Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск V

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2005

ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРНОЇ АКСІОМАТИКИ Г. ВЕЙЛЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ

П.І. Ульшин, І.В. Сорока
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Аксіоматичний метод, родоначальником якого вважається видатний вчений Стародавньої Греції Евклід, чітко обґрунтовує як шкільну так і вузівську геометрію. Суть його можна описати так:

1. Вводяться основні поняття, які називаються первісними, тобто без означень. Ці поняття складаються з основних об'єктів і основних співвідношень. Основними об'єктами є певні речі. Ними можуть бути, наприклад , точки, прямі, площини, вектори. Основні співвідношення встановлюють певні зв'язки між основними об'єктами. Їх можна визначити такими словами: "належність", "лежати між", "конгруентність", "довжина відрізка", "градусна міра кута", "додавання і віднімання векторів", "множення вектора на число", "скалярний добуток векторів", "відкладання вектора від точки" тощо.
2. Основні поняття володіють певними властивостями. Ці властивості описуються найпростішими очевидними твердженнями, які називаються аксіомами. Від цієї назви і походить назва даного методу.
3. Далі, формулюються твердження, які доводяться лише за допомогою аксіом. Потім, ідуть твердження, які доводяться за допомогою аксіом і вже доведених тверджень і т. д. Доведені твердження, якими користуються для доведення інших тверджень і розв'язування задач, називаються теоремами. Всі твердження повинні бути логічними наслідками аксіом або доведених теорем. Так за допомогою аксіоматичного методу будується теорія, в якій усі твердження систематизуються, тобто розташовуються в певній послідовності від простішого до складнішого.

На початку XX століття, крім евклідової, з'явилися і інші аксіоматики, які теж правильно обґрунтовують геометрію і відрізняються вибором основних понять та аксіомами.

Аксіоматика на базі векторів вперше була описана німецьким математиком Г. Вейлем у його книзі "Простір. Час. Матерія", що вийшла в 1918 році. Векторна аксіоматика характерна тим, що нею можна обґрунтовувати не лише планіметрію і стереометрію, а всю геометрію n-вимірного простору, де n – довільне натуральне число. Таке обґрунтування поставило геометрію в загальний стрій системи математичних наук і створило сучасне її розуміння.

Відомо, що в сучасній математиці важливим апаратом є векторне обчислення. Таке обчислення містить в собі векторну алгебру і векторний аналіз.

До векторної алгебри відносяться дії над векторами: додавання, віднімання, множення вектора на число, добутки векторів (скалярний, векторний, мішаний й ін.). У векторному аналізі вивчаються вектор-функції. Основними поняттями його є градієнт, дивергенція, ротор, векторні поля тощо.

В наш час за допомогою векторного обчислення будуються всі сучасні курси теорії електрики, теоретичної механіки, аеродинаміки, аналітичної і диференціальної геометрій.

Векторна аксіоматика дає строге, просте і зрозуміле обґрунтування елементарній геометрії. З ним можна детально ознайомитися в книзі В.Г. Болтянського [1]. Проте такий підхід у викладанні, незважаючи на його строгість і сучасність, має деякі ускладнення у методичному плані. Він дещо формалістичний. Тому питання доцільності використання векторної аксіоматики і шкільному курсі поки що залишається відкритим.

Незважаючи на це, векторний метод пропонується використовувати в шкільній геометрії там, де він приводить простіше і швидше до вірних результатів, ніж інші методи.

Векторний метод ґрунтується на застосуванні властивостей векторів і дій над ними. У шкільному курсі геометрії вектор не відноситься до основних об'єктів аксіоматики і вивчається в планіметрії і стереометрії після введення координатного методу. Проте, у багатьох випадках при розв'язуванні задач та доведенні теорем застосування векторів ефективніше за конструктивні підходи, пов'язані з використанням додаткових побудов, застосуванням елементарної алгебри і тригонометрії.

Для швидкого користування векторним методом потрібно навчити учнів записувати таблицю геометричних співвідношень і їм відповідних векторних рівностей. Як записується така таблиця можна показати на уроках, коли вивчаються певні властивості векторів, а детальніше її розглянути на факультативних заняттях або в позакласній роботі.

Щоб успішно розв'язувати геометричні задачі за допомогою векторів, потрібно не тільки знання законів векторної алгебри, знайомство з поняттям розкладання вектора в базисі, уміння переводити геометричний факт на мову векторів, але і певна методика. Відзначимо кілька важливих положень.

1. Якщо потрібно обчислити відстань або кут, то треба застосовувати скалярний добуток векторів.

2. При введенні векторів можна йти двома шляхами:

а) вибрати точку, від якої відкладаються відомі вектори;

б) вектори зображати напрямленими відрізками, які пов'язані з фігурами, що розглядаються в задачі, не відкладаючи їх від однієї точки.

3. Якщо задача планіметрична, то доцільно виділити два неколінеарних вектори в якості базисних, а інші виразити через них; якщо ж задача стереометрична, то як базис варто вибрати три некомпланарних вектори. При цьому введення початкової точки необов'язкове.

4. В деяких випадках, наприклад, при розв'язуванні задач на многогранні кути, обчислення спрощуються, якщо ввести одиничні вектори, відкладені від вершини многогранного кута.

Розглянемо приклад застосування векторного методу до розв'язування задач.

Приклад. В трапеції ABCD бічна сторона CD перпендикулярна до основи AD, BC = a, AD = b, $a < b$. На основі AD існує така точка M, що MB⊥AC, а MC⊥BD. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання

Покладемо $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{h}, \overrightarrow{MD} = \vec{y}$ (рис. 1).

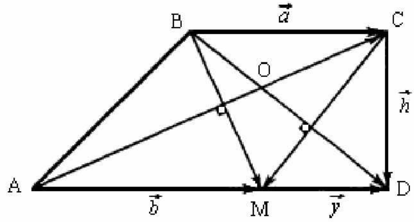

Рис. 1

Тоді $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{h}$, $\overrightarrow{CM} = \vec{h} - \vec{y}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{h}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{a} + \vec{h} - \vec{y}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярні, то $\overrightarrow{BD}\overrightarrow{CM}$ =0, звідки $(\vec{a} + \vec{h})(\vec{h} - \vec{y}) = 0$

або

$$\vec{a}\vec{h} - \vec{a}\,\vec{y} + \vec{h}^2 - \vec{h}\vec{y} = 0 \quad . \tag{1}$$

Вектор $\vec{h}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{y}$, тому $\vec{a}\vec{h} = \vec{h}\vec{y} = 0$.

З (1) маємо:

$$-\vec{a}\,\vec{y} + \vec{h}^2 = 0 .$$

Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{y}$ колінеарні і співнапрямлені, то $\vec{a}\,\vec{y} = ay$.

Тому

$$\vec{h}^{\,2} = a{\cdot}y \tag{2}$$

З того, що $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BM}$, випливає $\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BM} = 0$,

або

$$(\vec{b} - \vec{h})(\vec{a} + \vec{h} - \vec{y}) = 0 ,$$

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{h} - \vec{b}\vec{y} - \vec{a}\vec{h} - \vec{h}^2 + \vec{h}\vec{y} = 0 . \tag{3}$$

Як вже зазначалось, $\vec{a}\vec{h} = \vec{h}\vec{y} = 0$. На тій же підставі $\vec{b}\vec{h} = 0$. Тому з (3) маємо:

$$\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{y} - \vec{h}^2 = 0 , \; a{\cdot}b - b{\cdot}y - h^2 = 0, \; y = \frac{a \cdot b - h^2}{b} .$$

Значення y підставимо в (2): $h^2 = \frac{a^2 b - a h^2}{b}$, звідки $h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$.

Відповідь: $h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$.

Векторний метод, звичайно, не універсальній, до розв'язання деяких задач він не може бути застосований або виявляється малоефективним. Але цей метод має також і значні переваги, а саме: при розв'язанні задач він дає можливість порівняно легко робити узагальнення, іноді далекосяжні; він не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій, а зводить геометричну задачу до алгебраїчної, яку легше розв'язувати, ніж вихідну геометричну; метод дозволяє зняти труднощі при розв'язанні стереометричних задач, що викликані недостатнім розвитком просторових уявлень, який заважає учням бачити необхідні зв'язки між елементами просторових фігур; дозволяє раціонально розв'язувати традиційні і нетрадиційні задачі та демонструвати цікаві властивості геометричних фігур, чим, безперечно, розвиває інтерес до геометрії; дає можливість розв'язувати також фізичні (і технічні) задачі, і тим самим здійснює міжпредметні зв'язки.

Література:

1. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Векторное изложение геометри (в 9 классе средней школы): Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 143 с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, I часть. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.
3. Гусев В.А. и др. Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1976. – 46 с.