Міністерство освіти та науки України
Криворізький державний педагогічний університет

Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в природничих науках

Збірник наукових праць

Кривий Ріг
Видавничий відділ КДПУ
2000

СИНТЕЗ ТОПОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В.В. Корольский
г. Кривой Рог, Криворожский государственный педагогический университет

В теории сетевых систем, в том числе и с непрерывным потокораспределением, для их структурного описания используются линейные графы. С помощью графов описываются топология сетей и направление физических процессов, происходящих в них. Граф сетевой системы, являясь моделью ее структуры, с определенной мерой адекватности должен аппроксимировать реальный объект. Построение графа моделирующего сетевую систему, когда система имеет небольшую размерность и однозначно определенные функциональные связи является несложной задачей. В этом случае граф модели и граф топологии системы могут быть изоморфными. В тех случаях, когда система имеет большую размерность и неоднозначно определяемые функциональные связи, описание ее изоморфным графом невозможно, а в ряде случаев утрачивает практический смысл. В такой ситуации мы вынуждены создавать математическую модель, которая лишь подобна топологически и в определенной мере адекватна функционально объекту моделирования. В дальнейшем будем рассматривать системы с непрерывным потокораспределением между их элементами, функциональное состояние которых описывается нелинейной системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum^{(j)} q_i = 0,\ j = 1,2,\ldots,m-1 \\ &\sum^{(l)} r_i q_i^2 = 0, l = 1,2,..k = n-m+1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

j – узел сопряжения ветвей системы;

l – контур, составленный из ветвей системы;

q_i – поперечная компонента физического состояния в i-й ветви системы;

r_i – сопротивление i-й ветви системы.

При этом система интерпретируется графом $G(U,W)$, который отображает геометрическую структуру системы. Граф $G(U,W)$ состоит из конечного множества $U=\{U_1,U_2,\ldots,U_{m-1}\}$ – вершин, интерпретирующих узлы соединения элементов сети и множества $W=\{W_1,W_2,\ldots,W_n\}$ ветвей, являющихся аналогами элементов структуры системы. Каждую пару вершин $U_i\in U$, $U_{i+1}\in U$ можно отождествлять с ветвью $W_{i,i+1}=U_iU_{i+1}$. Таким образом, получится соотношение, связывающее вершины графа с его ветвями:

$$(U_i,\ U_{i+1},\ W_{i,i+1})\in G(U,W) \qquad (2)$$

Соотношение (2) является моделью не столько топологии элементов системы, сколько функциональных связей между ее узлами. Так как при расчете потокораспределения в системе нас интересует число элементов и последовательность их сопряжения между собой, то в процессе моделирования соотношение (2) можно использовать в более простом виде. Для этого топологию графа достаточно задавать трехпозиционнными предикатами, представляющих индексы соответствующих узлов и ветвей. В связи с этим предлагается следующая элементная база для топологического описания математических моделей рассматриваемого класса систем.

<u>Определение 1.</u> Упорядоченные тройки индексов вида

$$< i,\ i+1,\ k >$$

где i, $i+1$ – номера узлов U_i, $U_{i+1}\in U\in G(U,W)$

k – номер ветви $W_k\in W\in G(U,W)$ связывающей узлы U_i, U_{i+1} отображающие функциональные связи между узлами системы, называется элементарным кодом графа модели системы.

<u>Определение 2.</u> Упорядоченное размещение элементарных кодов в виде таблицы:

$$\begin{array}{c} <0000>\ <0001>\ <0000> \\ <0001>\ <0002>\ <0001> \\ \hline <i>\ <i+1>\ <k> \\ \\ \hline <m-2>\ <m-1>\ <n> \end{array} \qquad (3)$$

называется списком кодов графа модели системы CKS.

CKS является инцидентной системой, т.е. из него можно просто получить матрицу инцидентной, выражаемую соотношением:

$$W_{ik}=\begin{cases} +1, \text{ если } i\in W_{ik} \text{ и } i\text{-й узел является начальным узлом } k\text{-й ветви;} \\ -1, \text{ если } i\in W_{ik} \text{ и } i\text{-й узел является конечным узлом } k\text{-й ветви;} \\ 0, \text{ если } i\notin W_k \end{cases}$$

Представление топологии модели системы в виде CKS, кроме того, что является эффективным при решении системы (1), может быть использовано при сравнении систем и их моделей, т.к. может служить одним из признаков их топологического подобия.

Определение 3. Системы S_1 и S_2 тождественны топологически: $S_1 \equiv S_2$, если CKS_1 может быть путем перенумерации узлов и ветвей приведен к CKS_2 или наоборот. При этом CKS двух или нескольких последовательных ветвей в S_1 или в S_2 заменяется одним элементарным кодом.

Данное определение основано на бинарном отношении соседства между точками плоскости или пространства, то есть когда точки связаны функциональной зависимостью, обеспечивающей функционирование системы.

Вполне понятно, что при построении графа модели системы имеет место лишь только топологическое подобие модели и системы, распространенное на некоторое множество элементов, которые обеспечивают стратегию функционирования системы. Для характеристики степени топологического подобия предлагается ряд признаков.

Определение 4. Пусть $S_1 \in S_2$, $S_2 \in S_1$ тогда, если $S_1 \equiv S_2 \equiv S$, то системы S_1 и S_2 топологически подобны по множеству S.

Определение 5. Если $S_i \in \{S_n\}$ множества элементов на которых подобны сети $S_1, S_2, \dots, S_n$, то

$$S = max(S_1, S_2, \dots, S_n) \quad (4)$$

называется главной частью топологического подобия или главным подобием сетей $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Можно показать, что

$$S(S_1, S_2, \dots, S_n) = (\dots(S_1 \cap S_2) \cap S_3) \cap \dots) \cap S_{n-1}) \cap S_n \qquad (5)$$

Для числовой характеристики степени подобия двух систем вводится понятие коэффициента топологического подобия.

<u>Определение 6.</u> Коэффициентом топологического подобия системы S_1 к системе S_2 является число:

$$\mu(S_1;S_2)=\frac{|S\{S_1;S_2\}|}{|S_1|} \qquad (6)$$

Коэффициент $\mu(S_1;S_2)$ имеет следующие свойства:

1) $\mu(S_1;S_1)=\mu(S_2;S_2)=1$
2) $\mu(S_1;S_2)\neq\mu(S_2;S_1)$
3) $max\ \mu(S_1;S_2)=\frac{|S\{S_1;S_2\}|}{|S_1|}$

Однако, если рассматривать множество систем $\{S_n\}$, то при помощи коэффициента подобия нельзя судить о степени общего подобия систем или моделей данного множества. В связи с этим вводится более общая характеристика топологического подобия множества систем $\{S_n\}$, которая называется мерой подобия.

<u>Определение 7.</u> Мерой подобия сетей $S_i\in\{S_n\}$, является число $\widetilde{M}$ равное минимуму отношения модулей главной части подобия $\widetilde{S}=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ к модулям $S_1, S_2, \ldots, S_n$ т.е.

$$\widetilde{M}=min\frac{|\widetilde{S}\{S_1,S_2,\ldots S_n\}|}{|S_i|} \qquad (7)$$

где $i=1, 2, \ldots, n$.

Нетрудно показать, что

$$\widetilde{M}(S_1, S_2, \ldots, S_n)=\frac{|\widetilde{S}\{S_1,S_2,\ldots S_n\}|}{\max\limits_i |S_i|}=\min_{i,j}\mu(S_i, S_j)$$

Мера подобия может служить критерием топологической тождественности множества сетей. Это следует из следующей теоремы.

<u>Теорема.</u> Если $\widetilde{M}(S_1, S_2, \ldots, S_n)=1\,(*)$, то $S_1\equiv S_2\equiv\ldots\equiv S_n$

<u>Доказательство</u>. Из соотношения (*) следует система равенств:

$$\frac{|(\ldots(S_1\cap S_2)\cap S_3)\cap\ldots)\cap S_{n-1})\cap S_n}{|S_1|}=1$$

$$\frac{|(\ldots(S_1\cap S_2)\cap S_3)\cap\ldots)\cap S_{n-1})\cap S_n}{|S_n|}=1$$

Следовательно, $|S_1|=|S_2|=...=|S_n|$. Но, так как по условию теоремы $S_1 \widetilde{S}_i S_2 \widetilde{S}_i \; ... \; \widetilde{S}_i S_n$, то из определения подобия следует, что CKS системы можно привести к одному виду, т.е. $CKS_1=CKS_2=\ldots=CKS_n$, что и доказывает теорему.

Коэффициенты и мера топологического подобия, характеризуя степень топологического подобия системы и модели, позволяют наиболее обоснованно выбирать оптимальный вариант модели при проектировании и управлении систем с непрерывным потокораспределением. Однако при этом необходимо иметь критерии функционального подобия синтезируемых топологических элементов систем при построении их математических моделей.