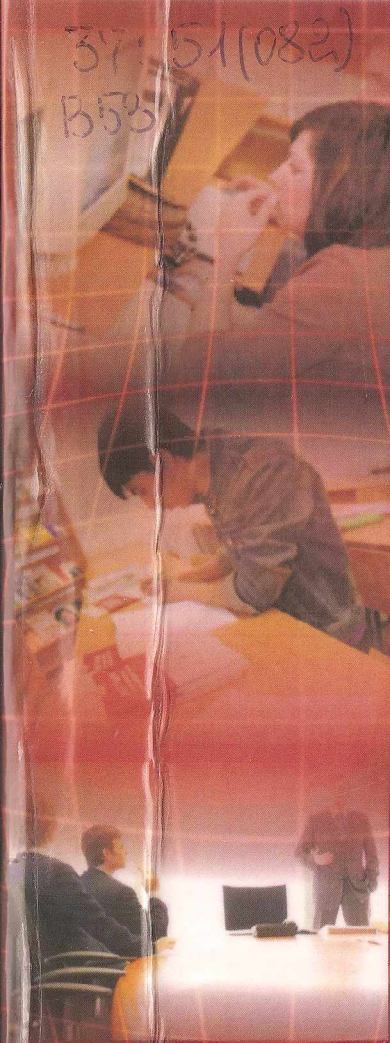


37.51(082)
B53



ВІСНИК

МІЖНАРОДНОГО
ДОСЛІДНОГО
ЦЕНТРУ

“ЛЮДИНА: МОВА,
КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ”

ТОМ 42
2018

УДК 372.851

**ЗАДАЧІ З НЕПОВНИМИ І НАДЛИШКОВИМИ УМОВАМИ
В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

У статті з'ясовується, що творчі здібності особистості тісно пов'язані з її інтелектуальними вміннями. Розглянуто задачний підхід як методичний підхід до навчання математики, який забезпечує організацію розвитку інтелектуальних умінь особистості і з'ясовано роль некоректних задач у шкільному курсі математики.

Ключові слова: задачний підхід, некоректні задачі, творчі здібності.

The article reveals that the person's creative abilities are closely connected with her intellectual abilities. The problem approach is considered as a methodological approach to the teaching of mathematics, which provides the organization of development of intellectual abilities of the person and the role of incorrect tasks in the school course of mathematics is determined.

Keywords: task approach, incorrect tasks, creative abilities.

Навчання математики в середній школі має бути розвиваючим, тобто повинно забезпечувати розвиток інтелекту, творчості, алгоритмічної культури та математичної інтуїції школярів. Найважливішим видом навчальної діяльності, в процесі якої школярами засвоюється математична теорія, розвиваються їх інтелектуальні вміння, творчі здібності, самостійність мислення, є розв'язування задач. Роль задач в процесі навчання математики загально визнана. Один тільки перелік основних функцій математичних задач (навчальна, розвиваюча, виховна, контролююча, організуюча) переконує, що задачі є основним засобом формування знань, умінь і навичок, засобом організації навчальної діяльності, засобом розвитку і виховання школярів.

Розв'язуючи математичні задачі, представлені в продуманій системі, учні не тільки активно опановують змістом курсу математики, а й набувають вміння мислити творчо. У зв'язку з цим доречно нагадати вислів відомого педагога математика

Д. Пойа: «Що значить володіння математикою? Це є вміння розв'язувати задачі, причому не тільки стандартні, але й ті, що потребують відомої незалежності мислення, здорового глузду, оригінальності, винахідливості. Тому перший і найголовніший обов'язок курсу математики середньої школи полягає в підкресленні методичної сторони процесу розв'язання задач». Цьому сприяє задачний підхід [7].

В останні десятиліття поступова зміна цілей навчання математики призводить до необхідності навчати дітей розв'язанню не тільки стандартних, але і нестандартних (некоректних) задач, які не можна віднести до тих, у яких існує певний алгоритм розв'язання. Некоректні задачі, а саме задачі з неповною і надлишковою умовою сприяють успішному засвоєнню навчального матеріалу, розвитку пізнавальної самостійності школярів, розвитку інтелектуальних умінь та творчих здібностей учнів на уроках математики. В процесі розв'язання задач цих типів учні виробляють вміння критично ставитись до тривіального, вчать ся міркувати тощо.

Однак у сформованій системі навчання математики некоректних задач відведено незначне місце, всупереч потребам практики. Не викликає сумнівів той факт, що не можна навчитися розв'язувати некоректні задачі, навчаючись лише на коректних.

Відзначимо, що незважаючи на велику наукову і практичну потрібність теорії коректних і некоректних задач, методичні аспекти цієї теорії всебічно і детально раніше не розглядалися. Однак теорія коректних і некоректних задач має більш строго визначені математичні поняття, користується попитом і безпосередньо застосовується в різних наукових і практичних областях; її розвиваючий ресурс як методологічну основу потрібно реалізувати при навчанні школярів.

Проблема розвитку інтелектуальних умінь і творчих здібностей особистості гостро стоїть у сучасному світі. Кожна сучасна, цивілізована країна або та, яка хоче бути такою, піклується про інтелектуальний і творчий потенціал суспільства взагалі й кожної людини зокрема. Це пов'язано з рівнем загальної освіти, увагою, яку приділяють, до розвитку інтелектуальних умінь і творчих здібностей особистості, та надання їй можливості виявляти їх. Найважливіша роль в інтенсивному розвитку інтелектуального і творчого потенціалу кожної людини належить школі,

навчання в якій повинно бути підпорядковане ідеї розвитку інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів.

Сьогодні в умовах величезних змін в соціальному, економічному, політичному житті України постала проблема перебудови у сфері освіти та виховання, мета якої – формувати конкурентно-здібну, інтелектуально-розвинену, творчу особистість, яка спроможна до самореалізації, самовизначення та самовдосконалення [6, С. 19].

Про розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів багато говорять, але мало хто ризикує говорити конкретно. Існують серйозні теоретичні дослідження, монографії тощо, але вчитель практик потребує зовсім в іншому – йому необхідно знати не тільки про те, що потрібно робити, а і як це робити.

Термін «задача» використовується в житті і науці дуже широко і має багато різних значень. Тому дотепер не існує загальноприйнятого означення поняття «задача».

У психології поняття задачі характеризує спрямованість і мету діяльності людини, досягнення результату якої здійснюється певними засобами. У філософії задачу розглядають як системний об'єкт, основною характеристикою якого є цілісність.

Математики визначають задачу через її структурні елементи. Білоруський радянський педагог-методист А. А. Столяр під задачею (у широкому значенні) розуміє вимогу відшукання області істинності [3, С. 45].

Л. М. Фрідман виділяє структурні елементи задачі: умову і вимогу, числові дані і шукане [7, С. 21-22]. Аналогічну точку зору на поняття задачі висловлено болгарським математиком-методистом І. Ю. Ганчевим, який ввів поняття «область розв'язування задачі», «система розв'язків задачі» [4, С. 41-42]. На думку американського вченого Ф. Вольфа, якщо термін «задача» розуміти досить широко, (зокрема включити в число завдань і будь-яку обчислювальну вправу, і будь-яку теорему, яку треба довести, якщо вважати завданням встановлення тих чи інших ознак досліджуваного математичного поняття і відбір серед них тих, які характеризують це поняття і т.д.), то стане зрозумілим вислів «...заняття математикою полягає у розв'язуванні задач...» [4, С. 35- 36].

Якщо проаналізувати задачі, представлені в шкільних підручниках математики, то всі задачі, що містяться в них, в межах

однієї теми класифіковані за ступенем складності і розташовані, як правило, у порядку її зростання. Серед запропонованих учням задач представлені задачі різних класифікацій (принаймні, до цього прагнуть автори підручників): за їх призначенням – тренувальні і розвиваючі; за наявністю алгоритму розв'язування – стандартні і нестандартні; за характером вимог – задачі на обчислення (поділяються на текстові і приклади), на побудову, на доведення і на дослідження. Існують й інші класифікації, що знаходять те чи інше відображення у шкільних підручниках. Але одна з класифікацій майже не знаходить відображення у діючих підручниках за деякими винятками. Мова йде про класифікацію за характером умови задачі – визначені, невизначені та перевизначені.

Школярам переважно пропонуються задачі визначені, тобто задачі, що містять в умові рівно стільки даних, скільки їх потрібно для отримання відповіді, не більше і не менше.

В. А. Крутецький описує дослідження, яке він з групою дослідників проводив у багатьох школах протягом 12 років. Дослідники використовували задачі різних типів, серед яких були і наведені в цій класифікації [5], в якості тестових завдань для виявлення психологічних аспектів математичних здібностей школярів. За результатами цього дослідження вийшло, що сильні учні справляються з задачами зазначених типів майже самостійно, швидко, практично без допомоги випробувача. Учні середніх досягнень також непогано справляються з подібними задачами, однак для їх розв'язання їм потрібно більше часу та іноді пряме запитання, що наштовхує на розв'язання. Слабкі учні практично не могли самостійно провести розв'язок цих задач, не бачили зв'язку між об'єктами задачі, та навіть з підказкою випробувача не могли впоратися із задачею.

Вперше поняття «коректно поставлена задача» було запроваджено Ж. Адамаром в 1923 р і відносилось лише до крайових задач математичної фізики. Коректність постановки задачі забезпечувалася виконанням двох умов: існування розв'язку та його єдиність. Вимога стійкості розв'язку було згодом приєднано до перших двох. Довгий час по авторитетній думці Ж. Адамара вважалося, що некоректні задачі не можуть мати практичного сенсу і тому немає необхідності в їх розв'язанні. Першою роботою, в якій ця думка була спростована, вважається

відома робота академіка А. М. Тихонова 1943 р в якій він вперше дав постановку умовно-коректної задачі і розв'язав одну з актуальних задач розвідувальної геофізики. Надалі теорія некоректних задач зайняла своє заслужене місце в наукових дослідженнях, оскільки було багаторазово підтверджено, що завдання, які постають в практиці, найчастіше некоректні, і математичним апаратом їх розв'язання як раз і є теорія коректних і некоректних задач А. М. Тихонова [10, С. 340].

На думку Л. М. Фрідмана, однією з основних у навчанні математики функцій задач є функція формування та розвитку в учнів загальних умінь розв'язування будь-яких математичних (у тому числі і прикладних) задач.

Учні ж в даний час не отримують ніяких спеціальних знань, на базі яких можливо таке формування. Більш того, в даний час ці загальні вміння формуються суто стихійно, а не в результаті цілеспрямованого, систематичного навчання. Вважається, що ці вміння можуть виникнути лише завдяки розв'язанню великого числа математичних задач [8, С.151-152].

Як пише М. П. Буловацькій в своїй статті [2], школяр, як правило, ігнорує важливі питання про надлишковість, недостатність або суперечливість умов задач, так як задачі зі шкільних підручників не вимагають роздуму над такими питаннями, тому що в них практично завжди є стільки даних, скільки необхідно для розв'язання. І це є, на думку М. П. Буловацького, серйозним недоліком математичної освіти школярів.

За результатами експерименту, описаного в статті, задачі з недостатньою умовою і задачі з надлишковим складом умови ставлять більшість школярів в глухий кут, з якого вони часто не в змозі вибратися. І це складне становище виникає в зв'язку з тим, що у школярів не відпрацьований навик відбору та попередньої оцінки даних задач. Як вважає М. П. Буловацькій, відпрацювання цієї навички потрібно приділяти спеціальний навчальний час [2, С. 37-38].

Задачі з неповною умовою – задачі, в умові яких відсутні деякі дані, необхідні для розв'язання задачі, а отже дати конкретну відповідь на запитання завдання не завжди можливо.

Наприклад:

1) У трикутнику одна сторона має довжину 10 см, а інша 8 см. Знайти довжину третьої сторони.

2) Поїзд складається з цистерн, товарних вагонів і платформ. Цистерн на 4 менше, ніж платформ, і на 8 менше, ніж вагонів. Якої довжини поїзд, якщо кожна цистерна, вагон і платформа мають довжину 25 м?

З першого погляду зрозуміло, що перша задача не може мати розв'язку, тому що в ній не вистачає даних. Однак досліджуємо ситуацію глибше. Згадаймо нерівність трикутника і запишемо його для даного трикутника, позначивши невідому сторону через a . Отримаємо:

$$10 + 8 > a;$$

$$a + 10 > 8;$$

$$a + 8 > 10;$$

З цієї системи слідує, що $2 < a < 18$. Таким чином нам вдалося уточнити відповідь з фрази «задачу неможливо розв'язати» до цілком певного інтервалу, що слід визнати відповіддю вищого рівня.

І у другій задачі напрошується висновок, що ніяка відповідь там неможлива, оскільки даних не вистачає. Але при більш уважному аналізі умови виявляється, що не будь-яке число може бути у відповіді. Наприклад, неможливі відповіді 333 м і 250 м, хоча і з різних причин. Перше неможливо, тому що відповідь має бути кратною 25 м. А друге неможливо, тому що загальна кількість тягових одиниць не може бути рівним десяти. Скільки ж цих одиниць там може бути?

Якщо в поїзді x цистерн, то платформ $x + 4$, а вагонів $x + 8$. Разом: $3x + 12$. Таким чином, всіх тягових одиниць не менш п'ятнадцяти, а можлива відповідь: $25 \cdot (3x + 12) = 75 \cdot (x + 4)$ м, де x – натуральне число. А тепер, позначивши буквою y – кількість платформ ($y = x + 4$), отримаємо найкоротший варіант відповіді: $75 \cdot y$ (метрів), де y – натуральне число, що не менше п'яти.

Таке розв'язування вимагає більш високого рівня розумової діяльності, ніж примітивне «Завдання не має розв'язку, тому що даних не вистачає». І, зрозуміло, що зазначеного розв'язання від школярів відразу не отримаєш, що і підтвердили перші проби зі стопроцентним результатом [2, С. 37-38].

Розв'язування задачі з неповною умовою зазвичай закінчується невизначеною відповіддю, в якій шукана величина може приймати значення з якоїсь числової множини. Виявлення цієї множини і має стати метою розв'язання такої задачі, що досяга-

ється вдумливим аналізом тексту завдання і взаємозв'язків між даними величинами. Цьому корисному для розумового розвитку учнів процесу потрібно спеціально навчати. Задачі цього типу вимагають від учня мобілізації практично всього набору знань, вміння аналізувати умову, будувати математичну модель розв'язання, знаходити дані до задачі «між рядків» умови. Практично, однією спеціально підбраною задачею цього типу можна перевірити знання учня по всій темі.

Задачі з надлишковою умовою – задачі, в яких є зайві дані, які не потрібні для розв'язку, а лише маскують необхідні для розв'язання задачі дані.

Дані в таких задачах можуть бути суперечливими і виявлення цієї суперечливості чи несуперечності є обов'язковим елементом розв'язання такого завдання.

Наприклад, в задачі «Знайти площу прямокутного трикутника з катетами 9 см і 40 см і гіпотенузою 41 см» мало знайти відповідь «половину добутку 9 на 40». Треба ще виявити, чи буде у прямокутного трикутника з катетами 9 см і 40 см гіпотенуза 41 см. Без цього з'ясування рішення задачі не може бути визнано повним.

Задачі цього типу вимагають від учня вміння аналізувати умову, знаходити в ньому потрібні дані і відкидати непотрібні. Причому, «непотрібними» у різних учнів можуть бути різні величини. Наприклад, в задачі «Знайти площу прямокутника по стороні, діагоналі і куту між діагоналями» одні учні будуть шукати відповідь половиною добутку діагоналей на синус кута між ними (тим самим сторона стає зайвим даним), інші отримують відповідь добутком сторін, попередньо обчисливши другу сторону за теоремою Піфагора (тут кут стає зайвим даним). Можливий і третій варіант, коли зайвим даним стане діагональ. Використання декількох варіантів розв'язання такої задачі корисно не тільки для їх порівняння, але більше для самоконтролю: однаковість відповідей при різних рішеннях підвищує впевненість в їх правильності.

Кожен із зазначених типів задач несе в собі певну розвиваючу функцію. Так, задачі з надлишковою умовою вимагають вміння аналізувати умову і будувати рішення задачі за допомогою мінімального числа даних. Задачі з неповною умовою вимагають досить великих знань про об'єкт задачі, про зв'язки його з

іншими математичними об'єктами, які можуть виявитися корисними при отриманні нехай невизначеної, але все ж обмеженої якимись рамками відповіді.

А. Ф. Есаулов визначає: «Людина, яка звикла бачити перед собою чітко і коректно сформульовану задачу, просто губиться в незнайомій ситуації, будь то хоч звичайна некоректна математична задача або якась задача, що виникла як наслідок з практики (прикладна)» [9, С. 8].

Переважна більшість навчальних задач не містять зайвих, а тим паче важко зустріти задачу, в якій не вистачає даних для розв'язання. Якщо такі задачі зустрічаються, то в основному через недогляд автора. При такому підході учні звикають до захищеності і в більшості випадків проводять поверхневий аналіз умови задачі.

На нашу думку, в процесі аналізу і розв'язування задач більш доцільно використовувати терміни «коректна (коректно поставлена) задача», «некоректна (некоректно поставлена) задача».

Щоб уникнути в подальшому розбіжностей, прийемо:

1) означення коректних задач за Ж. Адамаром [1]: Задача називається коректною, якщо її розв'язок: існує, єдиний і стійкий;

2) означення некоректних задач за Н. Н. Яремко [10, С. 340]: Некоректна задача – це задача, яка містить протиріччя, або має недостачу даних. При цьому коректність постановки задачі означає її однозначну (скінченнозначну) розв'язність або повноту і несуперечливість умов

3) класифікацію некоректних задач В. А. Крутецького [5, С. 102-112]:

– Задачі з неповною умовою – в умові таких задач відсутні деякі дані, необхідні для розв'язування задачі, а отже дати конкретну відповідь на запитання завдання не завжди можливо;

– Задачі з надлишковою умовою – в умові задано зайві дані, непотрібні для розв'язування, які «приховують» необхідні для розв'язання задачі дані.

Отже, творчі здібності особистості тісно пов'язані з її інтелектуальними умінями. Розглянувши задачний підхід як методичний підхід до навчання математики, який забезпечує організацію розвитку інтелектуальних умінь особистості і з'ясувавши роль некоректних задач у шкільному курсі матема-

тики, можемо зробити висновок, що успішний, вдалий і швидкий розвиток інтелектуальних умінь та творчих здібностей учнів з нашої точки зору буде досягатись завдяки задачному підходу до навчання за рахунок використання правильно складеної системи задач з неповними і надлишковими умовами на уроках математики.

Вважаємо, що невикористання некоректних задач в практиці можна пояснити низкою причин: недостатньою кількістю або навіть відсутністю некоректних задач в шкільних підручниках; неготовністю учнів до розв'язання зазначеного типу задач; недостатньою розробленістю методики включення некоректних задач в процес навчання математики.

Список використаних джерел

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Буловацкий М. П. Разнообразить виды задач: [О развитии мышления на уроках математики] // Математика в школе. – 1988 – №5 – С. 37 – 38.
3. Воевода А. Л. Місце та роль некоректних задач в шкільному курсі математики // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – 2014. – II(18). – Issue: 37. – С. 45 – 48.
4. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математики. Ч. I / Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 110 с.
5. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
6. Ліневич К. А. Проблема творчості в дослідженнях вітчизняних та зарубіжних учених: понятійний аспект // Рідна школа. – 2008. – № 11. – С. 19 – 22.
7. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л. М. Фридман. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
8. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в средней школе / Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
9. Эсаулов А. Ф. Проблемы решения задач в науке и технике / А. Ф. Эсаулов. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 200 с.
10. Яремко Н. Н. Некоректныe задачи при обучении математике в школе и вузе / Н. Н. Яремко // Известия РГПУ им. Герцена. Докторские тетради. – 2008. – № 11 (62). – С. 339 – 346.