множини і $A \cap B = \emptyset$, $n(A) = 3$; $n(B) = 4$

Знайти: $3 + 4 = ?$

Нехай: $A = \{a, b, c\}$, $n(A) = 3$

$B = \{m, k, \ell, s\}$, $n(B) = 4$

Знайдемо: $A \cup B = \{a, b, c, m, k, \ell, s\}$, $n(A \cup B) = 7$

Оскільки множини $A \cap B = \emptyset$, то множина $A \cup B$ складається з елементів множин A і B і тільки з них. Якщо в множині A три елементи, а в множині B чотири елементи, то в множині $A \cup B$ їх є сім. Отже, 7 – це сума чисел 3 і 4.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 4 & = & 7 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n(A) & + & n(B) & = & n(A \cup B) \end{array}$$

Теоретична основа (Т.О): сумою двох натуральних чисел a та b є таке число $a + b = c$, що є кількісною характеристикою об'єднання множин A та B, для яких числа $a = n(A)$, $b = n(B)$, за умови що $A \cap B = \emptyset$.

З поняттям суми і дії додавання, на описаній вище теоретичній основі (Т.О.) учні вперше зустрічаються в 1-му класі у розділі 1. Ознаки і властивості предметів. Множини. Геометричні фігури. Натуральні числа 1-10 б число 0.[9,11]. Пропедевтика цих двох понять відбувається в Т. 1 на уроці: "Цифра і число 5". Учні вперше використовують знак "+".

Поняття суми як числа характеризує кількість елементів у новій множині, яка утворилася в результаті приєднання до елементів однієї множини елементів другої множини (до 4-ох білих кружечків приєднали ще 3-ри сині. Скільки всього одержали кружечків?). Тут уперше учні фіксують – сума це результат дії додавання, а на С. 32 здійснюється пропедевтика такого погляду на суму [11].

Завдання № 1. Фрагмент етапу уроку засвоєння нових знань.

Мета: ввести поняття суми і дії додавання.

Учитель: Знайдіть, чому дорівнює 3+4.

Учні розв'язують усно, вчитель слухає відповідь учня і записує на дошці, а учні в зошитах: 3 + 4 = 7.

Учитель: Як переконатися в правильності відповіді. Обґрунтуйте, що ви не помилилися, і ця відповідь правильна.

Учні переходять до побудови теоретичної основи для даного прикладу. За допомогою роздаткового матеріалу вони утворюють дві множини, в яких кількість елементів відповідно виражається числами 3 і 4 і показують, що вони утворюють нову множину, об'єднуючи дві разом, а потім рахують кількість елементів в утвореній новій множині:

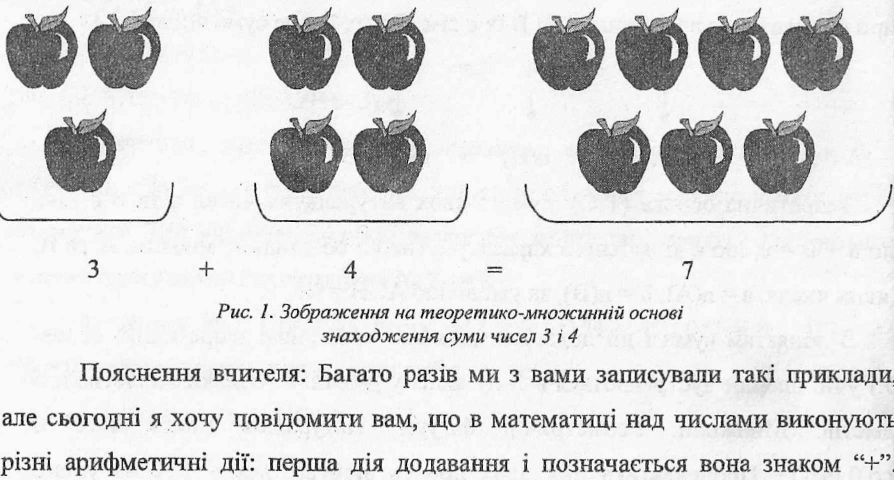


Рис. 1. Зображення на теоретико-множинній основі знаходження суми чисел 3 і 4

Пояснення вчителя: Багато разів ми з вами записували такі приклади, але сьогодні я хочу повідомити вам, що в математиці над числами виконують різні арифметичні дії: перша дія додавання і позначається вона знаком "+". А результат цієї дії – число, яке ми отримали в результаті додавання, називаємо сумою. Отже, сума чисел 3 і 4 є число 7. Але сумою називається і вираз: 3+4.

Запис на дошці і в зошитах учнів:

$$\overbrace{3 \quad + \quad 4}^{\text{сума – вираз}} \quad = \quad \overset{\text{значення виразу}}{7}$$

$\downarrow$ 1-й доданок $\quad\downarrow$ 2-й доданок $\quad\downarrow$ сума

Робота з таблицею за підручником:

2 + 2 = 4; 2 + 1 = 3;   3 + 2 = 5;   4 + 1 = 5

(учні складають і записують в зошит перші чотири приклади). А далі працюють на с. 31 у навчальному зошиті до підручника.

Завдання № 2.

5+3+(189+327)=(3+327)+(5+189)=330+194=524 – правило як до чисел 5 і 3 додати суму чисел.

(277+169)+(431+323)=(277+323)+(169+431)=600+600=1200 – правило як до суми чисел додати суму: треба до першого доданку 1-ої суми додати другий доданок 2-ої суми, а до другого доданку першої суми додати перший доданок другої суми і отримані результати додати.

(1998+396)+76002=(1998+76002)+396=78000+396=78396 – правило додавання числа до суми: треба до першого доданку суми додати задане число і до отриманого результату додати другий доданок.

Завдання № 3. № 344 М. 2 кл. Поставити дужки так, щоб були різні правила. (авт. М. В. Богданович, 2006 р. видання)

Розв'яжи і поясни:

20 + 7 + 50 = (20+50) + 7 = 70 + 7 = 77 – правило додавання числа до суми;

60 + 9 + 20 = (60+20) + 9 = 80 + 9 = 89 – правило додавання числа до суми;

60 + 9 + 20 = (60+9) +20 = 69 + 20 = 89 – правило додавання числа до суми;

30 + 4 + 40 + 5 = (30+40) + (4+5) = 70 + 9 = 79 – правило додавання суми до суми.

Завдання № 4. Математика. – 1 клас. 2006 р. видання М. В. Богданович. С. 38 (поняття дії віднімання на теоретико-множинній основі: вилучення із множини елементів її власної підмножини в темі 1; "Числа першого десятка. Властивості предметів. Геометричні фігури. Величини"). На с. 86 за темою: "Величини" вводиться поняття різниці двох чисел як результату дії віднімання, а також означаються компоненти при відніманні: зменшуване, від'ємник.

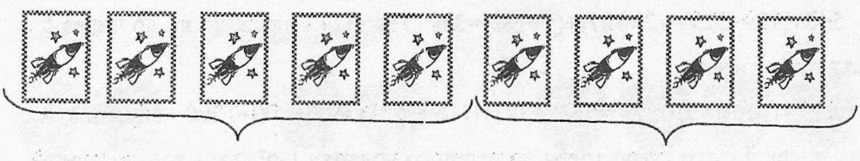
Фрагмент етапу уроку засвоєння нових знань.

Мета: ввести поняття дії віднімання і різниці.

Структура цього етапу аналогічна структурі в завданні № 1, різниця тільки в змісті задач та прикладів, які розкривають Т.О. дії віднімання, а саме:

Розв'яжемо таку задачу: У Петрика було 9 марок про космос. 4 марки він віддав Дмитрику. Скільки марок залишилось у Петрика?

Було



Залишилося - ? Віддав

9 – 4 = 5 ? Чому?

Рис.2. Зображення на теоретико-множинній основі знаходження різниці чисел 9 і 4

Відняти – це означає вилучити, забрати, віддати, втратити

9	–	4	=	5
↓		↓		↓
зменшуване		від'ємник		різниця
↓		↓		↓
число, від якого віднімаємо, воно зменшується		число, яке віднімаємо		те, що залишилося

<u>Завдання № 5.</u>

<u>1-й спосіб</u>: (185+216)–78=401–78=323(м^3) дров залишилося на складі.

<u>2-й спосіб</u>: (185-78)+216=107+216=323(м^3) дров залишилося на складі. Такий спосіб розв'язання можливий за умови, що продали 78 м^3 березових дров.

<u>3-й спосіб</u>: 185+(216–78)=185+138=323(м^3) дров залишилося на складі. Такий спосіб розв'язання можливий за умови, що продали 78 м^3 дубових дров.

Умова задачі, щоб її можна було розв'язати лише одним способом: На складі було 50 м^3 березових і 65 м^3 дубових дров. Скільки дров залишилось на складі після того, як продали 78 м^3?

(50+65) – 78 = 115 – 78 = 37(м^3) залишилося дров на складі.

Умова задачі, щоб її можна було розв'язати двома способами: На складі було 185 м^3 березових і 65 м^3 дубових дров. Скільки дров залишиться на складі після того, як продали 78 м^3?

(185+65)–78=250–78=172 (м^3) дров залишиться на складі (продавали березові і дубові дрова).

(185-78)+65=107+65=172 (м^3) дров залишиться на складі (продавали тільки 78м^3 березових дров).

Завдання № 6.

243–(43+28)=(243-43)–28=200–28=172 – правило віднімання суми від числа: треба від заданого числа відняти перший доданок суми і від отриманого результату відняти другий доданок.

243–(28+15)=243–43=200 – правило віднімання суми від числа:

треба знайти суму чисел 28 і 15 і відняти її від заданого числа.

(56709+77845)–(36709+845)=(56709-36709)+(7845-845)=20000+7000=27000 – правило віднімання суми від суми: треба від 1-го доданку 1-ої суми відняти 1-й доданок другої суми, а від 2-го доданку 1-ї суми відняти 2-й доданок другої суми і отримані результати додати.

Третє питання плану:

У початковому курсі математики добуток натуральних чисел а і в означають як суму рівних доданків:

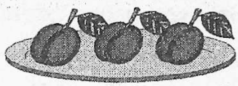
$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ – доданків}}$$

3*4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,

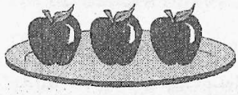
а дію множення як додавання однакових доданків

Т.О.: Об'єднання скінчених рівнопотужних між собою множин, які попарно не перетинаються.

Засобом засвоєння змісту поняття дії множення виступає операція об'єднання скінчених множин, які мають однакову кількість елементів:

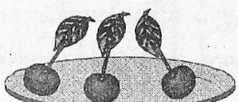


A_1 – 1-а тарілка, на якій три сливи;



A_2 – 2-а тарілка з трьома яблуками;

A_3 – 3-я тарілка з трьома грушами;



A_4 – 4-а тарілка з трьома вишнями.

Рис. 3. Зображення скінчених рівнопотужних між собою множин A_1, A_2, A_3, A_4.

Тарілки з фруктами – це множини з однаковою кількістю фруктів на кожній. Фрукти треба перекласти на одне велике блюдо.

Скільки всього фруктів на блюді?

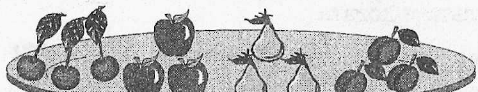


Рис. 4. Зображення нової множини: $A_1 UA_2 UA_3 UA_4$

Усього фруктів – 12 в новій множині-блюді, яке є об'єднанням 4-х рівнопотужних множин. Учні початкової школи не оперують такими назвами, але виконують перекладання фруктів з тарілок на одне блюдо і цим на наочній основі засвоюють поняття дії множення як додавання однакових доданків, і добутку як суми рівних доданків.

Завдання № 7

1) 3*2 = 6, бо 3*2 = 3 + 3 = 6

n(A) = 3; n(B) = 2. n(A x B) = n(A)*n(B) = 3*2 = 6

Нехай: A = {7, 9, 5} B = {1, 2 }.

A x B = {(7; 1), (7; 2), (9; 1), (9; 2), (5; 1), (5; 2) }

n(A x B) = 6 пар.

2) 1*4 = 4, бо 1*4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4

n(A) = 1, n(B) = 4 n(A x B) = n(A)*n(B) = 1*4 = 4.

Нехай: A ={△} B = {a, в, c, d}

A x B = {(△; a), (△; в), (△; c), (△; d) }

n(A x B) = 4 пари.

3) 0*2 = 0, бо 0*2 = 0 + 0 = 0.

n(A) = 0, тобто A = Ø; n(B) = 2.

Нехай: B = {m; n }; A x B = Ø x B = Ø; n(Ø x B) = 0.

4) 4· 1= 4; 4· 1= 1· 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.

n(A) = 4; n(B) = 1.

Нехай: A = 

B = 

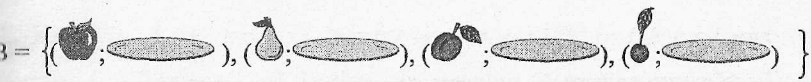


Рис. 5.Зображення утворення пар на наочній основі

n(A x B) = 4 пари.

5) 2*0 = 0, бо 2*0 = 0*2 = 0 + 0 = 0;

n(A) = 2; n(B) = 0 (B = Ø);

A x B = A x Ø = Ø;

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = n(\varnothing)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \ * \ 0 \ = 0.$$

<u>**Завдання № 8**</u>

Задача 1.

3*4 = 12 (ябл.) на 4-х тарілках разом.

В умові задачі розглядаються 4-ри рівнопотужні між собою множини:

$(A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4) \rightarrow n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = 3$.

Розв'язати задачу – це означає знайти, скільки елементів буде в множині А, яка є об'єднанням множин A_1, A_2, A_3, A_4 таких, що не мають спільних елементів:

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ і знайти число елементів у цій новій множині:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) = 3 + 3 + 3 + 3 = 3*4 =$$

$$\downarrow$$

$$=12.$$

Задача 2.

4*5 = 20 (іграшок) виготовили хлопчики.

В умові задачі маємо п'ять еквівалентних між собою множин (5 хлопчиків):

$n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = 4$.

Розв'язати задачу – це означає знайти, скільки всього елементів у множині А, що є:

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

Так як множини A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – скінчені і не перетинаються (немає іграшок, які б одночасно виготовляли декілька хлопчиків: кожну іграшку виготовляв тільки один якийсь хлопчик), тому за правилом суми маємо:

$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) =$

$$= \underbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}_{\text{5 доданків}} =$$

$= \quad 4*5 = 20$ (ігр.).

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

ТЕМА: Поняття частки і дії ділення в кількісній теорії цілого невід'ємного числа та в теорії вимірювання величин

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти* основні поняття: подвійний зміст частки в кількісній теорії Z_0; та дію ділення як, перехід від меншої одиниці вимірювання до більшої в теорії вимірювання величин:

$m_{e_2}(a) = m_{e_1}(a) : m_{e_1}(e_2)$, де $e_1 < e_2$

План вивчення теми

1. Подвійний зміст частки на основі розгляду задач на ділення на рівні частини та задач на ділення на вміщення.

2. Частка чисел як результат переходу від меншої одиниці вимірювання величини до більшої.

Література

1. Кухар В. М. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: [практикум] / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, С. П. Тадіян. За заг.ред. В. М. Кухар. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1989. – С. 221-222.

2. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – К.: Вища школа, 1988. – С. 179-181.

3. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики: [учеб.пособие для учащихся пед.уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразоват.шк.»] / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 147-149; С. 163-164.

4. Додаток до самостійної роботи № 6.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання,* Вам необхідно усвідом теоретичну суть подвійного змісту частки:

а : в = с, де а = n (А),

число елементів у кожній із еквівалентних підмножин, якщо в – кількість підмножин в А.

с

кількість підмножин в А, якщо в – число елементів у кожній із них.

А також усвідомити, як формується в учнів початкових класів поняття на основі розв'язування двох видів задач на ділення.

До першого питання плану виконайте завдання № 1-№ 4.

Завдання № 1. З'ясуйте зміст частки в кожному з таких випадків основі теоретико-множинної теорії):

а) 6/3 = 2; б) 4/4 = 1; в) 3/1 = 3

Завдання № 2. Поясніть, чому запропоновані задачі треба розв'язув за допомогою дії ділення?

1) Мама роздала дітям 12 яблук по 2 кожному. Скільки дітей отрим яблука?

2) 8 морквин роздали 4-ом кроликам порівну. Скільки морквин д кожному кролику?

Завдання № 3. Які є види задач на ділення? Складіть п'ять таких за різних видів, які б розв'язувалися за формулою: 24/8 = 3. Проаналізуйте структуру.

Завдання № 4. У підручнику математики для 2 класу є прав «ділення можна перевірити множенням. 78/3 = 26. Для перевірки помнож одержану частку на дільник: 26*3 = 78. Одержали ділене». Дайте теорети обґрунтування цьому правилу.

Вивчаючи зміст *другого питання*, Вам необхідно усвідомити, що ділення натуральних чисел як значень довжин відрізків відображає перехід до нової (більш крупної) одиниці довжини:

$m_{l_2}(a) = m/n$, де $m = m_{l_1}(a)$, $n = m_{l_1}(l_2)$

До другого питання плану необхідно розв'язати завдання № 5-№ 7.

Поясніть, чому запропоновані нижче задачі розв'язуються дією ділення.

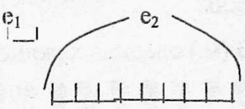
Завдання № 5. В одній каністрі 20л бензину. Скільки потрібно каністр, щоб розлити 100 л бензину?

Завдання № 6. Батькові 32 роки, синові 8 років. У скільки разів батько старший за сина?

Завдання № 7. На пошиття одного костюма витратили 3 м тканини. Скільки таких костюмів можна пошити з 150 м?

Примітка: Виконуючи завдання № 5-7, міркуйте так (на прикладі завдання № 6): В умові задачі мова йде про дві одиниці вимірювання віку батька – це один рік (e_1) – початкова одиниця вимірювання і вік сина (e_2) – нова одиниця вимірювання. Позначимо через а – вік батька, тоді:

$m_{e_1}(a) = 32$ і $m_{e_1}(e_2) = 8$, де $e_1 < e_2$



Треба визначити: $m_{e_2}(a)$ – ?

За умовою: $(m_{e_1}(a) = 32) \longleftrightarrow (a = 32e_1)$ (1)

$(m_{e_1}(e_2) = 8) \longleftrightarrow (e_2 = 8e_1) \longrightarrow (e_1 = e_2/8)$ (2)

Підставимо (2) в (1): $(a = 32e_1 = 32*(e_2/8) = (32/8)*e_2) = 4*e_2)$.

Отже, $(a = 4*e_2)$. Тоді $(m_{e_2}(a) = 4)$.

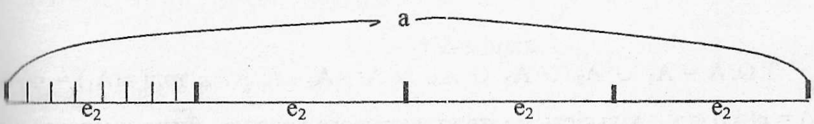


Рис. 6. Графічна ілюстрація розв'язання задачі

Вік сина (e_2) вкладається у відрізку а, що зображає вік батька, чотири рази. Це означає, що батько старший за сина у чотири рази.

$$\begin{array}{ccccc} 32 & : & 8 & = & 4\text{ (р.)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ m_{e_1}(a) & & m_{e_1}(e_2) & & m_{e_2}(a) \end{array}$$

Цей запис треба розуміти так: вік батька, якщо за одиницю вимірювання взяти вік сина – e_2, дорівнює частці від ділення віку батька при одиниці вимірювання $e_1 = 1$ рік на вік сина при цій же одиниці вимірювання – $e_1 = 1$ рік.

Додаток до самостійної роботи № 6

В учнів початкових класів формується поняття про подвійний зміст частки на основі розв'язування двох видів задач на ділення: ділення на рівні частини; ділення на вміщення.

Ділення на рівні частини. У таких задачах відомо: кількість елементів деякої множини А, n(A) = a і відомо, на скільки підмножин розбито множину А. Нехай на b підмножин. А знайти треба, скільки елементів буде в кожній підмножині. Це і є частка чисел a та b: a/ b – кількість елементів у кожній підмножині. Наприклад, задача: 12 морквин розділили порівну між 4-ма кроликами. Скільки морквин одержав кожний кролик?

Розв'язання:

12 : 4 = 3 (м.) одержав кожний кролик.

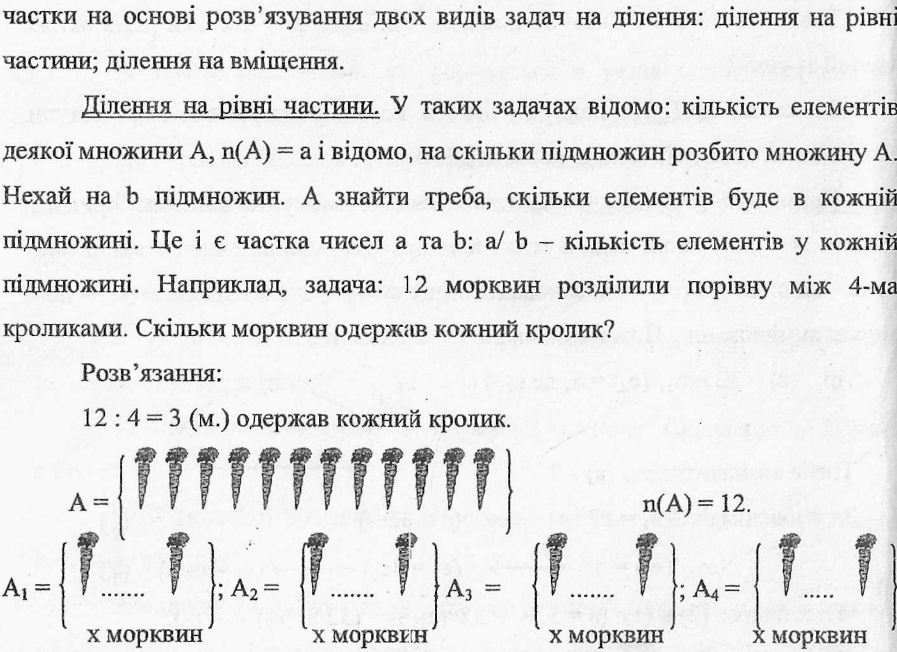


Рис. 7. Ілюстрація до задачі

Т.О. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, де $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$, тоді $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = x$ – кількість морквин у кожного кролика. Якщо множини рівні, то рівні і їх кількісні характеристики: $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

За означенням суми натуральних чисел у кількісній теорії запишемо:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) = \underbrace{x + x + x + x}_{\text{4 доданки}} = x \cdot 4.$$

$12 = x \cdot 4$, де $x = 12 : 4$.

$\downarrow$

частка чисел 12 і 4, яка виражає кількість елементів у кожній підмножині.

<u>Ділення на вміщення.</u> У таких задачах відомо: кількість елементів у множині А, $n(A) = a$ і кількість елементів в кожній із підмножин, на які розбито множину А. Нехай це b. Треба знайти, на скільки підмножин розбито множину А. Це й буде частка чисел a і b: a/b – кількість підмножин в А.

Наприклад, задача: 12 морквин розділили порівну по 4 морквини кожному кролику. Скільки кроликів одержали моркву?

Розв'язання:

12/4 = 3 (кр.) одержали моркву.

А – це 12 морквин.

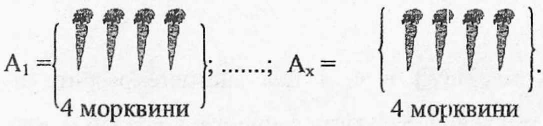


Рис .8. Ілюстрація до задачі

Т.О. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_x$,

де $A_1 \sim A_2 \sim \ldots \sim A_x \longrightarrow$ $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_x) = 4$. Якщо множини рівні, то і їх кількісні характеристики теж рівні:

$n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_x)$. Тоді за означенням суми натуральних чисел у кількісній теорії запишемо:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_x) = \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{\text{x доданків}} = 4 \cdot x$$

$12 = 4 \cdot x$, де $x = 12 : 4$

$\downarrow$

частка чисел 12 і 4, яка виражає кількість підмножин у А.

Отже, основним засобом для формування поняття частки виступають задачі.

Завдання 1

а) 6/3 = 2

Якщо 6 = n(A), а – число 3 – є кількість еквівалентних підмножин, на які розбито множину A, то число 2 – це кількість елементів у кожній з еквівалентних підмножин. Якщо ж число 3 виражає кількість елементів у кожній з еквівалентних підмножин, то число 2 означає, на скільки підмножин розбито множину A.

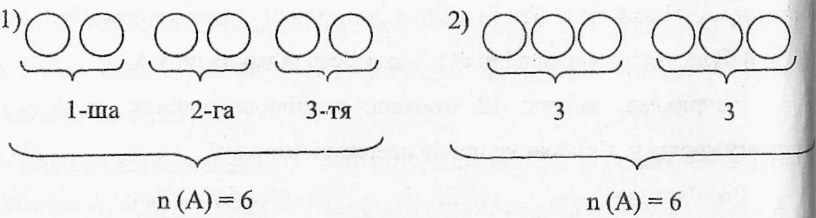


Рис.9. Зображення подвійного змісту частки чисел 6 і 3

У цьому виявляється подвійний зміст частки.

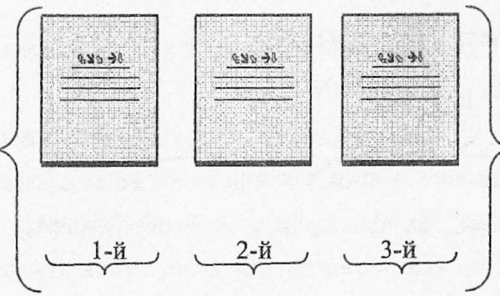
б) 4/4 = 1

Нехай множина A має n(A) = 4, і цю множину розбито на 4-и еквівалентні між собою підмножини. Кількість елементів у кожній підмножині і означає частка число 1. (4 яблука розділи між 4-ма дітьми порівну. Скільки яблук одержала кожна дитина?).

Рис .10. Ілюстрація до задачі

в) 3/1 = 3

Нехай множина A має три елементи , n(A) = 3. Цю множину розбили на невідому кількість еквівалентних між собою підмножин так, що в кожній підмножині було по 1 елементу. Наприклад, три зошити були роздані по одному кожному учню. Скільки учнів одержали зошити?

A = 

, n(A) = 3.

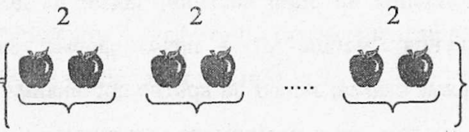
У випадках б) і в) частка має різний зміст.

У випадку б) – кількість елементів у кожній підмножині, а у випадку в) – кількість підмножин.

<u>**Завдання 2**</u>

Задача 1. Дано: A, n(A) = 12. Цю множину розбито на еквівалентні підмножини, в кожній з яких є по 2 елементи.

Знайти: скільки буде підмножин?

A = 

1-ша 2-га x-ова підмножина

$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_x$, де $A_1 \sim A_2 \sim \ldots \sim A_x$, $\rightarrow$ $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_x) = 2$

$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_x)$

$12 = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{\text{x доданків}} = 2 \cdot x$

x = 12/2 = 6 підмножин (це діти, які одержали яблука).

Задача 2. Дано: A, n(A) = 8. Цю множину розбито на 4 підмножини, еквівалентні між собою.

Знайти: скільки елементів у кожній підмножині?

$$A=\left\{\overset{x}{\underbrace{\bigcirc\ \ldots\ \bigcirc}_{\text{1-ша}}}\ \ \overset{x}{\underbrace{\bigcirc\ \ldots\ \bigcirc}_{\text{2-га}}}\ \ \overset{x}{\underbrace{\bigcirc\ \ldots\ \bigcirc}_{\text{3-тя}}}\ \ \overset{x}{\underbrace{\bigcirc\ \ldots\ \bigcirc}_{\text{4-та підмножина}}}\right\},\ n\ (A)\ =\ 8.$$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, де $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4 \rightarrow n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) =$ $= n(A_4) = x$.

За означенням суми натуральних чисел у кількісній теорії запишемо:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4)$$

$$8 = \underbrace{x + x + x + x}_{\text{4 доданка}} = x \cdot 4$$

$x = 8/4 = 2$ – у кожній множині по два елементи (по 2 моркви дали кожному із 4-х кроликів).

<u>**Завдання 3.**</u> У початковому курсі математики вивчають такі прості задачі на ділення: задачі на ділення на рівні частини; задачі на ділення на вміщення; задачі на відношення "менше у" – пряма форма; задачі на відношення "більше у" – непряма форма; задачі на кратне порівняння (пряма і непряма форма) та задачі на знаходження невідомого множника та дільника. Приклади названих видів задач, які розв'язують за формулою: 24/8=3.

<u>Задача 1</u> (ділення на рівні частини): 24 кг цукру розсипали порівну в 8 пакетів. Яка маса цукру в кожному пакеті?

<u>Задача 2</u> (ділення на вміщення): 24 кольорові олівці поділили порівну по 8 олівців кожному учневі. Скільки учнів отримали олівці?

<u>Задача 3</u> (відношення "менше у" пряма форма): Миколка впіймав на рибалці 24 окуні, а Василько у 8 разів менше. Скільки окунів упіймав Василько?

<u>Задача 4</u> (відношення "більше у" непряма форма): У корзині лежали 24 яблука і це у 8 разів більше, ніж груш. Скільки груш було у корзині?

<u>Задача 5</u> (кратне порівняння пряма форма): У букеті було 24 ромашки і 8 троянд. У скільки разів менше було у букеті троянд ніж ромашок?

Задача 6 (кратне порівняння непряма форма): На низці було 24 великих бублики і 8 маленьких. У скільки разів було більше великих бубликів, ніж маленьких, якщо всього було 24 бублика?

Задача 7 (на знаходження невідомого співмножника): 8 учнів класу принесли однакову кількість різнокольорових прапорців кожен. Скільки прапорців приніс кожен учень, якщо всього прапорців було 24?

Задача 8 (на знаходження невідомого дільника): Ціну товару 24 грн. знизили у декілька разів. Після зниження нова ціна товару стала 8 грн. У скільки разів знизили ціну товару?

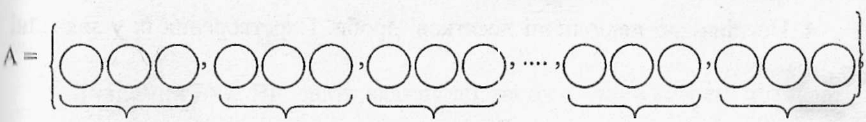
Завдання 4

78/3 = 26

Перевірка: 26*3 = 78

Т.О. правила перевірки ділення множенням:

Нехай задана деяка множина А, що містить 78 елементів, тобто n(A) = 78. Множину А розбито на еквівалентні підмножини по три елементи в кожній. Скільки утворилося підмножин?



1-ша 2-га 3-тя (х-1)-ша х-ова

n(A) = 78.

$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{x-1} \cup A_x$, де $A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \ldots \sim A_{x-1} \sim A_x \rightarrow n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_{x-1}) = n(A_x) = 3$ – за умовою.

За означенням суми натуральних чисел у кількісній теорії запишемо:

$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \ldots + n(A_{x-1}) + n(A_x)$

$78 = \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 3}_{\text{х доданків}} = 3 * x$

78 = 3*х, тоді х = 78/3 = 26. Отже, 78=3*26.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

ТЕМА: Десяткові дроби. Арифметичні дії над ними. Перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти основні поняття* теми: десятковий дріб, процент, нескінченний періодичний десятковий дріб (чистий, змішаний),теорему про перетворення звичайного дробу у скінченний десятковий дріб (пряму і обернену), *вміти* застосовувати правила арифметичних дій над десятковими дробами і правила перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки, визначати вид десяткового дробу, в який перетворюється заданий нескоротний звичайний дріб.

План вивчення теми

1. Десяткові дроби, властивості десяткових дробів, арифметичні дії над ними.

2. Поняття проценту, основні типи задач на проценти.

3. Перетворення звичайних дробів у десяткові. Теорема про перетворення нескоротного звичайного дробу у скінчений десятковий дріб.

4. Нескінченні періодичні десяткові дроби. Перетворення їх у звичайні дроби.

Література

1. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 319-324.

2. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики: [учеб.пособие для учащихся пед.уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразоват.шк.»] / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 230-239.

3. Додаток до самостійної роботи № 7.

Методичний коментарій та завдання

При вивченні *першого питання* необхідно дати означення десяткового дробу, обґрунтувати запис десяткового дробу в такому виді:

(*) $M, m_{n-1}\, m_{n-2}\ldots m_2\, m_1\, m_0$, де M – ціла частина, $m_{n-1}\, m_{n-2}\ldots m_2\, m_1\, m_0$ – десяткові знаки. Для цього чисельник дробу $\frac{m}{10^n}$ подати в многочленній формі: $m = m_k \cdot 10^k + m_{k-1} \cdot 10^{k-1} \ldots \cdot m_1 \cdot 10 + m_0$ – і виконати ділення на 10^n за правилами дій над степенями з однаковими основами. При цьому врахувати, що можливі: <u>випадок 1</u>, якщо $n \le k$ і <u>випадок 2</u>, якщо $n > k$.

Вивчити властивості (1-6) десяткових дробів, які випливають з означення десяткового дробу, а також правила додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів (див.: додаток до самостійної роботи № 7).

Рівень засвоєння змісту *першого питання* теми перевірити, виконавши такі завдання:

Завдання № 1: Пояснити, використовуючи умову (*), що

$\frac{693}{10^3} = 0{,}693$; $\frac{41}{10^5} = 0{,}00041$; $\frac{12897}{10^3} = 12{,}897$

Завдання № 2: Виконати вказані дії, застосовуючи вивчені правила:

3,17 + 12,6793; 5,098 – 2,239; 1,104*0,00138; 35,6983/5,17

Вивчаючи *друге питання*, необхідно визначити поняття проценту як дробу виду $\frac{1}{100}$, ввести позначення $p\% = \frac{p}{100}$ і переконатися в тому, що Ви можете визначити р% від будь-якого заданого числа.

Розглянути основні типи задач на проценти, охарактеризувати кожний тип і пояснити формулу запису розв'язання для кожного з них.

$A = \frac{N * p}{100\%}$ - загальна формула розв'язування задачі 1-го типу: знаходження р% від заданого числа N;

$N = \frac{A*100\%}{p\%}$ - загальна формула розв'язування задачі 2-го типу: знаходження числа N за його процентом;

$p = \frac{A*100\%}{N}$ - загальна формула розв'язування задачі 3-го типу: знаходження процентного відношення чисел.

Перевірте себе: наскільки Ви можете правильно визначати кожний тип задачі в процесі розв'язування наступних задач.

Задача 1. У визрілому цукровому очереті визначено наявність цукру 9 %. Скільки кілограмів цукру буде одержано з 56 т цукрового очерету?

Задача 2. У гаманці у мами було 60 грн. Витрати у крамниці склали 30 %. Скільки гривень витратила мама у крамниці?

Задача 3. 3 % внеску в ощадбанку для клієнта становили 150 грн. Який був внесок клієнта?

Задача 4. За планом завод повинен випускати в день 60 автомобілів, а він випустив 90 автомобілів. На скільки відсотків завод перевиконав план?

Задача 5. Знайдіть число, якщо $16\frac{2}{3}$ % його дорівнюють 2 год 30 хв.

Задача 6. У процесі варіння м'ясо губить 35 % своєї маси. Скільки вийде вареного м'яса із 2 кг сирого? Скільки треба мати сирого м'яса, щоб отримати 2,6 кг вареного?

Задача 7. Ціну деякого товару спочатку зменшили на 20 %, а потім збільшили на 20 %. Чи зменшилася величина ціни товару?

Задача 8. Одну сторону прямокутника збільшили на 10 %, а другу зменшили на 10 %. Чи зменшилася площа прямокутника? Якщо да, то на скільки процентів?

Вивчаючи *третє питання*, Вам необхідно з'ясувати, при якій умові нескоротний звичайний дріб еквівалентний скінченному десятковому дробу. Для цього вивчіть з доведенням наступну теорему: для того щоб нескоротний звичайний дріб $\frac{m}{n}$ був еквівалентний скінченному десятковому дробу, необхідно і достатньо, щоб в розкладі його знаменника n на прості множники входили лише степені простих чисел 2 і 5.

Сформулюйте достатню умову, необхідну умову, виділіть етапи: дано, довести, доведення і проведіть обґрунтування кожної умови. Саме у процесі доведення цієї теореми Ви відкриєте ще один спосіб перетворення звичайного дробу у десятковий. Під час доведення необхідно врахувати два можливих випадки: $\alpha \geq \beta$ і $\alpha < \beta$, де α - степінь числа 2, β - степінь числа 5 у розкладі знаменника n.

Завдання № 3: З'ясуйте, які звичайні дроби можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу, не виконуючи ділення "куточком".

$\frac{17}{640}$; $\frac{40}{308}$; $\frac{52}{75}$; $\frac{3}{2500}$.

При вивченні *четвертого питання* теми необхідно підтвердити прикладами істинність твердження 1: Кожне додане раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Вивчіть означення періодичного дробу, чистого і змішаного. Розгляньте умови перетворення звичайного дробу в нескінченні періодичні десяткові дроби.

Обґрунтуйте твердження 2: Кожний нескінченний періодичний десятковий дріб можна подати у вигляді: $\frac{m}{n}$.

Вивчіть правила переходу нескінченного чистого періодичного десяткового дробу в звичайний і змішаного періодичного дробу в звичайний. Перевірте, як Ви засвоїли зміст даного питання, виконавши наступні завдання.

Завдання № 4: Обґрунтуйте, в які десяткові дроби перетворюються задані звичайні дроби:

$\frac{18}{625}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{18}$.

Завдання № 5: Перетворити в звичайні дроби такі нескінченні десяткові дроби: 0,(37), 0,17(1), 1,1(18), 5,4(184).

Завдання № 6. На основі теоретичних знань про можливі випадки перетворення звичайних дробів у десяткові заповніть таку таблицю, в якій передбачте всі можливі випадки $= \frac{3\cdot125}{10^3} = \frac{375}{10^3} = 0{,}375$ Сп. $\frac{3}{8}$ 0,375

№ з/п	n - знаменник нескоротного звичайного дробу $\frac{m}{n}$	Вид десяткового дробу	Приклади
1	$n=2^\alpha$	ск. дес. дріб	$\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\cdot5^0}{2^3 5^0}$
2	$n=5^\beta$	скін. дес. дріб	
3	$n=2^\alpha\cdot5^\beta$	скін. дес. дріб	
4	$n=2^\alpha\cdot p$ $p\neq5^\beta$	нескін. змішан. період. дес. дріб	
5	$n=5^\beta\cdot p,\ p\neq2^\alpha$	—"— $\frac{8}{75}$	$=\frac{8}{5^2\cdot3}=0,..(\ )$ Запам'ят.
6	$n=2^\alpha\cdot5^\beta\cdot p,$	—"—	$0,..$
7	$n=p,\ p\neq2^\alpha,\ p\neq5^\beta$	нескін. чистий період. дес. дріб	$\frac{11}{13}=0,(\ )$

Завдання для домашнього тестування з теми «Десяткові дроби»

За кожну правильну відповідь Ви одержуєте певну кількість балів. Можлива максимальна кількість балів – 15. У дужках вказана кількість балів за правильну відповідь до кожного питання.

1. В якому випадку нескоротний звичайний дріб не перетворюється в скінченний десятковий дріб? (2)
2. Яким способом можна перетворити довільний звичайний дріб у десятковий? (1)
3. Які десяткові дроби можна одержати під час розкладу знаменника довільного звичайного дробу? (1)
4. В якому випадку можна одержати із звичайного дробу чистий періодичний десятковий дріб, а в якому змішаний? (2)
5. Чим виступає кожен періодичний десятковий дріб? (1)
6. Чи кожне раціональне число можна представити у вигляді десяткового дробу? (1)
7. Які звичайні дроби перетворюються в періодичні десяткові дроби з періодом 0? (1)

8. Чи можна представити натуральне число у вигляді періодичного десяткового дробу? (1)

9. Перевірте рівність $\frac{5}{3}$ =1,666… = 1, (6) (1)

10. Сформулюйте правила представлення періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного. (2)

11. Якщо в періоді десяткового дробу стоїть цифра 9, то що це означає? Підтвердіть відповідь прикладом. (1)

12. Яка вимога повинна обов'язкового виконуватися, щоб звичайний дріб перетворився в періодичний дріб з періодом відмінним від 0? (1)

Перевірити себе і визначити набрану кількість балів за «домашнє» тестування Ви зможете за ключем до перевірки, який ми подаємо у додатку В.

ДОДАТОК ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 7

1. Десяткові дроби, властивості, арифметичні дії

Як відомо, виникнення дробів зв'язане з переходом до нових одиниць вимірювання, причому знаменник дробу $\frac{m}{n}$ показує на скільки (частин) ділиться початкова одиниця. Сьогодні майже в усіх країнах світу діє метрична система одиниць, в якій нові одиниці одержуються зменшенням або збільшенням початкових одиниць в 10, 100, 1000 і т.д. разів.

Наприклад:

1км = 1000м = 100000см = 1000000мм,

1га = 100а = 10000м^2

1м^3 = 1000000см^3, 1см = $\frac{1}{100}$ м = 0,01м

А тому для практики особливо важливі дроби, знаменники яких є степенями числа 10, тобто дроби виду $\frac{m}{10^n}$, де m, n – натуральні числа. Такі дроби називаються десятковими.

Означення 1. Десятковим дробом називається звичайний дріб, знаменник якого дорівнює степені числа 10, який записаний у десятковій позиційній системі числення.

Запис чисельника дробу у вигляді многочлена такий:

(1) $m = m_k*10^k + m_{k-1}*10^{k-1} + \ldots + m_2*10^2 + m_1*10 + m_0$, де $m_k, m_{k-1}, \ldots, m_1, m_0$ набувають значення від 0 до 9, причому $m_k \neq 0$.

Нехай $n \leq k$ (показник степеня числа 10 знаменника не більше показника степеня числа 10 – чисельника). Тоді згідно правилам дій над степенями маємо при $n \leq k$:

$$(2)\ \frac{m}{10^n} = \frac{m_k*10^k + m_{k-1}*10^{k-1} + \ldots + m_n*10^n + m_{n-1}*10^{n-1} + m_{n-2}*10^{n-2} + \ldots + m_1*10 + m_0}{10^n} =$$

$$= \underbrace{m_k*10^{k-n} + m_{k-1}*10^{k-n-1} + \ldots + m_n}_{M} + \frac{m_{n-1}}{10} + \frac{m_{n-2}}{10^2} + \ldots + \frac{m_1}{10^{n-1}} + \frac{m_0}{10^n}\text{, де}$$

ціла частина

M – натуральне число.

Домовилися записувати дріб $\frac{m}{10^n}$ таким чином: $M, m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_1, m_0$ (*), де M називається цілою частиною, а $m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_1, m_0$ – десятковими знаками.

Означення 2. Цифри, які стоять після коми в записі десяткового дробу, називаються десятковими знаками. При записі дробу $\frac{m}{10^n}$ за умови $n \leq k$ згідно з (*) останні n цифр десяткового запису числа m відокремлюють комою.

Наприклад:

$\frac{571}{10^2} = 5{,}71$.

Якщо чисельник дробу містить менше, ніж n цифр ($n > k$), то перед ним пишуть стільки нулів, щоб одержати ($n + 1$) цифру, після чого відокремлюють n знаків з кінця комою.

Наприклад: $n = 4$; $k = 1$ для дробу $\frac{32}{10^4}$; $n > k$.

$\frac{32}{10^4} = \frac{00032}{10000} = 0{,}0032.$

Основні властивості десяткових дробів, які випливають із означення

Властивість 1. Із двох цифр, які стоять поряд у запису десяткового дробу, ліва цифра має розрядну одиницю в десять разів більшу, ніж права. (Обґрунтування: див.: запис 2).

Властивість 2. Множення десяткового дробу на 10^n досягається переносом коми на n цифр вправо, а ділення десяткового дробу на 10^n досягається переносом коми на n цифр вліво.

Властивість 3. Приписування нулів до десяткового дробу і відкидання нулів, які стоять в кінці десяткового дробу, не змінюють його значення.

Властивість 4. Для приведення двох десяткових дробів до спільного знаменника досить приписати до того десяткового дробу, в якого менше десяткових знаків, декілька нулів справа, щоб десяткових знаків стало порівну.

Властивість 5. Із двох десяткових дробів більший той, у якого ціла частина більша. Із двох десяткових дробів з рівними цілими частинами більший той, у якого більший перший із нерівних десяткових знаків.

Наприклад: 90,21 > 5,93, тому що 90 > 5;

90,21 < 90,24, тому що 1 < 4.

Властивість 6. Які б не були натуральні числа m, n, s дроби виду $\frac{m}{10^n}$ і $\frac{m*10^s}{10^{n+s}}$ - еквівалентні.

Дійсно, згідно критерію еквівалентності дробів повинна виконуватися рівність:

$m*10^{n+s} = 10^n*m*10^s$

Згідно властивості степеня маємо:

$10^n*m*10^s = m*10^n \; 10^s = m*10^{n+s}$, тобто $10^n*m*10^s = m*10^{n+s}$.

Правила додавання, віднімання, множення та ділення десяткових дробів

Правило 1: Для того, щоб додати два десяткові дроби необхідно:

- зрівняти в цих дробах число десяткових знаків після коми;

- відкинути в одержаних дробах коми і додати отримані при цьому натуральні числа;
- у сумі відокремити комою стільки десяткових знаків, скільки відокремлено в кожному з доданків.

Наприклад:

2,54+3,7126=2,5400+3,7126=6,2526

Аналогічно формулюється правило віднімання десяткових дробів.

Правило 2. Щоб знайти добуток двох десяткових дробів необхідно:

- відкинути в запису цих дробів коми;
- перемножити отримані натуральні числа;
- у добутку відокремити комою стільки останніх цифр, скільки їх відокремлено в першому і другому множниках разом.

Правило 3. Для того, щоб поділити десятковий дріб на десятковий, у дільнику кому необхідно винести в кінець, тобто дільник зробити натуральним числом. Щоб частка при цьому не змінилась, у діленому теж необхідно перенести кому на таку ж кількість знаків. Після цього виконати ділення звичайним способом. Кому в частці проставляють у момент вичерпання цілої частини діленого.

2. Поняття про відсоток. Основні типи задач на відсотки (проценти)

З поняттям десяткового дробу тісно пов'язане нове поняття відсоток або процент.

Означення: Відсотком (процентом) називають дріб виду $\frac{1}{100}$ і позначають 1 %.

Наприклад:

$5\% = 0{,}05*(\frac{5}{100})$, $p\% = (\frac{p}{100})$.

Існують три види простих задач на відсотки (проценти):

Задача 1. Знайти деяке число відсотків даного числа.

Наприклад:

Знайти 24 % від числа 182. Приймемо число 182 за 100 %.

182 – 100%

x – 24%

$x = \frac{182*24}{100}$=43,68.

Для узагальнення даного виду задач уведемо таке позначення:

N – задане число, p% відсотків якого потрібно знайти.

A – шукане число, тоді:

$A = \frac{N*p\%}{100\%}$

Задача 2. Знайти число, якщо відомо декілька відсотків шуканого числа.

Наприклад:

Знайти число, якщо 17% його дорівнює 40. Згідно введених позначень у попередній задачі: N – задане число і невідоме, A відоме число, яке складає 17% від шуканого (невідомого).

N – x – 100%

A – 40 – 17% - p%

$x = \frac{40*100}{17}$=235,3.

У загальному випадку: $N = \frac{A*100\%}{p\%}$;

Задача 3. Знайти, скільки відсотків одне число складає від другого, тобто знайти відношення чисел у відсотках.

Наприклад: Скільки відсотків складає 17 від 43. За введеними позначеннями маємо:

N – 43 – 100%

A – 17 – p% p%= $\frac{17*100}{43}$=39,5%. У загальному випадку:

$p\% = \frac{A*100\%}{N}$.

3. Перетворення звичайних дробів у десяткові

Розглянемо дроби $\frac{8}{25}$ і $\frac{32}{100}$. Ці дроби еквівалентні, тому що 8*100 = 25*32.

Але звичайний дріб $\frac{32}{100}$ можна записати так: 0,32. Тому звичайний дріб $\frac{8}{25}$ еквівалентний десятковому дробу 0,32.

З'ясуємо, при якій умові дріб $\frac{m}{n}$ еквівалентний скінченному десятковому дробу.

Теорема. Для того щоб звичайний нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ був еквівалентним скінченному десятковому дробу необхідно і достатньо, щоб в розкладі його знаменника на прості множники були тільки степені чисел 2 і 5.

Теорема 1 (пряма): Якщо знаменник звичайного нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ у своєму розкладі на прості множники містить лише степені простих чисел 2 і 5, то такий дріб еквівалентний скінченному десятковому дробу $\frac{a}{10}\gamma(\gamma = \max\{\alpha; \beta\})$.

Дано: $\frac{m}{n}$ - звичайний нескоротній дріб; $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$; $\alpha \geq \beta$

Довести: $\frac{m}{n} \backsim \frac{a}{10^{\alpha}}$.

Доведення: $\frac{m}{n} = \frac{m}{2^{\alpha} * 5^{\beta}} = \frac{m * 5^{\alpha-\beta}}{2^{\alpha} * 5^{\beta} * 5^{\alpha-\beta}} = \frac{m * 5^{\alpha-\beta}}{2^{\alpha} * 5^{\alpha}} = \frac{m * 5^{\alpha-\beta}}{10^{\alpha}} = \frac{a}{10^{\alpha}}$,

Другий випадок, коли $\alpha < \beta$ доводиться аналогічно: $\frac{m}{n} \backsim \frac{a}{10^{\beta}}$.

Довести самостійно.

Примітка: у зв'язку з тим, що при умові $\alpha \geq \beta$ одержуємо десятковий дріб $\frac{a}{10^{\alpha}}$, а при умові $\alpha < \beta$ – дріб $\frac{a}{10^{\beta}}$, тому в загальному випадку маємо: $\frac{m}{n} \backsim \frac{a}{10^{\gamma}}$, де $\gamma = \max\{\alpha; \beta\}$.

Теорема 2 (обернена): Якщо звичайний нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ еквівалентний скінченному десятковому дробу $\frac{a}{10^{\gamma}}$, то знаменник звичайного дробу n у своєму розкладі на прості множники містить лише прості числа 2 і 5.

Дано: $\frac{m}{n}$ - звичайний нескоротний дріб; $\frac{m}{n} \backsim \frac{a}{10^{\gamma}}$, де $\gamma = \max\{\alpha; \beta\}$.

Довести: $n = 2^{\alpha} * 5^{\beta}$.

Д о в е д е н н я:

За умовою $\frac{m}{n} \backsim \frac{a}{10^{\gamma}}$. Згідно критерію еквівалентності дробів:

$m*10^{\gamma} = a*n$ (*) . Розглянемо праву частину рівності (*) $(a*n) \vdots n$, бо $n \vdots n$ (за властивістю рефлексивності) і $(a*n) \vdots n$ (за теоремою про подільність добутку). Із умови (*) тоді і права частина: $(m*10^{\gamma}) \vdots n$. Якщо добуток ділиться на n, то хоч один із співмножників ділиться на n. $m \,\bar{\vdots}\, n$ так, як $\frac{m}{n}$ - нескоротний дріб. Отже, тоді $10^{\gamma} \vdots n$. Але $10^{\gamma} = 2^{\gamma} * 5^{\gamma}$. Тоді $(2^{\gamma} * 5^{\gamma}) \vdots n$. Звідси слідує, що $n = 2^{\alpha} * 5^{\beta}$, де $\gamma = \max\{\alpha; \beta\}$.

4. Нескінченні періодичні десяткові дроби. Перетворення їх у звичайні дроби

Розглянемо звичайний дріб $\frac{1}{3}$. Його неможливо перетворити в скінченний десятковий дріб. Якщо ділити 1 на 3, то маємо:

$$0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$$

$$0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$$

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334 \text{ і т.д.}$$

....

$$0,\underbrace{33 \ldots 3}_{n \text{ цифр}} < \frac{1}{3} < 0,\underbrace{33 \ldots 4}_{n \text{ цифр}}$$

Замість нескінченної множини нерівностей говорять, що $\frac{1}{3} = 0{,}33...3...$ – нескінченний десятковий дріб.

Довільні скінченні десяткові дроби можна записати як нескінченні дроби, якщо приписати до них справа послідовність нулів. Наприклад: 0,25 = 0,25000...0...

Твердження: Кожне додатнє раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Десяткові дроби, які при цьому отримуємо, називаються періодичними.

Означення: Періодичним десятковим дробом називається такий нескінченний дріб, у якого, починаючи з деякого моменту, нескінченно повторюється одна і та ж група цифр. Група цифр, які повторюються, називається періодом. Наприклад:

$\frac{3}{11} = 0{,}2727...27... = 0{,}(27)$; $\frac{8}{55} = 0{,}1454545...45... = 0{,}1(45)$

$$
\begin{array}{r|l}
3 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{22} & 0{,}272727... \\
80 & \\
\underline{77} & \\
3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
8 & 55 \\ \cline{2-2}
\underline{55} & 0{,}14545... \\
250 & \\
\underline{220} & \\
300 & \\
\underline{275} & \\
250 & \\
\underline{220} & \\
300 &
\end{array}
$$

0,(27) – чистий періодичний дріб.

0,1(45) – змішаний періодичний дріб.

Означення: Періодичний дріб називається змішаним, якщо між комою і початком періоду буде декілька цифр.

Умови перетворення звичайних дробів у нескінченні періодичні десяткові дроби

Якщо в розкладі знаменника нескоротного звичайного дробу на прості множники не входять степені чисел 2 і 5, то при перетворенні цього дробу в нескінченний десятковий дріб отримаємо чистий періодичний дріб. Якщо ж у розклад знаменника входить множник 2^{α} або 5^{β}, і інше число то періодичний дріб є змішаним. Причому між комою і початком періоду буде стільки цифр, який більший з показників степенів множників степенів числа 2 або 5.

Наприклад:

1. Якщо $n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, то між комою і початком періоду буде три цифри, бо показник степеня числа 2 більший за показник степеня числа 5.

2. В які десяткові дроби перетворяться звичайні дроби: $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{125}$? Записати їх у вигляді десяткових дробів.

$\frac{2}{7} = 0{,}(285714)$ – чистий періодичний дріб, тому що знаменник його число 7 не має в розкладі множників степенів числа 2 або 5.

Перевіримо способом ділення "куточком":

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 7 \\
\hline
20 & 0{,}285714.... \\
\underline{14} & \\
60 & \\
\underline{56} & \\
40 & \\
\underline{35} & \\
50 & \\
\underline{49} & \\
10 & \\
\underline{7} & \\
30 & \\
\underline{28} & \\
2 &
\end{array}
$$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2*3}=0,1(6)$ – змішаний періодичний десятковий дріб, тому що знаменник у своєму розкладі має множник 2^1, то між комою і періодом буде одна цифра.

Дріб $\frac{3}{125}=\frac{3}{5^3}$ перетворюється у скінчений десятковий дріб, так як його знаменник у своєму розкладі на прості множники містить лише степінь числа 5. Тому для перетворення такого звичайного дробу у скінченний десятковий дріб використаємо новий спосіб, який ґрунтується на доведенні теореми 1. Домножимо чисельник і знаменник дробу $\frac{3}{125}$ на 2^3 і виконаємо перетворення:

$$\frac{3}{125}=\frac{3*2^3}{5^3*2^3}=\frac{3*2^3}{10^3}=\frac{24}{10^3}=\frac{0024}{10^3}=0,024.$$

Твердження: Кожний нескінченний періодичний десятковий можна представити у вигляді $\frac{m}{n}$.

Нехай заданий чистий періодичний десятковий дріб 0,(48). Позначимо відповідне йому число через а. Помножимо на 100 обидві частини рівності:

$a = 0,(48)$,

$100a = 48 + 0,(48)$

$100a = 48 + a$

$99a = 48$

$a = \frac{48}{99}=\frac{16}{33}$.

Правило 1. Для того, щоб нескінченний чистий періодичний дріб записати у вигляді звичайного, необхідно в чисельнику записати число, яке записане у періоді даного дробу, а в знаменнику стільки дев'яток, скільки цифр у періоді.

Наприклад: $0,(12) = \frac{12}{99}=\frac{4}{33}$

$2,(9) = 2 + \frac{9}{9} = 2 + 1 = 3.$

$0,(99) = \frac{99}{99} = 1.$

Правило 2. Для того, щоб нескінченний змішаний періодичний десятковий дріб записати у вигляді звичайного, необхідно записати дріб чисельник якого дорівнює різниці між числом, яке записане цифрами, що стоять до початку другого періоду і числом, яке записане цифрами, що стоять до першого періоду, а знаменник містить стільки дев'яток, скільки цифр у періоді і стільки нулів, скільки цифр стоїть до першого періоду.

Наприклад: $0{,}01(25) = \frac{125-1}{9900} = \frac{124}{9900}$.

Розглянемо обґрунтування цього правила на основі суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії.

$$0{,}01(25) = \frac{1}{100} + \frac{25}{10000} + \frac{25}{1000000} + \frac{25}{100000000} + \ldots \quad (1)$$

У правій частині рівності (1), починаючи з числа $\frac{25}{10000}$, записана сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_1 = \frac{25}{10000}$ - перший член; $q = \frac{1}{100}$ - знаменник геометричної прогресії. Запишемо формулу суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Отже, $0{,}01(25) = \frac{1}{100} + S = \frac{1}{100} + \frac{\frac{25}{10000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{100} + \frac{\frac{25}{10000}}{\frac{99}{100}} = \frac{1}{100} + \frac{25 \cdot \cancel{100}}{100\cancel{00} \cdot 99} =$

$\frac{1}{100} + \frac{25}{9900} = \frac{99+25}{9900} = \frac{124}{9900}$.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

Тема: Недесяткові позиційні системи числення

Вивчаючи дану тему, студент повинен: *оволодіти* науковою термінологією, яка стосується початкового курсу математики (система розвивального навчання) з даної теми; *вміти* формувати вміння і навички запису чисел у різних позиційних системах числення.

План вивчення теми

1. Поняття про недесяткову позиційну систему числення. Приклади.
2. Запис чисел в різних позиційних системах числення.
3. Виникнення і розвиток способів запису цілих невід'ємних чисел, запис чисел у Стародавній Русі.

Література

1. Александрова Е. І. Математика: [підруч. для 1 кл.: (Програма розвивального навчання): В 2 ч.] Ч. 2 /За ред. О. К. Дусавицького. – Х.: Логос, 1998. – С. 98-99.

2. Кухар В. М. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: [практикум] / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. За заг.ред. В. М. Кухар. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1989. – С. 229-274.

3. Математика: [навч.посібник для студ. пед.інстиутів] / [В. Н. Боровик, Л. М. Вівальнюк, В. М. Костарчук, Ю. В. Костарчук, З. Г. Шефтель]. – К.: Вища школа, 1980. – С. 132-140.

4. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 271-278.

5. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики: [учеб.пособие для учащихся пед.уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразоват.шк.»] /Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С.169-175; С.192-196.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання,* Вам необхідно усвідомити важливість існування різних недесяткових систем числення для розвитку альтернативного мислення людини і, зокрема молодшого школяра.

Головне завдання полягає в тому, щоб навчитися утворювати одиницю вищого розряду і на цій основі записувати довільне число в будь-якій системі числення. Саме цей принцип – утворення нової мірки з основної – лежить в основі вивчення багатоцифрових чисел у першому класі за системою розвивального навчання.

Завдання № 1. Виконай практичну роботу згідно інструкції (див.:додаток до самостійної роботи № 8).

Завдання № 2. Виконай завдання за підручником Математика. – 1 клас, автор Ё. І. Александрова [1].

Засвоєння змісту *другого питання* передбачає вироблення умінь переходу від запису числа в одній системі числення до запису його в новій системі:

- від десяткової до недесяткової;
- від недесяткової до десяткової;
- від недесяткової до нової недесяткової.

Завдання № 3. Виконай математичний практикум «Запис числа в різних позиційних системах числення»:

1. Запиши число в многочленній формі:

$75604_9 =$

$35002_7 =$

$\alpha\,983\,\beta_{15} =$, де $\alpha = 10$, $\beta = 11$.

2. Запиши число в цифровій формі:

$2*5^5 + 5^3 + 2 =$

$3*6^4 + 1 =$

$7*9^5 + 3*9^1 + 1 =$

$3*4^5 + 4^2 + 3*4 =$

$3*11^4 + 11^3 + 11 =$

$A*13^2 + \beta*13 + 7=$

$4*5^6 + 5^5 + 3*5^2 + 5=$

3. Записати по два числа, які передують даному і слідують за ним:

• • 333_4 • •

• • 610_7 • •

• • 1000_3 • •

• • 10100_2 • •

• • 3010_6 • •

• • $AA01A_{11}$ • •

4. Запиши число в новій системі числення:

$7341_8 = X_{10}$	$\alpha\,481\,\beta_{12} = X_{10}$	$70532_8 = X_2$
$2605_7 = X_{10}$	$32698 = X_7$	$160345_8 = X_2$
$1432_5 = X_{10}$	$1345_8 = X_5$	$6451372_8 = X_{12}$
$2324_6 = X_{10}$	$7032_8 = X_2$	$3455_6 = X_{12}$

Для засвоєння змісту *третього питання* підготуй реферативне повідомлення. Для цього використай рекомендоване джерело [5] та додаткову літературу: математичну хрестоматію, енциклопедію, універсальний словник «УСЕ», а також посібники:

Депман И. Я. Мир чисел / И. Я. Депман. – М.: Детская литература, 1975. – 67 с.

Депман И. Я. За страницами учебника математики: [пособие для учащихся 5-6 кл.сред.шк.] / И. Я. Депман, Н. Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1989. – С. 12-49.

Додаток до самостійної роботи № 8

Практична робота

Тема: Недесяткові позиційні системи числення

Мета: Усвідомити процес запису чисел у різних недесяткових позиційних системах.

Матеріали: лічильні палички, ґудзики, кубики, набір предметів однієї природи.

Завдання № 1. Дізнайтеся, про яку систему числення йде мова і запишіть кількість паличок у цій системі числення. Для цього виконайте такі дії:

1. Зв'яжи палички в пучки по дві в кожен. Усього 6 пучків і одну паличку окремо.

2. Об'єднай пучки в зв'язки по два пучки в кожну. Ви одержали 3 зв'язки.

3. Об'єднайте дві зв'язки в нову зв'язку, а одну зв'язку залиште окремо.

4. Запишіть число паличок за допомогою цифр … (які цифри ви маєте право вибрати для запису числа? Адже із пунктів 1-3 зрозуміло, що мова йде про … систему числення). Якщо Ви відчуваєте скруту, то скористайтеся вказівкою: Відомо, що в системі числення з основою **p** кожна одиниця вищого розряду складається із **p** одиниць нижнього розряду:

$n_k*p^k + n_{k-1}*p^{k-1} + n_{k-2}*p^{k-2} + \ldots + n_2*p^2 + n_1*p^1 + n_0*p^0$

5. Правильність запису перевірте так:

а) Запишіть число в многочленній формі в системі числення з основою p=

б) Виконайте вказані дії в десятковій системі числення за відомими Вам правилами. Ви одержали число … Чи відповідає воно кількості використаних Вами паличок для цього завдання?

6. Запишіть висновок: Чи залежить кількість паличок від того, в якій системі числення Ви запишете цю кількість?

Завдання № 2. Визначте за рис.1., скільки мірок знадобилося при рахунку в системі числення за основою 3.

Результат рахунку запишіть в розрядну таблицю:

Третій розряд	Другий розряд	Перший розряд

Скільки розрядів у числі? Прочитайте одержане число.

Рис. 1.

Завдання № 3. Порахуйте в різних системах числення.

@ – основна мірка

@ @ @ @ @ @ @

@ @ @ @ @ @ @

@ @ @ @ @ @ @

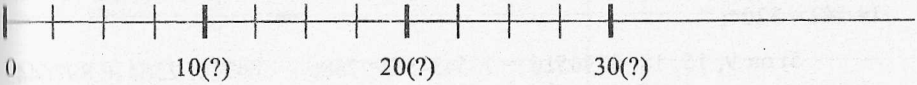
@ @ @ @ @ @ @

@ @ @ @ @ @ @

@ @ @ @ @ @ @

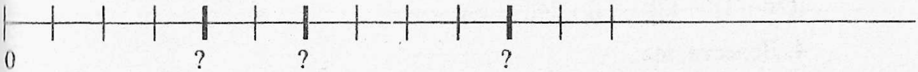
Основа системи числення	**Третій розряд**	**Другий розряд**	**Перший розряд**
(2)			
(3)			
(4)			
(5)			
(6)			

Завдання № 4. Визначте, в якій системі числення записані числа.



Позначте на цій прямій числа, які безпосередньо передують заданим і слідують за ними.

Завдання № 5. Впишіть числа в системі числення з основою 5.



САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

Тема: Числа порівняльні за модулем

Вивчаючи дану тему, студент повинен *усвідомити* необхідні, достатні, та необхідні й достатні одночасово ознаки подільності; *засвоїти поняття* чисел порівняльних за модулем та *навчитися* застосовувати це поняття для розв'язування вправ на обґрунтування подільності складених виразів.

План вивчення теми

1. Використовуючи матеріал лекції з теми: «Відношення подільності. Основні теореми про подільність суми, різниці, добутку», необхідно усвідомити, які умови (необхідну, достатню чи необхідну і достатню одночасово) виражають сформульовані теореми. Відповідь проілюструйте прикладами.

2. Засвоїти поняття чисел порівняльних за модулем, вивчити властивості чисел порівняльних за модулем за темою заняття № 12 у посібнику «Математика»: [практикум]/ за загальною редакцією В. М. Кухар. – К.: Вища школа, 1989. – С. 278-281.

Завдання математичного практикуму

1. Не виконуючи додавання або віднімання, вказати, в яких випадках сума або різниця діляться:

а) на 3, 4, 5: 2342 + 43642; 8375 – 3250; 369 + 45731 – 7021; 45 378 14 542 + 3204;

б) на 9, 15, 18: 8796516 + 755434; 8997886 – 564376; 2564 + 8976445 867543.

2. Знайти остачу від ділення на 3 числа $a = 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$.

3. Довести, що при будь-якому натуральному значенні n

$((2n - 1)^3 - (2k - 1)) \vdots 24$.

4. Довести, що:

$6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ділиться на 43;

$3^{2n+1} + 40n - 67$ ділиться на 64;

$2^{n+2} * 3^n + 5n - 4$ ділиться на 25.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 10

Тема: Застосування ознаки подільності Паскаля

Виконуючи дану самостійну роботу, студент повинен *засвоїти* ознаку подільності Паскаля в конкретних ситуаціях – обґрунтування часткових ознак подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 13, 25; *сформувати основні вміння*: складання таблиці для застосування ознаки подільності Паскаля, запис ознаки в символах, словесне формулювання.

Методичний коментарій та завдання

Щоб довести та сформулювати кожну із запропонованих ознак подільності числа а на m (m = 2, 3, 4, 5, 9, 11, 13, 25), необхідно:

1. Записати число а в многочленній формі.

2. Скласти для кожної ознаки таблицю такого виду:

Степені числа 10 в запису числа	Залишки, одержані при діленні степені 10 на m	Добутки числа одиниць кожного розряду на відповідні залишки
1		
10		
10^2		

10^3		
...		
...		
10^{n-2}		
10^{n-1}		
10^n		

3. Знайти суму добутків одержаних у третій колонці таблиці і поділити її на m (запис конкретної ознаки в символах).

4. Застосувати формулювання загальної ознаки подільності Паскаля до словесного формулювання конкретної ознаки.

5. Навести приклади до кожної із сформульованих ознак подільності.

Примітка: для засвоєння змісту теорії даної теми радимо скористатися додатком до самостійної роботи № 10.

Додаток до самостійної роботи № 10

Тема: Ознака подільності Паскаля

Завдання: З'ясувати, чи ділиться число a на число m

Запишемо число a в многочленній формі:

$a = a_n*10^n + a_{n-1}*10^{n-1} + a_n 2*10n^{-2}+ \ldots + a_3 *10^3+ a_2 \cdot 10^2+ a_1 *10 + a_0$ (1)

де $a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, причому $a_n \neq 0$ для найвищого розряду.

Поділимо степені числа 10 на m. Це означає, що $\exists(q_n; r_n)$ із множини Z_0 така, що:

$10 = mq_1 + r_1$,

$10^2 = mq_2 + r_2$,

$10^3 = mq_3 + r_3$, (2)

………………

………………

$10^n = mq_n + r_n$

Підставимо в формулу (1) замість степенів числа 10 їх представлення в формі (2). Отримаємо:

$$a = a_n*(mq_n + r_n) + a_{n-1}*(mq_{n-1} + r_{n-1}) + a_{n-2}(mq_{n-2} + r_{n-2}) + \ldots +$$

$$+ a_3(mq_3 + r_3) + a_2(mq_2 + r_2) + a_1*(mq_1 + r_1) + a_0 =$$

$$= \underbrace{m*(a_nq_n + a_{n-1}q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} + \ldots + a_3q_3 + a_2q_2 + a_1q_1)}_{\text{1-й доданок}} + \quad (3)$$

$$+ \underbrace{(a_nr_n + a_{n-1}r_{n-1} + a_{n-2}r_{n-2} + \ldots + a_3r_3 + a_2r_2 + a_1r_1 + a_0)}_{\text{2-й доданок}}$$

Із формули (3) бачимо, що число a представлене у вигляді суми добутків. Перший доданок суми є добуток числа m на суму. Оскільки перший співмножник ділиться на m, то і добуток поділиться на m, тобто перший доданок суми ділиться на m. Тоді щоб число a поділилося на m, необхідно і достатньо, щоб другий доданок поділився на m,тобто:

$$(a \vdots m) \longleftrightarrow (a_nr_n + a_{n-1}r_{n-1} + a_{n-2}r_{n-2} + \ldots + a_3r_3 + a_2r_2 + a_1r_1 + a_0) \vdots m$$

Ознака Паскаля: Для того, щоб число a поділилося на m, необхідно і достатньо, щоб на це число m поділилася сума добутків числа одиниць кожного розряду заданого числа на залишки, одержані при діленні на m відповідних розрядних одиниць (степенів числа 10).

Таблиця для застосування ознаки Паскаля

Степені числа 10, які є в запису даного числа	Залишки, одержані при діленні степені числа 10 на m	Добутки числа одиниць кожного розряду на відповідні залишки
1	1	$a_0 \cdot 1$
10	r_1	a_1r_1
10^2	r_2	$a_2 \cdot r_2$
10^3	r_3	$a_3 \cdot r_3$
…	…	…

…	…	…
10^{n-3}	r_{n-3}	$a_{n-3} \cdot r_{n-3}$
10^{n-2}	r_{n-2}	$a_{n-2} \cdot r_{n-2}$
10^{n-1}	r_{n-1}	$a_{n-1} \cdot r_{n-1}$
10^{n}	r_n	$a_n \cdot r_n$

Якщо $(a_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_{n-3}r_{n-3} + a_{n-2}r_{n-2} + a_{n-1}r_{n-1} + a_nr_n)$ ділиться на m, то $a \,\vdots\, m$.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 11

Тема: ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЧИСЛОВИХ ВИРАЗІВ ТА ВИРАЗІВ ІЗ ЗМІННОЮ

Вивчаючи дану тему, студент *повинен усвідомити сутність основних понять*: числовий вираз, вираз із змінною, значення числового виразу, область визначення і значення виразу із змінною. А також *навчитися правильно називати і читати* числові вирази і *виконувати тотожні перетворення* виразів із змінною.

План вивчення теми

1. Числові вирази. Правило читання числових виразів на основі визначення порядку виконання дій.
2. Вираз із змінною. Область визначення виразу із змінною.
3. Формули скороченого множення.
4. Поняття тотожніх перетворень виразів у шкільному курсі математики.

Література

1. Математика: [навч.посібник для студ. пед.інстиутів] / [В. Н. Боровик, Л. М. Вівальнюк, В. М. Костарчук та ін.]. – К.: Вища школа, 1980. – С. 97-100.

2. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 106-112.

3. Підручники з математики для 3-4 кл. (авт. М. В. Богданович, Л. П. Кочина, Н. П. Листопад, 2005-2008 р.р. видання).

4. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики: [учеб.пособие для учащихся пед.уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразоват.шк.»] / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 244-252.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання,* Ви повинні засвоїти правила називання і читання числових виразів і пам'ятати, що назва виразу дається за результатом останньої дії, яка виконується. Наприклад: (81:9) – 3 + 12 = ? Остання дія в цьому виразі – дія додавання. Її результат називається сума. Отже, вираз читається так: Сума, в якій перший доданок є різниця, зменшуване якої частка чисел 81 і 9, а від'ємник число 3. А другий доданок – 12. Або: сума, в якій перший доданок є різниця частки чисел 81 і 9 та числа 3, а другий доданок – число 12.

Зверніть увагу, що, починаючи з другого класу, учні вчаться читати числові вирази на одну і дві дії, а в 3-4 класах на три і більше дій. З метою формування таких математичних умінь виконайте завдання.

Завдання № 1. Обчисли значення виразів, прочитай їх на основі правила про порядок дій (письмове виконання):

1) $(14{,}05 - 1\frac{1}{4}) : 0{,}04 - 13{,}8 \cdot 13 =$

2) $(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} : 1{,}25) \cdot 6 =$

3) $(2 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}8) : (0{,}16 : \frac{1}{2} + 0{,}01) =$

4) $3\frac{3}{4} \cdot 1{,}2 + (2{,}55 + 2{,}7) : (0{,}1 - \frac{1}{80}) =$

5) $\dfrac{\frac{5}{14} - \frac{8}{21}}{\frac{16}{21} - 1} =$

6) $\dfrac{\dfrac{4}{15}+\dfrac{7}{12}}{\dfrac{23}{40}-1}=$

7) $\dfrac{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}}{7,5\cdot 3+3\cdot 2,5}=$

Завдання № 2. Порівняй числові вирази:

1) $(-0,2)^3\cdot 10^5$ … $(-\frac{8}{10})^2$;

2) $(1,2)^2$ … $1,(4)$;

3) $2,(5)$ …. $(3\frac{2}{9}+1\frac{8}{9})\cdot\frac{1}{2}$;

4) $(-0,5)^2\cdot(-5)^3$ …. $31,(3)$;

5) $9^2\cdot(\frac{1}{3})^5$ … $0,333$;

6) $16^2\cdot 8^3\cdot 0,25^8$ … 2

Для вивчення *другого питання* пригадайте та наведіть приклади виразів із однією, двома, трьома змінними. Сформулюйте, що називається областю визначення виразу із змінною. Як знайти область визначення таких виразів, які запропоновані в завданні №3.

Завдання №3. Знайди область визначення.

1) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-4x+3}$;   2) $\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}}$;   3) $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; 4) $\sqrt{25-5x^2}$ *$\lg(x+1)$

Для вивчення *третього питання* запишіть відомі Вам формули скороченого множення, прочитайте їх правильно, доведіть. Наприклад:

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ – сума кубів двох виразів дорівнює добуткові суми цих виразів на неповний квадрат різниці.

Доведення.

Запишемо праву частину рівності і розкриємо дужки на основі правила множення многочлена на многочлен. А потім зведемо подібні доданки:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-\underline{a^2\cdot b}+\underline{\underline{a\,b^2}}+\underline{a^2\cdot b}-\underline{\underline{a\,b^2}}+b^3=a^3+b^3$$

Завдання №4. Запишіть і прочитайте, а потім доведіть формули скороченого множення.

1) $(a+в)^2 =$

2) $(a–в)^2 =$

3) $a^2 – в^2 =$

4) $a^2 + в^2 =$

5) $(a+в)^3 =$

6) $a^3 – в^3 =$

7) $(a – в)^3 =$

8) $(a+в+c)^2 =$

9) $(a–в–c)^2 =$

Для засвоєння змісту *четвертого питання* виконайте математичний практикум на спрощення виразів та доведення тотожностей. Пригадайте, що для виразів із модулями слід поступати так:

1) знайти область визначення виразу, якщо вона не задана в умові;
2) знайти нулі модуля;
3) розбити область визначення нулями модуля на проміжки;
4) для кожного проміжку записати вираз без модуля і спростити його.

Наприклад:

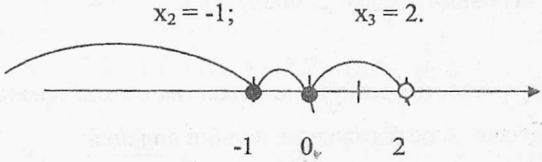
$|x| + |x+1| + |x-2|$, якщо $x<2$.

Область визначення виразу задана в умові завдання: $x \in (-\infty;2)$.

Знайдемо нулі модуля. Для цього прирівняємо до нуля кожен підмодульний вираз:

$x_1 = 0,$ $\quad x + 1 = 0$ $\quad x – 2 + 0,$

$\quad x_2 = -1;$ $\quad x_3 = 2.$



Утворилося три проміжки. На кожному із них запишемо і спростимо вирази без модуля.

Якщо $x<-1$, то $|x| = -x$; $|x+1| = -x-1$; $|x-2| = 2-x$,

то $-x-x-1+2-x = 1-3x$;

Якщо $-1\leq x <0$, то $-x+x+1+2-x = 3-x$;

Якщо $0\leq x <2$, то $x+x+1+2-x = x+3$

Відповідь:

$$|x| + |x+1| + |x-2| = \begin{cases} 1-3x, \text{ якщо } x< -1; \\ 3-x, \text{ якщо } -1 \leq x < 0; \\ x+3, \text{ якщо } 0\leq x <2. \end{cases}$$

Ознайомтеся із завданнями математичного практикуму. Виберіть в одному із 8-и варіантів доступний Вам рівень і розв'яжіть запропоновані завдання. За виконання математичного практикуму Ви отримаєте додатково до захисту самостійної роботи № 11 від 4 до 12 балів (у залежності від обраного Вами рівня).

ЗАВДАННЯ ДО МАТЕМАТИЧНОГО ПРАКТИКУМУ

Математичний практикум складається з восьми варіантів, у кожному варіанті три рівні: середній (4-6 балів); достатній (7-9 балів); високий (10-12 балів).

Студент має право вибрати один із варіантів, який відповідає рівню готовності його до виконання практикуму за власною самооцінкою.

Варіант 1.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники (1–3):

1. $a^2 - 25$; б) $a^2 + 25 + 10a$; в) $a^2 + 25 - 10a$.

2. а) $4a^2 - 25в^2$; б) $a^2 - 12aв + 36в^2$.

3. а) $a^3 - 25a$; б) $4a^2 + 12aв + 9в^2$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 - 49 = 0$; б) $x^2 -6x + 9 = 0$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

1. 1) Розкласти на множники:

а) $100в^2 - 81a^2$; б) $5a^4 + 10a^2 + 5$.

2) Обчислити раціональним способом $7{,}6^2 - 6{,}4^2$.

Розкласти на множники:

2. $(а - 3б)^2 - 1$.

3. а) $a^2 - 25в^2 + a + 5в$;   б) $a^2 - 10aв + 25в^2 - 1$.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники:

а) $(2a + 3)^2 - (a - 1)^2$;   б) $16 - c^2 + a^2 - 8a$.

2. Розв'язати рівняння: $x^3 + 25x = 10x^2$.

3. Розкласти многочлен $x^2 + 6x + 8$ на множники виділенням повного квадрата двочлена і використанням формули різниці квадратів.

4. Спростити вираз:

$|x| + |1\text{-}x| + 2|x - 2| = ?$, якщо $1 < x < 2$

Варіант 2.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники (1–3):

1. $a^2 - 49$;   б) $a^2 + 49 + 14a$;   в) $a^2 + 49 - 14a$.

2. а) $4a^2 - 49в^2$;   б) $a^2 - 10aв + 25в^2$.

3. а) $a^3 - 49a$;   б) $4a^2 + 20aв + 25в^2$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 - 49 = 0$;   б) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

1. 1) Розкласти на множники:

а) $16в^4 - 25c^2$;   б) $72a^4 + 24a^2в^2 + 2в^4$.

2) Обчислити раціональним способом $17{,}5^2 - 2{,}5^2$.

Розкласти на множники:

2. $(3a - 4в)^2 - 9c^2$.

3. а) $x^2 - 49y^2 + x - 7y$;   б) $a^2 - 2aв + в^2 - 4$.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники:

а) $(3a + 2в)^2 - (a + в)^2$;   б) $36 - 20xy - 4x^2 - 25y^2$.

2. Розв'язати рівняння: $x^3 - 6x^2 = -9x$.

3. Розкласти многочлен $x^2 - 12x + 32$ на множники виділенням повного квадрата двочлена і використанням формули різниці квадратів.

4. Спростити вираз:

$|x + 3| - |1 - x| + 2|x| = ?$, якщо $x > -3$

Варіант 3.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники (1–3):

1. $a^2 - 81$; б) $a^2 + 81 - 18a$; в) $a^2 + 81 + 18a$.

2. а) $25a^2 - 81в^2$; б) $a^2 + 16ав + 64в^2$.

3. а) $a^3 - 81a$; б) $9a^2 - 30ав + 25в^2$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 - 81 = 0$; б) $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

1. 1) Розкласти на множники:

а) $81в^4 - 64c^6$; б) $100x^4 - 20x^2y^2 + y^4$.

2) Обчислити раціональним способом $4{,}1^2 - 3{,}1^2$.

Розкласти на множники:

2. $4^2 - (a + 4)^2$.

3. а) $a^2 - 49в^2 + a + 7в$; б) $x^2 - a^2 - 12a - 36$.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники:

а) $4(a + в)^2 - 9(a - в)^2$; б) $25a^2 - 4x^2 - 9y^2 + 12xy$.

2. Довести, що коли добуток двох натуральних чисел, одне з яких на 2 більше за інше, збільшити на 1, то одержимо число, яке є квадратом деякого натурального числа.

3. Розкласти на множники многочлен $x^2 - 10x + 24$.

4. Спростити вираз:

$|x - 1| + \frac{x}{|x|} - |x - 1| = ?$, якщо $x > -2$.

Варіант 4.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники (1–3):

1. $m^2 - 64$; б) $m^2 + 64 - 16m$; в) $m^2 + 64 + 16m$.

2. а) $9m^2 - 64n^2$; б) $a^2 + 6ав + 9в^2$.

3. а) $m^3 - 64a$; б) $25a^2 + 30ав + 9в^2$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 - 64 = 0$; б) $x^2 - 16x + 64 = 0$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

1. 1) Розкласти на множники:

а) $16в^4 - 25c^2$; б) $3a^4 - 36a^2в^2 + 108в^4$.

2) Обчислити раціональним способом $5{,}75^2 - 2{,}25^2$.

Розкласти на множники:

2. $36a^2 - (в + 4)^2$.

3. а) $a^2 - 100в^2 - a + 10в$; б) $25x^2 - в^2 + 12в - 36$.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники:

а) $16(a - в)^2 - 25(a + в)^2$; б) $ac - вc - a^2 + 2ав - в^2$.

2. Довести, що коли добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на 1, то одержимо квадрат деякого натурального числа.

3. Розкласти на множники многочлен $x^2 - 8x + 15$.

4. Спростити вираз:

$|2 - x| + |x| - |1 + x| = \ ?$, якщо $-1 \le x \le 2$.

Варіант 5.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники:

1. а) $a^3 - 4^3$; б) $x^3 + 5^3$.

2. $8 + a^3$.

3. $125a^3 - 1$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $27а^3 – 8в^3$; б) $а^4 + а$.

2. $–2а^3 – 54$.

3. Довести, що $224^3 + 276^3$ ділиться на 500.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники вираз : $(а + 2)^3 + (а – 2)^3$.

2. Обчислити раціональним способом $\frac{61^3 - 39^3}{22} + 61*39$.

3. Розкласти на множники многочлен $х^3 + 7а^2 –7ав + 7в^2 + в^2$.

4. Спростити вираз: $|x| - |2x - 5|$

Варіант 6.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники:

1. а) $5^3 – а^3$; б) $х^3 + 10^3$.

2. $а^3 – 27$.

3. $64а^3 + 1$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $27а^3 – 0,008в^3$; б) $а^5 – 1000а^2$.

2. $–3а^3 – 81$.

3. Довести, що $723^2 + 277^3$ ділиться на 1000.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники вираз : $(а – с)^3 + (а + с)^3$.

2. Обчислити раціональним способом $\frac{123^3 + 23^3}{146} - 123*23$.

3. Розкласти на множники многочлен $а^3 + 10а^2 –10ав + 10в^2 + в^3$.

4. Спростити вираз: $|2x - 4| + x - |1 + x|$.

Варіант 7.

Середній рівень (4 – 6 б.)

Розкласти на множники:

1. а) $a^3 - 4^3$; б) $x^3 + 5^3$.

2. $8 + a^3$.

3. $125a^3 - 1$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $27a^3 - 8в^3$; б) $a^4 + a$.

2. $-2a^3 - 54$.

3. Довести, що $224^3 + 276^3$ ділиться на 500.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники вираз: $(a + 2)^3 + (a - 2)^3$.

2. Обчислити раціональним способом $\frac{61^3 - 39^3}{22} + 61 \cdot 39$.

3. Розкласти на множники многочлен $x^3 + 7a^2 - 7aв + 7в^2 + в^3$.

4. Спростити вираз: $3 - |1 - x| + |x - 3|$

Варіант 8.

Середній рівень (4 – 6.б.)

Розкласти на множники:

1. а) $5^3 - a^3$; б) $x^3 + 10^3$.
2. $a^3 - 27$.
3. $64a^3 + 1$.

Достатній рівень (7 – 9 б.)

Розкласти на множники (1–2):

1. а) $27a^3 - 0{,}008в^3$; б) $a^5 - 1000a^2$.

2. $-3a^3 - 81$.

3. Довести, що $723^2 + 277^3$ ділиться на 1000.

Високий рівень (10 – 12 б.)

1. Розкласти на множники вираз: $(a - c)^3 + (a + c)^3$.
2. Обчислити раціональним способом $\frac{123^3 + 23^3}{146} - 123 \cdot 23$.
3. Розкласти на множники многочлен $a^3 + 10a^2 - 10aв + 10в^2 + в^3$.
4. Спростити вираз: $|3 - x| - |x - 3| + |-x|$.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 12

ТЕМА: Основні способи розв'язування алгебраїчних рівнянь у шкільному курсі математики

Вивчаючи дану тему, студент повинен *узагальнити знання* про основні види алгебраїчних рівнянь шкільного курсу математики та способи їх розв'язування.

План вивчення теми

1. Поняття про алгебраїчні рівняння з однією змінною.
2. Дослідження множини розв'язків лінійного рівняння: $ax=b$; квадратного рівняння: $ax^2+bx+c=0$.
3. Неповні квадратні рівняння, зведені квадратні рівняння та способи їх розв'язування.
4. Деякі алгебраїчні рівняння степенів $n>2$ та способи їх розв'язування.
5. Розв'язування рівнянь у початковому курсі математики.

Література

1. Капіносов А. М. Алгебра 7 кл. Систематичний курс/ А. М. Капіносов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – С. 38-77.
2. Король Я. А. Математика в початкових класах. Культура усного і писемного мовлення / Я. А. Король. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2000. – С. 104-110.

3. Математика: [навч.посібник для студ. пед.інстиутів] / [В .Н. Боровик, Л. М. Вівальнюк, В. М. Костарчук та ін.]. – К.: Вища школа, 1980. – С. 105-115.
4. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 113-117.
5. Підручники математики для 4 класу (авт. М. В. Богданович, Л. П. Кочина, Н. П. Листопад, 2005-2008 р.р. видання).
6. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики: [учеб.пособие для учащихся пед.уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в начальных классах общеобразоват.шк.»] / Л. П. Стойлова, А .М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 252-258.
7. Додаток до самостійної роботи № 12.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи *перше питання,* сформулюйте означення алгебраїчного рівняння та наведіть конкретні приклади алгебраїчних рівнянь першого, другого, третього та четвертого степенів. Окремо приділіть увагу квадратним рівнянням та біквадратним (означення, запис, приклад).

Для засвоєння змісту першого питання виконайте таке завдання.

Завдання № 1. Охарактеризувати рівняння та звести їх до лінійного виду:

$2x – 4 = 7x + 2;$

$x + 4 = x + 2;$

$3x – 5 = -2x + 7 + 5x – 12;$

$5x = 6x;$

$\frac{x-4}{7} - \frac{x}{3} = 0;$

$$\frac{8x-2}{4}+\frac{5x+3}{3}-\frac{9x-5}{2}=2.$$

Вивчаючи зміст матеріалу *другого питання,* Вам необхідно провести дослідження: чи завжди лінійне і квадратне рівняння мають розв'язки? Якщо так, то скільки і за яких умов?

Для усвідомлення сутності цих умов виконайте завдання № 2.

Завдання № 2. Розв'яжи рівняння з модулем.

$|5x+4|=34;$

$|2x-3|=17;$

$||x|-1|=9;$

$||x|-4|=13.$

Вивчаючи зміст матеріалу *третього питання,* розгляньте такі випадки: неповні квадратні рівняння виду: $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $ax^2=0$. Чи завжди вони мають розв'язки? Зведене квадратне рівняння $x^2+px+q=0$. Теорема Вієта (пряма і обернена) для розв'язування зведених квадратних рівнянь.

Для засвоєння змісту матеріалу виконайте завдання № 3.

Завдання № 3. Розв'яжи рівняння:

$x^2-7x-18=0$

$6x-x^2=0$

$3x^2-27=0$

$x^2+4x-5=0$

$x^2+4x+3=0$

$x^2=\frac{1}{81}$

$x^2+64=0.$

Вивчаючи зміст *четвертого питання,* зверніть увагу на способи розв'язування рівнянь третього і четвертого та деяких вищих степенів.

Для перевірки засвоєння способів розв'язування рівнянь виконайте завдання № 4 і завдання № 5.

Завдання № 4. Розв'яжи рівняння:

$x^2-36=6-x$;

$x^2+49=14x+9$;

$2x^3+16=x^2+32x$;

$x^3-49x=0$;

$2x^4-3x^2+1=0$;

$x^6-64=0$.

Завдання № 5. Розв'яжи рівняння:

$(x^3+8)(x^2-8x-9)=0$;

$(x^2+2x+1)(x^2-6x-16)=0$;

$x^4-10x^2+9=0$;

$x^5-29x^3+100x=0$;

$(2x^2+3)^2-7(2x^2+3)+10=0$;

$(x^2-16)(x^3-1)=0$;

$6x^3-x^2+20x+12=0$.

Вивчаючи зміст матеріалу *п'ятого питання,* зверніть увагу на характеристику основного способу розв'язування рівнянь з однією змінною в початковому курсі математики: на основі залежності між компонентами і результатом арифметичних дій. Запишіть суть цього способу для розв'язування рівнянь такого виду:

$x+a=b$; $a+x=b$; $x-a=b$; $a-x=b$; $ax=b$; $x \cdot a=b$; $x/a=b$; $a/x=b$.

Виконайте завдання № 6.

Завдання № 6. Розв'яжи рівняння, запиши правильно його розв'язання у відповідності до вимог культури запису розв'язання рівняння. Поясни розв'язання кожного рівняння учням 3-4кл.(на допомогу використай Л.2 із рекомендованої літератури):

$x+14=90$;	$x-27=19$;	$60*x=540$;
$x/90=7$;	$56/x=8$;	$42\ 108-x=398$;
$42+(x-26)=81$;	$(x-34)-18=52$;	$28+(x-16)=53$;
$420/(17-x)=140$.		

Завдання № 7. Розв'яжи запропоновані нижче рівняння способом на основі залежності між компонентами і результатами арифметичних дій:

(14972580/(250000-52*(4881-x))*1024-590552)/376=1003;

450-((18000-(112500/25-x)*6)/90)=338;

(9564-(8352-(848-21)+(8x-41)))-211=1813.

Примітка: завдання № 5 і завдання № 7 включені до завдань математичного практикуму і за їх правильне розв'язання Ви одержите додатково ще 10 балів під час захисту самостійної роботи № 12.

ДОДАТОК ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 12

Рівняння – одна з основних змістових ліній шкільного курсу математики. У формуванні поняття рівняння можна виділити два етапи: І етап – 1-6 класи і ІІ етап – 7-11 класи.

У початковій школі і в 5-6 класах (І етап) рівняння з однією змінною визначають як істинну рівність, в яку входить невідоме число. Розв'язують рівняння на основі знань зв'язків між результатом і компонентами арифметичних дій та способом підбору. Це основні способи розв'язування рівнянь в 1-5 класах. Наприклад, розв'язати рівняння:

$$4*(\frac{2x+3}{5}+1) = 16.$$

Оскільки невідоме x міститься в одному із співмножників, то цей множник знайдемо, якщо поділимо добуток на другий співмножник:

$$\frac{2x+3}{5}+1 = 16/4; \qquad \frac{2x+3}{5}+1 = 4.$$

Тепер невідоме число міститься у першому доданку, і для того, щоб його знайти, потрібно від суми відняти другий доданок:

$$\frac{2x+3}{5}+1 = 4-1; \qquad \frac{2x+3}{5}=3.$$

Невідоме міститься в діленому і дорівнює частці, помноженій на дільник:

2x+3=5*3; 2x+3=15.

Знаходимо доданок 2х:

$2x = 15-3$; $2x = 12$.

Знаходимо співмножник:

$x = 12/2$; $x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

У 6 класі у зв'язку з введенням поняття коефіцієнта і використання розподільного закону множення відносно додавання вивчають нові способи розв'язування алгебраїчних рівнянь з однією змінною, а саме:

1) додаванням до обох частин рівняння одного і того ж числа:

$x + a = b$;

$x + a + (-a) = b + (-a)$;

$x + a - a = b - a$;

$x = b - a$;

2) перенесення доданків з однієї частини рівняння в іншу, змінивши знак на протилежний;

3) зведення подібних доданків.

Розглянемо приклад. Розв'язати рівняння.

$$2x + 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$$2x - \frac{1}{2}x = -4 - 3$$

$$\frac{3}{2} * x = -7$$

$$x = -\frac{14}{3},\ x = -4\frac{2}{3}.$$

Другий етап пов'язаний з вивченням систематичного курсу алгебри. Підхід до означення рівняння обґрунтований на базі ідеї логічної функції. Рівняння з однією змінною – це одномісний предикат виду: $f_1(x) = f_2(x)$. Коренем рівняння з однією змінною називається значення змінної, при якому рівняння перетворюється в істинну числову рівність. Розв'язати рівняння – означає знайти множину його коренів. У зв'язку з таким підходом до означення рівняння розв'язується питання про дослідження множини його розв'язків.

Наприклад, у 7 класі досліджується множина розв'язків алгебраїчного рівняння з однією змінною такого виду: ax = b, де a, b – числа, x – змінна в загальному виді, яке називається лінійним рівнянням з однією змінною.

1) Якщо $a \neq 0$, $\forall b \in R$, то $x = \frac{b}{a}$. Відповідь: $\{\frac{b}{a}\}$

2) Якщо a = 0 і b = 0, тоді 0*x = 0 – правильна числова рівність при довільному x.

Відповідь: $x \in R$.

3) Якщо a = 0, $b \neq 0$, тоді 0x = b – хибна числова рівність. x – не існує.

Відповідь: Ø.

Виникнення нових способів розв'язування рівнянь з однією змінною пов'язане з вивченням інших видів рівнянь.

Так, способи: розкладання на множники; заміни змінних, пов'язані з вивченням нелінійних алгебраїчних рівнянь, а саме квадратних і біквадратних, деяких простіших кубічних рівнянь.

Розглянемо приклад, розв'язати рівняння:

$5*(x + 2)^2 - 3*(x + 2) = 0,$

$(x + 2)*(5*x + 10 - 3) = 0,$

$(x + 2)*(5*x + 7) = 0,$

$x + 2 = 0$ або $5*x + 7 = 0,$

$x = -2$ або $5*x = -7$

$x = -\frac{7}{5}$

Відповідь: $\{-2; -\frac{7}{5}\}$

Починаючи з 8 класу, учні застосовують для розв'язування рівнянь основні положення теорії рівносильних рівнянь.

Розглянемо способи розв'язування квадратних рівнянь.

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – числа, причому $a \neq 0$, x – змінна, називається квадратним рівнянням.

Якщо $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax^2 + bx = 0$ – називається неповним квадратним рівнянням. Його розв'язують так:

$x \cdot (ax + b) = 0$

$x_1 = 0$ або $ax + b = 0$

$x_2 = -\frac{b}{a}.$

Відповідь: $\{-\frac{b}{a}; 0\}$.

Якщо a = 1, то $x^2 + px + q = 0$, де p = b ; q = c – називається зведеним квадратним рівнянням.

Якщо b = 0 і c = 0, то $ax^2 = 0$ – називається неповним квадратним рівнянням.

$x^2 = 0$, x = 0. Відповідь: { 0 }.

Способи розв'язування квадратного рівняння виду: $ax^2 + вx + c = 0$.

Спосіб 1: Виділення квадрата двочлена в лівій частині рівняння

Приклад: $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 2 = 0$; поділимо обидві частини рівняння на число 3:

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння до повного квадрата різниці:

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = (x^2 - 2*x*\frac{5}{6} + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} - \frac{2}{3}) = (x^2 - 2x*\frac{5}{6} + \frac{25}{36}) - (\frac{25}{36} + \frac{2}{3}) =$$

$$= (x - \frac{5}{6})^2 - \frac{49}{36} = 0.$$

$(x - \frac{5}{6})^2 = \frac{49}{36}$; $x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{49}{36}}$;

$x - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$ або $x - \frac{5}{6} = -\frac{7}{6}$.

$x = 2$ або $x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\{-\frac{1}{3}; 2\}$.

Спосіб 2. Розв'язування квадратних рівнянь за формулою:

$ax^2 + bx + c = 0$.

$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; де $D = b^2 - 4ac$

якщо D > 0, то існують x_1 і x_2;

якщо D = 0, то існують $x_1 = x_2$;

якщо D < 0, то не існують x_1 і x_2.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Спосіб 3. Розв'язування квадратного рівняння з використанням теореми Вієта: якщо квадратне рівняння має розв'язок, тобто $D > 0$, то:

$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 * x_2 = q$,

де p і q – коефіцієнти квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$

Приклад: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$, так як: $x_1 + x_2 = -(-3) = 3$, а $1 + 2 = 3$, $x_1 * x_2 = 2$, а $1*2 = 2$.

Спосіб 4. Графічне розв'язування рівняння $ax^2+вx+c=0$.

В одній й і тій же системі координат побудуємо два графіки, позначивши через y_1 і y_2 відповідно ліву і праву частини рівняння:

$2x^2 = 3x + 5$, де $y_1 = 2x^2$, $y_2 = 3x + 5$.

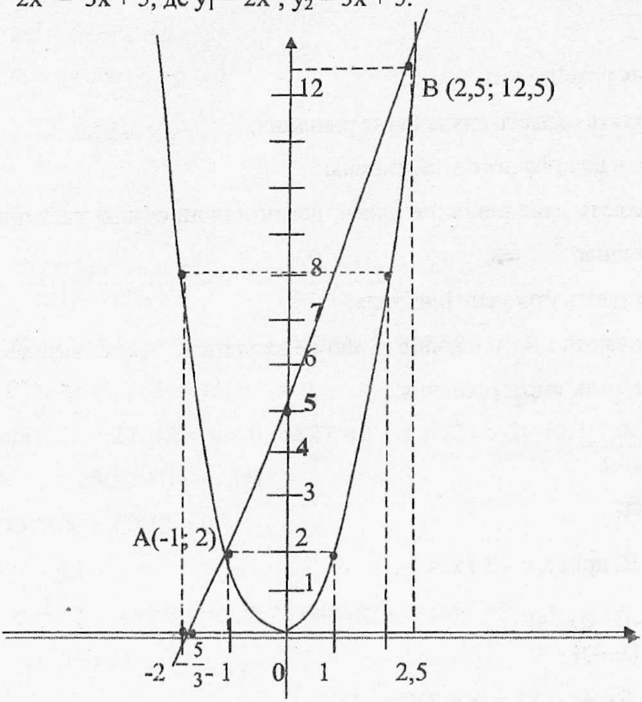


Рис. 1. Зображення графічного розв'язку рівняння

Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої:

$X_A=-1$; $X_B=2,5$.

Відповідь: {-1; 2,5}.

Біквадратні рівняння – це алгебраїчні рівняння виду:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, де a, b, c – числа, $a \neq 0$.

Для розв'язування використовують введення нової змінної $y = x^2$ ($y>0$) і зведення біквадратного рівняння до квадратного, тобто $ay^2 + by + c = 0$.

Наступний вид рівнянь з однією змінною, який вивчається в курсі математики середньої школи, є дробово-раціональні рівняння.

Наприклад:

$x - \frac{5}{x} = -3x + 19$,

$\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$.

Ці рівняння розв'язують так:

1) знаходять область визначення рівняння;

2) зводять до спільного знаменника;

3) замінюють дане рівняння цілим, домноживши обидві частини його на спільний знаменник;

4) розв'язують утворене рівняння;

5) виключають з його коренів ті, що не входять в область визначення.

Наприклад, розв'язати рівняння:

1) $\frac{x-5}{x+3} - \frac{4}{2x-1} = 1$.

Розв'язання:

О.Д.З. $x \in R$, крім $x = -3$ і $x = \frac{1}{2}$.

$\frac{(x-5)*(2x-1)-4(x+3)}{(x+3)*(2x-1)} = 1$.

$2x^2 - 11x + 5 - 4x - 12 = (x + 3)(2x - 1)$

$2x^2 - 15x - 7 = 2x^2 + 5x - 3$

$-20x = 4$

$x = -0,2$.

Відповідь: $x = -0,2$.

2) $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}+\frac{13(2-x)}{2x^2-5x+2}$

О.Д.З. $x \in R$, крім $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=2$.

Знаходження О.Д.З.

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1=0, \\ 4x^2-1=0, \\ 2x^2-5x+2=0. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}, \\ (2x-1)(2x+1)=0, \\ x=2,\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}, \\ x=\frac{1}{2}, \text{ або } x=-\frac{1}{2}, \\ x=2,\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

$2x^2-5x+2=0$

$D=25-4\cdot 2\cdot 2=9$

$x_1=\frac{5+3}{4}=2$

$x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

$$\frac{27x*(2x+1)+25*27}{27(2x-1)(2x+1)}=\frac{(2x-1)(2x+1)+13*27(2x+1)}{27*(2x-1)(2x+1)}$$

$54x^2+27x+25*27=4x^2-1+13*27*2x+13*27$,

$50x^2-25*27x+27\ (25-13)+1=0$,

$50x^2-25*27x+27\cdot 12+1=0$, де $27*12+1=(25+2)*12+1=25*12+24+1=25*12+25=25(12+1)=25*13$.

$50x^2-25*27x+25*13=0$,

$2x^2-27x+13=0$

$D=27^2-4*2*13=729-104=625$.

$x_1=\frac{27+25}{4}=\frac{52}{4}=13$

$x_2=\frac{27-25}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ - не може бути коренем даного рівняння, тому що не входить в О.Д.З. Відповідь: $\{13\}$.

Способи розв'язання трансцендентних рівнянь з однією змінною та ірраціональних рівнянь засновані на проведенні тотожних перетворень і зведення їх, як правило, до розв'язування квадратних, лінійних або простіших типів трансцендентних рівнянь, алгоритми розв'язування яких відомі. Наприклад:

$5^x + 5^{-x} = 2$ – показникове рівняння з однією змінною розв'язуємо так:

$$5^x + \frac{1}{5^x} = 2$$

$$\frac{5^x * 5^x + 1 - 2 * 5^x}{5^x} = 0$$

$(5^x)^2 - 2*5^x + 1 = 0$, тому що $5^x > 0$ завжди, позначимо $5^x = y$; $y^2 - 2y + 1 = 0$

$y_1 = y_2 = 1$

$5^x = 1$; $5^x = 5^0$; $x = 0$

Відповідь: {0}.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 13

ТЕМА: Розв'язування нерівностей з однією змінною в шкільному курсі математики. Пропедевтика розв'язування нерівностей у початковому курсі математики

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти такі поняття*: нерівність із змінною; множина розв'язків нерівності із змінною; *знати*: основні способи розв'язування нерівностей із однією змінною шкільного курсу математики, зокрема початкового курсу математики; *вміти*: застосувати основні способи розв'язування нерівностей з однією змінною.

План вивчення теми

1. Означення та приклади нерівностей з однією змінною.

2. Множина розв'язків нерівності з однією змінною та основні способи розв'язання нерівностей:

а) найпростіші: спосіб випробування; спосіб добору; спосіб зведення нерівності до рівняння; спосіб на основі залежності між компонентами і результатом арифметичних дій;;

б) на основі теорії рівносильних нерівностей;

в) метод інтервалів для розв'язання дробово-раціональних нерівностей із однією змінною.

3. Розв'язування нерівностей другого степеня різними способами:

а) метод інтервалів;

б) графічний спосіб;

в) зведення до сукупності двох систем.

Література

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – К.: «Вища школа», 1980. – С. 215-221.

2. Король Я. А. Математика в початкових класах. Культура усного і писемного мовлення/ Я. А. Король. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2000. – С. 111-121.

3. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – К.: Вища школа, 1987. – С. 125-126..

4. Математика : [навч.посібник для студентів пед.інститутів] / В. Н. Боровик, Л. М. Вівальнюк, В. М. Костарчук та ін. – К.: Вища школа, 1980. – С. 97-100.

5. Математика [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 106-112.

6. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики/ Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 259-262.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання* теми, необхідно встановити, як поетапно (1-4 класи, 5-9 класи, 10-11 класи) формується поняття нерівності: числової та нерівності із змінними. Для цього використайте підручники шкільного курсу математики. Підтвердження своїх думок проілюструйте конкретними прикладами із підручників. Складіть тези по змісту даного питання.

Вивчаючи зміст матеріалу *другого питання* теми, Вам необхідно з'ясувати поняття множини розв'язків нерівності з однією змінною. Детально з'ясувати суть найпростіших способів розв'язування нерівності з однією змінною в початковій школі – це способи добору і випробування та виявити інші можливі способи розв'язування нерівностей з однією змінною молодшими школярами. Для цього використайте рекомендовану літературу за № 2.

З'ясувати, в якому класі починають розв'язувати нерівності з однією змінною на основі теорії рівносильних нерівностей. Проілюструвати застосування цієї теорії на конкретних прикладах розв'язання деяких видів нерівностей. Дати вичерпну характеристику методу інтервалів (проміжків) для розв'язання дробово-раціональних нерівностей із однією змінною. Для цього використайте додаток до самостійної роботи № 13.

Зміст *третього питання* теми складають різні способи розв'язання нерівностей другого степеня з однією змінною. Вивчивши основні закономірності кожного із трьох способів, рекомендуємо розписати їх застосування для всіх видів квадратних нерівностей, заданих у загальному виді, або на конкретних прикладах:

$ax^2 + bx + c<0$, $ax^2 + bx + c>0$ (якщо $a >0$ і $a <0$).

$ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ (якщо $a > 0$ і $a < 0$).

Для перевірки рівня засвоєння змісту матеріалу з даної теми пропонуємо виконати практикум.

Завдання практикуму:

Завдання 1. Із підручника математики для початкової школи виписати завдання, за допомогою яких здійснюється пропедевтика формування поняття нерівності із змінною та множини її розв'язків.

Завдання 2. Чи є задані нерівності рівносильними?

а) $x + 3 - \frac{1}{x-1} > -x + 2 - \frac{1}{x-1}$ і $x + 3 > - x + 2$;

б) $\frac{x-3}{x^2-5x+6} < 2$ і $2x^2 - 11x + 15 > 0$;

в) $\frac{x-8}{(x+7)} < 0$ і $x - 8 < 0$.

Завдання 3. Розв'язати нерівності:

а) $|x^2 - 2x| < x$;

б) $|x^2 - 4x| < 5$;

в) $|x - 6| < x^2 - 5x + 9$;

г) $1 - \frac{2x}{x-1} \leq 0$;

д) $x - \frac{9}{x} > 0$.

Завдання 4. Розв'яжи нерівності для учнів початкових класів указаним способом.

1) $20 - a > 13$ (записати усне розв'язання методом підбору);

2) Із чисел 1, 5, 20, 30 випиши ті значення букви k, для яких правильна нерівність:

$60/k > 4$ (спосіб: запис усного розв'язання нерівності із заданою множиною значень змінної);

3) При яких значеннях букви а справджується нерівність:

$x + 40 < 45$ (спосіб зведення нерівності до рівняння);

4) При яких значеннях букви а справджується нерівність:

$20 - a < 15$ (спосіб розв'язання нерівності на основі залежності між компонентами та результатами дії).

ДОДАТОК ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 13

Нерівності в математиці відіграють дуже важливу роль. Їх використовують у математичному аналізі, теорії функції, програмуванні та в інших розділах математики.

Не випадково, що і в школі нерівностям приділяють багато уваги. Два вирази сполучені знаком >, < або ≥, ≤ утворюють нерівність. Залежно від того, містить нерівність змінні чи ні, її називають нерівністю із змінними, або числовою нерівністю. Наприклад, $2 < 3$, $7 - 5 > 5 - 7$, $2x < 3$, $a^2 + b^2 \geq 2a$.

Із знаками > і <учні ознайомлюються ще у початкових класах.

У 7 класі уточнюють, який зміст вноситься в поняття: з двох чисел a і b менше те число, якому на числовій прямій відповідає точка, розташована зліва, і доводять теореми:

$a < b \longrightarrow a - b < 0$; $a > b \longrightarrow a - b > 0$.

Ці теореми дають можливість доводити дуже багато властивостей, у тому числі й важливі властивості відношень "більше" і "менше".

У початковій школі нерівності розв'язують способом підбору.

Наприклад:

a) $a > 10$. Виписати всі значення, які може приймати літера a.

b) З ряду чисел 14, 15, 16, 17, 18, 19 виписати ті значення доданку c, при яких $c + 24 > 40$.

c) $48/b < 24$. При яких значеннях літери b буде правильний цей запис?

d) $80*a < 720$. Які значення може приймати a?

У старших класах нерівності з однією змінною розв'язуються із застосуванням теорем і наслідків із них про рівносильні нерівності.

Наприклад:

1) $2x + 5 + x^2 > 3 + x^2$ і $2x + 5 > 3$ рівносильні на множині дійсних чисел (за теоремою 1).

2) $(x^2 + 2)(2x + 7) < 5(x^2 + 2)$ і $2x + 7 < 5$ рівносильні на R (за теоремою 2, де вираз $\frac{1}{x^2+2} > 0$).

3) $(x - 2)(2x + 7) < 5(x - 2)$ – не рівносильна $2x + 7 < 5$ на R, тому що $\frac{1}{x-2} > 0$ не при всіх $x \in R$.

4) Розв'язати нерівність, використовуючи наслідки із теорем 1,2:

$5x - 5 > 2x + 16$

$5x - 2x > 16 + 5$

$3x > 21$

$x > 7$

Відповідь: $x \in]7; \infty[$.

При розв'язуванні нерівності виду $(x - a_1)*(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n) > 0$, де a_1, a_2, ..., a_n числа використовують метод проміжків, суть якого така: кожний з множників $(x - a_n)$ від'ємний при $x < a_n$ і додатній при $x > a_n$, тобто він змінює знак при $x = a_n$. Добуток може змінити знак лише, коли змінює знак один з множників, тобто в точках a_1, a_2, ..., a_n. Ці точки розбивають числову вісь на проміжки $]-\infty; a_1[$, $]a_1, a_2[$, ..., $]a_{n-1}, a_n[$, $]a_n, +\infty[$.

На кожному з цих проміжків вираз $(x - a_1)(x - a_2)$ ... $(x - a_n)$ має постійний знак. Тому досить вказати знак виразу в одній з точок проміжку, щоб визначити його знак на всьому проміжку.

Визначаючи знак виразу на кожному проміжку, ми вибираємо ті з них, на яких цей вираз додатній. Їх об'єднання і є множиною розв'язків нерівності. Для того, щоб зробити це міркування більш наочним, креслять криву, яка йде вище осі абсцис, там, де заданий вираз додатній, і нижче, там, де він від'ємний. Цю лінію називають кривою знаків.

Наприклад:

Розв'язати нерівність:

$(x + 6)(x - 1)(x - 3)(x - 5) > 0.$

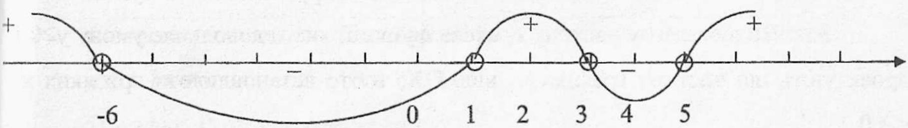


Рис.1. Зображення застосування методу інтервалів

$x \in]-\infty; -6[$ нехай $x = -10 \Rightarrow (-) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-) > 0;$

$x \in]-6; 1[$ нехай $x = 0 \Rightarrow (+) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-) < 0;$

$x \in]1; 3[$ нехай $x = 2 \Rightarrow (+) \cdot (+) \cdot (-) \cdot (-) > 0;$

$x \in]3; 5[$ нехай $x = 4 \Rightarrow (+) \cdot (+) \cdot (+) \cdot (-) < 0;$

$x \in]5; +\infty[$ нехай $x = 6 \Rightarrow (+) \cdot (+) \cdot (+) \cdot (+) > 0.$

Відповідь: $x \in]-\infty, -6[\cup]1, 3[\cup]5, +\infty[$.

Особливий інтерес і труднощі викликають квадратні нерівності виду:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Їх розв'язують так:

Спосіб 1:

Розглядають квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, знаходять його корені x_1 і x_2. Після цього записують квадратний тричлен у такому вигляді:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння. Розглядають замість нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ нерівність:

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0$, якщо $a > 0$ і

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) < 0$, якщо $a < 0$, які розв'язують методом інтервалів.

Спосіб 2:

Розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c \geq 0$.

1. Розв'язують рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Якщо $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$, де x_1 і x_2 корені рівняння

Якщо $D = 0$, то $x_1 = x_2$

Якщо $D < 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має розв'язків.

2. Розглядають функцію $y = ax^2 + bx + c$ і будують схематично її графік.

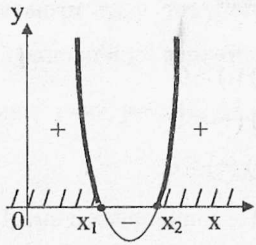
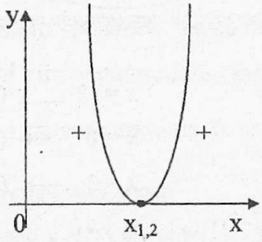
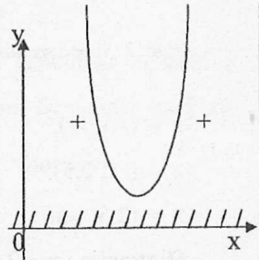
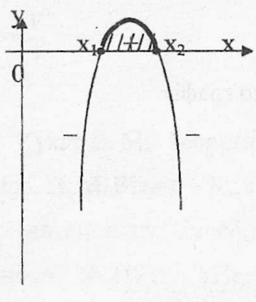
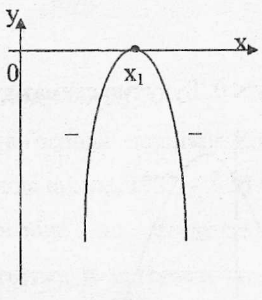
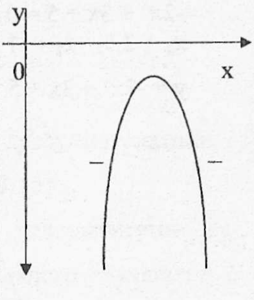
Якщо $a > 0$, то гілки параболи спрямовані вгору, якщо $a < 0$ – униз.

3. Виділяють ту частину графіка функції, яка задовольняє умову $y \geq 0$ і проектують цю частину графіка на вісь OX, тобто встановлюють при яких x, $y \geq 0$.

4. Записують утворені проміжки, які і будуть розв'язком нерівності: $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Складемо таблицю, яка ілюструє наші міркування для нерівності: $ax^2 + bx + c \geq 0$

Таблиця 1.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	$x \in]-\infty; x_1[\cup [x_2; +\infty[$ 	$x \in R$ 	$x \in R$ 
$a < 0$	$x_1 \le x \le x_2$ 	$x \in \{x_1\}$ 	$x \in \varnothing$ 

Самостійно складіть схеми-таблиці для розв'язування нерівностей:

$ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати нерівність:

$-2x^2 + 3x + 5 < 0$.

<u>Спосіб 1:</u>

$-2x^2 + 3x + 5 = 0$

$2x^2 - 3x - 5 = 0$

$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49$

$x_1 = \frac{3+7}{4} = 2{,}5;\ x_2 = \frac{3-7}{4} = -1.$

$-2x^2 + 3x + 5 = -2\ (x - 2{,}5)\cdot (x + 1)$

$(-2x^2 + 3x + 5 < 0) \longleftrightarrow (-2(x - 2{,}5)\cdot (x + 1) < 0) \longleftrightarrow ((x - 2{,}5) \cdot (x + 1) > 0).$

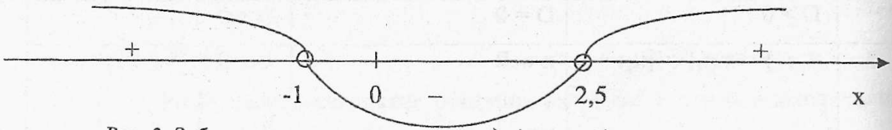


Рис. 2. Зображення застосування методу інтервалів

$x \in (-\infty; -1)$, $x = -3 \longrightarrow (-)\cdot(-) > 0$;

$x \in (-1; 2{,}5)$, $x = 0 \longrightarrow (-)\cdot(+) < 0$;

$x \in (2{,}5; \infty)$, $x = 3 \longrightarrow (+)\cdot(+) > 0$.

Відповідь: $x \in\ ]-\infty; -1[\ \cup\ ]\ 2{,}5; +\infty[$.

Спосіб 2.

$-2x^2 + 3x + 5 < 0$,

$-2x^2 + 3x + 5 = 0$

$x_1 = 2{,}5$; $x_2 = -1$

$y = -2x^2 + 3x + 5$, $y < 0$. Будуємо схематично графік

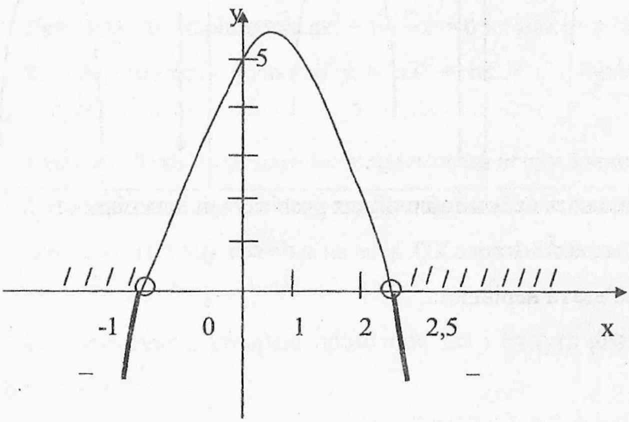


Рис. 3. Зображення розв'язання нерівності графічним способом

Відповідь: $x \in\ ]-\infty; -1[\ \cup\ ]2{,}5; +\infty[$.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 14

ТЕМА: Дослідження властивостей функцій методами елементарної математики: пряма і обернена пропорційні залежності, лінійна функція. Їх властивості і графіки

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти поняття* прямої і оберненої пропорційної залежності між величинами; *вміти* будувати графіки функцій виду: y=kx, y=kx+b, y= $\frac{k}{x}$ і характеризувати їх властивості.

План вивчення теми

1. Пряма пропорційність. Графік функції y=kx. Властивості функції.
2. Лінійна функція, її властивості і графік.
3. Обернена пропорційна залежність. Графік і властивості функції виду: y= $\frac{k}{x}$.

Література

1. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, П. М. Білий. – К.: Вища школа, 1987. – С. 143-151.
2. Математика: [учеб.пособие для студентов пед.институтов по специальности № 2121 – «Педагогика и методика начального обучения»] / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – С. 144-147.
3. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – С. 101-103; С. 269-277.
4. Додаток до самостійної роботи № 14.

Методичний коментарій та завдання

При вивченні *першого питання* необхідно на конкретних прикладах проілюструвати пряму пропорційну залежність між величинами. Задати цю залежність аналітично, побудувати графік функції. За допомогою графіка вивчити властивості цієї функції. Засвоєння змісту цього питання необхідно перевірити, виконуючи такі завдання:

Завдання № 1. Указати серед наступних функцій, які задані табличним способом, пряму пропорційну залежність:

Таблиця 1.

x	2	4	6	8	10
y	14	28	42	56	70

Таблиця 2.

x	1	2	3	4	5
y	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Таблиця 3.

x	1	2	3	4	5
y	-3	$-\frac{2}{3}$	-9	$-\frac{4}{3}$	-15

Запишіть їх в аналітичній формі завдання функції.

Завдання № 2. Побудувати графіки функції $y = -\frac{1}{2}x$ і $y = 2x$ та визначити вид монотонності цих функцій на множині R.

Завдання № 3. Сторони прямокутника 6 см і x см. Площа цього прямокутника у $см^2$. Запишіть формулу, яка висловлює залежність площі цього прямокутника від довжини сторони. Побудуйте графік цієї залежності при умові, що $x \le 8$.

Завдання № 4. Маса одного олівця дорівнює 1,5 г. Позначте масу x олівців через y (в грамах) і побудуйте графік визначеної залежності при умові, що $x \le 4$.

Завдання № 5. Проаналізуйте програму з математики для початкової школи і встановіть: чи вивчають діти в початковій школі пряму пропорційну залежність. Якщо так, то при вивченні яких тем (випишіть) і в яких конкретно класах. Наведіть приклади конкретних задач зі шкільних підручників математики для початкової школи, при розв'язуванні яких учні зустрічаються з прямою пропорційною залежністю між величинами.

Вивчаючи *друге питання* теми, зверніть увагу на чітке визначення лінійної функції, її графік. Установіть, як залежить розташування прямої на площині від значень k і b. Вивчіть властивості цієї функції по її графіку, а властивості монотонності функції обґрунтуйте через значення коефіцієнта k.

Якість засвоєння змісту цього питання перевірте, виконуючи такі завдання:

Завдання № 6. Побудуйте графік функції $y=2x+3$ при умові, що її областю визначення є:

1) R; 2)[-3;2]; 3){-2, -1, 0, 1, 2, 3}.

Завдання № 7. Знайдіть коефіцієнт k i b, якщо функція задана формулою:

1)$x - 2y = -3$;

2) $2x - 3y = 10$;

3) $x - 3y = 0$.

Завдання № 8. Залежність вартості (y) телеграми від числа слів (x) у ній виражається формулою $y = 5x + 20$. Підрахуйте вартість телеграми при таких значеннях x:

Таблиця 4.

x (слів)	10	16	25	30
y (к.)				

Яка область визначення даної залежності, якщо вартість телеграми не перевищує 10 грн. 20 к.?

При вивченні *третього питання* теми, дайте загальний підхід до визначення поняття оберненої пропорційної залежності між величинами x, y, z. Наведіть конкретний приклад такої залежності між величинами в шкільному курсі математики. Сформулюйте означення оберненої пропорційної залежності, побудуйте її графік, вивчіть властивості.

Засвоєння даного матеріалу перевірте розв'язанням таких завдань:

Завдання № 9. Укажіть серед наступних функцій, заданих табличним способом, обернену пропорційну залежність:

Таблиця 5.

x	1	2	4	10	40
y	20	10	5	2	0,5

Таблиця 6.

x	2	-4	-3	6	12
y	6	3	4	-2	-1

Таблиця 7.

x	1	3	4	6	8
y	-1	-5	-7	-11	-15

Запишіть її аналітичним виразом.

Завдання № 10. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{x}$ при умові, що її областю визначення є:

а) множина R; в) [1; 6];

б)]0; +∞[; г) {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Завдання № 11. З'ясуйте, яка залежність існує між величинами, які задані в задачі, і розв'яжіть її:

а). Велосипедист їхав зі швидкістю 12 км/год і був у дорозі 2 години. Скільки часу потрібно пішоходу, щоб пройти цю відстань зі швидкістю 4 км/год?

б). Два теслярі відремонтували стільців порівну. Перший тесляр працював 6 діб, ремонтуючи по 10 стільців за добу, а другий – 5 діб. По скільки стільців за добу ремонтував другий тесляр?

Примітка 1: Виконуючи завдання № 11, міркуйте так: у задачі розглядають три величини …, …, … . Одна з них, а саме …, постійна (чи
(назви їх) (назва)
приймає одне і теж значення) … . А дві інші знаходяться в … залежності,
(яке) (назва)

так як цю залежність можна виразити формулою …, де х – …, у – … .
(запиши)

Примітка 2: У початковій школі обернену пропорційну залежність спеціально не вивчають, але учні часто зустрічаються з цим поняттям, особливо у процесі розв'язування задач.

Завдання № 12. Використовуючи програму з математики для початкової школи і підручники для 3, 4 класів, наведіть конкретні приклади таких задач, при розв'язуванні яких діти зустрічаються з оберненою пропорційною залежністю і проведіть обґрунтування цієї залежності за схемою примітки 1.

ДОДАТОК ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ № 14

Поняття прямопропорційної і оберненопропорційної залежності між величинами. Лінійна функція. Властивості і графіки цих функцій

Як правило, процес, який описаний у текстових задачах, можна охарактеризувати за допомогою трьох величин. Ці величини пов'язані між собою так, що одна із них дорівнює добуткові двох інших. Наприклад, при купівлі товару: вартість – це добуток ціни на кількість: В = Ц · k; при рівномірному прямолінійному русі: відстань – це добуток швидкості на час руху: $S = v \cdot t$ та ін.

У загальному вигляді цю залежність математично записують так: $y = z \cdot x$, де x, y, z – величини.

Якщо одна із величин (що є співмножником) z або x приймає постійне значення, то залежність між y і x (z = const) називається прямо- пропорційною і записується так: $y = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності. Для всіх пар значень x і y відношення $\frac{y}{x} = k$ і є величина постійна.

Якщо постійною є величина у (що є добутком), то залежність між z і x має обернено пропорційний характер і записується так: k = z·x, звідки $z = \frac{k}{x}$ або $x = \frac{k}{z}$.

Наведемо приклади таких видів залежностей. За кожен метр тканини треба заплатити 20 грн. (це ціна тканини, вона – постійна величина). Скільки грошей треба заплатити за 3 м, 5 м, 10 м, 15 м, 20 м, 30 м такої тканини? Позначимо у (грн.) вартість покупки, k=20, x(м) – кількість купленої тканини, тоді залежність між у і x запишемо так: у = 20x. Складаючи таблицю значень зміни у від x, бачимо: що із збільшенням значення x (кількості) значення у (вартості) теж збільшується, а їх відношення $\frac{y}{x}$ є постійне число – 20.

Таблиця 8.

x	3	5	10	15	20	30
у	60	100	200	300	400	600

$\frac{60}{3} = \frac{100}{5} = \frac{200}{10} = \frac{300}{15} = \frac{400}{20} = \frac{600}{30} = 20$ – постійна величина. Це є приклад прямо пропорційної залежності.

Уявляємо іншу ситуацію при покупці тканини. У Вас є у гаманці 1200 грн. Ви обираєте тканину за такою ціною: 20 грн., 30 грн., 40 грн., 60 грн., 100 грн., 200 грн. Скільки метрів тканини Ви можете купити в кожному випадку? Як змінюється залежність купленої кількості тканини від ціни? Покажемо це у вигляді такої таблиці, де x (грн.) – ціна тканини, у (м) – кількість купленої тканини, k=1200 – постійна величина (вартість тканини). Звідки $y = \frac{1200}{x}$.

Таблиця 9.

x	20	30	40	60	100	200
у	60	40	30	20	12	6

$20 \cdot 60 = 30 \cdot 40 = 40 \cdot 30 = 60 \cdot 20 = 100 \cdot 12 = 200 \cdot 6 = 1200$ є постійна величина. Це – приклад оберненої пропорційної залежності.

Графіком функції $y = kx$ є пряма, яка проходить через початок координат і має такі властивості:

1. $Д(y) = R$ – область визначення;
2. $E(y) = R$ – множина значень;
3. $y = kx$ – неперервна на $Д(y)$;
4. $y = kx$ – зростаюча ($k>0$) і спадна ($k<0$);
5. $y = kx$ – необмежена на $Д(y)$;
6. $y = kx$ – непарна на $Д(y)$, графік симетричний відносно початку координат.

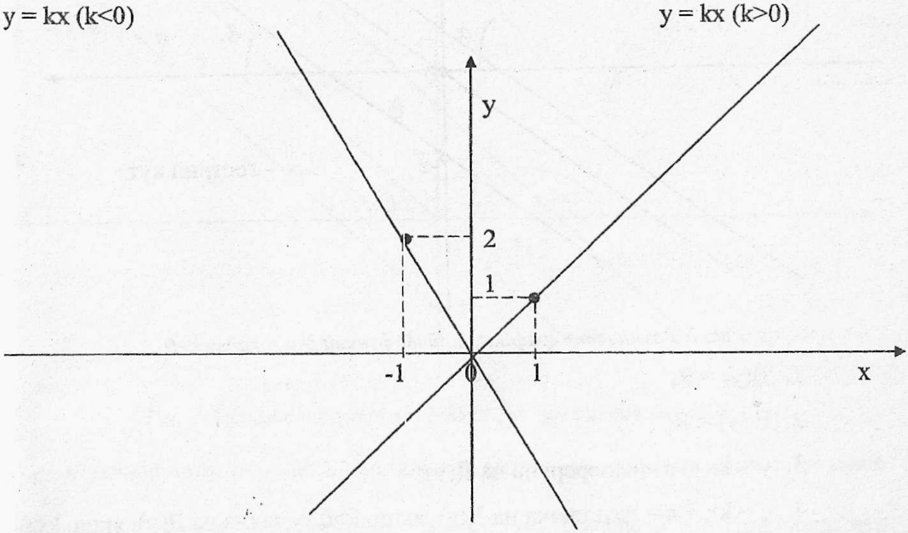


Рис. 1. Графік функцій прямої пропорційної залежності

Функція $y = kx$ є окремим випадком функції $y = kx + в$, яка називається лінійною функцією, де x – незалежна змінна, y – залежна змінна. k і в – числа, k – називається кутовим коефіцієнтом лінійної функції. Для визначення його поступають так: вибирають дві точки, які належать графіку цієї функції: A $(x_1;y_1)$ і B $(x_2; y_2)$. Якщо точки належать графіку, то їх координати задовольняють рівняння, яким задана функція: $y_1=kx_1+в$ (1) і $y_2=kx_2 + в$ (2). Звідки $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Графіком лінійної функції $y = kx + в$ є пряма, яка перетинає вісь оу в точці (0; в), а вісь ох в точці ($-\frac{b}{k}$; 0). Якщо $k>0$, то пряма утворює з віссю ох гострий кут, якщо $k<0$ – то тупий кут. Функція $y = kx + в$ має такі властивості:

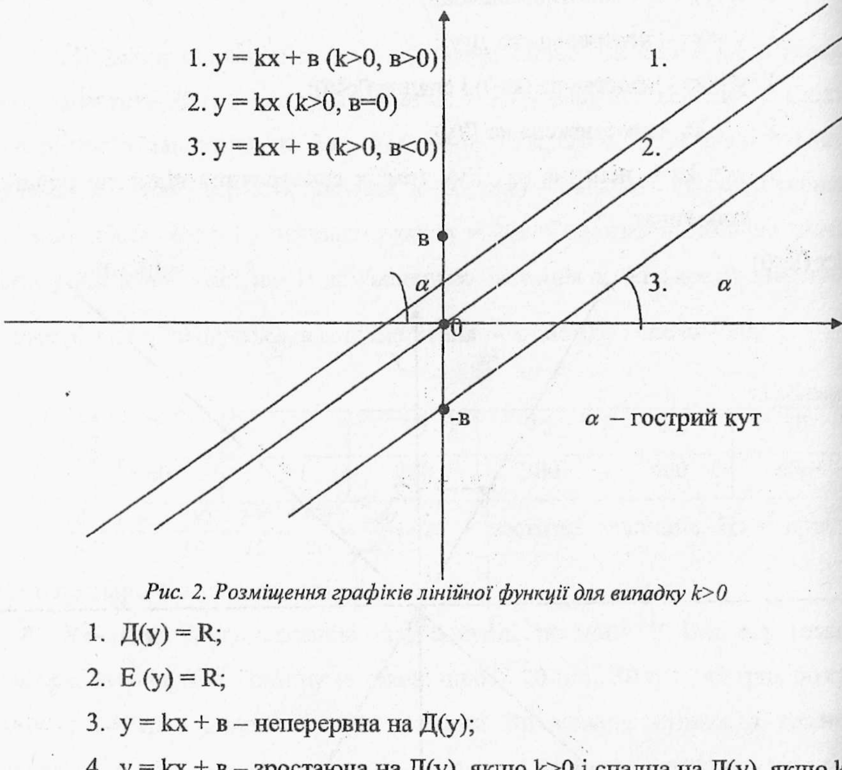


Рис. 2. Розміщення графіків лінійної функції для випадку k>0

1. Д(у) = R;
2. Е (у) = R;
3. $y = kx + в$ – неперервна на Д(у);
4. $y = kx + в$ – зростаюча на Д(у), якщо $k>0$ і спадна на Д(у), якщо $k<0$.
5. Точки перетину з осями координат: ОХ ($-\frac{b}{k}$; 0); ОУ (0; в).
6. $y = kx + в$ – необмежена на Д(у).

Докажемо, що $y = kx + в$ ($k<0$) – спадна на Д(у). Для цього виберемо два довільні значення x_1 і x_2 з Д(у), причому $x_2>x_1$ і знайдемо відповідні їм значення функції $y_1= kx_1+в$ і $y_2=kx_2+в$, порівняємо їх на основі знаходження різниці: $y_2-y_1=(kx_2+в)-(kx_1+в)= kx_2- kx_1+в-в=k(x_2- x_1) <0$.

За умовою: $x_2>x_1$, тому $x_2- x_1>0$ а $k<0$, тому добуток $k(x_2- x_1) <0$. Отже, $y_2-y_1<0$. А це значить, що $y_2< y_1$. Ми бачимо, що для довільних значень, x є

Д(у), $x_2 > x_1$ (більшому значенню аргументу) відповідає менше ($y_2 < y_1$) значення функції. А це за означенням означає, що функція у = kx + в є спадна (див.рис.3).

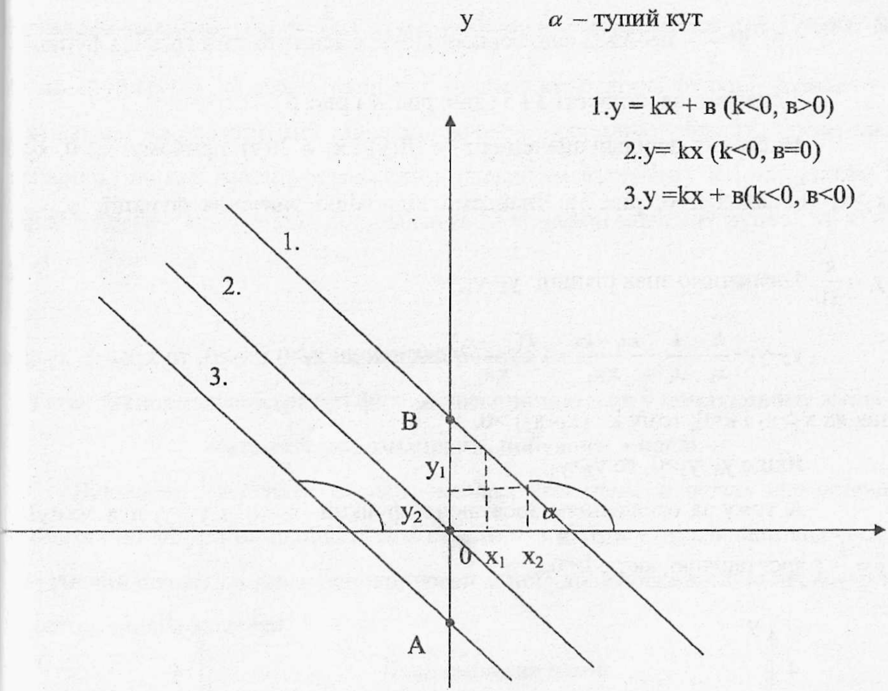


Рис. 3.Зображення графіків лінійної функції для випадку k<0

Функція виду у=$\frac{k}{x}$, де х – незалежна змінна, у – залежна змінна, k= const називається обернено пропорційною залежністю. Графіком її є гіпербола, яка розміщена в першому і третьому координатних кутах, якщо k>0 і в другому і четвертому – якщо k<0. Функція у=$\frac{k}{x}$ має такі властивості:

1. Д(у)=R, крім х=0;
2. Е(у)=R, крім у = 0;
3. у=$\frac{k}{x}$ – зростаюча, якщо k<0, і спадна, якщо k>0;
4. у=$\frac{k}{x}$ – неперервна на Д(у);

5. $y=\frac{k}{x}$ – непарна на Д(у), її графік симетричний відносно початку координат;

6. $y=\frac{k}{x}$ – необмежена, осі координат є асимптотами графіка функції.

Доведемо властивості 3 і 5 (див. рис. 4 і рис. 5).

Виберемо довільні значення $x_2 \in$ Д(у) і $x_1 \in$ Д(у), причому: $x_1>0$, $x_2>0$ і $x_2>x_1$ (випадок $k<0$, рис. 5). Знайдемо відповідні значення функції: $y_2=\frac{k}{x_2}$ і $y_1=\frac{k}{x1}$. Визначимо знак різниці: y_2-y_1.

$y_2-y_1=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1-kx_2}{x_1x_2}=\frac{k(x_1-x_2)}{x_1x_2}>0$, так як $x_1>0$ і $x_2>0$, то $x_1x_2>0$; $x_1-x_2<0$ так як $x_2>x_1$ і $k<0$, тому $k\cdot(x_1-x_2)>0$.

Якщо $y_2-y_1>0$, то $y_2>y_1$.

А тому за означенням зростаючої функції ($x_2>x_1$ і $y_2>y_1$ для $\forall x\in$ Д(у)) $y=\frac{k}{x}$ є зростаючою, якщо $k<0$.

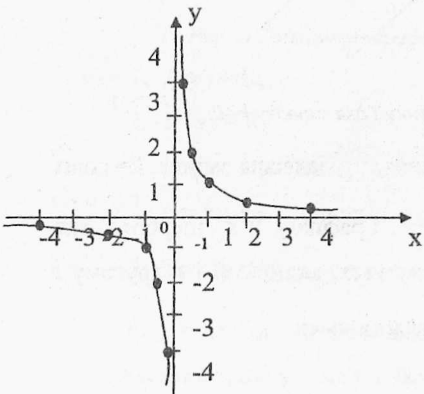


Рис. 4. Зображення гіперболи (k>0)

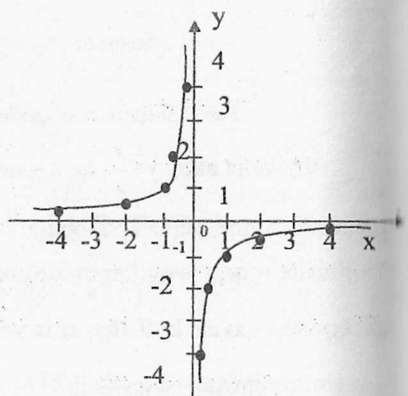


Рис. 5. Зображення гіперболи (k<0)

Аналогічно для випадку, коли $x_1<0$, $x_2<0$, $x_2>x_1$ вираз $y_2-y_1>0$, і функція $y=\frac{k}{x}$ теж буде зростаючою (див.рис.5).

Для доведення властивості 5 виберемо два значення аргументу х і (-х) із Д(у) = (-∞; 0) ∪ (0; +∞), яка є симетричною відносно початку координат. Знайдемо для k>0 $y(x) = \frac{k}{x}$ і $y(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x}$. Порівняємо у(х) і у(-х). Як бачимо, у(-х) = -у (х), що задовольняє означенню непарної функції: функція у = f(x) задана на симетричній відносно початку координат області, називається непарною на ній, якщо протилежним значенням аргументу х і –х, узятим із області визначення функції, відповідають протилежні значення функції у(-х) = -у(х).

Самостійна робота № 15

Тема: Основні геометричні фігури, які вивчаються у початковому курсі математики: означення, побудова, моделі.

Вивчаючи дану тему, студент *повинен узагальнити знання* про основні геометричні фігури на площині та в просторі, з якими учні ознайомлюються в початковій школі; *засвоїти* основні правила побудови зображень таких фігур та виготовлення їх моделей.

План вивчення теми

1. Неозначувані і означувані геометричні фігури, які вивчаються в початковому курсі математики: точка, пряма, площина, відрізок, промінь, лінія, крива, ламана, многокутник (трикутник, прямокутник, квадрат), кут, коло, круг, сектор, сегмент, дуга.

2. Основні стереометричні фігури, з якими ознайомлюються молодші школярі: призми, піраміди, круглі тіла.

Література

1. Истомина Н. Б. Методика обучения математике в начальных классах: [учеб. пособие для студ. сред. и высш. пед. учеб. заведений] / Н. Б. Истомина. – М.: Издательский центр «Академия», 2000. – С. 149-163.

2. Погорєлов О. В. Геометрія. Планіметрія: [підручн. для 7-9 кл. середн. шк.] / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1997.– С. 67-74.

3. Симановский А. Э. Развитие пространственного мышления ребенка/ А. Э. Симановский. – М.: Рольф, 2000.- 160 с.

4. Тадеєв В. О. Шкільний тлумачний словник: [довідник з математики]/ В. О. Тадеєв.– Тернопіль: «Навчальна книга–Богдан»,1999.-160 с.

5. Цукарь А. Я. Уроки развития воображения/ А. Я. Цукарь. – М.: Рольф, 2000.-208 с.

Методичний коментарій та завдання

Для засвоєння означень і вивчення властивостей основних планіметричних фігур, як цього вимагає *перше питання* плану, доцільно скласти тезаурус, використовуючи літературу за № 2 і № 4. З метою свідомого засвоєння матеріалу доцільно законспектувати означення перелічених фігур у цьому питанні плану і паралельно побудувати їх зображення.

Перевірити засвоєння матеріалу необхідно у процесі виконання таких завдань.

Завдання № 1. Порівняйте означення таких геометричних фігур, як коло і круг. Накресліть їх зображення. Опишіть та накресліть такі частини круга як: круговий сегмент, круговий сектор.

Завдання № 2. Охарактеризуйте запропоновану схему на рис. 1. Сформулюйте означення кожного виду трикутника за поданою схемою.

Рис. 1. Класифікація видів трикутників

Завдання № 3. Використовуючи схему на рис. 2, проаналізуйте запропоновані нижче означення чотирикутників. Чи правильні вони?

Означення 1: Квадрат – це чотирикутник, у якого всі сторони рівні.

Означення 2: Квадрат – це ромб, у якого всі кути прямі.

Означення 3: Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Означення 4: Квадрат – це паралелограм, у якого всі сторони рівні і всі кути прямі.

Означення 5: Квадрат – це ромб, у якого хоч один кут прямий.

Означення 6: Квадрат – це паралелограм, у якого всі сторони рівні і хоч один кут прямий.

Означення 7: Квадрат – це такий чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні і всі кути прямі.

Виберіть серед цих означень те, яке найбільш зрозуміле учневі початкових класів. Які б із цих означень Ви запропонували учням початкових класів?

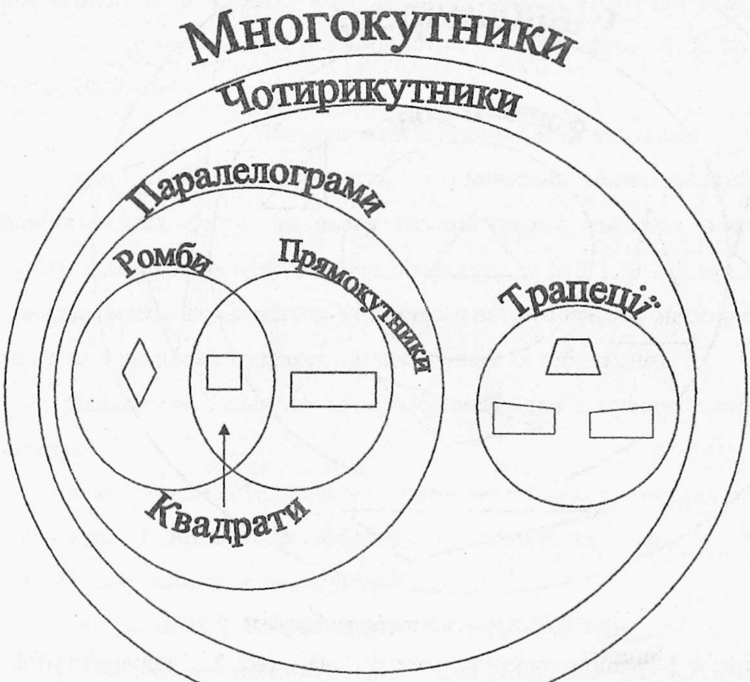


Рис. 2 Класифікація чотирикутників

Завдання № 4. Серед перерахованих назв фігур підкресліть ті назви, які відповідають фігурі, зображеній на рис. 3: прямий кут, многокутник, трикутник, чотирикутник, квадрат, прямокутник.

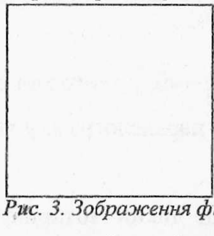


Рис. 3. Зображення фігури

Для засвоєння змісту матеріалу *другого питання* плану повторіть означення різних видів призм, пірамід та круглих тіл, які відомі Вам із шкільного курсу стереометрії. Виділіть із призм підмножину паралелепіпедів і, зокрема прямокутних. Вивчіть детально їх властивості та означення і властивості куба. З'ясуйте, що Вам відомо про розгортки цих фігур і яка роль розгорток куба в обчисленні площі його поверхні. Виконайте такі завдання.

Завдання 5. Побудуйте різні розгортки куба. Скільки різних розгорток куба Ви можете побудувати? Як за допомогою розгортки куба можна встановити формули для обчислення бічної і повної поверхні куба?

Завдання 6. Перед Вами одна із розгорток куба, зображеного на рис. 4. Запропонуйте ще принаймні дві розгортки цього ж куба .

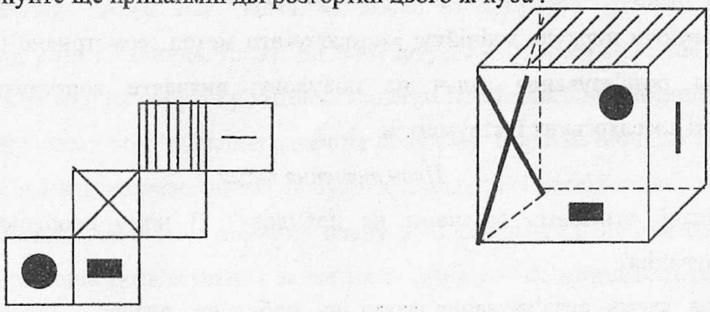


Рис. 4 Зображення куба та його розгортки

Завдання 7. Опишіть означення кулі та її частин: кульового сегмента, кульового сектора, кульового шару. Що собою уявляє поверхня кулі? Як вона називається? Як її обчислити?

Завдання 8. Побудуйте зображення, накресліть розгортку та виготовить модель однієї із запропонованих Вам фігур: похила призма, пряма призма, прямокутний паралелепіпед, правильна піраміда, неправильна піраміда, зрізана піраміда, циліндр, конус, куля. Правильні многогранники: тетраедр, гексаедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр. Опишіть властивості обраної Вами фігури.

Самостійна робота № 16

Тема: Розв'язування задач на побудову на площині за допомогою циркуля і лінійки в шкільному курсі математики

Вивчаючи дану тему, студент повинен *усвідомити* роль геометричних побудов у шкільному курсі математики. Студент повинен *знати*: в чому полягає сутність задач на побудову та особливості їх розв'язування; правила побудови основних геометричних фігур на площині у відповідності до програми з математики за курс середньої школи.

Студент повинен вміти: розв'язувати задачі на побудову на площині, використовуючи циркуль і лінійку; застосовувати метод геометричного місця точок для розв'язування задач на побудову; виявляти конструкторські можливості креслярських інструментів.

План вивчення теми

1. Які задачі називають задачами на побудову? В чому особливість їх розв'язування?
2. Загальна схема розв'язування задач на побудову: аналіз – побудова – доведення – дослідження.
3. Геометричне місце точок як один із основних методів розв'язання задач на побудову в шкільному курсі математики.
4. Основні види задач на побудову в початковому курсі математики.

Література

1. Астряб О. М. Методика розв'язування задач на побудову / О. М. Астряб, О. С. Смогоржевський. – К.: Радянська школа, 1960. – 216 с.

2. Король Я. А. Формування практичних умінь і навичок на уроках математики / Я. А. Король. – Тернопіль: «Навчальна книга–Богдан», 2000. – С. 104-115.

3. Методика викладання математики: [практикум] /За заг. ред. Г. П. Бевза. – К.: Вища школа, 1981. – С. 161-171.

4. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: [підручник для 7-9 кл. серед.шк.] / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1997. – С. 67-74.

5. Програми для середньої загальноосвітньої школи. 1-4 класи: К.: «Початкова школа», 2006. – 432 с. (Математика. – С. 161-186).

6. Седеревічене А. Елементи геометрії (3-4 кл.). Програми курсів за вибором для загальноосвітніх навчальних закладів. Варіативна складова Типових навчальних планів. 1-4 класи / Упор.: Л. Ф. Щербакова, Г. Ф. Древаль. – Тернопіль: Мандрівець, 2009. – С. 164-169.

Методичний коментарій та завдання

Готуючи відповідь на *перше* та *друге питання* плану, зверніть увагу на характеристику такого виду задач, як задачі на побудову. В чому полягає робота над розв'язуванням задачі на побудову? Як Ви розумієте завдання – розв'яжіть задачу на побудову? Щоб відповісти на ці запитання зверніть увагу на загальну схему розв'язування задач на побудову. Коротко опишіть кожен із етапів роботи над задачею: аналіз, побудова, доведення і дослідження.

Відповідь на *третє питання* плану доцільно подати описом одного із основних методів розв'язування задач на побудову – це метод геометричних місць точок (ГМТ) або метод перетину фігур (у літературі цей метод називають по-різному). Навести приклади основних ГМТ таких як коло, круг, множину точок рівновіддалених від кінців відрізка, множину точок рівновіддалених від сторін кута.

Розв'яжіть такі основні задачі на побудову з усним поясненням:

Задача № 1. Побудуйте серединний перпендикуляр до заданого відрізка.

Задача № 2. Побудуйте за допомогою циркуля і лінійки кут, рівний даному.

Задача № 3. Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин за допомогою циркуля і лінійки.

Задача № 4. Побудуйте пряму перпендикулярну заданій: в точці, що лежить на заданій прямій; яка проходить через точку, що не лежить на заданій прямій.

Розв'яжіть наступні задачі на побудову за загальною схемою: аналіз – побудова – доведення – дослідження.

Задача № 5. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, що лежить проти меншої із них.

гез

Задача № 6. Побудуйте прямокутник за двома заданими сторонами за допомогою циркуля і лінійки.

Для з'ясування відповіді на *четверте питання* плану опрацюйте рекомендовану літературу за номером 5, 6. Випишіть основні види задач на побудову, які повинні вміти розв'язувати учні початкових класів.

Розв'яжіть такі основні задачі на побудову для учнів початкових класів і запишіть пояснення до побудови.

Задача № 7. Поділіть відрізок пополам за допомогою циркуля і лінійки.

Задача № 8. Побудуйте бісектрису заданого кута за допомогою циркуля і лінійки.

Задача № 9. Побудуйте трикутник за трьома сторонами. Дослідження питання про можливість побудови трикутника, в залежності від співвідношення довжин заданих відрізків, проведіть за допомогою кольорових смужок: зелені – сума довжин двох відрізків більша за довжину третього; червоні – сума довжин двох відрізків менша за довжину третього; жовті – сума довжин двох відрізків дорівнює довжині третього.

Задача № 10. Побудуйте прямокутник із сторонами 3см і 4см за допомогою косинця. Виділіть основні елементарні операції, які повинен уміти виконати учень.

Самостійна робота № 17

Тема: Розв'язування задач на доведення. Пропедевтика доведень математичних тверджень у початковому курсі математики

Вивчаючи дану тему, студент повинен *засвоїти* математичну сутність і структуру задач на доведення.

Студент повинен знати: основні методи доведення математичних тверджень; правила виведення, на основі яких будуються правильні міркування; основні методи обґрунтування тверджень, які доступні молодшим школярам.

Студент повинен вміти: розв'язувати задачі на доведення; виявляти і обґрунтовувати правильні і неправильні міркування; використовувати круги Ейлера для виявлення помилок в умовиводах; застосовувати окремі схеми правильних дедуктивних міркувань, які доступні молодшим школярам.

План вивчення теми

1. Загальні методи побудови правильних умовиводів – правила виведення (логічні закони).
2. Приклади правильних і неправильних міркувань. Виявлення помилок в умовиводах за допомогою кругів Ейлера.
3. Основні методи доведення математичних тверджень:
   - універсальний метод;
   - аналітичний і синтетичний способи доведення;
   - метод вичерпування або повної індукції;
   - метод доведення від супротивного.
4. Розв'язування соритів.
5. Окремі схеми правильних дедуктивних міркувань у задачах на доведення, які доступні молодшим школярам.

Література

1. Бурда М. Пропедевтика доведень у початкових класах / М. Бурда, М. Богданович, Ю. Набочук // Початкова школа. – 1999. – № 11. – С. 6-11.

2. Гільбух Ю. З. Розумово обдарована дитина. Психологія, діагностика, педагогіка / Ю. З. Гільбух. – К.: РОВО «Укрвузполіграф», 1992. – С. 75-76.

3. Кухар В. М. Математика., Множини. Логіка. Цілі числа: [практикум] / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. – К.:Вища школа,1989. – С. 128-155.

4. Митник О. Я. Логіка на уроках математики. Методика роботи над завданнями з логічним навантаженням у курсі математики початкових класів / О. Я. Митник. – К.: Початкова школа, 2004. – С. 68-72.

Методичний коментарій та завдання

Вивчаючи зміст *першого питання* плану, Вам необхідно засвоїти основні правила правильних міркувань: правило відокремлення або правило висновку; правило підстановки та правила виведення, які виділяють на основі законів логіки висловлень:

$((A \to B) \wedge (A \to C)) \leftrightarrow (A \to (B \wedge C))$;

$((A \to C) \wedge (B \to C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \to C)$;

$((A \to B) \wedge (B \to C)) \leftrightarrow (A \to C)$ – правило силогізму;

$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$ – закон контрапозиції;

$((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$ – заперечливий модус – modus tollens,

та найпростіші закони заперечення:

$\overline{\overline{A}} \equiv A$; $A \vee \overline{A} \equiv I$; $A \wedge \overline{A} \equiv X$; $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$

Ознайомившись з прикладами правильних і неправильних міркувань , поданих на С. 129-131 рекомендованого джерела [3], виконайте завдання№1.

Завдання № 1. Обґрунтуйте, чи є міркування правильне чи ні, посилаючись на правила виведення та використовуючи круги Ейлера.

Випадок 1: Істинні посилки:

А: Усі студенти нашого факультету займаються спортом.

В: Дмитро – студент нашого факультету.

Висновок С: Дмитро займається спортом.

Випадок 2: Істинні посилки:

А: Усі студенти нашого факультету займаються спортом.

В: Костя займається спортом

Висновок С: Костя – студент нашого факультету.

Випадок 3: Істинні посилки:

А: Усі студенти нашого факультету займаються спортом.

В: Василь не студент нашого факультету.

Висновок С: Василь не займається спортом.

Випадок 4: Істинні посилки:

А: Усі студенти нашого факультету займаються спортом.

В: Михайло не займається спортом

Висновок С: Михайло не студент нашого факультету.

Завдання № 2. Запишіть схему міркування на основі такого діалогу, що відбувся між братом і сестрою, та з'ясуйте, чи правильне воно.

Брат сестрі: «Якщо я схожу до крамниці, то ти даси списати задачу».

Сестра брату: «В крамницю сходиш, а задачу списати не дам».

Завдання № 3. В олімпіаді юних математиків брало участь 6 учнів 3-го класу однієї школи: Альоша, Боря, Вася, Галя, Маша і Ніна. Із шести запропонованих задач Альоша розв'язав 4, Боря – 2, Вася – 1. Кожна із трьох дівчаток сиділа за однією партою з одним із трьох своїх однокласників. Галя розв'язала стільки задач, скільки учень, що сидів з нею, Маша у 2 р. більше за свого сусіда, а Ніна у 3 р. більше за свого сусіда. Хто з ким сидів за однією партою, якщо учні цієї школи розв'язали 18 задач?

Вивчаючи зміст *третього питання* плану, складіть короткий письмовий тезаурус по суті кожного, із запропонованих Вам методів доведення математичних тверджень, та проілюструйте використання деяких із них у процесі виконання наступних завдань.

Завдання № 4. Проілюструйте використання правила силогізму для доведення такої теореми: кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.

Завдання № 5. Проілюструйте використання правила виведення: $(A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$ для доведення такого твердження:

«Якщо хоч один із співмножників дорівнює нулю, то й добуток дорівнює нулю $((а=0) \vee (в=0)) \rightarrow (ав=0)$».

Завдання № 6. Проілюструйте аналітичний і синтетичний способи доведення на прикладі такої теореми: «Середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше їх середнього геометричного: $(\forall a \geq 0 \wedge \forall b \geq 0)(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab})$ ».

Завдання № 7. Доведіть методом повної індукції наступне твердження: «Добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3».

Завдання № 8. Використовуючи метод доведення від супротивного, доведіть таку теорему: «Не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2».

Вивчаючи зміст *четвертого пункту* плану ,з'ясуйте, що розуміють під назвою такого міркування як сорит. Відшукайте визначення його, наведіть приклади соритів, які доступні для роботи з молодшими школярами. Такі завдання часто пропонують учням на олімпіадах, на сторінках журналу «Квант» як задачі з логічним навантаженням.

Завдання № 9. Розв'яжи сорит, що має вигляд задачі-жарту:

Собаки з чорними хвостами
Собі вівсянку варять самі.
Всі інші, ніде правди діти,
Не знають, як її варити.
Всі, хто готує сам вівсянку,
Ідуть прогулюватись зранку.
Хто сам сніданку не готує,
На ганку на шматок чатує…
Всі, хто прогулюється рано,
Не люблять фальші і обману,
А ті, що ласі їсти й спати,
Не проти вдосталь побрехати.

Спокійна вдача у Рябка –

Він лиш сорок завжди ляка,

Бо цокотухи білобокі

Не вчать, а списують уроки.

Зведіть тепер логічний міст,

Який в рябка на колір хвіст?

Вивчаючи зміст *п'ятого питання* плану, Ви повинні використати рекомендоване джерело інформації [4], а також знати, що у зв'язку з уведенням курсу «Логіка» в 2-4 класах за рахунок варіативної частини навчального плану початкової школи (рекомендовано МОНМС України) учні мають чітке уявлення про умовивід, а саме – три судження: два судження, які є первісними, і судження – висновок, узяті разом, називаються умовиводом. Учнів доцільно ознайомити з такими чотирма (залежно від місця розташування спільного терміна) схемами умовиводів. Позначимо терміни-поняття буквами латинського алфавіту: А, В, С. Нехай у кожному первісному судженні по два терміни, один із них, термін В, є в обох первісних судженнях. Висновок будемо писати після риски.

Схема 1: В ---------- А

С ---------- В

С ---------- А

Наприклад: Усі прямокутники – геометричні фігури

Усі квадрати – прямокутники

Усі квадрати – геометричні фігури

Схема 2: А ---------- В

С ---------- В

С ---------- А

Наприклад: Усі квадрати – прямокутники

Деякі геометричні фігури не прямокутники

Деякі геометричні фігури не квадрати

Схема 3: В ---------- А

В ---------- С

С ---------- А

Наприклад: Усі прямокутники – геометричні фігури

Деякі прямокутники – квадрати

Усі квадрати – геометричні фігури

Схема 4: А ---------- В

В ---------- С

С ---------- А

Наприклад: Усі квадрати – геометричні фігури

Деякі геометричні фігури не прямокутники

Деякі прямокутники – не квадрати

Завдання № 10. Складіть чотири умовиводи, використовуючи такі терміни: числа, парні числа; числа, які діляться на два.

Для цього виділіть спочатку спільний термін-поняття, який буде у двох судженнях. Доберіть до першого і другого судження слова «всі», «деякі» так, щоб складене судження було істинне. Визначте поняття-термін, який треба використати у судженні-висновку, і запишіть умовивід (див.схеми 1-4).

Завдання № 11. Знайдіть помилки в побудові таких умовиводів:

а) Усі прямокутники – чотирикутники

Ця геометрична фігура – чотирикутник

Ця геометрична фігура – прямокутник

б) Усі прямокутники – чотирикутники

Ця геометрична фігури – не є прямокутником

Ця геометрична фігура не є чотирикутником

Виправте помилки: побудуйте умовивід правильно.

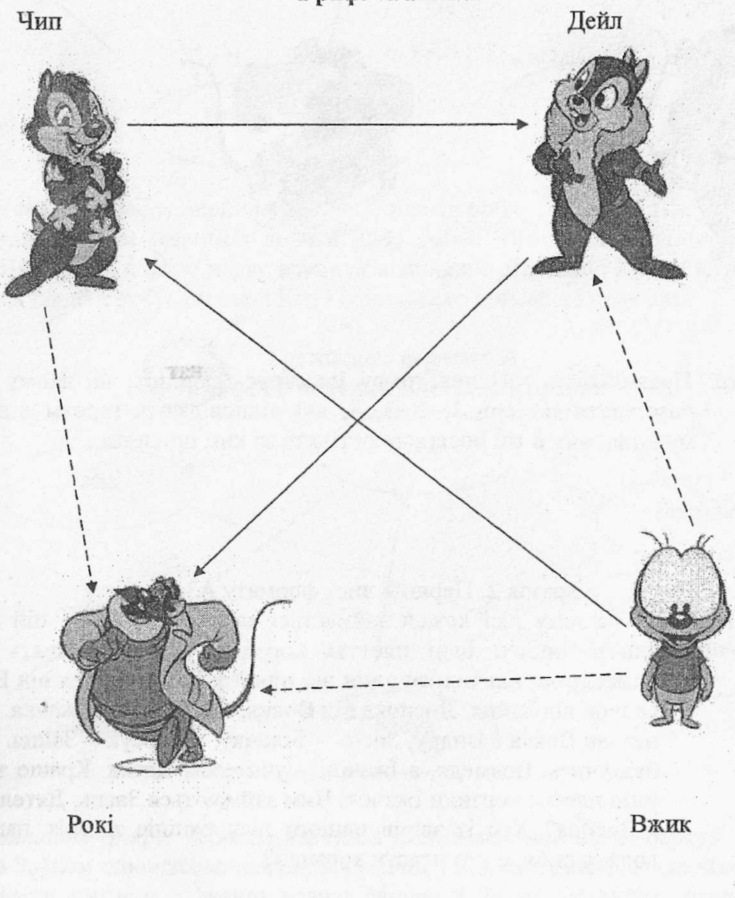
Зразок виконання навчально-творчого завдання № 1: Використання графів для розв'язування задач на відношення у початковому курсі математики

Зразок 1: Перший лист формату А3

Умова задачі: На день народження до Гайки прийшли друзі. Чип прийшов раніше за Дейла. Рокі пізніше, ніж Дейл, а Вжик прилетів раніше, ніж прийшов Чип. Хто з друзів прийшов першим, а хто останнім?

Другий лист формату А3

Граф: «Раніше»



Третій лист формату А3

2

3

1

4

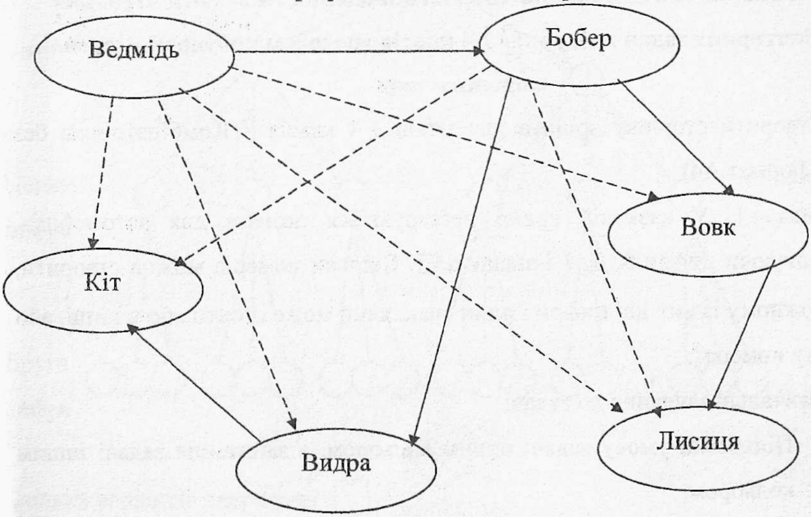
Примітка: Правильність читання графу ілюструє малюнок, на якому треба розставити номери 1, 2, 3, 4, які відповідають героям відомого мультфільму в тій послідовності, хто за ким прилетів.

Зразок 2: Перший лист формату А3.

Умова задачі: У нашому лісі кожен займається своєю справою і цій справі навчає інших: одні плетуть корзини, а інші ловлять рибу. Ремеслу ми навчилися один від одного. Кіт навчився від Видри, Їжачок від Зайця, Лисичка від Вовка, а Мишка від Їжачка. Бобер навчав Вовка і Видру, Заєць – Білочку, а Барсук – Зайця. Бобер був учнем Ведмедя, а Їжачок – учителем Дятла. Краще за всіх умів плести корзини Їжачок. Чим займаються Заєць, Дятел, Вовк і Лисиця? Хто із звірів нашого лісу раніше за всіх навчився ловити рибу, а хто плести корзини?

Другий лист формату A_3

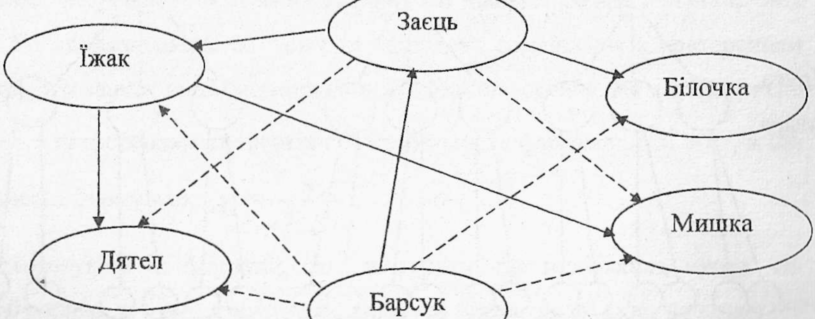
Граф: «Учитель з ловлі риби»



Читання графу: першим навчився ловити рибу – Ведмідь. Він учитель з ловлі риби. Другим навчився ловити рибу Бобер. Він безпосередньо навчив Вовка і Видру, які в свою чергу навчили відповідно Лисицю і Кота. Останніми навчилися ловити рибу Лисиця і Кіт, і вони нікого більше не навчали.

Третій лист формату A_3

Граф: «Учитель з плетіння корзин»



Читання графу: першим навчився плести корзини в лісі Барсук, потім Заєць. За Зайцем одночасово навчилися Їжачок і Білочка. Але Білочка нікого не вчила плести корзини, а Їжачок навчав Мишку і Дятла. Останніми навчилися плести корзини Мишка і Дятел. Вони нікого вже не вчили.

Додаток Б

Зразок виконання навчально-творчого завдання № 2: Розв'язування комбінаторних задач для учнів 3-4 класів способом побудови «дерева можливостей»

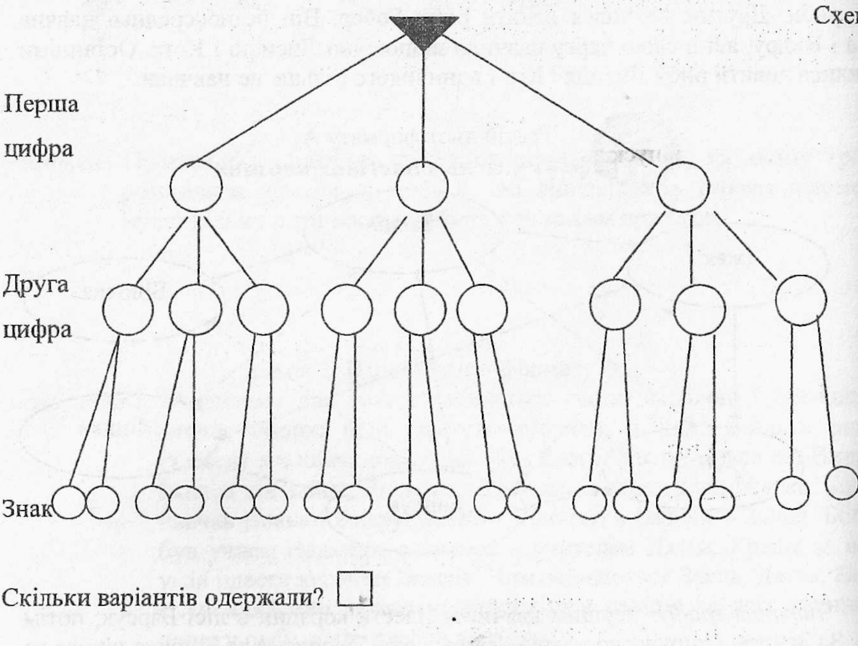
Створити сторінку зошита для учнів 3-4 класів – Комбінаторика без формул (формат А4)

Задача 1. У казковій країні реєструються номери для автомобілів, використовуючи цифри 9, 3, 7 і знаки ∆,□. Скільки номерів можна створити, якщо в кожному із них дві цифри і один знак, який може стояти або в кінці, або на початку номера?

Навчальні завдання до задач:

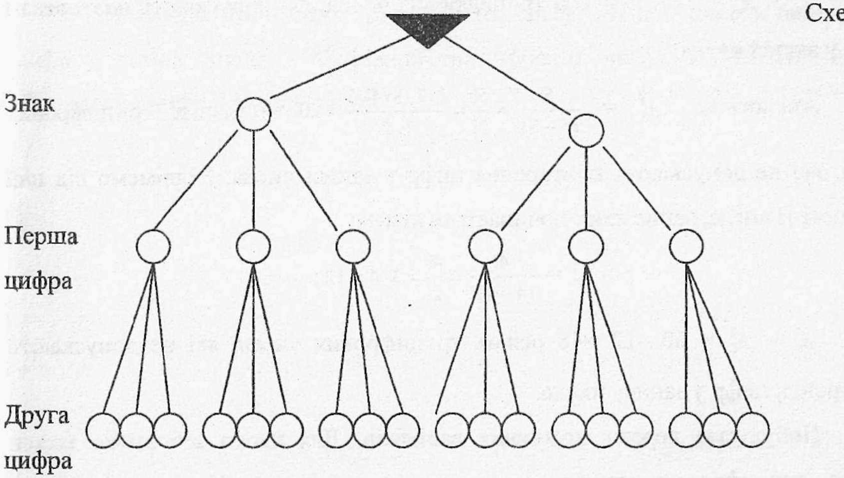
1. Підкресли умову задачі одним кольором, а запитання задачі іншим кольором.
2. Заповни кожну схему дерева можливих варіантів (схема 1 і схема 2).

Схема 1



Скільки варіантів одержали? □

Схема 2



Скільки варіантів одержали? $\square$

3. Запиши відповідь на запитання задачі: «Скільки номерів можна створити?»

$\square$ номерів.

Задача 2. Скільки всього різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 3, 5, 0, 7, 1, якщо цифри у запису числа повторюються? А скільки таких, які не допускають повторення?

Для вчителя теоретична основа задачі: В умові задачі мова йде про вибір 3-ох цифр із 5 і упорядкування їх. Тому це задача на розміщення з повторенням (якщо цифри у запису числа повторюються) і без повторення. Як відомо, число розміщень з повторенням елементів обчислюється за формулою: $\overline{A}_n^m = n^m$, а без повторення за формулою: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Застосовуючи ці формули, слід пам'ятати, що в кількість чисел, які будуть обчислені за цими формулами, ввійдуть числа, запис яких починається нулем. А це не можливо, ці числа слід вважати двоцифровими. Отже, $\overline{A}_5^3 = 5^3 =$ 125 різних трицифрових чисел, в яких цифри повторюються. Віднімемо від цієї кількості ті числа, запис яких починається нулем (двоцифрові з повторенням цифр у записі числа): $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$.

$\overline{A}_5^3 - \overline{A}_5^2 = 125\text{-}25 = 100$ трицифрових чисел, які допускають повторення цифр у записі числа.

Аналогічно, $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 60$ – різних трицифрових чисел, які не допускають повторення цифр у записі числа. Віднімемо від цієї кількості ті числа, запис яких починається нулем:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3\cdot 4 = 12;$$

$A_5^3 - A_4^2 = 60 - 12 = 48$ різних трицифрових чисел, які не допускають повторення цифр у запису числа.

Побудуємо дерево можливих варіантів. Для цього зобразимо кожен розряд трицифрового числа горизонтальною лінією. У розряді сотень (найвищий розряд трицифрового числа) може бути одна із цифр: 3, 5, 7, 1. Візьмемо для прикладу цифру 7 і побудуємо «гілку дерева» з вершиною 7. Очевидно, що такий же самий процес буде відбуватися і при побудові «гілок дерева» з вершинами 3, 5 і 1.

Як бачимо, на рис.1 всього існує 25 трицифрових чисел, запис яких починається цифрою 7, і цифри в записі повторюються. Підставляючи замість цифри 7, цифри 3, 5 і 1, ми одержимо: 25*4 =100 чисел трицифрових з повторенням цифр у запису числа.

Для підрахунку кількості чисел, які не допускають повторення цифр у запису числа, поступаємо так: «зламаємо» останню гілку дерева (цифра 7 є і в розряді сотень і в розряді десятків), кількість трицифрових чисел зменшиться на 5. «Зламаємо» тепер маленькі гілочки дерева, в яких допускається повторення цифр: в розряді десятків і в розряді одиниць; в розряді сотень і розряді одиниць. Як бачимо, у кожній з чотирьох гілок не викреслених залишається по три гілочки, тобто: 3*4=12 чисел, які не допускають повторення цифр у записі числа і запис яких починається цифрою 7. Замість цифри 7 підставляємо цифри 3, 5 і 1 і отримаємо всього: 12*4=48 різних трицифрових чисел, які не допускають повторення цифр у запису числа.

Відповідь: 100 різних трицифрових чисел, які допускають повторення цифр у запису числа, і 48 різних трицифрових чисел, які не допускають повторення цифр у запису числа.

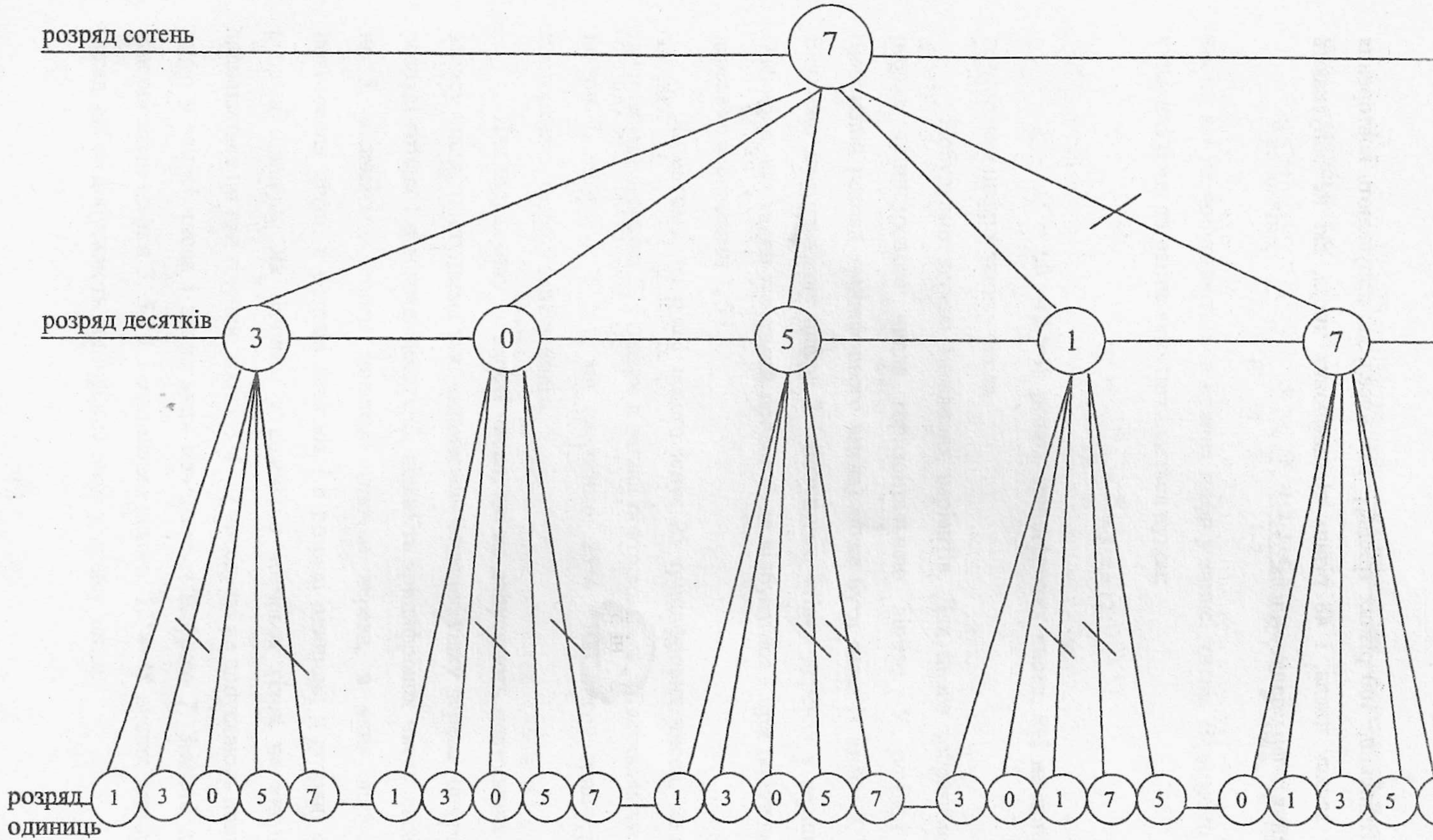


Рис.1. Дерево можливих варіантів чисел, запис яких починається цифрою 7.

Додаток В

КЛЮЧ ДО ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ТЕСТУВАННЯ З ТЕМИ «ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ»

1. Якщо знаменник нескоротного звичайного дробу $\frac{m}{n}$ має в своєму розкладі на прості множники:

а) $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot p$; б) $n = 2^{\alpha} \cdot p$; в) $n = 5^{\beta} \cdot p$; г) $n = p$, де $p \neq 5^{\beta}$, $p \neq 2^{\alpha}$.

2. Ділення в «куточок», або помножити чисельник і знаменник дробу на $2^{\beta-\alpha}$, якщо $\beta > \alpha$ і на $5^{\alpha-\beta}$, якщо $\alpha > \beta$, щоб одержати $n = 10^{\gamma}, де \gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

Можливий і такий варіант відповіді: ділення в «куточок» або множенням чисельника і знаменника на степінь числа 2 або степінь числа 5, щоб у знаменнику одержати степінь числа 10, якщо звичайний дріб перетворюється у скінчений десятковий.

3. Скінченні і нескінченні періодичні чисті і змішані десяткові дроби.

Якщо $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, то скінченні десяткові дроби, у всіх інших випадках – нескінченні.

4. Чистий періодичний десятковий дріб, якщо n не має в своєму розкладі на прості множники ні 2^{α} ні 5^{β}. Змішаний періодичний десятковий дріб, якщо в розкладі є 2^{α} або5^{β} і ще інший простий множник.

5. Представленням додатнього раціонального числа.

6. Ні.

7. Ті звичайні дроби, у яких $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, $n=2^{\alpha}$, $n=5^{\beta}$, так як періодичний десятковий дріб з періодом 0 є скінчений десятковий дріб.

8. Да, наприклад: n= n, 000 … = n, (0).

9. Представлення ділення в куточок.

10. **Правило 1.** Щоб перетворити чистий періодичний десятковий дріб у звичайний, необхідно у чисельнику дробу записати число, яке стоїть у періоді, а в знаменнику стільки дев'яток, скільки цифр у періоді.

Правило 2. Щоб перетворити змішаний періодичний десятковий дріб у звичайний, необхідно у знаменнику записати стільки дев'яток, скільки цифр у періоді, і дописати стільки нулів, скільки цифр між комою і періодом. А в чисельнику записати різницю між числом, що записане до другого періоду, і числом, що записане до першого періоду.

11. Скінченний десятковий дріб.

$$13{,}5(9) = 13 + \frac{59-5}{90} = 13\frac{54}{90} = 13\frac{6}{10} = 13{,}6.$$

12. Щоб у розкладі знаменника звичайного дробу на прості множники не було $2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, тобто були такі вирази: $n = 2^{\alpha} \cdot p$, де $p \neq 5^{\beta}$; $n = 5^{\beta} \cdot p$, де $p \neq 2^{\alpha}$; $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot p$; $n = p$, де $p \neq 5^{\beta}$ і $p \neq 2^{\alpha}$.

Література

Буряк В. К. Самостійна робота з книгою / В. К. Буряк. – К.: Т-во «Знання УРСР», 1990. – 48 с. – (серія «Педагогічна» № 9).

Грабар Г. А. Теоретична модель розвитку пізнавальної самостійності студентів / Г. А. Грабар //Вересень. – 2003. – № 3(25). – С. 51-55.

Демченко О. Дидактична система організації самостійної роботи студентів / О. Демченко // Рідна школа. – 2006. – № 5. – С. 68-70.

Козаков В. А. Самостійна робота студентів як дидактична проблема / В. А. Козаков. – К.: НМКВО, 1990. – 62 с.

Корольський В. Самостійна робота студентів при вивченні математичних дисциплін у педагогічному ВНЗ /В. Корольський, О. Віхрова, І. Лов'янова // Рідна школа. – 2005. – № 8. – С. 60-62.

Організація самостійної роботи студентів в умовах інтенсифікації навчання: [навч.посібник] / [А. М. Алексюк, А. А. Агорзанайк, П. І. Підкасистий, В. А. Козаков та ін.]. – К.: Вища школа, 1993. – 398 с.

Пименова Т. А. Развитие у учащихся интереса у математике с помощью самостоятельных работ / Т. А. Пименова, З. Г. Рычкова. – М.: Высшая школа. – 1977. – 48 с. (Профтехобразование. Обмен опытом работы).

Положення про організацію самостійної роботи студентів у Криворізькому державному педагогічному університеті. – Кривий Ріг. – 2002. – 8 с.

Рівкінд Ф. М. Математика – 1 клас / Ф. М. Рівкінд, Л. В. Оляницька. – К.: Видавничий дім «Освіта» - 2012. – 144 с.

Скаткин М. Н. Активизация познавательной деятельности учащихся в обучении / М. Н. Скаткин. – М.: Просвещение, 1965. – 287 с.

Скворцова С. О. Математика – 1 клас / С. О. Скворцова, О. В. Онопрієнко. – Ч. 1 – Х.: Видавництво «Ранок», 2012 – 144 с.

Черчата Л. Самостійна діяльність як стратегія розвитку майбутнього фахівця у контексті світових традицій і вітчизняного досвіду / Л. Черчата //Педагогіка і психологія професійної освіти. – 2002. – № 5. – С. 26-34.

Щербакова К. Й. Вступ до спеціальності: [навч. посібник] / К. Й. Щербакова. – Київ: Вища школа, 1990. – 166 с.

Зміст

Передмова 3

Розділ 1. Роль самостійної роботи студента у сучасній математичній освіті його 8

1.1.Самостійна робота студента з математики в системі вищої педагогічної освіти 9

1.2.Як готуватися до захисту самостійної роботи з математики 10

1.3.Як самостійно працювати над вивченням математичного тексту 13

Розділ 2. Планування самостійної роботи студентів з математики 16

Розділ 3. Інструкції та методичні рекомендації до виконання самостійних робіт студентами 25

Додатки 134

Література 144

Навчально-методичний посібник

Валентина Петрівна Кисільова-Біла

Система організації самостійної роботи студентів з математики в умовах кредитно-модульної системи навчання

Редактор – к.філол.наук доцент кафедри ЗМПН КПІ ДВНЗ «КНУ» Шпачук Л. Р.

Комп'ютерна верстка – Жулаєва В. О.

Підписано до друку 20.11.2012 р.
Формат 60Х84/16, папір офсетний 80 г/м^2.
Друк ротаційний трафаретний, цифровий
Об'єм 14,375 ум. друкованих аркушів.
Наклад 300 екз. Зам. 20-11/12-34

ТОВ «ЦЕНТР-ПРИНТ»
Свідоцтво ДП № 101–р від 04.09.2002 р.
50084 Кривий Ріг, вул. Співдружності, 70.
Тел.: +380564656355. *E-mail*: i_rida@i.ua

Видавництво «Діоніс» (ФО-П Чернявський Д. О.)
пр. 200 річчя Кривому Рогу, 17, (зуп. «Спаська»),
тел.: (056) 440-21-63; 404-05-92; 442-71-11.
Свідоцтво ДК 3449 від 02.04.2009 р.

Кисільова-Біла
Валентина Петрівна -

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри змісту і методики початкового навчання Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет», член-кореспондент Міжнародної слов'янської академії освіти ім. Я.А. Коменського.