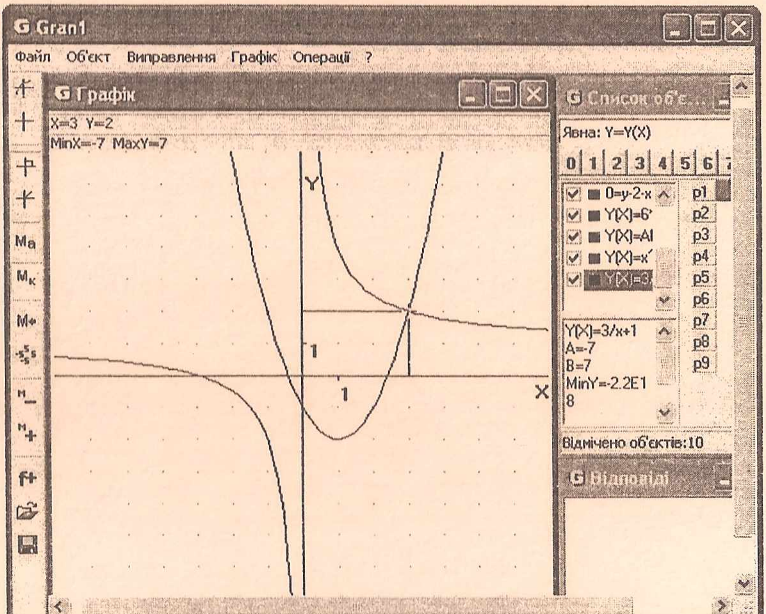
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Випуск X

Том 1



Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2012

ПРО ПОНЯТТЯ МОДУЛЯ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Л. О. Черних[α], А. Г. Бурда[β]
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
[α] laracher@pochta.ru
[β] Sasori_88@mail.ru

Поняттям модуля оперують в різних розділах математики, хоча інколи під різними назвами – абсолютне значення, норма та ін. Всі вони є, по суті, узагальненням поняття абсолютної величини дійсного або комплексного числа.

Вважають, що термін «модуль» запропонував Р. Котс, учень І. Ньютона. Г. В. Лейбніц теж використовував це поняття, яке називав модулем і позначав: mol x. Загальноприйняте позначення абсолютної величини введено в 1841 р. К. Вейерштрассом. У 1903 р. Х. А. Лоренц використовував цю ж символіку для довжини вектора. Для комплексних чисел поняття модуля ввели О. Л. Коші і Ж. Р. Арган на початку XIX століття.

Вивчення поняття модуля в шкільному курсі математики та в курсах вищої математики сприяє формуванню в учнів та студентів розвитку логічного, алгоритмічного, наочно-образного мислення.

Мета статті – розглянути різні трактовки поняття модуля в математичних курсах вищої школи та ШКМ; дослідити можливості розвитку алгоритмічного мислення учнів при вивченні модуля числа.

В курсах вищої школи поняттям модуля оперують в математичному аналізі (модуль дійсного числа, модуль комплексного числа), в геометрії (модуль вектора, модуль сімейства кривих), в алгебрі (модуль елемента упорядкованого поля, модуль автоморфізму). Взагалі, модуль – це числова характеристика деякого математичного об'єкта.

Зазвичай значення модуля – невід'ємне дійсне число (елемент множини $\Re_0^+$), що має деякі характеристичні властивості, які обумовлені властивостями множини *A* розглядуваних об'єктів. При цьому функція *A* виявляється морфізмом деякої структури в *A* на одну з (алгебраїчних) структур в $\Re_0^+$, серед яких найважливіші – це порядок, адитивність та мультиплікативність. У більш абстрактних ситуаціях замість $\Re_0^+$ використовують упорядковані півкільця (міра, маса, ємкість та ін.). Нарешті, терміном «модуль» позначають числові характеристики і інших об'єктів: модуль плоскої області, модуль кільця, модуль ріманової поверхні, модуль неперервності та ін.

Теоретичною основою поняття модуля дійсного числа, яке вивчається в шкільному курсі математики, є поняття модуля елемента упорядкованого поля, яке розглядається в курсі вищої алгебри. Там вводять таке означення:

Модулем (абсолютною величиною, абсолютним значенням) елемента a упорядкованого поля називається такий елемент упорядкованого поля, який позначається $|a|$ і визначається за таким правилом:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq \theta, \\ -a, \text{ якщо } (-a) > \theta. \end{cases}$$

Потрібно зазначити, що під a розуміють елемент довільної природи, хай тільки він належить деякому упорядкованому полю. Взагалі кажучи, знаходження модуля числа (елемента числового поля) – це унарна алгебраїчна операція, яка кожному елементу деякої числової системи ставить у відповідність цілком певний елемент цієї ж системи. В курсі абстрактної алгебри доводять загальні властивості модуля елемента будь-якого упорядкованого поля. Якщо $P = \langle P;\oplus,\otimes \rangle$ – упорядковане поле, то:

1. $(\forall a \in P)[|a| = |-a|]$;
2. $(\forall a \in P)[|a| \oplus a \geq \theta]$;
3. $(\forall a,b \in P)[|a \oplus b| \leq |a| \oplus |b|]$;
4. $(\forall a,b \in P)[|a \otimes b| = |a| \otimes |b|]$.

В курсі математичного аналізу широко використовується як поняття модуля дійсного числа, так і поняття модуля комплексного числа. Оскільки поле комплексних чисел упорядкувати, взагалі кажучи, неможна, то введене в курсі алгебри означення модуля елемента упорядкованого поля неможна формально перенести в цю числову систему. При вивченні функцій комплексної змінної детально розглядають алгебраїчну, тригонометричну, показникову форми комплексного числа. Ідея модуля комплексного числа з'являється при переході від алгебраїчної до тригонометричної форми запису комплексних чисел.

Формуючи у студентів поняття «модуль комплексного числа», доцільно провести аналогію з поняттям «модуль дійсного числа». З геометричної точки зору, модуль дійсного числа – це відстань від початку відліку до точки, яка відповідає цьому числу на числовій прямій. Аналогічно, модуль комплексного числа – це відстань від початку координат до точки, яка відповідає цьому числу на координатній площині. Важливо підкреслити, що це твердження є більш загальним, оскільки кожне дійсне число є комплексним. Тепер всі дійсні числа зображуються точками координатної площини, які лежать на вісі OX, саме тому вона називається дійсною віссю.

В шкільному курсі математики поняття модуля нерозривно пов'язане з введенням поняття від'ємного числа. Виникає ряд суперечок про правильність пояснення ролі, значення, «особливого змісту» від'ємного числа. Один з прикладів пояснення – зміна висоти польоту чи стрибки температури. Такі пояснення інколи суперечать інтуїтивним уявленням і досвіду учнів. Наприклад, якщо висота змінилась з 20 м до 17 м, то сказати, що вона змінилась на (–3) метри неможна, оскільки (–3 м) – це три метри нижче рівня моря. Дане протиріччя розглядається в статті Ю. В. Покорного та К. П. Лазарєва [4]. Автори пропонують змінити схему вивчення від'ємних чисел. В процесі пояснення даного поняття можна користуватись, наприклад, годинником, оскільки учні часто чують фрази типу: «без чверті друга; без п'яти перша» і розуміють інтуїтивно, що вони значать. Автори даної статті пропонують таке означення:

«Якщо a – число арифметичне, то запис (вираз) «$+a$» називається додатнім числом, а запис «$-a$» називається від'ємним числом. Для нового числа $c=+a$ або $c=-a$ вихідне число a називається абсолютною величиною (модулем) c, а відповідний знак «+» або «–» називається знаком нового числа c»[4, 28].

В даному означенні одразу вводять і поняття «модуль числа» і поняття «знак числа». На нашу думку, таке означення може спричинити хибні уявлення учнів про те, що таке від'ємні числа.

В більшості сучасних підручників та навчальних посібників з математики [1], [2], [5] поняття модуля числа вводиться на основі його геометричного змісту:

Відстань від початку координат до точки з координатою a називають *модулем числа a*. Позначають його $|a|$. Використовуючи координатну пряму, розглядають конкретні приклади на знаходження модулів різних чисел і формулюють висновок: модулем додатного числа є саме це число; модулем нуля є нуль; модулем від'ємного числа є протилежне йому число. Символічною мовою цей висновок традиційно записують так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0, \\ 0, \text{ якщо } a = 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Слід звернути особливу увагу на цей запис (нетрадиційне використання фігурної дужки в математичному записі) та його значення для подальшого вивчення поняття модуля числа. Сутність даної схеми буде основою для побудови алгоритмів розв'язання багатьох видів рівнянь та нерівностей з модулем, побудови графіків функцій, що містять знак модуля.

Процедура знаходження модулів конкретних чисел є нескладною для більшості учнів. Інша справа, коли вміння знаходити модуль числа є складовою частиною іншого, комплексного вміння, наприклад, виконання дій над числами з різними знакам: 17+(–8), –9+57, –23–56 і т.п.

Для обґрунтування правил додавання від'ємних чисел та чисел з різними знаками доцільне використання геометричних інтерпретацій (зображення чисел точками координатної прямої; рух по координатній прямій вправо та вліво при додаванні та відніманні). Для формулювання, запам'ятовування та використання відповідних правил (наприклад додавання від'ємних чисел) застосовується поняття «модуль числа». При цьому поняття модуль числа виконує «технічну функцію»: коли відповідні дії доведені до автоматизму, термін «модуль числа» в міркуваннях учнів відсутній.

Подальшому розвитку поняття «модуль числа» сприяють задачі на розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем, на побудову графіків функцій, що містять знак модуля. Найперші труднощі і недоліки в засвоєнні поняття модуля виявляються саме тоді, коли під знаком модуля стоїть не конкретне число, а вираз, що містить змінну. Навчання учнів розв'язанню рівнянь із знаком модуля слід розпочинати з найпростіших випадків $|x|=3$, $|x|=0$, $|x|=-5$.

Рівняння $|x|=3$ цілком природно розв'язати усно, поставивши учням питання: «Модуль якого числа (чисел) дорівнює 3?». Таке питання, як правило, не викликає в учнів забруднень. Необхідність підготувати учнів до розв'язання більш складних рівнянь з модулем вимагає застосування ще одного способу розв'язання – на основі раніше зазначеної схеми:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Отже за схемою, якщо $x>0$, то модуль числа дорівнює самому цьому числу, тобто $x=3$; якщо $x<0$, то модуль числа дорівнює числу йому протилежному, тобто $-x=3$, отже $x=-3$.

Аналогічно, поставивши перед учнями питання: «Модуль якого числа дорівнює 0?», усно розв'яжемо дане рівняння. Воно має єдиний розв'язок: $x=0$.

Розв'язуючи разом з учнями рівняння $|x|=-5$, особливу їх увагу звертаємо на те, що модуль будь-якого числа є числом невід'ємним, тому дане рівняння розв'язків не має.

Аналогічно, щоб навчити учнів розв'язувати нерівності з модулем, слід розпочати з найпростіших:

a) $|x| < 3, |x| \leq 3$;

b) $|x| > 3, |x| \geq 3$;

c) $|x| < 0, |x| \leq 0$;

d) $|x| > 0, |x| \geq 0$;

e) $|x| < -4, |x| \leq -4$;

f) $|x| > -5, |x| \geq -5$.

Шестикласники такі нерівності розв'язують на основі геометричного трактування поняття модуля числа. Особливу увагу тут приділяємо розв'язанню нерівностей d)–f).

В шкільному курсі алгебри 7–9 класів поняття модуля застосовують на етапі узагальнення та систематизації знань учнів з інших тем. Якщо рівняння містить один модуль, то застосовується ідея розв'язання за раніше зазначеною схемою. Рівняння, що містить декілька модулів дає можливість залучити учнів до побудови спеціальних алгоритмів розв'язання відповідних задач.

Курс алгебри та початків аналізу 10 класу профільної школи містить значну частину навчального матеріалу, пов'язаного з темою «Модуль». Методика вивчення відповідного матеріалу повинна бути направлена на систематизацію та узагальнення поняття модуля числа та сприяти формуванню в учнів прийомів алгоритмічної діяльності.

Для систематизації знань учнів з методів розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем можна скористатися таблицею, яка запропонована в підручнику Є. П. Неліна [3].

<table>
<tr><td>За означенням:</td><td colspan="2">$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0; \\ 0, \text{ при } a = 0; \\ -a, \text{ при } a < 0. \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>За геометричним змістом</td><td>$|a|$ – відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a.</td><td>$|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a; \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$
$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -g(x); \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$
$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a; \\ f(x) > a. \end{array}\right.$
$|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a; \\ f(x) < a. \end{cases}$ (де $a>0$)</td></tr>
<tr><td>За загальною схемою</td><td colspan="2">1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.
3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.
4. Знайти розв'язки на кожному з проміжків; перевірити, чи входить ці розв'язки у розглянутий проміжок.</td></tr>
<tr><td>З використанням спеціальних співвідношень</td><td colspan="2">1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geq 0,\ |u| = -u \Leftrightarrow u \leq 0.$
2. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2.$
3. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2 \Rightarrow |u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0.$</td></tr>
</table>

	4. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 0, \\ v\ge 0. \end{cases}$ 5. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=-u-v \Leftrightarrow \begin{cases} u\le 0, \\ v\le 0. \end{cases}$ 6. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 0, \\ v\ge 0. \end{cases}$ 7. $\lvert u\rvert+\lvert v\rvert=\lvert u-v\rvert \Leftrightarrow uv\le 0.$

Доцільно пропонувати учням таку схему тільки після того, коли вони використовували відповідні методи при розв'язанні конкретних рівнянь та нерівностей. В подальшому вона допоможе обирати доцільний метод розв'язання.

Наприкінці зазначимо, що поняття модуля – одне з важливих математичних понять, яке широко застосовується як у вищій математиці, так і в ШКМ. В процесі введення, систематизації та узагальнення поняття модуля числа в шкільному курсі математики відбувається поглиблення знань і умінь учнів з різних розділів математики. Використовуючи алгебраїчний та геометричний зміст цього поняття, можна здійснювати алгоритмічний підхід при розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем, при побудові графіків функцій, що містять знак модуля.

Література

1. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова ; ред. В. В. Ясінський ; Інститут доуніверситетської підготовки та професійної орієнтації НТУУ «КПІ». – К. : Факт, 2006. – 252 с. – (На допомогу абітурієнту)
2. Бевз Г. П. Математика : 6 кл. : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закл./ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2006. – 304 с.
3. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профільн. рівень / Є. П. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с.
4. Покорный Ю. В. О модулях и знаках чисел / Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев // Математика в школе. – 2000. – № 3. – С. 24–30.
5. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. / З. І. Слепкань. – К. : Зодіак–ЕКО, 2000. – 512 с.