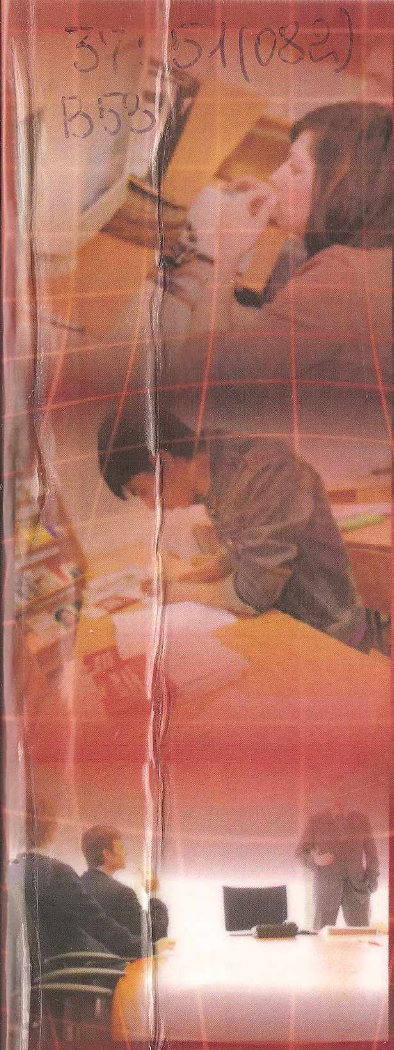

ВІСНИК

МІЖНАРОДНОГО ДОСЛІДНОГО ЦЕНТРУ

"ЛЮДИНА: МОВА, КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ"

ТОМ 42
2018

АКТУАЛЬНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Т.С. АРМАШ, Г.М. БІЛОУСОВА

УДК 517.272: 626.87

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ВИРОБНИЦТВА, ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЯКИХ ЗАСТОСОВУЄТЬСЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ

В статті розглядаються приклади деяких конкретних виробничих задач з теми «Меліорація», розв'язаних методами диференціального числення на знаходження критичної глибини каналу.

***Ключові слова**: критична глибина, поперечний переріз каналу, найбільше і найменше значення функції.*

The article examines examples of some specific production tasks on the topic "Melioration", solved by the methods of differential calculus to find the critical depth of the channel.

***Keywords**: critical depth, channel cross-section, largest and smallest values of the function.*

Однією з основних задач курсу вищої математики для технологічних спеціальностей є формування навичок описання реальних об'єктів математичними термінами, уміння добирати, аналізувати, оцінювати результати розв'язку поставленої задачі, переробляти, освоювати, сортувати інформацію з різних джерел.

Використання задач для мотивації знань, умінь, методів створює умови для реалізації на етапі введення нового навчального матеріалу міжпредметних зв'язків, пов'язує навчання математики з життям.

Добір текстових задач з практичним змістом ілюструє не лише необхідність набувати нові предметні знання і вміння, але й застосовувати набуті під впливом цієї необхідності знання для розв'язання поставлених завдань.

Розглянемо декілька реальних практичних задач з теми «Меліорація», під час розв'язування яких застосовуються методи диференціального числення.

В меліоративній практиці будуються канали або лотки з поперечним перерізом в формі прямокутника, трикутника, трапеції, сегмента, параболи. Для каналів такої форми виконують розрахунки гідравлічно найвигіднішого профілю. Площу поперечного перерізу каналу, повністю заповненого водою, називають «живим перерізом», а довжину границі такого перерізу називають «мокрим периметром» каналу.

Встановлено, що з усіх каналів з заданим «живим перерізом» найбільшою пропускною здатністю і одночасно найменшою фільтрацією є канали з найменшим «мокрим периметром». Такі канали мають гідравлічно найвигідніший профіль.

Задачі, в яких перерізом каналу є рівнобедрена трапеція або сегмент розглядаються в навчальній літературі Г. Берманом [1, с. 89-90], І. Ляшко[2, с. 349].

Метою статті є проілюструвати розв'язування практичних задач на оптимізацію з теми «Меліорація» засобами диференціального числення.

Розглянемо задачі з іншим профілем перерізів.

Задача 1. При якому співвідношенні глибини до ширини канал прямокутного перерізу має гідравлічно найвигідніший профіль?

Розв'язання. Нехай x – ширина каналу, а S – його «живий переріз». Тоді глибина каналу $\frac{S}{x}$, а його «мокрий периметр»:

$$P(x) = x + \frac{2S}{x}, \quad x \in (0; +\infty),$$

$$P'(x) = \frac{x^2 - 2S}{x^2}, \; P'(x) = 0 \text{ коли } x = \sqrt{2S}.$$

Так як $P''(x) = \frac{4S}{x^3} > 0$, для всіх $x \in (0; +\infty)$, то функція $P(x)$ в точці $x = \sqrt{2S}$ досягає найменшого значення.

Отже, відношення глибини каналу $\frac{S}{\sqrt{2S}}$ до його ширини $\sqrt{2S}$ дорівнює $\frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Знайти критичну глибину каналу прямокутного перерізу шириною b, якщо кількість води, протікає через поперечний переріз потоку в одиницю часу (витрати води) дорівнює Q.

Розв'язання. Нехай глибина каналу – h. Тоді його «живий переріз» $S = b \cdot h$, а механічна енергія одиниці маси води, яка протікає в одиницю часу через «живий переріз» потоку обчислимо за формулою:

$E(h) = gh + \frac{Q^2}{2S^2}$ [3, с. 26], де g – прискорення вільного падіння, тоді $E(h) = gh + \frac{Q^2}{2b^2h^2}$.

Знайдемо, при якому значення змінної $h > 0$ функція $E(h)$ набуває найменше значення:

$$E'(h) = g - \frac{Q^2}{2b^2h^3}.\ E'(h) = 0 \text{ при } h = h_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}.$$

Легко переконатися, що в точці h_0 функція $E(h)$ досягає найменшого значення.

Відповідь. $h_0 \approx 0{,}47\sqrt[3]{\left(\frac{Q}{b}\right)^2}$.

Зауваження. Глибина потоку h_0 при якій його енергія $E(h)$ для заданої витрати Q досягає найменшого значення, називається *критичною глибиною*.

Поняття критичної глибини необхідно для оцінки поведінки потоку (при $h > h_0$ потік спокійний, при $h < h_0$ – бурхливий) і для виконання різного роду розрахунків [3, с. 26].

Задача 3. Знайти критичну глибину каналу з витратою води Q переріз якого:

а) рівнобедрений трикутник з коефіцієнтом закладання відсотків m, де $m = ctg\ \alpha$, де α – кут при основі трикутника;

б) парабола $y = \frac{x^2}{2p}$.

Розв'язання.

а) Якщо h – глибина каналу, то його «живий переріз»: $S = mh^2$ тоді $E(h) = gh + \frac{Q^2}{2m^2h^4}$, $h > 0$. Аналогічно до попереднього:

$E'(h) = g - \frac{2Q^2}{m^2h^5}$. $E'(h) = 0$ при $h_0 = \sqrt[5]{\frac{2}{g}\left(\frac{Q}{m}\right)^2}$ або

$h_0 \approx 0{,}73\sqrt[5]{\left(\frac{Q}{m}\right)^2}$.

б) Нехай глибина каналу $OC = h$, ширина $AB = b$ (рис. 1).

«Живий переріз» обчислюємо як площу плоскої фігури, обмеженої функціями: $y = h$ – зверху і $y = \frac{4hx^2}{b^2}$ – знизу.

$$S = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(h - \frac{4hx^2}{b^2}\right)dx = \frac{2}{3}bh.$$

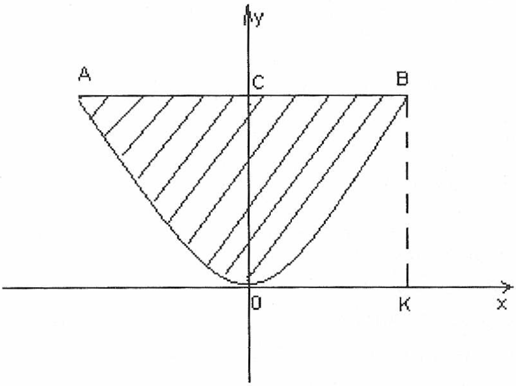

Рис. 1. Графік до задачі 3, б)

Використаємо координати точки B $(\frac{b}{2}; h)$, з рівнянням параболи $y = \frac{x^2}{2p}$ знаходимо $b = 2\sqrt{2ph}$; $S = \frac{4}{3}h\sqrt{2ph}$; $E(x) = gh + \frac{9Q^2}{64ph^3}$.

Найменше значення функція E(h) досягає в точці

$h_0 = \sqrt[4]{\frac{27Q^2}{64gp}}$ або $h_0 \approx 0{,}46\sqrt[4]{\frac{Q^2}{p}}$.

Відповідь. а) $0{,}73\sqrt[5]{\left(\frac{Q}{m}\right)^2}$, б) $0{,}46\sqrt[4]{\frac{Q^2}{p}}$.

Велика кількість задач, що розв'язуються засобами вищої математики з різних галузей виробництва можна знайти в роботах І. Ляшко, В. Петрова. Ці задачі можна використовувати в якості прикладів під час проведення лекцій і практичних занять, як матеріал для курсових робіт.

Список використаних джерел:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1971. – 416 с.
2. Ляшко И. И. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 1. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай. – К. : Вища школа, 1974. – 680 с.
3. Петров В. А. Математический анализ в производственных задачах / В. А. Петров. – М. : Просвещение, 1990. – 64 с.