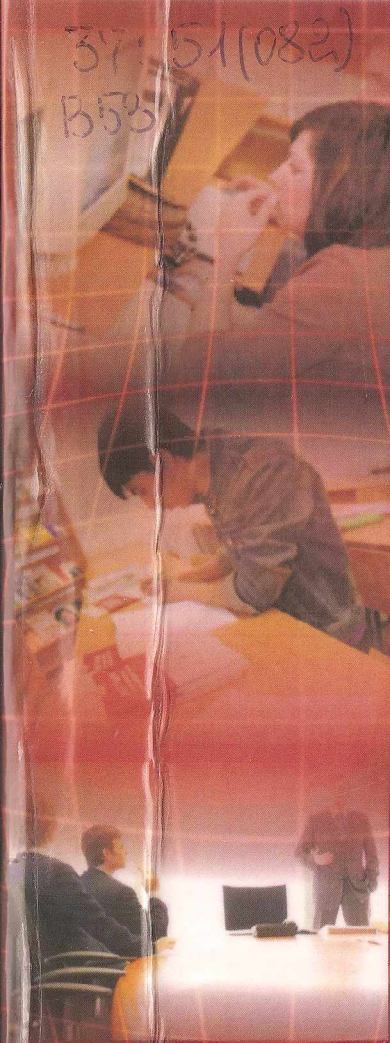


37.51(082)
B53



ВІСНИК

МІЖНАРОДНОГО
ДОСЛІДНОГО
ЦЕНТРУ

“ЛЮДИНА: МОВА,
КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ”

ТОМ 42
2018

$x = \frac{b}{\cos t}$, для I_3 підстановку $x = bt \operatorname{tg} t$ [4 с.92]. Але тригонометричні підстановки не завжди є більш раціональними, ніж підстановка Абеля.

Матеріал даної статті можна використовувати на практичних заняттях з математичного аналізу для студентів фізико-математичних спеціальностей, а також при написанні курсових робіт.

**Д. Є. БОБИЛЄВ, В. В. КОРОЛЬСЬКИЙ,
М. Р. ОВЧАРЕНКО**

УДК 517.977

МОДЕЛЮВАННЯ ГАСІННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ ПРИ ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРАХ ДЕМПФЕРА

У статті розглянуто різні постановки задачі коливання струни і способи гасіння коливань. Розв'язана задача гасіння коливання струни при заданих геометричних і фізичних характеристиках струни.

Ключові слова: коливання струни, демпфер, моделювання.

The article deals with various statements of the problem of oscillation of a string and methods of quenching oscillations. The problem of quenching the oscillation of a string with given geometric and physical characteristics of a string is solved.

Keywords: fluctuations of the string, damper, modeling.

У зв'язку з підвищенням вимог до міцності та надійності машин, приладів і апаратури, технічних споруд та засобів транспортування проблема гасіння коливань все більше привертає увагу дослідників. Незважаючи на існування різних типів гасителів коливань та чисельних теоретичних й експериментальних досліджень, дотепер не існує універсальних підходів до ефективного розв'язання проблем гасіння коливань сучасної техніки. Використання нових типів динамічних нелінійних гасителів коливань стримується за відсутності адекватних методів аналізу

їхніх можливостей щодо гасіння коливань в механічних системах. За останні десятиріччя вітчизняними та закордонними науковими школами розвиваються методи теорії нелінійної динаміки та стійкості руху нелінійних механічних систем. Тому застосування цих теорій для створення розрахункових методів дослідження коливань механічних систем з динамічними нелінійними гасителями коливань є актуальною науковою проблемою, яка має важливе практичне значення сучасного машинобудування.

Загальна постановка задачі коливання струни та їх гасіння

Як відомо, коливання струни задаються гіперболічним рівнянням [2]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (a > 0) - const, \quad (1)$$

де t – час, x – координата точки струни, y – функція коливань струни, a – фізичні характеристики струни, l – довжина струни. Функція $g(t, x)$ буде описана нижче.

В нашому випадку, у якості початкових даних виступають початкові відхилення та швидкість:

$$y \Big|_{t=0} = h_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = h_1(x), \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

які будемо розглядати як початкові коливання, де $h_0(x)$, $h_1(x)$ – фіксовані функції. На границі струни накладемо умови жорсткого закріплення:

$$y \Big|_{x=0} = 0; \quad y \Big|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Також, відомо що енергія струни, яка коливається в момент часу t , задається таким інтегралом:

$$E(t) = \int_0^l \frac{1}{2} (T y_x^2(t, x) + P y_t^2(t, x)) dx \quad (4)$$

Розглянемо основні математичні ідеї теорії управління. Задачі теорії управління (варіаційні задачі) складаються з таких елементів [1]:

1) цільова функція $J(u)$ яку необхідно мінімізувати на множині управляючих функцій $u \in U$;

2) система обмежень, що накладаються на управляючу функцію, яка задається підмножиною $U_g \subset U$.

Будемо розглядати проблему гасіння (демпфірування) коливань на основі припущення, що управляюча функція $g(t, x)$ належить достатньо малому інтервалу по змінній x : $x \in [\alpha, \beta] \subset [0, l]$, де $\frac{(\beta - \alpha)}{l} \ll 1$. Отже, розглянемо таку задачу гасіння: знайти управляючу функцію $g(t, x)$ (з деякої множини U), яка дозволяє повністю погасити початкові коливання (2) за скінченний час $T > 0$, що відповідає такій цільовій функції:

$$E(t) = 0. \quad (5)$$

Аналіз літератури дає змогу зробити висновки, що задача гасіння коливань струни розглядалась в роботах Рассела Д.Л. [3], Лагнесса Ж.Є. [1], Бутковського А.Г. [3], Мурав'я Л.А. [4] та інших для описаного вище вигляду функції $g(t, x)$ та інших: $g(t, x) = u(t)f(x)$ і $g(t, x) = u(t)\delta(x - x_0)$, де $u(t) \in L_2(0, T)$, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, x_0 – деяка фіксована точка відрізка $[0, l]$. В даному випадку управління гасінням коливань струни відбувається лише в одній точці інтервалу.

Бутковський А.Г. [3] розглядає точковий стаціонарний демпфер, розміщений в точці x_0 на струні. При цьому, коли демпфер розміщується в точці яка є вузлом стоячої хвилі, задача стає нерозв'язною або нестійкою.

Використання рухомого демпфера для розв'язання задачі гасіння коливань струни. Побудуємо функцію, що описує точковий демпфер на основі методики, яка запропонована А.Г. Бутковським [5].

Розв'яжемо задане рівняння:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < l, \quad (a > 0) - const$$

з такими крайовими умовами: $y(0, t) = y(l, t) = 0$, при чому, очевидно, що $g(0, t) = g(l, t) = 0$.

Функцію $y(t, x)$ будемо шукати у вигляді: $y(t, x) = u(x) \cdot v(t)$. Після її підстановки в задане рівняння отримаємо:

$$v''(t) \cdot u(x) = a^2 u''(x) \cdot v(t) + g(t, x).$$

Поділивши останню рівність на вираз $u(x) \cdot v(t)$, матимемо:

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{a^2 u''(x)}{u(x)} + \frac{g(t, x)}{u(x) \cdot v(t)}$$

Функцію $g(t, x)$, в свою чергу, будемо шукати в такому вигляді: $g(t, x) = v(t) \cdot \delta(x - v_d t)$, $v_d = \text{const}$, а отже:

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{a^2 u''(x)}{u(x)} + \frac{\delta(x - v_d t)}{u(x)}$$

Звідси маємо:

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \lambda = \text{const} \quad \wedge \quad \frac{a^2 u''(x)}{u(x)} + \frac{\delta(x - v_d t)}{u(x)} = \lambda$$

З першої рівності отримуємо:

$$v''(t) - \lambda \cdot v(t) = 0$$

– звичайне однорідне диференціальне рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння: $k^2 - \lambda = 0$, звідки $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$.

Розглянемо два можливі випадки:

$$1) \lambda \geq 0 \Rightarrow v(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t},$$

$$2) \lambda < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i, \quad v(t) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}t + C_2 \sin\sqrt{\lambda}t.$$

Аналогічно з другої рівності:

$$a^2 u''(x) - \lambda \cdot u(x) + \delta(x - v_d t) = 0$$

– звичайне неоднорідне диференціальне рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо спочатку відповідне йому однорідне рівняння: $a^2 u''(x) - \lambda \cdot u(x) = 0$

Складаємо характеристичне рівняння: $k^2 - \frac{\lambda}{a^2} = 0$, звідки

$$k_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{a}$$

Знову розглядаємо два можливі випадки:

1) $\lambda \geq 0 \Rightarrow u(x) = C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x}$, при чому, зрозуміло, що $u(x) = u(l) = 0$

Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l} = 0, \end{cases}$$

яка не має нетривіальних розв'язків

$$2) \lambda < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{a}i, \quad u(x) = C_1 \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x.$$

Звідси:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0. \end{cases}$$

Знаходимо нетривіальний розв'язок:
 $\frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = \pi n \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n a}{l} = \omega$, звідки $u(x) = C \sin \frac{\pi n x}{l}$ —
 розв'язок однорідного рівняння.

Розглянемо тепер вихідне неоднорідне рівняння:

$$a^2 u''(x) - \lambda \cdot u(x) = -\delta(x - v_d t).$$

Функцію $u(x)$ шукатимемо у вигляді $u(x) = C(x) \sin \frac{\pi n x}{l}$.

Отже:

$$u'(x) = C'(x) \sin \frac{\pi n x}{l} + C(x) \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l},$$

$$u''(x) = C''(x) \sin \frac{\pi n x}{l} + 2C'(x) \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} - C(x) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Підставивши у початкове рівняння, після елементарних перетворень отримаємо:

$$a^2 C''(x) \sin \frac{\pi n x}{l} + 2a^2 C'(x) \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} = -\delta(x - v_d t)$$

— звичайне диференціальне рівняння II порядку із змінними коефіцієнтами. Виразимо з нього $C''(x)$:

$$C''(x) = -2C'(x) \frac{\pi n}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi n x}{l} - \frac{\delta(x - v_d t)}{a^2 \sin \frac{\pi n x}{l}} \quad (6)$$

Отримане рівняння доводиться розв'язувати наближеними методами і, знайшовши з його допомогою функцію $C(x)$, маємо змогу знайти $u(x)$ і, нарешті, шукану функцію $y(t, x)$ у вигляді:
 $y(t, x) = u(x) \cdot v(t)$.

Розглянемо нашу задачу з такими умовами: $l = 1, a = 1, v_d = 0.1$ м/с. Також, для спрощення розрахунків тестової задачі, приймемо коефіцієнти C_1, C_2 рівними одиниці. Це означатиме, що струна почне коливатися під впливом демпфера, який потім ці коливання і погасить. $\sigma(x - v_d t)$ задамо в такому вигляді: $\sigma(x - v_d t) = (x - v_d t)^2 - \frac{x - v_d t}{7}$.

Виконавши розглянутий алгоритм розв'яжемо поставлену задачу та отримаємо наступну картину: в момент часу $t = 0.1$ с, коливання струни матимуть вигляд наближений до синусоїди, показаний на рис. 1. Відповідна управляюча функція $g(t, x)$ в цей час прийме вигляд гілки параболи, а її рівняння, отримане за допомогою лінії тренду, буде поліномом другого степеня. Відповідні дані представлені на рис. 2.

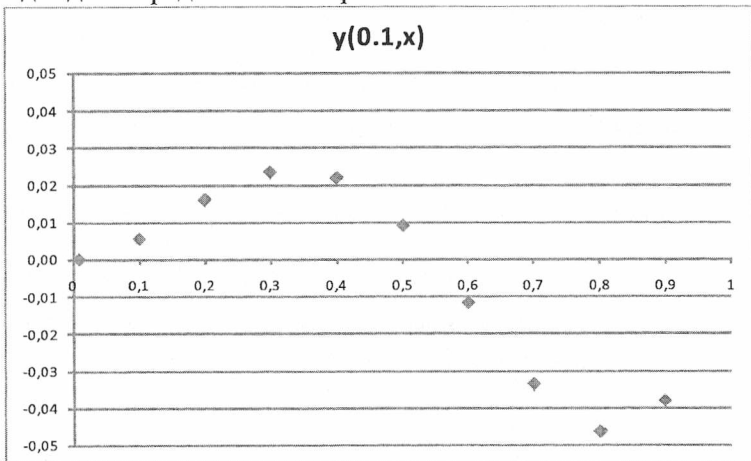


Рис. 1. Вигляд коливань струни в момент часу $t = 0.1$ с

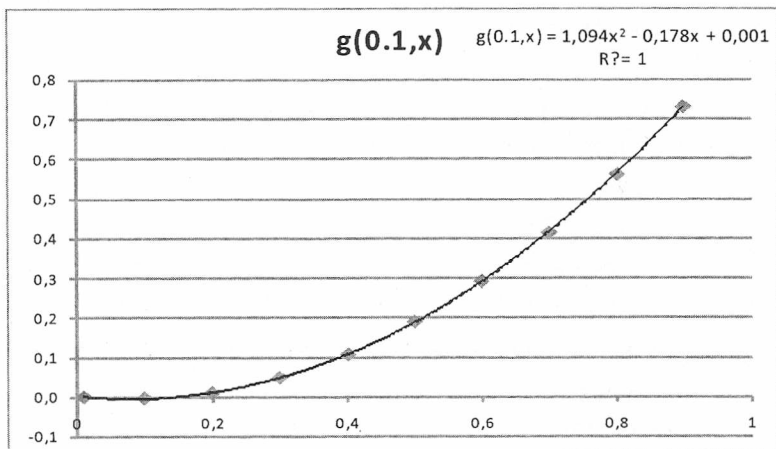


Рис.2. Вигляд управляючої функції $g(t, x)$ і її рівняння в момент часу $t = 0.1$ с.

З плином часу картина змінюється і при $t = 1$ с коливання струни та управляюча функція приймають вигляд показаний на рис. 3 і рис. 4. Характери коливань та впливу управляючої функції на струну для їх гасіння залишаються незмінними, проте трохи змінюється їх потужність.

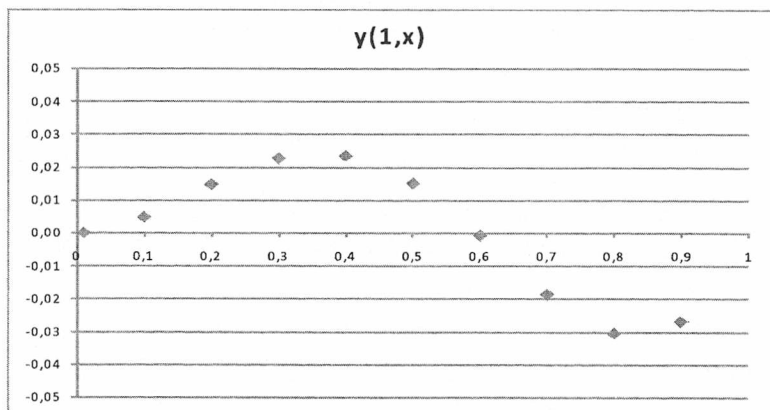


Рис.3. Вигляд коливань струни в момент часу $t = 1$ с.

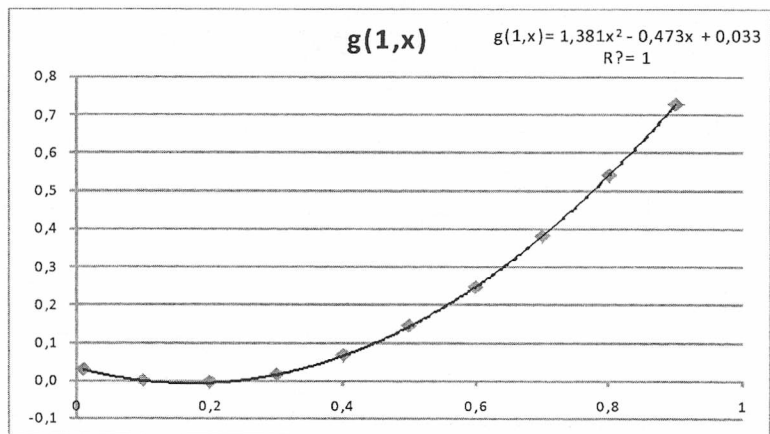


Рис.4. Вигляд управляючої функції $g(t,x)$ і її рівняння в момент часу $t = 1$ с.

Як бачимо з рисунків, коливання мають тенденцію до затухання водночас зі зменшенням впливу управляючої функції на

струну, що більш чітко видно на відповідних графіках для часу $t = 1.7$ с (рис.5, 6). Разом з цим, чітко вбачається тенденція до зміщення точки перетину функції $y(t,x)$ з віссю x від центру струни в сторону її правого кінця.

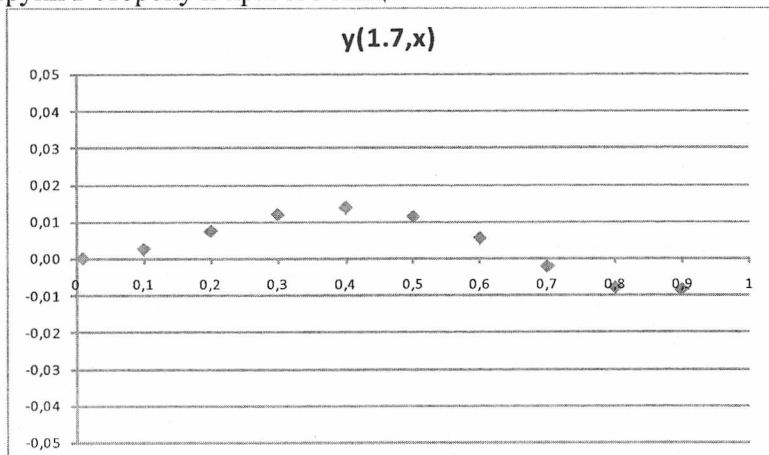


Рис.5. Вигляд коливань струни в момент часу $t = 1.7$ с.

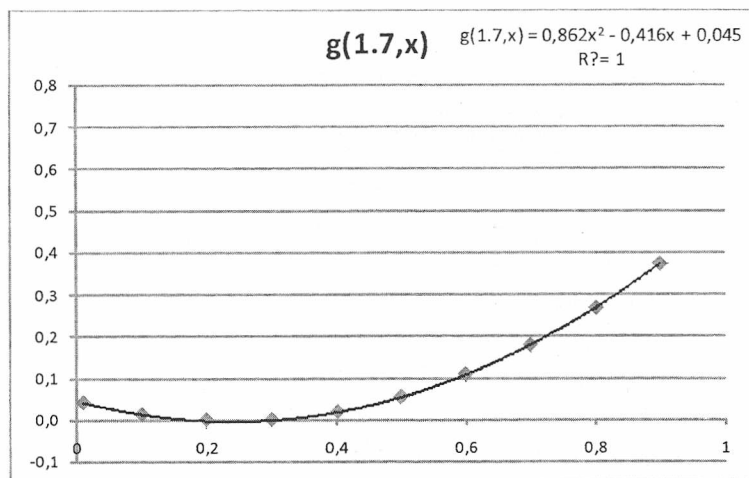


Рис.6. Вигляд управляючої функції $g(t,x)$ і її рівняння в момент часу $t = 1.7$ с.

Позитивна тенденція до затухання коливань зберігається і вже через дві секунди після їх початку можна спостерігати дуже низьку інтенсивність збудження струни водночас із значним послабленням впливу управляючої функції.

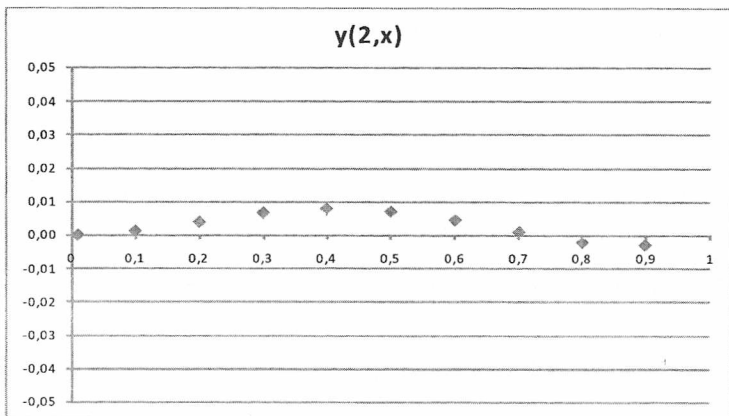


Рис.7. Вигляд коливань струни в момент часу $t = 2$ с.

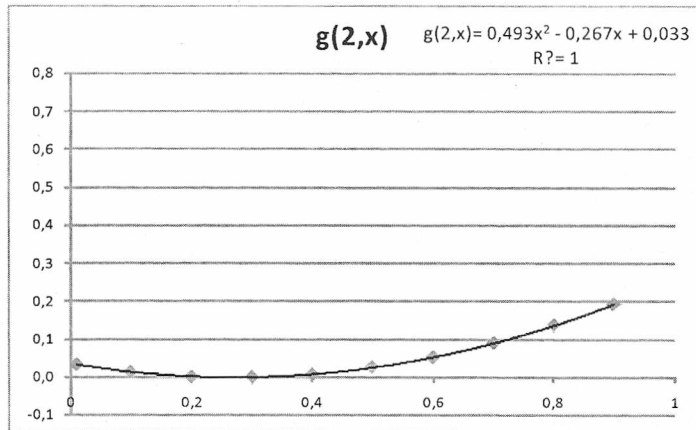


Рис.8. Вигляд управляючої функції $g(t,x)$ і її рівняння в момент часу $t = 2$ с.

Таким чином, коливання повністю гасяться за час $t = 2.356$ с, про що свідчать наступні графіки. З них видно, що струна прийшла у стан повного спокою, а управляюча функція не здійснює ніякого на неї впливу.

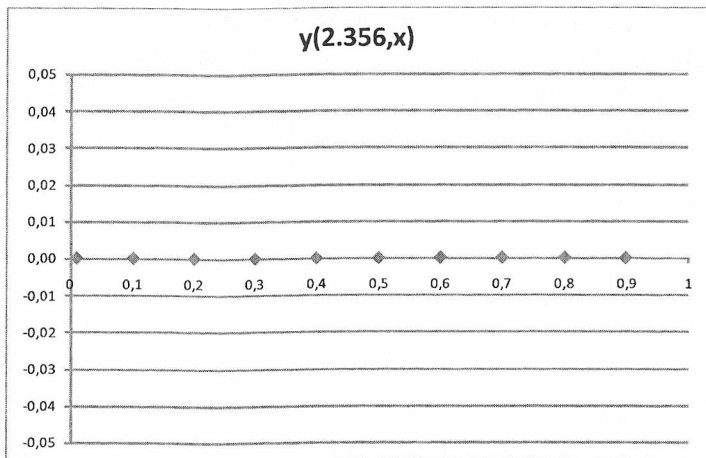


Рис.9. Згаслі коливання струни за час $t = 2.356$ с.

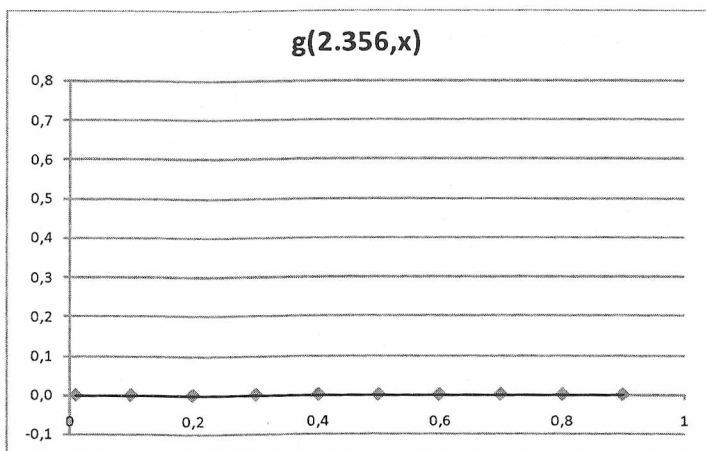


Рис.10. Вигляд управляючої функції $g(t, x)$ в момент часу $t = 2.356$ с.

Побудувавши усі графіки коливань струни на одній системі координат можна детальніше роздивитися динаміку їх гасіння (рис. 11).

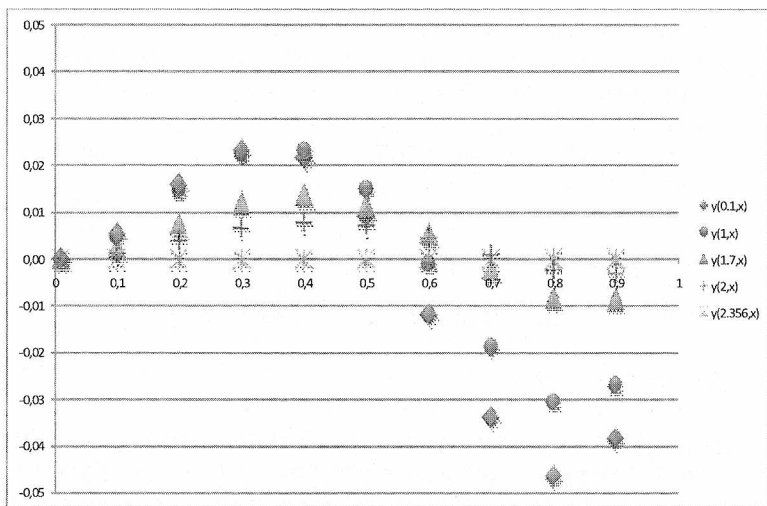


Рис.11. Динаміка коливань струни.

Отже, за час $t = 2.356$ с струна повертається у стан спокою, що свідчить про працездатність управляючої функції та вказує на те, що для гасіння коливань струни у подібних випадках управляючу функцію можна шукати серед функцій схожого вигляду. Також, при порівнянні з результатами задач розглянутих у роботах Атамуратова А. Ж. [3, 4, 5], можна дійти висновку, що розглянута задача має потенціал до вдосконалення, оскільки коливання можна погасити за меншу кількість часу. Це дає підставу розглянути інші значення основних параметрів та вхідних даних, а також шукати більш ефективні вигляди управляючих функцій.

Список використаних джерел:

1. Асланов С. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2006. – № 7. – С. 28-35.
2. Асланов С. Ж. Расчет оптимальных режимов гашения колебаний механических систем: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.18 / Асланов Сергей Жамболатович. – М., 2001. – 101с.
3. Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. О гашении колебаний балки. // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. Том 50(1). – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – С. 53-58.

4. Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. О гашении колебаний сложных механических структур // Авиакосмическая техника и технология. – 2012 – №4. – С. 54-59.
5. Атамуратов А. Ж. Численное исследование точечного демпфера для задачи гашения колебаний балки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2015. – № 2. – С. 35-46.

О.В. ВІХРОВА, Н.А. ЗІНОНОС

УДК 378.016:51-054.6

**ПЕРЕВІРКА РІВНЯ ПІДГОТОВЛЕНОСТІ ІНОЗЕМНИХ
СТУДЕНТІВ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ
ДИСЦИПЛІН У ВІТЧИЗНЯНИХ ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ
ОСВІТИ**

Стаття присвячена технології перевірки рівня предметних знань та комунікативних умінь студентів-іноземців, які навчаються на підготовчому відділенні вітчизняного університету та планують здобувати вищу освіту у нашій країні. Узагальнено результати експериментальної роботи на прикладі перевірки рівня знань з математики.

Ключові слова: *студенти-іноземці, підготовче відділення вітчизняного університету, рівень математичних знань.*

Our purpose in this article is to consider the technology of checking the level of subject knowledge in mathematics and communication skills of foreign students who are studying at the preparatory department of the national university and plan to obtain higher education in our country. The results of experimental work are generalized.

Key words: *foreign students, preparatory department of the national university, level of mathematical knowledge.*

Складовою частиною зовнішньополітичної діяльності кожної розвиненої держави є міжнародні зв'язки в освітній галузі. Наша країна, як більшість європейських країн, загальною метою міжнародної діяльності в галузі освіти визначила інтеграцію як рівноправного партнера у світову освітню спільноту, вдоскона-