Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск V

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2005

ІНТЕНСИФІКАЦІЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ ТА ПРАКТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В.В. Корольський, М.В. Бабкіна
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Інтенсифікація навчального процесу може здійснюватися за різними напрямками. Розглянемо один з них, пов'язаний з використанням загальної схеми для одержання методів щодо застосування визначених інтегралів до розв'язку практичних задач.

Існують дві схеми застосування визначених інтегралів, які базуються на наступних теоретичних засадах.

Схема 1. Якщо функція $y = f(x)$ описує деяку геометричну або фізичну величину $\forall x \in [a,b]$, то цю величину, яку умовно позначимо через u можна одержати шляхом використанню її складових Δu_i, $i = \overline{1,n}$ за алгоритмом:

1. Розбиваємо величину u (площа фігури, об'єм, робота і т.п.) на велику кількість малих доданків Δu_i:

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + ...+ \Delta u_n \quad (1)$$

або

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i \qquad (2)$$

2. Пов'язуємо обчислення кожного доданка Δu_i зі значенням функції $f(x_i)$ ($x_i \in [x_i, x_{i+1}]) \subset [a,b]$) і величиною $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$:

$$\Delta u_i = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (3)$$

3. Представляємо наближене значення величин u у вигляді інтегральної суми:

$$\Delta u_i \cong \sum_{i=1}^{n} f'(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i) \quad (4)$$

4. Обчислюємо точне значення u за формулою

$$u = \lim_{\substack{\max\limits_{i} \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{1}^{n} f'(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i) \qquad (5)$$

5. Якщо границя (5) існує і її похибка прямує до 0 коли $n \to \infty$, то одержуємо величину u у вигляді визначеного інтеграла

$$u \overset{df}{=} \int_{a}^{b} f(x)dx . \qquad (6)$$

Схема 1 показує, що розв'язок задачі пов'язаний з побудовою інтегральної суми, яка відображає умови поставленої задачі з наступним переходом до визначеного інтеграла. В теоретичних викладках такий шлях потребує побудови відповідних геометричних схем та доволі громіздких записів, що потребує інколи значного часу. Коротко розглянуту схему можливо охарактеризувати так: від загального до частинного, потім від частинного до загального.

Схема 2. Схема два будується на наступних засадах:

1. Припускаємо, що в будь-якій точці $x_i \in [a, b]$ величина u набуває приросту:

$$\Delta u \approx f(x)\,\Delta x, \qquad (7)$$

де Δu – приріст величини u;

Δx – приріст незалежної змінної.

Зрозуміло, що на $\forall[\Delta x] \in [a, b]$ функція $f(x)$ існує, також як і величина u.

2. Далі використовуємо те, що для будь-якої диференційованої функції $f(x)$ та досить малих приростів Δx має місце наближена рівність

$$du \approx \Delta u, \qquad (8)$$

тобто

$$du = f(x)dx. \qquad (9)$$

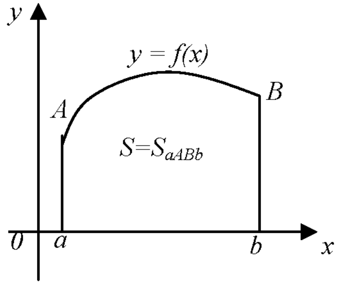
3. Врешті-решт u знаходять за допомогою однієї з основних властивостей інтегралів (як невизначених, так і визначених)

$$u = \int_a^b f(x)dx \qquad (10)$$

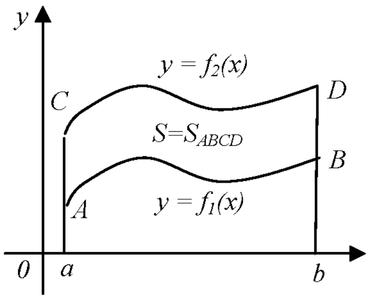
Примітка. Схему 1 називають схемою інтегральних сум, а схему 2 – схемою диференціала.

З нашого досвіду схема диференціала дозволяє значно інтенсифікувати викладання математичного аналізу. Покажемо це на прикладі вивчення розділу “Застосування визначених інтегралів”.

Розглянемо конспект лекцій на тему: “Застосування визначеного інтегралу в геометрії”. Структура лекції: обчислення площ криволінійних фігур → обчислення площ поверхонь тіл обертання → обчислення об’ємів тіл обертання та тіл із заданою площею перерізу.



а)



б)

Обчислення площ криволінійних фігур, показаних на малюнках a), $б$)

здійснюється за формулою

$$S = \int_a^b dS(x) \qquad (11)$$

Таким чином, подальше завдання зводиться до визначення виразу $dS(x)$ для вказаних випадків площ а), б).

Розглядаємо випадок а). Спочатку візьмемо $f(x) = 1$, що приводить до площі $S = S_{aABb}$, яка є площею прямокутника з основою $(b - a)$ і висотою 1. Значення диференціалу цієї площі дорівнює: $dS = 1 \cdot dx$. За формулою (11) одержуємо

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b dx = (b - a) \text{ (кв.од.)} \qquad (12)$$

Якщо взяти будь-яку функцію $y = f(x)$, то маємо: $dS = f(x)dx$. За формулою (11) одержуємо

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (13)$$

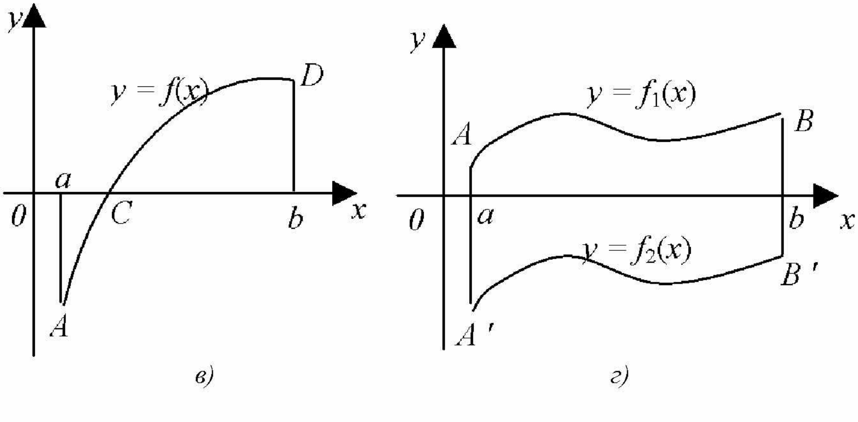
Розглянемо випадок б). Якщо взяти $f_1(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$, то маємо випадок а). Тобто

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b [f_2(x) - 0]dx = \int_a^b f_2(x)dx \qquad (14)$$

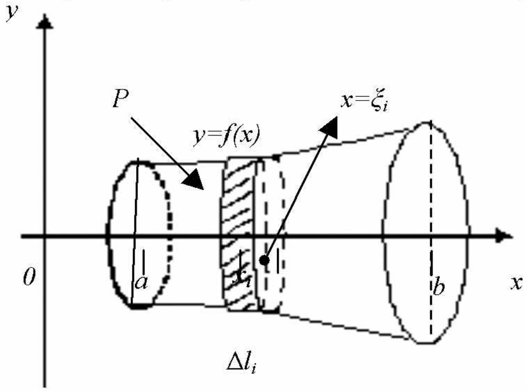
Для будь-якої $f_1(x)$ $(x \in [a,b])$ з формули (14) одержуємо

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \qquad (15)$$

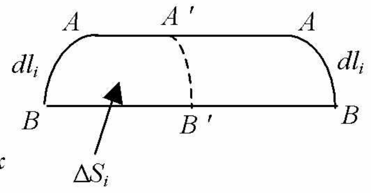
<u>*Самостійна робота*</u>. Знайти формули обчислення площ фігур *в*), *г*).



Обчислення площ поверхонь тіл обертання (мал. *д*) здійснюється також за формулою (11). Але для цього потрібно визначити вираз $dS(x)$. Для визначення виразу $dS(x)$ вичленимо з мал. *д*) частину поверхні P_i, які відповідає проміжок $[x_i, x_{i+1}]$ і яка показана на мал. *е*).



д)



е)

На мал. *е*): $AA'=A'A=\pi f(x_i)$; $BB'=B'B=\pi f(x_{i+1})$.

Нехай площа поверхні P_i дорівнює ΔS_i, тоді можемо записати:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} dl_i . \qquad (16)$$

Зрозуміло, що для будь-яких малих Δx_i буде виконуватися наближена рівність

$$\Delta S \cong \pi f(x) dl \qquad (17)$$

Якщо згадати, що диференціал дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює

$$dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx ,$$

то рівність (17) буде такою:

$$dS = 2\pi f(x_i)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx . \qquad (18)$$

Далі за формулою (11) одержуємо формулу для обчислення площі поверхні тіла обертання графіка функції $y = f(x)$ навколо вісі Ox:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx . \qquad (19)$$

<u>Самостійна робота</u>. Записати формулу обчислення площі поверхні обертання, коли графік функції обертається навколо осі Oy.

Об'єм обертання будемо шукати у вигляді

$$V = \int_a^b dV(x) . \qquad (20)$$

Для визначення виразу $dV(x)$ розглянемо окремо частину об'єму тіла обертання, який відповідає проміжку $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ і який можна вважати прямим круговим циліндром з висотою Δx_i і радіусом основи $f(x_i)$. Величина об'єму циліндра дорівнює:

$$\Delta V_i = \pi f^2(x_i)\Delta x_i \qquad (21)$$

Для будь-яких досить малих величин Δx останній результат можна записати у вигляді:

$$\Delta dV_i = \pi f^2(x)dx \tag{22}$$

Далі за формулою (20) одержуємо потрібну формулу обчислення об'єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx\,. \tag{23}$$

Самостійна робота: 1) Знайти формулу тіла обертання, коли графік функції обертається навколо осі Oy. 2) Одержати формулу обчислення об'єму тіла, в якому задана площа перерізу $S(x)$.

Наш досвід показує, що викладання лекції на дану тему потребу 50-55 хвилин часу, решту частину часу 30-25 хвилин можна присвятити розгляду практичних прикладів, що дає можливість на практичних заняттях розв'язувати безпосередньо різноманітні приклади на обчислення площ і об'ємів. Так як у студентів є певний досвід, то економія часу на проведення лекції і практичних занять значним чином інтенсифікує процес навчання. При цьому не втрачається фундаментальність теоретичної підготовки. Навпаки з'являється можливість вчити студентів мислити системно. В аналогічному дидактичному напрямку будується навчання з інших розділів та тем математичного аналізу для спеціальності "Фізика та основи інформатики".

Література:

1. Корольский В.В. Транзитивная роль теоремы Лагранжа в дифференциальном и интегральном исчислении // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Вип. 4. – Т. 1. – Кр. Ріг: НМетАУ, 2004. – С. 98-99.