Готуємось до Олімпіади!

В. М. ЗДЕЩИЦ, Г. П. ПОЛОВИНА, А. В. ЗДЕЩИЦ

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ФІЗИЧНИХ ОЛІМПІАД

Кривий Ріг
Видавець Роман Козлов
2019

УДК 539.19 (076)
З-46

Рецензенти:

Коновал Олександр Андрійович, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету;

Величко Степан Петрович, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики та методики її викладання Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка;

Шарко Валентина Дмитрівна, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Херсонського державного університету

Здещиц В. М.

З-46 **Молекулярна фізика і термодинаміка. Розв'язання задач фізичних олімпіад** : навч.-метод. посібник / Валерій Максимович Здещиц, Галина Петрівна Половина, Анастасія Валеріївна Здещиц. – Кривий Ріг : Вид. Роман Козлов, 2019. – 276 с.

ISBN 978-617-7643-52-3

У збірнику подано умови задач теоретичних турів фізичних олімпіад та задач «олімпіадного» типу, їх розв'язки. Мета посібника – допомогти учням та вчителям у поглибленому вивченні фізики, зорієнтувати їх на міжнародний рівень фізичних знань, сприяти залученню до олімпійського руху ширшого кола талановитих школярів шляхом їх ознайомлення з завданнями фізичних олімпіад.

Книга рекомендується для вдосконалення навичок самостійного розв'язування задач з фізики, підготовки до олімпіад та інших творчих змагань школярів.

Книга буде корисною для учнів середніх загальноосвітніх і професійних навчальних закладів, які виявляють підвищений інтерес до вивчення фізики, а також для учителів фізики і студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 539.19 (076)

ISBN 978-617-7643-52-3

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Однією з форм популяризації і пропаганди природничо-наукових знань серед молоді є фізичні олімпіади, які проводяться в багатьох країнах світу.

Регулярно проводяться Міжнародні фізичні олімпіади, у яких з 1968 року беруть участь й українські школярі.

Олімпіади з фізики сприяють виявленню найбільш обдарованих учнів, розвивають творчі здібності школярів, асоціативне мислення, кмітливість, дозволяють правильно зорієнтуватися їм у виборі майбутньої професії, виховують у них прагнення до самостійного пошуку знань.

Важливо, що для розв'язання олімпіадних задач з фізики потрібні знання та уміння, які не виходять за рамки програми середньої школи. Олімпіадні задачі мають творчий характер, вони вимагають застосування відомих фізичних законів у нестандартній для учнів ситуації, розраховані на систематичне, послідовне дослідження фізичного явища, хоча не виключають можливості оригінального розв'язку.

У цій книзі наведено задачі теоретичних турів з розв'язками, які пропонувалися в різні роки на районних, обласних і всеукраїнських фізичних олімпіадах школярів, московських, Соросівських фізичних олімпіадах, а також задачі «олімпіадного» типу, які пропонувалося розв'язати читачам журналу "Квант", та на вступних іспитах провідних вищих навчальних закладів.

Книга буде корисною для учнів середніх загальноосвітніх і професійних навчальних закладів, які виявляють підвищений інтерес до вивчення фізики, а також для учителів фізики і студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Автори висловлюють щиру подяку доценту кафедри інженерній педагогіки та мовної підготовки ДВНЗ "Криворізький національний університет" Л. В. Козак за допомогу в підготовці книги до друку.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ

1.1. Основи молекулярно-кінетичної теорії

Молекулярна фізика вивчає фізичні властивості речовин, ґрунтуючись на тому, що всі тіла складаються з атомів, молекул або іонів, які перебувають у безперервному хаотичному русі.

Атоми і молекули. Найменшу стійку частку хімічного елемента, що зберігає його хімічні властивості, називають *атомом*. Сполука з двох або більшої кількості атомів — це *молекула*. Діаметр атомів і молекул ~ 10^{-10} м.

Кількість атомів (молекул) у будь-якому тілі дуже велика. Наприклад, у 1 см^3 газу при нормальних умовах знаходиться $2{,}7\cdot10^{19}$ молекул, рідині та твердому тілі ~ 10^{22} молекул. Маса молекули або атома дуже мала, наприклад, маса атома вуглецю m_{0C} = $1{,}993\cdot10^{-26}$ кг. Для зручності користуються відносними значеннями мас молекул (або атомів). *Відносною молекулярною (або атомною) масою речовини M_r називають відношення маси молекули (або атома) m_0 даної речовини до однієї дванадцятої маси m_{0C} ізотопу ^{12}C атома вуглецю*:

$$M_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12} = \frac{12m_0}{m_{0C}}. \qquad (1.1)$$

Відносна молекулярна або атомна маса M_r — безрозмірна величина.

Фізична величина, зумовлена кількістю специфічних структурних елементів – молекул, атомів або іонів, з яких складається речовина, називається кількістю речовини ν. У СІ введено одиницю кількості речовини — *моль*.

Моль містить стільки молекул (або атомів, іонів, електронів), скільки атомів у 0,012 кг *вуглецю.* Один моль будь-якої речовини містить однакову кількість атомів або молекул. Це число називають числом Авогадро:

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}. \qquad (1.2)$$

Кількість молекул у ν молях речовини визначається за формулою:

$$N = \nu N_A. \qquad (1.3)$$

Масу одного моля речовини називають *молярною масою* μ (мю).

$$\mu = m_0 N_A, \qquad (1.4)$$

де m_0 — маса одного структурного елемента (атома або молекули). Маса будь-якої кількості речовини ν дорівнює

$$m = \nu\mu. \qquad (1.5)$$

Молярна маса в СІ вимірюється в кілограмах на моль (кг/моль).

Молекулярна фізика ґрунтується на *молекулярно-кінетичній теорії* будови речовини.

Основні положення молекулярно-кінетичної теорії такі:

1. *Усі речовини складаються з великої кількості частинок* (атомів, молекул та іонів).

2. *Частинки речовини безперервно й хаотично рухаються.* Цей хаотичний рух називають *тепловим*.

3. *Частинки взаємодіють одна з одною.*

Експериментальними підтвердженнями молекулярно-кінетичної теорії є броунівський рух, явища переносу та інші явища.

Броунівський рух. Безпосереднім доказом хаотичного безперервного руху молекул є спостережуваний під мікроскопом безладний рух зважених у рідині малих (1 – 10 мкм) частинок твердої речовини, інтенсивність якого з підвищенням температури зростає. Цей рух не залежить від зовнішніх причин і зумовлений ударами молекул рідини.

Уперше явище хаотичного руху малих частинок (спори плауна) спостерігав у 1827 р. англійський ботанік Р. Броун (1773— 1853). Рух у рідині або газі малих частинок під дією безладних поштовхів молекул, що перебувають у тепловому русі, називають *броунівським*, а самі частинки – *броунівськими частинками*.

Явища переносу. Переміщенням молекул речовини пояснюються такі явища, як *внутрішнє тертя*, *дифузія* і *теплопровідність*. Їх називають *явищами переносу*. У цих явищах, пов'язаних з неоднорідностями густини, температури, швидкості переміщення окремих шарів речовини, відбувається просторове перенесення енергії (теплопровідність), маси (дифузія), імпульсу (внутрішнє тертя). У результаті поряд з хаотичним рухом виникає упорядкований, направлений рух молекул речовини.

Розподіл молекул за швидкостями. При зіткненні швидкість молекул змінюється. У газі, що знаходиться в стані рівноваги при даній температурі, встановлюється деякий стаціонарний, незмінний з часом розподіл молекул за швидкостями (рис. 1.1). Цей розподіл описується функцією $f(\upsilon)$, яка називається *розподілом Максвелла*. Функція $f(\upsilon)$ визначає відносну кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від υ до $\upsilon + d\upsilon$, тобто

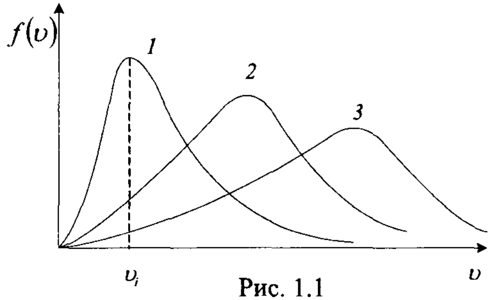


Рис. 1.1

$$\frac{dN(\upsilon)}{N} = f(\upsilon)d\upsilon .$$

Швидкість υ_i, що відповідає точці максимуму на кривій розподілу Максвелла називають *найімовірнішою швидкістю*. Криві *1*, *2* і *3* на рис. 1.1 відповідають трьом різним значенням температури ($T_1 < T_2 < T_3$). Як видно, з підвищенням температури збільшується υ_i, а частина молекул, які мають цю швидкість, зменшується. Значення

$$\upsilon_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \qquad (1.6)$$

де T — абсолютна температура, k – стала Больцмана, m — маса молекули.

Взаємодія атомів і молекул речовини. Між атомами, молекулами або іонами одночасно діють сили взаємного притягання і відштовхування. На відстанях між молекулами, які перевищують 10^{-9} м, силами міжмолекулярної взаємодії можна нехтувати. На малих відстанях, під час їх взаємодії, між сусідніми електронами і ядрами виникають *короткодіючі сили*.

На відстанях $r \sim 10^{-9}$ м між центрами атомів чи молекул найбільш інтенсивною є сила взаємного притягання

$$F_1(r) = -a / r^7. \qquad (1.7)$$

Як видно, сила $F_1(r)$ зі збільшенням r швидко зменшується.

На ще менших відстанях $r \sim 10^{-10}$м найбільш інтенсивною є сила відштовхування

$$F_2(r) = -b / r^{13}. \qquad (1.8)$$

Як видно, сила $F_2(r)$ зі збільшенням r зменшується ще швидше.

Сталі a і b у формулах (1.7), (1.8) залежать від речовин, тобто від структури молекули й типу сил взаємодії.

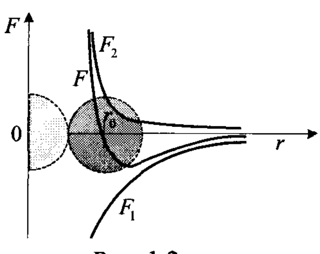


Рис. 1.2

Графік результуючої сили $F(r) = F_1(r) + F_2(r)$ наведено на рис. 1.2. На відстані r_0, що приблизно дорівнює сумі радіусів молекул чи атомів, сила $F(r_0) = 0$. Коли $r > r_0$, переважає сила притягання, а коли $r < r_0$ — сила відштовхування. При малому зміщенні молекул чи атомів з положення рівноваги сила притягання або відштовхування лінійно залежить від r. Залежністю сили взаємодії від відстані пояснюється виникнення сил пружності під час стискання і розтягування твердих тіл.

Будова тіл з погляду молекулярно-кінетичної теорії. У газах відстань між атомами або молекулами набагато більша за їхні розміри. Тому гази досить легко стискуються.

Молекули або атоми газу між зіткненнями рухаються рівномірно й прямолінійно зі швидкостями ~ 500 м/с. Стикаючись, вони змінюють напрям і швидкість руху, тому траєкторією молекули є ламана лінія. Кожна молекула за одну секунду отримує близько 10^8 — 10^{10} поштовхів з боку інших молекул.

У рідинах відстані між молекулами набагато менші, ніж у газах. Кожна молекула деякий час здійснює коливання біля положення рівноваги в оточенні сусідніх молекул, а потім перестрибує в нове положення рівноваги на відстань, що дорівнює середній відстані між молекулами.

Під впливом зовнішньої сили молекули рідини роблять стрибки переважно в напрямі дії цієї сили. Унаслідок цього рідина тече, набуває форми посудини, у якій міститься. При цьому зберігається об'єм рідини.

У твердих тілах атоми, молекули або іони знаходяться досить близько одне від одного і коливаються біля певних положень рівноваги. Ці положення утворюють упорядковану періодичну просторову решітку, яку називають *кристалічною*. Тверді тіла зберігають не тільки об'єм, а і форму. Молекула твердого тіла часом змінює одне положення рівноваги на інше, сусіднє, чим і пояснюється процес дифузії.

1.2. Теплові явища. Термодинаміка

У термодинаміці вивчаються *термодинамічні системи* – макроскопічні об'єкти, які можуть обмінюватися енергією як один з одним, так і з зовнішнім середовищем. Опис стану термодинамічної системи проводять за допомогою фізичних величин, які називаються *параметрами стану системи*.

Якщо в системі не тільки всі параметри постійні в часі, але і немає ніяких стаціонарних потоків за рахунок дії яких-небудь зовнішніх джерел, то такий стан системи називається *рівноважним* (*стан термодинамічної рівноваги*).

Система, що не обмінюється із зовнішніми тілами ні енергією, ні речовиною, називається *ізольованою*.

Перший, або основний, постулат термодинаміки: в ізольованої системи існує стан термодинамічної рівноваги, у яку вона приходить з часом і ніколи самовільно вийти з нього не може.

Положення про існування температури як особливої функції стану рівноважної системи є *другим початковим положенням термодинаміки*. Його іноді називають «*нульовим законом термодинаміки*».

При взаємодії термодинамічної системи з навколишнім середовищем може відбуватися обмін енергією. Можливі два різні способи передавання енергії від системи до зовнішніх тіл. Спосіб передавання енергії, пов'язаний зі зміною зовнішніх параметрів, називається *роботою* A. Спосіб передавання енергії без зміни зовнішніх параметрів — теплотою Q, а сам процес передавання енергії — *теплообміном*.

Теплообмін. Частинки речовини внаслідок поштовхів з боку інших частинок змінюють свою кінетичну енергію. Однак середня кінетична енергія частинок речовини в стані термодинамічної рівноваги однакова.

Мірою середньої кінетичної енергії хаотичного руху частинок речовини є *температура*. Теплообмін відбувається між тілами або їх частинами, нагрітими до різних температур. У результаті теплообміну частинки з більшою кінетичною енергією (більш нагріте тіло) передають частину своєї енергії частинкам з меншою кінетичною енергією (менш нагріте тіло). Напрям теплообміну між тілами вказує різниця температур: енергія передається від тіла з вищою до тіла з нижчою температурою. Якщо температура тіл однакова, теплообмін між ними не відбувається. Тіла в стані термодинамічної рівноваги мають однакову температуру. Різниця температур характеризує ступінь відхилення даного тіла від теплової рівноваги з іншим тілом.

Вимірювання температури. Зміна температури речовини стає причиною зміни параметрів стану речовини, наприклад, об'єму V, тиску p, а також її електричних, магнітних, оптичних властивостей тощо. Спостерігаючи за зміною однієї з цих фізичних величин, можна реєструвати зміну температури. Прилад для вимірювання температури — *термометр* — обов'язково приводять до теплової рівноваги з речовиною, температуру якої треба виміряти. Поняття температури має сенс тільки для рівноважних станів термодинамічної системи.

За нуль температури в шкалі Цельсія прийнято температуру t, ^{0}C, при якій перебувають у тепловій рівновазі вода і лід, а за 100°С — температуру кипіння води яри нормальному тиску (p_0 = 101325 Па). *Градус Цельсія* — це одна сота різниці між температурою кипіння води і температурою, при якій тане лід.

У шкалі Кельвіна за нуль (T = 0 К) прийнято температуру t = - 273, 15°С. Зв'язок між термодинамічною температурою T і температурою за шкалою Цельсія:

$$T = t + 273°\text{C}. \tag{1.9}$$

Газові закони. Деяка маса газу m може бути в різних станах, тобто мати різні значення термодинамічних параметрів, наприклад, об'єму V, тиску p і температуру T. Зміна одного з термодинамічних параметрів стає причиною зміни решти. Будь-яка зміна в термодинамічній системі, пов'язана зі зміною хоча б одного з її термодинамічних параметрів, називається *термодинамічним процесом.* Вивчення *ізопроцесів,* у яких один з трьох параметрів V, або p, чи T залишається незмінним, дає змогу встановити газові закони.

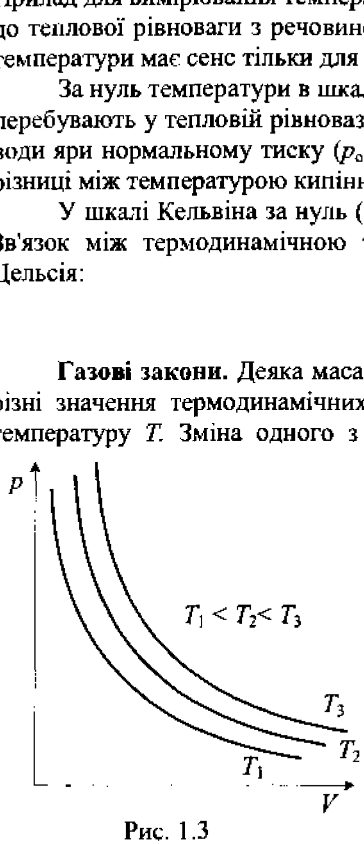


Рис. 1.3

Закон Бойля-Маріотта. За законом Бойля-Маріотта *тиск даної маси газу при сталій температурі обернено пропорційний об'єму газу.* Отже,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}, \quad \text{або} \quad p_1V_1 = p_2V_2 = \text{const}, \tag{1.10}$$

де p_1 — тиск газу, коли його об'єм V_1, а p_2 — тиск газу, коли об'єм його V_2.

Криву залежності тиску газу від його об'єму при сталій температурі називають *ізотермою*. У координатах p, V ізотерма графічно зображується *гіперболою*. Вищій температурі відповідає гіпербола, що лежить вище.

Закон Бойля-Маріотта не справджується, коли тиск більший за 200 кПа.

Закон Гей-Люссака. Залежність об'єму газу від температури при сталому тиску встановив французький учений Гей-Люссак (1778—1850). Процес зміни стану системи при сталому тиску називають *ізобарним*. *Відносна зміна об'єму даної маси газу в ізобарному процесі прямо пропорційна зміні температури t.* Отже,

$$\frac{V - V_0}{V} = \alpha t, \tag{1.11}$$

або

$$V = V_0(1 + \alpha t), \tag{1.12}$$

де V_0 — об'єм газу при t = 0°C, а V — його об'єм при температурі t; α — термічний коефіцієнт об'ємного розширення, він дорівнює відносній зміні об'єму газу, якщо газ нагріти при сталому тиску на один градус.

Дослід показує, що термічний коефіцієнт об'ємного розширення однаковий для всіх газів:

$$\alpha \approx \frac{1}{273} K^{-1}. \tag{1.13}$$

Криву (рис. 1. 4), яка графічно зображує залежність об'єму газу від температури при сталому тиску, називають *ізобарою*. Об'єм даної маси газу в умовах ізобарного процесу з підвищенням температури лінійно збільшується.

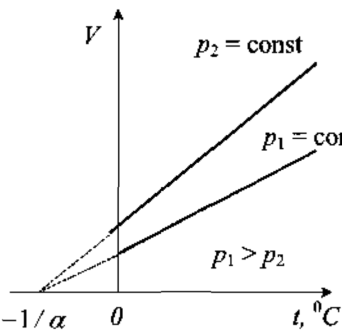


Рис. 1. 4

У координатах V, t ізобара зображується прямою. Якщо цю пряму продовжити в область низьких температур, вона перетне вісь температур у точці $t \approx -273^oC$. Вищому тиску відповідає нижча ізобара.

Закон Гей-Люссака в області низьких температур не можна використовувати, оскільки об'єм газу не перетворюється на нуль при $t \sim -273^0C$, як це випливає з формули (1.7). Усі гази при достатньо сильному охолодженні перетворюються на рідину.

Закон Шарля. Залежність тиску газу від температури при сталому об'ємі експериментально встановив французький фізик Шарль у 1787 р. Процес зміни стану системи при сталому об'ємі називають *ізохорним*. *Тиск даної маси газу при сталому об'ємі пропорційний його абсолютній температурі*, тобто

$$p = p_0 \gamma T, \tag{1.14}$$

де p_0 — тиск газу при $t = 0°C$, γ — *термічний коефіцієнт тиску газу*, що дорівнює термічному коефіцієнту об'ємного розширення:

$$\gamma = \alpha \approx \frac{1}{273} K^{-1}. \tag{1.15}$$

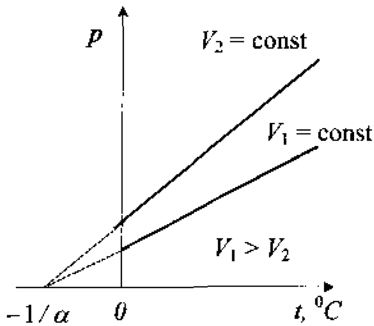


Рис. 1. 5

Залежність тиску газу від температури при сталому об'ємі графічно (рис. 1.5) зображується прямою лінією, що називається *ізохорою*. Меншому об'єму відповідає ізохора, що лежить вище.

Ідеальний газ. Фізична модель, згідно з якою:

1) власний об'єм молекул газу малий у порівнянні з об'ємом посудини;

2) між молекулами газу відсутні сили взаємодії;

3) зіткнення молекул газу між собою й зі стінками посудини абсолютно пружні - називається *ідеальним газом*.

Виходячи з цього ідеальний газ можна розглядати як сукупність молекул - кульок, що безладно рухаються, мають малий власний об'єм і не взаємодіють один з одним на відстані.

Газові закони справджуються саме для таких газів. Стан більшості реальних газів за умов атмосферного тиску і при кімнатній температурі мало відрізняється від стану ідеального газу.

Якщо використати абсолютну шкалу температур, то газові закони можна записати в простішій формі.

1. Закон Гей-Люссака:

$$V = \alpha V_0 T, \tag{1.16}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} = \text{const}. \tag{1.17}$$

Відношення об'ємів даної маси газу при сталому тиску дорівнює відношенню його абсолютних температур.

2. Закон Шарля:

$$p = \gamma p_0 T, \tag{1.18}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = \text{const}. \tag{1.19}$$

Відношення тисків даної маси газу при сталому об'ємі дорівнює відношенню його абсолютних температур.

Рівняння стану ідеального газу. Якщо змінювати всі три параметри p, V і T, що характеризують стан газу, то добуток тиску даної маси газу на об'єм, поділений на абсолютну температуру,— величина стала:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}=\text{const}. \tag{1.20}$$

Числове значення сталої в (1.20) залежить від кількості газу та його хімічного складу. Це рівняння стану ідеального газу називають *рівнянням Клапейрона.*

Італійський фізик А. Авогадро (1776—1856) установив, що *в однакових об'ємах газів при однакових температурах і тисках міститься однакова кількість молекул* (*закон Авогадро*). Згідно із цим законом, один моль різних газів при однакових тисках і температурах займає однаковий об'єм. За *нормальних умов* ($T_0 = 273$ К, $p_0 =$ 101,3 кПа) об'єм моля будь-якого газу становить:

$$V_{0\mu}=0{,}0224\ \text{м}^3/\text{моль}. \tag{1.21}$$

Для моля газу стала в правій частині рівняння (1.20) однакова для всіх газів:

$$\frac{p_0V_{0\mu}}{T_0}=R=8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}. \tag{1.22}$$

Сталу R називають *універсальною газовою сталою.* Для одного моля ідеального газу згідно (1.20) і (1.22) матимемо:

$$pV_\mu=RT. \tag{1.23}$$

Кількість молів у деякій масі газу $\nu=m/\mu$, тоді $V=\nu V_\mu=\frac{m}{\mu}V_\mu$ і загальна форма рівняння стану довільної маси ідеального газу має вигляд:

$$pV=\nu RT=\frac{m}{\mu}RT. \tag{1.24}$$

Рівняння (1.24) називають *рівнянням Менделєєва — Клапейрона.*

Закон Дальтона. Якщо в об'ємі V знаходиться суміш газів, які не реагують один з одним, то, застосовуючи рівняння Менделєєва — Клапейрона для кожного газу, дістанемо:

$$p=p_1+p_2+...+p_n=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}+...+\frac{m_n}{\mu_n}\right)\frac{RT}{V}, \tag{1.25}$$

де m_i, μ_i (i =1, 2, .., n) — маса і молярна маса i-го газу.

Тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, з яких складається ця суміш. Цей закон установив англійський фізик Дж. Дальтон.

Робота в термодинаміці. Змінити стан газу можна нагріваючи газ або виконавши роботу. За законом збереження енергії робота A, яка виконується над газовою системою зовнішніми силами, чисельно дорівнює і протилежна за знаком роботі A', яку сама система виконує над зовнішнім середовищем:

$$A = -A'. \tag{1.26}$$

В ізобарному процесі (p = const) в результаті зміни об'єму газу від V_1 до V_2 робота дорівнює:

$$A' = p(V_2 - V_1) = p\Delta V; \quad \Delta V = V_2 - V_1. \tag{1.27}$$

Отже, під час розширення газу, коли $V_2 > V_1$, робота газу додатна ($A' > 0$), а робота зовнішньої сили від'ємна ($A < 0$). Під час стискування газу ($V_2 < V_1$), навпаки, робота газу від'ємна ($A' < 0$), а робота зовнішньої сили додатна ($A > 0$). У загальному випадку, коли $p \neq$ const, робота обчислюється за допомогою інтеграла. Наприклад, для ізобарного процесу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV. \tag{1.28}$$

Чисельно робота A дорівнює площі обмеженої графіком залежності p від V.

Кількість теплоти. Якщо об'єм газу залишається незмінним, а змінюються тиск і температура, газ не виконує роботи. При цьому змінюється його *внутрішня енергія*. Процес зміни внутрішньої енергії тіла без виконання роботи називають *теплопередачею*, а явище передавання тепла — *теплопровідністю*. Мірою зміни внутрішньої енергії в результаті теплопередачі є *кількість теплоти*.

Якщо енергія передається системі у формі теплоти, то вона йде тільки на збільшення внутрішньої енергії системи.

У СІ за одиницю кількості теплоти прийнято джоуль (Дж). Теплові властивості речовини характеризує їхня *питома теплоємність* c, тобто кількість теплоти, яку треба надати 1 кг речовини, щоб підвищити її температуру на 1 К. Одиниця питомої теплоємності Дж/(кг·К). Питома теплоємність залежить від того, при якому процесі відбувається передача теплоти. Щоб нагріти газ на 1 К при сталому об'ємі, йому треба передати меншу кількість теплоти, ніж для нагрівання його при сталому тиску, коли він розширюватиметься і виконуватиме роботу.

Питомі теплоємності при сталому об'ємі та сталому тиску рідких і твердих тіл мало різняться між собою, оскільки ці тіла мало розширюються під час нагрівання.

Для нагрівання тіла масою m від температури t_1 до t_2 треба надати йому кількість теплоти:

$$Q = cm(t_2 - t_1). \tag{1.29}$$

Кількість теплоти визначають спеціальним приладом — *калориметром*, будова якого забезпечує теплообмін між тілами в умовах ізоляції від впливу навколишнього середовища. Якщо тіло дістає теплоту, кількість теплоти $Q > 0$, якщо ж віддає, кількість теплоти $Q < 0$.

Рівняння теплового балансу. Під час теплообміну кількість теплоти, яку віддає більш нагріте тіло, дорівнює кількості теплоти, що її набуває менш нагріте тіло. Якщо в тепловому обміні бере участь кілька тіл, умова їхньої теплової рівноваги така:

$$c_1 m_1 (t_0 - t_1) + c_2 m_2 (t_0 - t_2) + \ldots + c_n m_n (t_0 - t_n) = 0. \tag{1.30}$$

Це рівняння виражає закон збереження енергії при тепловому обміні і називається *рівнянням теплового балансу*.

За допомогою калориметра, вивчаючи теплообмін між двома речовинами, питома теплоємність однієї з яких відома, можна визначити питому теплоємність другої речовини. У цьому разі рівняння теплового балансу буде:

$$c_1 m_1 (t_0 - t_1) + c_x m_2 (t_0 - t_2) = 0, \tag{1.31}$$

де t_1, t_2, t — відомі значення початкових і кінцевої температур, а m_1 та m_2 — маси даних речовин:

$$c_x = -\frac{c_1 m_1 (t - t_1)}{m_2 (t - t_2)}. \tag{1.32}$$

Знаючи c_1, за формулою (1.32) можна визначити c_x.

Джерела енергії. Енергія виділяється під час екзотермічних хімічних реакцій, виконання роботи (наприклад, у процесі тертя), проходження електричного струму (джоулеве тепло), ядерних реакцій тощо.

Як джерело енергії широко використовується реакція згоряння палива (кам'яного вугілля, нафти, бензину, торфу, дров, горючих газів). Кількість теплоти, що виділяється при повному згорянні 1 кг даного типу палива, називають *теплотою згоряння палива*. У СІ її вимірюють у Дж/кг.

Джерелом енергії є також їжа людини. Запас цієї енергії в 1 кг називають калорійністю їжі. Наприклад, середня калорійність білка і вуглеводів дорівнює близько 17100 кДж/кг, а жирів — 38900 кДж/кг.

Коефіцієнт корисної дії нагрівника. Під час згоряння палива не вся кількість теплоти витрачається на корисне нагрівання, частина — обов'язково розсіюється. Під коефіцієнтом корисної дії нагрівника (ККД) розуміють відношення кількості теплоти Q_1, переданої тілу для нагрівання, до кількості теплоті: Q, що виділилася під час згоряння палива:

$$\eta = \frac{Q_1}{Q}. \tag{1.33}$$

Оскільки теплота Q_2 втрачається, то $Q_1 = Q - Q_2$ і ККД

$$\eta = \frac{Q - Q_2}{Q} = 1 - \frac{Q_2}{Q}, \tag{1.34}$$

тобто ККД нагрівника менший за одиницю.

Внутрішня енергія. *Внутрішня енергія* U – це енергія хаотичного (теплового) руху мікрочастинок системи (молекул, атомів, електронів, ядер тощо) і енергія взаємодії цих частинок.

До внутрішньої енергії не відносяться кінетична енергія руху системи як цілого і потенційна енергія системи в зовнішніх полях.

Внутрішня енергія – *однозначна функція термодинамічного стану системи* - в кожному стані система має цілком певну внутрішню енергію. Тому, внутрішня енергія не залежить від того, яким чином система прийшла в даний стан. Під час переходу системи з одного стану в іншій зміна внутрішньої енергії визначається тільки різницею значень внутрішньої енергії цих станів і не залежить від шляху переходу.

Перший закон термодинаміки. Перший закон термодинаміки – це закон збереження і перетворення енергії в термодинамічних процесах.

Збільшення внутрішньої енергії тіла може бути спричинене передаванням кількості теплоти Q, а також виконанням певної роботи A.

Розглянемо замкнуту макроскопічну нерухому систему, що не знаходиться в зовнішніх силових полях і проаналізуємо з енергетичної точки зору рівноважний процес переходу системи з початкового стану *1* в стан *2*.

Зміна внутрішньої енергії ΔU дорівнює сумі роботи зовнішніх сил A і кількості переданої тілу теплоти Q:

$$\Delta U = A + Q. \tag{1.35}$$

Це математичний запис першого закону термодинаміки.

Якщо роботу виконує сама система над зовнішніми тілами, то $A' = -A$ (1.26), тоді з (1.35) матимемо інший вигляд першого закону термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A'. \tag{1.36}$$

Кількість теплоти, передана системі, йде на виконання роботи над зовнішніми тілами і зміну її внутрішньої енергії.

Інше формулювання першого закону термодинаміки пов'язане з тим, що якщо система періодично повертається в первинний стан, то $\Delta U = 0$, і $A = Q$. Тобто, *неможливо побудувати вічний двигун (перпетуум мобіле) першого роду*, – періодично діючий двигун, який виконував би більшу роботу, ніж та, що відповідає енергії, підведеній до нього зовні.

Адіабатний процес. Процес, що відбувається без теплообміну із зовнішнім середовищем, називають *адіабатним*. За таких умов внутрішня енергія системи може змінюватися лише внаслідок виконання роботи:

$$\Delta U = A. \tag{1.37}$$

Якщо процес відбувається швидко, то така система наближається за своїми властивостями до адіабатної.

Діаграма адіабатичного процесу – *адіабата* – в координатах (p, V) зображується гіперболою (рис. 1.6). Адіабата ($pV^{\gamma} = \text{const}$) крутіша, ніж ізотерма ($pV = \text{const}$). Це пояснюється тим, що при адіабатичному стискуванні *1-3* збільшення тиску газу обумовлене не тільки зменшенням його об'єму, але і підвищенням температури.

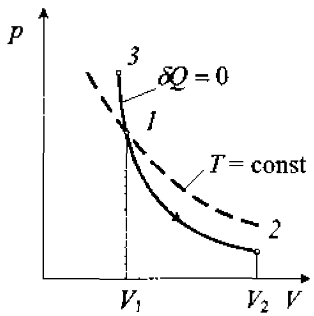


Рис. 1.6

Робота газу в адіабатичному процесі. Робота адіабатичного розширення *1-2* (заштрихована площа на рис. 1.6) менше, ніж при ізотермічному процесі. Це пояснюється тим, що при адіабатичному розширенні відбувається охолоджування газу, тоді як при ізотермічному розширенні температура підтримується постійною за рахунок притоку ззовні еквівалентної кількості теплоти.

Другий закон термодинаміки. *Другий закон* термодинаміки визначає напрям протікання термодинамічних процесів, указуючи, які процеси в природі можливі, а які – ні.

Повний перехід кількості теплоти, яка надходить усистему, в механічну роботу неможливий. Численні досліди показують, що частина енергії розсіюється, тобто тільки частина кількості наданої теплоти передається від більш нагрітого тіла (нагрівника) до менш нагрітого (холодильника). Отже, *неможливий процес, єдиним результатом якого було б перетворення всієї теплоти, отриманої від нагрівника, в еквівалентну їй роботу.* Це одне з формулювань *другого закону термодинаміки.* Еквівалентне формулювання таке: *неможливий процес, єдиним результатом якого є передавання енергії у формі теплоти від тіла менш нагрітого до тіла більше нагрітого.*

Неможливо побудувати такий двигун (*вічний двигун другого роду*), робоче тіло якого, здійснюючи періодичний процес, виконувало б роботу за рахунок охолодження певного джерела теплоти (наприклад, води в океані, земної кори тощо). Неможливість побудувати вічний двигун другого роду доведено численними дослідами.

Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна. Внутрішня енергія палива в теплових двигунах перетворюється в механічну енергію. При цьому робоче тіло двигуна 1) дістає кількість теплоти Q_1 від нагрівника, 2) виконує роботу над зовнішніми тілами A_1 і 3) передає кількість теплоти Q_2 холодильнику. Оскільки після закінчення циклу система повертається до початкового стану, зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю (ΔU = 0) і за першим законом термодинаміки

$$A' = Q_1 - Q_2. \qquad (1.38)$$

Коефіцієнтом корисної дії (ККД) теплового двигуна η називається відношення роботи A', яку виконує двигун, до кількості теплоти Q_1, яку двигун дістав від нагрівника:

$$\eta = \frac{A_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{1.39}$$

тобто η завжди менше за одиницю.

Цикл Карно. Французький дослідник С. Карно дослідив цикл (*цикл Карно*), що складається (рис. 1.7) з двох ізотерм $1 - 1'$ і $2 - 2'$ та двох адіабат $1-2$ і $1' - 2'$.

Робоче тіло (ідеальний газ) виконує роботу завдяки наданій йому кількості теплоти (прямий цикл). При ізотермічному розширенні $1 - 1'$ робоче тіло дістає кількість теплоти Q_1 від нагрівника, який є джерелом енергії, що зберігає сталу температуру T_1, а при ізотермічному стисканні $2' - 2$ робоче тіло віддає кількість теплоти Q_2 холодильнику, що також має сталу температуру T_2 ($T_2 < T_1$). При адіабатному розширенні й стискуванні енергія зовні не надходить, і ці процеси відбуваються за рахунок зміни внутрішньої енергії робочого тіла. ККД циклу Карно не залежить від природи робочого тіла, а визначається тільки температурою нагрівника: T_1 і холодильника T_2.

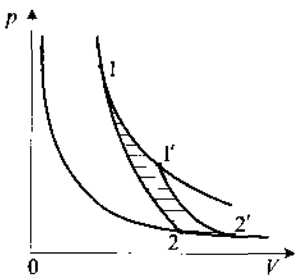


Рис. 1. 7

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{1.40}$$

Будь-яка *реальна теплова машина, у якої температура нагрівника і холодильника відповідно* T_1 *і* T_2, *не може мати ККД, більший за ККД ідеальної теплової машини* $\eta_{\max}$, тобто

$$\eta \le \eta_{\max}. \tag{1.41}$$

Тепловий двигун тим ефективніший, чим вища температура нагрівника і нижча температура холодильника. Оскільки температура холодильника практично дорівнює температурі навколишнього повітря, а температура T_1 обмежена температурою плавлення матеріалів, з яких виготовляється двигун, то максимальне значення ККД, наприклад при T_1 = 600 K і T_2 = 300 K, $\eta_{\max}$ = 50 %. ККД реальних теплових машин значно менший.

1.3. Молекулярно-кінетична теорія ідеального газу

Модель ідеального газу. Фізична модель, згідно з якою:
1) власний об'єм молекул газу малий у порівнянні з об'ємом посудини;
2) між молекулами газу відсутні сили взаємодії;
3) зіткнення молекул газу між собою й зі стінками посудини абсолютно пружні — **називається ідеальним газом.**

Виходячи з цього, ідеальний газ можна розглядати як сукупність молекул-кульок, що безладно рухаються, які мають малий власний об'єм і не взаємодіють одна з одною на відстані.

Закони, що описують поведінку ідеальних газів — закони Бойля-Мариотта, Авогадро, Дальтона, Гей-Люссака.

Реальні гази подібні до ідеального газу, коли вони розріджені, тобто коли середня відстань між молекулами значно більша за їхні розміри.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Функціональна залежність між тиском ідеального газу p, його об'ємом V і кінетичною енергією хаотичного руху молекул E визначається з основного рівняння кінетичної теорії газів:

$$pV = \frac{2}{3}E, \tag{1.42}$$

де $E = \sum_{i=1}^{n} \frac{m\upsilon_i^2}{2}$ — сумарна кінетична енергія поступального руху всіх молекул газу (m — маса молекули, υ_i — швидкість i-й молекули).

Середнє значення квадрата швидкостей n молекул

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^2. \tag{1.43}$$

Отже,

$$E = n \cdot \frac{m\overline{\upsilon^2}}{2} = \frac{1}{2}M\overline{\upsilon^2}, \tag{1.44}$$

де $M = nm$ — маса газу. Тепер рівняння (1.42) можна записати так:

$$pV = \frac{1}{3}M\overline{\upsilon^2}, \tag{1.45}$$

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{\upsilon^2}, \tag{1.46}$$

де $\rho = nm/V$ — густина газу. Тобто *тиск ідеального газу пропорційний густині газу і середньому квадрату швидкості руху молекул.*

Рівняння (1.46) називають *основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газів.*

Для одного моля газу, що міститься в об'ємі V_μ, можна записати:

$$pV_\mu = \frac{1}{3}N_A m\overline{\upsilon^2} = \frac{2}{3}N_A\overline{E}, \tag{1.47}$$

де N_A — число Авогадро, а

$$\overline{E} = \frac{m\overline{\upsilon^2}}{2}, \tag{1.48}$$

— середня кінетична енергія хаотичного теплового руху молекул газу.

Оскільки $pV_\mu = RT$, то з (1.47):

$$\overline{E} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T. \tag{1.49}$$

Отже, *середня кінетична енергія теплового руху молекул ідеального газу пропорційна абсолютній температурі.*

Відношення:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К} \tag{1.50}$$

називається *сталою Больцмана k.*

Тобто

$$\overline{E} = \frac{3}{2}kT. \tag{1.51}$$

У підсумку з (1.46), (1.48) та (1.51) маємо:

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{\upsilon^2} = \frac{2}{3}n\overline{E} = nkT, \tag{1.52}$$

$$n = \frac{p}{kT}. \tag{1.53}$$

Отже, 1) тиск ідеального газу при даній температурі прямо пропорційний концентрації його молекул, 2) при однакових температурі й тиску всі гази містять в одиниці об'єму однакову кількість молекул. Кількість молекул будь-якого газу в одному кубічному сантиметрі за нормальних умов ($p_0 = 101325$ Па, $T = 273$ К) називається *числом Лошмідта*: $N_L = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Вимірювання швидкостей молекул газу. З (1.52) середній квадрат швидкості молекул

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{3kT}{m}. \quad (1.54)$$

Тобто середня квадратична швидкість

$$\bar{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (1.55)$$

або

$$\bar{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (1.56)$$

де $\mu = mN_A$ — молярна маса.

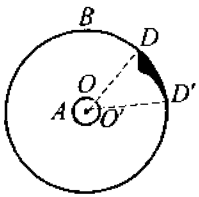


Рис. 1. 8

Наприклад, за нормальних умов швидкість молекул водню, обчислена за формулою (1.56), становить 1840 м/с.

Дослід німецького фізика Штерна (рис. 1.8), дав змогу експериментально визначити швидкість молекул газу. Два *концентричних* вакуумованих циліндри A і B, можуть обертатися з однаковою кутовою швидкістю ω. Уздовж осі циліндрів натягнуто тонку платинову дротинку, вкриту шаром срібла. Коли по дротинці пропускають струм, вона нагрівається, срібло випаровується з поверхні дротинки і атоми срібла проходять крізь вузьку щілину OO' у стінці малого циліндра зі швидкістю υ. Рухаючись прямолінійно, атоми срібла потрапляють на внутрішню поверхню великого циліндра протягом часу

$$t = \frac{\Delta R}{\upsilon}, \quad (1.57)$$

де υ — швидкість атомів, $\Delta R = R_B - R_A$— різниця радіусів циліндрів. За цей самий час t циліндри повернуться на кут

$$\varphi = \omega t. \quad (1.58)$$

Отже, відстань s між границями плями срібла D і D' дорівнює:

$$s = \omega R_B t. \quad (1.59)$$

З формул (1.57) і (1.59) матимемо:

$$\upsilon = \frac{\omega R_B (R_B - R_A)}{s}. \quad (1.60)$$

Вимірюючи величини s, R_A, R_B і ω, можна обчислити швидкість атомів срібла. Досліджуючи товщину шару срібла, можна оцінити *розподіл молекул за швидкостями*. Експериментально визначена швидкість збігається з теоретичним її значенням, обчисленим за формулою (1.56).

Внутрішня енергія ідеального газу. Внутрішня енергія U — це енергія хаотичного (теплового) руху мікрочастинок системи (молекул, атомів, електронів, ядер і так далі) і енергія взаємодії цих частинок.

До внутрішньої енергії не належить кінетична енергія руху системи як цілого і потенційна енергія системи в зовнішніх полях.

Внутрішня енергія – однозначна функція термодинамічного стану системи – в кожному стані система має цілком певну внутрішню енергію. Тому, внутрішня енергія не залежить від того, яким чином система перетворилася в даний стан.

Під час переходу системи з одного стану в інший зміна внутрішньої енергії визначається тільки різницею значень внутрішньої енергії цих станів і не залежить від шляху переходу.

Установлено, що внутрішня енергія ідеального одноатомного газу:

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{3}{2}\nu RT. \qquad (1.61)$$

1.4. Взаємні перетворення рідин та газів

Питома теплота пароутворення і конденсації. У рідинах завжди є деяка кількість молекул, енергія яких достатня для подолання тяжіння до інших молекул і які здатні зникнути з поверхні рідини. Такий процес називається *випаровуванням.* Він відбувається з поглинанням певної кількості теплоти $Q_П$. Кількість теплоти, потрібна для перетворення 1 кг рідини в пару, при сталій температурі називається *питомою теплотою пароутворення* L. Величину L вимірюють у Дж/кг.

Кількість теплоти, яка необхідна для перетворення рідини масою m в пару

$$Q_П = Lm. \qquad (1.62)$$

Конденсацією називається процес перетворення пари в рідину. При конденсації пари виділяється певна кількість теплоти Q_k. У процесі конденсації пари в рідину масою m виділяється кількість теплоти:

$$Q_k = -Lm. \qquad (1.63)$$

Тут знак мінус показує, що тіло віддає кількість теплоти Q_k. Питома теплота пароутворення L з підвищенням температури зменшується.

Якщо кількість молекул, що зникають з рідини за одиницю часу через одиничну поверхню, дорівнює кількості молекул, які переходять з пари в рідину, то відбувається *динамічна рівновага* між процесами випаровування і конденсації. Пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається *насиченою.*

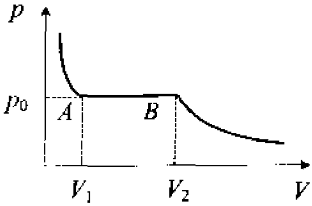


Рис. 1.9

Ізотерми реального газу. Тиск насиченої пари. При дослідженні реальних газів необхідно враховувати власний об'єм молекул і сили міжмолекулярної взаємодії.

У процесі ізотермічного стискування газу (рис. 1.9), *якщо його температура не дуже висока* і густина мала, ізотерма має вигляд гіперболи відповідно до закону Бойля—Маріотта.

Зі зменшенням об'єму виникають невеликі відхилення від цього закону і, нарешті, починаючи з певного значення об'єму V_2 до об'єму V_1, тиск p_0 залишається сталим, а газ переходить у рідкий стан поки вся пара сконденсується (коли $V = V_1$). Для подальшого зменшення об'єму потрібно значно збільшити тиск, бо рідини мають дуже малу стисливість.

Отже, якщо $V \geq V_2$, речовина перебуває в газоподібному стані, а при $V < V_1$ — у рідкому. При $V_1 < V < V_2$ газ перебуває в рівновазі з рідиною: кількість молекул, які залишають поверхню рідини, дорівнює кількості молекул, що за той самий час повертаються в рідину.

Тиск p_0 є тиском насиченої пари. Залежність тиску насиченої пари від температури нелінійна. Зі зміною об'єму або температури насиченої пари змінюється її маса. Тиск насиченої пари

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT , \tag{1.64}$$

де μ — молярна маса газу, R — універсальна газова стала, T — абсолютна температура.

Отже, тиск насиченої пари зростає в результаті підвищення температури і збільшення густини пари. Чим вища температура, тим менший об'єм V_2', при якому починається конденсація газу, тобто відрізок AB (рис. 1.10), що відповідає рівновазі між газом і рідиною, з підвищенням температури зменшується. При деякій температурі, яку називають *критичною*, точки A і B збігаються (точка K). Свою особисту критичну температуру T_K має кожна речовина. Стан речовини, що відповідає точці K, називається *критичним станом*, а відповідний тиск — *критичним тиском* p_K. У критичному стані насичена пара має максимальний тиск, а рідина займає максимальний об'єм. Ізотерма при $T = T_K$ називається *критичною ізотермою*.

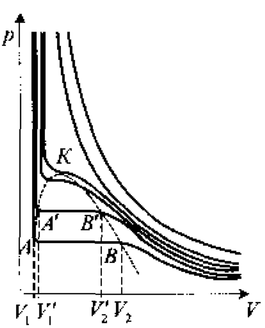


Рис. 1.10

Питома теплота пароутворення при критичній температурі дорівнює нулю. Перехід речовини з газоподібного стану в рідкий при критичній температурі відбувається без межі поділу рідина — газ. У критичному стані газ і рідина не відрізняються одне від одного.

Газ не можна перетворити в рідину, якщо температура його вища за критичну. Ізотерма реального газу при температурі, що вища за критичну, досить точно описується рівнянням ідеального газу (законом Бойля—Маріотта).

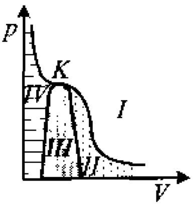


Рис. 1.11

На p-V діаграмі (рис. 1.11) характерним рівноважним станам газу і рідини відповідають чотири ділянки Точки, що знаходяться на ділянці *I*, відповідають стану газу, який не є насиченою парою. Будь-яка точка на ділянці *II* відповідає стану ненасиченої пари. Стан рівноваги рідини і насиченої пари описують точки на ділянці *III*, а ділянка *IV* відповідає рідкому стану речовини.

Кипіння. Якщо до рідини підводиться теплота, температура рідини, а також інтенсивність випаровування зростають. При певній температурі починається процес пароутворення всередині рідини: в об'ємі рідини утворюються бульбашки повітря і пари, які швидко зростають, спливають на поверхню і лопаються — рідина *кипить*.

Тиск насиченої пари всередині рідини під час кипіння трохи перевищує суму тиску повітря па поверхні рідини і гідростатичного тиску стовпа рідини над місцем виникнення бульбашки. Температура кипіння залежить від зовнішнього тиску. З підніманням у гори атмосферний тиск зменшується і відповідно знижується температура кипіння води. На висоті близько 7000 м температура кипіння води становить приблизно 70°С, так що зварити м'ясо або заварити чай при цьому у відкритій посудині неможливо.

Різна температура кипіння рідин зумовлена різними тисками насиченої пари. Чим вищий тиск насиченої пари рідини, тим нижча температура кипіння.

Водяна пара в атмосфері. Внаслідок неперервного випаровування води з поверхні водоймищ та рослин атмосферне повітря завжди у своєму складі містить деяку кількість водяної пари. Вміст водяної пари в повітрі характеризують *абсолютною* та *відносною вологістю* повітря.

Абсолютною вологістю називають масу водяної пари, що міститься в 1 м^3 повітря при даній температурі.

Атмосферне повітря — це суміш різних газів і водяної пари, тому атмосферний тиск повітря дорівнює сумі парціальних тисків складових суміші. *Пружністю водяної пари* називають її тиск p, коли б не було інших газів. *Відносною вологістю* повітря φ називають відношення пружності p водяної пари, яка є в повітрі при даній температурі, до тиску p_0 насиченої пари при тій самій температурі, помножене на 100%.

$$\varphi = \frac{p}{p_0} 100\%. \tag{1.65}$$

Якщо повітря охолоджувати, то при деякій температурі водяна пара, що міститься в ньому, стане насиченою. Температуру, при якій водяна пара, що є в повітрі, стає насиченою, називають *точкою роси*, оскільки при подальшому охолодженні повітря починається конденсація пари (випадає роса, виникає туман).

Відносну вологість повітря вимірюють *психрометрами*. Психрометр складається із сухого і вологого термометрів. Температура вологого термометра нижча, ніж сухого внаслідок його охолодження під час випаровування. Чим менша відносна вологість, тим інтенсивніше випаровується вода, тобто тим нижча температура, що встановлюється у вологому термометрі. За допомогою спеціальних таблиць, знаючи різницю температур сухого і вологого термометрів, визначають відносну вологість повітря. Найсприятливіша для людини вологість при кімнатній температурі становить 60—70%.

1.5. Поверхневий натяг і деякі властивості рідин

Молекулярна картина поверхневого шару. Вільна поверхня будь-якої рідини перебуває в особливому напруженому стані і, до деякої міри, нагадує собою тонку натягнуту плівку завтовшки кілька молекулярних розмірів. Утворення поверхневої плівки в рідинах – результат дії молекулярних сил.

Якщо молекула перебуває всередині рідини, то на неї з усіх сторін у рівній мірі діють сусідні молекули і рівнодійна всіх молекулярних сил дорівнює нулю (див. рис. 1.12*а*). Якщо молекула перебуває поблизу поверхні рідини на відстані, меншій радіуса дії молекулярних сил (рис. 1.12*б*), то притягання молекул, що лежать нижче, переважає над притяганням молекул, що лежать вище, і рівнодійна всіх молекулярних сил буде направлена вниз – всередину рідини. Чим ближче молекула до поверхні рідини, тим більшою буде ця сила. Якщо молекула перебуває на самій поверхні рідини (рис. 1.12в), то сили молекулярного притягання направлені тільки по поверхні і всередину рідини. Складові молекулярних сил, що направлені по поверхні, намагаються скоротити площу поверхні рідини і утворюють так званий поверхневий натяг.

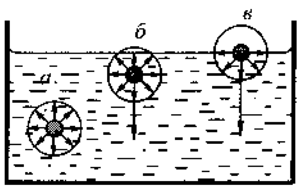


Рис. 1. 12

Поверхнева енергія. Густина рідини в поверхневому шарі менша, ніж усередині. Молекули поверхневого шару перебувають на більших відстанях одна від одної, ніж молекули всередині рідини, тому їх потенціальна енергія більша, ніж в інших молекул. Різницю між потенціальними енергіями молекул усередині рідини та молекул у її поверхневому шарі називають *поверхневою енергією*. З термодинамічного погляду поверхнева енергія — один з видів внутрішньої енергії рідини. Відношення поверхневої енергії $E_П$ будь-якої частини поверхні рідини до площі S цієї поверхні називається *коефіцієнтом поверхневого натягу* σ:

$$\sigma = \frac{E_{П}}{S}. \tag{1.66}$$

Коефіцієнт поверхневого натягу залежить від хімічного складу рідини і від температури.

Стан рівноваги рідини відповідає мінімальному значенню поверхневої енергії, тому вздовж поверхні рідини діють сили, що зменшують її площу. Їх називають *силами поверхневого натягу* F. Сили поверхневого натягу діють по дотичній до поверхні рідини перпендикулярно до лінії, що обмежує поверхню поділу. Якщо ця лінія має довжину l, то

$$F = \sigma l. \tag{1.67}$$

Коефіцієнт поверхневого натягу вимірюють в одиницях Дж/м^2 і Н/м. На межі рідини і насиченої пари коефіцієнт поверхневого натягу з підвищенням температури зменшується і при критичній температурі дорівнює нулю.

Розчинення деяких домішок змінює поверхневий натяг рідини. Коли у воді розчиняти мило, камфору або ефір, поверхневий натяг зменшується, а від цукру і деяких електролітів — збільшується.

Рідина на поверхні твердих тіл. Змочування. Капілярні явища. Біля стінок посудини, у яку налито рідину, спостерігаються крайові ефекти. Вільна поверхня рідини, викривлена біля стінок посудини, називається *меніском*. Лінія перетинання меніску з твердим тілом називається *периметром змочування*. Для характеристики меніска вводиться *крайовий кут* θ між змоченою поверхнею стінки і меніском у точках їх перетинання: $\theta < \pi/2$ означає, що сили взаємодії між молекулами рідини менші за сили взаємодії між молекулами рідини та твердого тіла, спостерігається явище *змочування*. Рідина розтікається по поверхні твердого тіла. Поблизу стінок посудини поверхня рідини набуває увігнутої форми, піднімаючись уздовж поверхні стінок трохи вище, ніж загальний рівень рідини. Крайовий кут $\theta > \pi/2$ означає, що сили взаємодії між молекулами рідини більші, ніж між молекулами рідини і твердого тіла, рідина не змочує останнього. Поблизу стінок посудини поверхня рідини опукла і рівень її дотику до твердого тіла нижче від загального рівня рідини. Наприклад, ртуть не змочує скляну посудину.

За рахунок явища змочування рідина, густина якої ρ, піднімається в тонких трубках (*капілярах*) над загальним рівнем рідини на висоту:

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}, \tag{1.68}$$

де r — радіус капіляра.

Рідина, що не змочує стінки капіляра, опускається нижче рівня рідини на таку саму висоту h.

1.6. Тверді тіла

Аморфні та кристалічні тіла. Твердими називають тіла, які мають певну форму й об'єм. Їх поділяють на *кристалічні* та *аморфні*.

Аморфне тіло – це переохолоджена рідина. В аморфних тілах (вар, скло, ебоніт) розташування атомів чи молекул не впорядковане, їхні фізичні властивості в усіх напрямах однакові (*ізотропні*). Аморфні тверді тіла можуть бути діелектриками, напівпровідниками, металами тощо. Аморфні тіла наділені текучістю, тобто зі зростанням температури вони поступово розм'якшуються, перетворюючись на в'язку рідину. Аморфні тіла не мають певної температури плавлення.

У кристалічних тілах розташування атомів або іонів упорядковане (періодичне). Вони *анізотропні*, тобто мають у різних напрямах неоднакові пружні, оптичні, теплові й електричні властивості.

У кристалічних тілах атоми (іони) утворюють просторову *кристалічну решітку*. Довжина ребер кристалічної решітки в різних металів неоднакова і становить $(3\text{-}7)\cdot 10^{-10}$ м. Для кожного кристала можна обрати елементарну комірку і на її основі за допомогою переміщення (трансляцій), кратних розмірам елементарної комірки кристала, побудувати всю кристалічну решітку.

Дуже важливим у вченні про кристал є поняття *симетрії*. Для тривимірного простору існує 230 кристалографічних груп, які згруповані в 32 класи точкової симетрії, об'єднаних у 7 кристалічних систем (типів кристалічної решітки, що різняться співвідношенням трьох векторів-ребер, які їх утворюють, і кутами між цими ребрами).

Структура кристалів. Дальній і ближній порядок. Особливістю будови кристалічних речовин є існування "дальнього" порядку в розташуванні різнорідних атомів або іонів, які утворюють кристалічну решітку. Вони мають таке розташування частинок, яке періодично повторюється на відстанях багато більших, ніж середні міжатомні відстані.

Ближній порядок (кілька ребер) у періодичному розташуванні атомів або іонів властивий аморфним, кристалічним тілам та рідинам.

Метали найчастіше складаються з великої кількості маленьких кристаликів, хаотично розташованих у просторі, тому їх називають *полікристалічними*. Полікристали утворюються, коли в процесі кристалізації одночасно росте багато кристаликів (зерен), які стикаються один з одним. Оскільки окремі зерна розташовані хаотично, властивості полікристалів однакові в різних напрямах, тобто полікристали ізотропні. За певних умов виростають кристали великих розмірів — *монокристали*, вони анізотропні, мають форму правильних багатогранників.

Дефекти в кристалах. У реальних кристалах регулярний порядок у розташуванні атомів у багатьох місцях порушений. Будь-яке відхилення від періодичної структури кристала називають *дефектом*. Дефекти структури суттєво впливають на властивості твердих тіл.

Розрізняють чотири типи дефектів: *точкові, лінійні, поверхневі, об'ємні.*

Точковим дефектом називають вільний від атома вузол (такий дефект ще називають *вакансією*) або вузол, зайнятий атомом іншого сорту. Чужорідний атом може також розташуватися в проміжках між атомами, що утворюють кристалічну решітку.

Лінійні дефекти характеризуються тим, що одновимірні порушення періодичності простягаються на відстані багато більших параметрів решітки.

Лінійні дефекти (дислокації) бувають двох основних типів: крайові та гвинтові. *Крайова* дислокація утворюється, якщо у якомусь місці кристала є зайва напівплощина. На рис. 1.13, *а* крайовою дислокацією є лінія *DC* Навколо дислокацій порядок розташування атомів порушений.

Гвинтова дислокація (рис. 1.13, *б*) виникає, коли одна частина кристала зміщується відносно іншої в напрямі *AB*.

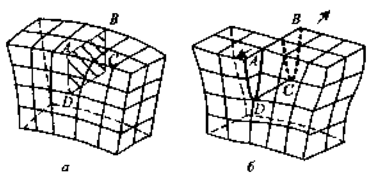


Рис. 1.13

Границі зерен, дефекти упаковки, міжфазні границі, стінки доменів, а також поверхня кристала – це двомірні поверхневі дефекти.

Тривимірні об'ємні дефекти – це мікропорожнини та включення іншої фази.

Дефекти помітно впливають на механічні та фізичні властивості матеріалів.

Сили зв'язку в твердих тілах. Силами, які утримують частинки в кристалі, є, в основному, сили електростатичного притягання між протилежно зарядженими частинками (електронами і ядрами) та сили відштовхування між однойменно зарядженими частинками (електронами і електронами, ядрами і ядрами). Характер сил міжатомної взаємодії насамперед визначається будовою електронних оболонок атомів, що взаємодіють.

Усі тверді тіла за характером міжатомних сил поділяють на чотири типа: *металеві, ковалентні, іонні та молекулярні кристали*.

До молекулярних кристалів належать тверді тіла, у вузлах кристалічної решітки яких розташовуються або однакові молекули з насиченими зв'язками (H_2, Cl_2, Br_2, I_2), або атоми інертних газів (Ar, Ne, Kr, Xe, Rn). У молекулярних кристалах унаслідок поляризації, зумовленої дією електричного поля електрона даного атома, виникає дипольна взаємодія між двома атомами або молекулами, а також взаємне притягання. Сили зв'язку з відстанню швидко зменшуються, дуже слабкі (наприклад, у кристалічному аргоні $E_{зв'язку}$ = 7,5 кДж/моль).

Іонні кристали – це з'єднання з переважним іонним характером хімічного зв'язку, в основі якого лежить електростатична взаємодія між зарядженими іонами. У кристалах з іонним зв'язком у вузлах кристалічної решітки розташовані позитивні й негативні іони, які утворилися в результаті переходу електрона від одного атома до іншого. Позитивний іон завжди оточений негативними і, навпаки, негативний — оточений позитивними. Між позитивними і негативними іонами діють кулонівські сили електростатичного притягання. Кристали з іонним зв'язком мають високу температуру плавлення, велику міцність, малий коефіцієнт термічного розширення. Оскільки в іонних кристалах немає вільних електронів, ці кристали мають малу електропровідність і є ізоляторами. До іонних кристалів належать NaCl (енергія зв'язку 750 кДж/моль), LiF (енергія зв'язку 1000 кДж/моль).

До ковалентних кристалів відносять тверді тіла, кристалічна структура яких створена за рахунок ковалентного зв'язку. У кристалах з *ковалентним* зв'язком частина електронів сусідніх атомів колективізується, і виникають стабільні електронні оболонки. Атоми можуть віддавати для колективізації 2—3 електрони і, відповідно, утворювати подвійні і потрійні зв'язки. У випадку ковалентного зв'язку існує сильна просторова направленість взаємодії. До ковалентних кристалів належать: алмаз (енергія зв'язку 710 кДж/моль), карбід кремнію (енергія зв'язку 1200 кДж/моль), а також напівпровідники — германій, кремній, телур. Алмаз і подібні кристали мають високу температуру плавлення, велику міцність і твердість, є ізоляторами.

У металі зовнішні валентні електрони атомів колективізовані й утворюють газ або рідину, яка заповнює міжіонний простір. *Металічний* зв'язок у кристалах зумовлений силами притягання між решіткою з позитивних іонів і газом вільних електронів. Вільні електрони зумовлюють велику тепло- і електропровідність металічних кристалів. Металічний зв'язок досить слабкий (наприклад, у Na $E_{зв'язку}$ ~ 110кДж/моль).

Механічні властивості твердих тіл. Механічні властивості твердого тіла відображають його реакцію на дію зовнішніх факторів.

Деформацією називають зміну форми чи об'єму твердого тіла, яка викликана дією зовнішніх сил.

Абсолютне видовження в результаті розтягу визначають за формулою:

$$\Delta l = l - l_0, \tag{1.69}$$

де l_0 — початкова довжина тіла, l — кінцева.

Відношення абсолютного видовження до початкової довжини називають *відносним видовженням:*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{1.70}$$

Величина зсуву часто визначається так:

$$\gamma = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \tag{1.71}$$

де θ — кут між двома прямими, які до деформації зсуву були взаємно перпендикулярними.

Якщо атоми під дією прикладеної сили зміщуються зі своїх рівноважних положень у кристалі менше, ніж на відстань між атомами, тоді виникають сили пружності, які повертають атом у положення рівноваги. У деформованому стані тіло характеризується фізичною величиною, яка дорівнює відношенню модуля сили пружності F, що виникла в ньому, до площі його поперечного перерізу S, перпендикулярного до напряму сили пружності, і називається *напругою* або *механічною напругою*:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (1.72)$$

Діаграма розтягу ілюструє залежність деформації (видовження) від напруги (рис. 1.14).

Напруга не залежить від розмірів тіла. Якщо розміри й форма тіла, що деформується, після зняття навантаження відновлюються, деформація називається *пружною*. Деформації, які після зняття навантаження залишаються, називаються *пластичними*.

Коли деформації невеликі, справджується *закон Гука*:

$$F = k|\Delta l|, \quad (1.73)$$

де $k = E\frac{S}{l_0}$, E — коефіцієнт, що називається *модулем пружності* або *модулем Юнга*. Він однаковий і для розтягу, і для стискання.

Отже, напруга

$$\sigma = E|\varepsilon|. \quad (1.74)$$

Максимальна напруга, при якій ще справджується закон Гука, називається *границею пропорційності* σ_{Π}.

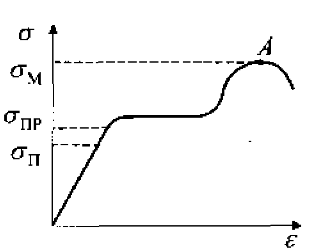


Рис. 1.14

Найбільша напруга, коли не виникають помітні залишкові деформації (вважають, що залишкова деформація не повинна перевищувати — 0,1%), називається *границею пружності* $\sigma_{\text{пр}}$. Від границі пропорційності вона відрізняється на кілька сотих часток відсотків.

При навантаженнях (напругах), більших за границю пружності, починається відхилення від закону Гука, і коли навантаження знімаються, розміри тіла залишаються більшими від початкових.

Починаючи з деякого навантаження розміри тіла продовжують збільшуватися при майже сталому навантаженні — матеріал «тече». Цьому явищу відповідає горизонтальна ділянка діаграми розтягу. При дальшому збільшенні навантаження тіло руйнується (точка A на рис. 1.14). Число, яке показує, у скільки разів границя міцності більша за допустиму напругу, називають *коефіцієнтом запасу міцності*. Вибір запасу міцності залежить від багатьох причин: типу машини або виду споруди характеру навантаження (статичне чи динамічне), матеріалу та його якості. Для сталі, наприклад, беруть запас міцності в середньому 2,5—4, для чавуну 6—8, дерева 8—10.

Тверді тіла умовно можна поділити на пружні, що зберігають пружні властивості до порівняно великих напруг і деформацій (наприклад, для сталі ~1 %, для гуми ε досягає десятків процентів) і *пластичні*, у яких вже при невеликих навантаженнях спостерігається залишкова деформація. Матеріали, що руйнуються при малих деформаціях, називають *крихкими* (скло, фарфор, чавун).

У кристалічних тілах при пружних деформаціях атоми зміщуються один відносно одного на відстані, значно менші, ніж міжатомні. При цьому зв'язки між атомами не розриваються. У процесі пластичної деформації атоми можуть зміщуватися на кілька міжатомних відстаней, однак кристалічна структура при таких деформаціях не руйнується (хоча виникають дефекти кристалічної будови — дислокації, вакансії та ін.).

Пластична деформація починається спочатку в окремих ділянках з переміщення дислокацій, які існували в тілі або виникли під дією прикладеного навантаження. Зі збільшенням навантаження деформується весь об'єм матеріалу. *У кристалічних тілах існують площини і напрями найлегшого* ковзання, вид яких залежить від типу кристалічної решітки.

Полікристалічні тіла деформуються при більших напругах, ніж монокристалічні, що зумовлено хаотичним розташуванням зерен.

Щоб надати металічним матеріалам певної форми, їх прокатують, кують, штампують тощо.

Плавлення твердих тіл. Плавлення – це перехід тіла з твердого стану в рідкий. Температура плавлення у кристалічних тіл стала і цілком певна для кожного матеріалу.

У разі підвищення температури твердих тіл енергія (теплота) затрачується на збільшення середньої кінетичної енергії атомів і молекул. При температурі плавлення кінетична енергія не змінюється, зате завдяки збільшенню відстаней між молекулами й атомами збільшується потенціальна енергія. Тільки у льоду, чавуну, вісмуту та деяких інших твердих тілах під час плавлення об'єм зменшується.

Для того щоб тіло плавилося, повинна надходити теплота. Це пояснюється тим, що для послаблення взаємодії між атомами і молекулами в твердому тілі, яка утримує їх у зв'язаному стані, потрібна додаткова енергія, спроможна зруйнувати таке їх упорядковане розміщення. Завдяки теплопередачі така енергія може надходити до тіла і воно почне поступово плавитися. Під час цього процесу температура тіла не змінюється, оскільки вся енергія йде на руйнування зв'язків між атомами і молекулами.

Оскільки у різних речовин атоми і молекули взаємодіють з неоднаковою силою, то для їх плавлення потрібна різна кількість теплоти.

Кількість теплоти λ, яка потрібна для того, щоб кристалічне тіло масою 1 кг перетворилося при температурі плавлення в рідину такої самої температури, називають *питомою теплотою плавлення*.

Зворотний процес переходу речовини з рідкого стану в твердий називають *кристалізацією*. Згідно із законом збереження енергії така сама кількість теплоти виділяється під час кристалізації 1 кг речовини. У СІ питому теплоту плавлення вимірюють у Дж/кг. Значення питомої теплоти плавлення різних матеріалів наведено у фізико-технічних таблицях.

Для плавлення кристалічного тіла масою m потрібно затратити кількість теплоти:

$$Q = \lambda m . \tag{1.75}$$

Теплове розширення твердих тіл. Коли речовина нагрівається, її частинки починають інтенсивніше рухатися, що приводить до збільшення середніх відстаней між ними. Лінійні розміри твердого тіла l і його об'єм V у межах не дуже великих інтервалів температур змінюються за лінійним законом:

$$l = l_0(1 + \alpha t), \tag{1.76}$$

$$V = V_0(1 + \beta t), \tag{1.77}$$

де l_0 і V_0 — довжина й об'єм тіла при $t = 0°C$; α і β — коефіцієнти лінійного та об'ємного розширення, які визначаються відповідною зміною довжини й об'єму тіла, взятого при 0°С, якщо його нагріти на 1°С. Лінійне теплове розширення твердих тіл незначне (близько 10^{-5} — $10^{-6}\,K^{-1}$), а $\beta \approx 3\alpha$. Більшість тіл збільшують свій об'єм у результаті зростання температури, однак відомо декілька винятків. Найвідомішим прикладом відхилення від правила є чистий кремній, який при температурах між -255°С та -153°С зменшує об'єм.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ З МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

Завдання на газові закони можна розв'язувати за наступним планом. Якщо в завданні заданий один стан газу і вимагається визначити який-небудь параметр цього стану, то треба скористатися рівнянням Менделєєва - Клапейрона. Якщо значення тиску й об'єму явно не задані, то треба виразити їх через задані величини, підставити в записане рівняння і, розв'язавши його, знайти невідомий параметр.

У тому випадку, коли в завданні розглядаються два різні стани газу, то треба встановити: чи змінюється маса газу при переході з одного стану в інший. Якщо маса газу залишається постійною, то можна записати рівняння Клапейрона (рівняння об'єднаного газового закону). Якщо ж при постійній масі в цьому процесі не змінюється який-небудь з параметрів p, V або T (тиск, об'єм, температура), то застосовується рівняння відповідного закону (Гей-Люссака, Шарля або Бойля-Маріотта). Якщо у двох станах маса газу різна, то для кожного стану записується рівняння Менделєєва - Клапейрона. Потім система рівнянь розв'язується відносно шуканої величини.

При розв'язку завдань на зміну внутрішньої енергії тіл треба, виходячи з умови, встановити характер взаємодії тіл і скласти рівняння на підставі закону збереження і перетворення енергії.

2.1. Кількість речовини. Постійна Авогадро. Маса і розміри молекул. Броунівський рух. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

2.1.1. Перрен досліджував залежність кількості кулястих частинок особливої смоли - гуммігута від висоти - у суспензії цих частинок у воді. Для частинок радіусом $r_1 = 0{,}13$ мкм він отримав залежність, графік якої показаний на рис. 1 (n - концентрація частинок на висоті h, n_0 - їх концентрація біля дна кювети).

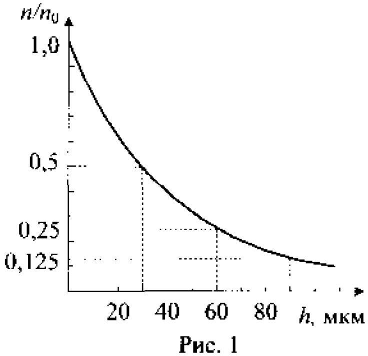


Рис. 1

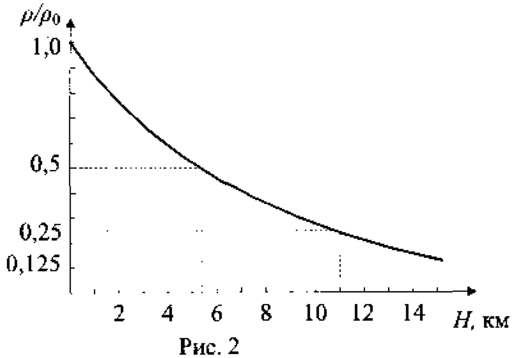


Рис. 2

Такий же графік будується для частинок з радіусом r_2 = 0,065 мкм, тільки картина розтягнута по висоті у 8 разів. У той же час відомо, що густина кисню в земної атмосфері зменшується з висотою так, як показано на рис. 2 (ρ - густина кисню на висоті H, ρ_0 - у поверхні кювети). Визначити масу молекули кисню.

Розв'язок. Густина гуммігута $\rho_г$ = 1,194 г / см^3. На рис. 1 видно, що кількість частинок гуммігута з радіусом r_1 зменшується вдвічі кожен раз при зменшенні висоти на Δh_1 = 30 мкм.

Кількість частинок гуммігута з радіусом r_2 зменшується у 8 разів повільніше, тобто кількість частинок зменшується вдвічі при зменшенні висоти на Δh_2 = 240 мкм. Але $r_2 = 0{,}5r_1$, а $\Delta h_2 = 8\Delta h_1$. Звідси можна зробити висновок, що

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3.$$

Оскільки кубу радіуса пропорційна маса частинки, то

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

(m_1 і m_2 - маси частинок гуммігута з радіусами r_1 і r_2 відповідно).

Зміна з висотою густини кисню в атмосфері аналогічна зміні з висотою кількості частинок гуммігута. З рис. 2 видно, що густина кисню зменшується вдвічі при зміні висоти на ΔH = 5,5 км. Тому

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta H} = \frac{m}{m_1},$$

де m - маса молекули кисню.

Звідси

$$m = m_1\frac{\Delta h_1}{\Delta H} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho_г \frac{\Delta h_1}{\Delta H} \approx 5{,}8\cdot 10^{-26}\,\text{кг}.$$

2.1.2. Виходячи з молекулярних уявлень оцінити розмір та масу молекул води, спирту та ртуті (H_2O, C_2H_5OH, Hg). Густина $\rho_{H_2O} = 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_{C_2H_5OH} = 0{,}79\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_{Hg} = 13{,}6\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок. Кількість молекул в одному молі будь-якої речовини дорівнює числу Авогадро N_A = 6,02·10^{23}моль$^{-1}$. У деякому наближенні молекули речовини вважатимемо кульками, що доторкаються одна до одної. Тоді на кожну молекулу приходиться 1 / N_A частина молекулярного об'єму:

$$V_\mu = \frac{\mu}{\rho},$$

де μ – молярна маса, ρ – густина речовини.

Знайдемо діаметр молекули $d = \sqrt[3]{V_1}$, де

$$V_1 = \frac{V_\mu}{N_A} = \frac{\mu}{\rho N_A}.$$

Для молекули води:

$$d_{H_2O} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 3{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{м} = 0{,}31\,\text{нм}.$$

Молярна маса спирту $\mu_{C_2H_5OH} = 46 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, тому

$$d_{C_2H_5OH} = \sqrt[3]{\frac{46 \cdot 10^{-3}}{0{,}79 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 0{,}46\,\text{нм}.$$

Молярна маса ртуті $\mu_{Hg} = 200{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, тому

$$d_{Hg} = \sqrt[3]{\frac{200{,}6 \cdot 10^{-3}}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 0{,}23\,\text{нм}.$$

Отже, розміри молекул одного порядку величини.

Маса молекули

$$m = \frac{\mu}{N_A},$$

тому маса молекули води:

$$m_{H_2O} = 30 \cdot 10^{-27}\,\text{кг},$$

молекули спирту

$$m_{C_2H_5OH} = 78 \cdot 10^{-27}\,\text{кг},$$

молекули ртуті

$$m_{Hg} = 333 \cdot 10^{-27}\,\text{кг}.$$

2.1.3. Обчислити масу однієї молекули кисню.

Розв'язок. В одному молі будь-якої речовини (твердого, рідкого або газоподібного) міститься одна і та ж кількість молекул (число Авогадро):

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}.$$

Якщо μ — молярна маса, то маса однієї молекули

$$m = \frac{\mu}{N_A}. \tag{1}$$

Для кисня $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тобто маса однієї молекули кисня

$$m = \frac{32 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}}\,\text{кг} = 5{,}3 \cdot 10^{-26}\,\text{кг}.$$

За формулою (1) можна знайти масу однієї молекули будь-якої речовини, знаючи її молярну масу.

2.1.4. Суміш газів складається з $m_{N_2} = 30$ г азоту та деякої кількості вуглекислого газу CO_2. Середня молярна маса суміші дорівнює $\nu_{суміш} = 32\frac{г}{моль}$. Визначити масу вуглекислого газу в суміші.

Розв'язок. Кількість речовини суміші $\nu = \nu_{N_2} + \nu_{CO_2}$, тобто

$$\frac{m_{N_2} + m_{CO_2}}{\mu_{суміш}} = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m_{CO_2}}{\mu_{CO_2}}.$$

Звідки

$$m_{CO_2} = \frac{m_{N_2}\mu_{CO_2}(\mu_{суміш} - \mu_{N_2})}{\mu_{N_2}(\mu_{CO_2} - \mu_{суміш})} = \frac{30 \cdot 44 \cdot 4}{28 \cdot 12} 15{,}7 г.$$

2.1.5. На планеті 80% атмосфери складає кисень, а 20% - неон. Визначити середню молярну масу атмосфери планети.

Розв'язок. За законом Дальтона кількість молей суміші дорівнює сумі кількостей речовин, які складають суміш:

$$\nu = \nu_{O_2} + \nu_{Ne},$$

або

$$\frac{m_{сум}}{\nu_{сум}} = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}} + \frac{m_{Ne}}{\mu_{Ne}}, \tag{1}$$

де $m_{O_2} = 0.8 m_{сум}$, $m_{Ne} = 0.2 m_{сум}$, μ_{O_2} та μ_{Ne} - молярна маси кисню та неона.

З рівняння (1) маємо,

$$\frac{m_{сум}}{\mu_{сум}} = \frac{0.8 m_{сум}}{\mu_{O_2}} + \frac{0.2 m_{сум}}{\mu_{Ne}},$$

$$\frac{1}{\mu_{сум}} = \frac{0{,}8}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{0{,}2}{20 \cdot 10^{-3}} = 35\frac{моль}{кг}.$$

Звідки

$$\mu_{сум} = \frac{646}{22.6} = 28{,}6 \cdot 10^{-3}\frac{кг}{моль}.$$

2.1.6. Оцінити середню відстань між молекулами повітря при нормальних умовах ($p_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К, $\mu = 29 \cdot 10^{-3}\frac{кг}{моль}$, $\rho_0 = 1{,}29\frac{кг}{м^3}$).

Розв'язок. Визначимо скільки молекул в 1 м^3 повітря:

$$N = \frac{m}{\mu}N_A = \frac{\rho_0 V_0}{\mu}N_A = \frac{1{,}29 \cdot 1 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{0{,}029} = 267{,}8 \cdot 10^{23}.$$

Об'єм, який займає одна молекула:

$$V_1 = \frac{1 м^3}{267{,}8 \cdot 10^{23}} = 37 \cdot 10^{-27} м^3.$$

Відстань між молекулами буде дорівнювати ребру куба:

$$a = \sqrt{V_1} = \sqrt{37 \cdot 10^{-27}} = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\,\text{м} = 3{,}3\,\text{нм}.$$

2.1.7. Кристал солі NaCl має кубічну структуру. Знайти середню відстань між центрами сусідніх іонів Na^+ та Cl^-, якщо густина солі $2{,}2\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Розв'язок. Кристалічна гратка NaCl – кубічна, у якій на кожну елементарну комірку приходиться 1 іон . Якщо відстань між сусідніми іонами – *d*, то це і є ребро куба решітки:

$$d = \sqrt[3]{V_{комірки}}. \qquad (1)$$

Щоб визначити об'єм , що приходиться на один іон треба об'єм тіла *V* поділити на кількість атомів солі *N*

$$V_{комірки} = \frac{V}{N}. \qquad (2)$$

З другого боку об'єм тіла.

$$V = \frac{m}{\rho}, \qquad (3)$$

де ρ – густина тіла.

З рівнянь (3) та (2), одержимо

$$V_{комірки} = \frac{m}{\rho N}. \qquad (4)$$

Зв'язок кількості іонів *N* та маси тіла:

$$m = m_0 N,$$

де m_0 - маса іона.

Тому

$$V_{ком} = \frac{m_0 N}{\rho N} = \frac{m_0}{\rho}. \qquad (5)$$

Для NaCl на одну кубічну комірку приходиться «півіона» тому маса одного іона

$$m_0 = 0{,}5 \cdot \frac{\mu}{N_A}.$$

Коефіцієнт 0, 5 необхідно ввести тому, що μ – це молярна маса NaCl, який складається з 2-х іонів.

Рівняння (5) буде виглядати так:

$$V_{ком} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{N_A \rho}.$$

Підставимо це рівняння в (1) та отримаємо:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2N_A\rho}} = \sqrt[3]{\frac{58\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{2\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}}\cdot 2{,}2\cdot 10^{3}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} = 0{,}28\ \text{нм}.$$

2.1.8. Озеро площиною S = 4 км^2 із середньою глибиною h = 5 м посолили, кинувши кристалик солі NaCl масою m = 10 мг. Через деякий час з озера зачерпнули склянку води об'ємом V = 200 см^3. Скільки іонів Na виявилося в цій склянці ($\mu_{NaCl} = 58\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$)?

Розв'язок. Визначимо густину солі в озері:

$$\rho' = \frac{m}{V_{оз}} = \frac{m}{Sh} = \frac{10^{-5}\text{кг}}{4*10^6\text{м}^2\cdot 5\text{м}} = 5\cdot 10^{-13}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Маса солі в склянці буде

$$m' = \rho'\cdot V = 5\cdot 10^{-13}\cdot 200\cdot 10^{-6} = 10^{-16}\text{кг}.$$

Кількість молей солі буде

$$\nu = \frac{m'_{NaCl}}{\mu_{NaCl}} = \frac{10^{-16}\text{кг}}{58\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \frac{1}{58}\cdot 10^{-13}\text{моль}.$$

Отже кількість молекул NaCl (іонів натрія) у склянці

$$N = \nu\cdot N_A = \frac{1}{58}\cdot 10^{-13}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23} = 10^9.$$

2. 2. Енергія теплового руху молекул. Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури. Швидкість молекул газу

2.2.1. Після ввімкнення електричної лампи тиск газу в ній збільшився з $8\cdot 10^4$ Па до $1{,}1\cdot 10^5$Па. У скільки разів при цьому збільшилась середня квадратична швидкість молекули газу.

Розв'язок. Середня квадратична швидкість

$$\sqrt{\overline{\upsilon}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

З основного рівняння молекулярно – кінетичної теорії ідеального газу :

$$p_1 = \frac{1}{3}m_0 n\overline{\upsilon}_1^2, \qquad p_2 = \frac{1}{3}m_0 n\overline{\upsilon}_2^2. \tag{1}$$

Звідки

$$\overline{\upsilon}_1^2 = \frac{3p_1}{m_0 n}, \qquad \overline{\upsilon}_2^2 = \frac{3p_2}{m_0 n}. \tag{2}$$

З рівнянь (2) відношення

$$\frac{\overline{\upsilon}_2^2}{\overline{\upsilon}_1^2}=\frac{p_2}{p_1}.$$

Тобто

$$\frac{\overline{\upsilon}_2}{\overline{\upsilon}_1}=\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}=\sqrt{\frac{11\cdot10^5}{8\cdot10^5}}=\sqrt{1.375}=1.17 \text{ разів.}$$

2.2.2. Стінки посудини, у якій знаходиться газ температури T мають температуру T_C. У якому випадку тиск газу на стінки посудини більше: коли стінки посудини холодніше газу ($T_C < T$), чи коли тепліше ($T_C > T$)?

Розв'язок. Якщо температура стінки T_C однакова з температурою газу, тобто $T_C = T$, то молекула газу після пружного удару об стінку змінить нормальну компоненту імпульсу p_x на - p_x. Зміна імпульсу молекули при цьому буде 2 p_x.

Якщо стінка має $T_C > T$, то газ буде нагріватися. Це означає те, що молекули газу відскакують від стінки з більшою швидкістю, ніж налітають. Зміна імпульсу молекули при цьому буде більше 2 p_x.

Якщо стінка має $T_C < T$, то зміна імпульсу молекули буде менше 2 p_x. і газ буде охолоджуватися. Оскільки за другим законом Ньютона зміна імпульсу пропорційна середній силі, то тиск на стінку буде більше, коли вона тепліше газу ($T_C > T$).

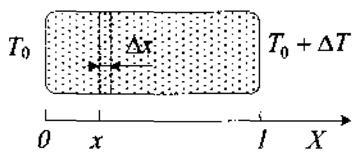


Рис. 1

2.2.3. Довга циліндрична посудина заповнена ідеальним газом до тиску p_0. Спочатку температура циліндра підтримується постійною і рівною T_0. Потім температуру однієї з торцевих стінок посудини підвищують на ΔT, а температура протилежної стінки залишається незмінною. Знайти тиск у посудині, який встановиться, і положення центру мас газу. Вважати, що $\Delta T \ll T_0$.

Розв'язок. Після встановлення рівноваги в різних місцях посудини тиск газу буде одним і тим же, а температура буде різною: вищою поблизу теплішої стінки і нижчою - у протилежному кінці. Якщо $\Delta T \ll T_0$, то можна вважати, що температура змінюється за лінійним законом

$$T(x)=T_0\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{l}\right).$$

Подумки розіб'ємо посудину на тонкі шари товщиною Δx такі, що в межах кожного шару можна вважати температуру газу постійною. Для газу в кожному такому шарі виконується умова

$$p=n(x)kT(x),$$

де p – тиск у посудині, k – стала Больцмана, $n(x)$ — об'ємна концентрація газу в даному шарі. Видно, що концентрація теж залежить від x:

$$n(x)=\frac{p}{kT_0\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{l}\right)}\approx\frac{p}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{l}\right).$$

(Ми скористалися наближеною рівністю $\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha$, коли $\alpha \ll 1$) і за лінійним законом змінюється від $n_0=\frac{p}{kT_0}$ біля «холодної» стінки до $n_l=\frac{p}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta T}{T_0}\right)$ біля «теплої». Середнє значення концентрації

$$n_{cp}=\frac{n_0+n_l}{2}=\frac{p}{kT_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Виразимо через n_{cp} повну кількість молекул у сосуді:

$$N=S\,ln_{\text{ср}}=\frac{pSl}{kT_0}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right), \tag{1}$$

(S – площа торця циліндра). З іншого боку,

$$N=S\,ln_0=\frac{p_0Sl}{kT_0}, \tag{2}$$

де n_0 – концентрація молекул газу в посудині в стані (p_0,T_0). З (1) і (2) знаходимо тиск у посудині при рівноважному стані, що встановився:

$$p=\frac{p_0}{\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)}\approx p_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Тепер знайдемо положення центру мас газу:

$$x_{ц.м.}=\frac{S}{N}\int_0^L x\,n(x)dx=L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\approx L\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Таким чином, центр мас змістився в бік більш холодної стінки на

$$\Delta l=\frac{1}{12}\frac{\Delta T}{T_0}L.$$

Зсув центру мас здається на перший погляд парадоксальним, проте природно пояснюється взаємодією молекул газу зі стінками посудини. Справа в тому, що в процесі встановлення рівноваги зміна імпульсу молекул, які стикаються з більш теплою стінкою, буде більше, ніж у тих, які стикаються з протилежною стінкою. Це спричинить передавання імпульсу від стінок посудини газу, а, отже, і до зміщення центру мас газу.

2.2.4. З якою швидкістю зростає товщина покриття стінки сріблом при напиленні, якщо атоми срібла мають енергію $E = 10^{-17}$ Дж та створюють тиск $p = 0{,}1$ Па? Атомна маса срібла $A = 108$, його густина $\rho = 10{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок. Швидкість зростання товщини покриття Δh буде

$$u = \frac{\Delta h}{\Delta t}. \tag{1}$$

На стінці за час Δt наростає маса срібла

$$\Delta M = \rho S \Delta h, \tag{2}$$

де ρ - густина, S – площа стінки.

Ця маса передає стінці імпульс

$$p = \Delta M \upsilon, \tag{3}$$

яка діє на стінку з силою

$$F = \frac{\Delta M \upsilon}{\Delta t} \tag{4}$$

(зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили).

Отже, тиск на стінку буде

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta M \upsilon}{\Delta t S}. \tag{5}$$

З рівняння (1), (2) та (5) отримаємо

$$u = \frac{P}{\rho \upsilon}. \tag{6}$$

Кожна молекула срібла має кінетичну енергію

$$E = \frac{m \upsilon^2}{2}, \tag{7}$$

де m - маса однієї молекули, $m = \frac{\mu_{Ag}}{N_A}$ (молярна маса поділена на число Авогадро).

З рівняння (7) отримуємо

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2EN_A}{\mu_{Ag}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-17} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{108 \cdot 10^{-3}}} = 10{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \tag{5}$$

Підставимо це значення в рівняння (6):

$$u = \frac{0{,}1}{10{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10{,}5 \cdot 10^3} = 0{,}86 \frac{\text{нм}}{\text{с}}.$$

2.2.5. У повітрі при нормальних умовах (T = 273 К, $p = 10^5$ Па) створено однорідне електричне поле з напруженістю E. Іонізація молекул повітря відбувається за рахунок космічного випромінювання. Вільні електрони, які виникли при іонізації, подорожують, перш ніж зустріти на своєму шляху позитивно заряджений іон і знову утворити нейтральну молекулу. Вважаючи удари нейтральних молекул з електронами абсолютно пружними, знайдіть середню швидкість упорядкованого руху електронів і середню швидкість невпорядкованого хаотичного руху електронів. Розмір (діаметр) молекул повітря $D \approx 0{,}3$ нм. Розгляньте два випадки: $E_1 = 100$ В/ м , $E_2 = 10^6$ В/ м. При якій величині напруженості E виникає електричний пробій у повітрі, якщо для гарантованої іонізації однієї молекули потрібна енергія не менше $w_0 = 10$ еВ й кожен з двох вільних електронів після іонізації молекули повинен мати приблизно таку ж енергію?

Розв'язок. Середня швидкість невпорядкованого хаотичного руху електронів $\bar{\upsilon}$, мабуть, буде значно більше середньої швидкості теплового руху нейтральних молекул $\bar{\upsilon}_T$. Це після обчислень потрібно буде перевірити. У такому випадку для знаходження середньої довжини вільного пробігу електронів можна вважати нейтральні молекули такими, що стоять на місці. Концентрація молекул дорівнює

$$n = \frac{p}{kT}.$$

При наших допущеннях довжина вільного пробігу електронів дорівнює

$$\lambda = \frac{4}{n\pi D^2} = \frac{4kT}{p\pi D^2} = 5{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Після кожного зіткнення електрона з нейтральною молекулою його швидкість випадковим чином змінює свій напрямок, а величина швидкості зменшується на деяку свою частину. Це пов'язано із тим, що масивна в порівнянні з електроном нейтральна молекула після удару змінює свою швидкість і набуває деякої кінетичної енергії. Якщо швидкість неупорядкованого хаотичного руху електронів позначити υ, а швидкість дрейфу, тобто впорядкованого руху u, то між ними є такий зв'язок

$$u = \frac{at}{2} = \frac{1}{2}\frac{Ee}{m}\frac{\lambda}{\upsilon}.$$

(між ударами електрон рухається з прискоренням, яке направлено проти електричного поля E). За час t електрон в середньому переміститься на відстань ut, при цьому електричне поле виконає роботу $Eeut$. При зіткненні з нейтральною молекулою масою M, яка знаходиться в спокої, електрон масою m може втратити від 0 до 4 m/M частини від своєї кінетичної енергії. Якщо вважати, що в середньому втрачається приблизно $2m/M$-на частина енергії, то середня швидкість неупорядкованого хаотичного руху електронів можна знайти зі закона збереження енергії

$$Eeut = \frac{2m}{M}\frac{m\upsilon^2}{2},$$

або

$$Ee\frac{1}{2}\frac{Ee}{m}\frac{\lambda}{\upsilon}\frac{\lambda}{\upsilon} = \frac{m^2\upsilon^2}{M}$$

і

$$\upsilon = \sqrt[4]{\frac{E^2 e^2 \lambda^2 M}{2m^3}}.$$

Якщо $E = E_1 = 100$ В/м

$$\upsilon = 21 \text{ км/с і } u = 130 \text{ м/с}.$$

Якщо $E = E_2 = 10^6$ В/м

$$\upsilon = 2100 \text{ км/с і } u = 13 \text{ км/с}.$$

Маса молекули у багато разів більше маси електрона, тому швидкість упорядкованого руху електронів набагато менше швидкості їх хаотичного руху. Порівняємо ці швидкості з середньої швидкістю руху молекул повітря

$$\upsilon_T = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 480 \text{ м/с}.$$

Видно, що передбачення того, що швидкість хаотичного руху електронів більше теплових швидкостей руху молекул, виявилося вірним.

Отримаємо швидкість теплового руху електронів (вільних частинок) при заданій температурі. Оскільки маса електрона менше маси молекули повітря приблизно в 2000·29 разів, швидкість електронів більше швидкості молекул у $\sqrt{2000 \cdot 29}$ разів і складає

$$\upsilon_{Te\imath} = 110 \text{ км/с}.$$

Отже, за рахунок теплового руху молекул, які штовхають у різні боки вільні електрони, їх швидкості стають більше 21 км/с. Таким чином, саме величину 110 км/с потрібно вважати відповіддю для випадку, коли E = 100 В/м. Тоді швидкість упорядкованого руху електронів буде менше

$$u = \frac{Ee}{2m} \frac{\lambda}{\upsilon_{Te\imath}} = 25 \text{ м/с}.$$

Середня кінетична енергія, якої набувають електрони при напруженості електричного поля E, дорівнює

$$w = Ee\lambda \sqrt{\frac{M}{8m}}.$$

Щоб іонізувати повітря, ця енергія повинна бути більше енергії іонізації у три рази: $w = 3w_0$. Звідки випливає, що електричне поле повинно мати напруженість

$$E > \frac{3w_0}{e\lambda} \sqrt{\frac{8m}{M}} = 2{,}3 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Значення пробивної напруженості поля для повітря в довіднику складає $3 \cdot 10^6$ В/м. Отже, результат розрахунків узгоджується з експериментальними даними.

2.2.6. Оцініти у скільки разів маса океана перевищує повітряну масу Землі. Взяти радіус Землі $R_З$ = 6400 км.

Розв'язок. Щоб визначити масу повітря навколо Землі треба атмосферний тиск $p_{атм}$ помножити на площу S поверхні Землі та розділити на прискорення вільного падіння:

$$m_n g = p_{атм} \cdot S.$$

Звідки

$$m_n = \frac{p_{атм} S}{g}.$$

Відомо, що поверхня морів та океанів складає 2/3 від усієї поверхні Землі, тому

$$S_{океан} = \frac{2}{3} S.$$

Будемо вважати, що середня глибина океанів h = 4000 м. Тоді, якщо вважати густину води $\rho = 10^3 \frac{кг}{м^3}$, то маса води в океані

$$m_{H_2O} = \rho S_{океан} h = \frac{2}{3} Sh.$$

Відношення

$$\frac{m_{H_2O}}{m_n} = \frac{2S\rho h g}{3p_{атм}S} = \frac{2\rho h g}{3p_{атм}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 10^5} = 260.$$

Отже маса води в океані більша за масу повітря всієї атмосфери в 260 разів.

2.2.7.. У герметично закритій посудині змішали порівну кисень і гелій. Потім у стінці посудини пробили невеликий отвір. Яким буде склад молекулярного пучка, що виходить з отвору?

Розв'язок. Енергія молекул газу залежить тільки від його температури. Оскільки гази в посудині знаходяться в рівновазі і їх температури однакові, то

$$\frac{m_{O_2} \upsilon_{O_2}^2}{2} = \frac{m_{He} \upsilon_{He}^2}{2},$$

де υ_{O_2} і υ_{He} – середні швидкості руху молекул газів m_{O_2} і m_{He} – їх маси. З цієї формули випливає, що

$$\frac{\upsilon_{O_2}}{\upsilon_{He}} = \sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}.$$

Для простоти вважатимемо, що молекули газу можуть рухатися тільки в трьох напрямах і швидкості всіх молекул однакові та дорівнюють середній швидкості. Тоді в напрямі до отвору рухається одна шоста частина молекул кожного з газів. За час Δt з посудини вилітають ті молекули газу, які спочатку знаходилися на відстані, не більшій $\upsilon \Delta t$ від отвору. Тобто це молекули кисню, що знаходяться в об'ємі $\upsilon_{O_2} \Delta t \cdot s$ і молекули водню, що знаходяться в об'ємі $\upsilon_{He} \Delta t \cdot s$ (s – площа отвору). Усього таких молекул кисню $N_{O_2} = \upsilon_{O_2} s\, n_{O_2} \Delta t$ і молекул гелію $N_{He} = \upsilon_{He} s\, n_{He} \Delta t$, де n_{O_2} і n_{He} - кількість молекул кисню і гелію в одиниці об'єму. Якщо у посудині є рівні кількості молекул обох газів, то n_{O_2} = n_{He} і

$$\frac{N_{O_2}}{N_{He}}=\frac{\upsilon_{O_2}}{\upsilon_{He}}=\sqrt{\frac{m_{O_2}}{m_{He}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Якщо ж маси газів в посудині рівні, то $m_{O_2}n_{O_2}=m_{He}n_{He}$ і

$$\frac{N_{O_2}}{N_{He}}=\frac{\upsilon_{O_2}}{\upsilon_{He}}\frac{n_{O_2}}{n_{He}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}\cdot\frac{m_{He}}{m_{O_2}}=\frac{1}{16\sqrt{2}}.$$

2.2.8. У кубічній посудині об'ємом V = 1 л знаходиться m = 0,01 г гелію при температурі T = 300 К. Спостерігаємо за однією з молекул. Скільки разів вона зіштовхнеться з верхньою стінкою посудини за час t = 1 хв ?

Розв'язання. Якщо час, заданий у задачі, достатньо великий (це потрібно перевірити), то всі молекули будуть зіштовхуватися з верхньою стінкою посудини однаково часто. Тоді кількість ударів буде дорівнювати:

$$n_t=\frac{n_{заг}}{N},$$

де $n_{заг}$ – загальна кількість ударів об стінку, N – кількість молекул у посудині. Для оцінки n вчинимо наступним чином. Позначимо площу стінки через S ($S=\left(\sqrt[3]{V}\right)^2$) та концентрацію молекул через n ($n=\dfrac{N}{V}$). Очевидно, що за час t зі стінкою зіштовхнуться всі ті молекули, які знаходяться від неї на відстані $\bar{\upsilon}_x t$ ($\bar{\upsilon}_x$ – середнє значення модуля відповідної компоненти швидкості) і рухалися по напряму до стінки, тобто

$$n_{заг}=\frac{1}{2}n\bar{\upsilon}_x tS.$$

Тепер оцінимо $\bar{\upsilon}_x$:

$$\bar{\upsilon}_x=\sqrt{\frac{1}{3}\bar{\upsilon^2}}=\sqrt{\frac{RT}{M}},$$

де R = 8,31 Дж/(К·моль) – універсальна газова стала, M = $4\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярна маса гелію.

Таким чином, остаточно отримаємо

$$n_t=\frac{n\bar{\upsilon}_x tS}{2N}=\frac{1}{2V}\sqrt{\frac{RT}{M}}\,tV^{2/3}=\frac{\sqrt{RT/M}}{2\sqrt[3]{V}}\,t\approx2{,}5\cdot10^5.$$

Іншими словами, якщо не враховувати зіткнення молекул між собою, то $n_t=\dfrac{\upsilon_x t}{2a}$, де $2a=2V^{1/3}$ – шлях молекул "зі стелі до стелі."

Тепер ми повинні обґрунтувати вибрану модель. Для цього ми оцінімо довжину вільного пробігу молекули, тобто середня відстань, яку пройшла молекула між двома зіткненнями з іншими молекулами:

$$\lambda\approx\frac{V/N}{\pi d^2}=\frac{1}{\pi dn},$$

де $d \sim 10^{-10}$ м – діаметр молекул. При нормальних умовах в 1м^3 будь-якого газу зосереджуються $\approx 2{,}7 \cdot 10^{25}$ молекул. Тому $\lambda \approx 10^{-6}$ м і середній зсув молекули за час t дорівнює

$$\bar{x} = \sqrt{\lambda \upsilon t} \approx 1 м,$$

що істотно більше за розмір посудини. Отже, змішування дуже ефективно "вирівнює" молекули.

$$t_{\max} = 34{,}8^0 C.$$

2.2.9. Кімната площею S = 20 м^2 з висотою стелі H = 3 м заповнена повітрям за нормальних умов. Оцініть кількість ударів молекул об стелю за час τ = 1 година. Куди частіше вдарятимуться молекули – об підлогу чи об стелю кімнати? Оцініть різницю кількості ударів молекул об підлогу і об стелю за час τ враховуючи, що температура повітря в кімнаті всюди однакова.

Розв'язок. Нехай υ_z – «середня» проекція швидкості молекули за напрямком «до стелі», n – концентрація молекул. Тоді кількість ударів молекул об стелю за час τ буде $N = 0{,}5 n \upsilon_z S \tau$. Оцінимо υ_z за середнім квадратом швидкості молекул (не забуваючи взяти від цього значення одну третину):

$$\upsilon_z = \sqrt{\frac{RT}{m}} \approx 300 \frac{м}{с},$$

де температура повітря T = 300 К, а середня молярна маса повітря M = 0,029 кг/моль. Концентрацію знайдемо зі співвідношення

$$n = \frac{p}{kT} \approx 2{,}5 \cdot 10^{25} м^{-3},$$

де тиск повітря $p \approx 10^5$ Па, а стала Больцмана k = 1,38 $\cdot 10^{-23}$Дж/К.

Таким чином,

$$N = 0{,}5 n \upsilon_z S \tau \approx 2{,}5 \cdot 10^{32}.$$

Різниця кількості ударів об стелю і об підлогу при незмінній температурі визначається різницею концентрації молекул (на підлозі тиск вище на

$$\Delta p = \rho g H = \frac{pM}{RT} g H.$$

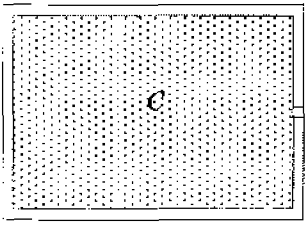


Рис. 1

Тобто

$$\Delta N = \frac{N \Delta p}{p} = \frac{NMgH}{RT} \approx 10^{29} \approx \frac{1}{4000} N.$$

2.2.10. Посудина з'єднана з навколишнім середовищем через малий отвір (рис.1). Температура газу в навколишньому середовищі T, тиск - p. Газ настільки розріджений, що молекули при польоті в посудину і з посудини в отворі не стикаються одна з одною. У посудині підтримується температура $4T$. Яким буде тиск у посудині?

Розв'язок. Тиск газу в посудині дорівнює

$$p_1 = n_1 k T_1 = 4 n_1 k T,$$

де n_1 - концентрація в посудині (кількість молекул в одиниці об'єму) і k-постійна Больцмана. Поза посудиною тиск дорівнює $p = n_2 k T$ (n_2-концентрація молекул у навколишньому середовищі). Отже,

$$p_1 = 4p\frac{n_1}{n_2}.$$

Таким чином, для того щоб знайти тиск у посудині, досить визначити відношення концентрацій молекул газу в посудині і в навколишньому середовищі. Для знаходження цієї відносини скористаємося тим, що газ у посудині знаходиться в рівновазі. При рівновазі кількість молекул газу, що вилітають з посудини, дорівнює кількості молекул газу, що влітають у посудину за той же час. Для простоти міркувань уважатимемо, що швидкості всіх молекул газу при сталій температурі однакові й дорівнюють середній квадратичній швидкості, що відповідає цій температурі. Крім того, будемо вважати, що молекули рухаються вздовж трьох взаємно перпендикулярних напрямків, один з яких перпендикулярний до площини перетину отвору, причому, всі напрямки рівноймовірні. Тоді в напрямку до отвору рухається 1/6 частина всіх молекул, що є в попосудині. За час Δt з посудини вилітають ті молекули, які знаходяться в отворі на відстані, рівній $\upsilon_1\Delta t$, де υ_1 - швидкість молекул у посудині. Оскільки концентрація молекул у посудині дорівнює n_1, то за час Δt з посудини вилітають $1/6 n_1 \upsilon_1 \Delta t \Delta S$ молекул (ΔS - площа отвору). Аналогічно знайдемо, що в попосудину влітає $1/6 n_2 \upsilon_2 \Delta t \Delta S$ молекул, де υ_2 - швидкість молекул газу в навколишньому просторі. В умовах рівноваги $n_1\upsilon_1 = n_2\upsilon_2$. Звідси знайдемо, що відношення концентрацій молекул дорівнює

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

Але, як відомо, середня квадратична швидкість руху молекул пов'язана з температурою газу формулою $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{3kT}{2}$ (m -маса молекули), отже,

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{12kT}{m}}, \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{й} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

Використовуючи це співвідношення, знайдемо тиск газу в посудині

$$p_1 = 2p.$$

2.2.11. Як зміниться швидкість витікання газу з балона через невеликий отвір, якщо температуру газу збільшити в 4 рази, а тиск - у 8 раз?

Розв'язок. Число Z молекул, що вилітають з посудини за час t, дорівнює

$$Z = \frac{1}{2} n S |\overline{\upsilon_x}| t,$$

де $|\bar{\upsilon}_x|$ - середнє значення модуля швидкості молекули на вісь X, перпендикулярну до стінки, у якій є отвір, S - площа отвору і n - концентрація молекул газу в посудині (кількість молекул в одиниці об'єму).

Величина $|\bar{\upsilon}_x|$ пропорційна швидкості υ теплового руху молекул. Оскільки

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

(μ - молярна маса газу), $|\upsilon_x| \sim \sqrt{T}$.

З основного рівняння молекулярно - кінетичної теорії

$$p = nkT$$

випливає, що

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Таким чином,

$$Z = \frac{p}{T}\sqrt{T} = \frac{p}{\sqrt{T}}.$$

Це означає, що при збільшенні температури в 4 рази, а тиску у 8 разів швидкість витікання газу збільшується в 4 рази.

2.2.12. У кубічній посудині об'ємом V = 1л знаходиться деяка кількість гелію при температурі T = 300 К. Оцініть тиск газу, при якому кількість ударів молекул одна від одної за деякий відрізок часу дорівнює кількості ударів молекул об стінки посудини. Дуже ускладнилася б задача, якщо б замість гелію в посудині була водяна пара?

Розв'язок. Для оцінки кількості ударів молекул одна об одну запишемо вираз для довжини вільного пробігу молекул - середньої відстані, котру пробігає молекула між послідовними зіткненнями, - виразивши його через діаметр молекул d і їх концентрацію n:

$$\lambda = \frac{1}{\pi d^2 n}.$$

Час прольоту цієї відстані з середньою швидкістю υ дорівнює λ/υ, а за великий інтервал часу τ молекула здійснить $\upsilon\tau/\lambda$ ударів об інші молекули. Якщо кількість молекул у посудині N, то для знаходження повної кількості ударів молекул одна об одну потрібно помножити кількість ударів однієї молекули об інші на кількість молекул, поділених на два, - щоб не враховувати удари двічі. Отже, повна кількість ударів молекул одна об одну за вибраний інтервал часу становить

$$0{,}5N\,\upsilon\tau/\lambda = 0{,}5N\,\upsilon\tau\pi d^2 n.$$

Кількість ударів молекул об стінки судини можна знайти звичайним шляхом - це частина стандартного міркування при розрахунку тиску газу на стінку посудини. Позначивши складову швидкості молекул уздовж однієї обраної осі υ_x і довжину ребра стінки посудини a, отримаємо, що кількість ударів об усі шість стінок кубу за великий проміжок часу τ дорівнює $6\tau\upsilon_x N/(2a)$. Прирівнюючи отримані вирази для кількості ударів і враховуючи, що значення складової швидкості υ_x можна грубо оцінити по енергії молекули: $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon}{\sqrt{3}}$, а діаметр молекули гелію $d = 2\cdot 10^{-10}$м (це значення ми взяли з довідника), отримаємо вираз для концентрації молекул:

$$n = \frac{6}{\sqrt{3}\pi d^2 a} \approx 3\cdot 10^{20}\,\text{м}^{-3}.$$

Така концентрація відповідає величині тиску в посудині

$$p = nkT = 1{,}2\ \text{Па}.$$

Це дуже малий тиск. У звичайних умовах кількість ударів молекул одна об одну в багато разів перевищує кількість ударів молекул об стінки посудини. Що змінилося б у відповіді, якщо б замість гелію в посудині була водяна пара? Для одержання в результаті розв'язку дуже малих концентрацій газу в "літрах" практично нічого не повинно змінитися, трохи зміниться чисельна відповідь – велике значення діаметра молекули води (приблизно $3\cdot 10^{-10}$м) зменшить шуканий тиск приблизно у 2 рази. При звичайних тисках кількість ударів молекул води одна об одну може виявитися істотно більше, ніж дає наш розрахунок, який не враховує значних сил тяжіння між полярними молекулами водяної пари.

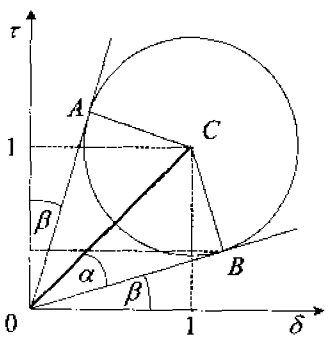


Рис. 1

2.2.13. Залежність наведеної температури $\tau = T/T_0$ гелію від приведеного тиску $\delta = p/p_0$ має вигляд кола (рис. 1), центр якого знаходиться в точці (1; 1), причому мінімальна наведена температура гелію в цьому процесі дорівнює τ_m. Знайдіть відношення мінімальної і максимальної концентрації атомів гелію при такому процесі.

Розв'язок. Згідно з рівнянням $p = nkT$, концентрація n атомів гелію визначається його температурою T і тиском p (k - постійна Больцмана). Звідси випливає, що на T-p-діаграмі з двох прямих, що проходять через початок координат, більшої концентрації атомів відповідає пряма, що йде під меншим кутом до осі p. Тому в показаній на малюнку діаграмі заданого процесу концентрація атомів максимальна в точці B і мінімальна в точці A. З малюнка слідує, що

$$n_{max} = \frac{p_B}{kT_B} = \frac{p_0 \operatorname{ctg}\beta}{kT_0},$$

де β – кут нахилу дотичної BO до осі δ на наведеній діаграмі. Оскільки $\Delta ACO = \Delta BCO$ кут між дотичною AO і віссю τ на наведеній діаграмі також дорівнює β, то

$$n_{min}=\frac{p_A}{kT_A}=\frac{p_0\,\mathrm{tg}\,\beta}{kT_0}.$$

Таким чином, шукане відношення концентрацій дорівнює

$$\frac{n_{min}}{n_{max}}=\mathrm{tg}^2\beta.$$

Ураховуючи, що мінімальна наведена температура $\tau_{min}=T_{min}/T_0$ гелію і радіус r кола, що відповідає на діаграмі заданому процесу, пов'язані співвідношенням r = 1 - τ_{min}, отримуємо, що $\sin\alpha=\frac{r}{\sqrt{2}}$, оскільки ΔCBO прямокутний і його гіпотенуза $OC=\sqrt{2}$. З діаграми видно, що $\alpha+\beta=\pi/4$. Ураховуючи це, отримаємо

$$\frac{n_{min}}{n_{max}}=tg^2\beta=tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\frac{1-tg\,\alpha}{1+tg\,\alpha}\right)^2=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-r\sqrt{2-r^2}}{1+r\sqrt{2-r^2}}=$$

$$=\frac{1-(1-\tau_m)\sqrt{2-(1-\tau_m)^2}}{1+(1-\tau_m)\sqrt{2-(1-\tau_m)^2}}=\frac{1-(1-\tau_m)\sqrt{1+2\tau_m-\tau_m^2}}{1+(1-\tau_m)\sqrt{1+2\tau_m-\tau_m^2}}.$$

2.2.14. Середня квадратична швидкість молекул повітря в кімнаті 500 м/с, довжина вільного пробігу 0,01 мм. У даний момент обрана для спостереження молекула знаходиться посередині квадратної кімнати площею 25 м^2. Оцініть середній час, необхідний для її подорожі до однієї зі стін.

Розв'язок. Якби частинка не змінювала напрямки руху при ударах об інші частинки, вона дісталася б до стінки зовсім швидко - за час

$$t=\frac{L}{\upsilon}=\frac{5\,\text{м}}{500\,\text{м/с}}=0{,}01\,\text{с}.$$

(Ми взяли «середнє» відстань до стінки – при площі кімнати 25 квадратних метрів відстань від центру кімнати до найближчої точки стіни 2,5 м, до кута, тобто до найвіддаленішої точки цієї стіни, більше 8,5 м, візьмемо для грубої оцінки 5 м.)

Підрахуємо тепер, скільки потрібно часу для прольоту (вірніше – переповзання) цієї відстані з урахуванням зіткнень частинок. Для цього подивимося, як додається до вже пройденого шляху L_n черговий «шматочок» $d=0{,}01$ мм – довжина вільного пробігу. Скористаємося теоремою косинусів для знаходження відстані L_{n+1} від початкової точки подорожі до точки розташування частинки після проходження $(n+1)$ ділянки довжиною d кожен:

$$L_{n+1}^2=L_n^2+d^2-2L_n d\cos\varphi,$$

де φ - кут між переміщенням $\vec{L}_n$ до збільшення чергової ділянки і новим відрізком довжиною d. Кут φ може бути будь-яким у межах від 0 до 180°, середнє значення косинуса цього кута є нульовим.

Будемо вважати, що

$$L_{n+1}^2 = L_n^2 + d^2,$$

тоді

$$L_n^2 = nd^2.$$

Звідси кількість ударів при проходженні довгого шляху L дорівнюватиме $n = L^2/d^2$, а час подорожі складе

$$T = \frac{nd}{\upsilon} = \frac{L^2}{d\upsilon} = \frac{(5\text{м})^2}{10^{-5}\text{м}\cdot 500\text{м/с}} = 5000\text{с}.$$

Ураховуючи, що довжина вільного пробігу молекул у повітрі при звичайних умовах в багато разів менше, ніж 0,01 мм, отримуємо час подорожі молекули з центру кімнати до стіни просто величезним – на практиці навіть дуже незначні, практично невідчутні, потоки повітря, які завжди відбуваються в кімнаті, скорочують час переміщування в десятки і сотні тисяч разів.

2.2.15. У глибинах космосу літає дуже велика посудина, у якій хаотично рухаються маленькі сталеві кульки, половина яких має діаметр d, а половина - діаметр $2d$. Кульки пружно стикаються між собою і зі стінками посудини, втрат енергії при цьому немає. Які удари відбуваються частіше - маленьких кульок об маленькі або великих кульок об великі? У скільки разів?

Розв'язок. Вміст посудини дуже нагадує «звичайний» ідеальний газ - для такого газу можна вважати, що середні кінетичні енергії важких і легких «молекул» однакові. При цьому швидкості υ їх руху розрізняються - кульки діаметром $2d$ мають масу у 8 разів більшу, тому їх середні квадратичні швидкості в $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ разів менше. Площа поперечного перерізу в таких кульках у 4 рази більше, ніж у маленьких. Тепер можна оцінити частоту ударів.

Нехай кулька летить зі швидкістю υ протягом інтервалу часу Δt. Об'єм, у якому знаходяться «вдарені» ним кульки, пропорційний площі його поперечного перерізу S, швидкості руху і тривалості інтервалу часу. Зміни напрямку руху при ударах для нас несуттєві - кульки розташовуються в посудині хаотично, і нам байдуже, де відбуваються удари. Правда, це справедливо тільки якщо довжина вільного пробігу істотно більше розміру кульок - інакше об'єм «займаного» простору близько точки удару було б важко порахувати. При малій концентрації кульок кількість υ ударів однакових кульок одна об одну пропорційні «займаним» об'ємам, тобто $S\upsilon\Delta t$. Для великих кульок такий об'єм виходить у $\sqrt{2}$ разів більше, ніж для маленьких: $S_б = 4S_м$, $\upsilon_б = \upsilon_м/\sqrt{8}$, тому великі кульки стикаються між собою частіше в $\sqrt{2}$ разів.

2.2.16. Оцінити максимальну силу, яку показуватиме динамометр, приєднаний до пластин, що закривають магдебурзькі півсфери радіусом 20 см. Півсфери розтягують у протилежні сторони силами F. Атмосферний тиск 1 атм.

Розв'язок. Кожна з пластин знаходиться в рівновазі завдяки дії на неї трьох сил: сили T, що діє з боку динамометра, сили $F_0 = p_0 S$ атмосферного тиску і сили реакції півсфери (малюнок). Оскільки в той момент, коли пластина відривається від півсфери, сила реакції півсфери дорівнює нулю, то

$$T_{max} = F_0 = pS = p_0 \pi R^2 \approx 12{,}6 \cdot 10^3 \, \text{Н}.$$

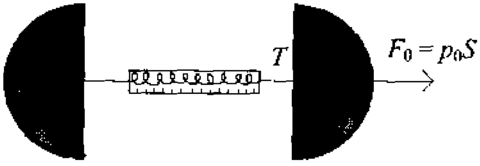


Рис. 1

2.2.17. Оцініть приблизно, при якому мінімальному радіусі планети вона зможе утримувати атмосферу, що складається переважно з кисню і азоту, якщо температура поверхні планети $T = 300$ К. Середню густина речовини планети взяти рівною $\rho = 4 \cdot 10^3 \, \text{кг/м}^3$.

Розв'язок. Розглянемо молекулу, що входить до складу атмосфери планети. Ця молекула утримуватиметься в безпосередній близькості від поверхні планети, якщо її кінетична енергія не перевищуватиме потенційної енергії молекули в гравітаційному полі планети:

$$\frac{m\overline{\upsilon^2}}{2} \le \gamma \frac{mM}{r},$$

де m — маса молекули, $\overline{\upsilon^2}$ — середній квадрат її швидкості, γ — гравітаційна стала, M — маса планети і r — її радіус. Оцінку мінімального радіусу планети можна провести, використовуючи рівність кінетичної і потенційної енергій по порядку величини:

$$\frac{m\overline{\upsilon^2}}{2} \approx \gamma \frac{mM}{r_{min}}. \qquad (1)$$

Середній квадрат швидкості молекули газу пов'язаний з температурою T газу співвідношенням

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{\mu},$$

де k — постійна Больцмана, R — універсальна газова стала, μ — молярна маса газу. Масу планет можна виразити через середнє значення ρ густини речовини планети і її мінімальний радіус r_{min}:

$$M = \frac{4}{3} \pi r_{min}^3 \rho.$$

Тоді співвідношення (1) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{3RT}{2\mu} \approx \frac{4}{3}\gamma\pi r_{min}^2\rho,$$

Звідки

$$r_{min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\gamma\pi\rho\mu}}. \qquad (2)$$

З формули (2) виходить, що r_{min} залежить (за інших рівних умов) від молярної маси μ: r_{min} тим менше, чим більше μ. За умовою завдання атмосфера планети складається переважно з кисню і азоту, для яких молярні маси рівні відповідно $\mu_{O_2} = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль і $\mu_{N_2} = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль. Очевидно, для оцінки мінімального радіусу планети досить знайти r_{min}, вважаючи, що атмосфера складаються тільки з азоту.

Отже,

$$r_{min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\gamma\pi\rho\mu_{N_2}}} \approx 3\cdot10^5\,\text{м} = 300\,\text{км}.$$

2.2.18. Горизонтальний циліндричний сосуд з теплопровідними стінками, заповнений аргоном густиною $\rho = 1{,}7$ кг/м^3, закритий рухомим поршнем і знаходиться в кімнаті (рис. 1). Площа поршня $S = 400$ см^3 відстань від краю циліндра до поршня $h = 50$ см. У посудині на дно на нитці прикріплена куля об'ємом $V_К = 1000$ см^3, зроблена з тонкого нерозтяжного і теплопровідного матеріалу і заповнена гелієм. Маса кульки з гелієм $m = 1{,}2$ г. Після того як протопили піч і повітря в кімнаті прогрілося, поршень перемістився на відстань $\Delta h = 3$ см. Знайдіть зміну сили натягу нитки, що утримує кулю.

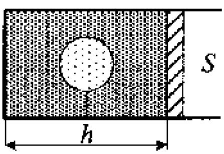


Рис. 1

Розв'язок. При пересуванні поршня об'єм аргону змінився від значення $V = Sh - V_K$ до значення $V + S\Delta h$ збільшившись у $\dfrac{V + S\Delta h}{V}$ разів. У стільки ж разів зменшилася густина аргону і в кінці процесу стала рівною $\rho\cdot\dfrac{V}{V + S\Delta h}$.

Отже, виштовхуюча сила, що діє на кулю, зменшується на величину

$$\Delta F = \left(\rho - \rho\cdot\frac{V}{V + S\Delta h}\right)gV_K = \rho\frac{S\Delta h}{V + S\Delta h}gV_K = \rho\frac{S\Delta h}{S(h + \Delta h) - V_K}gV_K.$$

На таку ж величину зменшилася і сила натягу нитки, що утримує кулю. Тому зміна цієї сили дорівнюватиме

$$\Delta N = -\rho\frac{S\Delta h}{S(h + \Delta h) - V_K}gV_K \approx -1\,\text{мН}.$$

Якщо тільки воно не перевищить за величиною початкову силу натягу нитки, тобто якщо куля в кінці нагрівання не ляже на дно циліндра. Перевіримо це.

Спочатку сила натягу нитки дорівнювала різниці сили Архімеда і ваги кулі з гелієм:

$$N = (\rho V_K - m)g = 5\text{ мН} > |\Delta N|.$$

Отже, нитка в кінці залишиться натягнутою, і наша відповідь справедлива.

2.2.19. Повітря складається переважно з азоту та кисню (сухе повітря це 78% N_2 та 20,95% - O_2). Концентрація молекул азота при цьому в $\alpha = 4$ рази більше концентрації молекул кисню. Чому дорівнює кінетична енергія обертання молекул азота, що знаходяться в кімнаті об'ємом $V = 60$ м^3? Атмосферний тиск $p = 10^5$ Па.

Розв'язок. Внутрішня енергія моля газу, який складається з двоатомних молекул, дорівнює $\frac{5}{2}RT$, що більше на RT за внутрішню енергію одноатомного газу $(u = \frac{3}{2}RT)$ за рахунок кінетичної енергії обертання молекули. Тобто кінетична енергія обертання молекул азота, що знаходяться в кімнаті, буде

$$E_{обертN_2} = N_{N_2}kT, \qquad (1)$$

де N_{N_2} – кількість молекул азота в кімнаті.

Скористаємось законом Дальтона:

$$p = p_{N_2} + p_{O_2}, \qquad (2)$$

де p_{N_2} та p_{O_2} – парціальні тиски кисню та азоту в цьому повітрі.

За основним законом молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

$$p = nkT, \qquad (3)$$

де $n = \frac{N}{V}$ – концентрація молекул, k – стала Больцмана.

Підставимо значення парціальних тисків у (2), враховуючи те, що якщо двоатомні молекули мають кінетичну енергію поступального руху та енергію обертального руху, то за принципом незалежності руху ці рухи не залежать один від одного, маємо:

$$p = \frac{N_{N_2}}{V}kT + \frac{N_{O_2}}{V}kT = \frac{N_{N_2}}{V}kT + \frac{N_{N_2}}{\alpha V}kT.$$

Звідки

$$p\alpha V = N_{N_2}\alpha kT + N_{N_2}kT,$$

$$N_{N_2}kT = pV\frac{\alpha}{1+\alpha}. \qquad (4)$$

Отже, підставимо (4) в (1) та отримаємо

$$E_{обертN_2} = pV\frac{\alpha}{1+\alpha} = 10^5 \cdot 60\frac{4}{1+4} = 4{,}8\text{ МДж}.$$

2.2.20. Дві однакові посудини з однаковою кількістю молекул азота з'єднані краном. У перший посудині середня квадратична швидкість молекул дорівнює $\upsilon_1 = 400$ м/с, а в другій – $\upsilon_2 = 500$ м/с. Яка буде швидкість молекул, якщо відкрити кран, що з'єднує ці посудини?

Розв'язок. Скористаємось законом Дальтона, з якого випливає, що після відкривання крану та встановлення рівноваги температурної та концентрації (до речі концентрація газу і в першому і в другому стані буде однаковою):

$$p = p_1' + p_2', \tag{1}$$

де p_1' та p_2' – парціальні тиски газу з першої та другої посудин.

Оскільки концентрація газу до з'єднання та після з'єднання не змінюється, то при температурі першої посудини парціальний тиск стане в два рази менший, тому

$$p_1' = \frac{p_1}{2}.$$

Теж саме матимемо з парціальним тиском газу другої посудини

$$p_2' = \frac{p_2}{2}.$$

Скористаємось основним законом молекулярно-кінетичної теорії газу:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \bar{\upsilon}^2, \tag{2}$$

де m_0 – маса однієї молекули, n – концентрація молекул, $\bar{\upsilon}^2$ – середньоквадратична швидкість у квадраті.

З рівняння (1) та (2) маємо:

$$\frac{1}{3} m_0 n \bar{\upsilon}^2 = \frac{1}{3}\frac{m_0 n \bar{\upsilon}_1^2}{2} + \frac{1}{3}\frac{m_0 n \bar{\upsilon}_2^2}{2}.$$

Звідки

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{\bar{\upsilon}_1^2 + \bar{\upsilon}_2^2}{2}}.$$

Отже, в посудині після з'єднання установиться середня квадратична швидкість

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{400^2 + 500^2}{2}} = 453 \text{ м/с}.$$

2. 3. Рівняння газового стану

Рівняння стану ідеального газу (або просто рівняння газового стану, або рівняння Менделєєва - Клапейрона) описує зв'язок між параметрами стану - тиском, температурою і об'ємом одній з простих фізичних систем - ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

де p — тиск газу, V — його об'єм, m — маса, μ — молярна маса. T — температура, R — універсальна газова стала.

Згідно з рівнянням, тиск ідеального газу пропорційний його температурі. Як це потрібно розуміти? Чи означає це, наприклад, що завжди при підвищенні температурі тиск газу зростає, а при пониженні температури - падає? Звичайно, ні. Це безумовно справедливо, тільки якщо не змінюються ні об'єм, ні маса, ні молярна маса. Навіть для фіксованої маси певного газу зі зростанням температури тиск може не зростати, а падати, якщо при цьому об'єм, який займає газ, досить швидко зростає. Можливі і інші ситуації. Мабуть, найзручніше їх обговорити на конкретних завданнях.

2.3.1. Рівняння Менделєєва-Клапейрона

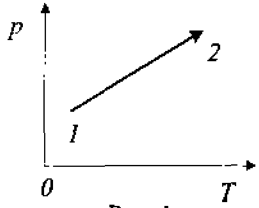


Рис. 1

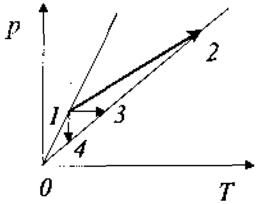


Рис. 2

2.3.1. Температура і тиск деякої маси ідеального газу змінюються, як показано на рис. 1. Чи змінюється об'єм, який займає газ? Як саме?

Розв'язок. Як видно з рис. 1, тиск зі зростанням температури лінійно зростає. Можливо, при цьому об'єм залишається постійним? Якщо ні, то як відрізнити графік процесу, при якому об'єм не змінюється? При незмінному об'ємі тиск не просто зростає зі зростанням температури, а зростає прямо пропорційно температурі. А графік прямої пропорційної залежності відрізняється від інших лінійних графіків тим, що проходить через початок координат. Таким чином, на діаграмі в p-T координатах ізохора - пряма, що проходить через початок координат. Проведемо ізохори через точки *1* і *2* (рис. 2). Ізохори різні; значить, в станах *1* і *2* об'єми різні. Яка з них більша? Найпростіше це визначити за допомогою графіка. З'єднаємо ці дві ізохори, наприклад, ізобарою *1-3* (чи ізотермою *1-4*, або будь-якою іншою ізобарою або ізотермою). На ділянці *1-3* температура збільшується при постійному тиску. Ясно, що при цьому об'єм повинен зростати. Отже, точка *2* лежить на ізохорі з більшим об'ємом, тобто при переході зі стану *1* в стан *2* об'єм газу збільшився. А може все-таки графік на рис. 1 зображувати процес з постійним об'ємом? Уточнимо це питання.

2.3.2. У посудині постійного об'єму знаходиться гелій. До посудини приєднані манометр і термометр. Показання приладів змінюються відповідно до рис. 1 задачі 2.3.1. Що можна сказати про стан газу? Зокрема, тиск у посудині вищий або нижчий атмосферного?

Розв'язок. У даному випадку об'єм газу не змінюється, а тиск не пропорційний температурі. Чи можливе таке?

Звернемося до рівняння Менделєєва – Клапейрона. Окрім параметрів p, V і T у ньому фігурують ще m і μ. Молярна маса гелію змінитися не повинна - гелій газ одноатомний і диссоціювати не може. Конденсації теж не повинно бути, оскільки температура зростає. Мабуть, єдина можливість - зміна маси m газоподібного гелію. Оскільки тиск зростає повільніше, ніж було б при ізохорному процесі для незмінної маси, маса газу повинна зменшуватися; тобто газ повинен витікати з посудини. А це означає, що тиск у посудині більший за атмосферний, інакше б газ не витікав. Рівняння Менделєєва - Клапейрона дозволяє порівнювати не лише різні стани одного газу, але й стани різних газів. Ось приклад.

2.3.3. Кульова блискавка є газовою кулею, що слабо світиться, та вільно плаває в повітрі. Згідно моделі, побудованої для пояснення природи і поведінки кульової блискавки, газ усередині кулі є комплексним з'єднанням, кожна частка якого складається з іона азоту, пов'язаного з декількома молекулами води. Втрачені азотом електрони захоплюються водою, так що кожна комплексна молекула в цілому виявляється нейтральною. Визначте, скільки молекул води зв'язує кожен іон азоту, якщо температура всередині кулі $t = 600°C$, а температура навколишнього повітря $t_0 = 10 - 20°C$.

Розв'язок. Оскільки кульова блискавка плаває в повітрі, густина газу, що знаходиться всередині неї, дорівнює густині навколишнього повітря. Тиск у блискавці, мабуть, також рівний атмосферному. Ці дві умови в сукупності дають

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \text{ або } \frac{pV}{m} = \frac{p_0 V_0}{m_0}$$

(тут усі величини без індексу належать до комплексу, а з індексом - до повітря). Використовуючи рівняння газового стану, отримуємо

$$\frac{T}{\mu} = \frac{T_0}{\mu_0}$$

звідки, знаючи молярну масу повітря ($\mu_0 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), знайдемо молярну масу комплексного з'єднання :

$$\mu = \frac{\mu_0 T}{T_0} \approx 86 \cdot 10^{-3} \text{кг/моль.}$$

Молярна маса атомарного азота дорівнює $14 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а води — $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; отже, кожен іон азоту зв'язує чотири молекули води.

Зовнішні умови, у яких знаходиться газ, можуть бути змінені різними способами, але всякий раз стан газу можна описати рівнянням газового стану.

2.3.4. Оцініть довжину вільного пробігу молекул повітря за нормальних умов. Діаметр молекул беремо рівним $d = 3.7 \cdot 10^{-10}$ м.

Розв'язок. Молекула зіткнеться з іншою молекулою, якщо відстань між їх центрами виявиться менше діаметру молекул d. Нехай за якийсь час молекула пройшла шлях l. При цьому вона зіткнулася з молекулами, центри яких знаходяться в ламаному циліндрі (злами в точках зіткнень) довжини l і перерізу πd^2. Кількість молекул у цьому об'ємі $nl\pi d^2$ (n - кількість молекул в одиниці об'єму) і є загальна кількість зіткнень. Підрахуємо шлях від одного зіткнення до іншого, тобто довжину вільного пробігу молекули:

$$\lambda = \frac{l}{nl\pi d^2} = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{RT}{N_A p\pi d^2} \approx 8{,}75\cdot 10^{-8}\,\text{м}$$

(тут тиск $p = 10^5$ Па, температура $T = 273$ К, число Авогадро $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$моль$^{-1}$), Експериментальне значення для таких умов — $6{,}20\cdot 10^{-8}$ м. Розбіжність пов'язана переважно з тим, що ми вважали усі молекули, окрім вибраної, нерухомими. Детальний аналіз, що виходить за рамки шкільного курсу, показує, що врахування відносного руху молекул призводить до зміни довжини вільного пробігу в $1/\sqrt{2}$ раз. Помножимо отриманий нами результат на цей множник та отримаємо $6{,}19\cdot 10^{-8}$ м.

Але зараз нас більше цікавить інша сторона справи. За нормальних умов довжина вільного пробігу приблизно у 200 разів більше діаметру молекул, і модель ідеального газу працює досить добре. Але якщо тиск зросте в 100-200 разів (а температура не зміниться), довжина вільного пробігу стане порівнянною з розміром молекул. Це означає, що при таких тисках, або точніше - при такій густині, яка виникне при нормальній температурі і високих тисках, молекули практично ніколи не знаходитимуться далеко одна від одної і їх взаємодією нехтувати вже не можна. У такому разі модель ідеального газу виявляється непридатною. (Дійсно, густина конденсованих фаз - рідин і твердих тіл - приблизно в 1000 разів більше густини газів, а газ, у 5-10 разів менш щільний, ніж рідина, - це вже не ідеальний газ.) Проте якщо температура досить висока, то і при високих тисках газ можна вважати ідеальним, оскільки вирішальну роль (підкреслимо це ще раз) відіграє густина газу.

Ми розглянули декілька прикладів використання рівняння газового стану (звичайно, ними не вичерпується діапазон завдань, у яких знаходить застосування рівняння Менделєєва - Клапейрона). Проте не менш важливим є питання, коли не можна користуватися цим рівнянням, або, іншими словами, яка сфера його застосування. Модель ідеального газу грунтується на припущенні невеликої енергії взаємодій молекул у порівнянні з їх кінетичною енергією. Молекули розглядаються як пружні кульки, що взаємодіють лише при безпосередньому контакті. Розміри цих кульок нескінченно малі в порівнянні з довжиною їх вільного пробігу.

Звичайно, така модель дуже умовна. Дійсно, як, наприклад, визначити розміри молекул? Безумовно, розумно під так званим *ефективним діаметром молекул* розуміти ту відстань, при зближенні на яку рух молекул помітно змінюється. Ясно, що при такому визначенні розмір молекул повинен залежати від багатьох умов, зокрема - від температури. Досвід це підтверджує - він засвідчує, що зі зростанням температури ефективний діаметр молекул зменшується. Це і зрозуміло: при підвищенні температури кінетична енергія молекул зростає, молекули повинні ближче підійти одна до одної, щоб потенційна енергія їх взаємодії виявилася одного порядку з кінетичною (інакше рух помітно не зміниться). Правда, виявляється, що залежність ця дуже слабка і не так вже безглуздо говорити про конкретні постійні значення розмірів молекул.

Значні відхилення від поведінки ідеального газу в реальних газах починаються тоді, коли не можна вважати, що молекули велику частину часу не взаємодіють, тобто коли довжина вільного пробігу молекул - від зіткнення до зіткнення - стає порівнянною з розміром молекул. У цьому випадку молекули знаходяться, переважно, недалеко одна від одної, і їх взаємодією нехтувати вже не можна. За яких же умов це відбувається? Перш ніж відповісти на це запитання, розглянемо наступне завдання.

2.3.5. Для ідеальних газів добуток тиску на об'єм (pV) не змінюється зі зміною об'єму при сталій температурі. Чи буде добуток pV збільшуватись або зменшуватись при сильному стисканні газу, якщо мати справу з неідеальним газом?

Розв'язок. При сильному стисканні молекули газу наближаються одна до одної і починають взаємодіяти. Молекули починають відштовхуватись одна від одної. Це означає, що тиск реального газу перевищує тиск ідеального газу тим більше, чим більше стискається газ. У результаті при сталій температурі добуток pV для реального газу буде зростати.

2.3.6. Для того щоб потрапити в книгу рекордів Гінсса, а також у пошуку нових родовищ рідкого палива, компанія «Ойл Райт» розробила проект свердловини глибиною 500 км. Оцінити, яка маса повітря увійде в таку свердловину, якщо тиск на поверхні дорівнює атмосферному, а температура всередені свердловини підтримується на рівні температури на поверхні (приблизно 300К). Площа перерізу свердловини 1 дм^2 = 10^{-4}м^2

Розв'язок. Якщо буде вирита свердловина глибиною в 500 км і в неї буде заходити повітря під дією сили тяжіння, то прискорення вільного падіння буде лінійно залежити від відстані від центра Землі:

$$g_1 = \frac{4}{3}\pi\rho r.$$

У той час прискорення вільного падіння при збільшені висоти:

$$g_2 = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

З даних розрахунків видно, що прискорення вільного падіння на глибині 500 км на 8% відрізняється від $9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Зате густина повітря при опусканні його в свердловину буде збільшуватись зі збільшенням глибини по закону :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = \frac{p_0 \mu}{RT_0} e^{-\frac{\mu g h_0}{RT_0}},$$

де $\rho_0 = 1{,}29\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Густина повітря на поверхні землі визначається з рівняння стану ідеального газу

$$\rho = \frac{p_A \mu}{RT},$$

де p_A – тиск біля поверхні землі. R – газова стала, μ - молярна маса повітря. Отже, маса повітря у свердловині:

$$m = \int\limits_V \rho dV = \int\limits_{-h}^{0} \rho S dz = \int\limits_{-h}^{0} \rho_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} = \frac{p_A S}{g}\left(e^{\frac{\mu g h}{RT}} - 1\right) \approx 6 \cdot 10^{26}\,\text{кг}.$$

Але маса Землі разом з повітрям $\approx 6 \cdot 10^{24}$кг!

Отже наші розрахунки, якщо ми взяли ідеальний газ, дали абсурдний результат. Тому треба працювати з реальним газом і враховувати, що молекули повітря взаємодіють між собою. При збільшені густини молекул вони наближались одна до одної і збільшилось би гравітаційне притяжіння, але при сильному зближенні ці молекули почали б відштовхуватись одна від одної.

Щоб оцінити густину молекул при сильному тиску, треба скористатись моделлю щільної упаковки молекул. Згідно з цією моделлю густина стиснутого повітря повинна в стільки разів перевищувати густину води у скільки молярна маса повітря $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль перевищує молярну масу води $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тобто приблизно в 1,6 раза.

Скористаємось розподілом Больцмана $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h_1}{RT}}$, звідки $h_1 = \dfrac{RT_1}{\mu g}\ln\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right) \approx 60\text{км}$.

Виявляється, що повітря опускаючись на глибину 60 км, набуває густини $\rho_0 = 10^{-3}\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ та спускаючись нижче його густина не змінюється.

Тому маса повітря в свердловині : $m = \rho S h = 5 \cdot 10^6$ кг.

Для порівняння визначимо массу повітря навколо Землі:

$$m_1 = \frac{4\pi R^2 p_A}{g} = 5 \cdot 10^{18}\,\text{кг},$$

що значно більше ніж маса повітря в свердловіні.

2.3.7. Газ, який знаходиться в посудині об'ємом V_0 при тиску p_0, відкачують поршневим насосом, що має робочу камеру об'ємом V (рис. 1). Яку кількість ходів поршня потрібно зробити, шоб тиск газу в посудині знизився до значення p?

Розв'язок. Характерна неправильна відповідь: нехай шукана кількість ходів є n. Враховуючи, що об'єм газу збільшився на nV, а температура газу залишилася незмінною, відповідно до закону Бойля - Мариотта отримуємо

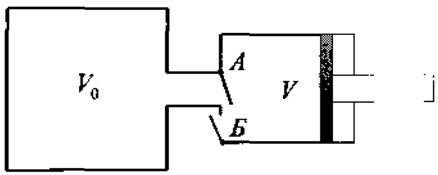


Рис. 1

$$p_0V_0 = p(V_0 + nV).$$

Звідси і знаходимо n.

У чому полягає помилка? Закон Бойля - Маріотта справедливий тільки тоді, коли не лише температура, але і маса газу залишаються незмінними. У даному ж випадку після кожного ходу поршня частина газу йде з системи; коли поршень рухається справа наліво, він закриває клапан A і відкриває клапан $Б$, через який газ і покидає систему (див. рис. 1). Тому потрібно розглядати кожний з ходів поршня окремо. Розпочнемо з першого ходу. Для маси газу, що знаходилася в посудині спочатку, запишемо закон Бойля - Маріотта :

$$p_0V_0 = p_1(V_0 + V),$$

де p_1 — тиск газу, коли поршень займає крайнє праве положення. Коли поршень повертається в початкове ліве положення, у посудині залишається маса газу, менша в порівнянні з початковою, але її тиск є p_1. Для цієї маси газу

$$p_1V_0 = p_2(V_0 + V),$$

де p_2 — тиск газу після закінчення робочого ходу поршня. Розглядаючи послідовно n ходів поршня, отримаємо систему n рівнянь:

$$\begin{cases} p_0V_0 = p_1(V_0 + V), \\ p_1V_0 = p_2(V_0 + V) \\ p_2V_0 = p_3(V + V) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{n-1}V_0 = p_n(V_0 + V). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$$p = p_0\left(V_0/(V_0 + V)\right)^n.$$

звідки

$$n = \log_{[V_0/(V_0+V)]}\left(\frac{p}{p_0}\right).$$

2.3.8. Гумова куля містить 2 л повітря, що знаходиться при температурі 20°C і атмосферному тиску 760 мм рт. ст. Який об'єм займе повітря, якщо куля буде опущена у воду на глибину 10 м? Температура води 4°C.

Розв'язок. Нехай до занурення у воду повітря в кулі мало об'єм V_1, температуру T_1, тиск p_1, а після занурення - відповідно V_2, T_2, p_2. Оскільки маса повітря не змінюється, то можна застосувати об'єднаний газовий закон:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \qquad (1)$$

Повний тиск на глибині дорівнює

$$p_2 = \rho g h + p_{атм},$$

де $\rho = 10^3$ кг/м^3 — густина води.

Під таким же тиском знаходитиметься і повітря в кулі, зануреній на цю глибину. До занурення тиск повітря був

$$p_1 = p_{атм}.$$

Підставивши значення p_1 і p_2 у формулу (1), отримаємо після очевидних перетворень

$$V_2 = \frac{p_{атм} V_1 T_2}{T_1 (\rho g h + p_{атм})}.$$

Підставивши числові значення, виражені в СІ, знайдемо

$$V_2 = \frac{760 \cdot 133 \cdot 2 \cdot 10^{-3} (4 + 273)}{(20 + 273)(10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 10 + 760 \cdot 133)} = 0{,}94 \cdot 10^{-3}\,м^3.$$

2.3.9. Посудина, що містить $m_1 = 2$ г гелію, розірвалася при температурі 400°С. Яка максимальна кількість азоту може зберігатися в такій посудині при 30°С і при п'ятикратному запасі міцності?

Розв'язок. Для гелію в момент розриву рівняння стану газу матиме вигляд:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} R T_1, \qquad (1)$$

де V — об'єм газу, T_1 = (400+273) К = 673 К — абсолютна температура в цей момент, $\mu_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярна маса гелію.

Для азоту в умовах зберігання рівняння стану запишеться так:

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} R T_2, \qquad (1)$$

де $T^2 = (30 + 273)$ К = 303 К, $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — відповідно температура і молярна маса азоту. Розділивши рівність (1) на (2), отримаємо

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1 \mu_2}{m_2 T_2 \mu_1},$$

звідки

$$m_2 = \frac{m_1 T_1 \mu_2}{\frac{p_1}{p_2} T_2 \mu_1}. \qquad (3)$$

Підставивши у формулу (3) числові значення з урахуванням $\frac{p_1}{p_2} = 5$, знайдемо

$$m_2 = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 673 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{303 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5} = 6 \cdot 10^{-3}\,кг.$$

2.3.10. Тиск насичсної водяної пари при температурі 36°C дорівнює $p_0 = 5{,}945$ кПа. Яка маса $V = 1$ м^3 вологого повітря при цій температурі, відносній вологості 80% і тиску $p = 101{,}3$ кПа?

Розв'язок. Маса вологого повітря складається з маси m_1 водяної пари і маси m_2 повітря :

$$m = m_1 + m_2. \tag{1}$$

Нехай p – тиск водяної пари, якби повітря було відсутнє (парціальний тиск пари), p_2 – тиск повітря, якби пари не було (парціальний тиск повітря). Тоді, за законом Дальтона, тиск вологого повітря

$$p = p_1 + p_2,$$

звідси

$$p_2 = p - p_1. \tag{2}$$

Запишемо рівняння стану для пари і для повітря:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \qquad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT,$$

де μ_1 і μ_2 — молярна маса водяної пари і повітря відповідно, $T = (36+273)$ К = 309 К — абсолютна температура. З цих рівнянь знаходимо:

$$m_1 = \frac{p_1 \mu_1 V}{RT}, \quad m_2 = \frac{p_2 \mu_2 V}{RT}. \tag{3}$$

Тиск водяної пари $p_1 = fp_0$, де $f = 0{,}8$ — відносна вологість. Тому, згідно (2)

$$p_2 = p - fp_0.$$

Підставивши значення тисків p_1 і p_2 у формули (3), отримаємо:

$$m_1 = f\frac{p_0 \mu_1 V}{RT}, \qquad m_2 = (p - fp_0)\frac{\mu_2 V}{RT}. \tag{4}$$

Підставивши значення (4) у формулу (1), знайдемо масу вологого повітря

$$m = \frac{V}{RTfp_0}\left[\mu_1 + \left(\frac{p}{fp_0} - 1\right)\mu_2\right]. \tag{5}$$

Підставимо у формулу (5) числові значення заданих величин з урахуванням $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) і вирахуємо

$$m = \frac{1}{8{,}31 \cdot 309 \cdot 0{,}8 \cdot 5945}\left[18 \cdot 10^{-3} + \left(\frac{101300}{0{,}8 \cdot 5945} - 1\right) \cdot 29 \cdot 10^{-3}\right] \approx 1{,}12 \text{ кг}.$$

2.3.11. У закритій посудині об'ємом $V = 2$ м^3 знаходиться $m_1 = 0{,}9$ кг води і $m_2 = 1{,}6$ кг кисню. Знайти тиск у посудині при температурі 500°C, знаючи, що при цій температурі вся вода перетворюється на пару.

Розв'язок. Після випарування води в посудині знаходиться суміш двох газів - водяної пари і кисню. Тиск, суміші

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

де p_1 — тиск водяної пари, p_2 — тиск кисню. З рівняння Менделєєва - Клапейрона маємо

$$p_1=\frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT}{V}, \qquad p_2=\frac{m_2}{\mu_2}\frac{RT}{V}, \tag{2}$$

На підставі формул (1) і (2) отримаємо

$$p=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}, \tag{3}$$

де $\mu_1=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2=32\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярні маси водяної пари і кисню відповідно. Підставимо у (3) числові значення:

$$p=\left(\frac{0{,}9}{18\cdot10^{-3}}+\frac{1{,}6}{32\cdot10^{-3}}\right)\frac{8{,}31(500+273)}{2}\approx3{,}2\cdot10^5\text{ Па}.$$

На підставі формули (3) можна отримати вираз для молярної маси газової суміші. Перепишемо формулу (3) в такому вигляді:

$$p=\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}. \tag{4}$$

Позначимо тепер через $\mu_{см}$ молярну масу суміші й запишемо рівняння Менделєєва - Клапейрона для суміші:

$$pV=\frac{m_1+m_2}{\mu_{см}}RT. \tag{5}$$

Порівнюючи вирази (4) і (5), знайдемо формулу для молярної маси суміші двох газів:

$$\mu_{см}=\frac{m_1+m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1}+\dfrac{m_2}{\mu_2}}$$

Неважко показати, що в разі суміші n різних газів ця формула має вигляд:

$$\mu_{см}=\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{\dfrac{m_1}{\mu_1}+\dfrac{m_2}{\mu_2}+\ldots+\dfrac{m_n}{\mu_n}},$$

де m_1, m_2, ..., m_n, - маси окремих газів, що складають суміш; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n,$ - молярні маси цих газів.

2.3.12. У відкритий балон налили m = 100г рідкого азоту N_2 і швидко закрили. Коли температура балону t_0 дорівнювала температурі навколишнього повітря, тиск у балоні вдвічі перевищив атмосферний тиск p_0. Визначити об'єм балону, якщо при зміні температури на 20^0С нижче від t_0 навколишнього повітря тиск у балоні становить $\frac{28}{15}p_0$.

Розв'язок. Парціальний тиск азоту після випаровування дорівнює p_0. Із закону Шарля для суміші повітря й азоту визначимо температуру навколишнього повітря

$$\frac{2p_0}{T_0}=\frac{{}^{28}\!/_{15}\,p_0}{T_0-\Delta T},$$

звідси

$$T_0=15\Delta T=300\,K.$$

Запишемо рівняння Клапейрона для кінцевого стану азоту:

$$p_0V=\frac{m}{M}RT_0,$$

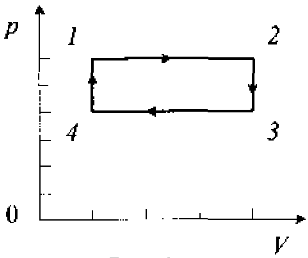


Рис. 1

Звідки

$$V=15\frac{m}{M}\frac{R\Delta T}{p_0}\approx 0{,}89\,м^3.$$

2.3.13. У яких станах температура газу при циклічному процесі (рис. 1) максимальна? Мінімальна? У скільки разів відрізняється максимальна температура від мінімальної?

Розв'язок. Запишемо рівняння стану ідеального газу для всіх 4 точок циклу даної маси газу:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=R;\quad T_1=\frac{6p_0V_0}{R},$$

$$\frac{p_2V_2}{T_2}=R;\quad T_2=\frac{6p_0\cdot 4V_0}{R}=\frac{24p_0V_0}{R},$$

$$\frac{p_3V_3}{T_3}=R;\quad T_3=\frac{4p_0\cdot 4V_0}{R}=\frac{16p_0V_0}{R},$$

$$\frac{p_4V_4}{T_4}=R;\quad T_4=\frac{4p_0\cdot V_0}{R}=\frac{4p_0V_0}{R}.$$

Отже, найбільша температура в точці *2*, найменша в точці *4*. Максимальна температура від мінімальної відрізняється в 6 разів.

2.3.14. Тиск газу змінюється за законом $p=bT^2$. Стискається чи розширюється газ при збільшені температури?

Розв'язок. Підставимо співвідношення $p=bT^2$ в рівняння Менделєєва - Клапейрона

$$pV=\frac{m}{\mu}RT=bT^2V.$$

Звідки

$$V=\frac{mR}{\mu b}\frac{1}{T}.$$

У цьому виразі b, R, m, M - сталі величини й об'єм обернено пропорційний температурі. Тому зі збільшенням температури об'єм зменшується. Газ стискається.

2.3.15. Як змінювалась температура ідеального газу під час процесу, графік якого зображено на рис. 1. Вказати точки, у яких досягалась найбільша та найменша температури.

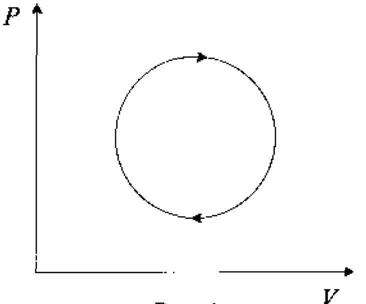


Рис. 1

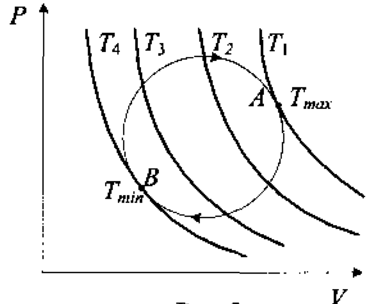


Рис. 2

Розв'язок. Як видно з рис. 1 параметри p, V, T змінювались. Але, якщо з цим газом здійснити ізотермічний процес при різних температурах, то на малюнку б з'явилися ряд ізотерм. Намалюємо ці ізотерми (рис. 2). Оскільки $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, то в точці A максимальна температура, а в точці B – мінімальна.

2.3.16. У системі координат PV (рис. 1) замкнений цикл (коло), перевести в систему координат P, T та V, T. Використовуючи рівняння стану ідеального газу для: $T = 0{,}25T_0$, $0{,}5T_0$, T_0, $2T_0$, $3T_0$, $4T_0$, $5T_0$ (T_0 =273 К) побудувати ізотерми на графіку PV для водня масою 10г.

Розвязок. З рівняння стану ідеального газу $pV = \frac{m}{\mu}RT$ знайдемо залежність тиску від об'єму газу для $T = T_0$:

$$p = \frac{mRT_0}{\mu V}.$$

Задаючи об'єм 0,5м^3, 1м^3, 1,5 м^3, 2м^3 одержимо значення P для $T = 0{,}25T_0$, $0{,}5T_0$, T_0, $2T_0$, $3T_0$, $4T_0$, $5T_0$ та занесемо їх у табл. 1.

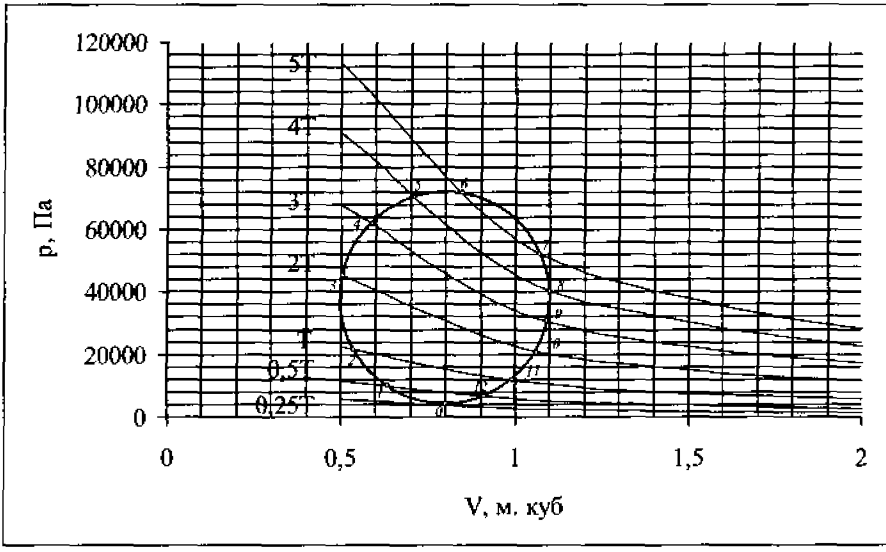


Рис. 1

Таблиця 1

V, м^3	P, Па						
	$0{,}25T_0$	$0{,}5T_0$	T_0	$2T_0$	$3T_0$	$4T_0$	$5T_0$
0,5	5672	11343	22686	45373	68059	90745	113432
1,0	2836	5672	11343	22686	34029	45373	56716
1,5	1890	3781	7562	15124	22686	30248	37810
2	1418	2836	5672	11343	17015	22686	28358

За цими даними побудуємо ізотерми, які перетинають коло в точках *0-12*.

Запишемо координати *VT* цих точок у табл. 2 та побудуємо за цими даними графік (рис. 2).

Таблиця 2

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T/T_0	0,25	0,5	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1	0,5
V, м^3	0,8	0,63	0,54	0,51	0,58	0,71	0,85	1,07	1,1	1,09	1,06	1	0,92

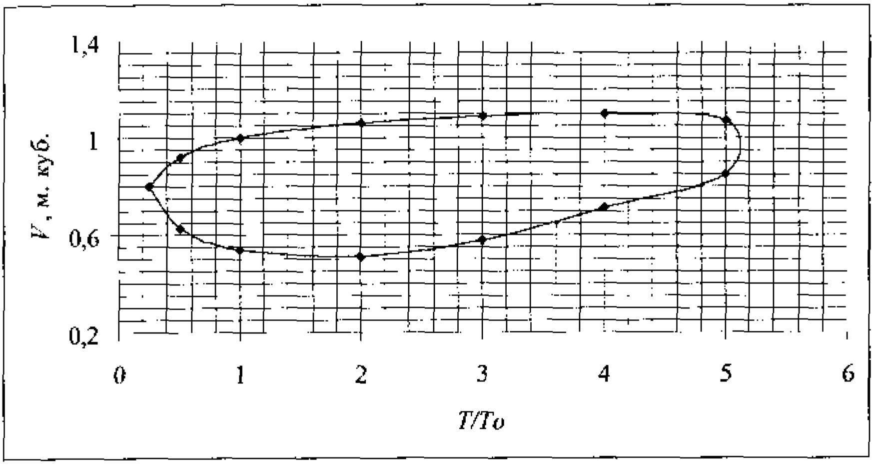


Рис. 2

Запишемо координати PT цих точок у табл. 3 та побудуємо за цими даними графік (рис. 3).

Таблиця 3

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T/T_0	0,25	0,5	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1	0,5
p, кПа	4	10	21	45	62	71	72	52	40	31	21	12	6

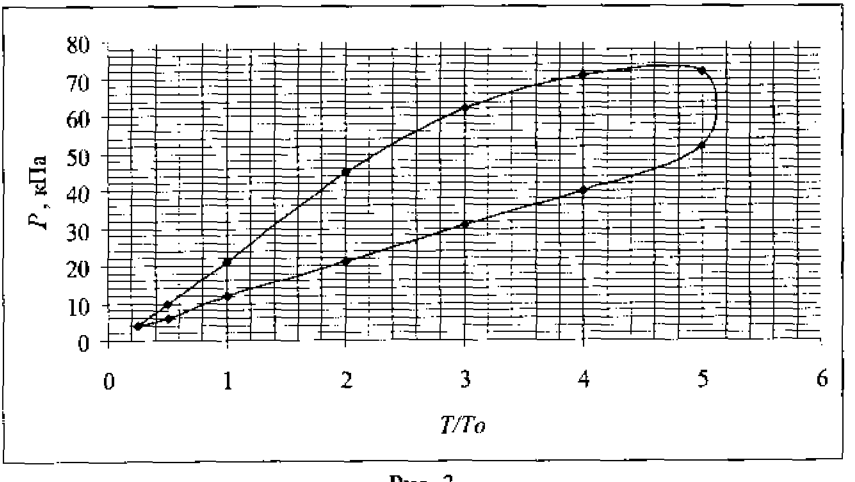


Рис. 3

2.3.17. 20 г гелію в циліндрі під поршнем дуже повільно переводиться з стану $V_1 = 32$ л та тиску $P_1 = 4{,}1 \cdot 10^5$ Па у стан $V_2 = 9$ л та $P_2 = 15{,}5 \cdot 10^5$ Па. Якої найбільшої температури досягає газ у цьому процесі, якщо на графіку залежності $P(V)$ процес зображено прямою лінією (рис. 1).

Розв'язок. Рівняння прямої $P(V)$:

$$p = -kV + b, \tag{1}$$

або

$$\frac{p - p_1}{V_1 - V} = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \tag{2}$$

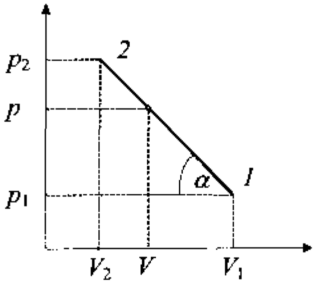


Рис. 1

Після перетворень рівняння (2) набуває вигляду рівняння (1):

$$p = -\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \cdot V + \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}. \tag{3}$$

Тобто

$$k = tg\,\alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = \frac{(15{,}5 - 4{,}1)\cdot 10^5}{(32 - 9)\cdot 10^{-3}} = 4{,}96 \cdot 10^7\,\frac{\text{Па}}{\text{м}^3},$$

$$b = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2} = \frac{15{,}5\cdot 10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3} - 4{,}1 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3} - 9 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^6\,\text{Па}.$$

З рівняння стану ідеального газу $pV = \frac{m}{\mu}RT$ матимемо:

$$T = \frac{\mu p V}{mR} = \frac{\mu V}{mR}(-kV + b) = \left(-\frac{k\mu}{mR}\right)V^2 + \frac{\mu b}{mR}V. \tag{4}$$

Це квадратична функція типу $y = Ax^2 + Bx + C$, точка максимуму якої $x_{max} = -\frac{B}{2A}$, тобто $V_{max} = \frac{b}{2k}$. Підставивши це значення в рівняння (4), отримуємо

$$T_{max} = \frac{b^2 \mu}{4mRk} = \frac{4 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3} 8{,}31 \cdot 4{,}96 \cdot 10^7} = 485\,\text{К}.$$

2.3.18. Знайти атмосферний тиск на висоті H = 100 м, якщо тиск повітря біля поверхні Землі 760 мм.рт.ст., температура повітря 27^{0}С, молярна маса повітря μ = 29 г/моль.

Розв'язок. Виділимо подумки стовп повітря висотою H та площею поперечного перерізу S. На висоті тиск буде дорівнювати:

$$p_H = p_0 - \rho g H,$$

де p_0 - тиск біля поверхні Землі, ρ – густина повітря (беремо її однаковою при невеликих висотах).

Густину повітря знайдемо з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$\rho = \frac{p_0 \mu}{RT}.$$

Отже,

$$p_H = p_0 - \frac{p_0\mu}{RT}gH = p_0\left(1 - \frac{\mu}{RT}gH\right).$$

Ця формула справедлива, якщо

$$H \ll \frac{RT}{\mu g} = 8600\text{м},$$

або

$$\frac{\mu}{RT}gH \ll 1.$$

Отже формула

$$p_{\text{H}} = p_0 - \rho g H$$

може бути використана до висоти H = 1000 м, що експериментально перевірено.

2.3.19. Нагрівається чи охолоджується ідеальний газ, якщо він розширюється за законом $p = \frac{b}{V^n}$, де b і n – сталі?

Розв'язок. Знайдемо температуру з закону Менделєєва-Клапейрона:

$$T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{bV}{\nu R V^n} = \frac{bV^{(1-n)}}{\nu R}.$$

З цієї формули видно, що при $n < 1$ газ нагрівається, а при $n > 1$ охолоджується. Коли $n = 1$ температура газу не змінюється.

2.3.20. При розширенні ідеального газу його тиск змінюється в тепловому процесі лінійно зі зміною об'єму за законом $h = \alpha V$, де α – стала. У скільки разів змінюється температура при збільшенні об'єму з 30 л до 60 л.

Розв'язок. З рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \nu RT = \alpha V^2.$$

Тобто температура

$$T = \frac{\alpha V^2}{\nu R}.$$

Відношення $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{60}{30}\right)^2 = 4$.

2.3.21. У герметичній посудині знаходиться 1 моль неону та 2 моля водню. При температурі T_1 = 300 К, коли весь водень молекулярний, тиск у посудині $p_1 = 10^5$ Па. При температурі T_2 = 3000 К тиск виріс до $p_2 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Па. Яка частина молекул водню дисоціювала?

Розв'язок. За законом Дальтона загальний тиск дорівнює сумі парціальних тисків неону та молекул водню при T_1:

$$p = p_{Ne} + p_{H_2},$$

або

$$n_1kT_1 = n_{Ne}kT_1 + n_{H_2}kT_1 .$$

Звідки

$$n_1 = n_{Ne} + n_{H_2} = \frac{N_A}{V} + \frac{2N_A}{V} = \frac{3N_A}{V} .$$

Молекули неону одноатомні, а молекули водню при температурі T_2 дисоціюють, тому концентрація

$$n_2 = \frac{N_A}{V} + \frac{xN_A}{V} .$$

Отже, тиск

$$p_1 = \frac{3N_A}{V} \cdot kT_1 , \quad p_2 = \left(\frac{N_A}{V} + \frac{xN_A}{V} \right) \cdot kT_2 ,$$

а відношення тисків

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1+x)T_2}{3T_1} .$$

Звідки

$$x = \frac{3T_1 p_2}{T_2 p_1} - 1 = \frac{3 \cdot 300 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6}{3000 \cdot 10^5} - 1 = 3{,}5 \text{ моль}.$$

Отже, 0,5 молей не розпалась, а розпалась 1,5 моля водню, що в сумі дає $0{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 = 3{,}5$ моль. Тобто частина молекул водню, яка дисоціювала, складає $(1{,}5 /2) \cdot 100\% = 75\%$.

2.3.22. Сухе повітря складається з азоту (78% об'єму), кисню (20,95% об'єму), аргону (0,93% об'єму) та вуглекислого газу (0,03% об'єму). Нехтуючи домішками інших газів (He, Ne, Kr, Ke), визначити (в %) склад повітря по масі.

Розв'язок. Об'ємний вміст суміші газів α_i означає, що вся суміш розділена на окремі об'єми різних сортів газів з однаковим тиском, який дорівнює сумі парціональних тисків різних газів. Для порції i-го газу рівняння Менделєєва-Клапейрона буде

$$p \cdot \alpha_1 V = \frac{m_i}{\mu_i} RT .$$

Рівняння Менделєєва-Клапейрона для одного моля газу

$$pV = RT,$$

отже $\alpha_i = \dfrac{m_i}{\mu_i}$, де m_i - маса одного з газів суміші, μ_i - його молярна масса.

Повна маса суміші газів

$$m = \alpha_{N_2}\mu_{N_2} + \alpha_{O_2}\mu_{O_2} + \alpha_{Ar}\mu_{Ar} + \alpha_{CO_2}\mu_{CO_2} .$$

Тому склад повітря по масі

$$\frac{m_i}{m} = \frac{\alpha_i \mu_i}{\alpha_{N_2}\mu_{N_2} + \alpha_{O_2}\mu_{O_2} + \alpha_{Ar}\mu_{Ar} + \alpha_{CO_2}\mu_{CO_2}} .$$

Отже,

$$\frac{m_{N_2}}{m}=\frac{0{,}78\cdot 28\cdot 10^{-3}}{(0{,}78\cdot 28+0{,}2095\cdot 32+0{,}0093\cdot 40+0{,}0003\cdot 44)\cdot 10^{-3}}\times 100\%=75{,}5\%,$$

$$\frac{m_{O_2}}{m}=\frac{0{,}2095\cdot 32\cdot 10^{-3}}{(0{,}78\cdot 28+0{,}2095\cdot 32+0{,}0093\cdot 40+0{,}0003\cdot 44)\cdot 10^{-3}}\times 100\%=23{,}2\%,$$

$$\frac{m_{Ar}}{m}=\frac{0{,}0093\cdot 40\cdot 10^{-3}}{(0{,}78\cdot 28+0{,}2095\cdot 32+0{,}0093\cdot 40+0{,}0003\cdot 44)\cdot 10^{-3}}\times 100\%=1{,}29\%,$$

$$\frac{m_{CO_2}}{m}=\frac{0{,}0003\cdot 44\cdot 10^{-3}}{(0{,}78\cdot 28+0{,}2095\cdot 32+0{,}0093\cdot 40+0{,}0003\cdot 44)\cdot 10^{-3}}\times 100\%=0{,}046\%.$$

2.3.23. З космічного корабля спускається апарат по вертикалі з постійною швидкістю та передає на борт корабля дані про зовнішній тиск. Графік залежності тиску (в умовних одиницях) від часу на рис. 1. Опустившись на поверхню планети апарат виміряв та передав на борт дані про температуру $T = 700$К та про прискорення вільного падіння $g = 10$м/с.

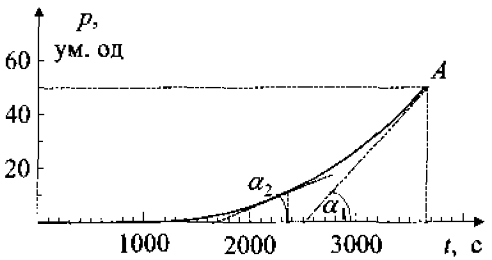


Рис. 1

Визначити: 1) швидкість спуску апарату, якщо відомо, що атмосфера планети складається з вуглекислого газу CO_2; 2) температуру T_h на висоті $h = 15$ км над поверхнею планети.

Розв'язок. Щоб визначити швидкість спускання апарату запишимо як залежить зміна тиску Δp від зміни висоти Δh:

$$\Delta p = -\rho g\Delta h, \tag{1}$$

де ρ – густина газу.

Якщо вважати, що густина газу та прискорення вільного падіння є величини сталі, то зміна висоти спричиняє зміну тиску (чим більша висота, тим менше тиск, ось чому в формулі (1) стоїть знак мінус).

З рівняння Менделєєва- Клапейрона випливає, що тиск

$$p = \rho\frac{RT}{\mu}. \tag{2}$$

У цій формулі T - температура газу в точці, біля якої відбувається зміна тиску.

Враховуючи, що $\Delta h = -\upsilon\Delta t$, де υ – швидкість спускання апарату, Δt – час спускання, можна розділити рівняння (1) на (2) та отримати:

$$\frac{\Delta p}{p} = g\frac{\mu\upsilon\Delta t}{RT}. \tag{3}$$

З рівняння (3) знайдемо швидкість

$$\upsilon = \frac{RT}{g\mu}\frac{\Delta p}{p\Delta t}. \qquad (4)$$

Відношення $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ – це тангенс кута нахилу α_1 дотичної у кінцевої точці A графіка. Визначивши з графіка значення $\frac{\Delta p}{\Delta t}\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{1150\,\text{c}}$ та підставляючи в (4) $\mu = 44\cdot 10^{-3}$ кг / моль для CO_2 визначимо

$$\upsilon = \frac{8{,}3\cdot 700}{10\cdot 44\cdot 10^{-3}\cdot 1150} \approx 11{,}5 \text{ м / с}.$$

Розвяжемо другу частину завдання. З формули (3)

$$T_h = g\frac{\mu\upsilon}{R}\left(\frac{p\Delta t}{\Delta p}\right). \qquad (5)$$

Враховуючи, що швидкість апарата 11,5 м/с, на висоті 15000 метрів над поверхнею планети він був за 1300 с до посадки, тобто через t = 2350 с після початку спускання. У цій точці графіка знайдемо значення $\frac{\Delta p}{\Delta t}\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{700\,\text{c}}$, підставимо в (5) та отримаємо:

$$T_h \approx 430\,\text{K}.$$

2.3.24. Планету масою M та радіусом r оточує атмосфера з газу молярною масою μ. Визначити температуру T атмосфери на поверхні планети, якщо товщина атмосфери h ($h \ll r$). Густина газу ρ однакова по всій висоті.

Розв'язок. При визначенні атмосферного тиску скористаємось формулою

$$p = \rho g h, \qquad (1)$$

при цьому будемо вважати, що g не буде залежати від висоти ($h \ll r$).

Сила притягання на планеті $F = mg$, а з іншого боку за законом всесвітнього тяжіння:

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

тобто

$$g = G\frac{M}{r^2}. \qquad (2)$$

З закону Менделєєва - Клапейрона визначимо густину атмосфери:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Підставимо її значення та вираз (2) у рівняння (1) та визначимо температуру:

$$T = \frac{\mu g h}{R} = \frac{\mu G M h}{R r^2}.$$

2.3.25. Як змінюється температура деякої маси ідеального газу, який розширюється за законом $\frac{P}{V} = \text{const}$?

Розв'язок. З умови задачі $\frac{P}{V} = \text{const}$ видно, що для того, щоб ця умова існувала, збільшення об'єму в n разів повинно приводити до того, що і тиск повинен збільшуватись теж у n разів. Тобто

$$p_1V_1 = \nu RT_1,$$
$$p_2V_2 = (np_1)(nV_1)_1 = \nu RT_2.$$

Поділивши друге рівняння на перше отримуємо

$$n^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отже, щоб рівняння стану ідеального газу було справедливим, необхідно щоб температура збільшувалась квадратично: $T_2 = n^2 \cdot T_1$.

2.3.26. У циліндричній димовій трубі піднімаються пічні поточні гази. У нижній частині труби вони мають температуру 1073 К та швидкість $\upsilon_1 = 6\frac{\text{м}}{\text{с}}$. З якою швидкістю υ_2 вони рухаються в верхній частині труби, де температура 423 К? Зміну тиску в трубі не враховувати.

Розв'язок. Дим уважатимемо ідеальним газом, у якому відбувається ізобаричний процес. Отже:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \tag{1}$$

де V_2 та V_1 – об'єм газу в нижній та верхній частині труби.

За одиницю часу об'єм газу , що утворюється в нижній частині труби,

$$V_1 = \upsilon_1 \cdot S, \tag{2}$$

У верхній частині труби температура знижується, тому об'єм газу зменшиться до

$$V_2 = \upsilon_2 \cdot S, \tag{3}$$

Отже, з (1), (2) та (3) випливає

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Звідки швидкість газу у верхній частині труби

$$\upsilon_2 = \frac{T_2}{T_1}\upsilon_1 = \frac{423 \cdot 6}{1073} = 2{,}365\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2.3.27. У першій посудині об'ємом $2 \cdot 10^{-3}$ м^3 знаходиться газ під тиском $1{,}7 \cdot 10^5$ Па, а в другій посудині об'ємом $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^3 – газ під тиском $0{,}55 \cdot 10^5$ Па при такій же температурі. Посудини з'єднані між собою тонкою трубкою з краном. Який тиск установиться в посудинах після того як відкриють кран? Температура не змінюється.

Розв'язок. Рівняння стану ідеального газу в кожному об'ємі до поєднання:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT, \tag{1}$$

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu}RT. \tag{2}$$

Рівняння стану ідеального газу в об'ємі посудини після поєднання:

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mu}RT. \tag{3}$$

З (1) та (2) одержимо

$$m_1 = m_2\frac{p_1V_1}{p_2V_2}. \tag{4}$$

Підставимо (4) в (3), та взявши відношення (2) до (3), одержемо:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 10^5\,\text{Па}.$$

2.3.28. Посудина Дюара містить рідкий гелій - 4. Неякісна ізоляція призводить до того, що в нього починає ззовні "натікати" тепло – його потужність $N = 30$ мкВт. Для підтримки температури гелію постійно відкачують пари гелію насосом за допомогою трубки, що приєднана до посудини. Трубка має довжину $l = 1$ м. Температура парів на виході з трубки кімнатна. Скільки літрів пару в хвилину повинен відкачувати насос, щоб підтримувати в посудині температуру $T_1 = 1$К? У скільки разів треба підвищити потужність насоса, щоб підтримувати температуру 0,5К? Тиск насичених парів гелію при 1К $p_1 = 16$ Па, при $T_2 = 0{,}5$К $p_2 = 2{,}2\cdot10^{-3}$ Па. Теплота випаровування гелію $r = 92$ Дж/ моль, діаметр молекули $d = 2\cdot10^{10}$ м, молярна маса $\mu = 4\cdot10^{-3}$кг/моль.

Розв'язок. Використовуючи залежність тиску p від концентрації n,

$$p = nkT$$

оцінимо довжину вільного пробігу молекул гелію для насичених парів при температурах T_1 та T_2:

$$l = \frac{1}{\pi d^2 n} = \frac{kT}{\pi d^2 p}; \quad l_1 = 7\cdot10^{-6}\,\text{м}, \quad l_2 = 3\cdot10^{-2}\,\text{м}.$$

При температурі T_1 газ не є дуже розрідженим, тому тиск по всій трубці можна вважати однаковим. При кімнатній температурі $T_к$ = 300К за одну хвилину газ, який випаровується, займе об'єм

$$V_1 = \frac{\nu RT_к}{p_1} = \frac{60N}{r}\frac{RT_к}{p} = \frac{30\cdot10^{-6}\cdot8{,}31\cdot300}{92\cdot16} \approx 3\cdot10^{-3}\,\frac{\text{м}^3}{\text{хв}}.$$

Цей об'єм і повинен відкачувати насос, щоб підтримувати температуру в посудині постійною.

При температурі $T_2 = 0{,}5$К та тискові $p_2 = 2{,}2\cdot 10^{-3}$ Па об'єм треба б було збільшити в 4000 разів:

$$p_1V_1 = RT_1; \qquad p_2V_2 = RT_2;$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{p_1}{p_2} = \frac{0{,}5\cdot 16}{1\cdot 2{,}2\cdot 10^{-3}} \approx 4000.$$

При довжині вільного пробігу $l_2 = 3$ см газ можна вважати розрідженим і тому тиск у місці відкачки буде іншим. Його можна оцінити з умови рівності потоку молекул:

$$n_2\upsilon_2 = n_\kappa\upsilon_\kappa,$$

або

$$\frac{n_2}{n_\kappa} = \frac{\upsilon_\kappa}{\upsilon_2} = \sqrt{\frac{T_\kappa}{T_2}}.$$

Звідки

$$\frac{p_2}{p_\kappa} = \frac{n_2T_2}{n_\kappa T_\kappa} = \sqrt{\frac{T_2}{T_\kappa}}.$$

Тобто тиск газу, який відкачується,

$$p_\kappa = p_2\sqrt{\frac{T_\kappa}{T_2}} = 25p_2,$$

тобто об'єм газу, що відкачується, треба ще збільшити, а це неможливо.

2.3.29. У прямокутній банці з дном у вигляді квадрата зі стороною a знаходиться газ при температурі T_0 і тискові p_0. Кришка, яка шарнірно з'єднана з боковою стороною банки, герметично притискається до неї під дією власної ваги mg. До якої температури слід нагріти газ у банці, щоб він починав виходити, при відкривши кришку. Атмосферний тиск дорівнює p_0.

Розв'язок. На кришку банки з різних боків діють такі сили: сила тяжіння кришки mg, сила тиску газу pa^2, що знаходиться в банці, та сила атмосферного тиску p_0a^2. Кришка має вісь обертання, а тіло, що має вісь обертання, знаходиться в рівновазі, якщо сума моментів сил, що діють на тіло, дорівнює нулеві (вісь обертання проходить через шарнірне з'єднання кришки з боковою стороною банки. Плече сил дорівнює $a/2$):

$$\left(p_0a^2 + mg\right)\cdot\frac{a}{2} = pa^2\cdot\frac{a}{2}. \tag{1}$$

Звідки

$$p = p_0 + \frac{mg}{a^2}. \tag{2}$$

Для ізохоричного процесу

$$\frac{p_0}{p} = \frac{T_0}{T}. \tag{3}$$

Звідки, з урахуванням рівняння (2),

$$T = \frac{pT}{p_0} = T_0\left(1 + \frac{mg}{p_0 a^2}\right).$$

2.3.30. Під час вибуху атомної бомби (M = 1 кг плутонію ^{242}Pu) утворюється одна радіоактивна частинка на кожен атом плутонію. Припускаючи, що вітри рівномірно переміщують ці частинки по всій атмосфері, оцінити, яка кількість радіоактивних частинок потрапляє в кожен літр повітря поблизу поверхні Землі. Які додаткові дані вам потрібні для розв'язання цієї задачі?

Розв'язок. Під час вибуху утворюється кількість радіоактивних частинок

$$N = \frac{M}{\mu} N_A \approx 2{,}5 \cdot 10^{24},$$

де $\mu = 242 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярна маса плутонію.

Маса всієї атмосфери дорівнює

$$M_a = 4\pi R^2 m \approx 4{,}5 \cdot 10^{18} \text{ кг},$$

де m = 10 кг/м — маса вертикального стовпа повітря перерізом 1 м^2. Кількість молекул в атмосфері

$$N_1 = \frac{M_a}{\mu_n} N_A \approx 0{,}93 \cdot 10^{44},$$

де μ_n — молярна маса повітря. Концентрація радіоактивних частинок

$$n_p = \frac{N}{N_1} n \approx 7 \cdot 10^2,$$

де за нормальних умов

$$n = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22{,}4} \approx 2{,}7 \cdot 10^{22} \frac{\text{молекул}}{\text{л}}.$$

Отже, у кожному літрі повітря буде близько 700 радіоактивних частинок.

2.3.31. На pV- діаграмі (рис. 1) зображений замкнутий процес, проведений з одним молем газу. Ділянки *1-2* і *3-4* графіки - прямі, що проходять через початок координат, а ділянки *2-3* і *4-1* - ізотерми. Намалювати графік цього процесу на TV- діаграмі. Знайти об'єм V_3, якщо відомі об'єми V_1, і $V_2 = V_4 = V$.

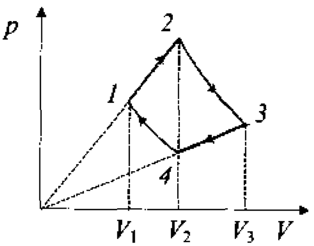


Рис. 1

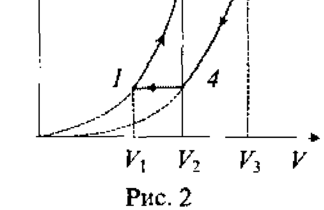


Рис. 2

Розв'язок. Для того щоб побудувати графік цього процесу на діаграмі залежності абсолютної температури від об'єму, знайдемо передусім залежність між T і V для процесів *1-2* і *3-4*. На pV- діаграмі графіки цих процесів - прямі, що проходять через початок координат, тому можна записати:

для процесу *1-2*: $p = \alpha V$, де $\alpha = \text{const}$;
для процесу *3-*: $p = \beta V$, де $\beta = \text{const}$ ($\beta < \alpha$).

Зіставляючи ці рівняння процесів з рівнянням стану ідеального газу

$$pV = \nu RT \ (\nu = 1 \text{ моль}),$$

отримаємо, що в процесі *1-2*

$$T = \frac{\alpha}{\nu R}V^2,$$

а в процесі *3-4*

$$T = \frac{\beta}{\nu R}V^2.$$

Таким чином, обидва процеси на *TV*- діаграмі зображаються параболами (рис. 2), причому парабола для процесу *1-2* йде крутіше, оскільки $\alpha > \beta$. Стани *2* і *4* характеризуються однаковими об'ємами $V_2 = V_4 = V$ (по умові), отже, на *TV*-діаграмі вони лежать на одній вертикальній прямій $V = \text{const}$, що перетинає обидві параболи. Ізотерми *2-3* і *4-1* на TV- діаграмі зображаються горизонтальними відрізками, що починаються в точках *2* і *4* і що йдуть до перетину з сусідньою параболою в точках *3* і *1*.

Тепер знайдемо об'єм V_3. Оскільки ділянки *2-3* і *4-1* — ізотерми,

$$T_2 = T_3 \text{ і } T_1 = T_4.$$

Перепишемо цю рівність, скориставшись вже відомими нам виразами температур через відповідні об'єми:

$$\frac{\alpha}{\nu R}V^2 = \frac{\beta}{\nu R}V_3^2$$

і

$$\frac{\alpha}{\nu R}V_1^2 = \frac{\beta}{\nu R}V^2.$$

Поділивши першу рівність на другу, знайдемо

$$V_3 = \frac{V^2}{V_1}.$$

2.3.32. Планету радіусу r і маси m оточує атмосфера однакової густини, що складається з газу з молекулярною масою μ. Яка температура атмосфери на поверхні планети, якщо висота атмосфери дорівнює h?

Розв'язок Запишемо рівняння газового стану для об'єму газу V з масою m (рівняння Менделєєва - Клапейрона): $pV = \frac{m}{\mu}RT$; p — тиск, V — об'єм газу, R — газова стала, T — температура. Оскільки $\frac{m}{V} = \rho$, де ρ — густина газу, то це рівняння ми можемо переписати у вигляді $p = \frac{\rho}{\mu}RT$. Звідси $T = \frac{p\mu}{\rho R}$.

Ясно, що для того щоб знайти температуру на поверхні планети, нам потрібно знайти тиск на її поверхні. Якщо ρ = const, то $p = \rho g h$, де g — прискорення вільного падіння на даній планеті. Знайдемо його.

Для тіла маси m, що знаходиться на поверхні планети, сила тяжіння дорівнює mg. З іншого боку, згідно закону всесвітнього тяжіння, вона дорівнює $\gamma\frac{mM}{r^2}$. Тому можна записати, що $mg = \gamma\frac{mM}{r^2}$. Звідси $g = \gamma\frac{M}{r^2}$ й $p = \rho\gamma\frac{M}{r^2}h$. Підставивши цей вираз для p у рівняння для температури, отримаємо

$$T = \frac{\gamma M\mu h}{r^2 R}.$$

2.3.33. У відкачаній посудині ємністю V = 1 л знаходиться 1 г гідриду урану UH_3. При нагріванні до температури $t_1 = 400^0\text{C}$ гідрид повністю розкладається на уран (атомна вага A = 238) і водень. Знайти тиск водню в посудині при цій температурі.

Розв'язок. Реакція розкладання гідриду урану відбувається за рівнянням

$$2UH_3 = 2U + 3H_2.$$

Тобто з 482 г (з двох молей) гідриду урану виходить 476 г (два моля) урану і 6 г (три моля) водню. Відповідно, з 1 г гідриду урану виходить $m = 6/482\text{г}$ водню. Вважаючи водень ідеальним газом, знайдемо його тиск при даних умовах $\left(t = 673\text{K}, V = 10^3\text{м}^3\right)$.

З рівняння стану ідеального газу

$$p = \frac{mRT}{\mu V} \approx 35\cdot 10^3\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

2.3.34. У циліндрі об'ємом 10 л, закритому поршнем і розміщеному в термостаті з температурою 40^{0}С, знаходиться по 0,05 молей двох речовин. Визначити масу рідини в циліндрі після ізотермічного стискання, внаслідок якого об'єм під поршнем зменшується в 3 рази. Тиск насичених парів першої рідини при температурі 40^{0}С дорівнює $0{,}7\cdot10^4$ Па, другої – $1{,}7\cdot10^4$Па. Накреслити ізотерму стискання. Молярна маса першої рідини – $1{,}8\cdot10^{-2}$ кг / моль, другої рідини – $4{,}6\cdot10^{-2}$ кг / моль.

Розв'язок. Якщо спочатку обидві речовини у посудині знаходяться в газоподібному стані, то тиск в посудині дорівнює сумі парціальних тисків газів:

$$p = p_1 + p_2,\text{ де } p_1 = \nu_1 RT/V,\ p_2 = \nu_2 RT/V.$$

($\nu_1 = \nu_2$ = 0,05 моля, V_0 = 10л, T = 313К). Підставимо числові дані, знайдемо

$$p_1 = p_2 \approx 1{,}3\cdot10^4\,\text{Па}.$$

Ми бачимо, що p_1 більше, ніж тиск $p_{н.1}$ насичених парів першої рідини ($p_{н.1} = 0{,}7\cdot10^4$ Па). Отже, спочатку частина першого газу буде сконденсована, і парціальний тиск цього газу дорівнює $p_{н.1}$. Оскільки $p_2 < p_{н.2} = 1{,}7\cdot10^4$ Па, друга речовина знаходиться в газоподібному стані і її парціальний тиск дорівнює p_2. Таким чином, спочатку тиск у посудині дорівнює

$$p_0 = p_{н.1} + p_2 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

При подальшому стисканні газів тиск першого газу буде залишатися незмінним і рівним $p_{н.1}$. Тиск другого газу при ізотермічному стисканні буде збільшуватися до тих пір, поки не стане рівним $p_{н.2}$. Подивимося, при якому об'ємі V' тиск другого газу стане рівним $p_{н.2}$:

$$p_{н.2}V' = \nu_2 RT.$$

Звідки

$$V' = \frac{\nu_2 RT}{p_{н.2}} \approx 7{,}6 \text{ л}.$$

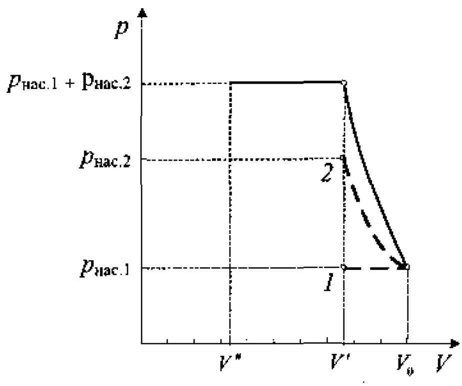


Рис. 1

Отже, тиск у посудині ізотермічно збільшується при зменшенні об'єму до 7,6 л. Подальше зменшення об'єму до $V'' = 3\frac{1}{3}$ л відбувається при постійному тиску

$$p' = p_{н.1} + p_{н.2} = 2{,}4 \cdot 10^4 \text{Па}.$$

Графік залежності $p\,(V)$ наведено на рис. 1. Знайдемо масу рідини в об'ємі V''. Кількість молей першого і другого газів в об'ємі V'' рівна, відповідно,

$$\nu_1 = \frac{p_{н.1}V''}{RT} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ моль},$$

$$\nu_2 = \frac{p_{н.2}V''}{RT} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ моль}.$$

Отже, в рідкому стані знаходиться $\nu_1'' = \nu_1 - \nu_1' \approx 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ молів першої речовини і $\nu_2'' = \nu_2 - \nu_2' \approx 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ молів другої речовини.

Маса рідини в посудині дорівнює $m = \nu_1''M_1 + \nu_2''M_2$. Підставляючи числові дані ($M_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг / моль, $M_2 = 4{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг / моль), отримуємо $m \approx 2{,}03$г.

2.3.35. У відростку посудини, закритого плоским поршнем діаметром $D = 5$ см, є невелика кількість води (рис. 1). Діаметр відростка d = 2 мм. Якщо при постійній температурі t = 20°С поршень опустити на H = 10 см, то рівень води у відростку підвищиться на h = 1мм. Знайти тиск насичених парів води при температурі t = 20 °С.

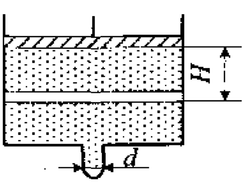


Рис. 1

Розв'язок. Оскільки у відростку з самого початку знаходиться вода, водяна пара в посудині - насичена. При опусканні поршня його тиск не змінюється, а вся пара, що знаходиться в «зникаючому» об'ємі

$$V = (\pi D^2/4)\, H,$$

конденсується. Маса води, що сконденсувалась, дорівнює

$$M = \rho\pi d^2 / 4h,$$

де $\rho = 10^3$ кг / м^3 - густина води.

З рівняння Менделєєва - Клапейрона знаходимо тиск насиченої пари:

$$pV = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = \rho\,(\frac{d}{D})^2\,\frac{h}{H}\,\frac{RT}{\mu} = 2{,}16 \text{ кПа}.$$

Зауваження. В отриманій формулі величини d і D, h і H утворюють безрозмірні комбінації. Отже, значення цих величин можна підставляти в будь-яких, але обов'язково однакових, одиницях виміру. Наприклад, d і D – у міліметрах, а h і H – у сантиметрах. За умови, що інші величини (ρ, R, T і μ) виражені в СІ, відповідь вийде в паскалях.

2.3.36. На рис. 1 наведено графік зміни тиску порохових газів у стволі рушниці при просування кулі в отворі ствола. Визначте швидкість згоряння пороху (у кг / с) при тиску p_{max}, якщо швидкість кулі в цей момент дорівнює υ. Площа поперечного перерізу отвору ствола дорівнює S. Температуру порохових газів уважати постійною. Відомо, що порохові гази, що утворюються при згорянні маси пороху M, в об'ємі V_0 створюють тиск p_0.

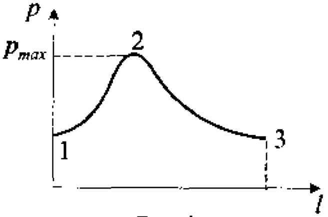


Рис.1

Розв'язок. Зміна тиску порохових газів у стволі відбувається за рахунок зміни маси пороху, що згоряє, і за рахунок зміни об'єму, який займає газ, при просуванні кулі. За першої причини має відбуватися збільшення тиску, за другої - зменшення. Як видно з малюнка, на ділянці *1-2* переважає перша тенденція, а на ділянці *2-3* - друга. У момент часу τ, коли тиск дорівнює p_{max}, збільшення тиску за рахунок згорання пороху компенсує зменшення тиску за рахунок просування кулі. Запишемо рівняння стану газів у той момент часу τ, коли тиск дорівнює p_{max}:

$$p_{max}V = \frac{m}{\mu}RT, \tag{1}$$

де m – маса згорілого до цього часу пороху, V – об'єм простору в стволі за кулею. Нехай за малий проміжок часу $\Delta\tau$, протягом якого тиск можна вважати постійним і рівним p_{max}, згорає маса пороху Δm. Об'єм запульного простору за цей час збільшився на $\Delta V_1 = \upsilon S\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ настільки мале, що швидкість υ кулі можна вважати постійною). Тиск газів за час $\Delta\tau$ не змінилось; це означає, що газ, що утворився при згорянні маси Δm пороху, при тиску p_{max} займає якраз об'єм ΔV_1, тобто

$$p_{max}\Delta V_1 = \frac{\Delta m}{\mu}RT, \tag{2}$$

або

$$p_{max}\upsilon S\Delta\tau = \frac{\Delta m}{\mu}RT. \qquad (3)$$

З рівності (3) знаходимо швидкість горіння пороху в момент часу τ:

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{p_{max}\upsilon S\mu}{RT}.$$

З умови задачі відомо, що

$$p_0V_0 = \frac{M}{\mu}RT.$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{p_0V_0}{M} = \frac{RT}{\mu},$$

і остаточно отримуємо

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{Mp_{max}\upsilon S}{p_0V_0}.$$

2.3.37. У закритій посудині об'ємом $V = 33{,}6\,дм^3$ знаходиться азот та $\nu = 1$ моль води. При температурі $t = 100^0C$ тиск у посудині дорівнює $p = 2\cdot10^5$ Па. Визначити кількість азоту в посудині.

Розвязок. Тиск p у посудині складається з парціальних тисків азоту p_a і парів води p_n. Максимальне можливе значення p_n - це тиск насиченої водяної пари $p_н$ при даному значенні температури. При $T = 373K$ $p_н = 10^5$ Па.

З рівняння

$$p_нV = \nu_1RT$$

знайдемо кількість ν_1 пари в посудині, щоб створити тиск $p_н$:

$$\nu_1 = \frac{p_нV}{RT} = \frac{10^5\cdot33{,}6\cdot10}{8{,}3\cdot373} \approx 1{,}1\,\text{моль}.$$

Отже, при випаровуванні $\nu = 1$ моль води пари, що утворилася, не буде насиченою.Тиск цієї пари

$$p_n = \nu\frac{RT}{V} \approx 0{,}9\cdot10^5\,\text{Па}.$$

Отже, парціальний тиск азоту в посудині

$$p_a = p - p_n = 1{,}1\cdot10^5\,\text{Па}.$$

і кількість азоту в посудині

$$\nu_a = \frac{p_aV}{RT} \approx 1{,}2\,\text{моль}.$$

2.3.38. Через трубу змінного перерізу продувають повітря. Вхідний отвір трубки має площу S_1, вихідний - S_2. На вході швидкість повітря υ_1, температура T_1, тиск p_1; на виході температура повітря T_2, тиск p_2. Яка швидкість повітря на виході?

Розв'язок. Об'єм повітря, що входить у трубку за час t, дорівнює $V = S_2 \upsilon_2 t$, де υ_2 - шукана швидкість повітря на виході. Оскільки швидкості υ_1 і υ_2 не змінюються з часом, маси вхідного і вихідного повітря однакові. Тому, згідно з об'єднаним газовим законом,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}; \; V_2 = V_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1},$$

тобто

$$S_2 \upsilon_2 t = S_1 \upsilon_1 t \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}.$$

Звідси знаходимо

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{S_1 p_1 T_2}{S_2 p_2 T_1}.$$

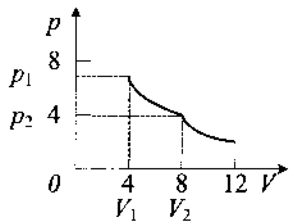


Рис. 1

2.3.39. Суміш газів, що складається з $m = 100$ г азоту і невідомої кількості кисню, піддають ізотермічному стисканню при температурі $T = 74.4$ K. Графік залежності тиску суміші газів від його обєму наведено на рис. 1 (в умовних одиницях). Визначте масу кисню. Розрахуйте тиск насичених парів кисню при цій температурі.

Примітка. T = 74,4 K — це температура кипіння рідкого азоту при нормальному тиску: кисень кипить при більш високій температурі.

Розв'язок. Позначимо характерні точки на графіку як показано на малюнку. При $V < V_1$ тиск суміші газів не змінюється - це означає, що і кисень, і азот конденсуються і тиск дорівнює сумі тисків насичених парів кисню $p_{нас.к}$ та азота $p_{нас.а}$ при T = 74,4 K. Оскільки ця температура є температурою кипіння рідкого азоту, то $p_{нас.а} = p_0$ – атмосферному тиску (10^5 Па). Заломи на графіку в точках (V_1, p_1) і (V_2, p_2) свідчать про фазові переходи – конденсації газів: якщо при $V < V_1$ сконденсувались обидва гази, то при $V_1 < V < V_2$ лише один, а при $V > V_2$ конденсації немає. Припустимо, що в точці (V_1, p_1) конденсується азот. Тоді кисень сконденсується в точці (V_2, p_2) і ми можемо записати систему рівнянь

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{нас.к} + p_0, \\ p_2 &= p_{нас.к} + p_a, \end{aligned} \qquad (1)$$

де p_a - парціальний тиск азоту в точці (V_2, p_2). Оскільки на ділянці $V_1 - V_2$ азот знаходиться лише в газоподібному стані, то із закону Бойля - Маріотта випливає, що $p_a = p_0 \dfrac{V_2}{V_1}$. Підставляючи це значення в (1) і поділивши рівняння один на одне (використовуючи співвідношення $p_1/p_2 = 7/4$, а $V_1/V_2 = 1/2$), знаходимо

$$p_{нас.к} = \frac{p_0}{6} \approx 17 \text{ Па}.$$

Припустивши, що в точці (V_1, p_1) конденсується кисень, ми отримали б, як неважко перевірити, що $p_{нас.к} = 6p_0$. Це суперечить тому, що кисень кипить при більш високій температурі, - тиск насичених парів кисню при $T = 74$ К повинен бути менше p_0.

Знайдемо тепер масу кисню m_2. Точка (V_2, p_2) відповідає початку конденсації кисню, тобто його тиск дорівнює $p_{нас.к}$, і весь кисень при цьому знаходиться в газоподібному стані. Відповідно до закону Менделєєва-Клапейрона,

$$p_{нас.к} V_2 = \frac{m_2}{\mu_к} RT, \tag{2}$$

де $\mu_к$ – молярна маса кисню. Для азоту конденсація починається в точці (V_1, p_1), тобто

$$p_0 V_1 = \frac{m_1}{\mu_a} RT, \tag{3}$$

де μ_a – молярна маса азоту. Поділивши рівняння (2) на (3) і з огляду на те, що $\mu_a / \mu_к = 7/8$ та $p_{нас.к} = \dfrac{p_0}{6}$, визначимо масу кисню

$$m_2 = \frac{8}{21} m_1 \approx 38 \text{ г}.$$

2.3.40. Вагон масою M і довжиною L може без тертя рухатися по рейках. Він заповнений газом і розділений посередині рухомою невагомою вертикальною перегородкою. Спочатку температура газу дорівнює T. У правій половині вагона вмикають нагрівник і доводять температуру газа до $2T$, у лівій частині температура залишається незмінною. Знайдіть переміщення вагона, якщо маса всього газу m.

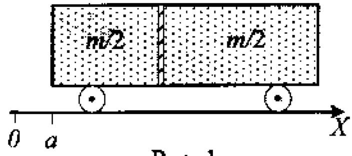


Рис. 1

Розв'язок. Оскільки до увімкнення нагрівача тиск, об'єм і температура в лівій і правій половинах вагона однакові, однакові маси газу зліва і справа від перегородки. При сталих температурах після ввімкнення нагрівача тиск в обох частинах вагона знову однаковий, тоді як об'єми різні. Запишемо рівняння Клапейрона-Менделєєва для кожної з частин:

$$pV_1 = \nu RT, \quad pV_2 = 2\nu RT.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

Тому перегородка тепер знаходиться на відстані $l = \frac{1}{3}L$ від лівого краю вагона.

Направимо горизонтальну вісь X уздовж рейок і виберемо початок відліку так, щоб спочатку лівий край вагона мав координату $x = 0$. При цьому координата центра мас вагона буде дорівнювати

$$x_1 = \frac{ML/2 + mL/2}{M + m} = \frac{L}{2}.$$

При зміні температури газу праворуч від перегородки вагон перемістився праворуч на деяку відстань a (рис. 1). Тепер центр мас газу в лівій частині вагона знаходиться на відстані L / 6 від лівого краю, а в правій частині на відстані

$$\frac{1}{3L} + \frac{1}{2}\frac{2}{3L} = \frac{2}{3L}.$$

Нова координата центру мас системи дорівнює

$$x_2 = \frac{M\left(\frac{L}{2} + a\right) + 0{,}5m\left(\frac{L}{6} + a\right) + 0{,}5m\left(\frac{2L}{3} + a\right)}{M + m} = a + \frac{\frac{ML}{2} + \frac{5mL}{12}}{M + m}.$$

Але, оскільки по горизонтальній осі на систему не діють зовнішні сили, положення центру мас системи не змінилося:

$$x_1 = x_2.$$

Звідси знаходимо, що вагон перемістився на відстань

$$a = \frac{L}{2} - \frac{\frac{ML}{2} + \frac{5mL}{12}}{M + m} = \frac{Lm}{12(M + m)}.$$

2.3.41. Посудина об'ємом 5 літрів з жорсткими скляними стінками з'єднана короткою жорсткою трубкою з шийкою літрової пластикової пляшки з-під газованої води - її тонкі стінки практично нерозтяжні, але досить м'які. У системі з двох посудин знаходиться незмінна кількість повітря. Повітря потроху охолоджують, вимірюючи його тиск. Аж до температури +50°С тиск у системі зменшувався, а починаючи з цієї температури перестав зменшуватися. При якій температурі тиск знову почне зменшуватись? Атмосферний тиск залишається постійним.

Розв'язок. Рішення цієї задачі зовсім просте. Зрозуміло, що спочатку тиск у посудинах перевищував атмосферний і загальний об'єм системи становив 6 л (банка плюс пляшка). Коли тиск при охолодженні досягає атмосферного, пляшка "мнеться" і об'єм системи стає меншим. Тиск у системі знову почне падати після того як об'єм пляшки впаде до нуля і загальний об'єм системи стане рівним 5 л. Це буде при температурі

$$T_2 = \frac{5}{6}T_1 = \frac{5}{6} \cdot 323\text{К} \approx 269\text{К} = -4^0\text{C}.$$

2.3.42. У закритій посудині, крім повітря, міститься деяка кількість води. Температура всередині посудини підтримується рівною $+100^0$С. Початковий об'єм посудини 10 л, рідина при цьому займає дуже невелику частину об'єму посудини, а тиск становить рівно 2 атм. При збільшенні об'єму посудини до 20 л тиск у ньому впав до 1,4 атм. Уважаючи ці значення точними, знайдіть масу повітря . А скільки молекул води міститься в посудині?

Розв'язок. Тиск насичених парів води при зазначеній температурі дорівнює 1 атм, тоді парціальний тиск повітря також є рівним 1 атм. Це дає можливість знайти масу повітря в посудині (молярну масу повітря беремо, як і завжди, $M = 29$ г/моль):

$$m = \frac{M\rho V}{Rt} = 9{,}4\,\text{г}.$$

Після збільшення об'єму посудини в два рази парціальний тиск повітря знизиться в два рази і становитиме 0,5 атм; отже, тиск водяних парів виявиться рівним

$$p_\text{п} = 1{,}4 - 0{,}5 = 0{,}9\,\text{атм}.$$

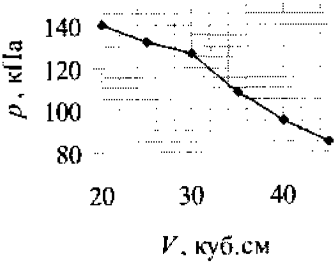
Це менше тиску насичених парів при +100°С; значить, уся вода випарувалася. Тоді кількість молекул води (водяної пари) у посудині дорівнює

$$N = \frac{N_\text{A} p_\text{п} \cdot 2V}{RT} = 3{,}5 \cdot 10^{23},$$

де $N_\text{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}$.

2.3.43. У посудині знаходиться повітря і деяка кількість води при температурі +100 °С. Об'єм посудини повільно збільшують при незмінній температурі та вимірюють тиск усередині з точністю приблизно 0,5%. Результати вимірювань наведено в таблиці:

Об'єм, см^3	20	25	30	35	40	45
Тиск, кПа	140	132	126,5	108,5	95	84,5



Яка кількість води сконденсується, якщо не змінювати об'єм посудини, але знизити температуру до +20 °С?

Розв'язок. Нанесемо точки на графік залежності тиску в посудині від температури. Видно, що характер графіка суттєво змінюється при збільшенні об'єму більше 30 см^3 – зрозуміло, що при цьому просто «закінчується» вода, вся вона перетворюється на пару. Відомо, тиск насиченої пари при цій температурі — становить 100 кПа. За цими даними (парціальний тиск, об'єм і температура пари) можна легко визначити і масу водяної пари в посудині:

$$m = \frac{Mp\,V}{RT} = \frac{18\cdot10^5\cdot30\cdot10^{-6}}{8{,}3\cdot373} \approx 0{,}017\,\text{г}.$$

При зниженні температури до +20°С тиск насиченої пари падає в багато разів — можна вважати, що практично вся маса пари конденсується. Отже, маса водяного конденсату становитеме 0,017 г.

2.3.44. Шприц смністю $V_0 = 12\,\text{см}^3$ підготовлений для "газового" експерименту. Шприц заповнений повітрям при атмосферному тиску p_0, і отвір, до якого приєднується голка, герметизована гумовим ковпачком. Поршень шприца переміщується вздовж стін корпусу з тертям, і можна вважати, що сила тертя не залежить від напрямку переміщення поршня щодо стінок. Шприц помістили в посудину і створили в цій посудині тиск, надлишковий у порівнянні з атмосферним. При цьому мінімальний об'єм повітря всередині шприца був $V_1 = 2{,}5\,\text{см}^3$. Потім тиск у посудині знову повернули до атмосферного, а об'єм повітря, замкненого всередині шприца, став $V_2 = 10\,\text{см}^3$. На скільки максимальний тиск у посудині був більше в порівнянні з атмосферним тиском? Уважайте температуру незмінною.

Розв'язок. Умова рівноваги поршня шприца - це рівність нулю суми всіх сил, що діють на поршень. На початку експерименту тиску повітря всередині й зовні шприца були однаковими, тому сила тертя між поршнем і корпусом дорівнювала нулю. При максимальному стисненні повітря виконується таке співвідношення:

$$\frac{p_0V_0}{V_1} + \frac{F_{mp1}}{S} = p_0 + \Delta p\,.$$

Тут S - це площа поршня, Δp - шуканий надлишковий тиск. При відновленні тиску повітря в посудині до величини p_0 виконується інша умова рівноваги поршня:

$$\frac{p_0V_0}{V_2} + \frac{F_{mp2}}{S} = p_0\,.$$

З цих двох рівнянь можна виключити силу тертя, величина якої за умовою не залежить від напрямку переміщення поршня щодо корпусу. У результаті отримаємо:

$$\Delta p = p_0\left(\frac{V_0}{V_2} + \frac{V_0}{V_1} - 2\right) = 4p_0\,.$$

2.3.45. Представлена (у відносних одиницях) залежність об'єму (рис. 1) порції повітря масою m = 10 г від його температури (це приблизно шоста частина кола одиничного радіуса). Знайдіть максимальний тиск p_{max}, якого досягало повітря в процесі нагрівання, якщо $V_0 = 1$ л, а $T_0 = 300$ K. У цьому завданні повітря можна вважати ідеальним газом.

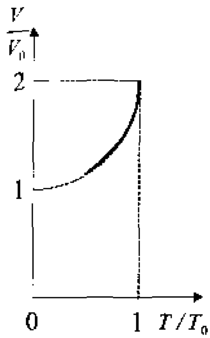


Рис. 1

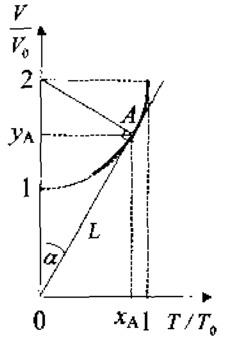


Рис. 2

Розв'язок. Запишемо рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \nu RT,$$

або

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\nu RT_0}{pV_0}\frac{T}{T_0}.$$

Видно, що процес з постійним тиском (ізобарний) у заданих координатах є прямою, що проходить через початок координат. Причому чим більший тиск, тим більше кут α. Таким чином, точку, у якій тиск буде максимальним, можна знайти, провівши дотичну з початку координат до графіка процесу (рис. 2 точка A). Оскільки радіус кола одиниця, $\sin\alpha = 1/2$ значить, $\alpha = 30^0$ та $L = 2\cos\alpha = \sqrt{3}$,

$$x_A = L\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y_A = L\cos\alpha = \frac{3}{2}.$$

Знаючи координати точки на графіку, знайдемо максимальний тиск:

$$p_{max} = \frac{m}{M}R\frac{x_A T_0}{y_A V_0} \approx 5\cdot 10^5\,\text{Па},$$

де $M = 29$ г / моль – молярна маса повітря.

2.3.46. Знайка вирішив провести дослідження Гей-Люссака для ідеального газу, тільки більш акуратно. Для цих цілей він взяв циліндричну посудину великого об'єму з поршнем, який міг рухатися практично без тертя, вийняв поршень і охолодив посудину й поршень до температури 200 K. Потім він вставив поршень назад у посудину так, що всередині виявилося охолоджене до тієї ж температури повітря, забезпечив постійний тиск і провів вимірювання залежності об'єму V газу в посудині від температури T (рис. 1).

Знайдена залежність мало нагадувала результати, отримані Люссаком. Знайка зрозумів свою помилку. Він вставив поршень у циліндр при температурі 200 K, і очевидно, на дні посудини при цьому з'явився лід, який утворився з води, сконденсованої при охолодженні повітря. Оцініть масу льоду, який з'явився в циліндрі в Знайки, якщо тиск протягом досліду був $2\cdot 10^5$ Па. Молярна маса води 18 г/моль.

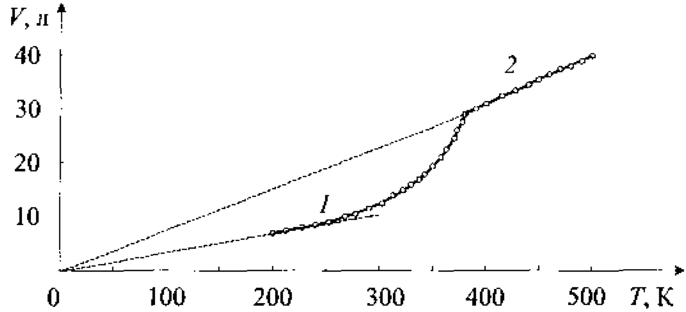


Рис. 1

Розв'язок. При низьких температурах, коли вода знаходиться в твердому або навіть у рідкому стані, тиском водяної пари можна знехтувати. Отже, перші 4-5 точок графіка відповідають ізобарному розширенню досліджуваного ідеального газу - сухого повітря, з якого виморозити воду. Тому пряма *1*, що є продовженням початкової ділянки отриманого Знайком графіка, повинна проходити через початок координат. Використовуючи точку графіка з координатами $T = 240$ К та $V = 10^{-2}$м^3, за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва знайдемо кількість ідеального газу (сухого повітря) в посудині:

$$\nu_1 = \frac{pV}{RT} \approx 1\,\text{моль}.$$

При температурах, що перевищують точку кипіння води (понад 373 К), вода перетворюється в пару, яку також можна вважати ідеальним газом. Тому точки лінійної ділянки графіка - пряма *2*, відповідає температурам понад 380 К, зображують ізобарний процес для суміші двох ідеальних газів – сухого повітря і водяної пари. Використовуючи точку графіка з координатами, за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва, знайдемо сумарну кількість ідеального газу в посудині:

$$\nu_2 = \frac{pV}{RT} \approx 2\,\text{моль}.$$

Отже, кількість водяної пари в суміші дорівнює

$$\nu_n = \nu_2 - \nu_1 = 1\,\text{моль}.$$

Маса одного моля водяної пари дорівнює 18 г. Оскільки вся пара, що знаходиться в посудині, спочатку містилася в ньому у вигляді льоду, то шукана маса льоду в циліндрі також дорівнює 18 г.

2.3.2. Завдання з перегородками

Поршні й перегородки трапляються в задачах механіки (гідростатики), молекулярної фізики, термодинаміки. Якщо мова йде про рухому перегородку, що перекриває циліндричну посудину, то її можна називати поршнем. Термін «перегородка» доречний у разі відкритої посудини або у випадку нерухомої стінки, яка пропускає тепло або молекули певного типу (напівпроникна перегородка). Поршень може бути невагомим або масивним (що важливо тільки в разі вертикального циліндра), такий що проводить тепло або не проводить, рухається вільно або з тертям. Розглянемо конкретні приклади.

2.3.47. Закрита посудина розділена на дві рівні частини твердою нерухомою напівпроникненою перегородкою. У першій половині посудини введено суміш аргона та водню при тискові $1{,}5\cdot10^5$ Па, у другій половині – вакуум. Через перегородку може дифундувати тільки водень. Після закінчення процесу дифузії тиск у першій половині стає рівним 10^5 Па. Визначити відношення мас аргона та водню в посудині. Молярна маса аргону $20\cdot10^{-3}$ кг/моль, водню $2\cdot10^{-3}$ кг/моль. Температура під час процесу не змінювалася.

Розв'язок. Перегородка має такі властивості, що крізь неї може проникати лише водень в одному й другому напрямку. Початковий тиск у першій половині посудини, коли в ній запустили водень та аргон, буде дорівнювати сумі парціальних тисків цих газів:

$$p = p_a + p_в. \tag{1}$$

Парціальні тиски цих газів знайдемо з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$p_a = \frac{m_a RT}{\mu_a V}; \quad p_в = \frac{m_в RT}{\mu_в V}, \tag{2}$$

де V – половина об'єму посудини.

Після підстановки (2) в (1) маємо

$$p = \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_в}{\mu_в}\right)\frac{RT}{V} = \left(\frac{m_a}{m_в} + \frac{\mu_a}{\mu_в}\right)\frac{m_в}{\mu_a}\frac{RT}{V}. \tag{3}$$

Після закінчення процесу дифузії водень займе весь об'єм посудини. У той час, коли аргон буде лише в першій половині посудини, концентрація водню в обох частинах посудини буде однаковою. Щоб у цьому переконатися, будемо вважати, що концентрація водню в першій посудині n_1 менше концентрації n_2 у другій половині посудини ($n_1 < n_2$). Оскільки температура в обох частинах посудини однакова, то і швидкості молекул у посудині однакові. За час Δt з об'єму $\bar{\upsilon} S\Delta t$ поблизу перегородки в другу половину посудини увійде $\frac{1}{6}n_1\bar{\upsilon}S\Delta t$ молекул водню, а в першу половину посудини за той же час Δt з другої половини посудини перейде $\frac{1}{6}n_2\bar{\upsilon}S\Delta t$. У результаті цього в першій половині посудини кількість молекул збільшиться на величину $\Delta N = \frac{1}{6}(n_2 - n_1)\bar{\upsilon}S\Delta t$, де $\bar{\upsilon}$ – сердня швидкість молекул. Це зростання припиниться, коли стане $n_2 = n_1$.

Величина $\frac{1}{6}$ означає, що в кожній половині посудині є 6 різних напрямків руху молекул, але до перегородки рухається в середньому $\frac{1}{6}$ частина всіх молекул.

Отже, у першій половині посудини тиск стане рівним

$$p' = p_a + p'_в, \tag{4}$$

де $p'_в$ - парціальний тиск водню в кінці процесу дифузії. Парціальний тиск аргона не зміниться.

З рівняння стану для водню маємо:

$$p'_в = \frac{m_в RT}{\mu_в 2V}. \tag{5}$$

Підставимо (5) і (2) у (4):

$$p' = \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_в}{2\mu_в}\right)\frac{RT}{V} = \left(\frac{m_a}{m_в} + \frac{\mu_a}{2\mu_в}\right)\frac{m_в}{\mu_a}\frac{RT}{V}. \tag{6}$$

З рівняння (6) та (3) знайдемо $m_a / m_в$:

$$\frac{m_a}{m_в} = \frac{\mu_a}{\mu_в}\cdot\frac{2p' - p}{2(p - p')} = 10.$$

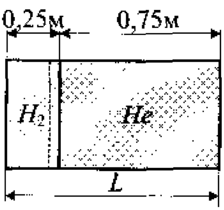


Рис. 1

2.3.48. У лівій частині циліндричної посудини довжиною $L = 1$ м, розділеної теплонепроникним поршнем, знаходиться водень, а в правій — гелій. Об'єм гелію в 3 рази більший об'єму водню. При нагріванні гелію поршень зміститься на $l = 5$ см. На скільки градусів змінилась температура гелію, якщо початкова температура газів була однаковою. Температура водню підтримується постійною.

Розв'язок. Рівняння стану ідеального газу для гелію на початку експерименту.

$$p_1 \cdot 0{,}75LS = \nu_{He} RT_1, \tag{1}$$

для водню

$$p_1 \cdot 0{,}25LS = \nu_{H_2} RT_1. \tag{2}$$

Після нагрівання до T_2 рівняння стану

$$p_2 \cdot (0{,}75 + 0{,}05)LS = \nu_{He} RT_2, \tag{3}$$

$$p_2 \cdot (0{,}25 - 0{,}05)LS = \nu_{H_2} RT_1, \tag{4}$$

Розділимо (3) на (1):

$$\frac{p_2 \cdot 0{,}8LS}{p_1 \cdot 0{,}75LS} = \frac{\nu_{H_2} RT_2}{\nu_{He} RT_1}.$$

Отримаємо

$$\frac{p_2 \cdot 16}{p_1 \cdot 15} = \frac{\nu_{H_2} T_2}{\nu_{He} T_1}. \tag{5}$$

Розділемо (4) на (2) та отримаємо

$$\frac{p_2 \cdot 4}{p_1 \cdot 5} = \frac{\nu_{H_2}}{\nu_{He}}. \qquad (6)$$

З рівняння (5) та (6) знайдемо

$$T_2 = \frac{4}{3} T_1.$$

Отже, на $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{4}{3}T_1 - T_1 = \frac{T_1}{3}$ градусів змінилася температура гелію.

2.3.49. Посудина розділена легкими рухомими посудинами на три рівні частини, у яких знаходяться гелій, водень, азот. Лівий поршень пропускає гелій та водень, правий пропускає тільки водень. Знайти відстань, на яку зміститься правий поршень після закінчення процесу дифузії. Початковий тиск гелію в три рази більше початкового тиску водню та азоту. Довжина посудини дорівнює L.

Розв'язок. Запишемо рівняння стану ідеального газу для всіх компонентів перед початком процессу:

$$p_{He}V_{He} = \nu_{He}RT; \qquad p_{H_2}V_{H_2} = \nu_{H_2}RT; \qquad p_{N_2}V_{N_2} = \nu_{N_2}RT. \qquad (1)$$

Оскільки об'єми та температура однакові $V = \frac{1}{3}LS$, то те, що тиск гелію в три рази більший за тиск водню та азоту свідчить про те, що кількість молей гелію в три рази більше, ніж молей водню та азоту

$$\frac{\nu_{He}}{\nu_{H_2}} = \frac{\nu_{He}}{\nu_{N_2}} = 3. \qquad (2)$$

Оскільки і лівий, і правий поршень пропускає водень, то він буде в усіх трьох частинах. Гелій буде в першій та другій комірці. Азот залишається в третій комірці. Отже, на праву перегородку буде зліва діяти гелій, справа – азот. Ця перегородка буде рухатись доки поки тиски гелію та азоту зрівноважаться $(p_{He} = p_{N_2})$. З рівняння стану ідеального газу (1) знайдемо ці тиски:

$$p_{He} = \frac{\nu_{He}RT}{(L-x)S}, \qquad (3)$$

$$p_{N_2} = \frac{\nu_{N_2}RT}{xS}. \qquad (4)$$

де L - довжина циліндра, x -довжина третьої комірки, S - площа перерізу циліндру.

З рівняння (3) та (4) отримуємо:

$$\frac{\nu_{He}RT}{(L-x)S} = \frac{\nu_{N_2}RT}{xS}.$$

Урахувавши рівняння (2) будемо мати

$$\frac{3}{L-x}=\frac{1}{x}.$$

Звідки $x=\frac{1}{4}L$, а зміщення правої перегородки

$$\Delta L=\frac{1}{3}L-\frac{1}{4}L=\frac{1}{12}L.$$

2.3.50. У двох вертикальних циліндрах різного поперечного перерізу під поршнями, маса яких m_1 = 1 кг , m_2 = 2 кг, знаходиться газ при сталій температурі, а над поршнями – вакуум. Циліндри з'єднані внизу трубкою, а поршні розташовуються на однаковій висоті h_0 = 0,2м. Яка буде різниця цих висот h, якщо збільшити массу 1-ого поршня до маси 2-ого?

Розв'язок. Оскільки вертикальні циліндри з'єднані трубкою, то після збільшення маси 1-го поршня рівновага настане лише після того, як він досягне дна свого циліндра, а весь газ перейде в другий циліндр. Оскільки тиск газу і його температура залишаються незмінними, то і повний об'єм, який займає газ, повинен залишитися незмінним. Тобто

$$S_1h_0+S_2h_0=S_2h, \tag{1}$$

де S_1 і S_2 – поперечні перерізи поршней 1-го і 2-го циліндрів, а h – висота, на якій буде знаходитися 2-й поршень, тобто та різниця висот, яку ми шукаємо (відомо, що 1-й поршень буде лежати на дні).

Спочатку тиск під поршнями був однаковий, тобто

$$\frac{m_1g}{S_1}=\frac{m_2g}{S_2}, \quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{m_1}{m_2},$$

$$S_1=S_2\frac{m_1}{m_2}. \tag{2}$$

Підставимо (2) в (1) та отримаємо

$$h=h_0\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)=0{,}2\left(\frac{1}{2}+1\right)=0{,}3\text{ м}.$$

2.3.51. Посудина ємкістю V = 30 л розділена на 3 рівні частини нерухомими напівпроникненими тонкими перегородками. У ліву частину вводять m_{H_2} = 30г водню в середню m_{O_2} = 160г кисню і в праву m_{N_2} = 70г азоту. Через ліву перегородку може дифондувати тільки водень, через праву – водень та азот. Який тиск буде в кожній із трьох частин посудини після встановлення рівноваги, якщо він підтримується при постійній температурі T = 300 К.

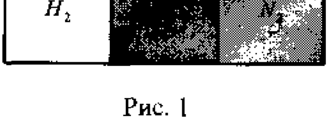


Рис. 1

Розв'язок. У результаті дифузії водень займе об'єм усієї посудини і тиск водню в усіх 3-х частинах посудини буде

$$p_{H_2}=\frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}\frac{RT}{V}=\frac{30\cdot10^{-3}\cdot8{,}31\cdot300}{2\cdot10^{-3}\cdot30\cdot10^{-3}}=1{,}246\,\text{МПа}.$$

Азот буде в 3-й та 2-й комірці загальним об'ємом $\frac{2}{3}V$; його тиск буде

$$p_{N_2}=\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}}\frac{3RT}{2V}=\frac{70\cdot10^{-3}\cdot3\cdot8{,}31\cdot300}{28\cdot10^{-3}\cdot60\cdot10^{-3}}\approx0{,}312\,\text{МПа}.$$

Кисень не проходить через перегородки. Його тиск у середньої частині посудини становить

$$p_{O_2}=\frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}\frac{3RT}{V}=\frac{160\cdot10^{-3}\cdot3\cdot8{,}31\cdot300}{32\cdot10^{-3}\cdot30\cdot10^{-3}}\approx1{,}246\,\text{МПа}.$$

За законом Дальтона тиск в усіх трьох частинах посудини буде дорівнювати сумі парціальних тисків газів, що знаходяться в них, тобто

$$p_1=p_{H_2}=1{,}246\,\text{МПа},$$

$$p_2=p_{H_2}+p_{O_2}+p_{N_2}=2{,}8\,\text{МПа},$$

$$p_3=p_{H_2}+p_{N_2}=1{,}558\,\text{МПа}.$$

2.3.52. Рухомий поршень, що не проводить тепло, ділить циліндр на дві частини об'ємом $V_1=200$ см^3 та $V_2=100$ см^3.Спочатку температура в обох частинах $T_0=300$ К, а тиск $p_0=10^5$ Па. Потім меншу частину охолодили танучим льодом, а більшу нагріли в кип'ятку. Який тиск встановився в циліндрі?

Розв'язок. Запишемо рівняння стану газу в обох комірках:

$$\frac{p_0V_1}{T_0}=\frac{m_1}{\mu}R, \tag{1}$$

$$\frac{p_0V_2}{T_0}=\frac{m_2}{\mu}R. \tag{2}$$

З рівняння (1) та (2) маємо

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{V_2}{V_1}. \tag{3}$$

При охолоджені лівої частини до $T_1=273$ К рівняння стану стане

$$\frac{p_1(V_1-\Delta V)}{T_1}=\frac{m_1}{\mu}R. \tag{4}$$

При нагріванні правої комірки до $T_2=373$ К

$$\frac{p_2(V_2+\Delta V)}{T_2}=\frac{m_2}{\mu}R. \tag{5}$$

З лівого боку та правого на поршень буде діяти однаковий тиск:

$$p_1=p_2=p.$$

З рівнянь (4) і (5) знайдемо відношення

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{p_2(V_2+\Delta V)}{T_2}\frac{T_1}{p_1(V_1-\Delta V)}=\frac{T_1(V_2+\Delta V)}{T_2(V_1-\Delta V)},$$

порівняємо його з (3) та отримаємо:

$$\Delta V=\frac{V_1V_2(T_2-T_1)}{V_1T_1+V_2T_2}. \qquad (6)$$

З рівняння (1)

$$m_1=\frac{p_0V_1\mu}{RT_0}.$$

Підставимо цей вираз та (6) у (4) та отримаємо

$$p_1=\frac{V_1T_1+V_2T_2}{(V_1+V_2)T_0}\cdot p_0=\frac{2\cdot10^{-4}\cdot273+1\cdot10^{4}\cdot373}{\left(2\cdot10^{-4}+1\cdot10^{4}\right)\cdot300}\cdot10^5=1{,}021\cdot10^5\,\text{Па}.$$

2.3.53. На гладкому столі лежить герметична циліндрична посудина довжиною L, яка може переміщуватись по столу. Посудина розділена герметичною перегородкою на дві рівні частини, в одній з яких знаходиться під деяким тиском азот (рис. 1), а в другій – вуглекислий газ під тиском вдвічі більшим. У деякий момент перегородка втрачає герметичність. На скільки та в якому напрямку зміститься посудина після того, як гази в кінці кінців змішаються? Масу циліндра не враховувати. Молярна маса азоту $\mu_{N_2}=28\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, вуглекислого газу $\mu_{CO_2}=44\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

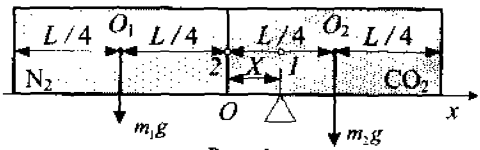


Рис. 1

Розв'язок. З рівняння Менделєєва-Клапейрона знайдемо маси газів, які знаходяться в лівій та правій частині посудини, кожна з яких має об'єм V:

$$m_{N_2}=\frac{\mu_{N_2}pV}{RT};\quad m_{CO_2}=\frac{\mu_{CO_2}\cdot2pV}{RT}. \qquad (1)$$

Центри мас газів знаходяться в точках O_1 та O_2, центр маси всієї системи - у точці 1.

Скориставшись умовою рівноваги тіла, що має вісь обертання, яка проходить через точку 1, маємо :

$$m_1g\left(\frac{L}{4}+X\right)=m_2g\left(\frac{L}{4}-X\right). \qquad (2)$$

Звідки

$$m_1\frac{L}{4}+m_1X=m_2\frac{L}{4}-m_2X,$$

$$X=\frac{L}{4}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}=\frac{L}{4}\cdot\frac{2\mu_{CO_2}-\mu_{N_2}}{2\mu_{CO_2}+\mu_{N_2}}=\frac{L(2\cdot44-28)\cdot10^3}{4(2\cdot44+28)\cdot10^{-3}}=0{,}13L.$$

Після втрати прокладкою герметичності та змішування газів центр маси системи переміститься в точку *2* (середина циліндра), а циліндр переміститься вправо на $X = 0.13L$.

2.3.54. Горизонтально розташована закрита циліндрична посудина з гладенькими стінками розділена рухомим теплонепроникним поршнем на дві частини, у яких знаходяться різні ідеальні гази з однаковими температурами $T_0 = 300K$. Об'єм, що займає один з газів, у $\alpha = 3$ рази більше об'єму, що займає другий газ. Газ у більшому об'ємі нагрівають, і його об'єм збільшується в $\beta = 1/20$ об'єму всієї посудини. На скільки збільшилася температура цього газу, якщо температура в другій частині посудини підтримується постійною і рівною T_0?

Розв'язок. У меншому об'ємі циліндра перед нагріванням були наступні термодинамічні параметри:

$$p_1 = p_0,\ V_1 = \frac{V}{\alpha + 1},\ T_1 = T_0.$$

Розглянемо ізотермічний процес, що відбувається в меншому об'ємі циліндра, при нагріванні газу в більшому об'ємі до температури T_2. Перегородка пересунеться, об'єм зменшиться і буде дорівнювати

$$V_2 = \frac{V}{\alpha + 1} - \beta V = V\left(\frac{1}{\alpha + 1} - \beta\right).$$

З рівняння стану ідеального газу знайдемо тиск газу в меншому об'ємі циліндра:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_0 V(1+\alpha)}{V(1+\alpha)[1-\beta(1+\alpha)]} = \frac{p_0}{1-\beta(1+\alpha)}.$$

Такий же тиск буде і в більшій частині після нагрівання газу в ньому.

У більшому об'ємі циліндра перед нагріванням були наступні термодинамічні параметри:

$$p_1' = p_0,\ V_1' = \frac{\alpha V}{\alpha + 1},\ T_1' = T_0.$$

При нагріванні газу до температури T_2 параметри зміняться:

$$V_2' = \frac{\alpha V}{\alpha + 1} + \beta V = V\left(\frac{1}{\alpha + 1} + \beta\right) = \frac{V[\alpha + \beta(1+\alpha)]}{1+\alpha},$$

$$p_2' = p_2,\ T_2' = T_2.$$

З рівняння стану

$$\frac{p_1' V_1'}{T_1'} = \frac{p_2' V_2'}{T_2'}.$$

Знайдемо

$$T_2 = T_2' = \frac{T_1' p_2' V_2'}{p_1' V_1'} = \frac{T_0[\alpha + \beta(1+\alpha)]}{\alpha[\alpha - \beta(1+\alpha)]}.$$

Отже, температура збільшиться на

$$\Delta T = T_2 - T_0 = \frac{T_0\beta(1+\alpha)^2}{\alpha[1-\beta(1+\alpha)]} = 100\text{К}.$$

2.3.3. Завдання з поршнями

2.3.55. Циліндрична посудина перерізом $S = 10$ см^3 закрита масивним поршнем. Усередині посудини знаходиться газ. Посудину починають піднімати з прискоренням $2g$. Коли температура газу зрівнялася з первинною, об'єм газу під поршнем зменшився в 1,5 рази. Знайдіть масу поршня. Зовнішній тиск $p_0 = 10^5$ Па.

Розв'язок. У нерухомому стані сила тяжіння поршня урівноважувалася різницею сил тиску газу всередині посудини і зовні:

$$mg = (p - p_0)S.$$

При русі посудини сумарна сила, що діє на поршень, надає йому прискорення $2g$ спрямоване вгору:

$$2mg = (1{,}5p - p_0)S - mg, \text{ або}$$

$$3mg = (1{,}5p - p_0)S$$

(при незмінній температурі об'єм зменшиться в 1,5 рази; значить, тиск зріс теж в 1,5 рази). Вирішуючи спільно отримані два рівняння, знайдемо

$$m = \frac{p_0 S}{3g} \approx 3{,}4 \text{ кг}.$$

2.3.56. Газ знаходиться в циліндрі під невагомим поршнем, площа якого $S = 100$ см^2. При температурі 7°C на поршень поклали гирю масою $m = 10$ кг При цьому поршень дещо опустився. На скільки треба нагрівати газ у циліндрі, щоб поршень опинився на колишній висоті? Атмосферний тиск нормальний.

Розв'язок. У первинному стані й після нагрівання газ займає один і той же об'єм. Маса газу постійна. Отже, на підставі закону Шарля

$$p_1/T_1 = p_2/T_2, \tag{1}$$

де $p_1 = 760$ мм рт. ст. $= 760\cdot 133$ Па и $T_1 = (7+273)$ К $= 280$ К, p_2 і T_2 — відповідно тиск і температура газу в початковому і кінцевому станах. Гиря масою m, покладена на поршень, створює додатковий тиск

$$p = \frac{mg}{S},$$

тому

$$p_2 = p_1 + p = p_1 + \frac{mg}{S}.$$

Підставивши це значення у формулу (1), отримаємо

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{1}{T_2}\left(p_1 + \frac{mg}{S}\right),$$

звідси

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mgT_1}{Sp_1} = \frac{10\cdot 9{,}8\cdot 280}{10^{-2}\cdot 760\cdot 133} \approx 28\,\mathrm{K}.$$

2.3.57. У вертикальному циліндрі, закритому легким рухомим поршнем масою m та площиною S, знаходиться газ. Об'єм газу дорівнює V. Яким стане об'єм газу, якщо циліндр переміщувати вертикально з постійним прискоренням α, направленим угору? Атмосферний тиск p_0, температура газу не змінюється.

Розв'язок. Коли циліндр знаходиться в стані спокою рівняння стану ідеального газу:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT = \text{const},$$

де $p_1 = p_0 + \dfrac{mg}{S}$, $V_1 = V$ – об'єм газу.

Отже,

$$(p_0 + \frac{mg}{S})\, V_1 = \frac{m}{\mu} RT. \qquad (11)$$

Коли циліндр рухається вгору з прискоренням α, а поршень без тертя переміщується (прискорення направлено вгору) рівняння стану газу буде:

$$[p_0 + \frac{m}{S}(g+\alpha)] V_2 = \frac{m}{\mu} RT. \qquad (2)$$

З закону Бойля – Маріота маємо :

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \qquad (3)$$

З рівнянь (1-3) отримуємо

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{\left(P_0 + \dfrac{mg}{S}\right)}{P_0 + \dfrac{m}{S}(g+\alpha)} \cdot V.$$

Об'єм V зменшується до об'єму V_2.

2.3.58. У вертикальному циліндрі з площиною поперечного перерізу S під поршнем масою m знаходиться повітря при температурі T_1. Коли на поршень поклали вантаж масою M, відстань від поршня до дна циліндра h зменшилась у n разів. На скільки підвищилась температура повітря в циліндрі? Атмосферний тиск дорівнює p_0.

Розв'язок. До того, коли на поршень поклали вантаж, стан газу описується рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1. \qquad (1)$$

або

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) Sh = \frac{m}{\mu} RT_1. \qquad (2)$$

Після навантаження поршня

$$\left(p_0+\frac{mg}{S}+\frac{Mg}{S}\right)S\frac{h}{n}=\frac{m}{\mu}RT_2. \qquad (3)$$

Об'єднаємо рівняння (2) та (3):

$$\left(p_0+\frac{mg+Mg}{S}\right)\frac{h}{n}S=\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)hS\frac{T_2}{T_1},$$

$$T_2=\frac{\left(p_0+\dfrac{mg+Mg}{S}\right)T_1}{p_0+\dfrac{mg}{S}},$$

$$T_2-T_1=T_1\left[\frac{p_0+\dfrac{mg+Mg}{S}}{p_0+\dfrac{mg}{S}}-1\right]=\frac{Mg}{p_0S+mg}\cdot T_1.$$

2.3.59. У вертикально розташованому циліндрі під поршнем знаходиться ідеальний газ. Циліндр розміщують у ліфті. Коли ліфт нерухомий, відстань між поршнем і дном циліндра h_1 = 12см. При рухові ліфта зі сталим прискоренням відстань між поршнем та дном циліндра h_2 = 10см. Знайти прискорення ліфта. Температуру вважати постійною, атмосферний тиск не враховувати.

Розв'язок. Визначимо тиск, що діє на газ у циліндрі, поки циліндр знаходиться в стані спокою:

$$p_1=\frac{\nu RT}{h_1S}+\frac{Mg}{S}, \qquad (1)$$

де M – маса, S - площа поршня.

З умови задачі видно, що вектор прискорення ліфту направлений вгору. Тиск у газі, коли циліндр рухається з прискоренням a, буде:

$$p_2=\frac{\nu RT}{h_2S}+\frac{Mg}{S}+\frac{Ma}{S}. \qquad (2)$$

Рівняння стану для цього ізотермічного процесу:

$$p_1V_1=p_2V_2,$$

або з урахуванням (1) та (2)

$$\left(\frac{\nu RT}{h_1S}+\frac{Mg}{S}\right)h_1S=\left(\frac{\nu RT}{h_2S}+\frac{Mg}{S}+\frac{Ma}{S}\right)h_2S.$$

Звідси

$$a=g\left(\frac{h_1}{h_2}-1\right)=2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2.3.60. Висока вертикальна посудина містить невелику кількість гелію під поршнем масою M, на який поставлено гирю масою 49 M. У стані рівноваги поршень «висить» над дном посудини на висоті h. Гирю знімають з поршня, і він починає рух угору. Оцініть максимальну висоту підйому поршня. На якій висоті над дном посудини поршень врешті-решт зупиниться? Уважайте нри розрахунку, що тертя в системі немає, стінки і поршень зовсім не проводять тепло, а теплоємність стінок і поршня посудини дуже мала.

Розв'язок. Газ здійснює роботу по підйому поршня за рахунок своєї внутрішньої енергії - температура газу падає. Якщо об'єм газу збільшується в багато разів (а в нашому випадку, схоже, так і є), то він віддає практично всю свою енергію. Скористаємося цим для оцінки максимальної висоти підйому поршня. Запишемо рівняння рівноваги поршня в початковому стані й «енергетичне» рівняння:

$$\frac{50Mg}{S}Sh = \nu RT_0,$$

$$Mg(H_1 - h) = 1{,}5\nu RT_0.$$

Звідки отримуємо максимальну висоту підйому поршня:

$$H = 76h.$$

Знайдемо тепер висоту H_1, на якій поршень остаточно зупиниться. Для цього запишемо рівняння рівноваги в початковому і кінцевому станах і рівняння енергетичного балансу (нехай T_1 - кінцева температура):

$$\frac{50Mg}{S}Sh = \nu RT_0, \qquad \frac{Mg}{S}SH_1 = \nu RT_1$$

$$Mg(H_1 - h) = 1{,}5\nu R(T_0 - T_1).$$

Звідси знаходимо

$$H_1 = 30{,}4h.$$

2.3.4. Завдання зі змінною масою газу

2.3.61. Балон містить газ при температурі 27°C і тиску p_1 = 20 атм. Який буде тиск, якщо з балона буде випущено k = 0,3 маси газу, а температура знизиться до 12°C?

Розв'язок. Розглянемо два стани газу: до розрідження і після нього, коли залишилося (1 - k) маси. Параметри кожного з цих станів пов'язані рівнянням Менделєєва - Клапейрона:

$$p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ і } p_2V = \frac{(1-k)m}{\mu}RT_2,$$

де m — маса газа, μ — маса кіломоля газу, p_1, p_2, T_1 і T_2 — відповідно тиски і температури газу до і після випуску. Розділивши почленно першу рівність на другу, отримаємо

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{(1-k)T_2}, p_2 = \frac{(1-k)p_1T_2}{T_1}.$$

Обчислення дають:

$$p_2 = \frac{(1-0{,}3)20(12+273)}{27+273} = 13{,}3\,\text{атм}.$$

2.3.62. Яка різниця в масах повітря, що заповнює приміщення об'ємом $V = 50$ м^3, взимку і літом, якщо влітку температура приміщення досягає 40°C, а взимку падає до 0°C? Тиск нормальний. Молярну масу повітря вважати рівною $\mu = 29 \cdot 10^3$ кг/моль.

Розв'язок. З рівняння Менделєєва — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

знайдемо

$$m = \frac{pV\mu}{RT}.$$

За цією формулою виразимо масу повітря в приміщенні при температурах T_1 і T_2:

$$m_1 = \frac{pV\mu}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{pV\mu}{RT_2}.$$

Звідси, віднімаючи з другої рівності першу, отримаємо

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{pV\mu}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Підставивши числові значення, виражені в СІ, знайдемо

$$\Delta m = \frac{760 \cdot 133 \cdot 50 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{40+273}\right) \approx 8{,}2\,\text{кг}.$$

2.3.63. При температурі 20°C та нормальному атмосферному тиску допускається витікання газу з побутової плитки не більше $1{,}1 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$. Скільки молекул газу попадає в кімнату внаслідок витікання газу за три години.

Розв'язок. За час $t = 3$ год витікає об'єм газу $V_t = \frac{V}{t_0}t$, його маса $m = \rho_t V_t$.

Знайдемо густину газу при $t_0 = 0^0$C та при $t_0 = 20^0$C, скориставшись законом Менделєєва - Клапейрона:

$$p\mu = \rho_0 RT_0,$$
$$p\mu = \rho_t RT.$$

Поділивши друге рівняння на перше отримаємо:

$$\rho_t = \frac{\rho_0 T_0}{T}. \qquad (1)$$

Тоді кількість молекул газу:

$$N=\frac{\rho_t V_t N_A}{\mu}, \qquad (2)$$

молярна маса

$$\mu=\frac{\rho_0 T_0 R}{p} \qquad (3)$$

Після підстановки (1), (3) у (2) одержимо:

$$N=\frac{pV_tN_A}{RT}=\frac{10^5\cdot 1{,}1\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 3600\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{8{,}31\cdot 293}=3\cdot 10^{21} \text{ молекул.}$$

2.3.64. З балона через вентиль витікає газ так, що тиск повільно зменшується з незмінною швидкістю $\Delta p/\Delta t=A$. Температура газу при цьому підтримується постійною. Об'єм балону V, площа отвору в вентилі S. Знайти швидкість витікання газу в момент часу, коли тиск газу набув значення p.

Розв'язок. Якщо ρ – густина газу, який витікає через вентиль площиною перерізу S та швидкістю витікання υ, то

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\rho\upsilon S. \qquad (1)$$

З урахуванням рівняння Менделєєва- Клапейрона $pV=\frac{m}{\mu}RT$ рівняння (1) *можна записати так:*

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{\Delta p}{\Delta t}\frac{\mu V}{RT}. \qquad (2)$$

При цьому густина газу $\rho=\frac{\mu p}{RT}$. Тоді швидкість витікання газу з рівняння (1):

$$\upsilon=\frac{\Delta p}{\Delta t}\frac{V}{pS}=\frac{AV}{pS}.$$

2.3.65. Посудина з ідеальним газом при температурі t_1 = 27°C має клапан, який відкривається при перепаді тиску $\Delta p=4\cdot 10^5$ Па. Газ нагрівають до t_2 = 127°C, при цьому частина газу виходить з посудини через клапан. Який тиск установиться в посудині після охолодження газу до початкової температури? Атмосферний тиск $p_0=10^5$Па.

Розв'язок. Запишимо рівняння Менделєєва-Клапейрона для двох температур:

$$p_0V_1=\frac{m}{\mu}RT_1, \qquad (1)$$

$$(p_0+\Delta p)V_1=\frac{m}{\mu}RT_2. \qquad (2)$$

З другого рівняння

$$V_1 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT_2}{p_0 + \Delta p}. \quad (3)$$

Якщо не відбувається випускання газу при T_2, а зразу ж починаємо охолоджувати цей газ до температури T_1, то який тепер буде тиск газу?

$$p_2 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1. \quad (4)$$

Отже, з рівнянь (1) – (4)

$$p_2 = (p_0 + \Delta p)\frac{T_1}{T_2} = (10^5 + 4 \cdot 10^5)\frac{300}{400} = 3{,}75 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

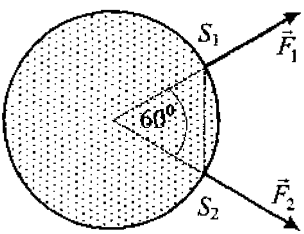


Рис. 1

2.3.66. Супутник виготовлено у вигляді легенької жорсткої сфери радіусом R = 1 м і масою M = 1 кг, заповненої повітрям під тиском p_0 = 0,1 атм і температурі T = 300 К. Одночасно відкривають два клапани, через які з супутника випускають повітря. Площа одного з клапанів $S_1 = 1$ см^2, другого — S_2 = 2 см^2. Визначити, на скільки внаслідок цього супутник відхилиться від попередньої траєкторії за час τ = 1 с. Відстані між клапанами дорівнюють радіусу сфери.

Розвязок. Тиск газу на стінку визначається зміною імпульсу молекул за пружного удару ($\Delta\upsilon = 2\upsilon$), а тому при вилітанні молекул через відкриті клапани на супутник діє реактивна сила $F_0 = \frac{1}{2} p_0 S$. Повна сила, яка діє на супутник унаслідок витікання повітря, дорівнює (рис. 1)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;\ F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60^\circ = \frac{1}{2} p_0 \left(S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos 60^\circ\right) \approx 1{,}35 \text{ Н}.$$

Маса повітря в супутнику

$$m = \frac{Mp_0V}{RT_0} \approx 0{,}5 \text{ кг}.$$

Під дією реактивної сили супутник набуває прискорення, яке в початковий момент часу дорівнює

$$a = \frac{F}{m + M} \approx 0{,}9 \text{ м/с}^2.$$

З'ясуємо, яка частина повітря йде з супутника за τ = 1 с. Швидкість витікання повітря визначимо формулою

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 5 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta m}{m} \approx \frac{\Delta V}{V} = \frac{(S_1 + S_2)v\tau}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 0{,}08.$$

Отже, маса супутника (і тиск повітря в ньому) зменшується за 1 с дуже мало і можна вважати $a = \text{const}$. Тоді відхилення супутника за 1 с дорівнює

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\tau^2 \approx 0{,}45\,\text{м}.$$

2.3.67. Космічний апарат об'ємом $V = 100$ м^3 під час зіткнення з метеоритом дістав пробоїну в оболонці площею $S = 10$ см^2. За який час тиск повітря в апараті зменшиться в два рази порівняно з початковим тиском $p_0 = 10^5$ Н/м^2, якщо початкова густина повітря в апараті дорівнює $\rho_0 = 1{,}25$ кг/м^3.

Розв'язок. Швидкість витікання газу з апарата можна знайти з рівняння Бернуллі

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{const}; \upsilon = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}.$$

За одиницю часу витікає маса газу

$$\frac{dm}{dt} = -\rho\upsilon S = -\sqrt{2p\rho}S.$$

Оскільки $\rho = \frac{m}{V}$, а з рівняння стану

$$p = \frac{m}{MV}RT,$$

тоді

$$\frac{dm}{dt} = -\sqrt{2\frac{RT}{\mu}\frac{S}{V}}m,$$

або

$$\frac{dp}{dt} = -\sqrt{2\frac{RT}{M}\frac{S}{V}}p = -kp.$$

Значення сталої k можна знайти з початкових умов

$$k = \sqrt{2\frac{p_0}{\rho_0}\frac{S}{V}} = 4\cdot 10^{-3}\ c^{-1}.$$

Частковим розв'язком рівняння

$$\frac{dp}{dt} = -kp$$

є

$$p(t) = p_0 e^{-kt}.$$

За умовою задачі $p(t_0) = \frac{1}{2}p_0$, тому

$$e^{-kt_0} = \frac{1}{2},$$

а

$$t_0 = \frac{ln 2}{k} \approx 173 c.$$

2.3.68. У дуже великій посудині знаходиться гелій при температурі $T_0 = 1000$К і тиску p_0 = 0,1 Па. Відкачана до глибокого вакууму посудина об'ємом V = 1 л знаходиться всередині великої посудини. У стінці маленької посудини відкривається клапан площею S = 1 мм^2, а через час $\tau = 0{,}01$с він закривається. Оцініть тиск і температуру всередині маленької посудини після того, як у ньому все заспокоїться. Стінки маленької посудини дуже тонкі, але їх теплопровідність зовсім мала.

Розв'язок. Для початку оцінимо довжину вільного пробігу молекул у великій посудині. Концентрація молекул $n = \frac{p}{kT} \approx 10^{19}$м$^{-3}$ (оцінки будемо робити грубі — точні розрахунки в цій задачі є незадовільними). Уважаючи, що діаметр молекули гелію дорівнює $d = 2 \cdot 10^{-10}$м, для довжини вільного пробігу $\lambda = \frac{1}{\pi d^2 n} \approx 1$м. При такій великій довжині вільного пробігу молекули влітають у посудину практично не вдаряючись між собою і робота навколишнього газу над влітаючими порціями відсутня. Здавалося б, енергія молекул усередині посудини повинна дорівнювати середньому значенню зовнішньої енергії, однак частка швидких молекул серед тих, які влітають у посудину помітно вище, ніж зовні, – швидкі молекули за заданий час влітають у посудину з більших відстаней, ніж повільні. Розрахунок провести тут не просто – потрібно враховувати частку молекул з певними швидкостями (розподіл молекул за швидкостями). Можна зробити, наприклад, грубу оцінку: будемо вважати, що влітають у посудину молекули з середніми енергіями, але швидкі молекули їх «підганяють». Оцінимо тиск тільки швидких молекул як половину повного тиску (строго кажучи, їх внесок вище, але частка швидких молекул у загальній кількості невелика). Тоді «додаток» до середньої енергії молекул, що увійшли в посудину об'єму V складе $0{,}5pV = 0{,}5\nu RT$, тобто можна сказати, що енергія зросте в $4/3$ рази. Це означає, що температура газу в посудині опиниться в цю ж кількість разів більше (найцікавіше, що точна оцінка дає такий же результат!) і складе $T \approx$ 1333 К. Кількість молекул, які влетіли, можна оцінювати будь-яким способом – через переданий імпульс, просто кінематично тощо, вийде приблизно 10^{14} молекул. При цьому тиск у посудині виявиться порядку 0,001 Па. Це істотно менше тиску зовні, так що зворотним потоком молекул з внутрішній посудини назовні можна знехтувати.

2.3.5. Завдання з повітряними кулями

Задачі про повітряні кулі можна розділити на два типи: 1) задачі, у яких треба знайти зв'язок між габаритами і наповненням кулі та підйомною силою, що діє на кулю біля поверхні Землі; 2) задачі, у яких треба визначити максимальну висоту підйому кулі; при цьому задається яка-небудь модель атмосфери, тобто закон зміни тиску і температури з висотою. По суті, задачі обох типів – це задачі на статику. Для їх розвязку треба вміти застосовувати рівняння стану газів і знайти умову рівноваги кулі, на яку діє сила тяжіння Землі і виштовхуюча сила з боку повітря, що оточує кулю. Якщо виштовхуюча сила більше сили тяжіння (різницю цих сил називають підйомною силою), куля піднімається вгору. Але при підйомі кулі зменшується густина навколишнього повітря, а, отже, зменшується і виштовхуюча сила, за законом Архімеда рівна

$$F = \rho g V,$$

де ρ – густина повітря, а V - об'єм кулі.

На деякій висоті виштовхуюча сила виявиться рівною силі тяжіння – це і буде максимальною висотою підйому кулі. Розберемо тепер декілька конкретних завдань.

2.3.69. Сферична оболонка повітряної кулі зроблена з матеріалу, квадратний метр якого має масу $b = 1$ кг/м^2. Куля наповнена гелієм при нормальному атмосферному тиску. При якому мінімальному радіусі куля піднімає сама себе? Температура гелію і температура навколишнього повітря однакові та рівні 0^0C Молекулярна маса повітря 29 кг/кмоль, молекулярна маса гелію 4 кг/кмоль.

Розв'язок. При збільшенні радіусу кулі виштовхуюча сила зростає пропорційно кубу радіуса, а вага оболонки - пропорційно квадрату радіуса. Отже, виштовхуюча сила зростає швидше і, починаючи з якогось значення радіуса, стане більше, ніж вага оболонки. Тоді куля почне підніматися. Позначимо цей радіус оболонки через r. При цьому

$$\rho_{пов} g \frac{4}{3}\pi r^3 = bg4\pi r^2 + \rho_{He} g \frac{4}{3}\pi r^3,$$

звідки

$$r = 3\frac{b}{\rho_{пов} - \rho_{He}}.$$

Густину повітря $\rho_{пов}$ і гелію ρ_{He} за даних умов знайдемо за допомогою закону Менделєєва - Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$:

$$\rho_{пов} = \frac{m}{V} = \frac{p\mu_{пов}}{RT}; \quad \rho_{He} = \frac{p\mu_{He}}{RT}; \quad \rho_{пов} - \rho_{He} = \frac{p(\mu_{пов} - \mu_{He})}{RT}.$$

Остаточно отримуємо

$$r = 3\frac{bRT}{p(\mu_{пов} - \mu_{He})} \approx 2{,}8 \text{ м}.$$

2.3.70. Об'єм повітряної кулі рівний $V = 230$ м^3, маса оболонки $M = 145$ кг. Куля наповнена гарячим повітрям при нормальному атмосферному тиску. Яку температуру повинно мати повітря всередині оболонки, щоб куля почала підніматися? Температура зовнішнього повітря $t_0 = 0^0$С.

Розв'язок. При нагріванні повітря його густина зменшується, оскільки $\rho = \dfrac{p\mu}{RT}$. Куля почне підніматися, якщо $\rho_0 gV \geq Mg + \rho gV$ (ρ_0 – густина зовнішнього повітря). Підставляючи вирази для густини зовнішнього повітря і повітря всередині кулі ρ, отримуємо

$$\frac{pV\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \geq M.$$

Звідки

$$1 - \frac{T_0}{T_{min}} = \frac{MRT_0}{\mu pV} \approx 0{,}5.$$

Отже,

$$T_{min} \approx 2T_0 = 546\,\text{К} = 273^0\text{С}.$$

2.3.71. Для утримання на поверхні Землі метеорологічної кулі-зонду з масою $M = 20$ кг необхідно прикласти силу $F = 1000$ Н. Куля піднімається до такої висоти, де її об'єм збільшується в два рази. Температура повітря, виміряна на цій висоті за допомогою зонду, виявилася рівною $t = -43^0$С. Обрахувати тиск повітря на цій висоті, якщо на поверхні Землі тиск p_0 = 754 мм рт. ст., а температура $t_0 = +17^0$С.

Розв'язок. Умова рівноваги кулі біля поверхні Землі записується так:

$$F = \rho_0 gV - Mg. \qquad (1)$$

де V — об'єм кулі біля поверхні Землі, а $\rho_0 = \dfrac{p_0\mu}{RT}$ — густина повітря. При цьому маса кулі M включає масу оболонки, приладів і газу, який знаходиться всередині оболонки. З умови відомо, що об'єм кулі при підйомі збільшується. Отже, оболонка кулі м'яка і герметична. Об'єм збільшується тому, що при м'якій оболонці тиск газу всередині має бути таким же, як тиск навколишнього повітря, який зменшується з висотою. Якщо оболонка герметична, маса кулі не змінюється при підйомі й максимальна висота її підйому визначається умовою

$$\rho g \cdot 2V = Mg, \qquad (2)$$

де $\rho = \dfrac{p\,\mu}{RT}$.

Розв'язуючи спільно рівняння (1) і (2), знаходимо

$$p = p_0\frac{T}{2T_0(1 + F/Mg)} \approx 10^4\,\text{Па}.$$

2.3.72. Куля-зонд, наповнена воднем, має герметичну оболонку постійного об'єму $V = 50$ м^3. Маса кулі разом з воднем M =5 кг Визначити, на яку максимальну висоту вона зможе піднятися, якщо відомо, що атмосферний тиск зменшується в два рази через кожні h = 5 км висоти. Температура в стратосфері t = - 60^{0}С. Молекулярна маса повітря 29 кг/кмоль. Тиск біля поверхні Землі p_0 = 1 атм

Розв'язок. На максимальній висоті виштовхуюча сила дорівнює вазі кулі-зонду:

$$\rho g V = Mg.$$

Виразивши густину навколишнього повітря через тиск і температуру, отримаємо

$$M = \frac{\mu p}{RT} V.$$

Отже, тиск повітря на цій высоті дорівнює

$$p = \frac{MRT}{\mu V} \approx 6{,}12 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Подивимося тепер, у скільки разів тиск p менше тиску біля поверхні Землі p_0:

$$\frac{p_0}{p} \approx 16.$$

З умови задачі відомо, що тиск падає в два рази через кожні 5 км підйому, тобто

$$\frac{p_0}{p} = 2^{H/h},$$

де H — висота підйому, а h = 5 км.

У нашому випадку

$$2^{H/h} = 16 = 2^4.$$

Звідки

$$H = 4h = 20\,\text{км}.$$

2.3.73. Нерозтяжна оболонка кулі-зонда об'єму V = 75 м^3 має в нижній частині невеликий отвір. Маса оболонки m = 7 кг. Куля наповнена воднем. Визначити, на яку максимальну висоту зможе піднятися ця куля-зонд, якщо відомо, що атмосферний тиск зменшується в два рази через кожні h = 5 км висоти. Температура повітря в стратосфері t = -60^{0}С, температура водню дорівнює температурі навколишнього повітря. Тиск біля поверхні Землі p_0 = 1 атм.

Розв'язок. Це завдання відрізняється від попереднього тим, що оболонка кулі не герметична, а має отвір. Отже, тиск усередині кулі увесь час дорівнює тиску в атмосфері, і при збільшенні висоти підйому кулі водень витікає з отвору. Будемо вважати, що підйом відбувається досить швидко і можна нехтувати дифузією повітря всередину оболонки, тоді умова рівноваги кулі на максимальній висоті

$$mg + \rho_{H_2} g V = \rho_{пов} g V.$$

Густину водню і повітря можна знайти з рівняння Менделєєва - Клапейрона:

$$\rho_{H_2}=\frac{p\mu_{H_2}}{RT},\qquad \rho_{пов}=\frac{p\mu_{пов}}{RT}.$$

Отже, тиск на максимальної висоті

$$p=\frac{mRT}{\left(\mu_{пов}-\mu_{H_2}\right)V}\approx 6{,}12\cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Відношення

$$\frac{p_0}{p}\approx 16,$$

тобто висота підйому $H = 20$ км. Висота підйому в цьому завданні є такою ж, як для герметичної кулі в завданні 2.3.73, але не слід забувати, що ми розглядали різні кулі, з різними об'ємами і масами. А якщо обидві кулі абсолютно однакові й відрізняються тільки тим, що в одного оболонка герметична, а в іншого має отвір, – яка з куль підніметься вище в цьому випадку? Виштовхуюча сила буде однакова для обох куль, оскільки їх об'єми рівні. Якщо початкові маси куль були однакові, то після підйому куля з отвором виявиться легша, оскільки частина газу, що наповнює його, витече при підйомі. Отже, куля з отвором зможе піднятися на більшу висоту.

Зазвичай людині, що вперше замислилася над цим питанням, такий результат здається дивним. Часто ставлять питання: "Як взагалі в кулі з отвором виникає підйомна сила? Адже знизу, там де отвір, повітря і газ усередині кулі знаходяться в рівновазі". Давайте розглянемо верхню точку кулі. Якщо в нижній точці кулі тиск повітря і газу рівний p_0, у верхній точці тиск повітря

$$p_1 = p_0 - \rho_{пов}gh,$$

а тиск газу всередині кулі у верхній точці

$$p_2 = p_0 - \rho_г gh.$$

(h – висота кулі). Якщо $\rho_г < \rho_{пов}$, то $p_2 > p_1$ і, отже, на оболонку знизу діє більша сила, ніж згори - виникає підйомна сила. Саме ця різниця тисків і дає результуючу виштовхуючу силу, яка визначається законом Архімеда. Подив часто виникає тому, що при розрахунках густини газу всередині кулі зазвичай вважають тиск у кулі всюди однаковим. Не треба забувати, що це усього лише наближення. Якщо ми визначаємо саму величину

$$p_2 = p_0 - \rho_г gh,$$

то, оскільки h мало — всього декілька метрів

$$\rho_г gh \ll p_0,$$

і можно взяти $p_г \approx p_0$. Якщо ж нас цікавить різниця

$$p_2 - p_0 = \rho_г gh - \rho_{пов}gh,$$

то тут обидва члени однакові по порядку величини, і враховувати їх потрібно обоє. До речі сказати, те, що ми вважаємо $\rho_{пов}$ і $\rho_г$ постійними, - теж наближення, насправді вони зменшуються з висотою при зменшенні тиску. Але врахування цієї обставини дало би значно меншу поправку до виштовхуючої сили, цією поправкою можна знехтувати.

2.3.74. Різниця між тиском усередині та зовні гумової кульки зросла на α_1 %, а радіус при цьому збільшився на q_1 %. На скільки відсотків зросте радіус кульки, якщо різниця між тиском усередині та зовні кульки зросте на α_2 %?

Розв'язок. У разі гумової кульки σ, тобто сила пружності, що діє на одиницю довжини межі гумової плівки, не буде постійною величиною, незалежною, як у разі мильного міхура, від його радіусу.

Знайти залежність $\sigma(R)$ важко. Припускатимемо, що зміна радіусу кульки мала в порівнянні з самим радіусом і зміна різниці тиску всередині й зовні кульки теж мала в порівнянні з самою цією різницею. Це означає, що $q_1 << 100$, $q_2 << 100$, $\alpha_1 << 100$ і $\alpha_2 << 100$ (q_2 %. – зміна радіусу кульки в другому випадку). Зміна радіусу кульки залежить від зміни різниці тиску. Це означає, що q є функцією α: $q = q(\alpha)$. Що можна сказати про графік функції $q(\alpha)$? При $q = 0$ $\alpha = 0$; отже, крива $q(\alpha)$ проходить через початок координат. Фізично зрозуміло, що ця крива при малих α не має вертикальних стрибків. При достатньо малих α дійсний графік залежності $q(\alpha)$. З хорошим наближенням можна замінити графік прямої - дотичній до графіка на початку координат. Тобто залежність $q(\alpha)$ можна вважати лінійною:

$$q = k\alpha,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Згідно умові

$$q_1 = k\alpha_1, \quad (1)$$

$$q_2 = k\alpha_2. \quad (2)$$

Розділивши (2) на (1), отримаємо

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Звідси

$$q_2 = q_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

2.3.75. Гумова оболонка повітряної кульки має масу $m = 3$ г. Оболонку заповнюють пальним газом – метаном CH_4, який має кімнатну температуру. При якому діаметрі кулька з метаном почне "спливати" в повітрі? Різницею тисків всередині кульки і зовні можна знехтувати.

Розв'язок. Оскільки в умові пропонується знехтувати відмінністю тиску газу всередині кульки і зовні, то при одній і тій же (кімнатної) температурі $T \approx 300$ К зовні та всередині кулька з метаном почне всплювати в повітрі за умови рівності нулю суми всіх сил, що діють на ней з боку Землі та навколишнього повітря. Це станеться при рівності середньої густини кульки з метаном і густини повітря. Густина газу з молярною масою M при атмосферному тиску $p \approx 10^5$ Па і температурі $T \approx 300$ K знаходиться з закону Менделєєва-Клапейрона: $\rho = \dfrac{Mp}{RT}$. Об'єм кульки V виражається через його діаметр D формулою $V = \pi D^3/6$. Середнє значення молярної маси повітря $M_{пов} = 0{,}029$ кг/моль, а значення молярної маси метану $M_м = 0{,}016$ кг/моль. Звідси випливає

$$\frac{pM_м}{RT} + \frac{m}{\pi D^3/6} = \frac{pM_{пов}}{RT},$$

або

$$D = \sqrt[3]{\frac{6mRT}{\pi p(M_{пов} - M_м)}} \approx 23\,см.$$

2.3.76. На скільки градусів треба нагріти повітря всередині повітряної кулі, щоб вона піднялася в повітря? Об'єм оболонки кулі 525 м^3, маса 10 кг. Атмосферний тиск p = 765 мм. рт. ст., температура повітря 27^{0}C, молярна маса повітря μ = 29 г/моль. Оболонка повітряної кулі нерозтяжна та має в нижній частині невеликий отвір.

Розв'язок. На повітряну кулю діють сила тяжіння та сила Архімеда. Щоб ця куля злетіла, необхідно, щоб сила Архімеда була більшою ніж сила тяжіння, що діє на оболонку кулі та на масу нагрітого повітря в оболонці:

$$\rho_{повітря} Vg > (m_{обол} + m_{горячпов.})g. \qquad (1)$$

Масу витіснену повітряною кулею $\rho_{повітря}V$ та масу горячого повітря $m_{горячпов.}$ знайдемо з закону Менделєєва-Клапейрона:

$$\rho_{повітря}V = \frac{\mu pV}{RT_1}, \; m_{горячпов.} = \frac{\mu pV}{RT_2}. \qquad (2)$$

Оскільки повітряна куля в нижній частині має отвір, то тиск нагрітого повітря та атмосферний тиск однакові, але температура різна.

Підставимо (2) в (1):

$$\frac{\mu pV}{RT_1} g > m_{обол} g + \frac{\mu pV}{RT_2} g$$

та після перетворень отримаємо

$$T_2 - T_1 > \frac{RT_1^2 m_{обол}}{\mu pV - RT_1 m_{обол}} = \frac{8{,}31 \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot 10}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 765 \cdot 133{,}3 \cdot 525 - 8{,}31 \cdot 300 \cdot 10} = 5\text{K}.$$

2.3.77. Який вантаж може підняти в перший момент повітряна кулька, що винесена з теплої кімнати (+27^{0}C) на мороз (-23^{0}C). Діаметр кульки 40 см, маса гумової оболонки 2 г.

Розв'язок. На повітряну кулю діють напрямлені вниз: 1) сила тяжіння, що діє на повітря, яке знаходиться в кулі $\rho_{27}Vg$, 2) сила тяжіння, що діє на речовину, з якої зроблена куля $m_к g$, 3) сила тяжіння, що діє на вантаж $m_в g$, та

4) угору направлена сила Архімеда $F_A = \rho_{-23}Vg$. Щоб ця куля злетіла, необхідно, щоб сила Архімеда була не меншою ніж сума сил тяжіння:

$$\rho_{-23}Vg \geq \rho_{27}Vg + m_к g + m_в g. \quad (1)$$

З закону Менделєєва-Клапейрона густина теплого та холодного повітря:

$$\rho_{27} = \frac{\mu p_1}{RT_1}, \quad \rho_{-23} = \frac{\mu p_2}{RT_2}. \quad (2)$$

Оскільки повітряна куля зроблена з гуми, то тиск теплого повітря всередині кулі та атмосферний тиск однакові: $p_1 = p_2$.

Підставимо (2) в (1) та визначимо:

$$m_в = \rho_{-23}V - \rho_{27}V - m_к = \frac{\mu pV}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) - m_к.$$

З огляду на те, що об'єм кулі

$$V = \frac{\pi d^3}{6},$$

отримаємо

$$m_в = \frac{\mu\pi d^3\ p(T_1 - T_2)}{6RT_1T_2} - m_к = \frac{29\cdot10^{-3}\cdot3{,}14\cdot0{,}4^3\cdot10^5(300-250)}{6\cdot8{,}31\cdot300\cdot250} - 0{,}002 = 5{,}8\text{г}.$$

2.3.78. Аеростат, заповнений гелієм при тискові $p_1 = 10^5$ Па та температурі 300 К, може знаходитися на висоті 1,5 км, де густина повітря на 20% менша, чим біля поверхні Землі. Знайти массу оболонки аеростата, якщо його о'бєм $V = 500$ м^3. Оболонка аеростата нерозтяжна.

Розв'язок. З рівняння стану отримаємо масу гелію в оболонці:

$$m_{He} = \frac{pV\mu_{He}}{RT}. \quad (1)$$

Сила тяжіння діє на газ, що знаходиться в оболонці аеростата, ($m_{He}g$), а також на оболонку аеростата ($m_{об}g$). Крім цих сил діє сила Архімеда ($\rho_{пов}gV$). За 2-м законом Ньютона, коли аеростат знаходиться біля поверхні Землі у стані рівноваги

$$m_{об}g + m_{He}g - \rho_{пов}gV = 0.$$

На висоті 1,5 км:

$$m_{об}g + m_{He}g - 0{,}8\cdot\rho_{пов}gV = 0.$$

Звідки

$$m_{об} = 0{,}8\cdot\rho_{пов}V - \frac{pV\mu_{He}}{RT} =$$

$$= 0{,}8\cdot1{,}29\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot500\text{м}^3 - \frac{10^5\cdot500\text{м}^3\cdot4\cdot10^{-3}\text{кг/моль}}{8{,}31\cdot300\text{К}} = 435{,}8\text{ кг}.$$

2.3.79. Якось уранці граф фон Цепелін мав вирушити в подорож на щойно сконструйованому ним дирижаблі. Дирижабль приготували до подорожі звечора, поклавши стільки баласту, що він нерухомо висів у повітрі, але забули прив'язати його до землі. Уночі вітру не було, атмосферний тиск (10^5 Па) не змінився, але температура знизилася з 25^0С до 20^0С. Знайдіть мінімальну відстань між графом та його дирижаблем, тобто висоту, на якій останній висітиме в повітрі. На відміну від повітряної кулі дирижабль має жорстку оболонку.

Розв'язок. Дирижабль перебуває в рівновазі, тобто його середня густина дорівнює густині повітря біля поверхні Землі. Для повітря, що знаходиться в дирижаблі, рівняння стану:

$$\rho = p\frac{\mu}{RT},$$

де R – універсальна газова стала.

При зниженні температури без зміни тиску густина повітря біля поверхні Землі збільшиться. Це збільшить виштовхувальну силу і дирижабль почне підніматися, доки досягне висоти, на якій густина повітря в дирижаблі і густина повітря зовні знову будуть зрівноважені.

Скористаємося барометричною формулою для залежності густини повітря ρ від висоти h для ідеалізованої ізотермічної атмосфери

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}},$$

де p_0 і ρ_0 – атмосферний тиск і густина повітря на поверхні землі.

Густина повітря в дирижаблі залишається сталою (оболонка жорстка), тому знайдемо висоту його підняття з рівняння

$$\rho = \frac{p_1\mu}{RT_1}e^{-\frac{\mu g h_1}{RT_1}} = \frac{p_0\mu}{RT_0}e^{-\frac{\mu g h_0}{RT_0}},$$

де T_0, T_1, і P_0, P_1 вечірні та вранішні температури на атмосферний тиск на поверхні Землі, h_0 – початкова висота ($h_0 = 0$).

З останньої формули висота:

$$h = -\frac{RT_1}{\mu g}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\frac{p_0}{p_1}\right) + \frac{T_1}{T_0}h_0.$$

Враховуючи, що тиск на поверхні землі не змінюється ($p_0 = p_1$), $h_0 = 0$, висота, на яку піднімається ввечері дирижабль,

$$h = -\frac{RT_1}{\mu g}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \approx 145\text{м}.$$

2.3.80. Повітряна кулька, заповнена гелієм на поверхні землі при атмосферному тискові p_0, має об'єм V_0. Кульку відпустили. На великій висоті, де тиск удвічі менший, ніж біля поверхні землі, об'єм кульки збільшився на 25 %, і вона луснула. Знайти, яку максимальну напругу може витримати матеріал оболонки кульки. Оболонка виготовлена з еластичного матеріалу, густина якого практично не залежить від розтягу і дорівнює ρ. Маса оболонки дорівнює m. Вважати температуру всюди однаковою. Кулька зберігає сферичну форму.

Розв'язок. Для гелію в кульці

$$p_0V_0 = p\cdot 1{,}25V_0;\ p = 0{,}8p_0.$$

Тиск, створюваний оболонкою,

$$p_{об} = 0{,}8p_0 - 0{,}5p_0 = 0{,}3p_0.$$

Для частини оболонки у вигляді півкулі

$$0{,}3p_0\cdot \pi R_1^2 = 2\pi R_1\sigma d,$$

σ — напруга в матеріалі оболонки; d — товщина оболонки. Урахувавши, що

$$m = 4\pi R_1^2\rho d,$$

дістанемо

$$\sigma_M = \frac{9\rho}{16m}p_0V_0.$$

2.3.6. Завдання з трубками

2.3.81. У запаяній з одного кінця вузькій скляній трубці, розташованій горизонтально, знаходиться стовпчик повітря завдовжки $l_1 = 30{,}7$ см, замкнутий стовпчиком ртуті завдовжки $l = 21{,}6$ см. Якою буде довжина повітряного стовпчика, якщо трубку поставити вертикально: отвором вгору; отвором вниз? Атмосферний тиск $p_{атм} = 747$ мм рт. ст.

Розв'язок. Коли трубка розташована горизонтально (рис. 1 *а*), об'єм повітря в закритій частині трубки і його тиск можна записати так:

$$V_1 = l_1S,\quad p_1 = p_{атм},$$

де S — площа поперечного перерізу трубки. Коли трубка розташована отвором вгору (рис. 1 б), то об'єм повітря в закритій частині трубки і його тиск рівні відповідно:

$$V_2 = l_2S,\quad p_2 = p_{атм} + \rho gl,$$

де ρ — густина ртуті.

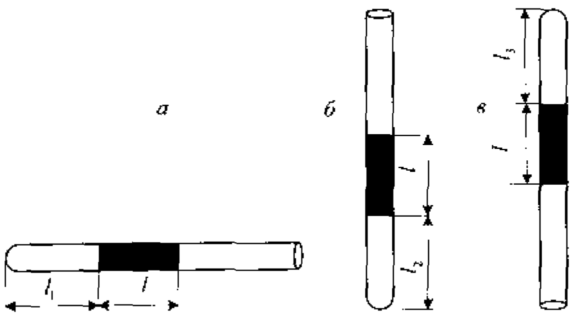


Рис. 1

Оскільки маса і температура повітря не змінюються, то, згідно із законом Бойля – Маріотта,

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

або

$$p_{атм}l_1S = (p_{атм} + \rho gl)l_2S.$$

Звідси

$$l_2 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} + \rho gl}. \qquad (1)$$

Коли трубка розташована отвором вниз (рис. 1 в), то об'єм повітря в замкнутій частині і його тиск виразяться так:

$$V_3 = l_3S, \quad p_3 = p_{атм} - \rho gl.$$

За законом Бойля — Маріотта

$$p_1V_1 = p_3V_3 \text{ або } p_{атм}l_1S = (p_{атм} - \rho gl)l_3S.$$

Звідси

$$l_3 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} - \rho gl}. \qquad (2)$$

Підставимо числові значення, з урахуванням $\rho = 13600$ кг/м^3, та знайдемо:

$$l_2 = \frac{747\cdot 133\cdot 30{,}7\cdot 10^{-2}}{747\cdot 133 + 13{,}6\cdot 10^3\cdot 9{,}8\cdot 21{,}6\cdot 10^{-2}} \approx 23{,}8\cdot 10^{-2}\,\text{м},$$

$$l_3 = \frac{747\cdot 133\cdot 30{,}7\cdot 10^{-2}}{747\cdot 133 - 13{,}6\cdot 10^3\cdot 9{,}8\cdot 21{,}6\cdot 10^{-2}} \approx 43{,}2\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

Примітка. Розрахункові формули (1) і (2) можна спростити, виразивши тиск стовпа ртуті заввишки l і атмосферний тиск в см рт. ст. Тоді

$$l_2 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} + l} = \frac{74{,}7\cdot 30{,}7}{74{,}7 + 21{,}6} \approx 23{,}8\,\text{см};$$

$$l_3 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} - l} = \frac{74{,}7\cdot 30{,}7}{74{,}7 - 21{,}6} \approx 43{,}2\,\text{см}.$$

Проте, якби в трубці була не ртуть, а яка-небудь інша рідина, то таке спрощення неможливе. Таким чином, формули (1) і (2) є загальним розв'язком, придатним для будь-якої рідини.

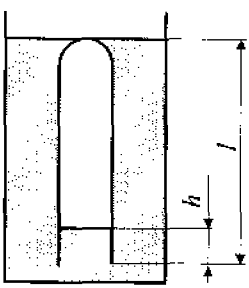


Рис. 1

2.3.82. Трубка довжиною l = 1,1 м, яка герметично закрита з одного боку, опускається у воду відкритим кінцем і плаває у вертикальному положенні, що забезпечується незначними боковими зусиллями. Трубку притопили, опустивши її закритий кінець до поверхні води (рис. 1) та утримують у новому вертикальному положенні. Знайти висоту шару води h, що знаходиться у трубці. Атмосферний тиск взяти рівним тиску, що створюється шаром води висотою $h_0 = 10{,}5$м. Тиском насиченої водяної пари знехтувати.

Розв'язок. Процес ізотермічний, тому

$$p_0V_0 = p_1V_1, \qquad (1)$$

де $p_0 = h_0 = 10{,}5$ м, $V_0 = l\,S$, $p_1 = h_0 + (l - h)$, $V_1 = (l - h)\,S$.
Підставимо ці значення в (1):

$$h_0\,l\,S = [\,h_0 + (l - h)]\,(l - h)\,S,$$

або

$$h^2 - (h_0 + 2l\,)\,h + l^2 = 0.$$

Корені цього рівняння

$$h_{1,2} = \frac{(h_0 + 2l) \pm \sqrt{(h_0 + 2l)^2 - 4l^2}}{2} = \frac{12{,}7 \pm \sqrt{12{,}7^2 - 4 \cdot 1{,}1^2}}{2} = \frac{12{,}7 \pm 12{,}5}{2} \text{ м.}$$

Фізичний зміст має лише $h = 0{,}1$ м.

2.3.83. Посередині запаяної з обох кінців горизонтальної трубки довжиною $L = 1$м знаходиться стовпчик ртуті довжиною $l = 20$ см. Якщо трубку поставити вертикально, стовпчик ртуті зміститься на $h = 10$см. Яким був тиск у горизонтальній трубці? Температуру вважати незмінною. Густина ртуті $\rho = 13600\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок. У горизонтальному положенні трубки тиск p_1 газу з лівого і з правого боку від стовпчика ртуті однаковий.

У вертикальному положенні тиск у верхній частині запаяної трубки стане:

$$p_в = p_1 - \rho g h.$$

У нижній частині трубки тиск стане

$$p_н = p_1 + \rho g h.$$

Процес ізотермічний, тому за законом Бойля – Маріотта:

$$p_1\frac{L - l}{2}S = p_в\left(\frac{L - l}{2} + h\right)S = p_н\left(\frac{L - l}{2} - h\right)S.$$

Звідки

$$p_1 = p_в\left(\frac{L - l}{2} + h\right)\frac{2}{L - l} = (p_1 - \rho g h)\left(\frac{L - l}{2} + h\right)\frac{2}{L - l}.$$

Розвязавши це рівняння знайдемо,

$$p_1 = \rho g h\left(\frac{L - l}{2h} - 1\right) = 13600 \cdot 10 \cdot 0{,}1\left(\frac{1 - 0{,}2}{2 \cdot 0{,}1} - 1\right) = 40800\text{Па}.$$

2.3.84. У довгій пробірці на відстані l_1 від запаяного кінця є короткий стовпчик ртуті (рис. 1). Маса ртуті m. З якою кутовою швидкістю ω потрібно обертати пробірку навколо вертикальної осі, щоб ртуть досягла кінця пробірки? Довжина пробірки l, температура повітря в пробірці не змінюється. Атмосферний тиск дорівнює p_0.

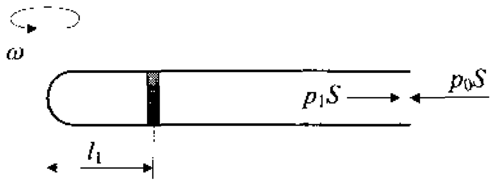


Рис. 1

Розв'язок. У нерухомій системі відліку на стовпчик ртуті в горизонтальному напрямку діють дві сили: сила атмосферного тиску $F_1 = p_0 S$ (S - площа перетину пробірки) і сила тиску повітря в пробірці $F_2 = pS$ (див. рис. 1). Різниця цих сил надає стовпчику ртуті доцентрового прискорення, рівного $a = \omega^2 l$ (тому що ртуть знаходиться на краю пробірки). Таким чином,

$$m\omega^2 l = p_0 S - pS.$$

Температура повітря в пробірці не змінюється, тому за законом Бойля-Маріотта

$$p_0 S l_1 = pSl.$$

Звідки

$$p = p_0 \frac{l_1}{l}.$$

Тоді

$$m\omega^2 l = p_0 S\left(1 - \frac{l_1}{l}\right)$$

і

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 (l - l_1)}{ml^2}}.$$

2.3.85. U- подібна трубка заповнена водою (рис. 1). З одного коліна повітря видалене; тиск повітря в іншому коліні при температурі 20^0С дорівнює атмосферному. Обидва кінці трубки запаяні. Різниця між рівнями води в колінах дорівнює 15 м. Якою стане різниця рівнів води в колінах, якщо трубку нагрівати до 100^0С?

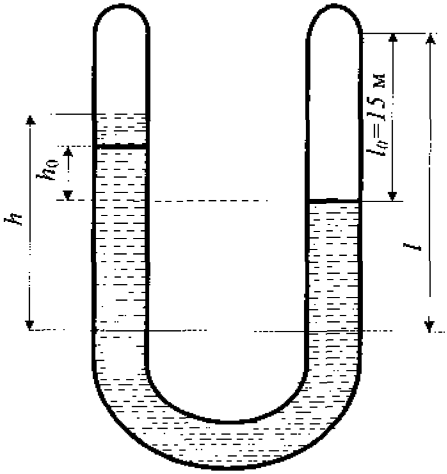


Рис. 1

Розв'язок. Тиск у лівому коліні дорівнює тиску насиченої пари. У правому ж коліні знаходиться як повітря, так і водяна пара, і тиск дорівнює сумі парціального тиску повітря і пари. Причому пара в правій посудині теж насичена, і її парціальний тиск дорівнює тиску пари в лівому коліні. Тому, розглядаючи рівновагу води, ми можемо не враховувати тиску пари в лівому і правому колінах.

Запишемо умову рівноваги води в трубці при $T_0 = 20^0$ C:

$$\rho g h_0 = p_0,$$

де $p_0 = 1$ атм.

Звідси

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g} \approx 10 \text{ м}.$$

При 100^0 C тиск повітря в правому коліні стане рівним p, а різниця рівнів води в колінах h. При цьому

$$\rho g h = p. \qquad (1)$$

Тиск p пов'язаний з p_0 об'єднаним газовим законом:

$$\frac{p_0 T_0}{T_0} = \frac{pV}{T}.$$

З рис. 1 видно, що

$$l - l_0 = \frac{1}{2}(h - h_0).$$

Оскільки $V_0 = l_0 S$, $V = lS$ (S — площа перерізу трубки), то звідси знайдемо

$$p = p_0 \frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l} = p_0 \frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}(h - h_0)},$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (1), отримаємо

$$h = \frac{p_0}{\rho g}\frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h} = h_0 \frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h}.$$

Уважаючи, що $\frac{1}{2}\Delta h << l_0$, отримаємо $h = h_0 \frac{T}{T_0} \approx 13$м; $\Delta h \approx 3$м, $\frac{1}{2}\Delta h \approx 1{,}5$м $<< l_0 =$ 15 м. Це означає, що, нехтуючи $\frac{1}{2}\Delta h$ по порівнянню з l_0, ми отримали результат, що мало відрізняється від точного.

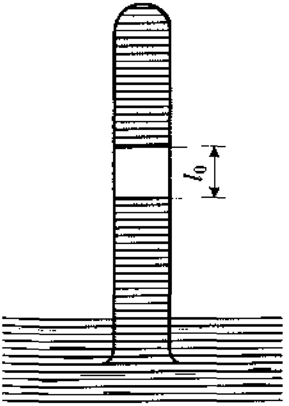


Рис. 1

2.3.86. Посередині барометричної трубки є стовпчик повітря (рис. 1). При температурі $t_0 = 0$°C довжина стовпчика дорівнює 10 см. Якою стане довжина стовпчика при $t = 20$°C?

Розв'язок. Тиск у стовпчику повітря дорівнює вазі стовпчика рідини над повітрям, поділеній на площу перетину трубки. При зміні температури зміниться і висота стовпчика рідини та його густина.

Але маса залишиться незмінною. Незмінним залишиться і вага стовпчика, отже, не зміниться і тиск повітря. Тому відношення об'ємів повітряного стовпчика при температурах $T = 293$ К і $T_0 = 273$ К дорівнює відношенню температур, і отже,

$$\frac{l}{l_0} = \frac{T}{T_0}.$$

Звідси

$$l = l_0 \frac{T}{T_0} \approx 10{,}7\,\text{см}.$$

2.3.87. У вертикальній трубці довжиною $H = 152$ см, запаяній з нижнього кінця, є стовпчик повітря висотою $h = 76$ см, замкнений стовпчиком ртуті (рис. 1). Атмосферний тиск дорівнює 10^5 Па, а температура $t_0 = 17$°C. До якої температури t_1 слід нагріти повітря в трубці, щоб уся ртуть вилилася?

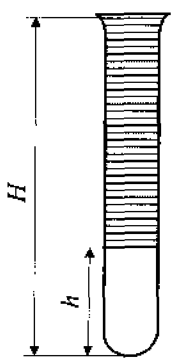


Рис. 1

Розв'язок. Початковий тиск повітря в трубці складається з гідростатичного тиску стовпчика ртуті висотою $H - h = 76$ см і тиску атмосфери. Атмосферний тиск за умовами 10^5 Па ≈ 76 мм рт.ст. Отже, початковий тиск повітря в трубці приблизно дорівнює подвоєному атмосферному тиску.

Будемо вважати, що витікання ртуті відбувається повільно, так що систему в кожен момент можна вважати такою, що знаходиться в стані рівноваги. У кінцевому стані, коли майже вся ртуть виллється, тиск повітря в трубці буде дорівнювати атмосферному, тобто вдвічі менше початкового. Об'єм же повітря HS (S - площа поперечного перерізу трубки) буде вдвічі більше початкового об'єму hS. Відповідно до рівняння стану ідеального газу це означає, що температура в кінцевому стані повинна бути такою ж, як і в початковому.

Зрозуміло, взагалі без підвищення температури ртуть виливатися з трубки не буде. Тому отриманий результат означає, що для відповіді на питання завдання не можна обмежитися розглядом тільки початкового і кінцевого станів, а потрібно простежити за всім процесом.

З'ясуємо, як повинна змінюватися температура повітря в трубці для того, щоб ртуть виливалася поступово і в кожен момент часу систему можна було вважати такою, що знаходиться в стані рівноваги.

Позначимо висоту стовпчика повітря в певний момент часу через z. Тоді тиск повітря в трубці $p(z)$ дорівнює

$$p(z) = p_0 + \rho g (H - z), \qquad (1)$$

де ρ - густина ртуті, а p_0 – атмосферний тиск, який за умовою завдання приблизно дорівнює тиску стовпчика ртуті висоти $H/2$:

$$p_0 = \rho g H / 2. \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$p(z) = \rho g\,(1{,}5H - z).$$

Оскільки ми припускаємо, що повітря в трубці знаходиться в стані термодинамічної рівноваги при будь-якому z, то тиск $p\,(z)$ повітря, об'єм Sz і температура $T\,(z)$ пов'язані рівнянням стану ідеального газу:

$$\frac{p(z)Sz}{T(z)} = \frac{2p_0SH/2}{T_0}, \tag{4}$$

де T_0 - початкова температура, $2p_0$ - початковий тиск повітря в трубці, $SH/2$ – початковий об'єм повітря. Підставляючи в (4) $p\,(z)$ з (3) і p_0 з (2) знаходимо залежність температури від висоти стовпчика повітря в трубці:

$$T(z) = T_0\,\frac{(3H-2z)z}{H^2}. \tag{5}$$

Графік функції $T\,(z)$ наведено на рис. 2.

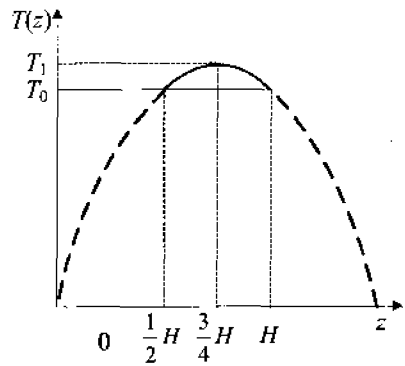


Рис. 2

Процесу виливання ртуті відповідає ділянка між точками $z = H/2$ і $z = H$, зображеному суцільною лінією. Видно, що для повільного (квазірівноважного) процесу температура повинна спочатку підвищуватися до значення $T_1 = (9/8)\ T_0$ (при цьому виллється половина початкової кількості ртуті), а потім знижуватися до початкового значення T_0. Тому для повного виливання ртуті повітря в трубці потрібно нагріти до температури $T_1 = 326$ К. Досягнувши цієї температури, потрібно зберегти контакт з нагрівачем, що має температуру T_1. Далі ртуть буде виливатися сама, причому цей процес вже не буде квазірівноважним.

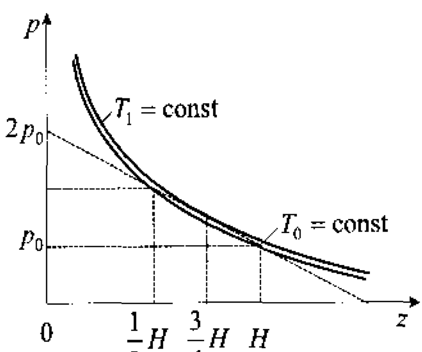


Рис.3

Щоб краще усвідомити це, корисно розглянути процес на p-V - діаграмі (рис. 3). Рівноважному процесу витікання ртуті відповідає лінійна залежність тиску повітря в трубці від z, що описується формулою (3) і показана суцільною прямою між значеннями $z = H/2$ і $z = H$. На цьому ж малюнку зображені ізотерми, що відповідають температурам T_0 і T_1. Початковий і кінцевий стани лежать на одній ізотермі. Видно, що при температурі вище T_1, жодна ізотерма не перетинає прямої $p(z)$, тобто рівновага повітря в трубці неможлива ні при якому значенні висоти стовпчика z. Тому, якщо температура повітря буде підтримуватися хоча б трохи вище значення T_1 вся ртуть неминуче буде виштовхнута повітрям з трубки.

2.3.88. У посудину, заповнену рідким ефіром, занурюють перевернуту пробірку A. З неї відразу ж починають виходити бульбашки. Бульбашки «збирають» у початково повністю заповнену ефіром пробірку B (рис. 1), довжина якої у два рази більше, ніж довжина пробірки A. При цьому з пробірки B витісняється 2/3 початкового об'єму ефіру. Температура в кімнаті підтримується рівною 20 С, тиск дорівнює нормальному атмосферному. Поясніть це явище і визначте за наявними в задачі даними тиск насичених парів ефіру при вказаній температурі.

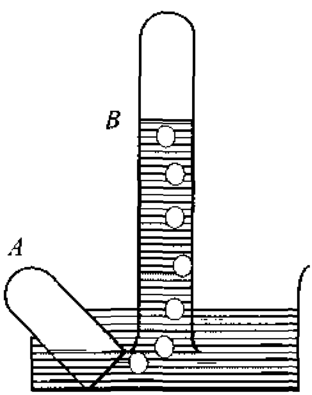


Рис. 1

Розв'язок. Відразу ж, як тільки порожню пробірку A опустили в посудину з ефіром, почалося випаровування ефіру всередину пробірки. Цей процес і призводить до появи пухирців, що виходять з пробірки A, – адже сумарний тиск повітря і парів ефіру має підтримуватися рівним атмосферному тиску p_0, (можна знехтувати збільшенням тиску через занурення пробірки в ефір – воно не перевищує декількох мм рт. ст.). Бульбашки перестануть виходити, коли припиниться випаровування ефіру всередину пробірки A, тобто коли тиск парів ефіру там стане рівним тиску насичених парів $p_н$, і сумарний тиск дорівнюватиме $p_н + p_п = p_0$, де $p_п$ тиск повітря. Аналогічна умова повинна виконуватися і у пробірці B. При цьому повітря, що займає у пробірці A об'єм V_0, у пробірці B буде займати об'єм $\frac{4}{3}V_0$. Користуючись законом Бойля -Маріотта, можемо записати:

$$p_0V_0 = p_п\left(V_0 + \frac{4}{3}V_0\right) = \frac{7}{3}p_пV_0,$$

звідки знаходимо $p_в = \frac{3}{7}p_0$. Тепер легко визначити тиск насичених парів ефіру:

$$p_н = p_0 - p_п = \frac{4}{7}p_0 \approx 430\text{мм рт. ст.}$$

2.3.89. У запаяному капілярі знаходиться рідина густиною ρ. При нагріванні капіляра на мале ΔT виявилося, що межа AB між рідиною і її парою (рис. 1) не зміщується. При цьому тиск пари зріс на Δp. Як змінилася густина рідини?

Розв'язок. З умови задачі випливає, що стану системи до і після нагрівання відповідає рівноважне співіснування рідини і її пари. Це означає, що на $p-T$- діаграмі обидва стани потрапляють на криву співіснування. Ця крива є залежністю тиску p насиченої пари від температури T, причому залежність ця монотонна (рис. 2). Дотичні до кривої $p(T)$ складають різні кути з віссю T. Виберемо ту точку на кривій, дотична в якій становить кут $\alpha = arctg\dfrac{\Delta p}{\Delta T}$ з віссю T. Значення p і T, що відповідають цій точці, однозначно визначають початкові тиск і температуру газу.

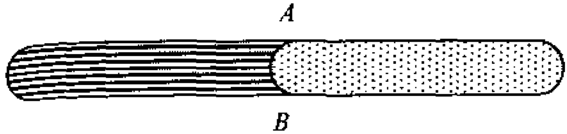


Рис. 1

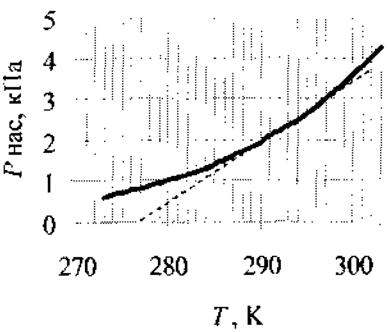


Рис. 2

При нагріванні рідина повинна була б розширюватися, тобто межа AB повинна була б рухатися вправо. Нерухомість межі *означає, що при нагріванні* випаровується така маса Δm рідини, що рідина густиною $\rho - \Delta\rho$, яка залишилася, займає колишній об'єм. Як видно з рис. 1, цей об'єм дорівнює об'єму, що займає пара.

Таким чином,

$$\Delta\rho = \frac{\Delta m}{V}. \tag{1}$$

Зміна тиску насиченої пари пов'язана зі збільшенням його температури на ΔT. З рівнянь стану пари при температурах T і $T+\Delta T$:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT; \quad (p+\Delta p)V = \frac{m+\Delta m}{\mu}R(T+\Delta T)$$

отримаємо:

$$\Delta pV = \frac{\Delta m}{\mu}RT + \frac{m}{\mu}R\Delta T + \frac{\Delta m}{\mu}R\Delta T.$$

Нехтуючи членом $\dfrac{\Delta m}{\mu}R\Delta T$ з урахуванням (1) знаходимо:

$$\Delta\rho = \frac{\Delta pT - p\Delta T}{T^2}.$$

2.3.90. Барометрична трубка занурена в посудину з ртуттю (рис. 1). Стовпчик ртуті в трубці має висоту $h_1 = 40$мм, а стовпчик повітря над ртуттю $h_2 = 19$см.

На скільки треба опустити трубку, щоб рівні ртуті в трубці та посудині були однакові? Ртуть у ртутному барометрі знаходиться на висоті $H = 760$мм.

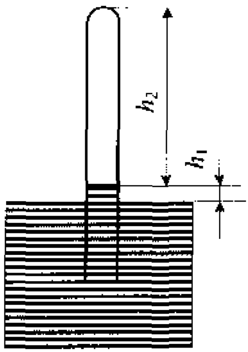


Рис. 1

Розв'язок. Коли ртуть у трубці вище на 4 см від рівня ртуті в посудині, повітря займає об'єм

$$V_1 = h_2 S,$$

тиск повітря в цьому ж об'ємі:

$$p_1 = H - h_1.$$

Коли занурюємо трубку так, щоб рівень ртуті в ній та рівень ртуті в посудині були однакові, то об'єм повітря в трубці буде:

$$V_2 = xS,$$

а тиск

$$p_2 = H.$$

Оскільки в результаті занурення трубки температура не змінювалась, то застосуємо закон Бойля-Маріота:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

тобто

$$(H - h_1) h_2 S = HxS,$$

де x – висота повітря в трубці.

З цього рівняння

$$x = \frac{(H - h_1) h_2}{H}.$$

Знайдемо різницю висот повітря в трубці до занурення трубки та після занурення:

$$\Delta h = h_2 - h_x = h_2 - \frac{(H - h_1) h_2}{H} = \frac{h_1 h_2}{H} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}19}{0{,}76} = 0{,}01\,\text{м}.$$

Висота стовпа повітря буде:

$$h_2' = 0{,}18\,\text{м}.$$

Отже, щоб рівень ртуті в посудині та в труці був однаковий, трубку слід опустити на величину:

$$h_1 + \Delta h = 0{,}05\,\text{м}.$$

2. 4. Ізопроцеси

2.4.1. Накреслити графіки зміни густини газу в ізобарному процесі і графік залежності густини газу від тиску в ізотермічному процесі.

Розв'язок. З рівняння Менделєєва - Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

враховуючи, що $m / V = \rho$, отримаємо вираз для густини газу:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \tag{1}$$

звідки

$$\rho T = \frac{p\mu}{R}.$$

При ізобаричному процесі (p = const) права частина рівності (1) є величина постійна. Отже, $\rho T = \text{const}$. Тому графік зміни густини газу в ізобаричному процесі матиме вигляд, показаний на рис. 1 *а*.

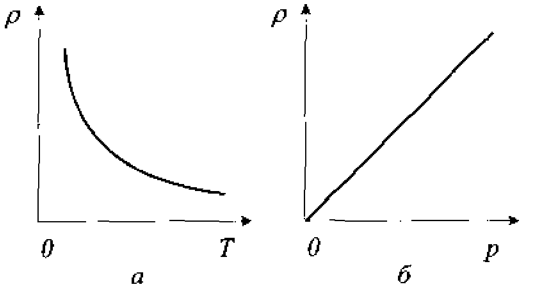


Рис. 1

Якщо процес ізотермічний, то з формули (1) отримаємо

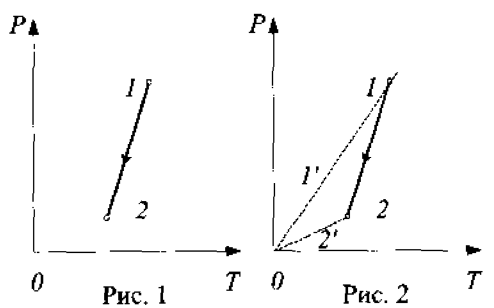
$$\frac{\rho}{p} = \frac{\mu}{RT}.$$

У цьому виразі права частина величина постійна при T = const, тому можна записати:

$$\frac{\rho}{p} = \text{const}.$$

Отже, графік залежності густини газу від тиску в ізотермічному процесі є прямою лінією (рис. 1 *б*).

2.4.2. Порівняйте об'єм даної маси ідеального газу в станах *1* і *2* (рис. 1).



Розв'язок. Проведемо ізохори 1′ і 2′ через стани *1* і *2* (рис. 2). З рівняння стану ідеального газу:

$$p = \frac{RT}{V} = \text{const} \cdot T$$

видно, що рівняння ізохори 1′ має більший коефіцієнт при *T* ніж ізохора 2′. Тобто у стані *1* об'єм газу менший.

2.4.3. Як змінювався тиск ідеального газу в ході процесу, графік якого зображено на рис. 1? Укажіть точки на графіку, що відповідають найбільшому та найменшому тиску.

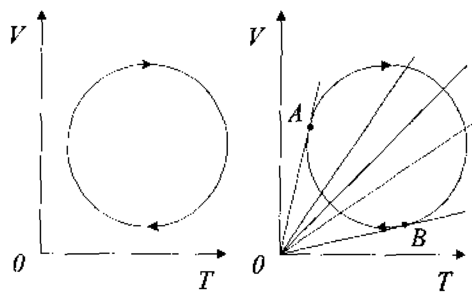


Рис. 1 Рис. 2

Розв'язок. Проведемо через різні точки графіка ізобари (рис. 2). Найбільшему тиску відповідає найнижча ізобара, тому найбільший тиск досягається в нижній точці торкання *B*. Найменший тиск відповідає верхній точці торкання *A*. При переході від точки *A* до точки *B* тиск газу зростає, а при переході від точки *A* до точки В тиск убуває.

2.4.4. Над масою ідеального газу виконали тепловий процес, залежність у якому об'єму від температури представлена графіком (рис. 1). Визначити зміну тиску в тепловому процесі при переході зі стану *1* в стан *2*.

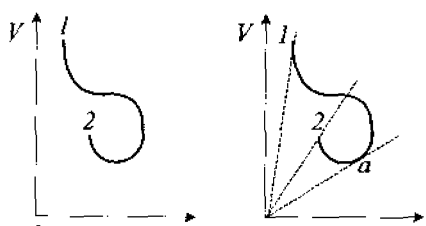


Рис. 1 Рис. 2

Розв'язок. Проведемо на графіку систему ізобар. У точках перетину ізобар з кривою *1-2* об'єми та температури на ізобарах та кривої співпадають. Значить співпадають і тиски. Нахил ізобар від точки *1* до точки *a* зменшується, тому тиск газу збільшується. Від точки *a* до точки *2* тиск газу зменшується.

2.4.5. На рис. 1 наведена ізотерма (*a*) для 1 моля газу при 260 К . Побудувати на одному і тому ж малюнку ізотерми для 1 моля газу при 390 К та для 2 моль при 260 К.

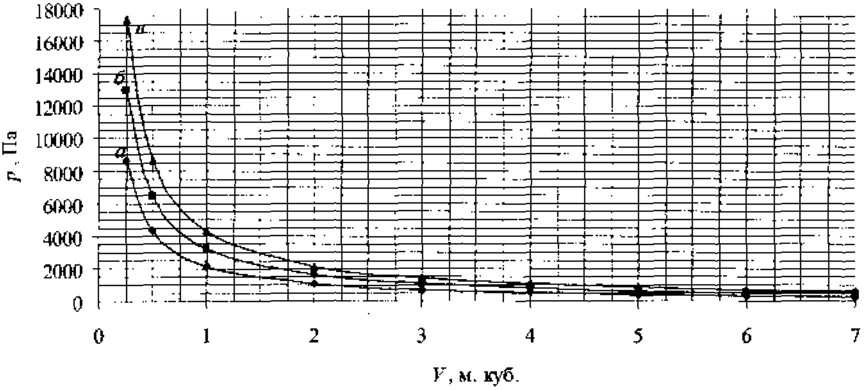


Рис. 1. Ізотерми ідеального газу:
a – 1 моль, 260 К, *б* – 1 моль, 390 К, *в* – 2 моля, 260 К

Розв'язок. З рівняння стану ідеального газу

$$pV = \nu RT$$

знайдемо залежність тиску від обєму газу:

$$p = \frac{\nu RT}{V}.$$

Визначимо з графіка (*a*) значення тиску $p_а$ для різних значень об'єму V та занесемо їх у табл. 1.

Збільшивши отримані значення $P_а$ у два рази отримаємо значення $P_в$ для 2-ох молів газу, який має температуру 260 К. За цими даними побудуємо ізотерму, помічену на графіку буквою *в*.

Збільшивши значення $P_а$ у $T_б$ / $T_а$ = 390 / 260 = 1,5 рази отримаємо значення $P_в$ для одного моля газу, який має температуру 390 К.

За даними табл. 1 будуємо на тому ж малюнку ізотерми (*б*) для 1 моля газу при 390 К, та (*в*) для 2 моль при 260 К.

Таблиця

V, м^3	$P_а$, Па	$P_б$, Па	$P_в$, Па
0,25	8642	12963	17285
0,5	4321	6482	8642
1	2160	3241	4321
2	1080	1620	2161
3	720	1080	1440
4	540	810	1080
5	432	648	864
6	360	540	720
7	308	463	617
8	270	405	540

2.4.6. На рис. 1 *а* наведено процес, який здійснюється газом у системі координат pT. Побудуйте цей процес у системах координат VT та pV.

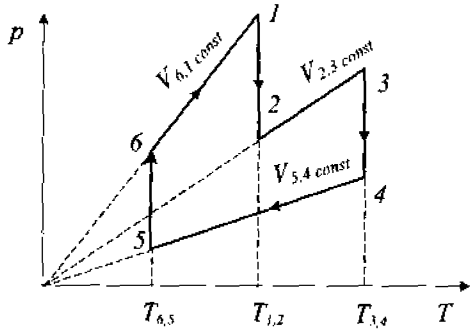
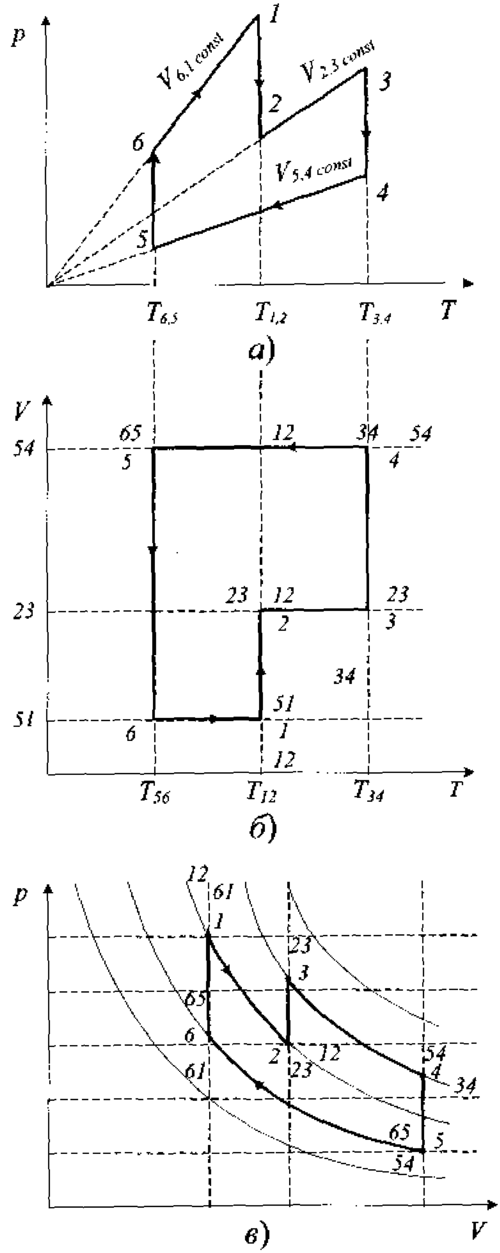


Рис. 1*а*)

Розв'язок. Ділянки *6-1*, *2-3*, *5-4* (рис. 1 *а*) відповідають ізохорним процесам, причому чим більше кут нахилу цих прямих, тим менше об'єми, тобто $V_{5-4} > V_{2-3} > V_{6-1}$. Позначимо ці лінії у координатах VT (рис. 1 *б*). Вертикальні прямі *6-5*, *1-2*, *3-4* відповідають постійним температурам, $T_{5-6} < T_{1-2} < T_{3-4}$. Позначимо точки перетину відповідних значень постійного об'єму та постійної температури процесів цифрою, що є загальною для цих перетинів, та з'єднаємо одержані точки. На осях PV (рис. 1 *в*) проведемо ізохори $V_{5-4} > V_{2-3} > V_{6-1}$ та ізотерми $T_{3-4} > T_{1-2} > T_{5-6}$.



p
1
V 6,1 const
V 2,3 const
2
3
6
V 5,4 const
4
5
T 6,5
T 1,2
T 3,4
T
а)
V
65
12
34
54
54
5
4
23
12
23
23
2
3
34
51
51
6
1
12
T 56
T 12
T 34
T
б)
p
12
61
1
23
3
65
6
2
12
54
4
61
23
34
65
5
54
в)
V

Рис. 1

Запишемо точки перетину цих ліній:

6-1 та *1-2* – точка *1*,
1-2 та *2-3* – точка *2*,
3-4 та *2-3* – точка *3*,
3-4 та *4-5* – точка *4*,
4-5 та *5-6* – точка *5*,
5-6 та *6-1* – точка *6*.

З'єднаємо ці точки вздовж вказаних ліній.

Цей метод подвійного позначення ліній процесу автоматично вказує напрям процесу при побудові його в інших осях.

2.4.7. Один моль газу, який займає об'єм $V_1 = 1\,л$ при тискові $p_1 = 10^5\,Па$, розширювався ізотермічно до об'єму $V_2 = 2л$. Потім при цьому об'єму тиск газу зменшили вдвічі. У подальшому газ розширювався при сталому тиску до об'єму $V_4 = 4л$. Накреслити графік цього процесу в координатах p, T і V, T.

Розв'язок. Для аналізу процесів використовуємо рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = RT.$$

На ділянці *1-2* ізотермічний процес ($T_1 = T_2$):

$$p_1V_1 = p_2V_2, \tag{1}$$

$$p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2} = \frac{10^5\,Па \cdot 10^{-3}\,м^3}{2 \cdot 10^{-3}\,м^3} = 0{,}5 \cdot 10^5\,Па.$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{R} = \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{8{,}31} = 12\,К. \tag{2}$$

На ділянці *2-3* ізохоричний процес ($V_2 = V_3 = 2 \cdot 10^{-3}м^3$):

$$p_2V_2 = RT_1,$$

$$p_3V_3 = RT_3$$

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3}. \tag{3}$$

За умовою задачі $P_3 = \frac{P_2}{2} = 0.25 \cdot 10^5\,Па$.

Тоді з (3)

$$T_3 = \frac{T_2 \cdot P_3}{P_2} = \frac{T_1 \cdot P_2}{P_2 \cdot 2} = \frac{T_1}{2}.$$

На ділянці *3-4* процес ізобаричний ($p_3 = p_4$):

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{T_3}{T_4}; \qquad T_4 = \frac{V_4 \cdot T_3}{V_3} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot T_1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = T_1.$$

Графіки цього процесу в координатах p, T і V, T наведено на рис. 1 та рис. 2.

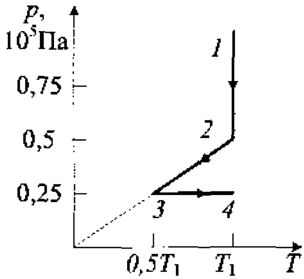


Рис. 1

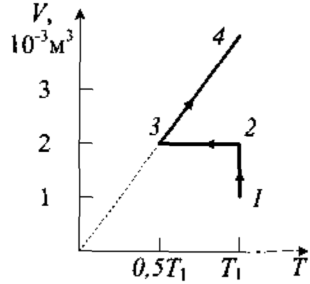


Рис. 2

2.4.8. За рис. 1 визначити тиск ідеального газу в станах *2* та *3*, якщо тиск у стані *1* дорівнює 10^5 Па. Побудувати графіки цього циклічного процессу в координатах *p*, *V* та *p*, *T*.

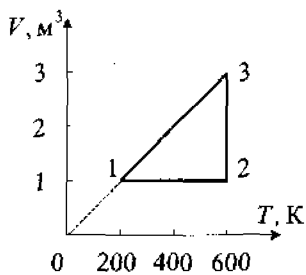


Рис.1

Розв'язок. На ділянці *1-2* процес ізохорний (V = const), тому

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

тобто

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = \frac{10^5 \cdot 600}{200} = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

На ділянці *2-3* процес ізотермічний (T = const), тому

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_2}{V_3},$$

тобто

$$p_3 = p_2 \frac{V_2}{V_3} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 1}{3} = 10^5 \text{ Па}.$$

На ділянці *3-1* процес ізобарний (p = const). Отже, у координатах *p*, *V* та *p*, *T* ці процеси будуть мати такий вигляд, як на рис. 2 та рис. 3, відповідно.

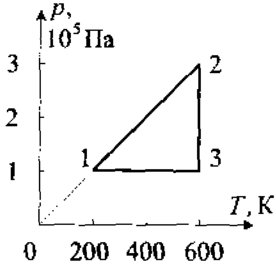


Рис. 2

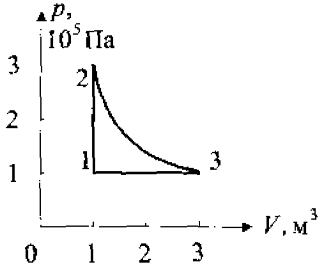


Рис. 3

2.4.9. На діаграмі залежності тиску P від об'єму V для деякої маси ідеального газу (рис. 1) дві ізотерми перетинаються з двома ізобарами в точках *1*, *2*, *3* та *4*. Знайти відношення температур у точках *3* і *1*, якщо відношення об'ємів у цих точках $V_3/V_1 = \alpha$. Об'єми газу в точках *2* і *4* – однакові.

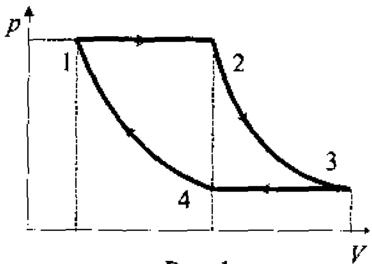


Рис. 1

Розв'язок. Для точок *1*, *2*, *3* та *4* даної діаграми запишемо:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3} = \frac{p_4V_4}{T_4}. \qquad (1)$$

З умови задачі видно, що:

$$\begin{aligned} T_1 = T_4,\ T_2 &= T_3, \\ V_2 &= V_4, \\ p_1 &= p_2, \\ p_3 &= p_4, \\ V_3/V_1 &= \alpha. \end{aligned} \qquad (2)$$

Рівняння (*1*) перепишемо з урахуванням (*2*)

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_1V_2}{T_3} = \frac{p_3V_3}{T_3} = \frac{p_3V_2}{T_1}. \qquad (3)$$

Тобто

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}, \qquad (4)$$

$$V_2 = \frac{p_3 V_3 T_1}{p_3 T_3}. \qquad (5)$$

Рівняння (4) з урахуванням (5) матиме вигляд:

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_1 V_3}{T_3 V_1},$$

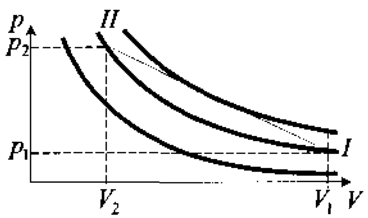
звідки:

$$\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^2 = \frac{\alpha V_1}{V_1} = \alpha.$$

Отже,

$$\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{\alpha}.$$

2.4.10. 20 г гелію, який знаходиться в циліндрі під поршнем, дуже поволі переводять зі стану I в стан II. Якої найбільшої температури досягне газ при цьому процесі, якщо графік залежності тиску від об'єму - пряма лінія, причому $p_1 = 4{,}1$ атм, $V_1 = 32$ л, $p_2 = 15{,}5$ атм, $V_2 = 9$ л.



Розв'язок. Нанесемо на графік сітку ізотерм – гіпербол

$$pV = \mathrm{const}\frac{m}{\mu}RT.$$

Чим вище температура газу, тим далі знаходиться вершина гіперболи від початку координат. Тому ясно, що під час процесу I-II газ досягає такої найбільшої температури, при якій відповідна гіпербола не перетинає пряму I-II, а *тільки торкається її*.

Оскільки точка з координатами P і V, відповідна максимальній температурі, лежить як на гіперболі, так і на прямій, то її координати повинні задовольняти двом рівнянням: рівнянню гіперболи

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

і рівнянню прямої

$$p = \alpha V + \beta$$

(α й β - деяки постійні).

Підставляючи p з другого рівняння в перше, отримаємо квадратне рівняння для V:

$$\alpha V^2 + \beta V - \frac{m}{\mu} RT = 0.$$

Оскільки гіпербола і пряма повинні мати лише одну загальну точку, то це рівняння може мати тільки один корінь, тобто його детермінант має дорівнювати нулю:

$$\beta^2 - 4\alpha \frac{m}{\mu} RT = 0.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно T, знайдемо

$$T = -\frac{\beta^2 \mu}{4\alpha m R}.$$

У цей вираз потрібно підставити значення коефіцієнтів α і β. Оскільки точки I і II належать одній і тій же прямій $p = \alpha V + \beta$, то $p_1 = \alpha V_1 + \beta$ і $p_2 = \alpha V_2 + \beta$. Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо

$$\alpha = -\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}; \ \beta = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}.$$

Тому

$$T = \frac{(p_2 V_1 - p_1 V_2)^2 \mu}{4(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) m R}.$$

Підставивши чисельні значення величин, що входять в цей вираз, отримаємо $T \approx 490\text{K}$.

2.4.11. Чи можна провести з ідеальним газом замкнутий процес (цикл) так, щоб точки A і B лежали на одній ізотермі? Температури T_1 і T_2, яким відповідають зображені на рис. 1 ізотерми, і об'єм V_1 (або V_2) задані.

Розв'язок. Температури T_1 і T_2, яким відповідають ізотерми I та II, проведені на рис. 1, і об'єм V_1 (або V_3) задані. Температури T_1 і T_2 визначають дві ізотерми:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT_1 \text{ й } pV = \frac{m}{\mu} RT_2$$

(m – маса газа, μ – молярна маса, R – газова стала).

Оскільки об'єм V_1 заданий, то ми знаємо точки C і E циклa: об'єм V_1 і V_3 ($V_3 = V_1 \dfrac{T_2}{T_1}$), температури T_1 і T_2 та тиск $p_2 = \dfrac{m}{\mu} \dfrac{RT_1}{V_1}$. Решту всіх точок циклу можна визначити тільки тоді, коли ми задамо одну з точок – B або A.

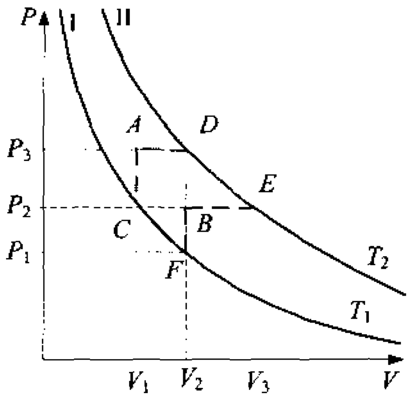


Рис. 1

Уважатимемо, що в нас заданий об'єм V_2. Він визначає точку B ($p_B = p_2$, $V_B = V_2$, $T_B = T_1 \dfrac{V_2}{V_1}$) і точку D ($V_D = V_2$, $T_D = T_2$, $p_D = p_3 = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT_2}{V_2}$).

Точка A лежить на ізобарі AD і на ізохорі AC. Тому

$$p_A = p_3 = \frac{m}{\mu}\frac{RT_2}{V_2},\ V_A = V_1,\ T_A = T_2\frac{V_1}{V_2}.$$

Температури газу в точках A і B однакові, якщо V_2 вибрано так, що

$$T_2\frac{V_1}{V_2} = T_1\frac{V_2}{V_1},$$

тобто, якщо

$$V_2 = V_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Температура газу в точках A і B циклу в цьому випадку рівна

$$T = \frac{p_2 V_2 \mu}{mR} = \sqrt{T_1 T_2}$$

оскільки $p_2 V_2 = p_2 V_1 \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$, а $p_2 V_1 = \dfrac{m}{\mu} R T_1$.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ З ТЕРМОДИНАМІКИ

3.1. Внутрішня енергія одноатомного газу. Робота та кількість теплоти. Перший закон термодинаміки. Адіабатний процес

3.1.1. У циліндрі при температурі 20°С знаходиться m = 2 кг повітря. Яка робота буде здійснена при ізобаричному нагріванні повітря до 120°С? Молярна маса повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Розв'язок. Робота при ізобаричному розширенні дорівнює

$$A = p\Delta V, \tag{1}$$

де ΔV — зміна об'єму, p - тиск. Запишемо рівняння Менделєєва - Клапейрона для двох станів повітря :

$$PV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \quad PV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2.$$

Віднімаючи з другого рівняння перше, отримаємо

$$P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1). \tag{2}$$

Але $V_2 - V_1 = \Delta V$, тому на підставі рівності (1) і (2) знайдемо

$$A = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{2}{29 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31(393 - 293) \approx 57000\text{Дж}.$$

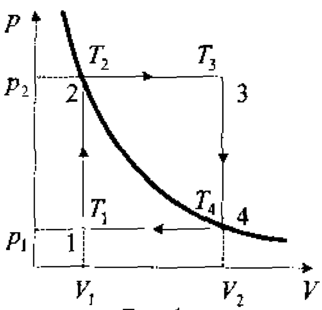


Рис. 1

3.1.2. 1 моль ідеального газу знаходиться в циліндрі під кришкою при температурі T_1. Газ нагрівають при V_1 = const, а потім при p_2 = const до T_3. Потім охолоджують при V_2 = const і p_1 = const так, щоб його об'єм зменшився до початкового. Визначити роботу за весь цикл, якщо відомо, що точки *2* та *4* знаходяться на ізотермі.

Розв'язок. Оскільки на вітках циклу *1 – 2* і *3—4* об'єм газу не змінюється, то робота виконується лише при зміні станів *2—3* і *4—1*

$$A = p_2(V_2 - V_1) + p_1(V_1 - V_2) = p_1V_1 + p_2V_2 - p_2V_1 - p_1$$

Стани *2* і *4* перебувають на одній ізотермі, тому можна застосувати закон Бойля — Маріотта

$$p_2V_1 = p_1V_2.$$

Підставивши ці значення у формулу роботи, дістанемо

$$A = R(T_1 + T_3) - 2R\sqrt{T_1T_3}.$$

3.1.3. На рис. 1 зображено *p—T*-діаграми двох кругових процесів. У якому з них газ виконує більшу роботу: в процесі *1—2—3—1* чи в процесі *3—2—4—3*?

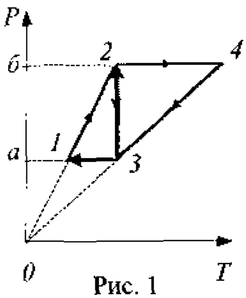


Рис. 1

Розв'язок. Виконана газом за цикл робота пропорційна площі фігури, обмеженої графіком цього процесу на *p-V*-діаграмі. Побудуємо графіки заданих колових процесів на *p-V*- діаграмі (рис. 2).

Неважко побачити, що площа фігури *1-2-3-1* менша від площі фігури *3-4-2-3*. Звідси випливає, що за модулем робота газу *A* в першому процесі менша, ніж у другому, тобто

$$|A_{1-2-3-1}| < |A_{3-4-2-3}|.$$

Але робота газу є алгебраїчною величиною: якщо в процесі об'єм газу збільшується, то $A > 0$, а якщо об'єм газу зменшується, то $A < 0$. Для колових процесів існує правило визначення знака роботи, яку виконує газ: якщо обхід контура колового процесу здійснюється за стрілкою годинника, то $A > 0$; якщо ж обхід контура відбувається проти стрілки годинника, то $A < 0$. Скориставшись цим правилом, дістанемо

$$A_{1-2-3-1} > 0, \quad A_{3-4-2-3} < 0.$$

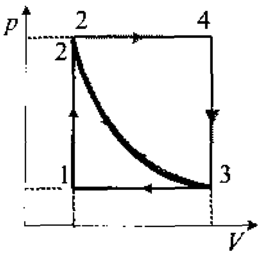


Рис. 2

Остаточно відповідь задачі можна записати так:

$$A_{1-2-3-1} > A_{3-4-2-3},$$

$$|A_{1-2-3-1}| < |A_{3-4-2-3}|.$$

3.1.4. Одноатомний ідеальний газ переводять зі стану *A* в стан *B* двома шляхами: *ACB* та *ADB* так, що *ABCD* - квадрат і точки *A* і *C* належать ізотермі (рис.1). У якому випадку газ виконує більшу роботу? Побудуйте графіки цих процесів у координатах *V,T*.

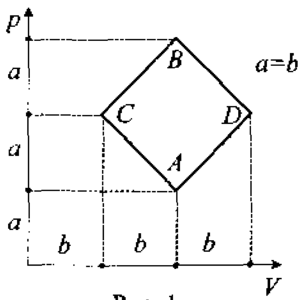


Рис. 1

Розв'язок. З рис. 1 видно, що залежності *p*(*V*) – лінійні, тобто

$$p = kV + l,$$

а саме:

на ділянці *AD*: $p = (a / b)\, V - a$,

на ділянці *DB*: $p = -(a / b)\, V + 5a$,

на ділянці *AC*: $p = -(a / b)\, V + 3a$,

на ділянці *CB*: $p = (a / b)\, V + a$.

Тоді для $T = f(V)$, з урахуванням $pV = \nu RT$ та розмірності коефіцієнту *k*, маємо:

на ділянці *AD*: $T = \dfrac{(a/b)V^2 - aV}{\nu R}$, (1) на ділянці DB: $T = \frac{-(a/b)V^2 + 5aV}{\nu R}$, (2)

на ділянці AC: $T = \frac{-(a/b)V^2 + 3aV}{\nu R}$, (3)

на ділянці CB: $T = \frac{(a/b)V^2 + aV}{\nu R}$. (4)

Максимальні значення температури на ділянках AC та BD визначимо, прирівнюючи до нуля відповідні похідні:

$$T_{AC}^{max} = \frac{9}{4} \cdot \frac{ab}{\nu R},$$

$$T_{BD}^{max} = \frac{25}{4} \cdot \frac{ab}{\nu R}.$$

Обчислимо роботу на ділянці ACB:

$$A_{ACB} = A_{AC} + A_{CB} = -\frac{3}{2}ab + \frac{5}{2}ab = ab.$$

Аналогічно для ділянки ADB:

$$A_{ADB} = A_{AD} + A_{DB} = \frac{3}{2}ab - \frac{5}{2}ab = -ab.$$

Отже, $A_{ACB} > A_{ADB}$.

На рис. 2 схематично відображений (згідно рівнянь 1-4) графік процесу переходу в координатах V, T.

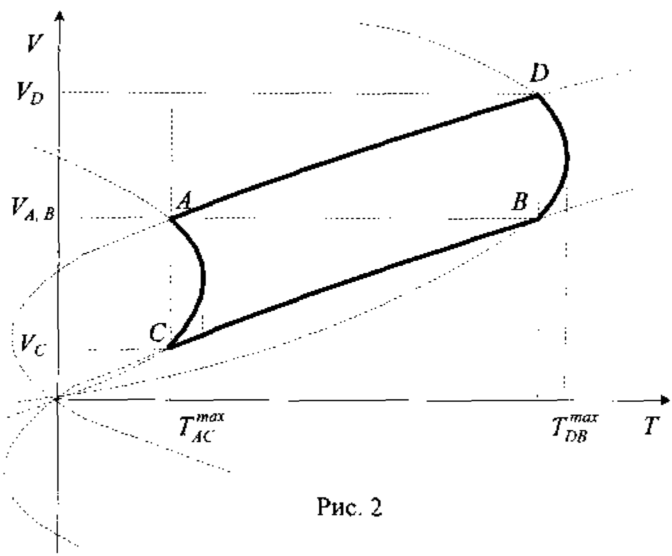


Рис. 2

3.1.5. Один моль ідеального газу нагрівають від T_1 до T_2. При цьому температура змінюється за законом $T = \alpha\, p^2$. Знайти роботу газу.

Розв'язок. За умовою задачі

$$T = \alpha\, p^2, \tag{1}$$

де α – стала величина.

З рівняння Менделєєва-Клапейрона для одного моля газу

$$pV = RT. \tag{2}$$

З рівняння (1) та (2) одержимо

$$p = \frac{1}{\alpha R} V = \beta V, \tag{3}$$

тобто тиск прямо пропорційний об'єму газу.

У системі координат pV побудуємо (рис. 1) графік залежності (3).

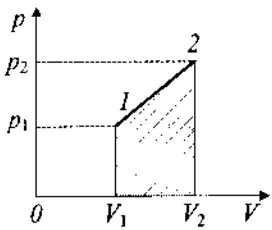


Рис. 1

Зафіксуємо точки (p_1V_1) та (p_2V_2). Оскільки робота газу численно дорівнює площі під графіком у координатах pV, то маємо

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_1V_2 + p_2V_2 - p_1V_1 - p_2V_1).$$

Зауважимо, що

$$p_1V_1 = RT_1 \text{ і } p_2V_2 = RT_2.$$

Крім цього, $p_1V_2 = p_2V_1$, але це ще треба довести. Скористаємось тим, що

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

і домножимо ліву та праву частини цієї рівності на V_1V_2. Одержимо

$$\frac{p_1V_2V_1^2}{T_1} = \frac{p_2V_1V_2^2}{T_2}.$$

З рівнянь (1) і (3):

$$\frac{V_1^2}{T_1} = \frac{V_2^2}{T_2}, \text{ тому } p_1V_2 = p_2V_1.$$

Отже,

$$A = \frac{1}{2}R(T_2 - T_1).$$

Графічно це довести простіше.

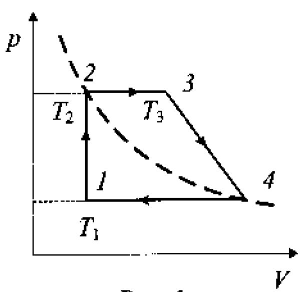


Рис. 1

3.1.6. З ν молями ідеального газу здійснено круговий процес (цикл) *1-2-3-4-1*, що складається з двох ізобар *2-3* та *4-1*, ізохори *1-2*, та процесу (деякого) *3-4*, який зображений на PV діаграмі прямою лінією (рис. 1). Температура газу в станах *1*, *2*, *3* рівна T_1, T_2, T_3 відповідно, точки *2* та *4* лежать на одній ізотермі. Визначити роботу газу за цикл.

Розв'язок. Робота A газу за цикл визначається площею трапеції *1234* (рис. 1):

$$A=(p_2-p_1)\frac{(V_3-V_2+V_4-V_1)}{2}. \qquad (1)$$

З умови задачі видно, що: $V_1=V_2$, $p_2=p_3$, $p_1=p_4$, $T_2=T_4$.. Виразимо всі параметри через тиск p_1 і об'єм V_1 у точці *1*. Дійсно, за законом Гей-Люсака

$$V_3=\frac{V_2T_3}{T_2}=\frac{V_1T_3}{T_2} \text{ і } V_4=\frac{V_1T_4}{T_1}=\frac{V_1T_2}{T_1}.$$

За законом Шарля $p_2=\dfrac{p_1T_2}{T_1}$. Підставимо ці значення в (1) та отримаємо:

$$A=0{,}5p_1V_1\,\frac{T_2-T_1}{T_1}\left(\frac{T_2}{T_1}+\frac{T_3}{T_2}-2\right).$$

Підставимо з рівняння Менделеєва-Клапейрона для ν молей газу:

$$p_1V_1=\nu RT_1$$

отримаємо:

$$A=0{,}5\nu R_1\,(T_2-T_1)\left(\frac{T_2}{T_1}+\frac{T_3}{T_2}-2\right).$$

3.1.7. З 3 молями ідеального одноатомного газу здійснюємо цикл, що зображено на рис. 1. Температура газу в різних станах дорівнюють: $T_1=400$ K, $T_2=800$ K, $T_3=2400$ K, $T_4=1200$ K. Знайти роботу газу в циклі.

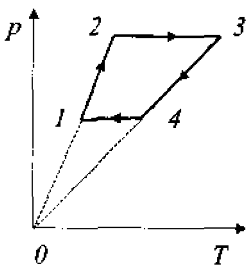


Рис. 1

Розв'язок. На ділянках *1-2* та *3-4* реалізується прямо пропорційна залежність тиску від температури, а це, як випливає з рівняння Менделеєва-Клапейрона,

$$pV=\nu RT,$$

можливо тільки тоді, коли об'єм газу не змінюється, тобто є константою. Роботу газ при цьому не виконує.

При ізобаричних процесах на ділянках *2-3* та *4-1* робота

$$A_{23}=p_2(V_3-V_2),$$
$$A_{41}=p_1(V_1-V_4).$$

Рівняння Менделеєва-Клапейрона для 3-х молей ідеального газу для різних станів можна записати так:

$$p_1V_1=3RT_1,$$
$$p_1V_4=3RT_4,$$
$$p_2V_2=3RT_2,$$
$$p_2V_3=p_3V_3=3RT_3.$$

Підставимо ці значення у вираз для повної роботи:

$$A = A_{23} + A_{41} = p_2(V_3 - V_2) + p_1(V_1 - V_4) =$$
$$= 3R(T_1 + T_3 - T_2 - T_4) = 20\,\text{кДж}.$$

3.1.8. Визначити роботу, яку здійснює ідеальний газ у замкненому циклі $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ (рис. 1), якщо $p_1 = 10^5$ Па, $p_0 = 3 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 4 \cdot 10^5$ Па, $V_2 - V_1 = 10$ л і ділянки циклу *4-3* і *2-1* паралельні вісі V.

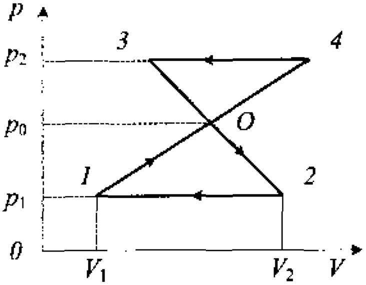


Рис. 1

Розв'язок. Виконання циклу *1-4-3-2-1* фактично еквівалентне виконанню двох простих циклів *1-0-2-1* і *0-4-3-0*. Робота A_1, виконана в першому циклі

$$A_1 = \frac{1}{2}(p_0 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Повна робота A за цикл *1-4-3-2-1* дорівнюватиме

$$A = A_1\left[1 - \frac{(p_2 - p_0)^2}{(p_0 - p_1)^2}\right] \approx 750\,\text{Дж}.$$

3.1.9. З одним молем ідеального одноатомного газу проводять цикл, наведений на рис. 1. На ділянці *1-2* об'єм газу збільшується в $m = 2$ рази. Процес *2-3* – адіабатичне розширення, процес *3-1* – ізотермічне стискання при температурі T_0 = 300 К. Знайти роботу, що виконується газом на ділянці *2-3*.

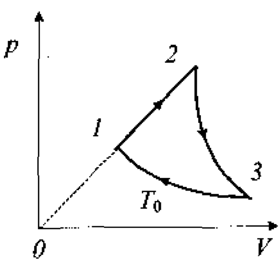


Рис. 1

Розв'язок. На ділянці *1-2* залежність тиску від об'єму лінійна: $p = kV$, тобто

$$p_1 = kV_1, \tag{1}$$

$$p_2 = kV_2 = kmV_1. \tag{2}$$

Поділивши друге рівняння на перше отримаємо

$$\frac{p_2}{p_1} = m,$$

або

$$p_2 = mp_1 \tag{3}$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$p_1V_1 = RT_0, \tag{5}$$

$$p_2V_2 = p_2mV_1 = RT_2. \tag{6}$$

Тобто

$$T_2 = \frac{p_2mV_1}{R} = \frac{mp_1mV_1}{R}. \tag{7}$$

З урахуванням (5) отримаємо

$$T_2 = m^2 T_0. \tag{8}$$

На ділянці *2-3* – процес адіабатичний, тому робота для одного моля ідеального одноатомного газу

$$A = -\Delta U = \frac{3}{2}R(T_2 - T_0) = \frac{3}{2}RT_0(m^2 - 1) = 11{,}2 \text{ кДж}.$$

3.1.10. З одним молем ідеального газу проводять замкнутий цикл, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Відношення тисків на ізобарах $\alpha = 1{,}25$, відношення об'ємів на ізохорах $\beta = 1{,}2$. Яку роботу виконує газ за один цикл? Відомо, що різниця максимальної і мінімальної температур у циклі $\Delta T = 100$ К. Універсальну газову сталу взяти рівною $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

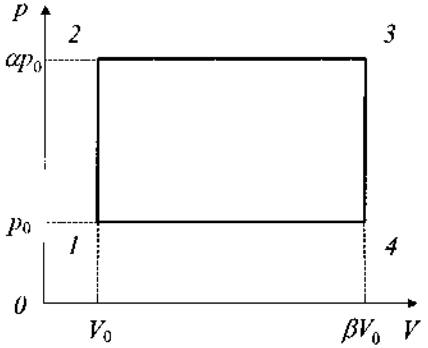


Рис. 1

Розв'язок. Побудуємо графік циклу в *p-V*-діаграмі (рис. 1). Максимальна температура в циклі досягається в точці *3*,

$$T_{макс} = \frac{\alpha\beta\, p_0 V_0}{R},$$

мінімальна — у точці *1*.

$$T_{мін} = \frac{p_0 V_0}{R}.$$

Тоді добуток $P_0 V_0$ можна виразити через ΔT

$$\Delta T = T_{макс} - T_{мін} = \frac{p_0 V_0}{R}(\alpha\beta - 1),\ p_0 V_0 = \frac{R\Delta T}{\alpha\beta - 1}.$$

Робота чисельно дорівнює площі циклу

$$A = (\alpha p_0 - p_0)(\beta V_0 - V_0) = p_0 V_0 (\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{R\Delta T}{\alpha\beta - 1}(\alpha - 1)(\beta - 1) = 83 \text{ Дж}.$$

3.1.11. Стінки циліндра, поршень і внутрішня перегородка площею 1 дм^2 виготовлені з теплоізоляційного матеріалу (рис. 1). Клапан у перегородці відкривається в тому випадку, якщо тиск праворуч більше тиску ліворуч. У початковому стані в лівій частині циліндра завдовжки $L = 11{,}2$ дм знаходиться $m_1 = 12$ г гелію, у правій частині, що має ту ж довжину — $m_2 = 2$ г гелію; з обох боків температура рівна $t_0 = 0^0$C ($T = 273$ К). Зовнішній тиск $p_0 = 10^5$ Н/м^2. Питома теплоємність гелію при постійному об'ємі $c_V = 3{,}15 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град). Поршень повільно пересувається в напрямку до перегородки (з невеликою зупинкою в момент відкриття клапана) і обережно доводиться до перегородки.

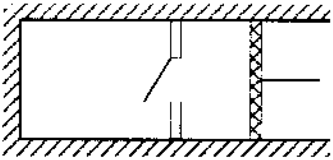


Рис. 1

Чому дорівнює виконана при цьому робота? Площа поршня $S = 10^{-2}$ м^2.

Розв'язок. Оскільки система теплоізольована, повна робота A, яка здійснюється над газом силою, що діє на поршень, і силою атмосферного тиску, дорівнює зміні внутрішньої енергії газу ΔU:

$$A = \Delta U.$$

Позначимо через T остаточну температуру газу. Тоді

$$\Delta U = c_V(m_1 + m_2)(T - T_0).$$

Щоб знайти роботу A_1 сили, прикладеної до поршня, потрібно з повної роботи A відняти роботу сили атмосферного тиску

$$A_2 = p_0Sl.$$

У результаті отримаємо

$$A_1 = c_V(m_1 + m_2)(T - T_0) - p_0Sl. \qquad (1)$$

З усіх величин, що входять у цей вираз, нам не відома лише температура T після закінчення процесу. Знайдемо її. Для цього нам доведеться послідовно розглянути усі етапи процесу.

Ясно, що на самому початку тиск у лівій частині циліндра більший, ніж у правій:

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu}\frac{RT_0}{lS} > p_2 = \frac{m_2}{\mu}\frac{RT_0}{lS}.$$

Тому при русі поршня до перегородки газ у правій частині циліндра стискатиметься до тих пір, поки його тиск не стане рівним p_1 і не відкриється клапан у перегородці. Оскільки стискання газу відбувається адіабатне, його об'єм V_1 після стискання стане таким, що

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_0^{\gamma},$$

де $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$ – показник адіабати, а $V_0 = lS$.

Звідки

$$V_1 = V_0\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} = V_0\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/\gamma}.$$

Температуру T_1, яку матиме при цьому газ у правій частині циліндра, знайдемо з рівняння газового стану:

$$T_1 = \frac{p_1V_1\mu}{Rm_2} = \frac{p_1V_1}{p_2V_0}T_0 = T_0\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Тепер, коли тиск праворуч став таким же, як і ліворуч, відкривається клапан у перегородці, і гази змішуються (поршень у цей час не переміщається). Температуру " суміші" T_2 можна визначити з рівняння теплового балансу:

$$c_Vm_1(T_2 - T_0) = c_Vm_2(T_1 - T_2),$$

і

$$T_2=\frac{m_1T_0+m_2T_1}{m_1+m_2}=T_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right].$$

Після змішування увесь газ маси $m=m_1+m_2$ стискається адіабатно від об'єму $V=V_1+V_2$ до об'єму V_0, а його температура змінюється від T_2 до T. При цьому

$$TV_0^{\gamma-1}=T_2V^{\gamma-1},$$

Звідки

$$T=T_2\left(\frac{V_1+V_2}{V_0}\right)^{\gamma-1}=T_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}.$$

Підставивши цей вираз для T у формулу (1), отримаємо остаточно:

$$A_1=c_V(m_1+m_2)T_0\left\{\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}-1\right\}-p_0lS\approx 3674\,\text{Дж}.$$

3.1.12. Ідеальний газ маси m і молекулярної маси μ, що знаходиться при температурі T, охолоджуємо ізохоричне так, що тиск знижується в n разів. Потім газ розширюється при постійному тиску. У кінцевому стані його температура дорівнює початковій температурі. Визначите виконану газом роботу.

Розв'язок. Діаграма процесу показана на рис. 1. Робота, виконана газом, рівна

$$A=p_2(V_2-V_1).$$

Оскільки точки 1 і 3 лежать на одній ізотермі, то

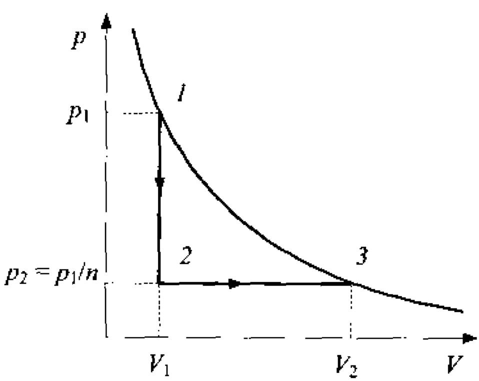


Рис. 1

$$p_1V_1=p_2V_2$$

і

$$V_2=V_1\frac{p_1}{p_2}.$$

Тому

$$A=p_2V_1\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)=\frac{1}{n}p_1V_1(n-1).$$

Але

$$p_1V_1=\frac{m}{\mu}RT,$$

отже,

$$A=\frac{m}{\mu}RT\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

3.1.13. Над одним молем ідеального газу здійснюють цикл - замкнутий процес, що складається з двох ізохор і двох ізобар. Температури в точках *1* і *3* рівні T_1 і T_3 відповідно. Знайдіть роботу, здійснену газом за цикл, якщо точки *2* і *4* лежать на одній ізотермі.

Розв'язок. Розширюючись по ізобарі *2 - 3*, газ здійснює роботу

$$A_1 = P_2(V_2 - V_1) = P_2V_2 - P_2V_1 = RT_3 - RT_2 = R(T_3 - T_2).$$

При стисканні по ізобарі *4 - 1* робота здійснюється вже над газом. Вона дорівнює

$$A_2 = P_1((V_2 - V_1) = R(T_4 - T_1).$$

Повна робота, здійснена газом, очевидно, дорівнює

$$A = A_1 - A_2 = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1) = R(T_3 + T_1 - T_2 - T_4).$$

Оскільки точки *2* і *4* лежать на одній ізотермі, то температура газу в них однакова. Позначимо її $T = T_2 = T_4$. Тоді $A = R(T_3 + T_1 - 2T)$. Точки *3* і *4* лежать на одній ізохорі, тому $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_3}{T}$. Точки *2* і *1* теж лежать на одній ізохорі й $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T}{T_1}$. З цих двох рівнянь знайдемо, що $T = \sqrt{T_1T_3}$. Отже,

$$A = R\left(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3}\right).$$

3.1.14. На рис. 1 показані (*V*, *T*) діаграми для двох кругових процесів. У якому з них газ здійснює більшу роботу: у процесі $1 \to 2 \to 3 \to 1$ або в процесі $1 \to 3 \to 4 \to 1$?

Розв'язок. Перемальовуємо діаграми процесів, показаних на рис. 1*а* в координатах V, T, в координати p, V (рис. 1*б*). Точки *1* і *3* лежать на одній ізотермі, причому точці *1* відповідає менший об'єм, ніж точці *3*. Тому, накресливши ізотерму, виберемо дві точки на ній – точки *1* і *3*, як показано на рис. 1 *б*. Тепер побудувати діаграми циклів не складно. Лінія *1 – 2* це ізобара, причому об'єм у точці *2* більше, ніж об'єм у точці *1*. Лінія *2 – 3* ізохора. На діаграмі p, V вона повинна бути вертикальною. Так само будується і діаграма другого процесу.

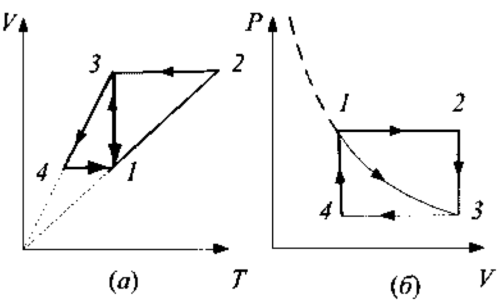


Рис. 1

Робота, здійснена газом за цикл, дорівнює площі фігури, обмеженої графіками циклу. Але з рис. 1 видно, що площа «червоного» процесу більше площі «сірого» процесу. Це означає, що більшу роботу газ здійснює при процесі *1 – 2 – 3 – 1*.

3.1.15. Ідеальний газ переходить зі стану *1* (P_1, V_1, T_1) у стан *2* (P_2, V_2, T_2). Потім зі стану *2* газ поволі й адіабатично (без підведення тепла) переводять у стан *3* (P_3, V_3, T_3). Відомо, що при переході *2* → *3* газ здійснює роботу, рівну кількості тепла, наданому газу при переході *1* → *2*. Довести рівність $T_3 = T_1$. Зобразити процеси *1* → *2* і *2*→ *3* на плоскості *VT*.

Розв'язок. Оскільки при процесі $1 \to 2$ $V = V_1 = \text{const}$, то газ не здійснює роботи і зміна внутрішній енергії газу ΔW_1 дорівнює кількості тепла *Q*, наданому газу:

$$Q = \Delta W_1 . \qquad (1)$$

Процес $2 \to 3$ – адіабатичний (Q = 0), значить, роботу газ здійснює за рахунок внутрішньої енергії. Тому робота *A*, яку здійснив газ, дорівнює зміні його внутрішній енергії

$$A = \Delta W_2 . \qquad (2)$$

Порівнюючи (1) і (2), знаходимо, що $\Delta W_1 = \Delta W_2$. Але внутрішня енергія газу пропорційна його абсолютній температурі. Це означає, що при процесі *2* → *3* і процесі *1* → *2* температура газу змінилася однаково. Отже,

$$T_1 = T_3 .$$

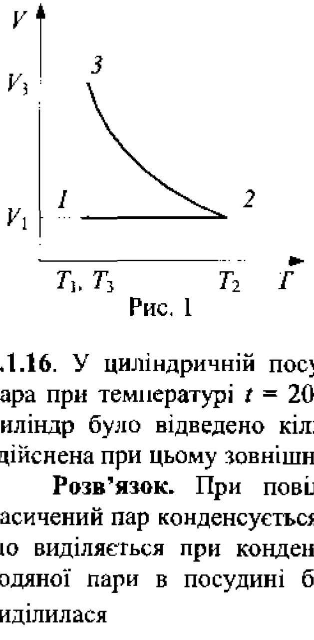


Рис. 1

Графіки процесів приведені на рис. 1. Оскільки при процесі *1* → *2* внутрішня енергія газу збільшилася, то $T_2 > T_1$. Оскільки при процесі $2 \to 3$ газ здійснював роботу, то $V_3 > V_1$.

Очевидно, наша відповідь справедлива тільки в тому випадку, якщо $V_{1\to2} = \text{const}$.

3.1.16. У циліндричній посудині під поршнем знаходиться насичена водяна пара при температурі t = 20°C. При ізотермічному повільному русі поршня в циліндр було відведено кількість теплоти $Q = 84 \cdot 10^3$ Дж. Яка робота була здійснена при цьому зовнішніми силами, що діють на поршень?

Розв'язок. При повільному русі поршня в циліндричну посудину насичений пар конденсується. Щоб процес був ізотермічним, кількість теплоти, що виділяється при конденсації, необхідно відводити. Якщо первісна маса водяної пари в посудині була m_1, а потім m_2, то кількість теплоти, що виділилася

$$Q = L(m_1 - m_2),$$

де L = 2259 кДж/кг питома теплота пароутворення води.

Відома з таблиць величина L отримана дослідним шляхом, при цьому випаровування води проводиться в умовах постійного тиску. Отже, спожита кількість теплоти дорівнює сумі приросту внутрішньої (потенційної) енергії води і роботи розширення водяної пари. При конденсації пари така ж кількість теплоти виділиться. Масу пара в посудині можна виразити через його об'єм за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$m_1 = \frac{p\mu}{RT}V_1, \quad m_2 = \frac{p\mu}{RT}V_2.$$

Тут p – тиск насиченої пари при температурі $T = 293$ К ($t = 20^0$С), V_1 і і V_2 - відповідно початковий і кінцевий об'єм посудини, $\mu = 0{,}018$ кг/моль - молярна маса водяної пари. Таким чином,

$$Q = \frac{p\mu L}{RT}(V_1 - V_2). \qquad (1)$$

Робота, яка виконується над парою зовнішніми силами:

$$A = p(V_1 - V_2). \qquad (2)$$

Вирішуємо систему рівнянь (1) і (2), отримуємо

$$A = \frac{QRT}{\mu L} = 5020\,\text{Дж}.$$

3.1.17. У вертикальній теплоізольованій посудині під важким поршнем знаходиться порція азоту. На поршні зверху лежить купа піску, система знаходиться в рівновазі, початковий об'єм газу V_1, початковий тиск p_1. Почнемо повільно, по одній піщинці, прибирати пісок і зменшимо тиск до p_2, при цьому об'єм газу збільшиться до V_2 (звичайно, можна було цей об'єм обчислити, але будемо вважати, що це вже зробили і вам повідомили результат). Тепер проведемо експеримент інакше - знімемо всю порцію піску відразу. Яку кінетичну енергію мав би в цьому випадку поршень в той момент, коли об'єм газу склав би V_2? Вважайте газ досить розрядженим.

Розв'язок. При повільному розширенні газу без підведення тепла робота відбувається за рахунок зменшення внутрішньої енергії газу. Тоді в першому випадку робота газу дорівнює різниці його енергій на початку і в кінці процесу розширення:

$$A = U_1 - U_2 = 2{,}5(\nu RT_1 - \nu RT_2) = 2{,}5(p_1V_1 - p_2V_2).$$

За умовою задачі поршень масивний; отже, він буде рухатися повільно навіть тоді, коли ми знімаємо всю порцію піску відразу. Тому робота газу в другому випадку вийде такою же, як і в першому(повільне розширення газу без приводу тепла). У другому випадку робота газу йде на збільшення потенційної і кінетичної енергії поршню. Потенційна енергія поршняю збільшилася на

$$\Delta E_p = Mg(H_2 - H_1) = \frac{Mg(V_2 - V_1)}{S} = p_2(V_2 - V_1).$$

Тоді, кінетична енергія поршню вийде рівною

$$\Delta E_k = A - \Delta E_p = 2{,}5(p_1V_1 - p_2V_2) - p_2(V_2 - V_1).$$

3.1.18. Моль гелію в посудині під поршнем отримує тепло ззовні і розширюється. Теплоємність цієї порції газу в даному процесі є сталою і становить $C = 20$ Дж / К. Яку роботу здійснить газ при збільшенні його об'єму вдвічі? Початкова температура $T = 200$ К, початковий тиск $p = 0{,}5$ атм.

Розв'язок. Легко бачити, що молярна теплоємність в даному процесі $C = 20$ / Дж (моль · К) практично збігається з молярної теплоємністю при постійному тиску

$$C_p = 2{,}5R \approx 20{,}8\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Тому для спрощеного розрахунку роботи можна взяти p = const, тоді

$$A = p(2V - V) = pV = RT \approx 1{,}66\ \text{кДж}.$$

Можна оцінити точність (вірніше - неточність) нашого розрахунку:

$$C\Delta T = A + C_V \Delta T,$$

де $C_v = 1{,}5\ R$ - молярна теплоємність при постійному об'ємі, звідки

$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} \approx 220\,\text{К}.$$

Якщо вважати, що p = const, то $T_{кон}$ = 200К·2 = 400К. Наша оцінка дає $T^*_{кон} = 420\,\text{К}$. Середня температура відрізняється менше, ніж на 3%, такий же результат отримуємо і при точному розрахунку. Наш результат $A \approx 1{,}66\,\text{кДж}$ занижений приблизно на 3%.

3.1.19. У горизонтальній циліндричній посудині знаходиться порція гелію. Посудина закрита масивним поршнем, який може рухатися по горизонталі без тертя. З газом у посудині проводяться два досліди: зовнішній тиск збільшився в три рази – одного разу дуже швидко, іншим разом дуже повільно. У якому з дослідів кінцевий об'єм газу виявиться менше? У скільки разів?

Розв'язок. При дуже повільному підвищенні тиску вийде звичайне адіабатичне стиснення газу. Для одноатомного газу зв'язок тиску й об'єму при адіабатичному процесі такий:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{3/5} = 3^{3/5} \approx 1{,}93.$$

Якщо тиск підвищується стрибкоподібно, то поршень не зупиниться, коли тиски всередині та зовні в перший раз зрівняються, – у цей момент він має значну кінетичну енергію і буде досить довго коливатися, потроху зменшуючи амплітуду. Після остаточної зупинки його кінетична енергія «дістанеться» газу. Уважаючи, що ця енергія перейде газу, що знаходиться всередині посудини (звичайно, це невірно, але ми отримаємо «крайню» оцінку), можна записати закон збереження енергії з урахуванням роботи зовнішніх сил. Тиск зовні можна вважати постійним і рівним $3p$ (де p - початковий тиск), об'єм змінюється від V_1 до V_2, тоді робота зовнішніх сил дорівнює:

$$A_{зовн} = 3p(V_1 - V_2).$$

Внутрішня енергія газу збільшилася на цю величину, тому:

$$\frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1 = 3p(V_1 - V_2).$$

Запишемо тепер рівняння для початкового і кінцевого станів газу в посудині:

$$pV_1 = \nu RT_1 \text{ і } 3pV_2 = \nu RT_2.$$

Остаточно отримаємо

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}\approx 1{,}67 .$$

Якщо врахувати, що нагрівається і «зовнішній» газ, то підвищення температури виявиться не таким великим, а, отже, і відношення об'ємів буде ближче до раніше отриманого значення. Більш точний розрахунок досить складний – він повиненураховувати і неоднаковість концентрацій газу по обидві сторони поршня, і відмінність швидкостей руху частинок через різницю температур зовні й усередині.

3.1.20. У глибокому космосі літає посудина, яка містить кисень при температурі 300 К і тиску 1 атм. Незрозуміло звідки взялася куля, що пробиває в стінці посудини невеликий отвір, і газ починає витікати з посудини. Розглянемо момент, коли маса газу в посудині зменшилася на 1%. Оцініть середню кінетичну енергію молекул, що вилетіли назовні.

Розв'язок. При такій концентрації частинок довжина вільного пробігу в посудині дуже мала, частинки рухаються до дірки практично не обганяючи одна одну. Це дозволяє виділити в посудині близько дірки деяку область, у якій знаходяться ті частинки, які вилетять назовні. Нехай об'єм цієї частини ΔV, тоді «навколишній» газ здійснює роботу $A=p\Delta V$, витіснивши цю частину назовні (ми врахували, що назовні вийшла невелика частина газу – тиск у посудині при цьому можна вважати незмінним). Знехтуємо теплообміном вихідної порції газу з іншими частинками. У такому випадку внутрішня енергія цієї порції збільшиться на

$$A=p\Delta V=\nu RT ,$$

де ν - кількість газу у вихідній порції) і складе

$$U=1{,}5\nu RT+A=2{,}5\nu RT .$$

Ясно, що середня кінетична енергія частинок, що вилітають назовні, становить $2{,}5kT\approx 10^{-20}$ Дж, тобто вона в 5/3 рази більше середньої кінетичної енергії частинок у посудині. Ми бачимо, що ця енергія відповідає більшій температурі, хоча говорити про температуру молекул, що вилетіли було б неправильно.

3.2. Зміна внутрішньої енергії тіл у процесі теплопередачі

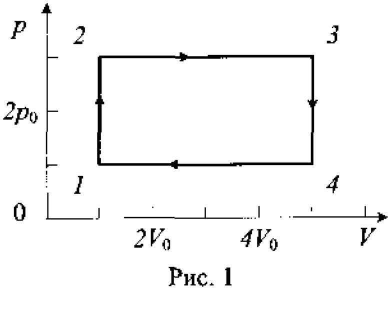


Рис. 1

3.2.1. Циклічні процеси

3.2.1. З одноатомним ідеальним газом відбувається циклічний процес (рис. 1). Знайти для кожного з етапів циклу виконану газом роботу і кількість отриманої чи відданої теплоти.

Розв'язок. На етапі *1-2* процес ізохоричний. Робота $A'_{1-2}=p\Delta V=0$. Газ одержував тепло

$$Q_{1-2} = C_V(T_2 - T_1),$$

де $C_V = 3R/2$ – молярна теплоємність при $V = \text{const}$.

З рівняння стану ідеального газу:

$$T_1 = \frac{p_0V_0}{R},\ T_2 = \frac{3p_0V_0}{R}.$$

Звідси

$$Q_{1-2} = \frac{3R}{2}\left(\frac{3p_0V_0}{R} - \frac{p_0V_0}{R}\right) = 3p_0V_0.$$

На етапі *2-3* процес ізобарний. Робота

$$A'_{2-3} = p\Delta V = 3p_0 \cdot (5V_0 - V_0) = 12p_0V_0.$$

Газ одержував тепло

$$Q_{2-3} = C_p(T_3 - T_2),$$

де $C_p = 5R/2$ – молярна теплоємність при $p = \text{const}$, $T_3 = \dfrac{3p_0 \cdot 5V_0}{R} = \dfrac{15p_0V_0}{R}$. Тобто

$$Q_{2-3} = \frac{5R}{2}\left(\frac{15p_0V_0}{R} - \frac{3p_0V_0}{R}\right) = 30p_0V_0.$$

На етапі *3-4* ізохорний процес. Робота $A'_{3-4} = p\Delta V = 0$. Газ віддавав тепло

$$Q_{3-4} = C_V(T_4 - T_3),$$

де $T_4 = \dfrac{p_0 \cdot 5V_0}{R} = \dfrac{5p_0V_0}{R}$. Тобто

$$Q_{3-4} = \frac{3R}{2}\left(\frac{15p_0V_0}{R} - \frac{5p_0V_0}{R}\right) = -15p_0V_0.$$

На етапі *4-1* ізобарний процес . Робота

$$A'_{4-1} = p\Delta V = p_0 \cdot (5V_0 - V_0) = 4p_0V_0.$$

Газ віддавав тепло

$$Q_{4-1} = C_p(T_1 - T_4) = \frac{5R}{2}\left(\frac{p_0V_0}{R} - \frac{5p_0V_0}{R}\right) = -10p_0V_0.$$

3.2.2. Один кіломоль ідеального одноатомного газу, що знаходиться при нормальних умовах, переводять з основного стану *1* в стан *2* двома способами: *1* → *3* → *2* і *1* → *4* → *2*. Знайдіть відношення кількості теплоти, яку необхідно надати газу в цих двох процесах.

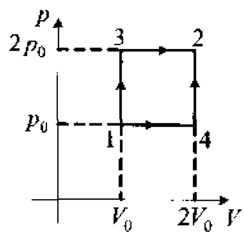


Рис. 1

Розв'язок. Відповідно до першого закону термодинаміки кількість теплоти Q, що отримав газ, йде на зміну внутрішньої енергії газу ΔU і на виконання газом роботи A:

$$Q_I = \Delta U_I + A_I, \qquad Q_{II} = \Delta U_{II} + A_{II}.$$

Тут індекс *I* належить до процесу *1* → *3* → *2*, а індекс

II – до процесу $1 \to 4 \to 2$. Оскільки газ одноатомний, то для одного моля

$$U = \frac{3}{2}RT \quad \text{і} \quad \Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Звідси видно, що зміна внутрішньої енергії газу при переході зі стану 1 у стан 2 залежить тільки від зміни температури газу $\Delta T = T_2 - T_1$ і не залежить від того, яким способом газ переводять з одного стану в інший, отже,

$$\Delta U_I = \Delta U_{II} = \Delta U = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1).$$

Для того щоб знайти температуру газу T_1 і T_2, запишемо рівняння стану ідеального газу для стану 1 і 2

$$p_0V_0 = RT, \quad 2p_0 2V_0 = RT_2.$$

Звідки

$$T_2 - T_1 = \frac{3p_0V_0}{R} \quad \text{і} \quad \Delta U = \frac{9}{2}p_0V_0.$$

Тепер знайдемо роботи газу A_I і A_{II}. У першому випадку ($1 \to 3 \to 2$) газ на ділянці $1 \to 3$ роботи не виконує, а при ізобарному розширенні на ділянці $3 \to 2$ газ виконує роботу

$$A_I = p\Delta V = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0.$$

У другому випадку (процес $1 \to 4 \to 2$) газ здійснює роботу тільки на ділянці $1 \to 4$

$$A_{II} = p_0(2V_0 - V_0) = p_0V_0.$$

Таким чином

$$Q_I = \Delta U + A_I = \frac{13}{2}p_0V_0,$$

$$Q_I = \Delta U + A_I = \frac{11}{2}p_0V_0.$$

Відношення кількості теплоти дорівнює

$$\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{13}{11}.$$

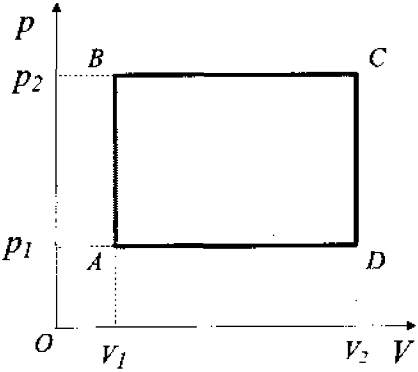


Рис. 1

3.2.3. Якщо над ідеальним газом здійснюється процес ABC, то йому надається кількість теплоти Q. Яка кількість теплоти надається газу при процесі ADC?

Розв'язок Тепло, яке надається газу, йде на збільшення його внутрішньої енергії W та роботу з розширення газу. Оскільки початковий і кінцевий стани, а значить, і температури газу однакові при обох процесах, то однакові й зміни внутрішній енергії газу. Що ж стосується роботи по розширенню газу, то вона в першому випадку дорівнює $p_2(V_2 - V_1)$, а в другому – $p_1(V_2 - V_1)$.

Із закону збереження енергії виходить, що $Q = W + P_2(V_2 - V_1)$ і $Q_1 = W + p_1(V_2 - V_1)$, де Q_1 — кількість тепла, що надається газу при процесі $A \to D \to C$.

З цих рівнянь не важко знайти, що

$$Q_1 = Q - p_2(V_2 - V_1) + p_1(V_2 - V)_1 = Q - (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Величина $(p_2 - p_1)(V_2 - V)_1$ чисельно дорівнює площі прямокутника $ABCD$. Тому наш результат досить природний.

Різниця $Q - Q_1$ повинна, очевидно, дорівнювати різниці робіт, що здійснюються при розширенні газу, а робота при розширенні газу чисельно дорівнює площі фігури, що утворюється графіком залежності P від V і віссю абсцис V.

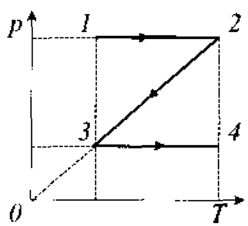


Рис. 1

3.2.4. Моль ідеального одноатомного газу переводиться з початкового стану в кінцевий, як показано на рис. 1. Визначте підведене газу тепло, якщо різниця початкової і кінцевої температур дорівнює $\Delta t = 100^0\,C$.

Розв'язок. Звернемо увагу на те, що тепловий процесс заданий в координатах p, T. Він складається з трьох ділянок: двох ізобар ($1 \Rightarrow 2$) і ($3 \Rightarrow 4$) та ізохори ($2 \Rightarrow 3$). Постійність об'єму на ділянці ($2 \Rightarrow 3$) випливає з того, що тиск p змінюється пропорційно температурі T. Якщо позначити молярні теплоємності газу при постійному об'|єму q при постійному тиску через C_V і C_p, можна записати

$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = C_p(T_2 - T_1) + C_V(T_3 - T_2) + C_p(T_4 - T_3) = (2C_p - C_V)\Delta t.$$

Для одноатомного ідеального газу $C_V \frac{3}{2}R, C_p = \frac{5}{2}R$ ($R = 8{,}31$ Дж/моль·К)

Остаточно:

$$Q = \frac{7}{2}R\Delta t = 2910\text{Дж/моль}.$$

3.2.5. На столі стоять дві однакові склянки, в одну з яких налитий гарячий чай. Температура чаю t_0. Чай потрібно охолодити до температури t_k. Це можна зробити двома способами: 1) відразу перелити чай у другий стакан і чекати, поки він не охолоне до температури t_k; 2) чекати доки чай охолоне до деякої температури t_1 такий, що після переливання у другу склянку температура чаю відразу виявиться рівною t_k.

Який спосіб швидше? Відомо, що тепловіддача склянки і навколишнього середовища, теплообмін між чаєм і склянкою відбувається дуже швидко. Теплоємність склянки C_0, теплоємність чаю C.

Розв'язок. Позначимо різницю температур чаю і навколишнього середовища через T:

$$T = t_ч - t_c$$

і *для стислості будемо називати* T температурою. Тоді рівняння зміни температури T чаю з часом τ, згідно умови задачі, можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{d\tau} = -\alpha T,$$

де $\alpha > 0$ – постійний коефіцієнт пропорційності.

З умови задачі також випливає, що якщо до переливання чаю з одного стакана в інший температура була T, то після переливання вона стане

$$\frac{CT}{C + C_0} = \beta T,$$

де β – постійний коефіцієнт.

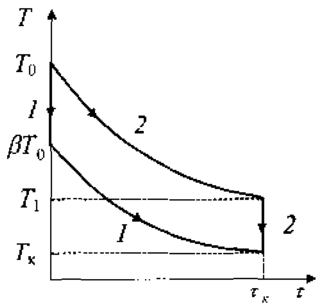


Рис. 1

Тепер розглянемо (рис. 1) процеси 1) і 2). Для першого процесу запишемо початкову умову:

$$T^{(1)}(0) = \beta T_0 \text{ (одразу після переливання)}$$

і рівняння зміни температури з часом

$$\frac{dT^{(1)}}{d\tau} = -\alpha T^{(1)}.$$

Для другого процесу введемо нову змінну $T' = \beta T^{(2)}$ і запишемо відповідні рівності:

$$T' = \beta T_0,$$

$$\frac{dT'}{d\tau} = \frac{\beta dT^{(2)}}{d\tau} = \beta\left(-\alpha T^{(2)}\right) = -\alpha T'.$$

Однаковим рівнянням і однаковим початковим умовам відповідають однакові рішення. Тому в довільний момент часу τ

$$T'(\tau) = T^{(1)}(\tau).$$

Нехай у деякий момент часу τ_k температура чаю в першому процесі досягла значення T_k, тобто

$$T^{(1)}(\tau_k) = T_k.$$

Знайдемо, якою стане температура в другому процесі, якщо в момент часу τ_k перелити чай з однієї склянки в іншу:

$$T^{(2)}(\tau_k)_{\text{після}} = \beta T^{(2)}(\tau_k)_{\text{до}} = \frac{\beta T'(\tau_k)}{\beta} = T'(\tau_k) = T^{(1)}(\tau_k) = T_k.$$

Отже, ми з'ясували, що для обох способів охолодження чаю потрібно один і той же самий час. Отже переливати чай з одного стакана в інший можна в будь-який момент часу в проміжку від 0 до τ_k (рис. 1).

3.2.2. Теплообмінні процеси

3.2.6. У двох посудинах об'ємом V_1 = 1л, V_2 = 2л знаходиться один і той же газ однієї і тієї ж концентрації. У першій посудині температура T_1 = 300 К, у другій – T_2 = 350 К. Визначити, яка стане температура, якщо посудини привести в тепловий контакт. Теплообміну з оточуючим середовищем немає.

Розв'язання: За умовою задачі кількість теплоти, що віддає більш нагріте тіло, дорівнює кількості теплоти, що одержує більш холодне тіло.

Оскільки концентрація газу в обох посудинах однакова, то густини газу теж однакові, однакові й питомі теплоємкості, отже:

$$\rho V_1 c(\theta - t_1) = \rho V_2 c(t_2 - \theta), \qquad (1)$$

де θ– температура після встановлення теплової рівноваги.
З рівняння (1) отримуємо

$$\theta = \frac{V_2 t_2 + V_1 t_1}{V_1 + V_2} = \frac{2\cdot 77 + 1\cdot 27}{3} = 60^0\mathrm{C} = 333\,\mathrm{K}.$$

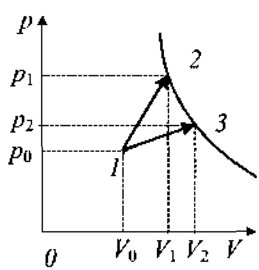


Рис. 1

3.2.7. Над газом здійснено два теплових процеси, нагріваючи його з одного і того ж початкового стану до однакової кінцевої температури. На pV- діаграмі процеси зображено прямими лініями *1-3* та *1-2* (рис. 1). Визначити, при якому з процесів газу буде надано більше тепла.

Розв'язок. За першим законом термодинаміки кількість теплоти ΔQ_1, що отримано газом при переході газу зі стану *1* (p_0, V_0) в стан *2* (p_1, V_1) дорівнює:

$$\Delta Q_1 = \Delta U_1 + A_1,$$

де ΔU_1 – зміна його внутрішньої енергії, а A_1 –робота, яку виконав газ:

$$A_1 = 0{,}5\left(p_0 + p_1\right)\left(V_1 - V_0\right).$$

При переході газу з стану *1* в стан *3* (p_2, V_2) (точки *2* і *3* лежать на ізотермі)

$$\Delta Q_2 = \Delta U_2 + A_2,$$

$$A_2 = 0{,}5\left(p_0 + p_2\right)\left(V_2 - V_0\right).$$

Оскільки кінцева температура газу в стані *2* і *3* одна й та ж ($T_2 = T_3$), то $\Delta U_1 = \Delta U_2$, тобто внутрішня енергія при переході з стану *1* у *2* і з *1* у *3* збільшується на одну і ту ж величину.

Щоб відповісти на питання задачі: на який перехід витрачається більше тепла, необхідно порівняти роботи A_1 і A_2.

$$A_1 - A_2 = 0{,}5\,(p_0 + p_1)(V_1 - V_0) - 0{,}5\,(p_0 + p_2)(V_2 - V_0) =$$
$$= 0{,}5[(p_0V_1 - p_0V_2) + (p_2V_0 - p_1V_0)] < 0,$$

оскільки $p_0V_1 < p_0V_2$, $\quad p_2V_0 < p_1V_0$.

Значить $A_2 > A1$ і тому в процесі *1-3* газу передається більше тепла, ніж у процесі *1-2*.

3.2.8. У вертикальному циліндрі ємністю V під невагомим поршнем знаходиться ν молей ідеального одноатомного газу. Газ під поршнем теплоізольований. На поршень поклали вантаж масою M, у результаті чого поршень перемістився на відстань h .Визначити кінцеву температуру $T_к$, що встановиться при переміщенні поршня, якщо площа поршня рівна S, атмосферний тиск p_0.

Розв'язок. Рівняння стану ідеального газу в циліндрі з невагомим поршнем

$$p_0V = \nu RT_0. \tag{1}$$

Коли на поршень помістили вантаж масою M, його об'єм зменшився на величину Sh, а тиск збільшиться на величину $p' = \dfrac{Mg}{S}$. Рівняння стану буде мати вигляд:

$$\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V - Sh) = \nu RT_k. \tag{2}$$

Оскільки газ теплоізольований, зовнішнє тепло не підводиться ($\Delta Q = 0$), то як випливає з 1 закону термодинаміки, вся робота

$$A = Mgh, \tag{3}$$

яка здійснюється над газом, піде на збільшення внутрішньої енергії

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_k - T_0). \tag{4}$$

Отже, з рівняння (3) і (4) отримуємо

$$Mgh = \frac{3}{2}\nu R(T_k - T_0). \tag{5}$$

Підставивши в (5) різницю початкової та кінцевої температури, визначену з (2) та (1):

$$T_k - T_0 = \frac{MgV}{\nu RS},$$

отримаємо

$$h = \frac{MgV}{S\left(p_0S + \dfrac{5Mg}{3}\right)}. \tag{6}$$

Підставивши (6) у (2), визначимо кінцеву температуру

$$T_k = \frac{V}{\nu RS}\frac{(p_0S + Mg)(3p_0S + 2Mg)}{3p_0S + 5Mg}.$$

3.2.9. У вертикальному циліндрі з площею поперечного перерізу S під поршнем, маса якого дорівнює M, знаходиться один моль ідеального одноатомного газу. У деякий момент часу під поршнем умикають нагрівач, що передає газу за одиницю часу кількість теплоти q. Визначити швидкість руху поршня υ, яка встановилась, при умові, що тиск газу під поршнем сталий і дорівнює p_0, газ під поршнем теплоізольований.

Розв'язок. За першим законом термодинаміки кількість теплоти ΔQ, що передається системі, іде на збільшення внутрішньої енергії газу ΔU та на виконання роботи A:

$$\Delta Q = \Delta U + A. \tag{1}$$

Для одного моля

$$\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T. \tag{2}$$

Робота, що виконується газом при сталому тиску:

$$A = p\Delta V = pS\Delta x, \tag{3}$$

де Δx – зміщення поршня.

Тиск на газ у циліндрі

$$p = p_0 + \frac{Mg}{S}. \tag{4}$$

Із закону Менделеєва- Клапейрона $pV = RT$ знаходимо звязок між зміною об'єму газу ΔV та зміною температури ΔT при постійному тиску:

$$p\Delta V = R\Delta T. \tag{5}$$

Підставимо (2) і (3) з урахуванням (5) у рівняння (1) та отримаємо:

$$\Delta Q = \frac{3}{2} p\Delta V + p\Delta V = \frac{5}{2} p\Delta V = \frac{5}{2} pS\Delta x. \tag{6}$$

З умови задачі $\Delta Q = q\Delta t$. Оскільки швидкість руху поршня $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, з (6) та (4) маємо

$$\upsilon = \frac{2}{5} \frac{q}{p_0 S + Mg}.$$

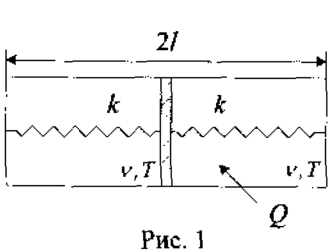


Рис. 1

3.2.10. Горизонтальна циліндрична посудина довжиною $2l$ розділена тонким нетеплопровідним поршнем на дві рівні частини, у кожній з яких знаходилося по ν молей ідеального газу при температурі T (рис. 1). Поршень прикріплений до торців посудини недеформованими пружинами жорсткістю k кожна. Газу в правій частині надали кількість теплоти Q, у результаті чого поршень змістився ліворуч на відстань $x = l/2$. Визначити кількість теплоти Q', віддану при температурі T

термостату, с котрим газ у лівій частині весь час знаходився в тепловому контакті.

Розв'язок. Нехай у праву частину подаємо деяку кількість тепла, в результаті чого в правій частині температура збільшується і нетеплопровідний поршень зміститься ліворуч на величину y від свого початкового положення. Нехай при цьому тиск газу в правій частині посудини дорівнює p_2, а в лівій p_1.

Оскільки поршень при цьому зрівноважений, то сума сил, які діють на поршень, дорівнює нулю, тобто

$$(p_2 - p_1)S - 2ky = 0, \tag{1}$$

де S – площа поршня, $2ky$ – сили пружності, які діють з обох боків поршня при розтягування та стисканні пружини.

Якщо подача тепла в праву частину буде продовжуватись, то поршень переміститься ще на величину Δy, і повна робота $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2$, де ΔA_2 – робота, яка виконана газом правої частини посудини, ΔA_1 – робота, яка виконана газом лівої частини посудини. При цьому

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = p_2 \Delta y S - p_1 \Delta y S = (p_2 - p_1)\Delta y S = 2ky\Delta y. \tag{2}$$

Отже, при зміщенні поршня на величину $x = l/2$ повна робота газу буде дорівнювати сумі потенціальних енергій пружин, які або стиснуті або розтягнуті:

$$A = 2 \cdot \frac{k}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Якщо до газу в праву частину посудини підвели кількість теплоти Q, а газ лівої частини посудини передав кількість теплоти Q' термостату, то повна кількість енергії, яку передали системі $Q - Q'$, і 1 закон термодинаміки буде мати вигляд:

$$Q - Q' = 2 \cdot \frac{k}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \Delta U, \tag{4}$$

де ΔU – зміна внутрішньої енергії газу.

Оскільки поршень не проводить тепло, то температура газу в лівій частині посудини не змінюється і вся зміна внутрішньої енергії газу ΔU зумовлена нагріванням газу в правій частині посудини на ΔT. При цьому для ν молей ідеального газу

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T. \tag{5}$$

Збільшення температури ΔT знайдемо з умови рівноваги в кінці процесу. Тиск газу p у правій частині посудини за законом Менделєєва - Клапейрона дорівнює:

$$p = \frac{\nu R(T + \Delta T)}{S(l + l/2)}.$$

З іншого боку тиск у правій частині посудини буде дорівнюватиме сумі тисків зліва

$$p' = \frac{\nu RT}{S(l - l/2)}$$

і тиску пружин

$$p'' = \frac{2kl}{2S}.$$

Тобто

$$\frac{2\nu R(T + \Delta T)}{3Sl} = \frac{2\nu RT}{Sl} + \frac{kl}{S}.$$

Звідси знаходимо зміну температури

$$\Delta T = 2T + \frac{3kl^2}{2\nu R}.$$

Підставимо цей вираз у (5), а потім у (4) та отримаємо

$$Q' = Q - 3\nu RT - \frac{5}{2}kl^2.$$

3.2.11. Теплоізольована посудина розділена на 2 частини нетеплопроникни поршнем, який може переміщуватись у посудині без тертя. У лівій части посудини знаходиться 1 моль ідеального одноатомного газу, у правій – вакуум. Поршень з'єднаний з правою стінко посудини пружиною, довжина якої у вільном стані дорівнює довжині посудини (рис. 1) Визначити теплоємність системи C. Теплоємніст поршня, посудини та пружини знехтувати.

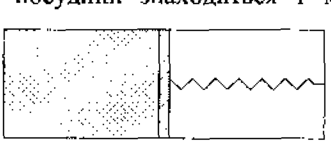


Рис. 1

Розв'язок. Надамо газу кількість теплот ΔQ. Нехай початкова температура газу T_1, а після подання теплоти - T_2. Ві передавання тепла газ розширюватиметься і поршень рухатиметься праворуч але оскільки він буде рухатись без тертя, то робота по переміщенню поршня н буде виконуватися. Отже, 1 закон термодинаміки буде мати такий вигляд:

$$\Delta Q = \Delta U. \qquad (1$$

Зміна внутрішньої енергії системи складається зі зміни внутрішньої енергії газ і зміни потенціальної енергії стиснутої пружини.

Внутрішня енергія 1 моля ідеального одноатомного газу при нагріван від температури T_1 до температури T_2 збільшиться на

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1). \qquad (1$$

Потенціальна енергія пружини зміниться на величину:

$$\Delta U_2 = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right), \qquad (2$$

де k - коефіцієнт жорсткості пружини, x_1 - деформація пружини пр температурі T_1, та x_2 - деформація пружини при температурі T_2.

З умови рівноваги поршня випливає, що

$$p=\frac{F}{S}=\frac{kx}{S}, \qquad x=\frac{pS}{k}, \tag{3}$$

де p – тиск газу, S – площа поршня.

За законом Менделєєва - Клапейрона для 1 моля ідеального газу $pV = RT$. При деформації x пружини об'єм газу під поршнем дорівнює $V = xS$, а тиск:

$$p=\frac{RT}{xS}. \tag{4}$$

Підставимо значення (4) у (3) та отримаємо:

$$x^2=\frac{RT}{k}. \tag{5}$$

Отже, зміна потенційної енергії стисненої пружини при нагріванні системи:

$$\Delta U_2=\frac{R}{2}(T_2-T_1).$$

Повна зміна енергії системи:

$$\Delta U=\Delta U_1+\Delta U_2=2R(T_2-T_1),$$

а теплоємність системи:

$$C=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\frac{\Delta U}{T_2-T_1}=2R.$$

3.2.12. Вертикальна теплоізольована посудина закрита важким рухливим поршнем масою M. На поршень згори поміщена гиря масою m, під поршнем знаходиться деяка кількість кисню при температурі T_0. Гирю знімають і чекають деякий час - доки поршень повністю не зупиниться. Після цього її акуратно ставлять на поршень. Знайдіть висоту, на якій поршень остаточно зупиниться. Початкове положення рівноваги поршня з гирею знаходиться на висоті H над дном посудини. Поршенъ рухається без тертя, теплоємністю поршня і стінок можна знехтувати, зовнішній тиск не враховувати.

Розв'язок. При порушенні рівноваги поршень починає коливатися. Енергія коливань передається газу в процесі встановлення рівноваги, тому рівнянням адіабатичного процесу користуватися не можна.

Коли з поршня знімається гиря, поршень підніметься і зупиниться в новому положенні рівноваги на висоті h_1, тому можна записати рівняння стану газу у вигляді:

$$\frac{(M+m)g}{S}SH=\nu RT_0, \tag{1}$$

$$\frac{(M+m)g}{S}Sh_1=\nu RT_1, \tag{2}$$

де S – площа перетину посудини, T_1 – нова температура газу.

Кисень – двоатомний газ, тому закон збереження енергії буде мати такий вигляд:

$$Mg(h_1-H)=\frac{5}{2}\nu R(T_0-T_1). \tag{3}$$

З рівнянь (1) – (3) отримуємо

$$h_1 = H\left(1 + \frac{5}{7}\frac{m}{M}\right). \quad (4)$$

Після того як знову поставили гирю на поршень, нове положення рівноваги на висоті h_2 визначимо зі співвідношень:

$$(M+m)gh_2 = \nu RT_2, \quad (5)$$

$$(M+m)g(h_1 - h_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1), \quad (6)$$

Звідки

$$h_2 = h_1 \frac{1 + \frac{2}{7}\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = H\left(1 + \frac{5}{7}\frac{m}{M}\right)\left(1 + \frac{2}{7}\frac{m}{M}\right) \Big/ \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Висновок з розв'язку задачі: над системою була виконана робота зовнішніми силами — гирю зняли, коли вона була на висоті H, а знову поставили, коли вона була на висоті h_1.

3.2.13. У вертикальній посудині висотою H = 0,1 м та площею перерізу S = 1 см^2 при температурі T_1 = 273 К та атмосферному тиску знаходиться повітря та невелика кількість води. Посудину закривають зверху рухомим поршнем масою M = 1,5 кг і дають поршню рухатися. Після того як поршень зупинився, посудину починають повільно нагрівати і доводять до температури T_2 = 373 К. Яку кількість теплоти надали при цьому системі? Теплоємністю поршня та посудини можна знехтувати. Теплота пароутворення $r = 2{,}3 \cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Розв'язок. Якщо вважати, що не вся вода перетворилася в пару, тоді ця пара буде насиченою та матиме тиск $p_0 = 10^5$ Па при T_2 = 373 К. Оскільки нагрівання відбувається повільно і поршень піднімається, то в будь-який момент поршень буде в рівновазі, тобто

$$(p_0 + p_{пар})S = p_0 S + Mg, \quad (1)$$

або, якщо через h позначити висоту, на яку піднявся поршень, то рівняння (1) можна переписати так:

$$p_0 \frac{H}{h} + p_{пар} = p_0 + \frac{Mg}{S}. \quad (2)$$

З рівняння (2) отримаємо:

$$h = \frac{p_0 SH}{Mg} = \frac{10^5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1}{1{,}5 \cdot 9{,}8} = 0{,}068\,\text{м}.$$

Підрахуємо масу пари в посудині, скориставшись рівнянням стану ідеального газу:

$$p_0 V = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

$$m=\frac{p_0hS\mu}{RT_2}=\frac{10^5\cdot 0{,}068\cdot 10^{-4}\cdot 18\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 373}=3{,}95\cdot 10^{-6}\,\text{кг}.$$

Щоб ця маса води випаровувалась, необхідно надати теплову енергію

$$Q_1=rm=2{,}3\cdot 10^6\cdot 3{,}95\cdot 10^{-6}=9\ \text{Дж}.$$

Повітря в посудині нагрівається при сталому тиску, тому молярна теплоємність

$$C_p=C_V+R=\frac{7}{2}R,$$

і на нагрівання повітря необхідна енергія

$$Q_2=C_p\nu\Delta T=\frac{3{,}5Rp_0HS\Delta T}{RT_1}=\frac{3{,}5\cdot 10^5\cdot 0{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 100}{273}=1{,}28\ \text{Дж}.$$

Кількість теплоти, яка йде на нагівання води на 100К,

$$Q_3=cm\Delta T=4200\cdot 3{,}95\cdot 10^{-6}\cdot 100=1{,}66\ \text{Дж}.$$

Отже, сумарна кількість теплоти, яку надали системі,

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3=9+1{,}28+1{,}66=11{,}94\ \text{Дж}.$$

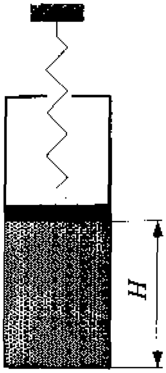


Рис. 1

3.2.14. У вертикально розташованої циліндричній посудині під поршнем вагою P = 20 Н знаходиться ідеальний одноатомний газ (рис. 1).

Між поршнем та нерухомою опорою розташована пружина, жорсткість якої k = 200 Н/м. Відстань між поршнем та дном посудини H = 30 см, при цьому пружина недеформована. Яку кількість теплоти треба передати газу, щоб поршень перемістився на відстань $\Delta h=10$ см. Атмосферний тиск не враховувати.

Розв'язок. За першим законом термодинаміки кількість теплоти, яку треба надати газу,

$$Q=\Delta U+A, \tag{1}$$

де

$$A=P\Delta h+\frac{k\Delta h^2}{2} \tag{2}$$

робота, яку виконає газ, щоб підняти поршень на висоту Δh, та подолати силу пружності пружини, яка, як і вага поршня, спрямована вертикально вниз:

Зміна внутрішньої енергії газу

$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1). \tag{3}$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона для початкового положення поршня

$$p_1HS=\nu RT_1, \tag{4}$$

де тиск $p_1=\dfrac{P}{S}$.

Звідки

$$T_1 = \frac{PH}{\nu R}.$$ (5)

Коли газ нагріється від того, що отримає тепло Q, то рівняння стану зміниться на

$$\left(\frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}\right)(H + \Delta h)S = \nu RT_2.$$ (6)

Звідки температура буде дорівнювати:

$$T_2 = \frac{1}{\nu R}(P + k\Delta h)(H + \Delta h).$$ (7)

Зміна внутрішньої енергії газу з (3), ураховуючи (5) та (7), буде:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left[(P + k\Delta h)(H + \Delta h) - PH\right] = \frac{3\Delta h}{2}(P + kH + k\Delta h)$$ (8)

З урахуванням (2) та (8)

$$Q = \frac{3\Delta h}{2}(P + kH + k\Delta h) + P\Delta h + \frac{k\Delta h^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta h(5P + 4k\Delta h + 3kH) = 18\text{ Дж}.$$

3.2.15. Одноатомний ідеальний газ під час розширення виконує роботу $A = 165$ Дж, причому значення теплоємності газу в цьому процесі залишається сталим. Потім газу надають при постійному об'ємі кількість теплоти $Q = 125$ Дж, після чого його температура стає такою, якою вона була в початковий момент. Визначити молярну теплоємність газу в обох процесах.

Розв'язок. У другому процесі газ нагрівається, отже, у першому він охолоджувався. Позначимо молярні теплоємності через c_1 і c_2, відповідно. Зрозуміло, що $c_2 = c_V = \frac{3}{2}R$. Якщо кількість молів газу ν, то в першому процесі газ отримає кількість теплоти

$$\Delta Q_1 = \nu c_1 \Delta T, (\Delta T < 0).$$

Зміна внутрішньої енергії у першому процесі за значенням така сама, як і в другому процесі

$$\nu c_1 \Delta T = A + \nu c_V \Delta T$$

В ізохорному процесі робота дорівнює нулю, отже,

$$Q = -\nu c_V \Delta T$$

Тоді

$$c_1 = \frac{Q - A}{Q} c_V \approx -4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

3.2.16. Невеликий балон із залишками аргону під'єднали для поповнення до великого резервуара, де тиск аргону в два рази вищий, ніж у балоні. У балоні й резервуарі газ перебував при кімнатній температурі $T_0 = 293$ К. Яку температуру T матиме газ у балоні відразу після заповнення? Теплоємністю балона і теплообміном з навколишнім середовищем можна знехтувати.

Розв'язок. Позначимо через ν_0 кількість аргону в балоні, ν — додаткову кількість аргону, впущену в балон, Запишемо рівняння Клапейрона для початкового і кінцевого станів

$$p_0V = \nu_0RT_0;\ PV = (\nu_0 + \nu)RT.$$

За рахунок роботи над газом, який впускають у балон, збільшується внутрішня енергія газу

$$\nu RT_0 = \frac{3}{2}(\nu + \nu_0)R(T - T_0).$$

Розв'язавши знайдені рівняння відносно T, дістанемо

$$T = T_0\frac{5}{3 + \dfrac{2p_0}{p}} = \frac{5}{4}T_0 = 366\,\text{K}.$$

3.2.17. Під час роботи в приміщенні з температурою t_1 = 20°C холодильник з терморегулятором підтримує в камері температуру t_2 = - 20°C, споживаючи з мережі потужність P_1 = 80 Вт. Як зміниться ця потужність, якщо температура в приміщенні знизиться до t_3 = - 10°C? Уважати, що холодильник працює як оборотна ідеальна теплова машина.

Розв'язок. Холодильник відбирає за цикл кількість теплоти $Q_х$ від холодного тіла і передає кількість теплоти $Q_г$ гарячому за рахунок виконаної над тілом роботи A. Як і для звичайного циклу

$$Q_Г = Q_X + A;\ A = Q_Г\frac{T_Г - T_X}{T_Г} = Q_X\frac{T_Г - T_X}{T_X}$$

Уважаючи, що кількість переданої теплоти пропорційна різниці температур, дістанемо

$$Q_X = k(T_Г - T_X).$$

Споживана потужність у першому і другому випадках:

$$P_1 = Q_X\frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{k(T_1 - T_2)^2}{T_2};\ P_2 = \frac{k(T_3 - T_2)^2}{T_2}.$$

Тоді

$$P_2 = P_1\frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1}{16}p_1 = 5\,\text{Вт}.$$

3.2.18. Реактивний двигун ракети розвиває силу тяги F. У камеру згоряння двигуна надходить водень і необхідна для його згоряння кількість кисню. Масова витрата (маса в одиницю часу) водню дорівнює m. Визначити температуру у вихідному перерізі сопла ракети, якщо тиск газів у цьому перерізі p, а його площа S.

Розв'язок. З першого закону термодинаміки

$$Q = A + \Delta U, \tag{1}$$

де $Q = qm$, q - питома теплота згорання водню, A — робота, яку виконують продукти згорання водню,

$$\Delta U = \frac{i}{2} R\Delta T \text{ —} \qquad (2)$$

зміна внутрішньої енергії.

У результаті реакції водню з киснем:

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

бачимо, що при згоранні одного моля водню одержується один моль води.

Сила тяги ракети: $F_p = u_2 \frac{dm}{dt}$, де u_2 - відносна швидкість вильоту газів з ракети, $\frac{dm}{dt}$ - швидкість зменшення маси ракети в результаті згорання, тобто викидання продуктів згорання з ракети (продукт згорання - вода)

$$u_2 = \frac{F_p dt}{dm}.$$

Гази, що вилітають з ракети зі швидкістю u_2 виконують роботу

$$A = \frac{m_1 u_2^2}{2}.$$

З рівнянь (1) та (2) маємо: $\Delta U = Q - A$, або

$$\frac{i}{2} R\Delta T = qm - \frac{m_1 u_2^2}{2}.$$

Звідси

$$\Delta T = \frac{2}{iR}\left[qm - \frac{m_1}{2}\left(\frac{F_p dt}{dm}\right)^2\right]$$

Секундна витрата водню під час роботи двигуна дорівнює 24 кг/с. Отже, двигун розвиває потужність

$$P = 1{,}1 \cdot 10^8 \text{ Дж/кг} \cdot 24 \text{ кг/с} = 26{,}4 \cdot 10^8 \text{ Вт}.$$

З рівняння реакції згоряння водню

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

видно, що під час згоряння 1 кмоль H_2 (2 кг) утворюється 1 кмоль пари H_2O (18 кг). Отже, щосекунди при згорянні 24 кг H_2 із сопла двигуна вилітає 216 кг пари H_2O. Таким чином, корисна потужність двигуна дорівнює

$$P_k = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \approx 19 \cdot 10^8 \text{ Вт}.$$

ККД ракетного двигуна дорівнює

$$\eta = \frac{P_k}{P} \approx 0{,}72 = 72\,\%.$$

Оскільки пара за час Δt = 1 с набуває імпульсу $m|\vec{\upsilon}|$, то діюча на неї сила дорівнює

$$\frac{m|\vec{\upsilon}|}{\Delta t} \approx 9 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Отже, сила тяги ракетного двигуна

$$F_p = 9 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

3.2.19. Для визначення відношення теплоємкостей газу при постійному об'ємі й при постійному тиску іноді застосовується наступний метод. Певна кількість газу, початкова температура, об'єм і тиск якого рівні відповідно T_0, V_0 і p_0, нагрівається платиновим дротом, через який упродовж певного часу проходить електричний струм, *один* раз при постійному об'ємі V_0, причому газ досягає тиску p_1, інший раз при постійному тиску p_0, причому об'єм газу стає рівним V_1. Показати, що

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_1 - V_0)p_0}.$$

Розв'язок. Оскільки дріт нагрівається одним і тим же струмом упродовж одного і того ж часу, то газ в обох випадках отримує одну і ту ж кількість тепла. Якщо газ нагрівається при постійному об'ємі, то кількість тепла, що отримується газом, рівна

$$Q = c_V m(T - T_0).$$

Запишемо рівняння стану газу:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0,$$

і

$$p_1 V_0 = \nu R T,$$

де ν – кількість молей газу, T — температура газу при тиску p_1.

Звідки

$$T - T_0 = \frac{V_0(p_1 - p_0)}{\nu}$$

і

$$Q = c_V m \frac{V_0(p_1 - p_0)}{\nu}. \qquad (1)$$

При нагріванні при постійному тиску газ отримує кількість тепла

$$Q = c_p m(T' - T_0).$$

З рівняння стану ідеального газу

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \qquad p_0 V_1 = \nu R T'$$

маємо

$$T' - T_0 = \frac{p_0(V_1 - V_0)}{\nu},$$

і

$$Q = c_p m \frac{p_0(V_1 - V_0)}{\nu}. \qquad (2)$$

Розділивши рівність (1) на рівність (2), отримаємо

$$1=\frac{c_V}{c_p}\frac{V_0(p_1-p_0)}{p_0(V_1-V_0)}.$$

Звідки

$$\frac{c_p}{c_V}=\frac{V_0(p_1-p_0)}{p_0(V_1-V_0)}.$$

3.2.20. У циліндрі під невагомим поршнем площею S знаходиться повітря при атмосферному тиску p_0 і температурі T_0. Внутрішній об'єм циліндра розділений на дві рівні частини нерухомою горизонтальною перегородкою з маленьким отвором. На поршень кладуть вантаж маси M, під дією якого поршень доходить до перегородки. Знайти температуру T_1 повітря в циліндрі, якщо стінки циліндра і поршень не проводять тепло.

Розв'язок. Оскільки посудина теплоізольована, то зміна внутрішньої енергії газу дорівнює роботі зовнішніх сил, що діють на поршень, - сили тяжіння Mg і сили атмосферного тиску p_0S:

$$\Delta U=(Mg+p_0S)h,$$

де h - хід поршня.

Оскільки внутрішня енергія газу залежить тільки від температури, то в будь-якому процесі зміна внутрішньої енергії така ж, як в процесі, що відбувається при постійному об'ємі, тобто

$$\Delta U=\nu C_V(T_1-T_0).$$

Тут C_V - теплоємність одного моля газу при постійному об'ємі, ν — кількість молей газу. Тому в нашому випадку

$$(Mg+p_0S)h=\nu C_V(T_1-T_0).$$

Звідси

$$T_1=T_0+\frac{(Mg+p_0S)h}{\nu C_V} \qquad (1)$$

Кількість молей повітря в циліндрі можна знайти з рівняння стану газу до стиснення:

$$p_0V=\nu RT_0.$$

Звідки

$$\nu=\frac{p_0V}{RT_0}$$

Повітря складається переважно з двох атомів газів — азоту і кисню. Тому можна вважати $C_V=\frac{5}{2}R$. Підставляючи значення ν, C_V й $h=V/2S$ в (1), остаточно знаходимо

$$T_1=T_0\left(1+\frac{Mg+p_0S}{5p_0S}\right).$$

3.2.21. Циліндр, виготовлений з нетеплопровідного матеріалу, розділений нетеплопровідною перегородкою на дві частини, об'єми яких V_1 і V_2. У першій частині знаходиться газ при температурі T_1 під тиском p_1. У другій - такий же газ, але при температурі T_2 і під тиском p_2. Яка температура встановиться в циліндрі, якщо прибрати перегородку?

Розв'язок. Оскільки стінки циліндра зроблені з нетеплопровідного матеріалу, то, незалежно від того, який процес відбувається з газом в циліндрі при його перемішуванні, із закону збереження енергії випливає

$$cm_1(T-T_1)=cm_2(T_2-T).$$

Тут c — питома теплоємність газу, m_1 і m_2 — маси газу відповідно в першій і в другій частинах циліндра і T — температура, яка встановиться в циліндрі після того як настане рівновага. З цієї формули (рівняння теплового балансу) після нескладних перетворень отримаємо

$$T=\frac{(m_1/m_2)T_1+T_2}{1+\dfrac{m_1}{m_2}}.$$

Співвідношення m_1/m_2 неважко знайти, скориставшись рівнянням газового стану. Для газу в частинах циліндра до того як прибрали перегородку можна записати

$$p_1V_1=\frac{m_1}{M}RT_1 \text{ й } p_2V_2=\frac{m_2}{M}RT_2.$$

Розділивши першу рівність на другу, отримаємо

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1V_1T_1}{P_2V_2T_2},$$

тоді остаточно

$$T=\frac{T_1T_2(p_1V_1+p_2V_2)}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}.$$

3.2.22. У теплоізольованому балоні знаходиться 5 г водню і 12 г кисню. Суміш підпалюють. Визначити тиск і температуру в посудині, якщо відомо, що при утворенні 1 моля води виділяється кількість теплоти Q_0 =2,4·10^5 Дж. Об'єм посудини 100 літрів. Початкова температура суміші кисню і водню t_0 = 20°C. Питома теплоємність водню при постійному об'ємі дорівнює $c_в$ = 14,3 кДж/(кг·град), а водяних парів – $c_п$ = 2,1 кДж\(кг·град).

Розв'язок. При горінні суміші відбувається хімічна реакція

$$2H_2+O_2=2H_2O,$$

в результаті якої утворюється вода (точніше, водяні пари). При цьому 2 моля (чи 4 г) водню з'єднуються з 1 молем (чи 32 г) кисню. Оскільки в посудині є тільки 12 г кисню, в реакції візьмуть участь $\dfrac{4\cdot 12}{32}=1{,}5$г водню, і утвориться m_1 = 13,5 г водяної пари. Інші m_2 = 3,5 г водню не прореагують і будуть присутніми в посудині разом з водяними парами. Оскільки молярна маса води дорівнює 18 г/моль, 13,5 г води складають $\nu = \frac{13,5}{18}$ моля і при згоранні суміші виділяється кількість теплоти $Q = \nu Q_0 = 1,8 \cdot 10^5$ Дж

Ця енергія йде на збільшення внутрішньої енергії водяної пари і водню

$$Q = (c_n m_1 + c_в m_2)\Delta T,$$

де $\Delta T = T - T_0$ – зміна температури газів. Звідси знайдемо T:

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{Q}{c_n m_1 + c_в m_2} \approx 2800\text{К}.$$

За законом Дальтона тиск у посудині дорівнює сумі парціальних тисків водяної пари і водню:

$$p = p_n + p_в.$$

Згідно з рівнянням газового стану

$$p_n = \frac{m_1}{\mu_n}\frac{RT}{V} \text{ і } p_в = \frac{m_2}{\mu_в}\frac{RT}{V}.$$

Отже,

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_n} + \frac{m_2}{\mu_в}\right)\frac{RT}{V} \approx 5,6 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

3.2.23. У проточному калориметрі (рис. 1) досліджуваний газ пропускають по трубопроводу і нагрівають за допомогою спіралі. Газ надходить в калориметр при температурі t_1 = 20°С. При потужності нагрівача W_1 = 1 кВт і витраті газу m_1 = 540 кг/година температура газу за нагрівачем виявилася такою ж, як при потужності нагрівача W_2 = 2 кВт і витраті газу m_2 = 720 кг/годину. Тиск газу в трубі всюди однаковий. Знайдіть температуру газу t_2, якщо його теплоємність при постійному об'ємі C_V = 21 Дж/ (К·моль), а молярна маса газу μ = 29 кг/кмоль.

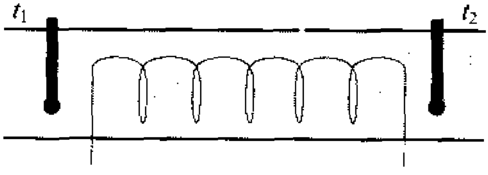


Рис. 1

Розв'язок. Енергія, що виділяється нагрівачем, витрачається на зміну внутрішньої енергії газу ΔU, здійснення роботи A і на втрати енергії із-за тепловідводу від калориметра. Ці втрати залежать від різниці температур калориметра і середовища. Оскільки температури в першому і другому випадках однакові, однакові і втрати енергії. Отже

$$W_1 = \Delta U_1 + A_1 + Q,$$
$$W_2 = \Delta U_2 + A_2 + Q,$$

звідки,

$$W_2 - W_1 = \Delta U_2 - \Delta U_1 + A_2 - A_1.$$

Але

$$\Delta U = c_V \frac{m}{\mu}(t_2 - t_1),$$

$$A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R(t_2 - t_1).$$

Отже,

$$W_2 - W_1 = \frac{c_V}{\mu}(t_2 - t_1)(m_2 - m_1) + \frac{R}{\mu}(t_2 - t_1)(m_2 - m_1).$$

Звідки

$$t_2 - t_1 = \frac{(W_2 - W_1)\mu}{(c_V + R)(m_2 - m_1)} \approx 20^0\text{C}.$$

$$t_2 \approx 40^0\text{C}.$$

3.2.24. У балоні міститься очищений газ, але невідомо який. Щоб підняти температуру 1 кг цього газу на один градус при постійному тиску, потрібна енергія 958,4 Дж, а при постійному об'ємі – 704,6 Дж. Що це за газ?

Розв'язок: При нагріванні газу при постійному об'ємі енергія, що витрачається, йде тільки на зміну внутрішньої енергії газу, а при нагріванні при постійному тиску - ще і на здійснення роботи.

Запишемо закон збереження енергії для обох випадків:

$$mc_V\Delta T = \Delta U, \tag{1}$$

$$mc_p\Delta T = \Delta U + A, \tag{2}$$

де c_p – питома теплоємність газу при постійному тиску (тобто кількість тепла, яка необхідна для нагрівання 1 кг газу на один градус при постійному тиску), c_V – питома теплоємність газу при постійному об'ємі, ΔT – зміна температури, ΔU – зміна внутрішньої енергії газу, m – маса газу, $A = p\Delta V$ – робота виконана при розширенні газу (ΔV – зміна об'єму, p – тиск).

Оскільки при підвищення температури газу на однакову кількість градусів зміна його внутрішній енергії однакова як при нагріванні при постійному об'ємі, так і при нагріванні при постійному тиску, то можна записати:

$$c_p m\Delta T = c_V m\Delta T + p\Delta V. \tag{3}$$

За допомогою рівняння газового стану (рівняння Клапейрона - Менделєєва) виконану газом роботу можна виразити через молярну масу газу μ і газову постійну R:

$$p\,\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Підставляючи це співвідношення в рівняння (3), отримаємо:

$$c_p = c_V + \frac{R}{\mu},$$

звідки

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_V} = \frac{8{,}31}{958{,}4 - 704{,}6} \approx 32{,}7 \text{ (кг/кмоль)}.$$

Отже, невідомий газ – кисень з дуже невеликою домішкою більш важкого газу.

3.2.25. Дві паралельні пластини знаходяться на відстані, малій у порівнянні з їх розмірами. Між пластинами поміщають декілька тонких перегородок-екранів, які добре проводять тепло. Як це впливає на теплопровідність між пластинами, якщо довжина вільного пробігу молекул газу, що заповнює простір між пластинами, тобто середня відстань, яку пролітають молекули газу між двома зіткненнями, а) мала в порівнянні з відстанню між екранами; б) велика в порівнянні з відстанню між пластинами?

Розв'язок. Ясно, що при сталому процесі потік тепла (тобто кількість тепла в одиницю часу) через будь-який перетин, паралельний пластинам, буде постійним.

Розглянемо спочатку випадок *а*) коли довжина вільного пробігу молекул газу мала в порівнянні з відстанню між екранами. У цьому випадку перенесення тепла пов'язане з безладним тепловим рухом молекул газу. При тепловому русі відбувається обмін молекулами газу між дуже близькими областями газу з різною температурою. При зіткненні молекули, що мають велику енергію, віддають частину енергії молекулам з меншою енергією. При цьому потік тепла між будь-якими двома перетинами, паралельними пластинами, пропорційний різниці температур цих перетинів і обернено пропорційний відстані l між перетинами: $Q \approx \frac{T_2 - T_1}{l}$, або $Q = \chi \frac{\Delta T}{l}$, де χ — коефіцієнт теплопровідності. При внесенні екранів кожен з них прийме температуру газу в тому місці, де він знаходиться. Розподіл температури в просторі між пластинами не змінюється, а значить, не зміниться і теплопровідність між пластинами - кількість тепла, що переноситься між пластинами в одиницю часу. При малій відстані вільного пробігу молекул газу обмін молекулами відбувається між областями, що знаходяться на відстані, рівній приблизно довжині вільного пробігу молекул. Тому екрани, відстань між якими набагато більше довжини вільного пробігу, не можуть вплинути на теплопровідність між пластинами.

У випадку *б*) коли довжина вільного пробігу молекул газу більше відстані між пластинами, звичайне поняття теплопровідності в газі - явища, пов'язаного із зіткненнями молекул газу, взагалі кажучи, втрачає сенс. Але перенесення тепло, звичайно, існує і в цьому випадку. Представити його можна так: молекули газу при ударах об більш нагріту пластину набувають деякої енергії і, відбившись, летять до холоднішої пластини; там вони віддають частину енергії і відбиваються від холодної пластини з енергією, відповідній температурі цієї пластини. Кількість тепла, що переноситься між пластинами, не залежить від відстані між ними і пропорційна різниці температур між пластинами і кількості ударів молекул об стінки.

При внесенні скранів кількість ударів молекул об екрани буде такою же, як і кількість ударів об пластини до внесення екранів. Але тепер кількість тепла, яка переноситиметься з однієї пластини на іншу, пропорційна не різниці температур пластин, а різниці температур між сусідніми екранами: перенесення тепла між пластинами таке ж як між двома сусідніми екранами, а перенесення між екранами пропорційне різниці їх температур. Оскільки при внесенні екранів відстань між ними в $k + 1$ раз менше відстані між пластинами (при внесенні k екранів утворюється $k + 1$ проміжок), то різниця температур сусідніх екранів в $k + 1$ раз менше різниці температур пластин − сума різниць температур між пластинами дорівнює різниці температур пластин: $\Delta T = \Delta T_1 + T_2 + ...\Delta T_{k+1} = (k+1)\Delta T$. Це означає, що кількість тепла, що переноситься за одиницю часу між пластинами, при внесенні пластин зменшується в $k + 1$ раз.

3.2.26. Температура стінок посудини, у якій знаходиться газ, рівна T. Температура газу — T_1. У якому випадку тиск газу на стінки посудини більший: коли стінки посудини холодніші за газ ($T<T_1$) або коли тепліше ($T>T_1$)?

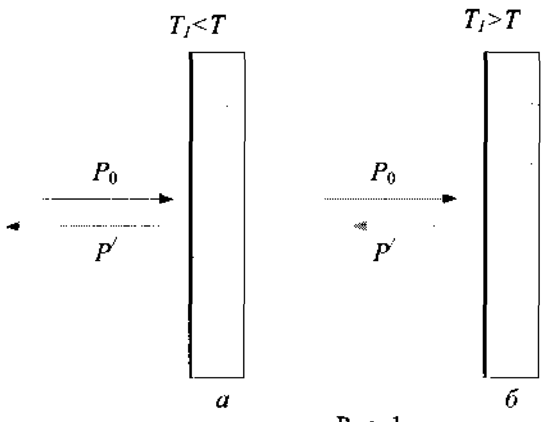


Рис. 1

Розв'язок. Температура газу визначається середньою кінетичною енергією його молекул:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

(k — постійна Больцмана). Це означає, що чим вище температура газу, тим більше середня швидкість руху його молекул, тобто тим більше середній імпульс молекули. Якщо температура стінки збігається з температурою газу, то молекула, ударяючись об стінку, змінює свій імпульс $\vec{p}_0$ на $-\vec{p}_0$. Значить, зміна імпульсу рівна $2p_0$. Коли $T > T_1$, газ нагрівається. Це означає, що молекули газу відскакують від стінки з більшою швидкістю, чим налітають, а значить і з більшим імпульсом. Зміна імпульсу в цьому випадку буде більша, ніж $2p_0$.

Якщо ж $T_1 < T$, то газ охолоджується, тобто молекули газу відскакують від стінки з меншим імпульсом, чим налітають на неї. Ясно, що в цьому випадку і зміна імпульсу молекули менша, ніж у випадку $T_1 > T$. Оскільки відповідно до II закону Ньютона зміна імпульсу пропорційна середній силі, що діяла на молекулу з боку стінки, а відповідно до III закону Ньютона середня сила, що діяла на молекулу, чисельно дорівнює середній силі, що діяла на стінку, то при $T_1 < T$ тиск газу на стінку більший, ніж при $T_1 > T$.

3.2.27. Один моль газу стискають так, що його об'єм під час процесу стискання пропорційний тиску ($V = \alpha P$). Тиск газу збільшується від P_1 до P_2. Знайдіть коефіцієнт α, якщо теплоємність цього газу при постійному об'ємі рівна c і під час процесу газу надасться кількість тепла Q.

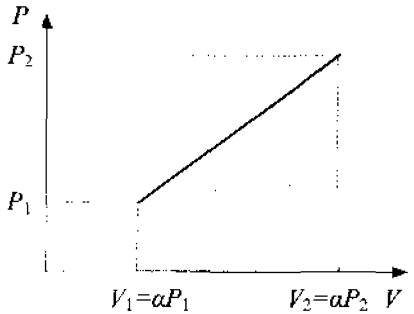


Рис. 1

Розв'язок. Із закону збереження енергії випливає, що кількість тепла, наданого газу під час процесу, дорівнює сумі зміни внутрішній енергії газу $\Delta W_{вн}$ і роботи A, здійсненої газом під час процесу:

$$Q = \Delta W_{вн} + A. \qquad (1)$$

Зміна внутрішній енергії газу така сама, якою вона була б при ізохоричному процесі — ця зміна визначається різницею температур газу ΔT:

$$\Delta W_{вн} = c_V \Delta T.$$

Тому

$$Q = c_V \Delta T + A. \qquad (2)$$

Робота, виконана газом, дорівнює площі трапеції під графіком залежності P від V:

$$A = (V_2 - V_1)\frac{(P_2 + P_1)}{2} = \frac{(\alpha P_2 - \alpha P_1)(P_2 + P_1)}{2} = \frac{\alpha\left(P_2^2 - P_1^2\right)}{2}.$$

Отже,

$$Q = c_V \Delta T + \frac{\alpha\left(P_2^2 - P_1^2\right)}{2}. \qquad (3).$$

Виразимо ΔT через $P1$ і $P2$. Запишемо рівняння газового стану для початкового і кінцевого станів газу: $P_1V_1 = RT_1$, $P_2V_2 = RT_2$, або $\alpha P_1^2 = RT_1$, $\alpha P_2^2 = RT_2$.

Віднімаючи з другої рівності першу, знайдемо $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\alpha\left(P_2^2 - P_1^2\right)}{R}$.

Тепер, підставивши цей вираз для ΔT у формулу (3), отримаємо

$$Q = \frac{c_V\alpha}{R}\left(P_2^2 - P_1^2\right) + \frac{\alpha}{2}\left(P_2^2 - P_1^2\right).$$

Звідси

$$\alpha = \frac{2QR}{(2c_V + R)\left(P_2^2 - P_1^2\right)}.$$

3.2.28. У розташованому горизонтально циліндрі з одного боку від закріпленого поршня знаходиться 1 моль ідеального газу. В іншій частині циліндра вакуум. Пружина, розташована між поршнем і стінкою циліндра, знаходиться в недеформованому стані. Циліндр теплоізольований від навколишнього ссредовища. Поршень звільнили, і після встановлення рівноваги об'єм, який займає газ, збільшився вдвічі. Як змінилися температура газу і його тиск? Теплоємностями циліндра, поршня і пружини нехтуємо.

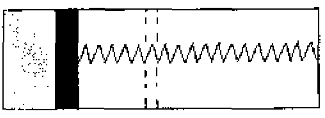


Рис. 1

Розв'язок. Згідно першого закону термодинаміки кількість тепла Q, наданого газу, дорівнює сумі зміни внутрішній енергії газу ΔU і досконалої ним роботи A:

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Але в даному випадку посудина теплоізольована і $Q = 0$. Отже,

$$\Delta U + A = 0. \quad (2)$$

Тобто робота газу здійснюється за рахунок зменшення його внутрішньої енергії: тому відразу можна сказати, що температура газу зменшується.

Нехай спочатку температура газу була T_1, тиск P_1 і об'єм V_1, а після того як поршень звільнили і встановилася рівновага, параметри газу стали відповідно T_2, P_2 і V_2, причому $V_2 = 2V_1$ (за умовою).

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу пропорційна зміні температури газу і рівна

$$\Delta U = c_V(T_2 - T_1), \quad (3),$$

де c_V - теплоемкость 1 моля газу при постійному об'ємі.

Робота, здійснена газом, дорівнює зміні потенційній енергії деформованої пружини:

$$A = \frac{kx^2}{2} \quad (4)$$

(x – зсув поршня).

Виразимо величину $\frac{kx^2}{2}$ через параметри газу. Оскільки поршень після встановлення рівноваги *знаходиться у спокої, то сила пружності пружини* $F = kx$ дорівнює силі тиску газу P_2S (S – площа поверхні поршня):

$$kx = P_2 S. \tag{5}$$

Тиск же газу пов'язаний з його температурою рівнянням газового стану. Для одного моля газу

$$P_2 V_2 = RT_2. \tag{6}$$

Оскільки об'єм газу при його розширенні збільшується вдвічі, а зміна об'єму газу рівна Sx, то $V2 = 2Sx$, і, отже

$$2P_2 Sx = RT_2. \tag{7}$$

Зважаючи на співвідношення (5) і (7), можна записати

$$kx = \frac{RT_2}{2x} \tag{8}$$

і

$$kx^2 = \frac{RT_2}{2}. \tag{9}$$

Таким чином, робота виконана газом, рівна

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{RT_2}{4}. \tag{10}$$

Підставимо вирази (3) і (10) у рівність (2):

$$c_V\left(T_2 - T_1\right) + \frac{1}{4} RT_2 = 0.$$

Звідси

$$T_2 = T_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_V}}. \tag{11}$$

Дійсно T_2 менше T_1.

Тепер подивимося як зміниться тиск газу. Згідно рівнянню газового стану первинний тиск газу $P1$ і його об'єм $V_1 = \frac{V_2}{2}$ і його температура T_1 були зв'язані формулою $P_1 \frac{V_2}{2} = RT_1$. Розділивши цю рівність на рівність (6), отримаємо

$$\frac{P_1}{P_2} = 2\frac{T_1}{T_2} = 2(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_V}),$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_V})}.$$

Тиск теж зменшився.

3.2.29. Для отримання газів при надвисоких температурах і тисках іноді застосовують установку, що складається з закритого з одного кінця циліндра-стовбура і поршня-кулі, яка влітає в циліндр з відкритою боку. При хорошому обробленні стовбура і кулі вдається домогтися малого витоку газу через зазор. Завдяки дуже високим температурам сильно стиснуті гази в цих умовах ще можна вважати ідеальними. Оцініть верхню межу температури аргону, що зазнає стиснення в такій установці, якщо куля маси m = 100 г влітає в стовбур, який має об'єм V = 200 см^3 з початковою швидкістю υ = 250 м/с Початкові температура і тиск газу дорівнюють відповідно T = 300 К і p = 1 атм.

Розв'язок. При гальмуванні кулі її кінетична енергія переходить у тепло. Для оцінки максимальної температури, до якої може нагрітися газ у циліндрі, будемо вважати, що все тепло йде на зміну внутрішньої енергії газу. Тобто не будемо враховувати втрати енергії на нагрівання кулі і стінок циліндра. Тоді можна записати

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \Delta U\,.$$

Оскільки аргон одноатомний газ, то $U = \frac{3}{2}\nu RT$ (ν — кількість молей газу) і

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu RT_{max} - \frac{3}{2}\nu RT_0 = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{max} - T_0\right).$$

Величину ν можна знайти з рівняння стану ідеального газу:

$$\nu = \frac{p_0 V_0}{RT_0}.$$

Тому

$$\Delta U = \frac{3}{2} p_0 V_0 \frac{T_{max} - T_0}{T_0}.$$

Отже ,

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{3}{2} p_0 V_0 \frac{T_{max} - T_0}{T_0}.$$

Звідки

$$T_{max} = T_0\left(1 + \frac{m\upsilon^2}{3p_0V_0}\right) \approx 30\,000\,\text{K}.$$

3.2.30. У циліндрі під невагомим поршнем площею S знаходиться повітря при атмосферному тиску p_0 і температурі T_0. Внутрішній об'єм циліндра розділений на дві рівні частини нерухомою горизонтальною перегородкою з маленьким отвором. На поршень кладуть вантаж маси M, під дією якого поршень доходить до перегородки. Знайти температуру T_1 повітря в циліндрі, якщо стінки циліндра і поршень не проводять тепло.

Розв'язок. Оскільки посудина теплоізольована, то зміна внутрішньої енергії газу дорівнює роботі зовнішніх сил, що діють на поршень, - сили тяжіння Mg і сили атмосферного тиску p_0S:

$$\Delta U = \left(Mg + p_0 S\right) h,$$

де h - хід поршня.

Оскільки внутрішня енергія газу залежить тільки від температури, то і будь-якому процесі зміна внутрішньої енергії така ж, як в процесі, що відбувається *при постійному об'ємі*, тобто

$$\Delta U = \nu C_V (T_1 - T_0).$$

Тут C_V - теплоємність одного моля газу при постійному об'ємі, ν — кількість молей газу. Тому в нашому випадку

$$(Mg + p_0 S) h = \nu C_V (T_1 - T_0).$$

Звідси

$$T_1 = T_0 + \frac{(Mg + p_0 S) h}{\nu C_V}. \qquad (1$$

Кількість молей повітря в циліндрі можна знайти з рівняння стану газу до стиснення:

$$p_0 V = \nu R T_0.$$

Звідки

$$\nu = \frac{p_0 V}{R T_0}.$$

Повітря складається переважно з двох атомів газів - азоту і кисню. Тому можна вважати $C_V = \frac{5}{2} R$. Підставляючи значення ν, C_V й $h = V/2S$ в (1), остаточно знаходимо

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{Mg + p_0 S}{5 p_0 S} \right).$$

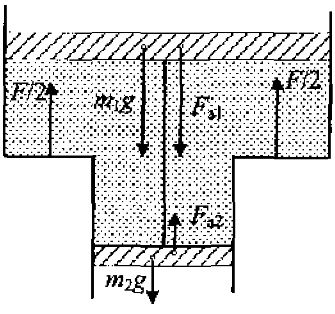


Рис. 1

3.2.31. У розташованому вертикально циліндрі змінного перерізу (рис. 1) між поршнями знаходиться ν молей повітря. Маси поршней m_1 і m_2, їх площі S_1 і S_2 відповідно. Поршні з'єднані стрижнем довжини l і знаходиться на однакових відстанях від стику частин циліндра з різними діаметрами. На скільки зміститься поршні при *підвищенні температури в циліндрі на* Δ градусів?

Розв'язок. Розглянемо систему, що складається з поршнів, повітря, розташованого між ними, і стрижня. Зовнішні вертикальні сили, що діють на цю систему, наступні: сила тяжіння $F_т$ $(|F_т| = (m_1 + m_2)|\vec{g}|)$, сила атмосферного тиску $F_a = F_{a1} + F_{a2}$ $(|F_a| = p_a(S_1 - S_2))$ і сила реакції F на горизонтальній ділянці стінок циліндра. Силою тяжіння повітря можна знехтувати. За третім законом Ньютона сила F дорівнює модулю силі тиску повітря на горизонтальну ділянку циліндра: $F = p(S_1 - S_2)$, де p — тиск повітря між поршнями. При механічній рівновазі системи сума проекцій всіх зовнішніх сил на вертикальну вісь дорівнює нулю: $p(S_1 - S_2) - p_a(S_1 - S_2) = (m_1 + m_2)|\vec{g}| = 0$. (Внутрішні сили — сили тиску повітря на поршні, сила пружності стрижня — на рівновагу не впливають.) З умови рівноваги випливає, що тиск повітря в системі

$$p = p_a + \frac{(m_1 + m_2)|\vec{g}|}{S_1 - S_2}$$

і не залежить від температури. Отже, підвищення температури повітря на Δt градусів відбувається ізобарно, і стан повітря до і після нагрівання можна описати рівняннями

$$p\left(\frac{l}{2}S_1 + \frac{l}{2}S_2\right) = \nu RT,$$

$$p\left(\left(\frac{l}{2} + x\right)S_1 + \left(\frac{l}{2} - x\right)S_2\right) = \nu R(T + \Delta t).$$

Тут R - універсальна газова стала, T початкова температура і x — зміщення поршнів. Віднімаючі перше рівняння з другого, знайдемо зміщення поршнів:

$$x = \frac{nR\Delta t}{p_a(S_1 - S_2) + (m_1 + m_2)|\vec{g}|}.$$

3.2.32. Дві повітряні бульбашки радіусів $r_1 = r_2 = 3$ мм у баці з водою зливаються в одну. Знайдіть радіус отриманої бульбашки, якщо теплопровідність води невелика, а її теплоємність дуже велика. Уважати, що бульбашки знаходяться поблизу поверхні води.

Розв'язок. Оскільки теплопровідність води мала, можна вважати, що процес злиття бульбашок відбувається адіабатно і, отже, зміна ΔU внутрішньої енергії системи дорівнює роботі A зовнішніх сил тиску. Якщо зовнішній тиск дорівнює p_0, а зміна об'єму бульбашок - ΔV, то $A = p_0\,\Delta V$.

Зміна внутрішньої енергії системи дорівнює $\Delta U = \sigma\,\Delta S + \Delta u$. Тут $\sigma\,\Delta S$ — зміна поверхневої енергії за рахунок зміни площі поверхні бульбашок на ΔS (σ — поверхневий натяг води); Δu — зміна внутрішньої енергії повітря.

Внутрішня енергія повітря в результаті злиття бульбашок змінилася на величину

$$\Delta u = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T,$$

де m — маса повітря в бульбашках, ΔT — зміна температури повітря. (Повітря складається переважно з двоатомних молекул азоту і кисню, тому його можна вважати двоатомним газом). Внутрішня енергія одного моля двоатомного газу дорівнює $(5\,/\,2)\,RT$.

Тиск p повітря в бульбашках у нашому випадку залишається практично постійним. Дійсно, тиск p відрізняється від тиску в воді на рівні бульбашок на величину $\dfrac{2\sigma}{r}$ $(r = r_1 = r_2)$ — у кожній бульбашці і після їхнього злитя на величину $\frac{2\sigma}{\rho}$ — у бульбашці радіуса ρ ($\rho > r$). Оскільки злиття відбуваєть

біля поверхні води, можна вважати, що тиск у воді дорівнює атмосферном тобто $p_0 = 10^5$ Н / м^2.

Оскільки $\frac{2\sigma}{r} = \frac{2\cdot 7{,}3\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^{-2}} \approx 49$ Н/м^2 $<< p_0$, можна вважати, що тиск

бульбашках залишається незмінним і рівним p_0. Тому, відповідно до рівнян

газового стану $p_0\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, звідки $\Delta T = p_0\Delta V \frac{\mu}{mR}$.

Таким чином,

$$A = p_0\Delta V = \sigma\,\Delta S + \frac{5}{2}\,p_0\Delta V,\ \text{або}\ \sigma\,\Delta S = -\,\frac{3}{2}p_0\Delta V.$$

Підставляючи в цей вираз $\Delta V = \frac{4}{3}\pi\ (\rho^3\ -\ 2r^3)$ і $\Delta S = 4\pi(\rho^2\ -\ 2r$

отримаємо:

$$p_0\rho^3 + 2\sigma\rho^2 - 2\,p_0\,r^3 - 4\sigma\,r^2 = 0,$$

або, з урахуванням чисельних даних,

$$10^5\rho^3 + 14{,}6\cdot 10^{-2}\rho^2 = 5{,}4\cdot 10^{-3}.$$

Оскільки відомо, що $\rho > 3\cdot 10^{-3}$ м, другий доданок у лівій части рівності малий у порівнянні з першим і ним можна знехтувати. Том $\rho \approx \sqrt[3]{5{,}4\cdot 10^{-8}} \approx 3{,}8\cdot 10^{-3}$ (м), тобто $\rho \approx 3{,}8$ мм.

3.2.33. Теплоізольовану посудину відкачано до глибокого вакуум Одноатомний ідеальний газ, що оточує посудину, має температуру T_0. У деяки момент відкривають кран, і відбувається заповнення посудини газом. Як температуру T матиме газ у посудині відразу після його заповнення?

Розв'язок. Щоб зрозуміти як при заповненні посудини газом змінюєтьс температура, потрібно розглянути енергетичні перетворення, які відбуваютьс при цьому. При відкриванні крану якась порція газу заходить у посуди силами тиску навколишнього газу. Завдяки роботі цих сил газ, що вривається посудину набуває кінетичної енергії спрямованого макроскопічного руху – ві входить у посудину струменем. При зустрічі зі стінками посудини і з газом який вже потрапив у посудину, струмінь змінює напрямок, слабшає і врешті решт розсіюється. При цьому кінетична енергія впорядкованого руху газу струмені перетворюється у внутрішню енергію, тобто енергію хаотично теплового руху його молекул.

Все це відбувається настільки швидко, що теплообміном газу, яки входить у посудину з навколишніми газами і стінками можна знехтувати. Том для всього розглянутого процесу перший закон термодинаміки має вигля робота A сил тиску газу, що оточує посудину над газом, що увійшов посудину, дорівнює зміні внутрішньої енергії ΔU газу, що увійшов:

$$A = \Delta U. \qquad (1$$

При заповненні невеликої посудини, з якої відкачали газ, тиск і температура в атмосфері навколишнього газу залишаються незмінними. Тому для знаходження роботи A уявімо собі, що наша відкачана посудина знаходиться всередині великого циліндра з рухомим поршнем (рис. 1) Циліндр заповнено газом, температура якого T_0; тиск газу в циліндрі p_0.

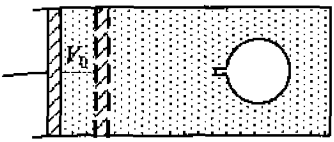


Рис. 1

Процесу заповнення посудини відповідає переміщення поршня праворуч при постійному тиску p_0. Діюча ліворуч на поршень сила здійснює роботу $p_0 \cdot V_0$, де V_0 – об'єм, який «витискується» при переміщенні поршня. Ця робота і буде дорівнювати роботі зовнішніх сил над газом, що заштовхується в посудину, яка нас цікавить, оскільки енергія газу всередині циліндра, який не увійшов у посудину, залишається незмінною. Звернемо увагу на те, що об'єм V_0 не співпадає з внутрішнім об'ємом посудини, що заповнюється, оскільки температура T газу в посудині відрізняється від T_0.

За допомогою рівняння стану ідеального газу роботу A можна виразити через температуру T_0 і кількість газу ν, яка увійшла в посудину:

$$A = p_0 V_0 = \nu R T_0 . \qquad (2)$$

Зміна внутрішньої енергії ΔU газу, який увійшов в посудину, дорівнює

$$\Delta U = \nu \frac{3}{2} R \left(T - T_0\right). \qquad (3)$$

Підставляючи вираз (2) і (3) в рівняння першого закону термодинаміки (1), отримуємо

$$T = 5/3\ T_0.$$

Таким чином, температура газу, який заповнив посудину, буде вищою ніж температура навколишнього газу. Відзначимо, що отриманий результат не залежить ні від об'єму посудини, ні від тиску p_0. Температура газу в посудині не залежить також і від того, чи буде заповнення посудини відбуватися до кінця, поки тиск у ньому не зрівняється з тиском газу в навколишньому середовищі, або кран буде перекритий раніше.

3.2.34. Є дві теплоізольовані посудини. У першій з них знаходиться 5 л води при температурі $t_1 = 60^0$C, в другій – 1 л води при температурі $t_2 = 20^0$C. Спочатку частину води перелили з першої посудини в другу. Потім, коли в другій посудині встановилася теплова рівновага, з неї у першу посудину відлили стільки води, щоб її об'єми в посудинах стали рівні початковим. Після цих операцій температура води в першій посудині стала рівною $t = 59\ ^0$C. Скільки води переливали з першої посудини в другу і назад?

Розв'язок. У результаті двох переливань маса води в першій посудині залишилася незмінною, а її температура зменшилася на $\Delta t_1 = 1\ ^0$C. Отже, енергія води в першій посудині зменшилася на

$$\Delta Q = c_в m_1 \Delta t_1,$$

де $c_в$ – теплоємність води, m_1 – маса води в першій посудині. На величину ΔQ збільшилася енергія води в другій посудині. Тому

$$\Delta Q = c_в m_2 \Delta t_2$$

(m_2 – первісна маса води в другій попосудині). Отже

$$c_в m_1 \Delta t_1 = c_в m_2 \Delta t_2.$$

Звідки

$$\Delta t_2 = \frac{m_1}{m_2}\Delta t_1 = 5^0\text{C}.$$

Температура води в другій посудині дорівнює $t_2' = t_2 + \Delta t_2 = 25^0\text{C}$. Такою вона стала після переливання з першої посудини в другу деякої маси води Δm, що має температуру t_1. Запишемо рівняння теплового балансу:

$$c_в \Delta m\left(t_1 - t_2'\right) = c_в m_2 \left(t_2' - t_2\right).$$

Звідси знаходимо Δm:

$$\Delta m = m_2 \frac{t_2' - t_2}{t_1 - t_2'} - \frac{1}{7}\ \text{кг}.$$

3.2.35. Уявіть собі, що ви перебуваєте в жаркій натопленій лазні, а за вікном – мороз. Куди буде виходити пара, якщо ви відкриєте кватирку?

Розв'язок. Пара буде виходити і на вулицю, і всередину лазні. У лазні вміст парів води в повітрі можна вважати насиченим. Точка роси при високій температурі вище, ніж при низькій. Якщо відкрити кватирку, тепле повітря піде на вулицю, і пари води, які він винесе за вікно, на морозі сконденсуються. Спостерігач з вулиці побачить як виходять через кватирку клуби пари, що піднімаються вгору. Через кватирку всередину лазні буде надходити холодне повітря. Струмені пари води з сусідніх, теплих, шарів повітря, які потрапляють в холодне повітря, будуть конденсуватися. Це холодне повітря важче ніж шари горячого повітря, що навкруги, і спостерігач усередині лазні побачить, що клуби пари з кватирки «падають» на підлогу.

3.2.36. На місяці у вертикальному циліндрі, закритому важким поршнем, знаходиться аргон при температурі T_1. Поршень може переміщатися в циліндрі без тертя. На поршень кладуть обережно другий такий же поршень. Визначте температуру T_2 газу при новому рівноважному положенні поршня. Теплоємність поршня і циліндра, а також тепловіддачу, не враховувати. Газ уважається ідеальним.

Розв'язок. Процес відбувається на Місяці, тому зовнішнім тиском можна знехтувати. Зміна внутрішньої енергії газу дорівнює роботі зовнішньої сили, що діє на газ. Ця сила - вага поршнів. Так що

$$\frac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_2\right) = 2mg_м\left(h_2 - h_1\right). \qquad (1)$$

де ν – кількість молей газу в посудині, m – маса одного поршня, $g_м$ – прискорення вільного падіння на Місяці, h_1 – початкова висота поршнів, h_2 – кінцева висота поршнів.

Запишемо рівняння станів газу:

$$p_1V_1 = p_1h_1S = \nu RT_1, \tag{2}$$

$$p_2V_2 = p_2h_{21}S = \nu RT_2 \tag{3}$$

(S – площа поперечного перерізу посудини). Тиски p_1 і p_2 рівні відповідно

$$p_1 = \frac{mg_м}{S}, \quad p_2 = \frac{2mg_м}{S}. \tag{4}$$

(Це випливає з умов рівноваги поршнів: $p_1S = mg_м$, $p_2S = 2mg_м$.

Розв'язавши спільно рівняння (1) - (4), знаходимо

$$T_2 = 1{,}4T_1.$$

3.2.37. Теплоізольована посудина розділена на дві частини легким поршнем. У лівій частині посудини знаходиться $m_1 = 3г$ водню при температурі $T_1 = 300К$, у правій частині $m_2 = 16г$ кисню при температурі $T_2 = 400К$. Поршень слабо проводить тепло, і температура в посудині поступово вирівнюється. Яку кількість тепла віддасть кисень до того моменту, коли поршень перестане рухатися?

Розв'язок. За умовою завдання тепло передається повільно; значить тиски на поршень з двох сторін практично рівні, тобто в будь-який момент часу

$$\frac{m_1T_1^*}{\mu_1V_1} = \frac{m_2T_2^*}{\mu_2(V-V_1)} \text{ або } \nu_1\frac{T_1^*}{V_1} = \nu_2\frac{T_2^*}{V-V_1}. \tag{1}$$

де T_1^*, T_2^* - температури, відповідно, водню і кисню, V_1 і $(V-V_1)$ - об'єми, які займають гази в цей момент (V – об'єм посудини). Внутрішня енергія двоатомних газу дорівнює $\frac{5}{2}\nu RT$. Відповідно до закону збереження енергії,

$$\frac{5}{2}\nu_1R\left(T_1^* - T_1\right) = \frac{5}{2}\nu_2R\left(T_2^* - T_2\right). \tag{2}$$

З рівнянь (1) і (2) отримуємо

$$\frac{T_1^*}{V_1} = \frac{\nu_1T_1 + \nu_2T_2}{\nu_1V} = \text{const}.$$

Іншими словами, тиск p_1 у лівій частині посудини, де знаходиться водень (а значить, і тиск p_2 у правій частині, де знаходиться кисень), у процесі не змінюється, тобто процес передавання тепла відбувається ізобарично. Поршень

перестане рухатися, коли температури водню і кисню стануть однаковими. Д
того моменту, відповідно до закону збереження енергії,

$$\frac{5}{2}\nu_1 R\left(T_1 - T_1\right) = \frac{5}{2}\nu_2 R\left(T_2 - T\right)$$

(T – температура, що встановилася в посудині). Звідки

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = 325\text{К}.$$

Кількість теплоти, віддана киснем, дорівнює сумі зміни його внутрішньої енергії $\frac{5}{2}\nu_2 R\left(T_2 - T\right)$ і роботі, яку здійснюють над ним $\nu_2 R\left(T_2 - T\right)$:

$$Q = \frac{7}{2}\nu_2 R\left(T_2 - T\right) \approx 1090\text{Дж}.$$

3.2.38. У посудині, що має форму двох циліндрів однакової довжини l та з площами перетинів S і $\alpha S\ (\alpha > 1)$, знаходиться ідеальний газ. Посередині кожного циліндра знаходяться поршні, з'єднані жорстким стержнем (рис. 1); при цьому тиск у відсіку I дорівнює p, у відсіку III тиск дорівнює βp, поршні знаходяться в рівновазі. До системи підвели тепло Q так, що температура зросла, залишившись у всіх відсіках однаковою.

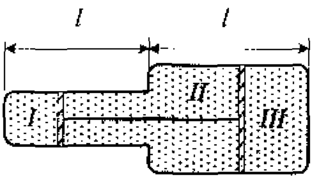


Рис. 1

Визначте, як змінився тиск у відсіку I. Внутрішня енергія одного моля газу дорівнює CT (C – молярна теплоємність). Теплоємкості циліндрів і поршнів малі, тертям знехтувати.

Розв'язок. Нехай V_i, p_i та ν_i – об'єм i-го відсіку, тиск і кількість молей газу в посудині $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Оскільки температура T у всіх відсіках однакова, рівняння Менделєєва - Клайперона дає

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3 = \left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) RT = \nu RT. \tag{1}$$

З цієї ж причини поршні не змістяться, оскільки при постійних об'ємах відношення тисків у відсіках не змінюється, і в будь-який момент часу буде виконана умова рівноваги

$$\left(p_3 - p_2\right)\alpha S + \left(p_2 - p_1\right)S = 0. \tag{2}$$

Використовуючи умову $p_3 = \beta p_1$ з (2) знаходимо

$$p_2 = p_1 \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - 1}. \tag{3}$$

З (3) видно, що завдання має сенс лише при $\alpha\beta >> 1$, оскільки тиск повинен бути позитивним. Підставляючи p_2 і p_3 в (1) Знаходимо зв'язок між тиском у першому відсіку і температурою:

$$p_1 = \frac{\nu RT(\alpha - 1)}{Sl\left(\alpha^2\beta - 1\right)}. \tag{4}$$

Оскільки різниця кінцевої і початкової температур $\Delta T = \dfrac{Q}{\nu C}$ з (4) для зміни тиску Δp маємо

$$\Delta p = \frac{QR(\alpha-1)}{CSl(\alpha^2\beta-1)}.$$

3.2.39. У великій кімнаті взимку підтримується температура $T_к = +15^0\text{C}$ за допомогою трьох радіаторів центрального опалення, з'єднаних послідовно, по яких прокачується гаряча вода. При цьому температура першого радіатора $T_1 = +75^0\text{C}$, а останнього (третього) – $T_3 = +30^0\text{C}$. Чому дорівнює температура другого радіатора? Вважайте, що теплообмін – як між радіатором і кімнатою, так і між гарячою водою і радіатором – пропорційний відповідній різниці температур.

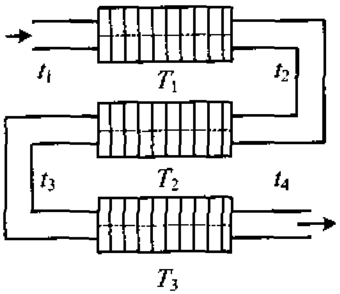


Рис. 1

Розв'язок. Позначимо температуру води на вході й виході радіаторів так, як зображено на малюнку. Температура води на вході кожного радіатора *однозначно визначає* температуру самого радіатора і температуру води на його виході. Умовою рівноваги є рівність потоків тепла «вода – радіатор» і «радіатор – кімната».

Будемо віднімати всі температури від кімнатної, тобто від $T_к$. Припустимо, що ми змінили всі температури в a разів. Тоді у стільки ж разів зміняться обидва потоки тепла для кожного радіатора, і рівновага не порушиться. Це означає, що для всіх трьох радіаторів однакові пропорції температури на вході до температури радіатора:

$$\frac{t_1 - T_к}{T_1 - T_к} = \frac{t_2 - T_к}{T_2 - T_к} = \frac{t_3 - T_к}{T_3 - T_к}$$

і температури на вході до температури на виході:

$$\frac{t_1 - T_к}{t_2 - T_к} = \frac{t_2 - T_к}{t_3 - T_к} = \frac{t_3 - T_к}{t_4 - T_к}.$$

Звідси отримаємо

$$(T_1 - T_к)(T_3 - T_к) = (T_2 - T_к)^2,$$

$$T_2 = 45^0\text{C}.$$

3.2.40. Вертикальна труба висотою H = 1 м і площею поперечного перерізу $S = 50\text{ см}^2$ відкрита з обох кінців. У нижню частину труби встановлений нагрівач потужністю $N = 100\text{ Вт}$. Яка швидкість висхідного потоку встановиться в трубі? Уважайте, що нагрівач не загороджує поперечний переріз

$$\Delta U = \frac{3}{2}(\nu + \nu_1)RT_x - \frac{3}{2}(\nu + \nu_1)RT.$$

Із закону збереження енергії

$$A = \Delta U.$$

з огляду на рівняння стану газу, отримаємо

$$T_x = \frac{5}{4}T.$$

Тоді остаточно

$$p_x = \frac{pT}{T_x} = 0{,}8p.$$

3.2.42. У вертикальній теплоізольованій циліндричній посудині під масивни поршнем знаходиться 1 моль ідеального одноатомного газу при температурі T Почнемо стискати газ, опускаючи поршень. Після того як виконали роботу A поршень відпустили, і він зупинився в новому положенні рівноваги. Знайт температуру T_x у цьому стані.

Розв'язок. Робота A, що здійснюється над системою, йде на змі внутрішньої енергії газу ΔU і потенціальної енергії поршня ΔE_n:

$$A = \Delta U + \Delta E_n.$$

Для моля одноатомного ідеального газу зміна внутрішньої енергіїі задаєтьс виразом

$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_x - T_0).$$

Зміну потенційної енергії поршня можна знайти так – вона дорівню роботі, яку потрібно було б виконати, щоб квазістатично перевести поршень початкового положення в кінцеве. При цьому зовнішня сила, яка здійсню роботу, в кожен момент часу повинна бути рівна силі тяжіння mg, що діє н поршень, оскільки поршень у початковому і кінцевому станах знаходиться рівновазі, ця сила тяжіння рівна за модулем силі тиску газу посудині pS (тиско зовнішнього повітря ми нехтуємо). Позначивши через Δh зміну висоти поршн отримаємо

$$\Delta E_n = mg\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V,$$

де ΔV - зміна об'єму газу. Скориставшись рівнянням Менделєєва-Клапейрон для 1 моля газу , знайдемо

$$\Delta E_n = p\Delta V = R(T_x - T_0).$$

Таким чином,

$$A = \frac{3}{2}R(T_x - T_0) + R(T_x - T_0) = \frac{5}{2}R(T_x - T_0)$$

і, отже,

$$T_x = T_0 + \frac{2}{5}\frac{A}{R}.$$

3.2.43. Побутовий холодильник підтримує в камері постійну температуру $-12^0 C$. При температурі в кімнаті +25°С його мотор умикається кожні 8 хвилин і, пропрацювавши 5 хвилин вимикається. Уважаючи холодильник ідеальною тепловою машиною, що працює за зворотнім циклом, визначити – як часто і на який час він стане вмикатися, якщо кімната температура знизиться до +15°С. При якій максимальній температурі в кімнаті він зможе підтримувати в камері задану температуру?

Розв'язок. Різниця температур ΔT зовні та всередині холодильника і довжина паузи τ_2 пов'язані співвідношенням

$$\tau_2 \Delta T = \text{const}. \qquad (1)$$

Для ідеальної холодильної машини справедлива рівність

$$\frac{A}{Q} = \frac{\Delta T}{T},$$

де A - робота двигуна, Q - кількість теплоти, що віднімають від вмісту холодильної камери, T - температура камери. Очевидно, що робота, виконана двигуном, пропорційна часу τ_1 роботи мотора $A \sim \tau_1$, а кількість теплоти, що віднімають пропорційна повному періоду. $(\tau_1 + \tau_2)$ і різниці температур:

$$Q \sim (\tau_1 + \tau_2)\Delta T.$$

тому можна записати

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1}(\Delta T)^2 = T + \text{const}. \qquad (2)$$

Підставляючи в рівності (1) і (2) значення τ_1 і τ_2, для першого випадку, а ΔT для обох випадків, знайдемо нові значення τ_1' і τ_2' для другого випадку:

$$\tau_1' = 2\,\text{хв}, \; \tau_2' = 4{,}1\,\text{хв}.$$

Максимально можливу температуру в кімнаті знаходимо з умови $\tau_2'' = 0$ хв :

$$\Delta T_{max} = \Delta T\sqrt{\frac{8}{5}} = 46{,}8\,\text{К}.$$

$$t_{max} = 34{,}8^0\text{C}.$$

3.2.44. Дві посудіни об'ємом V = 0,5 л кожна під'єднані одна до одної за допомогою вертикальної скляної трубки з площею поперечного перерізу $S = 1$ см^2 (рис. 1). Трубка перекрита рухомим поршнем-магнітом масою m = 2,0 г, який може рухатися вздовж труби без тертя. За допомогою котушок, під'єднаних до генератора змінної напруги, збуджують коливання поршня вздовж трубки. На рис. 2 наведено експериментально отримана залежність амплітуди коливань поршня від частоти напруги мережі змінного струму.

За цими даними визначити відношення теплоємності при постіному тиску до теплоємності при постіному об'ємі C_p / C_v для повітря. У першому досліді клапан, що знаходиться вгорі, був закритий. При якій частоті спостерігається максимум при відкритому клапані? Оцінити амплітуду коливань поршня в цьому випадку на частоті f_0. Атмосферний тиск p_0 = 1атм.

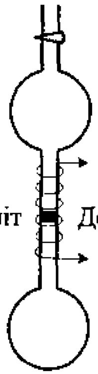


Рис. 1

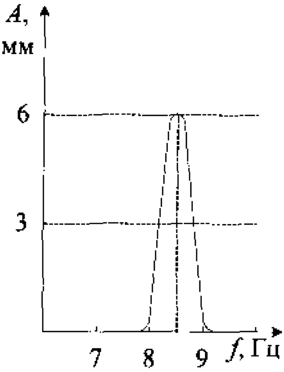


Рис. 2

Розв'язок. Для вирішення цього завдання потрібно скористатися рівнянням адіабати, що зв'язує тиск і об'єм газу співвідношенням $pV^{\gamma} = \mathrm{const}$, де $\gamma = Cp/Cv$ - відношення молярних теплоємностей газу при ізобарному і ізохоричному процесах відповідно.

Звідси для малих змін тиску й об'єму отримуємо $\Delta p = -\gamma\Delta V/V$. При малому зміщенні поршня тиск в одній посудині збільшується, а в іншій зменшується. Початкові об'єми посудин однакові, тиски в них практично теж були однаковими (щоб урівноважити поршень, потрібна зовсім невелика - в порівнянні з початковим тиском - добавка). Тоді повну силу, діючу на поршень, при його малому зміщенні x, можна записати у вигляді

$$F = 2\Delta pS = -\frac{\gamma p_0 SxS}{V} = -\frac{\gamma p_0 S^2}{V}x.$$

Ця сила пропорційна зсуву поршня від положення рівноваги - значить, поршень буде коливатися за гармонійним законом (зважаючи на досить гостру резонансну криву, можна припустити, що загасання коливань виходить невеликим, і його впливом на частоту резонансу можна знехтувати). Тоді для резонансної частоти коливань отримуємо

$$\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{2\gamma p_0 S^2}{mV},$$

звідки

$$\gamma = \frac{2mV\pi^2 f_0^2}{p_0 S^2} = 1{,}4.$$

Це цілком відповідає теоретичному значенню для двоатомного газу $\gamma = 7/5 = 1{,}4$. Якщо відкрити вентиль в одній з посудин, тиск у ньому не змінюватиметься і величина повертаючої сили зменшиться в 2 рази. При цьому частота резонансу зменшиться в $\sqrt{2}$ раз і складе f = 6 Гц. Амплітуду коливань при частоті f_0 = 8,5 Гц у нових умовах можна оцінити за тим же графіком (див. рис.2), якщо зміститися від резонансу на $\Delta f = (f_0 - f) f_0 / f = 3{,}5$ Гц. Амплітуда – судячи з графіку – буде зовсім малою.

3.2.45. Порцію кисню нагрівають при постійному тиску до тих пір, поки об'єм газу не зросте в 2 рази, а потім охолоджують при цьому об'ємі, поки газ не віддасть все тепло, отримане при розширенні.Знайдіть відношення початкової і кінцевої температур у цьому процесі.

Розв'язок. Для нагрівання при постійному тиску порції кисню (це двоатомний газ) від T_0 до 2 T_0 потрібна кількість теплоти

$$Q = 3{,}5\nu R(2\,T_0 - T_0) = 3{,}5\nu R\,T_0\,.$$

Охолоджуючись при незмінному об'ємі від 2 T_0 до T_x, газ повинен віддати таку ж кількість теплоти

$$Q = 2{,}5\nu R(2\,T_0 - T_x).$$

Таким чином,

$$2{,}5\nu R(2\,T_0 - T_x) = 3{,}5\nu R\,T_0.$$

Звідси знайдемо

$$\frac{T_0}{T_x} = \frac{5}{3}.$$

3.2.46. У вертикальній посуді під важким поршнем знаходиться деяка кількість двоатомного газу. Посудина має хорошу теплопровідність, температура навколишнього середовища T_0 постійна. При цій температурі відбувається незворотна дисоціація молекул газу, причому енергія взаємодії атомів у молекулі складає ε в розрахунку на один моль. Яку кількість теплоти отримає газ з навколишнього середовища за великий інтервал часу? Початкові значення тиску й об'єму складають p_0 та V_0 відповідно.

Розв'язок. Для початкового стану газу можна записати

$$p_0 V_0 = \nu RT\,.$$

Після дисоціації кількість молей подвоїлась. Це означає, що при постійному тиску і незмінній температурі збільшиться в два рази об'єм газу. Тоді газ виконає роботу $A = p_0 \Delta V = p_0 V_0$, а внутрішня енергія газу збільшиться від $U_1 = 2{,}5\nu RT_0$ до $U_2 = 1{,}5 \cdot 2\nu RT_0$. Для дисоціації усієї порції газу потрібен приплив енергії. Таким чином, всього газ отримає кількість теплоти

$$Q = A + U_2 - U_1 + \nu\varepsilon = p_0 V_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{RT} \right).$$

Тут є невеликий нюанс - енергія дисоціації може враховувати прирощення внутрішньої енергії, подібно до того як, скажімо, питома теплота випаровування води включає роботу з розширення водяної пари при атмосферному тиску. Тоді один із доданків потрібно виключити.

3.2.47. У довгій горизонтальній гладкій порожній трубі знаходяться два поршні, які можуть ковзати без тертя вздовж труби. Один з поршнів має масу $M = 1$ кг, інший - у два рази важче. У початковий момент між поршнями знаходиться моль кисню при температурі $T_0 = 300$ K, а важкий поршень рухається зі швидкістю $\upsilon_0 = 1$ м/с у напрямку до нерухомого в цей момент легкого поршню. Чому дорівнює максимальна температура газу в цьому процесі? Знайдіть також швидкості поршнів через великий відрізок часу. Теплоємність стінок труби і поршнів уважати малою, теплопровідністю знехтувати.

Розв'язок. Температура газу збільшується до тих пір, поки газ стискається, тобто до того моменту, коли швидкості поршнів зрівняються:

$$u_1 = u_2 = \frac{2M\upsilon_0}{3M} = \frac{2}{3}\upsilon_0 .$$

При цьому внутрішня енергія газу зросте на величину:

$$\frac{2M\upsilon_0^2}{2} - \frac{3M(2\upsilon_0/3)^2}{2} = \frac{M\upsilon_0^2}{3},$$

так що кисню (враховуючи, що це двоатомний газ) баланс енергій можна записати у вигляді

$$\frac{5}{2}RT_0 + \frac{M\upsilon_0^2}{3} = \frac{5}{2}RT_1 .$$

Звідси знаходимо максимальну температуру газу:

$$T_1 = T_0 + \frac{2}{15}\frac{M\upsilon_0^2}{R} = 300K + 0{,}016\,\text{K}.$$

Бачимо, що зміна температури в цьому процесі дуже незначна. Легкий поршень увесь час розганяється - його швидкість буде максимальною до того моменту, коли поршні опиняться на великій відстані один від одного і тиск газу впаде до зовсім малого значення. Це означає, що температура газу виявиться малою, його внутрішню енергію можна буде вважати нульовою, а кінетична енергія системи поршнів зросте на величину початкової внутрішньої енергії газу і складе (двоатомний газ)

$$\frac{M\upsilon_1^2}{2} + \frac{2M\upsilon_2^2}{2} = \frac{2M\upsilon_0^2}{2} + \frac{5}{2}RT_0 .$$

Запишемо тепер закон збереження імпульсу (нехтуючи імпульсом малої порції газу):

$$2M\upsilon_0 = M\upsilon_1 + 2M\upsilon_2 .$$

Для шуканого значення швидкості легкого поршня отримуємо квадратне рівняння

$$3\upsilon_1^2 - 4\upsilon_0\upsilon_1 - \frac{10RT_0}{M} = 0 .$$

Оскільки швидкість центру мас системи дорівнює $\frac{2\upsilon_0}{3}$, швидкість легкого поршню повинна бути більше цієї величини, тобто

$$\upsilon_1 = \frac{2}{3}\upsilon_0 + \frac{2}{3}\sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{15RT}{2M}} = 92 \text{ м/с}.$$

3.2.48. *У вертикальній посудині під важким поршнем знаходиться невелика* кількість гелію. Атмосферний тиск відсутній, поршень "висить" над дном посудини на висоті H. Поршень дуже швидко піднімають на висоту $10H$ відносно дна посудини та відпускають. На якій висоті над дном посудини він встановиться після того, як його коливання згаснуть? Посудина теплонепроникна, теплоємністю стінок і поршня можна знехтувати. Тертя поршня об стінки не враховувати. Кілька зайвих для цієї задачі даних: маса поршня M, прискорення вільного падіння g, площа дна посудини S. Що розуміти в умові під виразом "дуже швидко піднімають"? Як зміниться відповідь, якщо піднімати поршень дуже повільно?

Розв'язок. Якщо поршень піднімати дуже швидко - так, щоб при його русі молекули газу не встигали з ним зіштовхуватись, - то температура газу після встановлення рівноваги не повинна змінитися. Правда, швидкість поршня при такому русі повинна істотно перевищувати швидкість молекул (такий собі "надзвуковий" поршень). Отже, поршень знаходиться на висоті $10H$, газ "заспокоївся", і його температура дорівнює початковому значенню T_0. Після відпускання поршень буде довго коливатися, але через великий проміжок часу зупиниться. Позначимо висоту поршня в цьому положенні h, а температуру газу – T_1. Зміна потенційної енергії поршню при відпусканні дорівнює приросту внутрішньої енергії газу:

$$Mg(10H - h) = 1{,}5\nu R(T_1 - T_0). \qquad (1)$$

Для початкового положення поршня на висоті H і кінцевого на висоті h можна записати рівняння рівноваги (за умовою задачі атмосферного тиску немає):

$$Mg = \frac{\nu RT_0}{V_0} S = \frac{\nu RT_0}{H}, \qquad (2)$$

$$Mg = \frac{\nu RT_1}{V_1} S = \frac{\nu RT_1}{h}. \qquad (3)$$

Розв'язавши просту систему трьох рівнянь (1-3), отримуємо

$$h = \frac{23}{5}H = 4{,}6H.$$

Якщо поршень піднімати дуже повільно, то він встановиться на початковій висоті.

3.2.49. У вертикальній теплоізольованій посудині під масивним рухомим поршнем знаходиться порція ідеального одноатомного газу при температурі T_0, поршень при цьому знаходиться в рівновазі. Температуру газу в посудині за допомогою мініатюрного нагрівача дуже швидко збільшують у 2 рази і залишають систему в спокої. Яка температура встановиться в посудині після того, як поршень перестане рухатися? Тертя поршня об стінки мале. Поршень і стінки практично не отримують тепла від газу. Повітря ззовні немає.

Розв'язок. Газ здійснює роботу з підйому поршню за рахунок своєї внутрішньої енергії. Будемо вважати, що нагрівання відбулося настільки швидко, що поршень не встиг за цей час зміститися і набрати помітну швидкість. Внутрішня енергія газу після нагрівання складає

$$U_1 = 1{,}5\nu R \cdot 2T_0.$$

Нехай поршень зрештою піднявся на висоту h над початковим положенням H. Визначивши кінцеву температуру T_1, запишемо умову рівноваги до нагрівання та після встановлення рівноваги:

$$\frac{Mg}{S}SH = \nu RT_0, \quad \frac{Mg}{S}S(H+h) = \nu RT_1,$$

де M – маса та S – площа поршню. Тепер запишемо закон збереження енергії:

$$Mgh = 1{,}5\nu R \cdot 2T_0 - 1{,}5\nu RT_1.$$

Розв`язуючи цю систему рівнянь, одержимо

$$h = 0{,}6\,H,\; T_1 = T_0\,\frac{H+h}{H} = 1{,}6\,T_0.$$

3.2.50. У кубічній посудині об'ємом $V = 1$ м^3 знаходиться гелій при температурі $T = 300$ К і тиску $p = 10^5$ Па. У стінці посудини відкривають отвір площею $S = 1$ см^2 і через час $\tau = 0{,}01$ с закривають. Зовні - вакуум. Оцініть зміну температури газу в посудині після встановлення в ній рівноваги. Уважайте, що відкривання і закривання отвору роблять дуже обережно - не створюючи потоків газу.

Розв'язок. Газ у посудині досить щільний, вилітають молекули з посудини як би "суцільним середовищем". Оцінимо кількість молекул, що вилетіли - її ми знайдемо так само, як зазвичай отримують кількість ударів молекул об стінку посудини (тут несуттєві удари молекул одна об одну). За час τ вилітає половина молекул з об'єму $S\upsilon\tau$. Швидкість молекул υ оцінимо з середньої кінетичної енергії (ми потім неодмінно перевіримо, чи не занадто сильно зміниться температура і чи можна для її оцінки використовувати початкове значення 300 К):

$$\upsilon = \sqrt{\frac{RT}{M}} \approx 1500 \text{м/с},$$

де $M = 4$ г/моль – молярна маса гелію. Тоді об'єм, у якому спочатку містилися молекули, що вилітали, складе:

$$\Delta V = \frac{1}{2}S\upsilon\tau \approx 7\cdot 10^{-4}\text{м}^3 << V.$$

Видно, що в посудині практично нічого не змінилося. Газ, що залишився в посудині, здійснить деяку роботу, "видавлюючи" порцію, що вилітає, назовні. Тепло до посудини не підводилося, значить, робота відбувається за рахунок зменшення внутрішньої енергії газу. Запишемо рівняння першого закону термодинаміки:

$$p\Delta V = -\Delta U = -1{,}5\nu R\Delta T.$$

Звідси, враховуючи рівняння стану $pV = \nu RT$, знайдемо

$$\Delta T = -T\frac{2\Delta V}{3V} \approx -0{,}15\,\mathrm{K}.$$

3.2.51. У глибокому космосі на великій відстані від усіх інших тіл рухається довга циліндрична труба, запаяна з одного кінця. Неподалік від цього кінця приклеєний поршень масою M = 1 кг, відокремлений від навколишнього вакууму 1/100 повного об'єму труби. У цій частині труби знаходиться невелика порція азоту при температурі T = 300 К і тиску p = 0,5 атм. У деякий момент поршень відклеюється і під тиском газу починає ковзати без тертя вздовж труби. Визначте, через який час після початку руху поршень вилетить з труби. Довжина труби L = 5 м, площа поперечного перерізу S = 100 см^3, маса труби в 10 разів більше маси поршня.

Розв'язок. Будемо вважати, що труба не обертається - інакше рішення задачі ускладниться (хоча при заданих масах труби і поршня різниця буде незначною). Газ при розширенні охолоджується, його внутрішня енергія переходить у кінетичну енергію труби і поршня (маса газу виявляється дуже малою, так що при розрахунку кінетичної енергії та імпульсу системи з нею можна не рахуватись). Оскільки об'єм газу збільшується в багато разів і приплив тепла відсутній, можна вважати, що температура газу в кінці процесу буде зовсім малою і в кінетичну енергію перейде практично вся його внутрішня енергія, рівна

$$U = 2{,}5\,\nu RT = 2{,}5\,pV = 2{,}5\,pSL/100 = 62{,}5\ \text{Дж}.$$

При відношенні мас 10:1 важка труба одержить 1/11 частину загальної енергії, а поршень отримає 10/11 від енергії газу, тобто його енергія в кінці складе $E = 56{,}7\,\text{Дж}$. Це відповідає швидкості поршню $\upsilon = \sqrt{2E/M} \approx 10{,}7\ \text{м/с}$. Швидкість труби при цьому буде спрямована в протилежний бік і дорівнюватиме $0{,}1\upsilon \approx 1{,}07\ \text{м/с}$. Якби з самого початку швидкості були такими, поршень вилетів би з труби через час τ = 0,99 $L/(1{,}1\upsilon) \approx 0{,}42\,\text{с}$. Оцінимо час набору швидкості - якщо він виявиться істотно менше, відповідь можна вважати отриманою (строго кажучи, швидкість збільшується весь час, аж до самого вильоту, але все повільніше і повільніше, а нас цікавить наближене значення). Отже, на самому початку руху на поршень діє сила $F = pS$ і його початкове прискорення становить $a = pS/M = 500$ м/с^2. Якби прискорення не змінювалося, поршень набрав би свою швидкість за 0,02 с, що істотно менше часу процесу, розрахованого вище. Зрозуміло, що швидкість буде практично досягнута через час, який у кілька разів більше отриманого інтервалу 0,02 с, але і ним можна для оцінки нехтувати. Таким чином, час до вильоту поршню становить приблизно 0,4 секунди.

3.2.52. У посудині об'ємом V = 100 л знаходиться повітря при нормальних умовах. Зовні - вакуум. У стінці посудини на час τ = 1 с відкривається невеликий отвір площею S = 0,1 см^2 і відразу після цього закривається. Оцініть кількість молекул, які за цей час вилетіли, і їх сумарну енергію. До речі зауважимо, що повітря - суміш двоатомних газів.

Розв'язок. Оцінимо кількість молекул, що вилетіли з посудини, і порівняємо її з повною кількістю молекул газу N - якщо ця частина велика, то розв'язок задачі дуже ускладниться. Кількість молекул, що вилетіли, порахуємо так само, як зазвичай рахують кількість ударів молекул об стінки посудини: $N_{уд} = 0{,}5S\upsilon_x\tau\, N/V$. Швидкість, точніше - складову швидкості молекули уздовж заданого напрямку, оцінимо через енергію поступального руху молекул: $\upsilon_x = \sqrt{RT/M_{ср}} \approx 280\,м/с$. Отже, за даний час частина молекул, що вилетіла, рівна $N_{уд}/N = 0{,}5S\upsilon_x\tau/V \approx 0{,}14$. Видно, що для оцінки можна вважати незмінними тиск газу в посудині і його температуру (втім, можна зробити невеликі поправки, користуючись для розрахунків середніми значеннями). Кількість молекул у посудині дорівнює $N = N_A pVRT$. Тоді кількість молекул, що вилетіли, буде складати

$$N_в = N_{уд} = 0{,}5S\upsilon_x\tau\, N/V = 0{,}5S\upsilon_x\tau\, N_A p/RT \approx 3{,}5\cdot 10^{22}.$$

При звичайних умовах довжина вільного пробігу молекул у повітрі дуже мала, тому вильот молекул з отвору швидше нагадує рух "суцільного середовища" - молекули рухаються в заданому напрямку, штовхаючи одна одну, але практично не обганяючи одна одну. Виділимо в посудині ту область поблизу отвору, з якої молекули встигнуть "емігрувати". Позначимо об'єм цієї області V_1 і запишемо для цих молекул рівняння стану: $p_1V_1\nu_1RT$. Вилітаючи назовні, ці молекули мають у середньому більшу енергію, ніж ті, що залишилися в посудині, - над цією порцією газу виконав роботу навколишній газ, виштовхуючи порцію назовні. Якщо вважати тиск газу в посудині незмінним, то робота ця дорівнює $a = pV_1$. Тому енергія порції газу (суміш двоатомних газів), що вилетіла, становить

$$U = 2{,}5\nu_1RT + A = 3{,}5\nu_1RT = 3{,}5\frac{N_в}{N_A}RT = 3{,}5N_вkT \approx 460\,Дж.$$

3.2.53. Моль гелію в процесі розширення отримує тепло, його теплоємність при цьому становить C = 15 Дж/(моль · К). Знайдіть зміну температури газу в цьому процесі при виконанні ним роботи A = 20 Дж.

Розв'язок. Запишемо рівняння першого закону термодинаміки для даного процесу:

$$Q = A + \Delta U,$$

або

$$C\Delta T = A + C_V\Delta T.$$

Звідси знаходимо

$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} = \frac{A}{C - 1{,}5R} \approx 8\,\text{К}.$$

Отже, температура моля гелію в процесі розширення зросте на 8 К.

3.2.54. Оцініть, на якій висоті над Землею знаходиться центр тяжіння стовпа повітря, що нависає над стадіоном. Коли він розташований вище - влітку чи взимку? При розрахунку можна вважати, що температура повітря на будь-якій висоті дорівнює температурі земної поверхні.

Розв'язок. *Проведемо нескладний розрахунок.* Нехай *спочатку* температура газу дуже мала (близько нуля за шкалою Кельвіна), при цьому вся атмосфера просто "лежить" на поверхні кулі, і висота центру ваги такого низького стовпа повітря дорівнює нулю. Передамо тепер повітрю деяку кількість теплоти - повітря стане нагріватися і розширюватися, причому кожна порція повітря розширюється при своєму незмінному тиску, що створюється вагою зовнішніх для цієї порції шарів повітря. (Тут треба зауважити, що товщина атмосфери в багато разів менша від радіуса планети і зменшенням прискорення вільного падіння з висотою цілком можна знехтувати). При таких умовах певна частина переданої кількості теплоти Q йде на підвищення внутрішньої енергії повітря ΔU, а решта - на здійснення механічної роботи A, у даному випадку - на підняття центру тяжіння. Для одного моля газу

$$A + \Delta U = Q = C_P \Delta T = (R + C_V)\Delta T,$$

де C_p і C_V - молярні теплоємності при постійному тиску і постійному об'ємі відповідно. У нашому випадку температура збільшується на T (від нуля до T) і робота одного моля газу при розширенні дорівнює $A = RT$. Для роботи з підняття центру тяжіння стовпа повітря на висоту H можна записати

$$A = \nu M g H = \nu R T,$$

де ν - кількість молей повітря в стовпі повітря, M – маса моля повітря. Звідси легко знаходимо

$$H = \frac{RT}{Mg}.$$

Для літньої температури $T_1 = 300$ К отримаємо

$$H_1 = \frac{8{,}3 \cdot 300}{0{,}029 \cdot 10} \approx 8{,}6\,\text{км}.$$

Для зимової температури $T_2 = 250$ К отримаємо

$$H_2 = 7{,}2\,\text{км}.$$

3.2.55. Усередині великої теплоізольованої посудини знаходиться 32 г кисню, температура посудини і кисню 300 К, манометр показує тиск 1 атм. Також усередині посудини знаходиться дуже легка капсула, що містить 1 г гелію при температурі 500 К. Капсула лопається і гелій виходить з неї у посудину. Як будуть змінюватися з часом показання манометра? Теплоємність великої посудини становить 1000 Дж/К.

Розв'язок. Відразу після того як капсула лопне, відбудеться короткочасний стрибок тиску, пов'язаний з «акустичним ударом», але через свою інерційність манометр на нього може зреагувати досить слабко. Після згасання пружних хвиль (це відбувається швидко) гази перемішуються і на деякий час встановлюється температура, зумовлена тепловим балансом без урахування теплоємності посудини. Цю температуру і відповідний тиск знайдемо з урахуванням того, що двоатомний кисень у посудині 1 моль і його теплоємність становить C_1 = 1 моль·2,5R ≈ 20,8 Дж/К, а одноатомного гелію 0,25 моль і його теплоємність дорівнює C_2 = 0,25 моль · 1,5R ≈3,1 Дж/К. З рівності

$$(C_1 + C_2)T = C_1T_1 + C_2T_2$$

знайдемо результуючу температуру $T \approx 330$ К.

Тиск зросте як за рахунок збільшення температури від 300 до 330 К, так і за рахунок збільшення кількості газу від 1 до 1,25 моль, він збільшиться приблизно в 1,4 рази і буде трохи менше 1,4 атм.

У ході вирівнювання температур, з урахуванням великої теплоємності посудини, температура знизиться практично до початкової, а надлишок тиску буде пов'язаний лише з кількістю газу — показання манометра плавно знизяться до 1,25 атм.

3.2.56. На діаграмі *V-T* процес, який проводять з молем зрідженого гелію, становить відрізок прямої $V = V_0 + \alpha T$, причому температура газу в процесі збільшується від T_0 до $3T_0$ (постійні V_0 , T_0 і α вважаються відомими). Знайдіть максимальну і мінімальну теплоємності газу в цьому процесі.

Розв'язок. Теплоємність у такому процесі не залишається постійною (втім, вибором констант можна це «виправити»: при $\alpha = 0$ отримаємо V = const, а при $V_0 = 0$ буде постійний тиск у таких процесах C = const).

Передамо системі дуже маленьку кількість теплоти Q, приріст температури позначимо ΔT. Тоді

$$Q = A + \Delta U = p\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{RT}{V}\alpha\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Теплоємність рівна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = R\left(\frac{\alpha T}{V} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{\alpha T}{V_0 + \alpha T} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + \alpha T / V_0}\right).$$

Тобто отримали монотонну функцію температури, причому в залежності від знаку константи α ця функція зі зростанням температури T або зростає, або зменшується. Потрібно зазначити, що від'ємним може бути і V_0 - при розумному виборі константи α об'єм на заданому інтервалі $(T_0, 3T_0)$ цілком може виявитися додатнім. Отже, максимальна і мінімальна теплоємності виходять на краях діапазону $(T_0, 3T_0)$:

$$C_1 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1+\alpha T_0/V_0}\right),$$

$$C_2 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1+3\alpha T_0/V_0}\right).$$

Яка з них максимальна, а яка мінімальна, залежить від знаку α .

3.2.57. Тонкостінна горизонтальна циліндрична мідна посудина розділена навпіл масивним нетеплопровідним поршнем (рис. 1). З одного боку від поршня знаходиться розріджений кисень, з іншого – гелій. Якщо змістити поршень трохи з положення рівноваги і відпустити, він буде здійснювати коливання. У скільки разів може змінитися період цих коливань, якщо теплоізолювати посудину від навколишнього середовища? Посудина закріплена і рухатися не може.

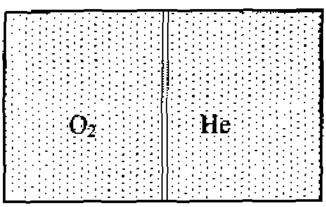


Рис. 1

Розв'язок. У першому випадку будемо вважати, що через тонкі стінки посудини легко проникає тепло — у цьому випадку температуру газів у будь-який момент можна вважати рівною зовнішній температурі, тобто T = const. Позначимо довжину посудини $2l$, мале зміщення поршня x. Тоді для кожної половини посудини запишемо

$$p_0V_0 = (p_0 + \Delta p)(V_0 - \Delta V),$$

або

$$p_0Sl = (p_0 + \Delta p)S(l - x),$$

де S – площа перерізу посудини. Звідси

$$\Delta p = p_0\frac{x}{l}$$

(ми знехтували добутком малих величин x та Δp). Якщо в одній половині посудини тиск збільшується на Δp, то в іншій він зменшується на таку ж величину. Сила, яка діє на поршень, дорівнює

$$F = -2\Delta pS = -2p_0\frac{S}{l}x = Mx'',$$

де $x'' = a$ – прискорення поршня масою M.

Звідси отримуємо диференціальне рівняння коливань

$$x'' - 2p_0\frac{S}{Ml}x = 0.$$

Тобто для частоти коливань поршня масою M отримуємо

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2p_0S}{Ml}}.$$

У разі хорошої теплоізоляції температура при коливаннях змінюється, при цьому сили, що діють на поршень, також змінюються. Нехай обєм гелію зменшився при зміщенні поршня на $xS \ll lS$, а тиск збільшився на Δp_1. Використовуємо перший закон термодинаміки:

$$A + \Delta U = 0,$$

або

$$-p_0 Sx + \frac{3}{2}\nu R\Delta T = 0,$$

і рівняння стану газу:

$$pV = \nu RT,$$

або

$$\nu R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p_1 = -p_0 Sx + Sl\Delta p_1.$$

Звідки отримаємо

$$-p_0 Sx + \frac{3}{2}\left(-p_0 Sx + Sl\Delta p_1\right) = 0,$$

або

$$\Delta p_1 = \frac{5}{3} p_0 \frac{x}{l}.$$

Тиск кисню зменшується, але потрібно врахувати, що це двоатомний газ, тоді

$$\Delta p_2 = \frac{7}{5} p_0 \frac{x}{l}.$$

Різниця тисків створює повертаючу силу

$$F = -\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{5}\right) p_0 \frac{x}{l} S = -\frac{46}{15}\frac{p_0 S}{l} x.$$

Отже, нова частота коливань дорівнює

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{46 p_0 S}{15 Ml}},$$

а відношення частот становить

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{23}{15}} \approx 1{,}24.$$

Зрозуміло, що період коливань зменшується в стільки ж разів.

3.2.58. У посудині об'ємом $V = 31$ л з дуже жорсткими стінками, які зовсім не проводять тепло, знаходиться повітря при нормальних умовах і вода масою $m = 9$ г. Посудина практично миттєво набуває швидкість і рухається поступально. Після встановлення теплової рівноваги, повітря в посудині має вологість $\varphi = 50\%$. Знайдіть швидкість u. Питома теплота пароутворення води $L = 2{,}2$ МДж/кг, питома теплоємність води $c = 4200$ Дж/(кг · К), тиск насиченої пари при нормальних умовах $p = 600$ Па, питома теплоємність повітря при постійному об'ємі $c_V = 720$ Дж/(кг К), середня молярна маса повітря $M = 0{,}029$ кг/моль.

Розв'язок. У початковий момент маса водяної пари m_n дуже мала порівняно з масою води в посудині m. (Масу пари можна знайти з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$m_п = \frac{M_{води} pV}{RT_0} \approx 0{,}15г << m = 9 г$$

(тут $M_{води} = 18\frac{г}{моль}$ – молярна маса води, $T_0 = 273К$). Тому можна вважати, що спочатку вся вода перебувала в рідкому стані.

Після розгону посудини при сталій температурі всередині неї міститься не більше, ніж m = 9 г водяної пари при вологості φ = 50% = 0,5. Якщо б при цій же температурі водяна пара була насичена, то в тому ж об'ємі знаходилося б m/0,5 = 18 г водяної пари, тобто 1 моль. Відомо, що вода при атмосферному тиску кипить при 100°С, тобто тиск насичених парів води при температурі T_1 = 373 К дорівнює $p_{атм} = 10^5 Па$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона знаходимо, що при тиску 10^5Па і температурі 373 К один моль водяної пари (18 г) займає об'єм

$$V_1 = \frac{RT_1}{p_{атм}} \approx 31 л = V,$$

звідки випливає, що в посудині встановилася температура, яка дорівнює $T_1 = 373$ К. В умові зазначено, що стінки посудини є дуже жорсткими, а це означає, що об'єм посудини не змінюється. Стінки посудини абсолютно не проводять тепло, тобто енергія, яку мали повітря і вода, не втрачається в результаті теплопередачі. Перейдемо в систему відліку, що рухається поступально зі швидкістю u. У цій системі посудина спочатку мала швидкість u, а потім різко зупинилась. Повітря і вода мали як одне ціле, кінетичну і внутрішню енергію. Після зупинки посудини сумарна енергія води і повітря залишилася такою ж, але тепер кінетична енергія руху води і повітря, як цілого, перетворилася на додаткову внутрішню енергію. З рівняння Менделєєва-Клапейрона знаходимо, що маса повітря в посудині дорівнює

$$m = \frac{Mp_{атм}V}{RT_0} \approx 39{,}6г.$$

Сумарна маса води і повітря становить $m + m_{пов} \approx 48{,}6г$. Зміну внутрішньої енергії можна підрахувати по частинах. Повітря при постійному об'ємі нагрілось на 100^0С. На це було потрібна така кількість теплоти

$$Q_1 = m_B c_V (T_1 - T_0) \approx 2850 Дж.$$

Зміна внутрішньої енергії води визначається тільки кінцевим і початковим станом системи і не залежить від процесу переходу. Тому можна вважати, що спочатку воду нагріли до 100°С, а потім її перетворили в пароподібний стан. На нагрівання води була затрачена така кількість теплоти

$$Q_2 = mc(T_1 - T_0) \approx 3780 Дж.$$

На пароутворення

$$Q_3 = mL \approx 1980 \text{ Дж}.$$

Загальна зміна внутрішньої енергії системи дорівнює кінетичній енергії, яку мали вода і повітря:

$$\frac{(m + m_{\text{В}})u^2}{2} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \approx 26430 \text{ Дж}.$$

Звідки знаходимо шукану швидкість:

$$u = 10^3 \text{ м/с}.$$

3.2.59. У посудині під поршнем знаходиться моль гелію. Повільно нагріваємо газ, при цьому його об'єм збільшується, однак частота ударів частинок об нерухоме дно посудини залишається незмінною. Знайдіть теплоємність газу в такому процесі.

Розв'язок. При збільшенні температури T газу його частинки рухаються швидше, і при тій же концентрації газу n частота ударів $\nu_{\text{уд}} \sim \upsilon_{\text{ул}} \sim \sqrt{T}$. Але $\nu_{\text{уд}} \sim n$. Значить:

$$n\sqrt{T} = \text{const або } \frac{N}{V}\sqrt{T} = \text{const}.$$

Звідси отримуємо $T \sim V^2$. Але для 1 молю газу $pV = RT$. Отже, $p \sim V$. На малій ділянці цього процесу кількість теплоти, що отримується газом, дорівнює:

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + p\Delta V = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{RT}{V}\Delta V.$$

Для залежності $T \sim V^2$ отримаємо $\dfrac{\Delta T}{T} = 2\dfrac{\Delta V}{V}$. Тоді:

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + R\Delta T\frac{\Delta V}{V}\frac{T}{\Delta T} = \left(\frac{3}{2}R + \frac{R}{2}\right)\Delta T = 2R\Delta T.$$

Звідси теплоємність газу дорівнює:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = 2R \approx 16{,}6 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

3.2.60. Горизонтальний закритий теплоізольований циліндр розділений на дві частини тонким теплопровідним поршнем, який прикріплений пружиною до однієї з торцевих стінок циліндра. Ліворуч і праворуч від поршня знаходяться по ν молей ідеального одноатомного газу. Початкова температура системи T, довжина циліндра $2l$, власна довжина пружини $l/2$, подовження пружини в стані рівноваги x. У поршні зробили отвір. Наскільки зміниться температура системи після встановлення нового стану рівноваги? Теплоємністю циліндра, поршня і пружини знехтувати. Уважати, що тертя немає.

Розв'язок. У початковому стані сила пружності пружини була врівноважена різницею сил тиску газів, що знаходяться по різні сторони від поршня:

$$\frac{\nu RT}{3l/2-x}-\frac{\nu RT}{l/2+x}=-kx,$$

де k – жорсткість пружини. Звідси знаходимо жорсткість пружини:

$$k=\frac{\nu RT}{x}\left(\frac{1}{l/2+x}-\frac{1}{3l/2-x}\right).$$

Після того як у поршні зробили отвір, тиски по різні сторони від поршня стали однаковими, а подовження пружини стало нульовим. При цьому потенційна енергія, яка була накопичена в стислій пружині, пішла на зміну внутрішній енергії газу:

$$\frac{kx^2}{2}=\frac{3}{2}\cdot 2\nu R\Delta T.$$

Звідси знаходимо шукану зміну температури газу:

$$\Delta T=\frac{kx^2}{6\nu R}=\frac{x}{6}\left(\frac{1}{l/2+x}-\frac{1}{3l/2+x}\right)T=\frac{2x}{3}\cdot\frac{l-2x}{(l+2x)(l-2x)}T.$$

3.2.61. Моль гелію знаходиться в посудині об'ємом 10 л при температурі 300 К. Об'єм газу збільшують, при цьому його теплоємність у всьому процесі дорівнює C = 1000 Дж / К (і залишається постійною!). Оцініть зміну температури газу при його розширенні в 20 разів.

Розв'язок. Теплоємність C = 1000 Дж/ (моль · К) – дуже велика, тому температура газу змінюється в цьому процесі на незначну величину. Можна оцінити роботу газу наближено, вважаючи температуру T постійною:

$$A=\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}=1\,\text{моль}\cdot 8{,}3\,\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})\cdot 300\,\text{К}\cdot\ln 20=7460\,\text{Дж}.$$

Тепер можна знайти зміну температури:

$$C\Delta T=A+C_V\Delta T,$$

Звідки:

$$\Delta T=\frac{A}{C-C_V}=\frac{A}{C-\frac{3}{2}\nu R}=7{,}5\,\text{К}.$$

Отже, температура газу збільшилася приблизно на 7,5 К. Точний розв'язок дає «добавку» приблизно 0,15 К.

3.2.62. Теплоізольована посудина, що містить гелій при температурі T_0 = 30 К, рухається зі швидкістю υ = 1000 м/с. Якою стане температура газу в посудині через деякий час після різкої зупинки посудини? Теплообміном газу зі стінками посудини знехтувати. Моль гелію має масу m = 4 г.

Розв'язок. Проекції швидкостей молекул газу на осі координат υ_x, υ_y, υ_z в системі відліку, пов'язаної з рухомою посудиною, відповідають температурі T_0. Після зупинки посудини потрібно розглянути рух молекул в новій, нерухомій, системі відліку:

$$\upsilon_x^* = \upsilon + \upsilon_x,\quad \upsilon_y^* = \upsilon_y,\quad \upsilon_z^* = \upsilon_z.$$

Енергія однієї молекули становить, в середньому,

$$\frac{m_0}{2}\left(\upsilon_x^{*2} + \upsilon_y^{*2} + \upsilon_z^{*2}\right) = \frac{m_0}{2}\left(\overline{(\upsilon + \upsilon_x)^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}\right) =$$

$$= \frac{m_0}{2}\upsilon^2 + \frac{m_0}{2}\left(\overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}\right) + \overline{m_0 \upsilon \upsilon_x}.$$

Останній доданок дорівнює нулю $\left(\overline{\upsilon_x} = 0\right)$, тому середня кінетична енергія молекули складе

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} + \frac{3}{2}kT_0.$$

Після хаотизації руху частинок в посудині можна буде говорити про температуру T_1, таку, що

$$\frac{3}{2}kT_1 = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} + \frac{3}{2}kT_0.$$

Зручно розглянути один моль газу, тоді отримаємо

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{3}\frac{M\upsilon^2}{R} \approx 190\,\text{K},$$

де M = 4 г / моль – молярна маса гелію, R = 8,3 Дж / (моль · К) – універсальна газова стала.

3.2.63. У циліндрі під поршнем знаходиться при нормальних умовах порція гелію в кількості ν = 2 моль. Їй надають кількість теплоти $Q = 100\text{Дж}$, при цьому температура гелію збільшується на $\Delta T = 10$ K. Оцініть зміну об'єму газу, вважаючи його теплоємність в цьому процесі постійною.

Розв'язок. В умові задачі сказано про постійну теплоємкість – це зроблено для того, щоб виключити екзотичні процеси, в яких тиск і температура при невеликих добавках енергії можуть дуже сильно змінюватися (спочатку в одну сторону, потім в іншу). Вважаючи зміну умов (тиск, температура) малими – ми це ще перевіримо, – отримаємо

$$Q = p\Delta V + \nu C_V \Delta T,$$

де $p = 10^5$ Па – нормальний атмосферний тиск, C_V молярна теплоємність гелію при постійному об'ємі. Звідси отримуємо:

$$\Delta V = \frac{Q - \nu C_V \Delta T}{p} = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3.$$

Отже, об'єм зменшується на 1,5 літра. У порівнянні з початковим значенням (при нормальних умовах) $2 \cdot 22{,}4$ л ≈ 45 л це зміна і справді невелика.

3.2.64. У двох однакових посудинах знаходяться однакові маси кисню і гелію. Тиск кисню 1 атм., тиск гелію 2 атм. Посудини з'єднують тонкою трубкою, і гази перемішуються. Яким стане тиск у системі після встановлення рівноваги?

Розв'язок. Теплообмін з навколишнім середовищем дуже малий. Молярна маса кисню 32 г / моль, гелію 4г / моль. При однакових масах кисню і гелію їх кількості речовини пов'язані співвідношенням $\nu_2 = 8\nu_1$.

З урахуванням того, що $p_2 = 2p_1$, для температур отримаємо $T_1 = 4T_2$. При змішуванні газів сумарна внутрішня енергія залишається незмінною (теплообміну немає, робота зовнішніх сил дорівнює нулю). Тоді запишемо

$$U = \frac{5}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{5}{2}\nu_1 RT_x + \frac{3}{2}\nu_2 RT_x .$$

Звідси знайдемо встановлену температуру T_x

$$T_x = \frac{5\nu_1 T_1 + 3\nu_2 T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} = \frac{11}{23}T_1 .$$

Установлений же тиск буде дорівнюватиме

$$p = \frac{(\nu_1 + \nu_2)RT_x}{2V} = \frac{\nu_1 RT_1}{V}\frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 29} \approx 1{,}7p_1 = 1{,}7 \text{ атм} .$$

3.2.65. На столі стоїть вертикальна теплоізольована циліндрична посудина, у якій вставлено два поршня (рис. 1). Верхній поршень – важкий, теплонепроникний і може рухатися в циліндрі без тертя. Нижній поршень – легкий і теплопровідний, але між ним і стінками посудини існує тертя. У кожній з частин посудини знаходиться по ν молей ідеального одноатомного газу. Спочатку система перебувала в тепловій рівновазі, а обидві частини посудини мали висоту L. Потім систему повільно нагріли, надавши їй кількість теплоти ΔQ. На яку величину ΔT змінилася температура газів, якщо нижній поршень при цьому не зрушив з місця? При якому найменшому значенні сили тертя F між нижнім поршнем і стінками це можливо? Яка теплоємність C системи в цьому процесі? Теплоємністю стінок посудини і поршнів знехтувати.

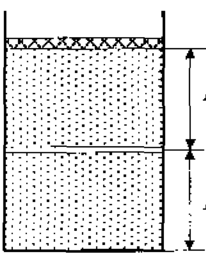


Рис. 1

Розв'язок. Позначимо через $V_1 = SL$ об'єм нижньої частини циліндра, де S – площа поршнів, через p_0 – тиск у верхній частині циліндра, через ΔV_2 зміну об'єму верхньої частини циліндра. Надана системі кількість теплоти ΔQ йде на зміну внутрішньої енергії всього газу в посудині:

$$\Delta U = 2\nu \cdot \frac{3}{2}R\Delta T .$$

і на здійснення роботи:

$$A = p_0 \Delta V_2 = \nu R\Delta T .$$

Отже,

$$\Delta Q = \Delta U + A = 4\nu \cdot R\Delta T ,$$

та

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{4\nu R}.$$

Теплоємність системи в цьому процесі дорівнює відношенню наданої їй кількості теплоти до зміни температури:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 4\nu R.$$

Оскільки об'єм нижньої частини посудини постійний, зміна тиску Δp там визначається зі співвідношення $\Delta p V_1 = \nu R \Delta T$, звідки:

$$\Delta p = \frac{\nu R \Delta T}{V_1} = \frac{\Delta Q}{4V_1}.$$

Оскільки тиск у верхній частині посудини постійний і дорівнює p_0, а в нижній частині посудини тиск спочатку також дорівнює p_0, то в кінці нагрівання різниця тисків, що надається газами на нижній поршень, стане рівною Δp. Щоб поршень залишився нерухомим, сила тертя між ним і стінками посудини повинна бути не менше:

$$F = \Delta p S = \frac{\Delta Q}{4L}.$$

3.2.66. Школяр придбав дуже якісний термос (посудину, яка виключає теплообмін вмісту з навколишнім середовищем) ємністю 1 л, теплоємність стінок якого 100 Дж / К. Початкова температура стінок порожнього термоса 20^0С (як в кімнаті). Школяр послідовно наливає в термос 1 г води при температурі 1^0С, потім 2 г води при температурі 2^0С, потім 3 г води при температурі 3^0С і так далі аж до заповнення термоса. Якою буде встановлена температура вмісту термоса?

Розв'язок. Коли Вася налив у термос 44-ю порцію, в термосі виявилося 990 мл води. Остання порція має температуру 45^0С, але в термос потрапляє тільки 10 мл води. З рівняння теплового балансу знаходимо сталу температуру вмісту термоса *t*:

$$t = \frac{100 \cdot 20 + 4{,}2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 44^2 + 10 \cdot 45\right)}{100 \cdot 4{,}2\left(1 + 2 + 3 + \ldots + 44 + 10\right)} = 29{,}6^0\mathrm{C}.$$

3.2.67. На уроках хімії належить забезпечувати чотириразовий обмін повітря за годину (урок). Забезпечується це за допомогою вентиляції. Температура повітря в класі повинна бути не нижче +20^0С. Кожен школяр гріє повітря, виділяючи потужність 100 Вт. При якій кількості школярів у класі не буде потрібно додаткового обігріву приміщення, якщо температура повітря зовні +15^0С? Втратами тепла через стінки і вікна можна знехтувати, об'єм повітря в класі дорівнює приблизно 200 $м^3$.

Розв'язок. Повітря зовні та всередині має один й той самий тиск, і з класу за урок $t = 45 \cdot 60$с - виходить назовні об'єм повітря $V = 4 \cdot 200 м^3$. Якщо вважати, що тиск нормальний: p = 10^5 Па, то через клас за урок проходить кількість молей двоатомного газу $\nu = \dfrac{pV}{RT}$. Повітря має в такому (ізобаричному) процесі теплоємність на один моль, рівну 3,5R. Кількість школярів, кожен з яких виробляє теплову потужність W, дорівнюватиме

$$N = \frac{3{,}5RpV\Delta T}{WtRT} = 35{,}4.$$

Отже, в класі повинно знаходитися 35 школярів (і один вчитель, який теж виділяє тепло) - це забагато по нинішніх мірках.

3.2.68. У великій посудині з жорсткими стінками, які не проводять тепло, знаходиться газоподібний водень при температурі $T_1 = 50\,\text{К}$. При такій температурі обертальні ступені свободи двоатомних молекул водню "заморожені". Припустимо, що ці ступені свободи "розморожуються" при фіксованій температурі $T_0 = 80\,\text{К}$. Посудина рухається з деякою швидкістю υ, а потім стикається з дуже жорстким бар'єром і миттєво зупиняється. Яка температура, встановиться в посудині? Теплоємністю стінок посудини можна знехтувати.

Розв'язок. Початкова внутрішня енергія (виміряна в системі центру мас газу) і кінетична енергія руху газу як цілого разом рівні внутрішньй енергії газу після удару і встановлення теплової рівноваги. Молярна теплоємність водню в ізохоричному процесі дорівнює $C_{V_1} = 3R/2$ при температурах менше T_0 та $C_{V_2} = 5R/2$ при температурах вище T_0. А при температурі T_0 газ має фазовий перехід. Якщо швидкість руху посудини така, що температура газу не піднімається вище 79,9 K, то із закону збереження енергії випливає, що

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m}{M}\cdot\frac{3}{2}RT_1 = \frac{m}{M}\cdot\frac{3}{2}RT_2.$$

Це відповідає швидкостям $\upsilon < \sqrt{R(5T_0 - 3T_1)/M} = 1019$ м/с, при цьому формула для розрахунку кінцевої температури така:

$$T_2 = T_1 + \frac{M\upsilon^2}{3R}.$$

Припустимо, що кінцева температура газу в посудині вище T_0. Тоді з закону збереження енергії випливає, що

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m}{M}\cdot\frac{3}{2}RT_1 = \frac{m}{M}\cdot\frac{5}{2}RT_2.$$

Це відповідає швидкостям $\upsilon > \sqrt{R(5T_0 - 3T_1)/M} = 1019$ м/с. У цьому випадку формула для розрахунку кінцевої температури буде такою:

$$T_2 = \frac{3}{5}T_1 + \frac{M\upsilon^2}{5R}.$$

А при швидкостях посудини, що лежать у діапазоні від 611 м/с до 1019 м/с, кінцева температура газу буде $T_2 = T_0 = 80\,\text{К}$.

3.2.69. Згідно сучасній теорії чорні дірки характеризуються трьома фізичними величинами – масою, кутовим моментом та електричним зарядом. У цій задачі будемо розглядати чорну дірку з нульовими значеннями кутового моменту та заряду. Однією з найбільш важливих характеристик чорної дірки є площа поверхні горизонту– уявної сфери, що охоплює чорну дірку, всередині якої гравітаційна сила настільки велика, що навіть світло не може вилетіти за межі цієї сфери. Згідно з принципами класичної фізики чорна дірка може тільки поглинати енергію. Якщо T - температура речовини, що оточує чорну дірку, то одиниця площі Π поверхні горизонту в одиницю часу t поглинає енергію E, пропорційну T і квадрату маси чорної дірки m. Цей закон має вигляд

$$\frac{1}{\Pi}\frac{dE}{dt} = qkTm^2 . \qquad (1)$$

де q - коефіцієнт пропорційності, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - стала Больцмана.

<u>*Завдання 1.*</u> Уважаючи, що коефіцієнт q залежить тільки від швидкості світла c, гравітаційної сталої G та маси Сонця M, виразіть q через c, G, M. За законами класичної фізики чорні дірки існували б вічно, знищуючи все навколо себе. Але врахування квантових ефектів приводить до того, що чорна дірка може також втрачати енергію за рахунок випромінювання елементарних частинок (випромінювання Гокінга). Унаслідок цього ефекту час життя чорної дірки може бути скінченним. Оцініть час життя чорної дірки.

<u>*Завдання 2.*</u> Ураховуючи, що площа горизонту залежить тільки від маси m чорної дірки, швидкості світла c і гравітаційної сталої G, виразіть площу Π через m, c, G.

<u>*Завдання 3.*</u> На основі термодинамічного означення ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

було введено поняття ентропії чорної дірки

$$S = \eta \Pi ,$$

де

$$\eta = \frac{kc^3}{\hbar G},$$

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – стала Планка.

Енергія, що виділяється з поверхні площі Π чорної дірки в одиницю часу дорівнює σT_H^4, де $\sigma = \dfrac{k^4}{c^2\hbar^3}$, а T_H –температура Хокінга, яка залежить від маси чорної дірки і фізичних констант c, G, $\hbar$, і k. Знайдіть цю залежність, використовуючи перший закон термодинаміки

$$dE = \delta Q + \delta A$$

(Q – теплота, яка виділяється, A – робота, яку виконує система), та вважаючи, що $E = mc^2$ – повна енергія чорної дірки, і чорная дірка не виконує ніякої роботи A.

Завдання 4. Унаслідок поглинання та випромінювання енергії маса чорної дірки змінюється. Виведіть рівняння, яке описує цей процес.

Завдання 5. Знайдіть час життя чорної дірки, вважаючи що її початкова маса m_0.

Розв'язок.

Завдання 1. Зі співвідношення (1) слідує $[q]$ = кг$^{-2}$см$^{-2}$с$^{-1}$. Шукаємо q у вигляді:

$$q = G^{\alpha} c^{\beta} M^{\gamma} .$$

З аналізу розмірностей отримуємо систему рівнянь для визначення невідомих α, β, γ.

$$-2 = -\alpha + \gamma,$$
$$-2 = 3\alpha + \beta,$$
$$1 = 2\alpha + \beta.$$

Звідки $\alpha = -3$, $\beta = 7$, $\gamma = -5$, отже $q = c^7/(M^5G^3)$

Завдання 2. Шукаємо розв'язок у вигляді $\Pi = m^a c^b G^g$, де a, b, g – невідомі величини, які визначаються з аналізу розмірностей величин:

$$[см]^2 = [г]^a \left[см \cdot с^{-1}\right]^b \left[см^3 г^{-1} с^{-2}\right]^g,$$

$$\begin{cases} a - g = 0, \\ b + 3g = 2, \\ -b - 2g = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = -4, \\ g = 2. \end{cases}$$

$$\Pi = \frac{m^2G^2}{c^4}.$$

Завдання 3. Якщо робота не виконується, то

$$dA = 0 \text{ і } dE = dQ = T_H dS.$$

Звідки

$$T_H = (dS/dE)^{-1}.$$

Оскільки

$$S = \eta\, \Pi,$$

(де η і Π вже відомі), то

$$S = \frac{km^2G}{\hbar c}.$$

Оскільки

$$E = mc^2,$$

то отримуємо

$$T_H = \left(\frac{dS}{c^2dm}\right)^{-1}$$

звідки

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{2kG} \cdot \frac{1}{m}.$$

Завдання 4. Враховуючи, що поверхня горизонту чорної дірки поглинає і випромінює енергію, записуємо:

$$\frac{1}{\Pi}\frac{dE}{dt} = -\sigma T_H^4 + qkTm^2,$$

де

$$\Pi = \frac{m^2G^2}{c^4};\quad q = -\frac{c^7}{M^5G^3};\quad \sigma = \frac{k^4}{c^2\hbar^3},\quad T_H = \frac{\hbar c^3}{2km\sigma},\quad E = mc^2.$$

Звідси отримаємо шукане рівняння

$$\frac{dm}{dt} = \alpha m^4 - \frac{\beta}{m^2},$$

де

$$\alpha = \frac{ckT}{GM^5};\quad \beta = \frac{1}{16}\frac{\hbar c^4}{G}.$$

Завдання 5. Інтегруючи попереднє рівняння, знайдемо

$$\int_{m_0}^{0} \frac{dm}{\alpha m^4 - \dfrac{\beta}{m^2}} = \int_0^t dt,$$

звідки

$$t = \int_{m_0}^{0} \frac{m^2 dm}{\left(\sqrt{\alpha} m^3\right)^2 - \beta} = \frac{1}{6\sqrt{\alpha\beta}}\cdot \ln\left(\frac{\beta + m^3\sqrt{\alpha}}{\beta - m^3\sqrt{\alpha}}\right).$$

3.2.70. Досліджуючи реакцію, у якій дві речовини A та B перетворювалися на речовину C, науковці встановили такі три факти. Перший: при змішуванні 1 кг речовини A та 3 кг речовини B у результаті реакції отримується 4 кг речовини C при температурі 120°C. Другий: при змішуванні 2 кг речовини A й 7 кг речовини B утворюється суміш речовин B та C при температурі 116°C. Третій: при змішуванні 3 кг речовини A і 6 кг речовини B отримується суміш речовин A та C при температурі 95°C. В усіх дослідах початкова температура речовин-реагентів дорівнювала 20°C. Чому дорівнюють питомі теплоємності речовин A та B, якщо питома теплоємність речовини C дорівнює 300 Дж/(К·кг)?

Розв'язок. На рис. 1 показано, які речовини та при якій температурі утворюються в кожному випадку.

1. При співвідношенні мас 1/3 залишку немає.

2. У реакції *2* створюється m_C = 8 кг при температурі t_1 = 120°C. Залишається Δm_B = 1 кг при температурі t_0 = 20°C. Відбувається обмін теплом, який завершується при температурі t_2 = 116°C.

$$c_C m_C(t_1 - t_2) = c_B \Delta m_B(t_2 - t_0),$$

$$c_B = c_C m_C(t_1 - t_2)/\Delta m_B(t_2 - t_0) = 100 \text{ Дж/кг·град.}$$

3. У реакції *3* утворюється m_C = 8 кг при t_1 = 120°C. Залишається Δm_A = 1 кг при температурі t_0 = 20°C. Відбувається обмін теплом, який завершується при температурі t_3 = 95°C.

$$c_C m_C(t_1 - t_3) = c_B \Delta m_A(t_3 - t_0),$$

$$c_B = c_C m_C(t_1 - t_3)/\Delta m_A(t_3 - t_0) = 800 \text{ Дж/кг·град.}$$

	До змішування			Після змішування
1 реакція:	A: 1 кг, $t_0 = 20^0$C	B: 3 кг, $t_0 = 20^0$C	+ Q	C: 4 кг, $t_1 = 120^0$C
2 реакція:	A: 2 кг, $t_0 = 20^0$C	B: 7 кг, $t_0 = 20^0$C		B: 1 кг C: 8 кг, $t_2 = 116^0$C
3 реакція:	A: 3 кг, $t_0 = 20^0$C	B: 6 кг, $t_0 = 20^0$C		A: 1 кг C: 8 кг, $t_3 = 95^0$C

Рис. 1

3.2.71. На вхід системи опалювання будинку подається вода температурою $t_{вх} = 75$°C зі швидкістю $V = 15$ л/хв, а на виході вода має температуру $t_{вих} = 55$°C. При такому обігріванні, якщо на вулиці була температура $t_0 = -10$°C, температура повітря всередині будинку складала $t_1 = 18$°C. Після обклеювання вікон будинку термоплівкою температура всередині зросла до $t_2 = 24$°C. Оцініть щосекундну економію кількості теплоти при незмінних умовах теплообміну, а також щомісячну економію коштів, якщо б для отримання потрібної температури доводилося б використовувати електрообігрівач за тарифу $p = 0{,}76$ грн/(кВт·год). Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг °C), густина води 1000 кг/м^3.

Розв'язок. Розглянемо випадок опалення неутепленого будинку. Кількість теплоти, яку отримує будинок, дорівнює кількості теплоти, яку будинок віддає у навколишнє середовище. Згідно закону Ньютона потужність теплових втрат прямо пропорційна різниці температур тіл і навколишнього середовища. Баланс теплових потужностей має вигляд

$$P_Б = \alpha(t_1 - t_0), \tag{1}$$

де $P_Б$ – теплова потужність батареї; α – коефіцієнт, що характеризує умови теплообміну між будинком і навколишнім середовищем.

Теплова потужність батареї у будинку:

$$P_Б = c\rho V(t_{вх} - t_{вих}), \tag{2}$$

де c – питома теплоємність води; ρ – густина води.

Після застосування термоплівки частина теплової потужності P, що раніше розсіювалася будинком у навколишнє середовище, тепер «повертається» всередину будинку і тим самим підсилює потужність батареї. Рівняння балансу має вигляд:

$$P + P_Б = \alpha(t_2 - t_0). \tag{3}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) – (3), отримаємо вираз для зекономленої теплової потужності

$$P=\left(\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}-1\right)c\rho V\left(t_{вх}-t_{вих}\right)=$$

$$=\left(\frac{24-(-10)}{18-(-10)}-1\right)\cdot 4200\cdot 10^3\cdot 0{,}25\cdot 10^{-3}(75-55)=4{,}5\text{ кВт}.$$

Місячна економія коштів становить:

$$S=pPt=0{,}76\cdot 4{,}5\cdot 24\cdot 30=2462{,}4\text{ грн}.$$

3.3. Визначення ККД циклу

3.3.1. На рис. 1 зображено замкнені термодинамічні цикли, проведені з ідеальним одноатомним газом: *1-2-3-4* і *1-5-6-4*. У якого з цих циклів коефіцієнт корисної дії вищий та в скільки разів?

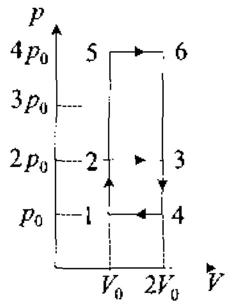


Рис. 1

Розв'язок. Газ дістає ззовні певні кількості теплоти на ділянках *1-5-6* і *1-2-3* циклів. Для циклу *1-5-6-4* можна записати

$$Q_2=\Delta A_2+\Delta U_2=4p_0V_0+\frac{3}{2}\nu R(T_6-T_1).$$

Щоб знайти температури газу T_1 і T_2, запишемо рівняння станів ідеального газу для станів *1* і *6*

$$p_0V_0=\nu RT_1;\qquad 4p_0 2V_0=\nu RT_6,$$

Звідки

$$T_1=\frac{p_0V_0}{\nu R};\ T_6=\frac{8p_0V_0}{\nu R}.$$

Тоді

$$Q_2=4p_0V_0+\frac{3}{2}\nu R\left(\frac{8p_0V_0}{\nu R}-\frac{p_0V_0}{\nu R}\right)=\frac{29}{2}p_0V_0;$$

$$\eta_2=\frac{A_2}{Q_2}=\frac{3p_0V_0\cdot 2}{29p_0V_0}=\frac{6}{29}.$$

Для циклу *1-2-3-4* можна записати

$$Q_1=\Delta A_1+\Delta U_1=2p_0V_0+\frac{3}{2}\nu R(T_3-T_1).$$

З рівняння газового стану

$$2p_0\cdot 2V_0=\nu RT_3.$$

Знайдемо

$$T_3=\frac{4p_0V_0}{\nu R}.$$

Тоді

$$Q_1 = 2p_0V_0 + \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{4p_0V_0}{\nu R} - \frac{p_0V_0}{\nu R}\right) = \frac{13}{2}p_0V_0,$$

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1} = \frac{p_0V_0}{\frac{13}{2}p_0V_0} = \frac{2}{13}.$$

Відношення

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{39}{29} \approx 1{,}39.$$

3.3.2. Над одним молем ідеального газу здійснюється цикл, який зображено на рис. 1. Визначити ККД циклу, якщо робота газу на ділянці *2-3* $A_{23} = 2$ кДж, а на ділянці *1-4* $A_{14} = 1{,}5$ кДж. Температура $T_1 = 300$К.

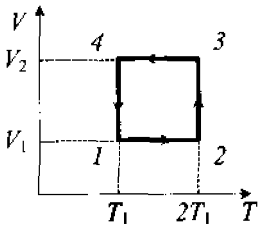


Рис. 1

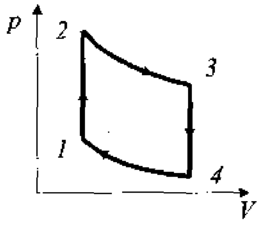


Рис. 2

Розв'язок. Щоб розв'язати дану задачу, слід перейти від системи координат *VT* (рис. 1) до системи координат *PV* (рис. 2). Для побудови нового графіка треба використати рівняння $\frac{pV}{T} = \mathrm{const}$. На ділянці *1-2* (рис. 1) $V_1 = \mathrm{const}$, тому збільшення температури T спричинить збільшення тиску p. На ділянці *2-3* $T = \mathrm{const}$, тому збільшення V спричинить зменьшення тиску p. На ділянці *3-4* $V_2 = \mathrm{const}$, тому зменьшення температури T спричинить зменьшення тиску p. На ділянці *4-1* $T = \mathrm{const}$, тому зменьшення V спричинить збільшення тиску p до первісного.

ККД циклу

$$\eta = \frac{A_к}{Q_{12} + A_{23}} = \frac{A_{23} - A_{41}}{Q_{12} + A_{23}}.$$

Робота буде виконуватись на ділянці *2-3* (додатня) та на *4-1* (від'ємна). Тому корисна робота:

$$A_к = A_{23} - A_{41}.$$

Затрачена енергія:

$$W_з = Q_{12} + A_{23},$$

де

$$Q_{12} = C_V(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = 1{,}5 \cdot 8{,}3(600 - 300) = 3740\ Дж.$$

$$W_з = 3740 + 2000 = 5740\ Дж.$$

Отже,

$$\eta = \frac{2000-1500}{5740} \cdot 100\% = 8{,}7\%.$$

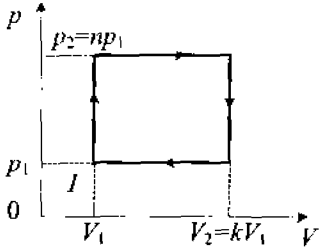


Рис. 1

3.3.3. Чому дорівнює максимальний ККД циклу, що складається з двох ізобар і двох ізохор, якщо робоче тіло – ідеальний газ, максимальна температура якого вдвічі перевищує мінімальну.

Розв'язання. Процес графічно зображено на рис. 1. Відношення тисків і об'ємів позначимо відповідно літерами

$$n = p_2 / p_1 \text{ та } k = V_2 / V_1.$$

З рівняння Клапейрона:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{np_1 \cdot kV_1}{2T_1},$$

тобто $nk = 2$.

Корисна робота за цикл дорівнює площі прямокутника

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = P_1 V_1 (n-1)(k-1) = \nu R T_1 (n-1)(k-1),$$

де ν – кількість речовини в газі.

Кількість теплоти, переданої газу за цикл, дорівнює

$$Q = \Delta U + A_1,$$

де

$$A_1 = p_2 (V_2 - V_1) = p_1 V_1 n(k-1) = \nu R T_1 n(k-1) -$$

робота газу на ділянці розширення,

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu C_V (2T_1 - T_1) = \nu C_V T_1 -$$

зміна внутрішньої енергії газу під час нагрівання. ККД буде максимальним за мінімального значення молярної теплоємності C_V, тобто якщо газ одноатомний ($C_V = 1{,}5R$). У цьому разі ККД дорівнюватиме

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\nu R T_1 (n-1)(k-1)}{\nu R T_1 [1{,}5 + n(k-1)]} = \frac{nk - n - k + 1}{1{,}5 + nk - n} = \frac{3 - n - 2n^{-1}}{3{,}5 - n}.$$

Щоб знайти значення n, при якому η буде максимальним, треба побудувати графік $\eta = f(n)$ в інтервалі $1 < n < 2$ (рис. 2).

З табл. 1 випливає, що максимальне ККД (коли $n = 1{,}48$) $\eta = 8{,}3489\%$.

Таблиця 1

n	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,5
η, %	8,3263	8,34	8,3476	8,3489	8,3442	8,3333

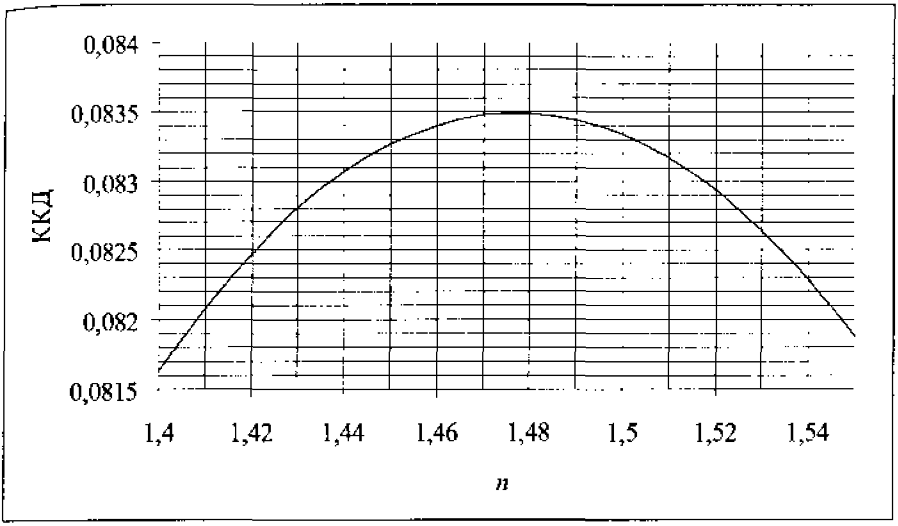


Рис. 2

3.3.4. Довести, що к.к.д. теплової машини, у якій цикл складається з двох ізотерм та двох ізохор, менше к.к.д. ідеальної теплової машини Карно, що працює з тим ж нагрівачем і холодильником.

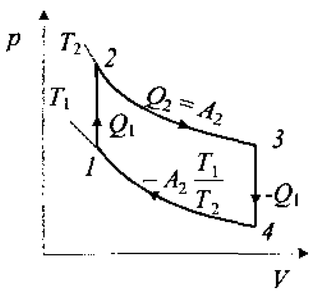


Рис. 1

Розв'язок. Проаналізуємо роботу теплової машини, яка використовує цикл, який складається з двох ізотерм і двох ізохор (рис. 1). Нехай T_1 – температура холодильника (нижня ізотерма *1-4*), T_2 – температура нагрівача (верхня ізотерма *2-3*). На ізохоричній ділянці цикла *1 - 2* об'єм газу не змінюється, тобто робота не виконується, але температура підвищується від T_1 до T_2 і надається теплова енергія Q_1.

На ізотермічній ділянці *2 - 3* внутрішня енергія не змінюється і підведене тепло Q_2 повністю іде на виконання роботи A_2, тобто $Q_2 = A_2$.

На ізохоричній ділянці *3 - 4* температура газу повертається до свого первісного значення T_1, тепло Q_1 газом віддається.

При ізотермічному процесі *4 -1* робота від'ємна, від газу відбирається теплота.

Отже, повна теплота, яка підведена за один цикл к газу, складає $Q_1 + A_2$.

Робота газу за цикл, як видно на рис. 1, складається з позитивної роботи A_2 на ділянці *2-3* і від'ємної A_4 на ділянці *4-1*.

Порівняємо тиск у точках, які відповідають однаковим об'ємам, ділянках *4-1* і *2-3*. З закону Шарля випливає, що відношення цих тиск дорівнює T_1/T_2, а робота газу $A_4 = -\dfrac{T_1}{T_2}A_2$. Повна робота за цикл буде

$$A = A_2 + A_4 = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)A_2,$$

а ккд

$$\eta = \frac{A}{Q_1 + A_2} = \frac{1 - T_1/T_2}{1 + Q_1/A_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Отже, ккд теплової машини, яка використовує цикл, що складається двох ізотерм і двох ізохор, менший ніж ккд ідеальної теплової машини Карно

$$\eta_{Карно} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

$$h = -\frac{RT_1}{\mu g}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \approx 145\text{м}.$$

3.3.5. Тиск ідеального одноатомного газу змінюється від величини p_1 д величини p_2 у відповідності з pV-діаграмою, щ має вигляд трикутника (рис.1). Знайти КК циклу, якщо температура газу в стані *3* більш його температури в стані *1*.

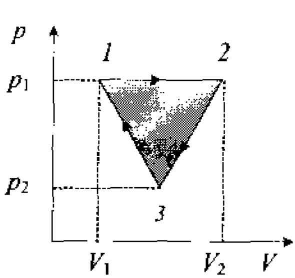


Рис. 1

Розв'язок. Коефіцієнт корисної дії відношенням корисної роботи до кількост отриманої теплоти. За першим законо термодинаміки

$$Q_1 = \Delta U + A = \frac{3}{2}R\Delta T + p_1(V_2 - V_1),$$

де повна робота $A_{повна} = p_1(V_2 - V_1)$, змін внутрішньої енергії $\Delta U = \dfrac{3}{2}R\Delta T = \dfrac{3}{2}p_1(V_2 - V_1)$.

Корисна робота чисельно дорівнює площі трикутника *1-2-3*:

$$A_{кор} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(V_2 - V_1).$$

Отже,

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)}{p_1(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}p_1(V_2 - V_1)} = \frac{(p_2 - p_1)}{5p_1}.$$

Оскільки $T_3 > T_1$ на ділянці *3-1* тепло віддається, а на ділянці *2-3* тепл одержується. Внутрішня енергія $\Delta U_{31} = -\Delta U_{23}$.

3.3.6. З ідеальним одноатомним газом проводять замкнутий цикл, показаний на рис. 1. У точці C газ мав об'єм V_C і тиск P_C, а в точці B - об'єм $V_B = 0{,}5\ V_C$ і тиск $P_B = 2P_C$. Знайдіть к.к.д. цього циклу і порівняйте його з максимальним теоретичним ККД циклу, у якого температура нагрівача і холодильника рівні відповідно максимальній та мінімальній температурі розглянутого циклу.

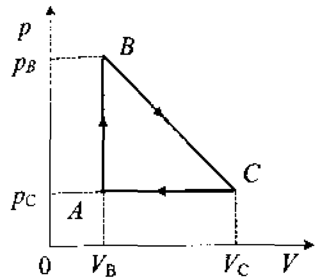


Рис. 1

Розв'язок. За означенням ККД циклу дорівнює

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

де A – робота, яка виконується за цикл, а Q_1 – кількість теплоти, яку отримує газ ззовні. Робота, яка виконується за цикл, чисельно дорівнює площі обмеженої контуром циклу на діаграмі (p,V). У даному випадку це площа трикутника ABC

$$A = \frac{1}{2}(p_B - p_C)(V_C - V_B) = \frac{1}{4}p_C V_C.$$

Тепер знайдемо кількість теплоти, отриманої газом при нагріванні. Відповідно до першого закону термодинаміки

$$Q = \Delta U + A,$$

де ΔU –зміна внутрішньої енергії газу, A – виконана газом робота. Якщо $Q > 0$, то газ отримує тепло, якщо $Q < 0$ – віддає. Внутрішня енергія одноатомного газу пропорційна його температурі та дорівнює

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

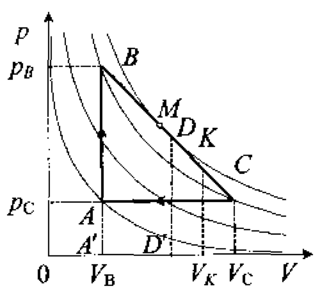


Рис. 2

Нанесемо на $(p,\ V)$-діаграму процесу сітку ізотерм – гіпербол $pV = \text{const}$. Чим вище температура T, тим далі перебуває вершина гіперболи від точки O. Тому зрозуміло, що газ отримував теплоту від джерела при ізохоричному нагріванні на ділянці AB; кількість отриманої теплоти дорівнює зміні внутрішньої енергії газу:

$$Q_1' = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_B - \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_A.$$

Оскільки за рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

то

$$U = \frac{3}{2}pV$$

і

$$Q_1' = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A) = \frac{3}{2}\left(2p_C \frac{1}{2}V_C - p_C \frac{1}{2}V_C\right) = \frac{3}{4}p_C V_C.$$

На ділянці CA ізобаричного стискання газ віддавав теплоту: його внутрішня енергія зменшувалася ($\Delta U < 0$) і робота відбувалася над газом ($A < 0$).

Розглянемо тепер процес розширення на ділянці BC. З умов завдання випливає, що точки B і C лежать на одній ізотермі, тобто температури $T_B = T_C$. З рис. 2 видно, що в процесі розширення на ділянці BC точка, яка зображує стан газу спочатку віддаляється від ізотерми (температура газу збільшується), а потім наближається до неї (температура газу зменшується до початкової температури Tв). У процесі розширення газ виконує роботу над зовнішніми тілами ($A > 0$). Але на початку процесу $B \to C$ газ нагрівається, його внутрішня енергія зростає ($\Delta U > 0$). У цьому випадку ($Q > 0$), тобто газ отримує теплоту ззовні. В кінці процесу $B \to C$ газ охолоджується, його внутрішня енергія зменшується, тобто $\Delta U < 0$. У цьому випадку газ може віддавати деяку кількість теплоти зовнішньому середовищу ($Q < 0$, якщо $|\Delta U| > A$).

Знайдемо ту точку K діаграми, до якої розширення газу супроводжується отриманням теплоти ззовні, і теплоту, отриману при процесі $B \to K$. Для цього знайдемо, як залежить кількість теплоти отриманої газом, від об'єму газу.

При розширенні від об'єму V_B до деякого об'єму V_D газ виконує роботу, чисельно рівну площі трапеції $A'BDD'$:

$$A = \frac{1}{2}(p_D + 2p_C)\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right) = \frac{1}{4}p_C V_C.$$

При цьому, оскільки газ одноатомний і ідеальний, його внутрішня енергія зміниться на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_D V_D - p_B V_B) = \frac{3}{2}(p_D V_D - p_C V_C)$$

і

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}(p_D V_D - p_C V_C) + \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)(p_D + 2p_C).$$

В останню формулу входять параметри p_D і V_D. Виключимо один з них. Для цього знайдемо залежність тиску p від об'єму V на ділянці BC. Оскільки графік процесу – пряма, то

$$p = p_0 + \alpha V,$$

де p_0 і α – коефіцієнти, які потрібно визначити. При $p = p_B = 2p_C$ об'єм $V = V_B = \frac{1}{2}V_C$, а при $p = p_C$, об'єм $V = V_C$. Це означає, що,

$$2p_C = p_0 + \frac{1}{2}\alpha V_C, \quad p_C = p_0 + \alpha V_C.$$

Розв'язуючи два останні рівняння спільно знайдемо:

$$p_0 = 3p_C, \quad \alpha = -2\frac{p_C}{V_C}.$$

Таким чином:

$$p_D = 3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}\,V_D$$

і

$$Q = \frac{3}{2}\left[\left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}\,V_D - p_C\right)V_C\right] + \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)\left(5p_C - 2\frac{p_C}{V_C}\,V_D\right) =$$

$$= p_C V_C\left(\frac{9}{2}\frac{V_D}{V_C} - 3\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{5}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4} - \frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{1}{2}\frac{V_D}{V_C}\right) =$$

$$= p_C V_C\left(-4\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{15}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{11}{4}\right).$$

Уведемо позначення:

$$\xi = \frac{V_D}{V_C}.$$

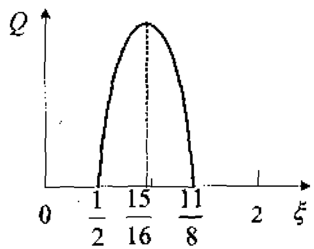


Рис. 3

Тоді

$$Q = -p_C V_C\left(4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi - \frac{11}{4}\right).$$

Графік залежності Q від ξ – парабола (рис. 3), що перетинає вісь ξ у точках $\xi_1 = \frac{1}{2}$ та $\xi_2 = \frac{11}{8}$ (це корені квадратного тричлена $4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi - \frac{11}{4}$ з вершиною у точці $\xi = \frac{15}{16}$.

У цій точці величина Q максимальна і дорівнює

$$Q_1'' = \frac{49}{64}p_C V_C.$$

Отже, при переході $B \to C$ на ділянці BK, тобто до стану, якому відповідає точка K з координатою $V_K = \frac{15}{16}V_C$, газ отримує теплоту ззовні. При подальшому розширенні (на ділянці KC) газ віддає теплоту.

Таким чином кількість теплоти, отримана газом за цикл, дорівнює

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' = \frac{3}{4}p_C V_C + \frac{49}{64}p_C V_C = \frac{97}{64}p_C V_C.$$

Тепер можна знайти ККД циклу

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}p_C V_C}{\frac{97}{64}p_C V_C} \approx 0{,}165.$$

Максимальний теоретичний ККД циклу дорівнює

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 – максимальна, а T_2 – мінімальна температура газу. З рис.2 добре видно, що температура газу мінімальна в точці A, тобто

$$T_2 = T_A = \frac{\mu p_A V_A}{mR} = \frac{\mu p_C V_C}{2mR}.$$

Стану газу, в якому його температура максимальна, відповідає точка M на відрізку BC, у якій ізотерма торкається відрізка BC. З симетрії графіка циклу слідує, що ця точка знаходиться на середині відрізка BC, так що $V_M = \frac{3}{4}V_C$ *.

При цьому $pV = (pV)_{max} = \frac{9}{8}p_C V_C$. Температура газу в точці M дорівнює

$$T_1 = \frac{9\mu}{8mR}p_C V_C.$$

Далі підставимо знайдені вирази для T_1 і T_2 у формулу для η_{max}, знайдемо $\eta_{max} = 0{,}556$. Порівняємо η і η_{max}

$$\frac{\eta_{max}}{\eta} = 3{,}36.$$

тобто максимальний теоретичний ККД у 3,36 рази більше ККД циклу, який ми розглядали.

*Примітка**. Розглянемо при якому значенні добуток $pV = \left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V\right)V$ для точок, які лежать на на BC, максимальний. Похідна функції $T = \frac{\mu}{mR}\left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V\right)V$ у точці M по об'єму дорівнює нулю, тобто

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\mu}{mR}\left(3p_C - 4\frac{p_C}{V_C}V\right) = 0.$$

Звідки

$$V_M = \frac{3}{4}V_C *.$$

3.3.7. Через стінки холодильника проникає за годину кількість теплоти $Q_1 = 8\cdot 10^5$ Дж. Температура всередині холодильника $t_1 = +5^0$C, а в кімнаті — $t_2 = +20^0$ С. Яку мінімальну потужність споживає цей холодильник від мережі?

Розв'язок. *Холодильник — це теплова машина, що працює по оберненому циклу.* Якщо пряма теплова машина поглинає кількість тепла при високій температурі T_2 і віддає меншу кількість тепла Q_1 при низькій температурі T_1, виконавши роботу $A = Q_2 - Q_1$, то холодильна машина поглинає кількість тепла Q_1' у холодного тіла при температурі T_1 і віддає кількість тепла Q_2' більш нагрітому тілу при температурі T_2. При цьому до холодильника потрібно, звичайно, підвести енергію $A' = Q_2' - Q_1'$.

Коефіцієнт корисної дії прямої теплової машини $\eta = \dfrac{A}{Q_2} = \dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$ не може перевищувати величини $\dfrac{T_2 - T_1}{T_2}$. Причому, для того щоб к.к.д. машини був максимальним, вона повинна була працювати по зворотному циклу. Якби холодильна машина працювала по тому ж циклу, що і пряма $Q_1' = Q_1$, $Q_2' = Q_2$ і $A' = A$. К.к.д. холодильної машини був у цьому випадку рівний $\eta_x = \dfrac{Q_1'}{A} = -\dfrac{Q_1}{Q_2 - Q_1}$. Але в цьому випадку к.к.д. прямої машини рівний $\dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \dfrac{T_2 - T_1}{T_2}$, і тому $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{T_1}{T_2}$. Використовуючи це співвідношення, знайдемо, що к. к. д. холодильної машини не може перевищувати величини

$$\eta_x = \frac{\dfrac{Q_1}{Q_2}}{1 - \dfrac{Q_1}{Q_2}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Обчислений за цією формулою к. к. д. холодильника (іноді його називають «холодильним коефіцієнтом»), може бути і більше одиниці. Це пов'язано з тим, що, віддаючи енергію Q_2, ми споживаємо не тільки енергію A, але ще й енергію Q_1, отримувану від охолоджуваного тіла. При обчисленні ж к.к.д. прямої теплової машини, витраченої ми рахуємо лише енергію A, споживану від мережі, оскільки тільки її нам доводиться оплачувати.

Тепер підрахуємо, яку мінімальну енергію потрібно підводити до ідеальної холодильної машини, що має максимальний к.к.д. Оскільки

$$Q_1 = \eta_x A = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot A,$$

то

$$A = Q_1 \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{293 - 278}{278} = 4{,}31 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Тобто потужність P, яка споживається холодильником від мережі, дорівнює

$$P = \frac{A}{t} = \frac{4{,}31 \cdot 10^4}{3600} = 12 \text{ Вт}.$$

Звичайно, у теплових машин к.к.д. значно нижче, і холодильник споживає від мережі більшу потужність, ніж вийшло у нас. Це пов'язано з тим, що в холодильних машинах, як і в теплових, завжди відбуваються необоротні процеси.

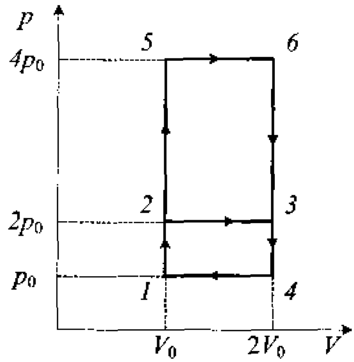


Рис. 1

3.3.8. На рис. 1 показано два замкнутих термодинамічних цикла, проведенних з ідеальним одноатомним газом: *1* → *2* →*3* → *4* → *1* і *1* → *5* → *6* → *4* →*1*. У якого з циклів коефіцієнт корисної дії вище? У скільки разів?

Розв'язок. ККД циклу дорівнює відношенню роботи A, здійснену газом, до кількості теплоти Q, переданої газу за цикл. Чисельно робота дорівнює площі, обмеженої графіком циклу.

Для першого циклу —

$$A = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = p_0 V_0.$$

Для другого циклу —

$$A = (4p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = 3p_0 V_0.$$

Знайдемо тепер Q_1 і Q_2. У першому випадку теплота передається газу на ділянках *1-2* і *2-3*. При цьому газ нагрівається, а на ділянці *2-3* ще і здійснює роботу $A' = 2p_0 V_0$. Отже, $Q_1 = A' + \Delta U'$. $\Delta U'$ – зміна внутрішньої енергії газу. Оскільки температура газу мінімальна в точці *1* і максимальна в точці *3*, а теплоємність одного кіломоля ідеального одноатомного газу дорівнює $\frac{3}{2}R$,

$$\Delta U' = \frac{3}{2} R\nu\,(T_3 - T_1).$$

Тут ν – кількість кіломолей газу, $T_1 = \frac{p_0 V_0}{\nu R}$; $T_3 = \frac{4p_0 V_0}{\nu R}$.

Тому, $\Delta U' = \frac{9}{2}\, p_0 V_0$ і $Q_1 = \frac{13}{2}\, p_0 V_0$.

Аналогічно знайдемо для другого циклу $A' = 4p_0 V_0$ (на ділянці *5 – 6*).

$$\Delta U' = \frac{3}{2} R\nu\,(T_6 - T_1) = \frac{21}{2} p_0 V_0 \text{ і } Q_2 = \frac{21}{2}\, p_0 V_0.$$

Використовуючи отримані дані, знаходимо:

$$\eta_1 = 2/13,\ \eta_2 = 6/29,\ \eta_1/\eta_2 \approx 0{,}74.$$

3.3.9. Визначте відношення $\dfrac{\eta_1}{\eta_2}$ коефіцієнтів корисної дії двох циклічних процесів, проведених з ідеальним газом (рис. 1): перший процес *1-2-3-4-1*, другий процес *5-6-7-4-5*.

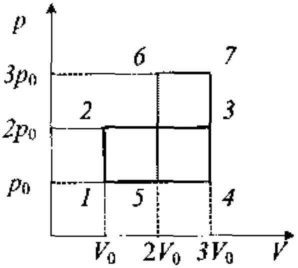


Рис. 1

Розв'язок. Коефіцієнт корисної дії циклічного процесу визначається так:

$$\eta = A/Q,$$

де A - робота, виконана системою за цикл, Q - кількість теплоти, яка отримана системою від нагрівача. Роботі газу за цикл на p-V - діаграмі відповідає площа, яка знаходиться «всередині» циклу. З умови задачі випливає, що робота газу при першому і при другому процесах одна і та ж.

Отже,

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1},$$

де Q_1 і Q_2 – кількості теплоти, отримані системою відповідно при першому і при другому циклах. знайдемо Q_1 та Q_2. Нехай температура газу в точці *1* була T_1 Скориставшись рівнянням стану ідеального газу, неважко показати, що

$$T_2 = T_5 = 2T_1, \quad T_3 = T_6 = 6T_1, \; T_4 = 3T_1, \; T_7 = 9T_1.$$

Очевидно, що в процесі *1-2-3-4-1* газ отримав тепло Q_1 на ділянках *1–2* та *2–3*, причому $Q_1 = A_1 + \Delta U_1$, де $A_1 = 4p_0V_0 = 4\nu RT_1$ – робота виконана на цих ділянках газом, $\Delta U_1 = \dfrac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) = \dfrac{15}{2}\nu RT_1$ – зміна його внутрішньої енергії. Отже,

$$Q_1 = 4\nu RT_1 + \frac{15}{2}\nu RT_1 = \frac{23}{2}\nu RT_1.$$

У процесі *5-6-7-4-5* газ отримує тепло Q_2 на ділянках *5-6* і *6-7*, причому

$$Q_2 = A_2 + \Delta U_2 = 3p_0V_0 + \frac{3}{2}\nu R(T_7 - T_5) = \frac{27}{2}\nu RT_1.$$

Таким чином,
$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{27}{23}.$$

3.3.10. Тепловий двигун становить наповнений газом циліндр з поршнем, рух якого обмежено упорами *АА* і *ББ* (рис. 1). Газ повільно нагрівають, поки поршень не торкнеться упорів *ББ*, після чого основу пружини зміщують з положення *ВВ* у положення *ГГ*. Потім посудину повільно охолоджують до тих пір, поки поршень не торкнеться упорів *АА*. Тоді підставу пружини зміщують назад до *ВВ*, циліндр знову нагрівають і т.д. Знайти ККД цього двигуна. Циліндр заповнений гелієм; площа поршня $S = 10\text{см}^2$; жорсткість пружини

$k = 10$ Н/м, довжина її у нерозтягнутому стані $l_0 = 60$ см. Зовнішній тиск беремо рівним нулю.

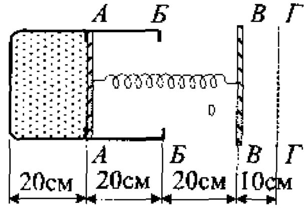


Рис. 1

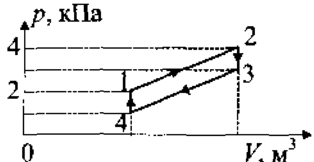


Рис. 2

Розв'язок. Намалюємо цикл на діаграмі $p-V$. Почнемо з моменту, коли газ стане розширюватися. Нагрівання відбувається дуже повільно, тому можна вважати, що поршень у будь-який момент знаходиться в рівновазі. Врахуємо, що довжина пружини в нерозтягнутому стані дорівнює відстані від лівої стінки посудини до лінії *ВВ* (див. дані, наведені на рис. 1), тому при розширенні газу (при русі поршня від упорів *АА* до упорів *ББ*) сила пружності пружини пропорційна об'єму газу

$$F_{пр} = kx = k\frac{V}{S},$$

і значить, тиск газу

$$p_{1\to2} = \frac{k}{S^2}V.$$

На цій ділянці об'єм газу збільшується від $V_1 = 2\cdot10^{-4}\,м^3$ до $V_2 = 4\cdot10^{-4}\,м^3$. Тиск газу зростає від $p_1 = \frac{k}{S^2}V_1 = 2\cdot10^3\,Па$ до $p_2 = \frac{k}{S^2}V_2 = 4\cdot10^3\,Па$ (рис. 2).

Після того як основу пружини змістили з *ВВ* у *ГГ*, сила пружності пружини зменшилася. У результаті при охолодженні посудини газ почне стискатися не відразу, а лише після того, як тиск газу на поршень впаде настільки, що сила тиску газу дорівнюватиме силі пружності пружини. Це станеться при $p_3 = \frac{10\cdot0{,}3}{10^{-2}}\,Па = 300\,Па$ (див. рис. 2). При подальшому охолодженні газ буде стискатися, і тиск буде змінюватися за законом

$$p_{3\to4} = \frac{k}{S^2}(V - V_0),$$

де V_0 - об'єм, який займає газ в разі, коли пружина, закріплена в положенні *ГГ*, виявляється неразтянутою: $V_0 = 0{,}1\cdot10^{-3}\,м^3 = 10^{-4}\,м^3$. Таким чином,

$$p_4 = \frac{k}{S^2}(V_1 - V_0) = 4\cdot10^3\,Па.$$

Після того як основу пружини перемістять з положення *ГГ* у положення *ВВ*, сила пружності зросте. Тому при подальшому нагріванні газу він почне розширюватися лише з того моменту, коли сила тиску газу зросте до значення *сили пружності*. Це *станеться при* $p_1 = 2\cdot10^3$ Па; у подальшому процес повторюється (див. рис. 2).

Роботу газу за один цикл можна знайти як площу паралелограма на рис. 2:

$$A = 0{,}2\ \text{Па}\cdot\text{м}^3.$$

Тепло газ отримує на ділянках $1\to2$ та $4\to1$; враховуючи, що газ одноатомний, знаходимо:

$$Q = Q_1 + Q_2 = A_{1\to2} + \Delta U_{1\to2} + \Delta U_{4\to1} =$$
$$= \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4) =$$
$$= \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_4V_4) = 2{,}7\ \text{Дж}.$$

Таким чином, ККД цього двигуна - $\eta = \dfrac{A}{Q}\cdot100\% \approx 7{,}4\%$.

Корисну роботу в цьому циклі «знімають» з двигуна при зміщенні основи пружини - коли газ нагрітий і його тиск великий, він виконує роботу більшу, ніж робота зовнішніх сил при зворотному зміщенні основи пружини.

3.3.11. *Цикл теплової машини складається з двох адіабат і двох ізохор. Знайдіть ККД циклу, якщо відомі температури* T_1 *і* T_2 *- початкова і кінцева для однієї з адіабат. Робоче тіло - ідеальний газ.*

Розв'язок. Нехай цикл теплової машини *1 – 2 – 3 – 4 – 1 складається з* адіабатичного розширення *1 – 2*, ізохоричного охолодження *2 – 3*, адіабатичного стискання *3 – 4* і ізохоричного нагрівання *4 – 1*. Уведемо позначення: T_1, T_2, T_3, і T_4 - температури в точках *1, 2, 3*, і *4* відповідно. Газ отримує тепло від нагрівача ($Q_н$) на ділянці *4 – 1* і віддає тепло холодильнику ($Q_х$) на ділянці *2 – 3. Для розрахунку ККД не обов'язково знати* рівняння адіабатичного процесу, а цілком достатньо розуміти, що відношення початкової і кінцевої температур на адіабаті однозначно визначається відношенням початкового і кінцевого об`ємів. Звідси випливає, що $T_1 : T_2 = T_4 : T_3$. Запишемо тепер вираз для ККД циклу:

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н}.$$

Знайдемо кількість теплоти, отриману газом на ділянці *4 – 1*. У цьому процесі газ роботи не виконує, а отримане тепло йде цілком на підвищення внутрішньої енергії газу, тому $Q_н = U_1 - U_4 = \nu C_V(T_1 - T_4)$. Аналогічно, передана холодильнику кількість теплоти дорівнює

$$Q_х = U_2 - U_3 = \nu C_V(T_2 - T_3).$$

Тоді для шуканого ККД отримаємо

$$\eta = \frac{(T_1 - T_4) - (T_2 - T_3)}{(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{(T_2 - T_3)}{(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{T_2(1 - T_3/T_2)}{T_1(1 - T_4/T_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Примітка: зверніть увагу на те, що, хоча цей вираз ззовні й нагадує відому формулу для ККД ідеальної теплової машині, температури в нашому випадку зовсім не ті - у відому формулу підставляють температури холодильника і нагрівача.

3.3.12. У розпорядженні фізика є два теплових резервуара - дуже гарячий з температурою +200°С і просто гарячий з температурою +70°С. Навколишнє середовище має постійну температуру +20°С. Фізику треба надати дуже гарячому тілу кількість теплоти 1000 Дж та просто гарячому - кількість теплоти 2000 Дж. Яку мінімальну механічну роботу йому доведеться виконати для цього? Теплоємності гарячого і дуже гарячого тіл можна вважати дуже великими.

Розв'язок. Передавати тепло від холодного тіла до гарячого дозволяє так звана обернена теплова машина. Вона використовує звичайний тепловий цикл, але він проводиться в зворотному напрямку, тобто при контакті з гарячим тілом (нагрівачем) робоче тіло не розширюється, здійснюючи роботу, а стискається і при цьому тепло перетікає в нагрівач, при контакті ж з холодній тілом (холодильником) робоче тіло розширюється і при цьому тепло забирається від холодильника. Якщо в якості такої машини використовувати ідеальну теплову машину, обернувши її цикл, то для перекачування заданої порції тепла між даними гарячим і холодним тілами потрібна мінімальна робота. Отже, ми використовуємо обернену ідеальну теплову машину, коефіцієнт корисної дії якої (у прямому циклі) нам відомий:

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{T_н - T_х}{T_н}.$$

Таке ж співвідношення між витраченою роботою і кількістю теплоти, переданим гарячому тілу, вийде і в оберненому циклі. Залишилося знайти, скільки тепла дуже гаряче тіло повинно отримати від холодного тіла, а скільки - від гарячого. І хоча відповідь очевидна, проведемо розрахунок. Позначимо кількість теплоти, яку ми передамо безпосередньо від холодного (T_3 = 293°К) до дуже гарячого (T_1 = 473°К) тіла буквою Q, тоді від гарячого (T_2 = 343°К) залишиться передати $Q_1 - Q$ тепла, де $Q_1 = 1000$Дж. На все це знадобиться робота

$$A_1 + A_2 = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1} + \frac{(Q_1 - Q)(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

Залишилось знайти кількість теплоти, яку потрібно передати від холодного тіла до гарячого. При передачі $Q_1 - Q$ тепла дуже гарячому тілу гаряче "втратило" тільки $(Q_1 - Q)T_2 / T_1$ - інше дала виконана при цьому робота. Значить, потрібно ще надати кількість теплоти $Q_2 + (Q_1 - Q)T_2 / T_1$, де $Q_2 = 2000$Дж. При цьому необхідно виконати роботу

$$A_3 = \left(Q_2 + \frac{(Q_1 - Q)T_2}{T_1} \right) \frac{T_2 - T_3}{T_2}.$$

Підсумуючи розраховані величини робіт, отримуємо повну роботу:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1} + \frac{(Q_1 - Q)(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + (Q_1 - Q)T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} =$$

$$= \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + Q_1T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} + Q\left(\frac{T_1 - T_3}{T_1} - \frac{T_1 - T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\frac{T_2 - T_3}{T_2}\right).$$

Неважко побачити, що множник при Q в точності дорівнює нулю. Це говорить про те, що необхідна робота зовсім не залежить від того, які порції тепла ми забираємо у конкретних тіл. Результат буде у всіх випадках однаковим:

$$A = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + Q_1T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} \approx 672\,\text{Дж}.$$

3.3.13. Потрібно перевести ідеальний газ зі стану *1* з температурою T_1 у стан *2* з температурою $T_2 > T_1$ таким чином, щоб температура впродовж всього оберненого процесу $1 \to 2$ не зменшувалась, а тепло не відводилося від газу. Мінімальна кількість теплоти, яка передається газу в такому процесі, дорівнює Q_1. Яку максимальну кількість теплоти можна надати газу при даних умовах?

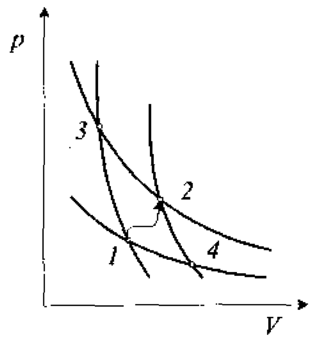


Рис.1

Розв'язок. Намалюємо координатну площину p, V і позначимо стан з температурами T_1 і T_2 точками *1* і *2* відповідно (рис. 1). Проведемо через ці точки ізотерми та адіабати, позначивши їх точками перетину *3* і *4*. Із умови задачі випливає, що процес $1 \to 2$, упродовж якого температура не зменшується, а тепло не відводиться від газу, можливий. Це означає, що точка *2* лежить праворуч від адіабати, яка проходить через точку *1*. При цьому графік довільного процесу $1 \to 2$, для якого виконуються умови задачі, лежить усередині циклу $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$. Позначимо через Q_{12}, Q_{132}, Q_{142} кількість теплоти, наданої газу в процесах $1 \to 2$, $1 \to 3 \to 2$, і $1 \to 4 \to 2$, $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$ відповідно. Розглянемо процес $1 \to 3 \to 2 \to 1$. У ньому газ спочатку одержує кількість теплоти Q_{132}, потім віддає Q_{12}, виконуючи при цьому роботу Q_{132} - Q_{12}, яка дорівнює площі фігури, обмеженої на діаграмі лініями *1 - 3*, *3 -2* і *2 – 1*. Оскільки ця площа невід'ємна, то

$$Q_{132} \ge Q_{12}.$$

Розглянемо аналогічно процес $1 \to 2 \to 4 \to 1$. Робота, яку виконує газ у цьому процесі, також невід'ємна і дорівнює $Q_{12} - Q_{142}$, звідки

$$Q_{12} \ge Q_{142}.$$

З двох нерівностей маємо

$$Q_{142} \le Q_{12} \le Q_{132}.$$

Оскільки процес $1 \to 2$ – довільний (із числа, які задовольняють умову задачі), із останньої нерівності випливає, що мінімальна кількість теплоти Q_1, яку можна передавати газу в такому процесі, дорівнює Q_{142}. Максимальна кількість теплоти Q_2, яка може передаватись газу в даному процесі, з тих же міркувань дорівнює Q_{132}. Таким чином, для того щоб отримати відповідь задачі, потрібно розглянути цикл Карно $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$, ККД якого дорівнює

$$\eta = 1 - \frac{Q_{142}}{Q_{132}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Звідси, з урахуванням того, що $Q_{142} = Q_1$ і $Q_{132} = Q_2$, знаходимо

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

3.3.14. Порція гелію в циклічному процесі спочатку адіабатно розширюється, при цьому температура газу зменшується від 500 K до 499 K, потім ізобарно стискається до початкового об'єму і, нарешті, ізохорно нагрівається до початкової температури. Знайдіть найменше значення температури в цьому циклі, а також ККД циклу.

Розв'язок. Процес зображено на pV-діаграмі (рис. 1) у вигляді дуже маленького прямокутного трикутника (гіпотенуза — не зовсім пряма, але відмінність від кривої невелика). На ділянці *1-2* (адіабата)

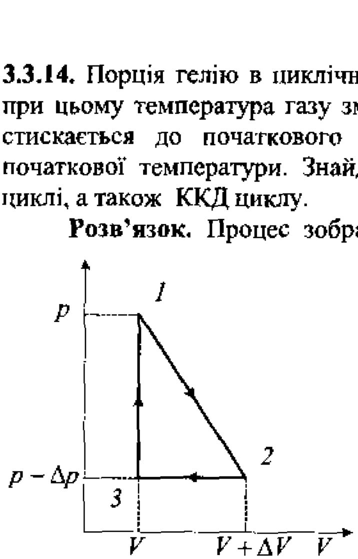


Рис. 1

$$\Delta U_{12} = -A_{12}, \quad \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1), \quad A_{12} = p\Delta V.$$

Для стану *1*

$$pV = \nu RT_1,$$

для стану *2*

$$(p - \Delta p)(V + \Delta V) = \nu RT_2.$$

Звідки отримуємо

$$p\Delta V = 1{,}5\nu R\Delta T, \quad V\Delta p = 2{,}5\nu R\Delta T,$$

де $\Delta T = T_1 - T_2 = 1\text{K}$.

Тоді в стані *3*

$$(p - \Delta p)V = \nu RT_3,$$

звідки

$$T_3 = \frac{PV}{\nu R} - \frac{V\Delta p}{\nu R} = T_1 - 2{,}5\Delta T = 497{,}5\ \text{K}.$$

Це і є мінімальна температура в цьому циклі. Знайдемо тепер ККД циклу. Газ одержує тепло тільки на ділянці *3 - 1*. У цьому випадку

$$Q = \Delta U_{31} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3).$$

Робота в циклі знаходиться за площею трикутника:

$$A=\frac{1}{2}\Delta p\Delta V .$$

Тоді ККД циклу дорівнює

$$\eta=\frac{A}{Q}=\frac{0{,}5\Delta P\Delta V}{1{,}5\nu R\cdot 2{,}5\Delta T}=\frac{0{,}5P\Delta V\cdot V\Delta P}{1{,}5\nu R\cdot 2{,}5\Delta T\cdot PV}=\frac{0{,}5\cdot 1{,}5\nu R\Delta T\cdot 2{,}5\nu R\Delta T}{1{,}5\nu R\cdot 2{,}5\Delta T\cdot \nu RT_1}=\frac{0{,}5\Delta T}{T_1}=0{,}001.$$

3.3.15. Кажуть, що в архіві лорда Кельвіна знайшли шматок рукопису, на якому було зображено замкнутий цикл для ν = 1 моль гелію в координатах *p, V* (рис. 1). Цикл складався з ізотерми *1-2*, ізохори *2-3* та адіабати *3-1*. ККД цього циклу η = 0,125. Масштаб по вісі об'єму: 1 поділка = 0,5 л, по вісі тиску: 1 поділка = $5\cdot 10^3$ Па. Знайдіть об'єм газу в ізохорному процесі. На рисунку вісь тиску вертикальна, а вісь об'єму горизонтальна.

Розв'язок. За визначенням, ККД циклу дорівнює

$$\eta=\frac{A}{Q_+},$$

де A - робота газу за цикл, Q_+ – отримана кількість теплоти за цикл.

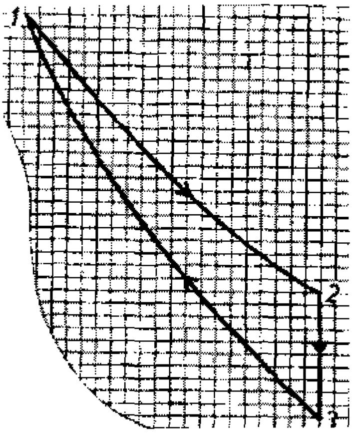


Рис. 1

Для даного циклу

$$A=A_T+A_V+A_Q=A_T+A_Q,$$

де A_T — робота газу в ізотермічному процесі, $A_V=0$ робота газу в ізохорному процесі, A_Q- робота газу в адіабатному процесі. Очевидно, що

$$Q_+=A_T.$$

Отже,

$$\eta=\frac{A}{A_T}=\frac{A_T+A_Q}{A_T}=1+\frac{A_Q}{A_T}=1+\frac{A_Q}{A-A_Q}.$$

Робота, яка здійснюється газом за даний цикл, дорівнює площі, обмеженої лініями *1-2-3-1*:

$$A\approx\left(81+\frac{1}{2}70\right)\text{од.}=116\text{од.}=290\,\text{Дж}.$$

(1 од. = $5\ 10^3$ Па $\cdot 5\cdot 10^{-4}$ м^3 =2,5 Дж). При цьому похибка чисельного значення A не більше 5 од. Робота газу на адіабатній ділянці дорівнює, з протилежним знаком, зміні внутрішньої енергії на ділянці *3-1*:

$$A_Q=-C_V(T_1-T_3)=-\frac{3}{2}R(T_2-T_3)=-\frac{3}{2}V_2(p_2-p_3).$$

Із рисунка

$$p_2-p_3=5\cdot 10^4\,\text{Па}.$$

Тоді, для шуканого об'єму остаточно отримуємо:

$$V_2 = \frac{2}{3}\frac{1-\eta}{\eta}\frac{A}{p_2 - p_3} = (27 \pm 1)\,\text{л}.$$

3.3.16. Термодинамічний цикл, що складається з двох ізобар і двох ізохор, проводять з порцією гелію. Яким може бути максимальне значення ККД цього циклу, якщо максимальна температура в циклі становить $2T_0$, а мінімальна дорівнює T_0?

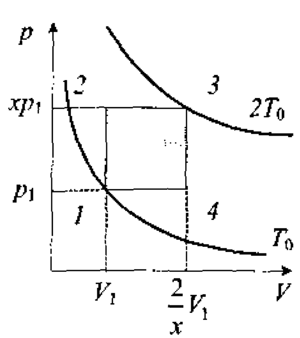


Рис.1

Розв'язок. Виберемо довільну точку на ізотерми T_0 і позначимо тиск і об'єм газу в цій точці p_1 і V_1 відповідно (рис. 1). Нехай максимальне значення тиску в циклі складе xp_1. (Ясно, що $1 < x < 2$.) Тоді максимальний об'єм буде дорівнювати $\frac{2}{x}V_1$. Розрахуємо роботу газу в цьому циклі:

$$A = (xp_1 - p_1)\left(\frac{2}{x}V_1 - V_1\right)$$

і кількість теплоти, що отримується (гелій - одноатомний газ):

$$Q = A_{13} + \Delta U_{13} = xp_1\left(\frac{2}{x}V_1 - V_1\right) + \frac{3}{2}\nu R(2T_0 - T_0).$$

Врахуємо ще, що

$$p_1 V_1 = \nu R T_0.$$

Тоді ККД циклу буде дорівнювати:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(x-1)\left(\frac{2}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{2}{x} - 1\right) + \frac{3}{2}}.$$

Ми бачимо, що значення ККД не залежить від вибору початкової точки циклу, а тільки від відношення $x = \frac{p_{\max}}{p_{\min}}$. Тому нам достатньо дослідити функцію $\eta\,(x)$ на максимум.

Візьмемо похідну від цієї функції по x і прирівняємо її до нуля. Після простих перетворень отримаємо рівняння:

$$x^2 + 8x - 14 = 0.$$

Відповідне рішення цього рівняння: $x = \sqrt{30} - 4$. Зрозуміло, що при $x \approx 1$ і при $x \approx 2$ ККД буде дуже малий. Значить, ми знайшли саме максимум. При зазначеному значенні x ККД приблизно дорівнює $1/12$.

Зрозуміло, при аналізі функції $\eta\,(x)$ на максимум можна обійтися і без похідної.

3.3.17. У вакуумі знаходяться два масивних однакових тіла, їх температури спочатку рівні T і $3T$. Якщо привести тіла до зіткнення, то при вирівнюванні температур від гарячого тіла до холодного перетече кількість теплоти Q. Яку максимальну роботу можна було б отримати, використовуючи ці тіла і теплову машину? Інших тіл у нашому розпорядженні немає.

Розв'язок. Будемо вважати, що наша теплова машина ідеальна і виконує дуже велику кількість циклів для отримання результату. У цьому випадку можна використовувати відому формулу для ККД циклу

$$\eta = 1 - \frac{T_x}{T_н}.$$

Однак по мірі здійснення роботи в нашій системі температури тіл (нагрівача і холодильника) змінюються, змінюється і ККД – від початкового значення $\eta_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ до нуля. Взяти «середній» ККД – це просто, але неправильно. Зробимо інакше. Нехай за черговий цикл нагрівач віддає порцію теплоти Q, тоді холодильник отримає

$$Q(1-\eta) = Q\frac{T_x}{T_н}.$$

Температура нагрівача зміниться на $\Delta T_н$, а температура холодильника на $\Delta T_x = -\Delta T_н \frac{T_x}{T_н}$ (теплоємності тіл за умовою завдання однакові). Тоді $\frac{\Delta T_н}{T_н} = -\frac{T_x}{T_x}$. Звідки випливає, що

$$T_н T_x = \text{const}.$$

(Можна отримати це «математично», а можна і просто збагнути, що якщо один зі співмножників збільшити в декілька разів, або на деяке число відсотків, а другий зменшити в стільки ж разів, то вираз залишиться тим же). Це означає, що температуру рівноваги $T_р$ (остаточну) можна знайти зі співвідношення

$$T_р^2 = 3T \cdot T = 3T^2,$$

або

$$T_р = T\sqrt{3}.$$

Позначимо теплоємність одного тіла C і запишемо вираз для роботи:

$$A = Q_н - Q_x = C(3T - T_p) - C(T_p - T) = CT(4 - 2\sqrt{3}).$$

Але при зіткненні тіл гаряче охолоджується від $3T$ до $2T$, тобто $Q = CT$. Остаточно

$$A = Q(4 - 2\sqrt{3}) \approx 0{,}54Q.$$

Якщо, все ж взяти $\eta = \eta_{ср} = \frac{1}{3}$, то результуюча температура $T_р^*$ визначається з умови

$$-\Delta T_н = \frac{3}{2}\Delta T_х, \quad 3T - T_р^* = 1{,}5\left(T_р^* - T\right), \quad T_р^* = 1{,}8T,$$

і тоді

$$A = C(3T - 1{,}8T) - C(1{,}8T - T) = Q(1{,}2 - 0{,}8) = 0{,}4Q.$$

Бачимо, що відповідь досить сильно відрізняється від отриманого більш точнішим розрахунком.

3.3.18. На pV-діаграмі зображений замкнутий процес (рис. 1). Крива – це дуга кола, пряма вертикальна і відповідає охолодженню газу при постійному об'ємі. Вважаючи, що цей процес проводять з порцією гелію, знайдіть ККД отриманої теплової машини. Відношення максимального тиску до мінімального в цьому циклі дорівнює 5, а мінімальний об'єм становить 0,9 від максимального.

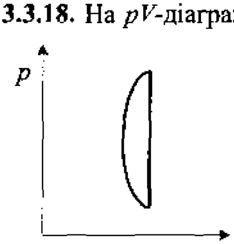


Рис. 1

Розв'язок. Газ отримує тепло на дузі кола і віддає його на прямій. Для розрахунку ККД циклу потрібно знайти площу, обмежену сегментом (рис. 2). Порахуємо цю площу в «клітинах» – для розрахунку відношення це цілком допустимо. У наших позначеннях площа клітки дорівнює $0{,}2p_0 \cdot 0{,}2V_0$.

Порахуємо радіус дуги:

$$(l - 0{,}5)^2 + 2^2 = l^2, \quad l^2 - l + 0{,}25 + 4 = l^2, \quad l = 4{,}25$$

і знайдемо кут α:

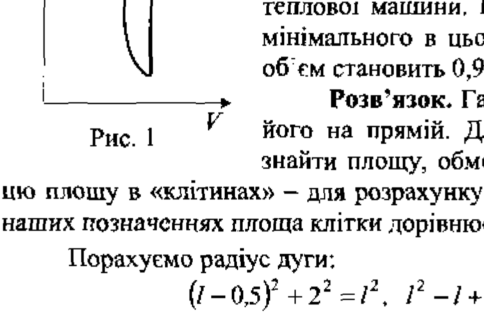


Рис. 2

$$\alpha = \frac{\arcsin 2}{4{,}25} \approx 0{,}49 \text{ рад}.$$

Площа сегмента дорівнює різниці площі сектора і площі трикутника:

$$S_{сег} = S_{сек} - S_{тр} = \frac{2\alpha}{2\pi}\pi l^2 - \frac{1}{2}\cdot 4(l - 0{,}5) =$$

$$= \alpha l^2 - 2l + 1 \approx 8{,}85 - 8{,}5 + 1 \approx 1{,}35.$$

Робота в цьому циклі дорівнює:

$$A = 1{,}35 \cdot 0{,}04 p_0 V_0.$$

Кількість теплоти, отримана від нагрівача, становить:

$$Q_н = A + \Delta U = A + \nu\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) =$$

$$= A + \frac{3}{2}(p_0V_0 - 0{,}2p_0V_0) =$$

$$= 1{,}35 \cdot 0{,}04p_0V_0 + 1{,}2p_0V_0 = 1{,}254p_0V_0.$$

Тоді термодинамічний ККД циклу буде дорівнювати:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{1{,}35 \cdot 0{,}04p_0V_0}{1{,}254p_0V_0} = 0{,}043 = 4{,}3\%.$$

3.3.19. Цикл Карно *1-2-3-4-1* (рис. 1), що проводиться з порцією ідеального газу, має термодинамічний ККД η_0.

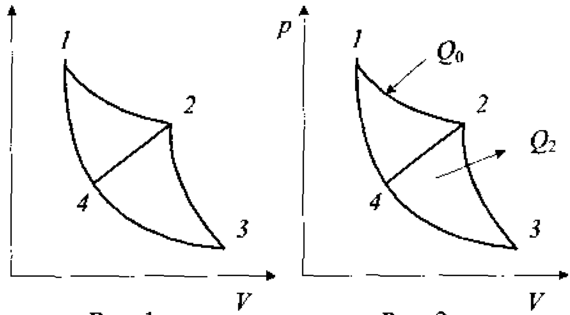


Рис. 1 Рис. 2

Цикл розділили на два - перший *1-2-4-1* і другий *4-2-3-4* (процес *4-2* йде при підвищенні тиску й об'єму газу, і залежність тиску від об'єму на цій ділянці лінійна). Відомий термодинамічний ККД першого циклу (*1-2-4-1*), він дорівнює η_1. Знайдіть аналогічний ККД другого циклу.

Розв'язок. Уведемо позначення (рис. 2): Q_0 – кількість теплоти, отриману на ділянці *1-2*, Q_2 – кількість теплоти, що віддається в першому циклі на ділянці *2-4*. Тоді робота в першому циклі дорівнює

$$A_1 = Q_0 - Q_2,$$

а ККД становить:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_0} = \frac{Q_0 - Q_2}{Q_0}, \text{ звідки } Q_2 = Q_0(1 - \eta_1).$$

Для другого циклу ККД дорівнює:

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2} = \frac{A_2}{Q_0(1 - \eta_1)}.$$

Знайдемо величину роботи A_2:

$$A_2 = A_{\text{общ}} - A_1 = Q_0\eta_0 - Q_0\eta_1 = Q_0(\eta_0 - \eta_1).$$

Тоді остаточно:

$$\eta_2 = \frac{Q_0(\eta_0 - \eta_1)}{Q_0(1 - \eta_1)} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{1 - \eta_1}.$$

3.3.20. Порція розрідженого гелію знаходиться в посудині з поршнем. З гелієм проводять замкнутий тепловий цикл, який складається з чотирьох стадій. На першій стадії газ розширюється вдвічі, при цьому тиск газу весь час пропорційний його об'єму. На другій стадії газ продовжує розширюватися – але вже при постійному тиску, об'єм газу на цій стадії збільшується ще в 4 рази. Наступна стадія - тиск газу знову *пропорційний його об'єму, газ* охолоджується, поки його тиск не знизиться вдвічі. Та, нарешті, четверта стаді – охолодження при постійному тиску до початкового стану. Знайді термодинамічний ККД цього циклу.

Розв'язок. Газ отримує тепло на ділянках *АБ* і *БВ* (рис. 1). Загальн кількість отриманої теплоти дорівнює:

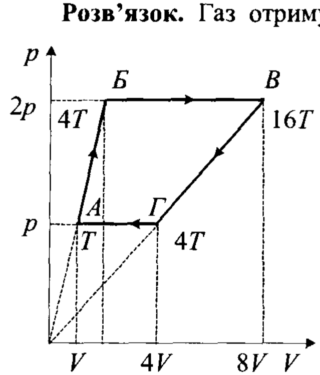


Рис. 1

$$Q_{АБ} = \frac{3}{2}pV + \nu C_V(4T - T),$$
$$Q_{БВ} = \nu C_p(16T - 4T),$$,

$$Q = Q_{АБ} + Q_{БВ} = \frac{3}{2}pV + \frac{3}{2}\nu R \cdot 3T + \frac{5}{2}\nu R \cdot 12T = 36p$$

Роботу знайдемо як площу, обмежену графіком циклу,

$$A = \frac{1}{2}pV + 2pV + 2pV = 4{,}5pV.$$

Термодинамічний коефіцієнт корисної дії цього циклу буде дорівнювати:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{4{,}5pV}{36pV} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

3.3.21. Цикл теплової машини складається з двох ізотермічних ділянок – стиснення при температурі T і розширення при температурі $3T$, а також двох ізобарних ділянок. Відомо, що на ділянці ізотермічного розширення газ, а саме гелій, отримує вдвічі більше тепла, ніж на ділянці ізобарного розширення. Визначте термодинамічний ККД цього циклу.

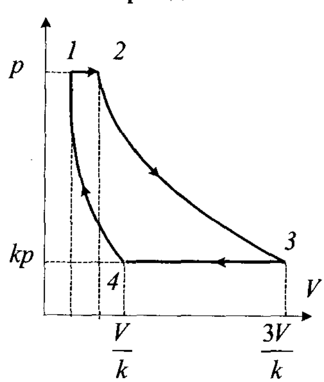


Рис. 1

Розв'язок. Позначимо (рис. 1) тиск у точці *1* буквою p, об'єм газу в цьому стані буквою V. Ясно, що в точці *2* об'єм збільшився в три рази. Нехай нижня ізобара відповідає тиску kp, тоді об'єм у точці *4* дорівнює V/k, а в точці *3* він становить $3V/k$. На ізобарі *1-2* газ виконує деяку роботу, таку ж по модулю роботу він виконує, стискаючись по ізобарі *3-4*, значить, сума робіт на обох ізобарах у сумі дорівнює нулю. Якщо позначити кількість теплоти, отриманої на ізобарі *1-2*, буквою Q, то за умовою завдання на ізотермі *2-3* газ отримає кількість теплоти $2Q$. Саме таку роботу він виконає, розширюючись від стану *2* до стану *3*. Тепер знайдемо роботу, зроблену над газом при ізотермічному стисканні *3-4*. Для цього зауважимо, що при рівних тисках на ізотермах об'єми усюди відносяться як *3 : 1* – ясно, що робить

$$A_{41} = -\frac{A_{23}}{3} = -\frac{2Q}{3}.$$

Остаточно отримуємо, що термодинамічний ККД циклу дорівнює

$$\eta = \frac{A_{заг}}{Q_{отр}} = \frac{A_{12} + A_{41}}{Q + 2Q} = \frac{2Q - 2Q/3}{3Q} = \frac{4}{9} = 0{,}44 .$$

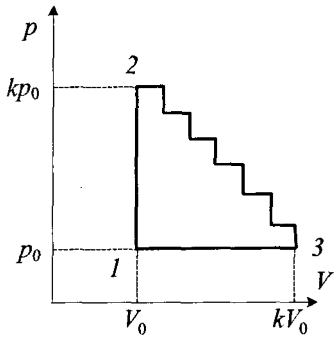


Рис. 1

3.3.22. Над ν молями ідеального одноатомного газу проводять циклічний процес, графік якого зображений на pV-діаграмі (рис. 1). Цикл складається з вертикальної (*1-2*) й горизонтальної (*3-1*) ділянок і «драбини» (*2-3*) з n сходинок, на кожній з яких тиск і об'єм газу змінюється в одне і те ж число раз. Відношення максимального тиску газу до мінімального дорівнює k, відношення максимального об'єму газу до мінімального також дорівнює k.

Знайдіть ККД теплової машини, що працює за даним циклом.

Розв'язок. Оскільки теплова машина виконуєробить за цикл позитивну роботу, розглянутий цикл проходиться за годинниковою стрілкою, у напрямку *1-2-3-1*. ККД цієї теплової машини дорівнює відношенню виконаної роботи A до кількості теплоти Q_+, отриманого від нагрівачів. Позначимо через p_0 і V_0 мінімальний тиск і об'єм газу, тоді максимальний тиск і об'єм дорівнюватимуть kp_0 та kV_0 відповідно. Зауважимо, що на горизонтальній ділянці сходинки об'єм зростає в $k^{1/n}$ раз, а на вертикальній ділянці тиск зменшується в таку ж кількість раз.

У даному циклі газ отримує тепло на ділянці *1-2*, а також на горизонтальних ділянках драбини *2-3*. Кількість теплоти, отримана на ділянці *1-2*, дорівнює зміні внутрішньої енергії газу:

$$Q_{12} = \frac{3}{2}kp_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 .$$

Далі, на i-ій горизонтальній ділянці драбини (i змінюється в межах від 1 до n) газ розширюється від об'єму $V_0k^{1-\frac{i-1}{n}}$ до $V_0k^{\frac{i}{n}}$ при постійному тиску $p_0k^{1-\frac{i-1}{n}}$. При цьому він виконує роботу $\Delta A = kp_0V_0\left(k^{1/n} - 1\right)$, змінюючи свою внутрішню енергію на $\Delta U = 1{,}5\Delta A$, та отримує кількість теплоти $\Delta Q = 2{,}5\Delta A$ На вертикальних ділянках «драбини» газ не виконує роботи і віддає тепло. На ділянці *3-1* газ віддає тепло і виконує негативну роботу

$$A_{31} = -(k-1)p_0V_0 .$$

Отже, сумарна кількість теплоти, отримана від нагрівачів, дорівнює

$$Q = Q_{12} + n\Delta Q = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 + \frac{5}{2}nk\left(k^{1/n} - 1\right)p_0V ,$$

а виконана робота дорівнює

$$A = A_{31} + n\Delta A = -(k-1)p_0V_0 + nk\left(k^{1/n}-1\right)p_0V.$$

Тоді шуканий ККД циклу дорівнює:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{nk\left(k^{1/n}-1\right)-(k-1)}{\frac{3}{2}(k-1)+\frac{5}{2}nk\left(k^{1/n}-1\right)}.$$

3.3.23. З порцією одноатомного газу проводять циклічний процес, що складається з ізотермічного розширення в 9 разів, охолодження у 3 рази при незмінному об'ємі й адіабатичного стиснення до початкового стану (можете перевірити - виходить!). Знайдіть термодинамічний ККД цього циклу.

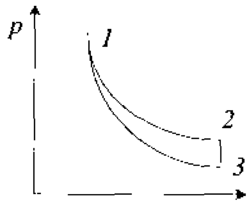


Рис. 1

Розв'язок. На жаль, перевірка показала, що числа в умові задачі підібрані невдало і цикл при значеннях коефіцієнтів 9 та 3 не справджується. Однак можна підібрати правильні значення, при яких цикл справджується: це 8 і 4. Зобразимо на pV-диаграма (рис. 1) цей циклічний процес: *1-2*-ізохора і *3-1*-адіабата. Для ККД циклу маємо

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}.$$

Знайдемо підведену до газу кількість теплоти Q_+ і відведену від нього кількість теплоти Q_-. Тепло підводиться на ділянці *1-2* (ізотерма), а відводиться на ділянці *2-3* (ізохора). Позначимо температуру на ізотермічній ділянці через T. Тоді

$$T_2 = T$$

і

$$T_3 = \frac{T}{4}.$$

Для $\nu = 1$ моль ідеального одноатомного газу

$$Q_+ = RT\ln\frac{V_1}{V_2} = RT\ln 8.$$

$$Q_- = C_V\left(T_2 - T_3\right) = \frac{3}{2}R\frac{3}{4}T = \frac{9}{8}RT,$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{9}{8\ln 8} \approx 0{,}46.$$

3.3.24. Фіксована маса ідеального газу брала участь у процесі, який у координатах pV має вигляд майже кола (рис. 1). У точках *1* і *5* цієї майже окружності торкаються ізобари, у точках *2* і *6* -ізотерми, у точках *3* і *7* -адіабати і в точках *4* і *8* - ізохори. На різних ділянках циклу газ обмінювався теплом з навколишнім середовищем. Відомі абсолютні величини кількостей теплоти:

$$Q_{12} = 7\text{ Дж}, Q_{23} = 2\text{ Дж}, Q_{34} = 4\text{ Дж}, Q_{45} = 11\text{ Дж},$$
$$Q_{56} = 5\text{ Дж}, Q_{67} = 1\text{ Дж}, Q_{78} = 3\text{ Дж}, Q_{81} = 12\text{ Дж}.$$

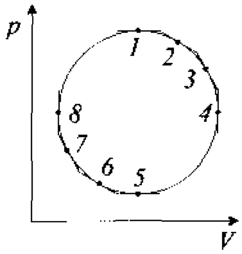


Рис. 1

Знайдіть ККД циклу.

Розв'язок. Саме точки *3* і *7* торкання адіабат є точками, які поділяють цикл на дві ділянки, на одному з яких газ тільки отримував, а на іншому - тільки віддавав тепло. Отже, ККД циклу дорівнює:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{34} + Q_{45} + Q_{56} + Q_{67}}{Q_{78} + Q_{81} + Q_{12} + Q_{23}} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

3.3.25. Над ідеальним одноатомним газом здійснюють циклічний процес *1-2-3-4-1*, графік якого зображений на pV- діаграмі (рис. 1). Мінімальний об'єм газу рівний V_0, а максимальний - у n разів більше. Ділянки *2-3* і *4-1* - ізохори, ділянка *3-4* - адіабата, а ділянка *1-2* отримана з ділянки *3-4* зсувом на відрізок завдовжки p_0 вгору вздовж осі тиску. Визначте кількості теплоти, отримані або віддані на ділянках *1-2*, *2-3*, *4-1*, а також ККД цього циклу.

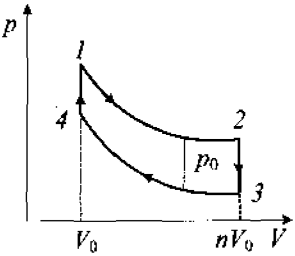


Рис. 1

Розв'язок. На ізохорних ділянках *4-1* і *2-3* отримувана або віддана газом кількість теплоти йде тільки на зміну його внутрішньої енергії

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV.$$

При цьому на ділянці *4-1* отримувана кількість теплоти позитивна, а на ділянці *2-3* - негативна:

$$Q_{41} = \Delta\left(\frac{3}{2}pV\right) = \frac{3}{2}p_0V_0,$$

$$Q_{23} = -\frac{3}{2}np_0V_0.$$

Позначимо залежність тиску від об'єму на адіабаті *3-4* як

$$p = p_a(V).$$

Тоді за умовою ділянка *1-2* задається рівнянням

$$p = p_a + p_0.$$

Отримувана при розширенні на малий об'єм ΔV на цій ділянці кількість теплоти ΔQ йде на зміну внутрішній енергії $\Delta(pV)$ і на виконання роботи $p\Delta V$:

$$\frac{5}{2}p_0\Delta V + \frac{3}{2}\Delta p_a V.$$

Оскільки отримувана при розширенні на малий об'єм ΔV на адіабаті кількість теплоти рівна

$$\frac{5}{2}p_0\Delta V + \frac{3}{2}\Delta p_a V$$

перетворюється в нуль, маємо

$$\Delta Q = \frac{5}{2}p_0\Delta V .$$

Таким чином, повна кількість теплоти, яка отримана на ділянці *1-2*, дорівнює

$$Q_{12} = \frac{5}{2}p_0(n-1)V_0 .$$

Загальна кількість теплоти, отримана від нагрівачів, рівна

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{41} = \frac{5}{2}p_0(n-1)V_0 + \frac{3}{2}p_0V_0 ,$$

а холодильникам було віддано кількість теплоти

$$Q_- = |Q_{23}| = \frac{3}{2}np_0V_0 .$$

Отже, ККД циклу дорівнює

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = \frac{(3/2)np_0V_0}{(5/2)p_0(n-1)V_0 + (3/2)p_0V_0} = \frac{n-1}{(5/2)n-1} .$$

3.4. Політропні процеси

Усі процеси, що вивчаються у шкільному курсі фізики, є окремими випадками більш загального процесу — *політропного*. Це процес, при якому теплоємність залишається сталою, тобто енергія

$$Q = \nu C\Delta T ,$$

де C — молярна теплоємність.

Рівняння політропи можна дістати з I закону термодинаміки (1) та рівняння Менделєєва—Клапейрона (2):

$$Q = \Delta U + A , \tag{1}$$

$$pV = \nu RT . \tag{2}$$

Оскільки $Q = \nu C\Delta T$; $\Delta U = \nu C_V\Delta T$; $A = p\Delta V$; $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$, то рівняння (1) і (2) можна записати так:

$$\nu C\Delta T = \nu C_V\Delta T + p\Delta V , \tag{3}$$

$$p\Delta V + V\Delta p = \nu R\Delta T . \tag{4}$$

Враховуючи, що згідно з рівнянням Майєра $R = C_p - C_V$, із рівняння (4) знайдемо ΔT :

$$\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{\nu(C_p - C_V)} .$$

Підставимо значення ΔT у рівняння (3) і перетворимо його:

$$\frac{C - C_V}{C_p - C_V}\cdot(p\Delta V + V\Delta p) = p\Delta V .$$

Звідси після перетворень маємо:

$$\left(C - C_V\right)V\Delta p = -\left(C - C_p\right)p\Delta V. \qquad (5)$$

Поділивши ліву і праву частини рівняння (5) на pV і позначивши

$$\frac{C - C_p}{C - C_V} = n, \qquad (6)$$

дістанемо:

$$\frac{\Delta p}{p} = -n\frac{\Delta V}{V}.$$

Звідси

$$\frac{\Delta p}{p} + n\frac{\Delta V}{V} = 0.$$

Якщо замінити Δp і ΔV відповідними диференціалами та проінтегрувати останнє рівняння, дістанемо *рівняння політропи*:

$$pV^n = \text{const}. \qquad (7)$$

Тепер покажемо, що всі ізопроцеси та адіабатний процес є окремими випадками політропного процесу.

1. Якщо $n = 0$, тоді з рівняння (7) випливає, що $p = \text{const}$; а з рівняння (6), що $C = C_p$.

2. Якщо $n = 1$, то з рівняння (7) маємо $pV = \text{const}$, тобто закон Бойля—Маріотта. Поділивши чисельник і знаменник рівняння (6) на C, матимемо:

$$n = \frac{1 - \dfrac{C_p}{C}}{1 - \dfrac{C_V}{C}}.$$

Таким чином, $n = 1$ лише тоді, коли $C \to \infty$. Отже, молярна теплоємність в ізотермічному процесі прямує до нескінченності.

3. Якщо з обох частин рівняння (7) взяти корінь n-го степеня, то дістанемо, що

$$p^{\frac{1}{n}}V = \text{const}.$$

Коли $n \to \infty$, то $V = \text{const}$. Це ізохорний процес. З рівняння (6) бачимо, $n \to \infty$, якщо $C = C_V$.

4. Якщо ж $C = 0$, то з рівняння (6) випливає, що

$$n = \frac{C_p}{C_V} = \gamma,$$

і рівняння (7) перетворюється в рівняння Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

Тобто в цьому разі процес буде адіабатним.

Найчастіше в задачах розглядається політропний процес, у якому $n = -1$, тобто $p = V\cdot\text{const}$, або, як прийнято позначати в літературі, $p = \alpha V$.

Якщо зобразити цей процес графічно в координатах (p, V) і провести кілька ізотерм (рис. 1), то відразу видно, що в цьому процесі одночасно зростають і тиск, і об'єм, і температура. Цікаво, що в координатах (p, T) і (V, T) графіками цього процесу будуть частини парабол (рис. 2, 3). Дійсно, якщо в рівнянні Менделєєва—Клапейрона замінити p на αV, то матимемо:

$$\alpha V^2 = \nu RT\text{, або } T = \frac{\alpha}{\nu R} V^2.$$

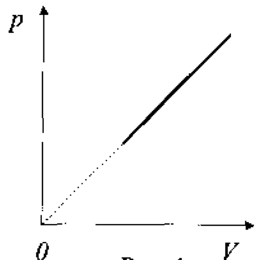


Рис. 1

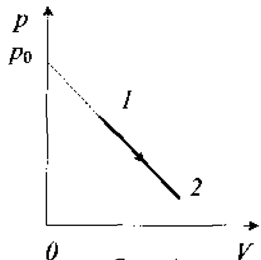


Рис. 4

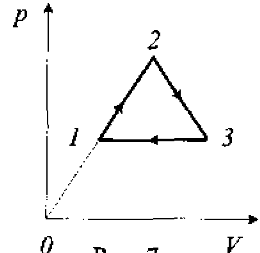


Рис. 7

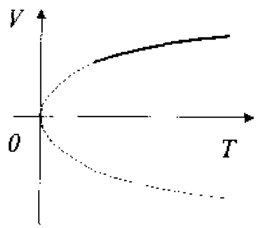


Рис. 2

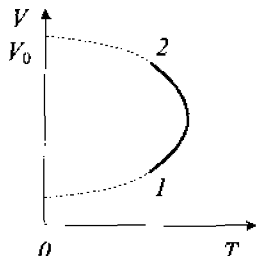


Рис. 5

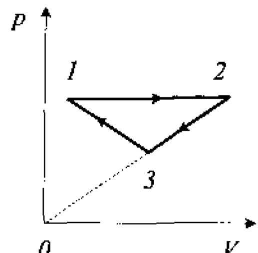


Рис. 8

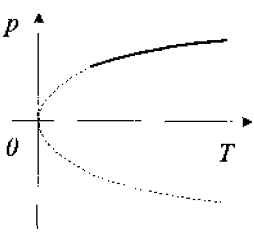


Рис. 3

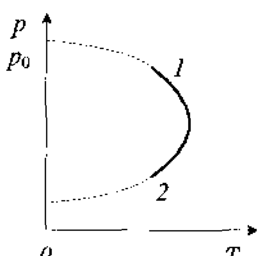


Рис. 6

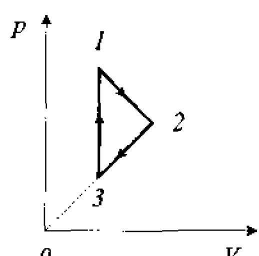


Рис. 9

Аналогічно, якщо у рівняння Менделєєва—Клапейрона підставити $V = \frac{p}{\alpha}$, то дістанемо:

$$\frac{p^2}{\alpha} = \nu RT.$$

Звідси

$$T = \frac{1}{\alpha \nu R} p^2.$$

Пунктирні частини графіків не мають фізичного змісту.

У задачах ще трапляються випадки, коли $p = p_0 - \alpha V$ (рис. 4). У цьому разі графіками процесу в координатах (p, T) і (V, T) будуть також параболи, але розміщені дещо інакше. Знову використаємо рівняння Менделєєва — Клапейрона:

$$(p_0 - \alpha V)V = \nu RT.$$

Звідси

$$T = \frac{-\alpha}{\nu R} V^2 + \frac{p_0}{\nu R} V.$$

Отже, температура зі збільшенням об'єму то підвищується, то знижується (рис. 5).

Аналогічно знайдемо залежність між температурою і тиском. Оскільки

$$V = \frac{p_0 - p}{\alpha},$$

то з рівняння Менделєєва— Клапейрона маємо:

$$\frac{p(p_0 - p)}{\alpha} = \nu RT,$$

або

$$T = -\frac{1}{\alpha \nu RT} p^2 + \frac{p_0}{\alpha \nu RT} p.$$

Побудуємо графіки усіх цих залежностей.

Тепер можна розширити коло графічних задач. Наводимо умови деяких з них.

3.4.1. Побудувати графіки залежності тиску й об'єму від температури для кругових процесів, зображених в осях (p, V) (рис. 7—16).

Цікавим є питання про теплоємність політропного процесу. Якщо відомий показник політропи n, то можна легко обчислити теплоємність, враховуючи, що $C_V = \frac{i}{2}R$, а $C_V = \frac{i}{2}R + R$, де i – кількість ступенів свободи. Оскільки

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V},$$

то

$$C = \left(\frac{1}{1-n} + \frac{i}{2}\right)R.$$

З останнього виразу видно, що коли $n = 1$ то $C \to \infty$ (ізотермічний процес), коли $n = \frac{i+2}{i}$ то $C = 0$ (адіабатний процес: $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$).

Цікаво, що коли $n = -1$ теплоємність дорівнюватиме: $C = \frac{C_p + C_V}{2}$.

Цей процес часто зустрічається в задачах. Тому доцільно зупинитися на цьому детальніше. Корисно довести, що

$$C = \frac{i+1}{2} R,$$

не використовуючи загального виразу для показника політропи.

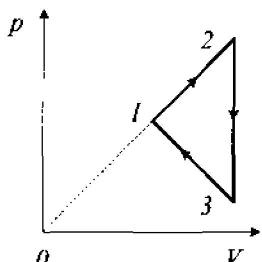


Рис. 10

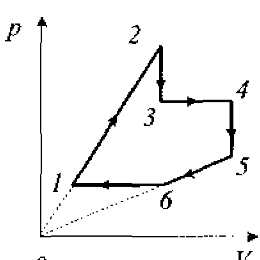


Рис. 11

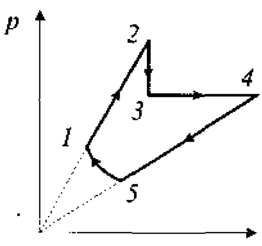


Рис. 12

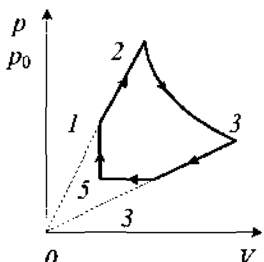


Рис. 13

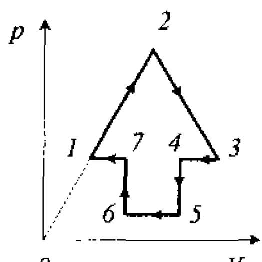


Рис. 14

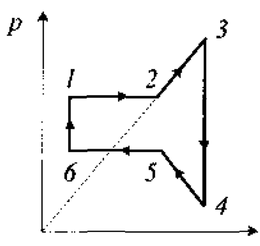


Рис. 15

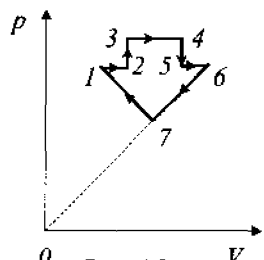


Рис. 16

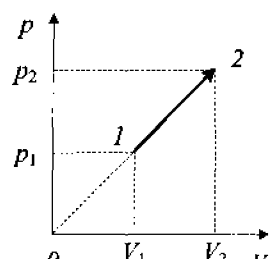


Рис. 17

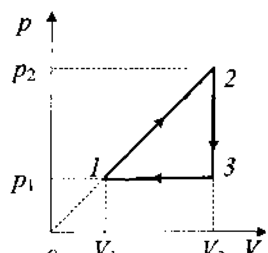


Рис. 18

Розглянемо процес, графік якого зображено на рис. 17.

Робота, що виконується під час розширення газу, дорівнює:

$$A=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1)=\frac{\alpha\left(V_2^2-V_1^2\right)}{2},$$

оскільки $p=\alpha V$.

З рівняння Менделєєва—Клапейрона $pV=\nu RT$ маємо $\alpha V^2=\nu RT$.

Отже,

$$A=\frac{\nu RT_2-\nu RT_1}{2}=\frac{\nu R}{2}\Delta T.$$

Зміна внутрішньої енергії $\Delta U=\frac{i}{2}\nu R\Delta T$, тому згідно з першим законом термодинаміки:

$$Q=\Delta U+p\Delta V=\frac{i}{2}\nu R\Delta T+\frac{\nu R}{2}\Delta T=\frac{i+1}{2}\nu R\Delta T.$$

Звідси знаходимо молярну теплоємність:

$$C=\frac{Q}{\nu\Delta T}=\frac{i+1}{2}R.$$

3.4.2. Обчислити ККД замкненого циклу, графік якого зображено на рис. 18. Відомо, що газ одноатомний, а відношення максимальної температури в циклі до мінімальної $n=4$.

Розв'язання. Корисна робота, виконана газом за цикл, дорівнює

$$A=\frac{p_2-p_1}{2}(V_2-V_1)=\frac{\alpha\left(V_2-V_1\right)^2}{2}.$$

Ураховуючи, що $V=\sqrt{\frac{\nu R}{\alpha}}\cdot\sqrt{T}$, матимемо

$$A=\frac{\nu R}{2}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)^2.$$

Кількість теплоти, одержаної газом за цикл, становить

$$Q=\frac{i+1}{2}\nu R(T_2-T_1),$$

оскільки під час переходу зі стану *2* в стан *3* та зі стану *3* в стан *1* газ теплоти не одержував.

Отже,

$$\eta=\frac{A}{Q}=\frac{\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)^2}{(i+1)(T_2-T_1)}=\frac{\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}}{(i+1)\left(\sqrt{T_2}+\sqrt{T_1}\right)},$$

або

$$\eta=\frac{\sqrt{n}-1}{(i+1)\left(\sqrt{n}+1\right)},$$

оскільки за умовою задачі $\frac{T_2}{T_1} = n$. Після обчислення маємо

$$\eta = \frac{1}{12}.$$

3.5. Теплообмін і фазові перетворення

3.5.1. Електричним кип'ятильником потужністю $W = 500$ Вт нагрівають воду в каструлі. За дві хвилини температура води збільшилися від $t_1 = 85°C$ до $t_2 = 90°C$. Потім кип'ятильник вимкнули і за одну хвилину температура води впала на один градус. Скільки води знаходиться в каструлі? Питома теплоємність води $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)

Розв'язок. Позначимо τ_1 час нагрівання води ($\tau_1 = 2$ хв). Із закону збереження енергії випливає, що

$$W_1 = cm(t_2 - t_1) + Q_1, \tag{1}$$

де m - маса води, Q_1 - втрати енергії, пов'язані з тепловіддачею в навколишній простір. Q_1 пропорційно часу τ_1 і різниці температур води й навколишнього середовища.

При охолодженні (коли нагрівач вимкнений) виділяється в навколишній простір енергія

$$Q_2 = cm\Delta t,$$

де $\Delta t = 1°C$ - зміна температури води за час $\tau_2 = 1$ хв. Оскільки різниця температур води і навколишнього середовища змінюється несуттєво, а $\tau_2 = 0{,}5\tau_1$, $Q_2 = 0{,}5Q_1$, то

$$Q_1 = 2\,Q_2 = 2cm\Delta t.$$

Підставивши цей вираз у рівність (1), отримаємо

$$W_{\tau 1} = cm(t_2 - t_1 + 2\Delta t).$$

Звідси

$$m = \frac{W_{\tau 1}}{c(t_2 - t_1 + 2\Delta t)} \approx 1{,}8 \text{ кг}.$$

3.5.2. У невелику тонкостінну металеву каструлю налили 0,5 л води, поставили каструлю на плиту і, вимірюючи температуру води в різні моменти часу, побудували графік залежності температури від часу. Потім воду вилили, а в каструлю налили 0,7 кг спирту і поставили каструлю на ту ж саму плиту, побудували графік залежності температури спирту від часу. Обидва графіка наведено на рис. 1. Використавши ці графіки, визначте питому теплоємність спирту та питому теплоту його пароутворення, якщо за 30 хвилин кипіння кількість спирту в каструлі зменшилася вдвічі. Теплоємність каструлі 200 Дж / К. Випаровуванням з поверхні рідини знехтувати.

Розв'язок. Позначимо q кількість теплоти, що віддається плитою за одиницю часу. За малий проміжок часу $\Delta\tau$ кількість теплоти, що віддається плитою,

$$Q = q\Delta\tau.$$

Це тепло витрачається на підігрів каструлі, на підігрів рідини і на тепловіддачу в навколишній простір. При малому $\Delta\tau$ температура t каструлі з рідиною змінюється несуттєво, і тому можна вважати, що тепловіддача Q_1 пропорційна різниці температур каструлі (t) і навколишнього середовища (t_0) і часу $\Delta\tau$, тобто

$$Q_1 = \alpha(t - t_0)\Delta\tau,$$

де α - коефіцієнт пропорційності.

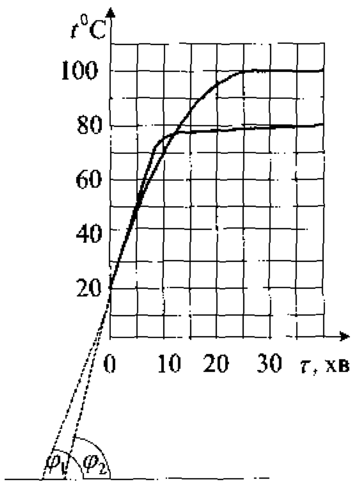


Рис. 1

Запишемо закон збереження енергії для випадку, коли на плиті стоїть каструля з водою:

$$Q = q\Delta\tau = c_в m_в \Delta t + C\Delta t + \alpha(\theta - \theta_0)\Delta\tau, \quad (1)$$

де $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж / (кг · К) - питома теплоємність води, $m_в = 0{,}5$ кг – маса води, Δt – зміна температури води і каструлі за час $\Delta\tau$, C – теплоємність каструлі, t_0 – «початкова» температура води і каструлі.

У тому випадку, коли на плиті стоїть каструля зі спиртом,

$$Q = q\Delta\tau = c_c m_c \Delta t' + C\Delta t' + \alpha(t - t_0)\Delta\tau, \quad (2)$$

де $c_с$ – питома теплоємність спирту, $m_с$ – маса спирту, Δt – зміна температури спирту і каструлі за час $\Delta\tau$, C – теплоємність каструлі, t_0 – «початкова» температура спирту і каструлі.

З (1) і (2) знайдемо відношення $\Delta t / \Delta\tau$ і $\Delta t' / \Delta\tau$:

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{q - \alpha(\theta - \theta_0)}{c_в m_в + C}, \quad (3)$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta\tau}=\frac{q-\alpha(t-t_0)}{c_c m_c + C} \tag{4}$$

Поділимо (3) на (4):

$$\frac{\Delta t/\Delta\tau}{\Delta t'/\Delta\tau}=\frac{c_c m_c + C}{c_в m_в + C}.$$

Звідси

$$c_c=\frac{\Delta t/\Delta\tau}{\Delta t'/\Delta\tau}\frac{c_в m_в + C}{m_c}-\frac{C}{m_c}.$$

Границя відношення $\Delta t / \Delta \tau$, коли $\Delta \tau \to 0$ є тангенс кута нахилу дотичної до графіка залежності $t = f(\tau)$ для каструлі з водою у точці з ординатою t. Аналогічно, границя відношення $\Delta t' / \Delta \tau$, коли $\tau \to 0$ є тангенс кута нахилу дотичної до графіка залежності $t' = f(\tau)$ для каструлі зі спиртом у точці з ординатою t.

Таким чином

$$c_c=\frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_2}\frac{c_в m_в + C}{m_c}-\frac{C}{m_c}. \tag{5}$$

Для більшої точності дотичні до графіка будемо проводити при низьких температурах t (див. рис. 1: на цій ділянці графіки $t(\tau)$ практично прямі лінії).

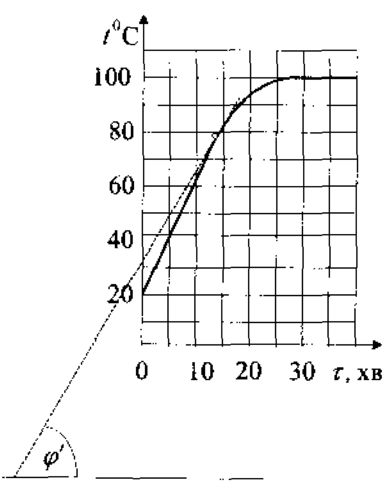


Рис. 2

Визначивши значення $tg\,\varphi_1$ і $tg\,\varphi_2$ і підставивши в (5) чисельні значення величин, знайдемо

$$c_c \approx 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{К)}.$$

Тепер знайдемо питому теплоємність пароутворення спирту. При кипінні температура спирту не змінюється. Тепло, виділене плитою за час T, витрачається на випаровування спирту і на тепловіддачу. Відповідно до закону збереження енергії

$$qT = \Delta m\lambda + \alpha(t_к - t_0)T. \tag{6}$$

де Δm = 0,35 кг – маса спирту, яка випарувалася за час T = 30 хв, λ – питома теплота пароутворення спирту, t_0 = 78 °С - температура кипіння спирту. З (6) знаходимо вираз для λ:

$$\lambda=\frac{q-\alpha(t_к-t_0)}{\Delta m/T}. \tag{7}$$

Тепловіддачу α (tк – t_0) за одиницю часу при температурі $t_к$ можемо знайти з виразу (1), підставивши в нього $t = t_к$ і врахувавши, що $\Delta t / \Delta\tau$ коли $\tau \to 0$ прямує до тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $t(\tau)$ (для каструлі з водою), проведеної у точці з ординатою $t_к$ = 78 ° С. Таким чином, з (1) знаходимо:

$$\alpha(t_к - t_0) = q - (c_в m_в + C)\, tg\,\varphi'.$$

(Множник $tg\,\varphi'$ має розмірність К / хв).

Підставивши цей вираз у (7), отримаємо остаточний вираз для питомої теплоти пароутворення спирту:

$$\lambda = \frac{c_в m_в + C}{\Delta m / T} tg\,\varphi'.$$

Визначивши за графіком (рис. 2) φ' і підставивши чисельні значення величин, знайдемо λ.

3.5.3. Є дві теплоізольовані посудини. У першій з них знаходиться 5 л води при температурі $t_1 = 60^0$С, в другій – 1 л води при температурі $t_2 = 20^0$С. Спочатку частину води перелили з першої посудини в другу. Потім, коли в другій посудині встановилася теплова рівновага, з неї у першу посудину відлили стільки води, щоб її об'єми в посудинах стали рівні початковим. Після цих операцій температура води в першій посудині стала рівною $t = 59\,^0$С. Скільки води переливали з першої посудини в другу і назад?

Розв'язок. У результаті двох переливань маса води в першій посудині залишилася незмінною, а її температура зменшилася на $\Delta t_1 = 1\,^0$С. Отже, енергія води в першій посудині зменшилася на

$$\Delta Q = c_в m_1 \Delta t_1,$$

де $c_в$ – теплоємність води, m_1 – маса води в першій посудині. На величину ΔQ збільшилася енергія води в другої посудині. Тому

$$\Delta Q = c_в m_2 \Delta t_2$$

(m_2 – первісна маса води в другій посудині). Отже,

$$c_в m_1 \Delta t_1 = c_в m_2 \Delta t_2.$$

Звідки

$$\Delta t_2 = \frac{m_1}{m_2}\Delta t_1 = 5^0\text{С}.$$

Температура води в другій посудині дорівнює $t_2' = t_2 + \Delta t_2 = 25^0$С. Такою вона стала після переливання з першої посудини в другу деякої маси води Δm, що має температуру t_1. Запишемо рівняння теплового балансу:

$$c_в \Delta m\left(t_1 - t_2'\right) = c_в m_2\left(t_2' - t_2\right).$$

Звідси знаходимо Δm:

$$\Delta m = m_2 \frac{t_2' - t_2}{t_1 - t_2'} - \frac{1}{7}\,\text{кг}.$$

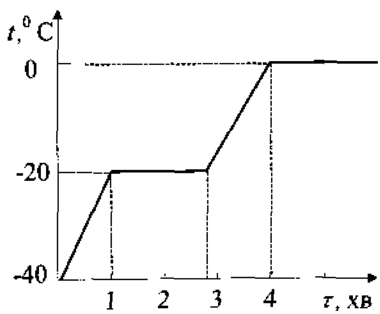


Рис. 1

3.5.4. У теплоізольованій посудині з нагрівачем всередині поміщений 1 кг льоду і 1 кг легкоплавкої речовини, що не змішується з водою. Спочатку температура в посудині була рівна -40^0С, після чого увімкнули нагрівач, який споживає постійну потужність. Залежність температури в посудині від часу показана на рис. 1. Питома теплоємність льоду $c_л = 2000$ Дж/(кг·К), твердої речовини – $c = 1000$ Дж/(кг·К). Знайти питому теплоємність речовини та її питому теплоємність у розплавленому стані.

Розв'язок. Наявність на графіку плато (горизонтальна ділянка), що відповідає температурі -20^0С, свідчить про те, що при цій температурі і відбувається плавлення невідомої речовини. (Очевидно, що плато при 0°С відповідає процесу танення льоду).

Як видно на графіку, для нагрівання вмісту посудини від початкової температури $t_1 = -40^0 C$ до температури $t_2 = -20^0 C$ потрібен час τ_1 = 1 хв = 60с, при цьому від нагрівача було отримано кількість теплоти, що дорівнює $P\tau_1$, де P – потужність нагрівача. Запишемо рівняння теплового балансу для цього процесу:

$$(c_л + c)m(t_2 - t_1) = P\tau_1,$$

де m = 1 кг. Для повного розплавлення речовини, яке тривало $\tau_2 = \frac{5}{3}$ хв $= 100$ с, знадобилася кількість теплоти

$$m\lambda = P\tau_2.$$

Поділивши це рівняння на попереднє, знайдемо деяку питому теплоту плавлення невідомої речовини:

$$\lambda = (c_л + c)(t_2 - t_1)(\tau_2 / \tau_1) = 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

Подальше нагрівання суміші льоду і розплаву речовини до температури $t_3 = 0^0 C$ проходив протягом проміжку часу $\tau_3 = \frac{4}{3}$ хв $= 80с$. Рівняння теплового балансу для цього процесу запишемо у вигляді

$$(c_л + c')m(t_3 - t_2) = P\tau_3,$$

де c' – питома теплоємність речовини в розплавленому стані. Порівнюючи перший і третій етапи процесу, знайдемо

$$c' = (c_л + c)\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{\tau_3}{\tau_1} = 2000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

3.5.5. *У склянку з водою опустили кип'ятильник*, і вода почала потроху нагріватися. Графік залежності температури води від часу наведено на рис. 1. Після закінчення трьох хвилин кип'ятильник від'єднують від мережі. Через який час вода охолоне до 50 градусів? до 30?

Розв'язок. Початкова ділянка графіка (див. рис. 1) майже прямолінійна; отже, втрати тепла тут малі. Будемо вважати, що їх немає зовсім. Це дасть можливість оцінити теплову потужність, яку втрачаємо, при різних температурах води в долях по відношенню до потужності нагрівача. Для цього потрібно порівняти нахили дотичних у різних точках графіка.

В області температури 60^0С тангенс кута нахилу дотичної у 8 разів менше тангенса кута нахилу початкової прямолінійної ділянки. Це означає, що тут 7/8 споживаної енергії йде назовні. Аналогічно отримуємо, що при температурах, близьких до 40°С, втрачається 3 / 4 енергії. При менших температурах точність виявляється незадовільною, тому на друге питання (про охолодження до 30°С відповідь можна дати лише приблизну.

Приблизний графік охолодження, тобто графік залежності температури води від часу, наведено на рис. 2. З цього графіка видно, що час охолодження від 60°С до 50°С становить приблизно 0,3 хв, а до 30°С 2,5-3 хв.

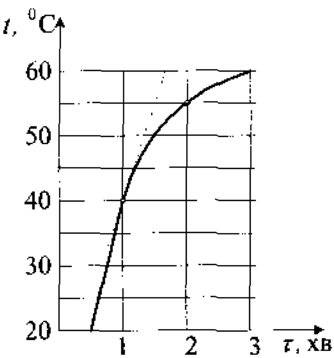


Рис. 1

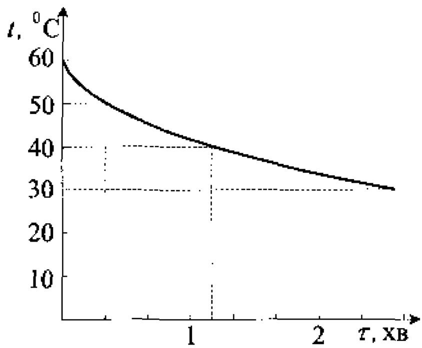


Рис. 2

3.5.6. У калориметрі у воді плаває шматок криги. Опускаємо в калориметр нагрівач постійної потужності 50 Вт і починаємо кожну хвилину вимірювати температуру води. За першу хвилину температура збільшилася на 2 градуси, а до кінця четвертої - ще на 5 градусів. Скільки було в калориметрі води і скільки криги?

Розв'язок. При спробі вирішувати цю задачу як завжди - спочатку розплавився лід, потім почала нагріватися вода і т. д. - ми стикаємося з протиріччям: все повинно бути навпаки, тобто саме за першу хвилину нагрівання повинно бути меншим, ніж за наступні, а ніяк не більшим! Спробуємо знайти пояснення цьому дивному факту. Можна припустити, що справа в поганому перемішуванні води - там, де знаходиться термометр, вже піднялася температура, а там, де потроху плавиться лід, температура залишилася рівною нулю. При цьому можна грубо оцінити кількість води: за першу хвилину вода отримала 3000 Дж тепла і нагрілася на 2 градуси, що відповідає масі води приблизно 0,36 кг. Яку частину цієї маси становить лід? Якщо спробувати оцінити його масу за різницею теплоємностей за першу і наступні хвилини, ми отримаємо приблизно 0,1 - 0,15 від маси води, але це занадто багато: для плавлення 50 г льоду потрібно майже 20 кДж тепла, а наш нагрівач такої енергії за 3 - 4 хвилини не дасть. Висновок: кількість води ми оцінили занадто грубо, але кращої оцінки не видно. Лід явно не розтанув увесь, його маса більше 20 - 30 г, перемішування води в посудині погане - цим можна пояснити зниження швидкості нагрівання по мірі того як потроху підігрівається маса води, отримана при таненні криги.

3.5.7. Для постачання в невеликий будинок гарячої води застосований не самий вдалий пристрій. Він складається з дуже великого бака з теплоізоляцією, від якого споживачі отримують маленькими порціями гарячу воду, і автоматичного пристрою, який відразу ж поповнює бак крутим окропом. Виявилося, що при стандартній кількості споживаної води температура води в баку становить +60°С при температурі навколишнього повітря +20°С. Яка температура встановиться в баку при збільшенні витрати води вдвічі? Тепловіддача в навколишнє середовище пропорційна різниці температур.

Розв'язок. Нехай за хвилину мешканці споживають масу води m, тоді за цей час у бак надійде така ж маса окропу при температурі $t_1 = +100^0\mathrm{C}$. Охолоджуючись до температури води в баку $t_2 = +60^0\mathrm{C}$, окріп віддасть кількість теплоти $cm(t_1 - t_2)$, а бак віддасть стільки ж тепла в навколишнє середовище з температурою $t_3 = +20^0\mathrm{C}$:

$$cm(t_1 - t_2) = K(t_2 - t_3),$$

де K – постійний коефіцієнт.

Якщо тепер за хвилину споживається $2m$ води, тоді для нової *температури води в баку t буде виконуватися умова*

$$2cm(t_1 - t_2) = K\,(t - t_3),$$

Звідси отримуємо

$$t = \frac{220}{3} \approx 73^0\mathrm{C}.$$

На перший погляд, відповідь дивна - чим більше споживаєш, тим гарячіше вода. Але саме так і повинно бути в такій системі - просто при збільшенні споживання води за той же час у бак доливається більше окропу.

3.5.8. У високу вертикальну посудину квадратного перерізу, яка розділена вертикальними перегородками на три частини (див. рисунок), налили до однієї і тієї ж висоти гарячий суп з температурою +65°С — у велике відділення, теплий компот при +35^{0}С і холодний квас при +20°С. Зовнішні стінки посудини теплоізольовані, внутрішні перегородки мають однакову товщину та зроблені з одного матеріалу, який не дуже добре проводить тепло. Через деякий час суп охолов на 1 градус. Уважаючи, що всі ці рідини — практично одна вода, визначте, на скільки змінилися за цей час температури решти двох рідин. Квасу в посудині стільки ж, скільки і компоту, супу - вдвічі більше.

Розв'язок. При розрахунках будемо нехтувати теплоємністю самої посудини — це доцільно, якщо стінки її тонкі й маса невелика порівняно з масою рідини, так і питомі теплоємності у металів істотно менші, ніж у води (і взагалі, ця теплоємність в умові не задана і обчислити її ми не можемо). Кількість теплоти, що передається через перегородку за одиницю часу, як відомо, пропорційна площі дотику різниці температур з двох сторін перегородки. Площі дотику кожної пари рідин у нашому випадку однакові, тому можна записати, що від супу до компоту передається кількість теплоти

$$Q_1 = k(65-35),$$

від супу до квасу –

$$Q_2 = k(65-20),$$

від компоту до квасу –

$$Q_3 = k(35-20)$$

(тут k – постійний коефіцієнт пропорційності). Тоді суп втратив

$$Q_1 + Q_2 = k \cdot 75,$$

компот отримав

$$Q_1 - Q_3 = k \cdot 15,$$

квас отримав

$$Q_2 + Q_3 = k \cdot 60.$$

Враховуючи подвійну масу супу і порівнюючи отримані енергії з відданої, знайдемо приріст температури компоту:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1 \cdot 15 \cdot 2}{75} = 0{,}4^0\,\mathrm{C}$$

і приріст температури квасу:

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \cdot 60 \cdot 2}{75} = 1{,}6^0\,\mathrm{C},$$

де $\Delta t_1 = 1^0\mathrm{C}$ - зменшення температури супу. Можна провести розрахунок і точніше - все ж у процесі передачі тепла змінювалися температури і, головне, різниці температур рідин, але поправки будуть не дуже істотними - в усякому разі, їх неврахування менше впливає на результат, ніж зроблені нами спрощення моделі теплопередачі.

3.5.9. У легкій тонкостінній посуді ми нагріваємо за допомогою кип'ятильника 1 літр води. Температура досягає 60°С і ніяк далі не росте. Нам набридло, і ми вимикаємо нагрівач. За перші 20 секунд вода охолоджується на 2 градуси. На упаковці кип'ятильника було написано: «500 ватт, зроблено в Китаї». Скільки ватт містить «китайський ватт»?

Розв'язок. При граничній температурі потужність втрат дорівнює потужності кип'ятильника. Якщо вважати зміну температури $\Delta T = 2$ К невеликою (щоб помітно не змінилася потужність втрат), то цю потужність можна порахувати:

$$P = \frac{cm\Delta T}{\tau} = \frac{4200\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})\cdot 1\,\text{кг}\cdot 2\text{К}}{20\,\text{с}} = 420\,\text{Вт}.$$

Отже, один «китайський ватт» містить $\frac{420}{500} = 0{,}84$ Вт.

3.5.10. Школяр придбав дуже якісний термос (посудину, яка виключає теплообмін вмісту з навколишнім середовищем) ємністю 1 л, теплоємність стінок якого 100 Дж / К. Початкова температура стінок порожнього термоса 20^0С (як у кімнаті). Школяр послідовно наливає в термос 1 г води при температурі 1^0С, потім 2 г води при температурі 2^0С, потім 3 г води при температурі 3^0С і так далі аж до заповнення термоса. Якою буде встановлена температура вмісту термоса?

Розв'язок. Коли школяр налив у термос 44-ю порцію, у термосі виявилося 990 мл води. Остання порція має температуру 45^0С, але в термос потрапляє тільки 10 мл води. З рівняння теплового балансу знаходимо сталу температуру вмісту термоса t:

$$t = \frac{100 \cdot 20 + 4{,}2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 44^2 + 10 \cdot 45\right)}{100 \cdot 4{,}2(1 + 2 + 3 + ... + 44 + 10)} = 29{,}6^0\,\mathrm{C}.$$

3.5.11. *Школяр знайшов старий мідний дріт з сильно зіпсованою ізоляцією.* Маючи намір здати мідь у пункт прийому кольорових металів, він зім'яв дріт і кинув грудку в багаття, після такої обробки повністю позбавлена від ізоляції мідь масою 2 кг мала температуру 600^0С. Школяр зачепив дріт залізною кочергою і, не поспішаючи, опустив гарячий клубок дроту у відкрите відро з 5 літрами води. Коли шипіння припинилося, школяр круговими рухами грудкою дроту перемішав воду у відрі. Початкова температура води була 20^0С. Якою стала температура води у відрі після того, як мідь охолола? Молярна маса міді 63,5 г / моль, молярна теплоємність міді 25 Дж / (моль·К), молярна теплота випаровування води 40 кДж / моль.

Розв'язок. Мідь при опусканні у воду швидко охолоджується до температури 100^0С. Теплопровідність води дуже мала, тому сильно гріється і переходить у пару тільки тонкий шар води, який прилягає до дроту, що опускається. При цьому водяна пара, що утворилася, відлітає з відра. Вода, що залишилася у відрі нагрівається міддю, яка охолоджується до 100^0С. (Зауважимо, що молярна теплоємність міді дорівнює C = 25 Дж / (моль · К) $\approx 3R$ - це значення, характерне для молярних теплоємність багатьох металів у діапазоні від 200 К до 1000К відповідає закону, відкритого Дюлонга і Пті.) На випаровування піде 25 Дж / (моль К) $\cdot$ (2000/ 63,5) моль $\cdot$ (600 - 100)К $\approx$ 400 кДж тепла. При цьому випарується 400 кДж/(40 кДж/моль : 18 г/моль) = 180 г води. Решта 4,820 кг води будуть нагріватися від 20^0С до сталої температури t. Запишемо рівняння теплового балансу:

4200 Дж/(моль · К)·4,82 кг ·(t - 20)К =

= 25 Дж/(моль · К)·(2000/63,5)моль ·(100 - t) К.

Звідси знаходимо $t \approx 23^0\,\mathrm{C}$, тобто температура води у відрі встановиться рівною приблизно $23^0\,\mathrm{C}$.

3.5.12. У розпорядженні школяра є водопровідна вода з температурою 20^0С, чайник потужністю 1,2 кВт і місткістю 1,5 л, електрокип'ятильник потужністю 500 Вт, а також великий калориметр, у якому потрібно отримати 100 л окропу з температурою 100^0С. Як зробити це за найменший час? Школяр запропонував наступний план дій: потрібно налити в калориметр деякий початковий об'єм води, опустити туди увімкнений кип'ятильник і одночасно кип'ятити воду в чайнику, доливаючи з нього в калориметр порції окропу по мірі його готовності. Визначте, яким має бути початковий об'єм V_0 і за який час x вдасться отримати в калориметрі 100 л окропу, діючи зазначеним способом. Питома теплоємність води 4200 Дж / (кг·К), густина води 1 г/ см^3. Теплоємністю калориметра, втратами тепла в навколишнє середовище і часом, витраченим на наповнення чайника і виливання з нього окропу, можна знехтувати.

Розв'язок. У результаті всіх дій школяра 100 л окропу вийдуть за мінімальний час τ, якщо весь час будуть працювати і чайник, і кип'ятильник, причому частка води, що нагрівається кип'ятильником, повинна дорівнювати частці його потужності в сумарній потужності нагрівальних пристроїв. Рівняння теплового балансу в цьому випадку мають вигляд

$$c\rho V_0\Delta t=\left(P_1+P_2\right)\tau$$

та

$$c\rho V_0\Delta t=P_2\tau,$$

де $c=4200$ Дж/(кг·К), $\rho=1000$ кг/м^3, $V=0{,}1$ м^3, $\Delta t=100-20=80^0C$, потужність $P_1=1200$ Вт, $P_2=500$ Вт. Ці рівняння можна трактувати й інакше. Оскільки за умовою завдання втрати тепла в навколишнє середовище малі, то можна вважати, що порції води, яка закипіла в чайнику, школяр зливає в запасний калориметр, у якому вода зберігає температуру 100^0С. Вона повинна надходити так до тих пір, поки не закипить вода об'ємом V_0 в основному калориметрі (потім він переллє воду з запасного калориметра в основний, і мета буде досягнута). Тому час кип'ятіння τ можна знайти з рівняння

$$c\rho V_0\Delta t=P_2\tau.$$

При цьому за допомогою чайника за той же час закип'ятіть об'єм води $V-V_0$, що описується рівнянням

$$c\rho(V-V_0)\Delta t=P_1\tau.$$

Отже, з отриманих рівнянь знаходимо

$$\tau=\frac{c\rho V\Delta t}{P_1+P_2}\approx 19765\text{с}\approx 5{,}5 \text{ годин.}$$

$$V_0=\frac{P_2\tau}{c\rho\Delta t}=\frac{P_2V}{P_1+P_2}\approx 0{,}0294\text{м}^3=29{,}4\text{ л}.$$

3.5.13. Якщо на крижаний брусок надіти дротяну петлю, до якої підвішений вантаж (рис. 1), то дріт починає різати кригу. Це пояснюється тим, що при підвищенні тиску температура плавлення криги знижується, крига під дротом починає танути, а над дротом - знову замерзати. Однак, якщо петлю зробити не з дроту, а з капронової нитки такого ж або навіть меншого діаметра, крига практично не ріжеться. Чому?

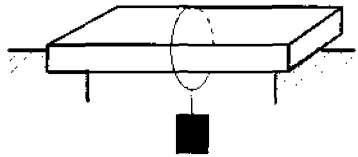


Рис. 1

Розв'язок. При підвищенні тиску температура плавлення криги дійсно знижується. Однак, при плавленні криги поглинається теплота плавлення, і температура льоду під дротом починає падати. Це відбувається до тих пір, поки температура криги в області підвищеного тиску не впаде до температури плавлення при цьому тиску. Подальше плавлення криги буде визначатися теплом, яке внаслідок теплопровідності буде приходити до зони більш низької температури.

При використанні дроту це тепло буде проводитися за рахунок хорошої теплопровідності металу від замерзлої зверху води, і процес розрізуванні льоду буде швидким.

При використанні капронової нитки, яка має малу теплопровідність, тепло буде підводитися головним чином за рахунок охолодження всього бруска криги в цілому і процес розрізання піде дуже повільно.

3.5.14. У якій шубі (при інших рівних умовах) більше втрати тепла на випромінюванні – білої або чорної ?

Розв'язок. Питання завдання по суті, зводиться до наступного: яке тіло – біле або чорне – сильніше випромінює при одній і тій же температурі?

Помістимо подумки обидва тіла в теплоізольовану порожнину з ідеально відбиваючими стінками. Здавалося б, чорне тіло, що поглинає падаюче на нього випромінювання набагато ефективніше, ніж біле, має нагріватися, а біле – охолоджуватися. Іншими словами, повинен відбуватися мимовільний перехід тепла від більш холодного тіла до гарячого. Це, *однак, суперечить* закону термодинаміки. Як же вирішується цей парадокс?

Відповідь полягає тому, що чорне тіло не тільки потужніше, ніж біле, поглинає, але і потужніше випромінює. А тоді ніякої різниці температур між чорним і білим тілами в порожнині не з'явиться, і протиріччя з законами термодинаміки не виникне. Отже, раз чорне тіло випромінює потужніше білого, в білій шубі буде тепліше. Зауважимо, до речі, що хороші радіатори, призначені випромінювати тепло, краще фарбувати в чорний колір.

РОЗДІЛ 4. ВЛАСТИВОСТІ ПАРИ, РІДИНИ ТА ТВЕРДИХ ТІЛ

4.1. Властивості пари. Вологість повітря

При розв'язуванні завдань на пари і вологість застосовуються закони ідеального газу (Бойля - Маріотта, Гей-Люссака, Шарля, Дальтона, рівняння Клапейрона, *рівняння Менделєєва - Клапейрона*). Проте треба звернути увагу на наступні особливості:

а) параметри двох різних станів насиченої пари не підкоряються об'єднаному газовому закону, оскільки в цих станах насичена пара має різну масу;

б) за заданою температурою насиченої пари можна, користуючись таблицями, знайти його густину і тиск;

в) за заданою температурою ненасиченої пари T_1 і його точці роси T_p можна за допомогою таблиць знайти абсолютну вологість, оскільки при температурі T_p ця пара стане насиченою;

г) параметри кожного стану насиченої пари пов'язані між собою рівнянням Менделєєва - Клапейрона.

4.1.1. Розрахунок випаровування води в моделі ідеального газу

4.1. а) Знайдіть швидкість випаровування з одиниці поверхні води у вакуум при температурі 20^{0}С. (Тиск насиченої пари при цій температурі рівний 17,5 мм рт.ст.)

б) За який час випарується в кімнаті вода, налита доверху в звичайне чайне блюдце? Випаровування невеликої кількості води практично не змінює в кімнаті вологість повітря, рівну 70%.

Розв'язок. *Для того щоб розв'язати задачу, потрібно знайти* кількість молекул рідини, що покидають 1 см^2 її поверхні за 1 с. Помноживши її на масу молекули води, ми зможемо дізнатися швидкість випаровування, тобто масу води, що випаровується з одиниці поверхні води за 1 с.

Міркуватимемо так. Якби над рідиною була насичена пара, то кількість молекул рідини, що покидають її за 1 с, було б такою же, як і у відсутність пари. При цьому, проте, в рідину потрапляло б рівно стільки ж молекул, скільки вилітало з неї. Це дозволяє нам підрахувати, скільки молекул вилітає з води в 1 с, оскільки знайти кількість молекул, що потрапляють у рідину, досить просто. Скористаємося наступною моделлю ідеального газу: всі молекули газу мають однакові швидкості υ, і кожна з молекул може рухатися тільки в одному з трьох взаємно перпендикулярних напрямів уздовж осей координат (рис.4). Причому кількість молекул, що рухаються в кожному з цих трьох напрямів, однакова. Якщо одна з осей координат перпендикулярна рідині, то за час τ у рідину потраплять ті молекули пари, які знаходяться від неї на відстані $l = \upsilon\tau$. Нехай в одиниці об'єму знаходиться n молекул пари, тоді на ділянку поверхні з площею S потрапляє $N = \frac{1}{6} n\upsilon\tau S$ молекул пари: уздовж осі координат, перпендикулярної поверхні рідини, рухається $\frac{1}{3}$ частина молекул пари, що знаходяться в об'ємі $\upsilon \tau S$, причому швидкість половини з них направлена від рідини. Якщо маса молекули пари m, то за час τ у рідину потрапляє маса пари $M = \frac{1}{6} n \upsilon \tau S m$. $n{\cdot}m$— це густина пари ρ. Тому $M = \frac{1}{6} \upsilon \tau S \rho$ (*)

Швидкість молекул пари можна виразити через його тиск і густину. Розглянемо кубічну посудину з ребром l і гранями, перпендикулярними осям координат (рис. 1). При пружному зіткненні молекули пари зі стінкою її кількість руху змінюється на $2m\upsilon$ — до зіткнення імпульс молекули $m\upsilon$, а після зіткнення $-m\upsilon$: молекула рухається від стінки. Оскільки між двома послідовними зіткненнями молекули з однією і тією ж стінкою проходить час $t = \frac{2l}{\upsilon}$, то відповідно до другого закону Ньютона можна вважати, що на молекулу з боку стінки діє середня сила $f = \frac{2m\upsilon}{\frac{2l}{\upsilon}} = \frac{\upsilon^2}{l}$. За третім законом Ньютона сила такої ж величини діє на стінку. Оскільки вздовж кожної з осей рухається $N = \frac{1}{3} n l^3$ молекул, кожна з яких тисне на стінку, то

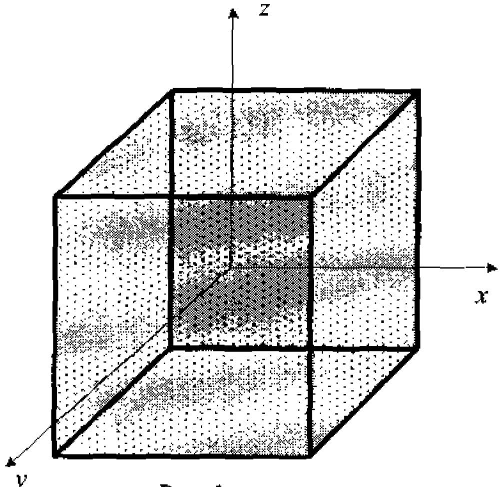


Рис. 1

повна сила, що діє на стінку, рівна $F = \frac{m\upsilon^2}{l} \cdot \frac{1}{3} n l^3 = \frac{1}{3} n m l^2 \upsilon^2$, а тиск пари на стінку рівний $p = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{3} n m \upsilon^2 = \frac{1}{3} \rho \upsilon^2$. Тому $\upsilon = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$. Підставляючи цей вираз для υ у формулу (*), отримаємо $M = \frac{1}{6} \tau S \rho \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$.

Виразимо ще густину пари через його тиск. Вони зв'язані рівнянням Клапейрона: $p = \frac{\rho}{\mu} RT$, де μ— маса одної грам-молекули пари T — його температура, а $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ — газова стала.

З цієї формули знайдемо, що $\rho = \dfrac{p\mu}{RT}$. Тому $M = \dfrac{1}{6}\tau S\dfrac{p\mu}{RT}\sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$.

Отже, якщо над рідиною знаходиться насичена пара, то на одиницю її поверхні за 1 с потрапить маса пари, рівна $\dfrac{M}{\tau S} + \dfrac{1}{6}p\sqrt{\dfrac{3\mu}{RT}}$.

Це означає, що швидкість випаровування рідини у вакуум рівна $\dfrac{1}{6}p\sqrt{\dfrac{3\mu}{RT}}$.

Підставивши сюди числові значення $T = 293^0$K, $\mu = 18\dfrac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$ й $p = 2{,}3\cdot 10^3\dfrac{\text{н}}{\text{м}^2}$ (p — тиск насиченої пари при $T = 293^0$K), отримаємо, що швидкість випаровування рівна $14{,}8\cdot 10^{-8}\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

Ми могли б розв'язати задачу і точніше, враховуючи, що молекули рухаються з різними швидкостями і у всіляких напрямах. Це, проте, не змінило б якісний результат, який ми отримали. Змінився б лише чисельний множник в останній формулі.

Тепер неважко знайти і час, за який випарується в кімнаті вода, налита в чайне блюдце. У цьому випадку з одиниці поверхні рідини за 1 с вилітають молекули із загальною масою, рівною $\dfrac{1}{6}p_0\sqrt{\dfrac{3\mu}{RT}}$; $\left(p_0 = 10^{-5}\dfrac{\text{н}}{\text{м}^2}\right)$, а в рідину потрапляє маса пари, рівна $\dfrac{1}{6}p\sqrt{\dfrac{3\mu}{RT}}$, де $p = \eta p_0 = 0{,}7p_0$. Таким чином, швидкість випаровування рідини рівна $\dfrac{1}{6}(p_0 - p)\sqrt{\dfrac{3\mu}{RT}}$.

Якщо площа поверхні води S, а її маса M, то вся вода випарується за час

$$t = \frac{M}{\frac{1}{6}S(p_0 - p)\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}}.$$

Знаючи, що в блюдце входить 100 грам води, його діаметр рівний 10 см, температура повітря в кімнаті рівна 17^0C = 290^0K (при цій температурі $p_0 = 2{,}3\cdot 10^3\dfrac{н}{м^2}$ й $p = 1{,}6\cdot 10^3\dfrac{н}{м^2}$), знайдемо t = 1с.

Вийшов парадоксальний результат. У чому ж ми помилилися? У величині тиску пари поблизу поверхні води. Тут тиск пари значно більше, ніж у кімнаті. У тонкому шарі біля поверхні пара майже насичена. Тільки завдяки цьому вода випаровується достатньо повільно.

Приклад, який ми розглянули, показує, як важливо при розв'язуванні фізичної задачі знатися на «фізиці» явища, тобто зрозуміти, чим можна і чим не можна нехтувати.

4.2. Коли і в скільки разів більше абсолютна вологість повітря (густина водяної пари): у листопаді при температурі t_1 = 0°C і вологості 95% або в липні при t_2 = 35°C і вологості 40%, якщо тиск насиченої пари при t_1 = 0°C дорівнює $p_1 = 6 \cdot 10^2$ Па, а при t_2 = 35°C дорівнює $p_2 = 5{,}5 \cdot 10^3$ Па?

Розв'язок. Тиск водяної пари при відносній вологості α дорівнює

$$P = \alpha p_н,$$

де $p_н$ - тиск насичених парів при даній температурі. Густина водяної пари (абсолютну вологість) знайдемо з рівняння газового стану:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Звідки

$$\rho = \frac{m}{\mu} = \frac{\mu p}{RT} = \frac{\mu \alpha p_{нас}}{RT}.$$

Відношення густини водяної пари ρ_2 / ρ_1 у липні і в листопаді при заданих у задачі умовах ($\alpha_2 = 0{,}4$, $T_2 = 308$ К, $p_{н2} = p_2 = 5{,}5 \cdot 10^3$ Па, $\alpha_1 = 0{,}95$, $T_1 = 273$ К, $p_{н1} = p_1 = 6 \cdot 10^2$ Па) дорівнює

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\alpha_2 p_2}{\alpha_1 p_1}\frac{T_1}{T_2} \approx 3{,}4.$$

Таким чином, у сухому липні (вологість 40%) в повітрі в 3,4 рази більше водяної пари, ніж у дощовому листопаді.

4.3. При відносній вологості повітря $r_1 = 50\%$ вода, налита в блюдце, випарувалася за час $t_1 = 40$ хв. За який час випарується вода при $r_2 = 80\%$.

Розв'язок. Поряд з процесом випаровування рідини йде і процес конденсації пари. Швидкість випаровування в обох випадках (при $r_1 = 50\%$ та при $r_2 = 80\%$) одна і та ж (вона залежить тільки від температури рідини). Швидкість же конденсації пропорційна концентрації молекул пари в повітрі, тобто пропорційна відносній вологості, і в другому випадку вона вище, ніж у першому. Очевидно, що швидкість зменшення кількості води дорівнює $\upsilon = \upsilon_в - \upsilon_к$ (де $\upsilon_в$ і $\upsilon_к$ швидкості випаровування і конденсації). При 100% вологості $\upsilon_в = \upsilon_к$. З огляду на все сказане, ми можемо записати:

$$\text{коли } r_1 = 50\% \quad \upsilon_1 = \upsilon_в - \upsilon_{к1} = \frac{1}{2}\upsilon_в,$$

$$\text{коли } r_1 = 80\% \quad \upsilon_2 = \upsilon_в - \upsilon_{к2} = \frac{1}{5}\upsilon_в.$$

Оскільки $t_2 : t_1 = \upsilon_1 : \upsilon_2$ час t_2, за який випарувалася б вода при $r_2 = 80\%$, дорівнює

$$t_2 = \frac{\upsilon_1 t_1}{\upsilon_2} = \frac{5}{2}t_1 = 100 \text{ хв.}$$

4.4. Досліджується випаровування крапель рідини в повітрі. Нехай це випаровування відбувається при постійній різниці температур за рахунок підведення тепла до краплини від навколишнього середовища. Уважаючи потік тепла на одиницю поверхні краплини пропорційним радіусу краплини, знайти залежність радіусу краплини від часу. За який час остаточно випарується крапля, радіус якої зменшився в 2 рази за 10 хв.

Розв'язок. Згідно з умовою задачі, за короткий час Δt_k до поверхні краплі площею $4\pi r^2$ підводиться кількість теплоти

$$\Delta Q = \frac{\alpha(T_n - T_k)}{r} \cdot 4\pi r^2 \Delta t .$$

Тут r – радіус краплі, α – постійний коефіцієнт, що залежить від теплопровідності навколишнього середовища, T_n і T_k – температури повітря і краплі $(T_n > T_k)$. Це тепло витрачається на випаровування деякої маси рідини Δm. Якщо позначити L питому теплоту випаровування рідини, то можна записати закон збереження енергії у вигляді

$$L\Delta m = -\Delta Q = -\alpha(T_n - T_k)4\pi r\Delta t$$

(знак мінус у правій частині вказує на те, що з плином часу маса рідини зменшується). Але $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$, де ρ_0 – густина речовини краплі; тому

$$\Delta m = 4\pi r^2 \rho_0 \Delta r .$$

Підставивши останнє співвідношення в рівняння для енергії, отримаємо

$$r\Delta r = -\frac{\alpha(T_n - T_k)}{L\rho_0}\Delta t ,$$

або

$$\left(r^2\right)' = -\beta ,$$

де $\beta = \frac{2\alpha(T_n - T_k)}{L\rho_0}$ – стала.

Звідси видно, що квадрат радіуса краплі лінійно зменшується з часом:

$$r^2 = r_0^2 - \beta \cdot t ,$$

де r_0 – значення радіуса в початковий момент часу $t = 0$, а сам радіус зменшується згідно закону (рис. 1)

$$r = \sqrt{r_0^2 - \beta \cdot t} .$$

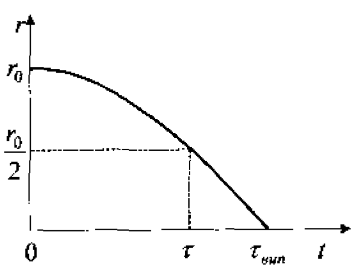


Рис. 1

Згідно умов, за час $\tau = 10 хв = 600 с$ радіус краплі зменшився вдвічі, тобто став $r_0/2$, так що

$$\frac{r_0^2}{4} = r_0^2 - \beta \cdot \tau .$$

$$\beta = \frac{3}{4}\frac{r_0^2}{\tau} .$$

Позначимо час повного випаровування через $\tau_{\text{вип}}$. Воно знаходиться з умови

$$r = 0 \text{ коли } t = \tau_{\text{вип}}.$$

Звідки

$$\tau_{\text{вип}} = \frac{r_0^2}{\beta} = \frac{4}{3}\tau = 800\text{с}.$$

4.5. У жорсткій закритій літровій посудині знаходиться 900 г води; повітря в посудині немає. Температура всередині посудини +100°С. Вмісту посудини надали 1000 Дж тепла. Оцініть кількість випаруваної при цьому води. Уважайте, що при підвищенні температури до +101°С тиск насичених парів води збільшується від 1 атм до 1,04 атм.

Розв'язок. Частина переданого системі тепла буде використана на нагрівання води, частина - на випаровування. Спробуємо оцінити співвідношення цих частин. Нехай все тепло використали на нагрів - тоді зміна температури води становитиме

$$\Delta T = \frac{Q}{cm} = \frac{1000}{4200 \cdot 0{,}9} \approx 0{,}26\text{K}.$$

При цьому тиск насичених парів збільшиться від 1 атм до 1,01 атм, і "зайва" кількість пари в об'ємі 0,1 л складе

$$\Delta m_1 = \frac{MV\Delta p}{RT} = \frac{0{,}018 \cdot 0{,}0001 \cdot 1000}{8{,}3 \cdot 373} \approx 6 \cdot 10^{-7}\,\text{кг}.$$

А якщо б все тепло використали на випаровування, випаровалося б

$$\Delta m_2 = \frac{Q}{r} = \frac{10^3}{2{,}26 \cdot 10^6} \approx 4 \cdot 10^{-4}\,\text{кг},$$

що у багато разів більше додаткової кількості води, що випарувалася, зумовлена насиченням пари. Очевидно, що лише дуже невелика частина тепла буде використана на випаровування - "зайва" кількість води не може випаруватися, оскільки дуже швидко настане насичення пари у вільній частині об'єму. Можна тепер відняти кількість теплоти, необхідну для випаровування маси води Δm_1, і уточнити величину ΔT, тобто знайти

$$\Delta T_1 = \frac{Q - r\Delta m_1}{cm}.$$

Однак поправка буде зовсім малою: $\dfrac{r\Delta m_1}{Q} = \dfrac{\Delta m_1}{\Delta m_2} \approx 0{,}015$ і нею цілком можна знехтувати.

Отже, перша оцінка є цілком розумною, і кількість випарованої води трохи менше $\Delta m_1 = 0{,}6\text{мг}$.

4.6. Висока вертикальна посудина з площею дна 10 см^2 і висотою 1 м містить під поршнем масою 2 кг сухого повітря і три однакові маленькі пляшечки з водою. Температура повітря зовні +100°С, атмосферний тиск нормальний.

Спочатку поршень висить на висоті 20 см над дном посудини, а після того, як одна з ампул лопнула, він піднявся і остаточно зупинився на висоті 40 см. Скільки води було в ампулі? Чи вискочить поршень з посудини, якщо лопнуть інші дві ампули?

Розв'язок. Спочатку, коли поршень нерухомий, тиск повітря в посудині дорівнює

$$p_{\text{атм}} + \frac{Mg}{S} = 1{,}2\text{атм}\,.$$

Після того, як одна ампула лопнула, об'єм повітря подвоївся, його тиск впав у 2 рази і склав 0,6 атм. Отже, тиск пари дорівнює

$$p_{\text{п}} = 1{,}2\text{атм} - 0{,}6\text{атм} = 0{,}6\text{атм}.$$

Для температури 100°C тиск менше тиску насиченого пару, рівного 1 атм. *Значить, уся вода випарувалася і її маса дорівнює*

$$m = \frac{Mp_{\text{п}}V}{RT} = \frac{0{,}018\cdot 0{,}6\cdot 10^5\cdot 400\cdot 10^{-6}}{8{,}3\cdot 373} \approx 0{,}14\,\text{кг}.$$

Для того щоб поршень вискочив з посудини, пар повинен стати майже насиченим − парціальний тиск повітря впаде в 5 разів і складе 1,2 атм / 5 = 0,24 атм, тоді на пар має припадати 1,2 атм - 0,24 атм = 0,96 атм. Одна ампула при висоті поршня над дном посудини 40 см створила вологість 60%, три ампули при висоті поршня 1 м створять вологість 1,2 · 60% = 72%, що явно менше необхідних 96%. Отже, трьох ампул недостатньо.

4.7. У посудину, заповнену повітрям під тиском p_0 = 1 атм і при температурі t_0 = - 23 °C, помістили маленьку крижинку, після чого герметично її закрили. Потім посудину нагрівали до температури t_1 = 221 °C, і виявилося, що тиск у ній підвищився до p_1 = 3 атм. Якою буде відносна вологість повітря в посудині після охолодження до температури t_2 = 100 °C?

Розв'язок. Процеси нагрівання і охолодження посудини відбуваються при постійному об'ємі. Тому тиск у посудині при температурі T_1 може бути знайдено за формулою

$$p_1 = p_0\frac{T_1}{T_0} + p_{1\text{води}}\,,$$

де $p_{1\text{води}}$ − тиск водяної пари при температурі T_1. При записі цього співвідношення ми скористалися законом ідеальних газів (для повітря), а також урахували, що тиск водяної пари при температурі T_0 порівняно малий з тиском p_0 і що тиск суміші газів дорівнює сумі їх парціальних тисків. Звідси знаходимо

$$p_1 - p_0\frac{T_1}{T_0} = p_{1\text{води}} = 1\,\text{атм}\,,$$

що явно нижче тиску насиченої водяної пари при температурі t_1 = 227°C. Отже, при охолодженні від температури t_1 до температури t_2 =100°C тиск водяної пари також залишиться менше тиску насичених парів води при температурі t_2, рівного $p_{н2} = 1$ атм. Для знаходження тиску водяної пари при цій температурі застосуємо закон ідеальних газів:

$$p_{2води} = p_{1води}\frac{T_2}{T_1} = \left(p_1 - p_0\frac{T_1}{T_0}\right)\frac{T_2}{T_1} = 0{,}746\,\text{атм}\,.$$

Тоді відносна вологість повітря в посудині буде дорівнювати

$$\varphi = \frac{p_{2води}}{p_{н2}} = \frac{(p_1T_0 - p_0T_1)T_2}{T_0T_1p_{н2}} = \frac{0{,}746\,\text{атм}}{1\,\text{атм}}\times 100\% = 74{,}6\%\,.$$

4.8. У потрійній точці води при температурі 273,16 К і тиску водяної пари 610 Па рідка, тверда і газоподібна фази води знаходяться в стані термодинамічної рівноваги. Молекули газоподібної фази б'ються об поверхню конденсованої речовини і створюють однаковий тиск і на поверхню льоду, і на поверхні води. Оцініть відношення "коефіцієнтів прилипання" молекул до плоских поверхонь конденсованого твердого та конденсованої рідкої речовини при ударі об них молекул, що знаходяться в газовій фазі при цій температурі (або, що те ж саме, оцініть відношення швидкостей випаровування рідкої води і твердої криги при температурі ≈ 273 К, якщо над ними вакуум).

Розв'язок. Молярна теплота плавлення льоду поблизу температури 273 К становить приблизно 6 кДж / моль, а молярна теплота пароутворення з твердого льоду дорівнює 51 кДж/моль. Відповідно, молярна теплота пароутворення з рідкої води при цій же температурі дорівнює 45 кДж / моль. Нехай з одиниці поверхні води в твердому і рідкому стані в одиницю часу у вакуум ідуть кількості молекул $n_т$ і $n_р$ відповідно. Кожна молекула, що випарувалася з поверхні, "зібрала" при випадкових ударах з сусідніми молекулами кінетичну енергію поступального руху, яка дозволила їй подолати потенційний бар'єр і "відірватися" від сусідок. Ця енергія у багато разів більше середньої кінетичної енергії хаотичного теплового поступального руху молекул у напрямку "відходу", тобто перпендикулярно межі поділу конденсованої і газоподібної фаз речовини, що дорівнює $RT/2 \approx 1{,}1$ кДж/моль. Відповідно до закону Больцмана, ймовірності "відходу" молекул з поверхонь однієї й іншої фаз конденсованої речовини відносяться як

$$\frac{n_р}{n_т} = e^{\frac{\Delta E}{RT}} = e^{\frac{6000}{8{,}31\cdot 273}} = 14,$$

тобто з поверхні рідкої води молекули йдуть у пару в 14 разів частіше, ніж з поверхні криги. Це означає, що ймовірність прилипання до рідкої поверхні для молекули, яка вдарилася об цю поверхню, більше, ніж при ударі об тверду поверхню при тій же температурі.

Спробуємо "на пальцях" пояснити причини такої великої різниці. Удар молекули об поверхню конденсованої речовини відповідає її взаємодії не з однією молекулою, а з цілим колективом молекул. Маса цього колективу набагато більша за масу однієї молекули, тому вона з великою ймовірністю відскакує від поверхні. Якщо розглядати модель абсолютно пружного лобового удару легкої частинки масою m з важкою частинкою масою M, яка знаходиться в стані спокою, то втрата енергії після відскоку складе певну частину від початкової енергії, а саме

$$\frac{\Delta W}{W_0}=4\cdot\frac{Mm}{(M+m)^2}\approx 4\frac{m}{M}.$$

Чим більше маса колективу молекул, з яким при ударі об поверхню взаємодіє молекула, тим менше енергії вона втрачає.

Швидкості звуку в рідкій воді і в товщі льоду відрізняються: 1,5 км / с для води і 4 км / с для криги. Це означає, що за однаковий час взаємодії молекули з поверхнею конденсованої речовини звукові хвилі в кризі захоплюють об'єм речовини приблизно в $(4/1{,}5)^3\approx 19$ разів більший, ніж у рідкій воді, тобто середня маса "крижаного колективу" значно більше середньої маси "водного колективу". Ця обставина і пояснює таку велику різницю ймовірностей прилипання молекул.

4.9. Під час стискання порції вологого повітря в чотири рази його тиск зріс у три рази. Коли його стиснули ще в два рази, тиск став у п'ять раз більшим від початкового. Все відбувалося при постійній температурі. Яка була відносна вологість повітря спочатку?

Розв'язок. З умови задачі видно, що при початковому стисканні пара *стала насиченою* — *інакше тиск зріс би рівно в 4 рази*. Позначивши початковий загальний тиск p_0, парціальний тиск повітря $p_{пов}$, парціальний тиск пари $p_п$ і тиск насиченої пари $p_н$, можна записати рівняння

$$p_0=p_{пов}+p_п;\,3p_0=4p_{пов}+p_н;\,5p_0=8p_{пов}+p_н.$$

Звідси

$$p_н=p_0;\,p_п=\frac{1}{2}p_0.$$

Тоді відносна вологість повітря спочатку була

$$\varphi=\frac{p_п}{p_н}=50\,\%$$

4.10. Шприц без голки наполовину заповнений водою, бульбашок повітря всередині немає, а вихідний отвір закрито, наприклад, пальцем. З якими силами потрібно тягнути в різні боки шприц за корпус і поршень за ручку, щоб вода всередині закипіла, якщо її початкова температура 24^{0}С? Тертям поршня об стінки можна знехтувати. Тиск повітря $p_0=100\,кПа$. Відсутні дані знайдете самостійно.

Розв'язок. Поруч зі шприцом лінійка з міліметровими поділками. Діаметр поршня в такому шприці дорівнює D = 20 мм. З довідника дізнаємося, що тиск насиченої пари води при 24^{0}С дорівнює приблизно $p_{нас}=3\,кПа$. Тоді необхідна величина сил дорівнює

$$F = \left(p_0 - p_{\text{нас}}\right)\frac{\pi D^2}{4} \approx 30{,}5\ \text{Н}.$$

4.11. Відомо що, охолоджуючи посудину з водою і одночасно відкачуючи газ із посудини, можна довести її до кипіння. Чи можливе закипання рідини при охолодженні замкнутої посудини з рідиною і газом?

Розв'язок. Умова закипання рідини при даній температурі - рівність тиску над нею тиску насичених парів при цій температурі. Якщо замкнуту посудину з рідиною і газом охолоджувати рівномірно, то при будь-якій температурі тиск над рідиною буде більше тиску її насичених парів на величину парціального тиску газу, що знаходиться в посудині. У цьому випадку рідина при охолодженні не закипить. Якщо ж посудину охолоджувати нерівномірно, так, щоб верхню частину посудини охолоджувати швидше, рідина може закипіти. Це станеться, коли сумарний тиск газу і насичених парів над рідиною, де температура нижча, стане рівним тиску насичених парів при тій вищій температурі, яку має в даний момент рідина.

4.1.2. Випаровування води в природних умовах

В природних умовах головну роль у зниженні рівня води відіграють не вище розглянуті процеси. Справа у тому, що атмосфера Землі не є рівноважною системою, до якої можна застосовувати закони молекулярної фізики або термодинаміки. Нагріте Сонцем біля поверхні води (землі) вологе повітря прямує догори в холодні шари атмосфери (конвекція повітря) і там вода конденсується, а на шляху до поверхні землі краплі води не встигають випаруватися і падають дощем. Таким чином водоймища поповнюються, кругообіг води продовжується.

Швидкість випаровування рідини буде залежить від:
1) розмірів і форми посудини, в якій знаходиться рідина; 2) швидкості руху повітря, руху рідини; 3) температури рідини; 4) зовнішнього тиску; 5) природи рідини; 6) природи поверхні, з якої відбувається випаровування (забруднена вона чи чиста), й 7) від багатьох інших чинників. Рівень води у водосховищі може залежати від стоків, підземних джерел тощо.

Тому результати натурних вимірювань випаровування води з природних водосховищ, які виконувалися в різних частинах Землі, відрізняються один від одного. Для наших широт можна прийняти зниження рівня води за добу протягом весняних та літніх місяців

$$\Delta h = 2{,}5 \div 3\ \text{мм / добу}.$$

4.2. Поверхневий натяг. Капілярні явища

4.12. П- подібна капілярна трубка (рис. 1) з довжиною колін $l = 10$ см і діаметрами $d_1 = 0{,}1$ мм і $d_2 = 0{,}2$ мм опускається вертикально відкритими кінцями у воду і занурюється настільки, щоб рівень води у вужчому коліні був на одному рівні з рівнем води в посудині. Знайти положення рівня води в широкому коліні. Об'ємом горизонтальної трубки знехтувати. Атмосферний тиск нормальний. Коефіцієнт поверхневого натягу води σ = 0,070 Н/м.

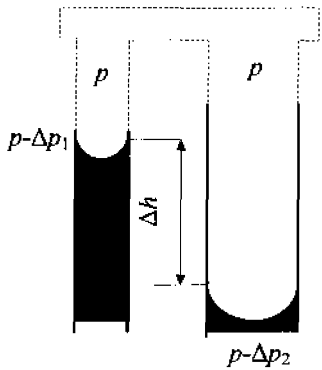


Рис. 1

Розв'язок. Тиск під зігнутою сферичною поверхнею рідини відрізняється від тиску газу над нею на величину $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{r}$, де r - радіус сфери.

У випадку повного змочування стінок трубки водою меніски у вузьких і широких колінах можна взяти за напівсфери радіусів $r_1 = d_1/2$ і $r_2 = d_2/2$. Відповідно, якщо меніск не розташований на одному з кінців відповідного капіляра, тиск повітря над рідиною у вузькому коліні більше тиску води під поверхнею на $\Delta p_1 = \dfrac{4\sigma}{d_1} \approx 28{,}6\,\text{см.вод.ст.}$, а в широкому коліні – на $\Delta p_2 = \dfrac{4\sigma}{d_2} \approx 14{,}63\,\text{см.вод.ст.}$ Тому різниця рівнів таких менісків може бути рівною лише

$$\Delta h = \frac{\Delta p_1}{\rho g} - \frac{\Delta p_2}{\rho g} \approx 14{,}3\,\text{см}.$$

У нашому випадку $l < \Delta h$. Значить, хоч один з менісків розташовується на кінці коліна. При одночасному зіткненню трубки з поверхнею води підйом рідини у вузькому капілярі призведе до такого підвищення тиску повітря в трубці, що він буде виходити через кінець широкого капіляра. Таким чином, вода у вузькому капілярі дійде до верха, де утворюється меніск радіуса $R_1 > r_1$. Відповідно, трубку необхідно занурити в рідину на всю довжину l. Біля нижнього кінця широкої трубки меніск може мати радіус $R_2 > r_2$. При $R_2 = r_2$ тиск повітря в зануреній трубці максимальний і рівний

$$F_{max} = p_{атм} = \rho g l + \frac{2\sigma}{r_2}.$$

Булькання буде продовжуватися до тих пір, поки маса повітря не зменшиться настільки, що його тиск стане рівний p_{max}, або набагато менший. Меніск радіуса $R_2 \geq r_2$ у широкому коліні буде розташовуватись біля нижнього кінця капіляра, тобто на глибині l. Якщо кінці трубки доторкнуться поверхні води не одночасно, то булькання повністю або частково не буде. У цьому випадку відповідь задачі вийде іншою.

4.13. Закрита кришкою посудина доверху наповнена рідиною, у якої є дві бульбашки. Як зміниться тиск у рідині, якщо бульбашки зіллються?

Початковий тиск у рідині p_0, коефіцієнт поверхневого натягу σ, радіус кожного пухирця r_0. Уважати процес ізотермічним.

Розв'язок. Припустимо, що розглянута система знаходиться в стані невагомості. Це рівнозначно тому, що гідростатичний тиск відсутній, і тому тиск у рідині всюди один і той же. Запишемо умову рівноваги для кожної бульбашки до злиття:

$$p_0 + \frac{2\sigma}{r_0} = p_г,$$

де $\frac{2\sigma}{r_0}$ - додатковий тиск, зумовлений силами поверхневого натягу рідини, $p_г$ - тиск газу в бульбашці. Після злиття двох бульбашок в одну тиск газу не зміниться, оскільки об'єм, який займається газом, залишається постійним, а додатковий тиск зміниться, тому що радіус бульбашки стане іншим. Радіус r нової бульбашки знайденмо з умови постійного об'єму:

$$2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Звідси

$$r = r_0^3\sqrt{2}.$$

Умову рівноваги для цієї бульбашки можна представити у вигляді

$$p + \frac{2\sigma}{r} = p_г$$

(p – новий тиск у рідині). Тоді з (1)-(3) зміна тиску буде

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{2\sigma}{r_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Розгляньте умову, коли бульбашки мають різні радіуси.

4.14. Знайти радіус найбільшої краплі води, яка може випаруватися, не поглинувши тепла ззовні.

Розв'язок. При випаровуванні краплі без поглинання тепла ззовні необхідну для випаровування кількість теплоти отримуємо за рахунок зменшення поверхневої енергії краплі $U_п$ при зменшенні площі її поверхонь. Нехай радіус краплі зменшився на ΔR, тоді об'єм краплі зменшився на

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R - \Delta R)^3 = 4\pi R^2 \Delta R - 4\pi R(\Delta R)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3.$$

При малому ΔR можна знехтувати другим і третім членами цієї рівності в порівнянні з першим членом, так що

$$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R.$$

Маса води, що випарувалася при цьому дорівнює

$$m = \rho\Delta V = \rho 4\pi R^2 \Delta R.$$

Для її випаровування необхідна кількість теплоти

$$Q = Lm = 4\pi\rho LR^2\Delta R$$

Площа поверхні краплі зменшилася на

$$\Delta S = 4\pi R^2 - 4\pi(R-\Delta R)^2 = 8\pi R\Delta R .$$

Поверхнева енергії зменшилася на

$$\Delta U_П = 8\pi R\Delta R \cdot \sigma .$$

де σ = 7,2 $\cdot 10^{-2}$ Дж/м^2 – коефіцієнт поверхневого натягу води.

Прирівняємо вирази для Q та $\Delta U_П$:

$$4\pi L\rho R^2\Delta R = 8\pi R\Delta R\sigma .$$

Звідки

$$R = \frac{2\sigma}{\rho L} \sim 10^{-16} м = 10^{-8} см .$$

Така крапля існувати не може, тому що ми отримали, що R порядку міжмолекулярних відстаней у воді. Отже, ніяка крапля не може випаруватися, не поглинаючи тепла ззовні. При вирішенні задачі ми припускали, що температура краплі, отже, її внутрішня енергія, не змінюються. Цю зміну можна, в принципі, врахувати, але це не змінить відповідь. Дійсно, питома теплоємність води дорівнює 2300 кДж/кг. Отже, якщо температура краплі кімнатна (20^{0}С), то при охолодженні її до 0^{0}С може випаруватися приблизно 20/ 539 $\approx$ 0,04 маси краплі. Тому зрозуміло, що врахування зміни внутрішньої енергії краплі не може змінити відповідь.

4.15. Оцініть, скільки води можна віднести в решеті з квадратними комірками розміром 2 х 2 мм. Нитки решета не змочуються водою.

Розв'язок. Рідина між нитками решета буде утворювати меніск. Радіус цього меніска не може бути більше половини відстані між нитками, тобто r_{max} = 1мм. Тому максимальний тиск, що може бути в рідини над меніском, перевищує атмосферний тиск на величину $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{r}$ (σ – коефіцієнт поверхневого натягу води). Ця формула справедлива для круглого меніска, тобто для решета з круглими комірками. Однак для оцінки ми можемо не враховувати складної форми меніска на квадратній сітці і користуватися цією формулою.

Отже, $\Delta p = 2\sigma / r$. З іншого боку, Δp дорівнює гідростатичному тиску стовпа рідини висоти h, налитої у решето:

$$\frac{2\sigma}{r} = \rho g h .$$

Звідси знаходимо $h = \dfrac{2\sigma}{\rho g r}$. Маса ж рідини в решеті дорівнює добутку її об'єму V на густину ρ, тобто

$$m = \rho V = \frac{\pi D^2}{4} h\rho = \frac{\pi D^2\sigma}{2gr} \approx 0{,}458 кг.$$

4.16. В умовах невагомості рідина, яка знаходиться в скляній циліндричній *посудині з радіусом основи R_1 набула форми, що показана на рис.* 1. *Вільна* поверхня рідини мала форму сфери з радіусом R_0. Та ж рідина, розміщена в скляному сферичному посуді радіусом R_2, набула форми, що показана на рис. 2. Вільна поверхня рідини була плоскою. Визначити висоту рівня рідини в сферичному посуді. Яку форму матиме рідина в сферичному посуді, якщо радіус посудини більше R_2? Менше R_2?

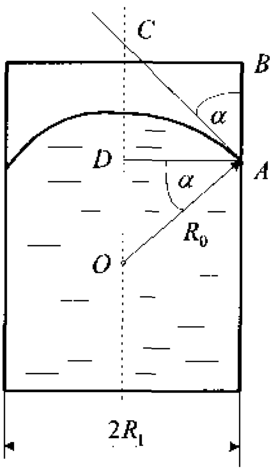


Рис. 1

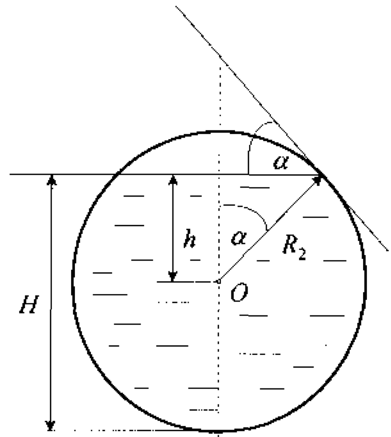


Рис. 2

Розв'язок. Крайовий кут, який утворює в точці зіткнення трьох середовищ поверхні цих середовищ, визначається силами взаємодії між молекулами в цих середовищах і не залежить від сили тяжіння. Тому крайовий кут повинен бути одним і тим же в невагомості й на Землі і саме він визначає форму поверхні рідини поблизу точок дотику трьох даних середовищ (у нашому випадку - рідини, твердого тіла і газу).

З рис. 1 і 2 видно, що

$$\cos\alpha = \frac{R_1}{R_0},\ \cos\alpha = \frac{h}{R_2}.$$

Звідси знаходимо $h = R_1 R_2 / R_0$. Отже, висота рівня рідини в сферичній посудині дорівнює

$$H = h + R_2 = \frac{R_2}{R_0}(R_1 + R_0).$$

У посудинах з радіусами $R < R_2$ і $R > R_2$ рівні рідини будуть відповідно вище і нижче, ніж у посудині з радіусом R_2. У будь – якому випадку в точці зіткнення трьох середовищ крайовий кут дорівнює α.

4.17. Для ілюстрації поверхневого натягу одну з мильних плівок, натягнутих на паралельні дротинки і розділених ниткою AB (рис.1), проколюють; при цьому нитка AB натягується. Визначити силу натягу нитки. Відстань між дротинками дорівнює d, довжина нитки l $(l >> \pi d/2)$, коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину σ.

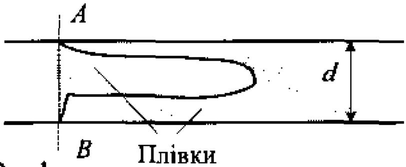


Рис.1

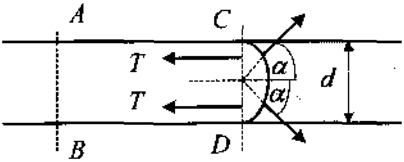


Рис. 2

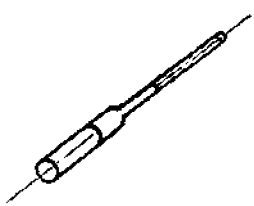
Розв'язок. З'ясуємо спочатку, вид якої кривої набуде нитка під дією сили поверхневого натягу. Легко здогадатися, що у разі $l < \pi d/2$ це буде дуга кола, оскільки, припустивши протилежне (тобто що радіус кривизни нитки не постійний), з'ясуємо, що рівновага нитки неможлива. З урахуванням цього знайдемо, що коли $l > \pi d/2$ нитка буде мати дві прямолінійні ділянки довжиною $x = \frac{1}{2}\left(l - \frac{\pi d}{2}\right)$ і півколо (оскільки точки C і D знаходяться у спокої) радіусом $d/2$ (рис. 2). Нехай сила натягу нитки T (див. рис. 2). Розглядаючи симетричні ділянки нитки, можна записати:

$$2T = \sum_i \sigma\, \Delta l_i \cos\alpha = \sigma d .$$

Звідси

$$T = \frac{\sigma d}{2}.$$

4.18. Капіляр зроблений з двох тонких скляних трубочок з внутрішніми діаметрами d_1 і d_2 (рис. 1). У нього ввели велику краплю води з масою M. Коли капіляр розташували горизонтально, вся крапля «поповзла» в тонку частину, а коли його встановили вертикально – вся вода з нього витікала. При яких кутах між віссю капіляра і вертикаллю крапля буде розташовуватися частково в товстій, а частково в тонкій трубочці? Коефіцієнт поверхневого натягу води σ, густина води ρ. Змочування вважати повним.



Розв'язок. Максимальне значення кута між віссю капіляра і вертикаллю відповідає випадку, коли практично вся крапля води знаходиться в тонкій частині капіляра. При цьому довжина стовпа води

$$l_{max} = \frac{M}{\rho \pi d_2^2/4},$$

а його висота

$$h_{max} = l_{max} \cos\alpha .$$

Тоді умовою рівноваги є рівність

$$p_{атм} - \frac{2\sigma}{d_1/2} = p_{атм} - \frac{2\sigma}{d_2/2} + \rho g\, l_{max} \cos\alpha_{\max}.$$

Звідки випливає

$$\alpha_{max} = \arccos\left[\frac{\pi\sigma d_2}{Mg}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)\right].$$

Мінімальне значення кута між віссю капіляра і вертикаллю буде відповідати випадку, коли практично вся крапля знаходиться в широкій частині капіляра. Аналогічно попередньому, знаходимо

$$\alpha_{min} = \arccos\left[\frac{\pi\sigma d_1}{Mg}\left(\frac{d_1}{d_2} - 1\right)\right].$$

4.19. У горизонтальному дні циліндричної посудини зроблено круговий отвір діаметром d = 10 см для зливу води. Якщо отвір відкрити, то не вся вода виллється, частина її залишиться на дні. Оцініть масу цієї залишеної води, якщо дно посудини погано змочується водою. Діаметр посудини D = 50 см. Коефіцієнт поверхневого натягу води $\sigma = 0{,}07$ Н/м.

Розв'язок. Обмежимося випадком, коли товщина H шару води, що залишилася, набагато менше діаметра отвору d.

Проведемо дві вертикальні площини, які проходять через вісь симетрії отвору й утворюють між собою деякий кут φ. Розглянемо частину води, яка знаходиться між цими площинами і довільно проведеною вертикальною циліндричною поверхнею (рис. 1; вид зверху). Радіус R цієї поверхні виберемо таким, щоб відстань $R - d/2$ було набагато більше H (але зрозуміло, що менше $D/2$); тоді на цих відстанях поверхню води з хорошою точністю можна вважати горизонтальною.

Умова рівноваги цієї частини води означає рівність нулю суми всіх діючих на воду сил, а значить, і суми проекцій цих сил на вісь X. Що ж це за сили?

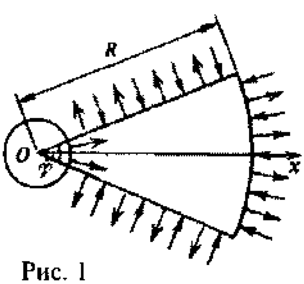


Рис. 1

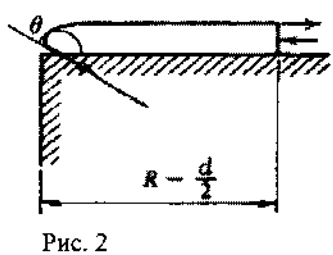


Рис. 2

На бічну циліндричну поверхню діють сили поверхневого натягу (червоні стрілки на рис. 1) і сили гідростатичного тиску (чорні стрілки). Їх проекції рівні відповідно

$$2\sigma R \sin(\varphi/2) \quad \text{і} \quad -\rho g H^2 R \sin(\varphi/2).$$

Аналогічні сили діють і на радіальні бічні поверхні. Внесок від них дорівнює

$$-2\sigma(R-d/2)\sin(\varphi/2) \quad \text{і} \quad -\rho g H^2 (R-d/2)\sin(\varphi/2).$$

Тут ми знехтували зміною товщини шару води поблизу отвору в дні посудини (ця ділянка має довжину порядку H, а в нашому випадку $H << R-d/2$). Залишилося розглянути сили поверхневого натягу, які діють на воду в місці торкання води і дна посудини (біля отвору). На рис. 2 показаний випадок поганого змочування рідиною дна посудини, коли кут θ між дотичною до поверхні рідини і горизонтальною поверхнею дна (крайовий кут) більше $\pi/2$. Результуюча проекція сил поверхневого натягу, діючих у місці торкання (червона похила стрілка на рис.2), дорівнює

$$-\sigma d \sin(\varphi/2)\cos\theta.$$

Отже, умова рівноваги має вигляд

$$2\sigma R \sin(\varphi/2) - \rho g H^2 R \sin(\varphi/2) -$$
$$-2\sigma(R-d/2)\sin(\varphi/2) + \rho g H^2 (R-d/2)\sin(\varphi/2) - \sigma d \sin(\varphi/2)\cos\theta = 0.$$

Звідси отримуємо висоту шару води, що залишилася:

$$H = \sqrt{\frac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}}.$$

Проведемо верхню оцінку маси води, що залишилася. Максимальна глибина H_{max} буде при повному незмочуванні $(\theta = 180^0)$:

$$H_{max} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 5{,}3 \text{ мм}.$$

У цьому випадку максимальна маса води буде дорівнювати

$$m_{\max} = \rho \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} H_{max} \approx 1 \text{ кг}.$$

При повному незмочуванні оцінку товщини шару рідини, що залишилася, можна отримати й іншим способом – з умови рівності надлишкового тиску під опуклою поверхнею (зумовленого поверхневим натягом) гідростатичному тиску на глибині $H_{max}/2$:

$$\frac{2\sigma}{H_{max}} = \rho g \frac{H_{max}}{2}.$$

Знайдене звідси значення $H_{max} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 5{,}3$ мм повністю збігається з розрахунковим значенням, отриманим першим способом. (Це означає, до речі сказати, що наближення, покладені в основу обох способів розрахунку, рівнозначні.

4.20. Круглу пластинку діаметром $d = 40$ мм і товщиною $a = 0{,}5$ мм обережно поклали на поверхню води. Завдяки поверхневому натягу вона залишилася на плаву, причому в місці торкання верхньої площини пластинки з поверхнею води кут між ними виявився рівним 90^0 (рис. 1). Визначити густину матеріалу пластинки. Коефіцієнт поверхневого натягу води 0,078 Н/м .

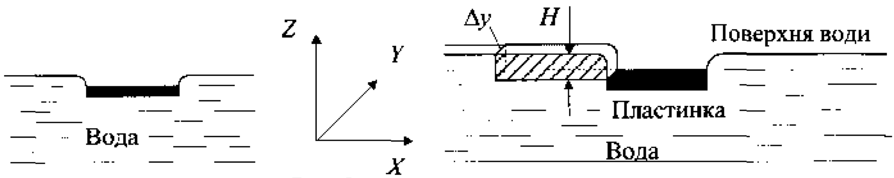


Рис. 1 Рис. 2

Розв'язок. Запишемо умову рівноваги пластинки в проекції на вертикальний напрямок:

$$mg - \Delta pS - F = 0,$$

де mg - сила тяжіння, Δp - різниця тисків на пластинку знизу і зверху, F – сила поверхневого натягу. Розглянемо кожну силу окремо.

Сила тяжіння пов'язана з шуканою густиною ρ матеріала пластинки співвідношенням

$$mg = \rho\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)ag.$$

Сила поверхневого натягу, діюча на пластинку з боку води, рівна

$$F = \sigma\pi d.$$

Різниця сил тиску на пластинку зумовлена падінням рівня води під пластинкою і дорівнює

$$\Delta pS = \rho_в g(H + a)(\pi d^2/4),$$

де $\rho_в$ - густина води, H - глибина занурення верхнього краю пластинки. Цю величину визначимо за умовою рівноваги виділеного на рис. 2 об'єму води шириною $\Delta y(\Delta y << d)$, записавши його в проекціях на горизонтальну вісь Y:

$$\sigma\Delta y = p_{ср}\Delta S = \rho_в g\left(\frac{H}{2}\right)H\Delta y,$$

звідки

$$H = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_в g}}.$$

Отже, перепишемо умову рівноваги пластинки у вигляді

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}ag - \rho_в g\left(\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_в g}} + a\right)\frac{\pi d^2}{4} - \sigma\pi d = 0$$

і знайдемо густину пластинки

$$\rho = \rho_в + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\sigma\rho_в}{g}} + \frac{4\sigma}{adg} \approx 10^4\,\frac{кг}{м^3}.$$

4.21. Поверхня планети має такий самий розмір, масу і склад атмосфери, як і Земля, була повністю покрита океаном з однаковою всюди глибиною 230 м і температурою $+10^0$С. У результаті внутрішніх процесів температура піднялась усюди до 100^0С, однак глибина океану залишилась незмінною. Враховуючи, що розміри твердої частини планети зовсім не змінились при нагріванні, встановіть середній коефіцієнт об'ємного розширення води в указаному діапазоні температури.

Розв'язок. При температурі + 100^0С тиск насиченої водяної пари дорівнює 1 атм $\approx 10^5$ Па - такий тиск створює стовп води висотою 10 м. При початковій $+10^0$С тиск насиченої пари в багато разів менше 1 атм. Враховуючи, що випарувана кількість води складає тиск 1 атм, тобто випарувався шар води, який займав до нагрівання «верхні» 10 метрів океану (товщина атмосфери в багато разів менша радіуса планети, тому при випаровуванні вага цієї кількості води не змінилась).

Отже, при нагріванні шар води, що залишився, товщиною 220м розширився і компенсував випаруваний об'єм. Коефіцієнт теплового розширення визначається відношенням збільшеного об'єму до початкового об'єму при збільшенні температури на один градус. Середній коефіцієнт теплового розширення води в указаному діапазоні температур буде дорівнювати

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V\Delta t} = \frac{10}{230 \cdot 90} = 5 \cdot 10^{-4}\ град^{-1}.$$

4.22. Крапля ртуті на чистій горизонтальній поверхні скла і крапля води на ворсистій поверхні травинки подібні одна одній за формою. Оцініть відношення мас цих крапель. Густина ртуті й води рівні $\rho_р = 13{,}6$ г/см^3 та $\rho_в = 1$ г/см^3, а їх коефіцієнти поверхневого натягу складають $\sigma_р = 0{,}46$ Н/м та $\sigma_в = 0{,}07$ Н/м відповідно.

Розв'язок. Уведемо який-небудь характерний розмір краплі, по якому можна повністю визначити її розміри, якщо відома форма краплі. Наприклад, виберемо в якості такого розміру висоту краплі *H*.

Форма краплі заданого об'єму *V*, який пропорційний H^3, визначається умовою мінімуму сумарної потенційної енергії краплі. Ця енергія складається з енергії E_1, пов'язаної з поверхневим натягом рідини, і енергії E_2, зумовленої полем тяжіння:

$$E_1 \sim \sigma H^2, \quad E_2 \sim \rho g H^4.$$

Одна зі складових сумарної енергії пропорційна відношенню *V*/*H*, а інша – добутку *VH*. Відношення E_1 / E_2 для крапель однакової форми повинне бути однаковим, оскільки саме ним і визначається форма краплі. Тому має виконуватися наступне співвідношення:

$$\frac{\sigma_в H_в^2}{\rho_в g H_в^4} = \frac{\sigma_p H_p^2}{\rho_p g H_p^4}.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{H_p^2}{H_в^2} = \frac{\sigma_p \rho_в}{\sigma_в \rho_p}.$$

Відношення мас краплі ртуті й краплі води, таким чином, дорівнює

$$\frac{M_p}{M_в} = \frac{\rho_p H_p^3}{\rho_в H_в^3} \approx \frac{\rho_p}{\rho_в}\left(\frac{\sigma_p \rho_в}{\sigma_в \rho_p}\right)^{3/2} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_в}\right)^{1/2}\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_в}\right)^{3/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{13{,}6}\right)^{1/2}\left(\frac{0{,}46}{0{,}07}\right)^{3/2} \approx 0{,}271 \cdot 16{,}85 \approx 4{,}6.$$

4.23. На горизонтальному столі лежить відкрита з двох кінців скляна трубка-капіляр з діаметром отвору менше 0,2 мм. Довжина трубки 1 м. На стіл пролили чорнило, і один з кінців трубки виявився в калюжі чорнила, капіляр починає втягувати в себе чорнило, і в той момент коли заповнилася 1/10 частина довжини трубки, швидкість руху межі (чорнило - повітря) в капілярі склала 1 см / с. Через який час трубка виявиться повністю заповненою чорнилом?

Розв'язок. Рух рідини в капілярі з малим діаметром D хоча і відбувається зі змінною швидкістю, але маса рідини, що рухається, настільки мала, що суму сил, що діють на рідину всередині капіляра, можна вважати рівною нулю. Сила поверхневого натягу, що втягує чорнило в капіляр, постійна:

$$F_1 \approx \pi D \sigma,$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу. Сила опору при ламінарній течії рідини в трубі пропорційна добутку середньої швидкості течії і довжини ділянки, заповнені рідиною:

$$F_2 \approx \eta \upsilon \pi x,$$

де η - в'язкість рідини. Виходить, що швидкість течії, тобто швидкість заповнення капіляра, обернено пропорційна довжині заповненої чорнилом ділянки трубки, або що величина, зворотна швидкості, пропорційна довжині заповненої ділянки:

$$\frac{1}{\upsilon} = kx,$$

де k - коефіцієнт пропорційності за умовою задачі дорівнює $k = 0{,}1\,\text{с/см}^2$. Час потрібний для заповнення чорнилом чергової ділянки довжиною Δx, так само

$$\Delta t = k\Delta x.$$

Якщо підсумувати малі величини ліворуч і праворуч від знака рівності від початкового моменту до моменту, коли трубка виявиться заповненою повністю, то отримаємо час заповнення трубки:

$$T=\frac{k}{2}\left(L^2-\left(\frac{L}{10}\right)^2\right)=\frac{0{,}1}{2}\left(10^4-10^2\right)=495\,\text{с}.$$

4.3. Властивості твердих тіл

4.24. Два стрижня з різних металів з коефіцієнтами лінійного розширення β_1 і β_2 при температурі 0^0С мають близьки довжини l_1 і l_2 і поперечні перерізи S_1 і S_2. *При яких температурах стрижні матимуть однакові:* а) *довжини;* б) *поперечний* переріз; в) об'єми?

Розв'язок. Оскільки довжини, площі перетинів і, отже, об'єми стрижнів при 0 °С розрізняються мало, можна вважати, що шукані температури такі, що $\beta t \ll 1$. У цих умовах коефіцієнт об'ємного розширення $\alpha \approx 3\beta$, а коефіцієнт розширення площі $\gamma \approx 2\beta$.

Температура t_1, при якій стрижні матимуть однакову довжину, можна знайти з рівняння

$$l_1(1+\beta_1 t_1)=l_2(1+\beta_2 t_2).$$

Відповідно, для температури t_2, при якій однакові площі поперечних перерізів, отримаємо рівняння

$$S_1(1+2\beta_1 t_2)=S_2(1+2\beta_1 t_2).$$

А для температури t_3 (однакові об'єми) – рівняння

$$V_1(1+3\beta_1 t_3)=V_2(1+3\beta_2 t_3).$$

Таким чином,

$$t_1=\frac{l_1-l_2}{\beta_2 l_2-\beta_1 l_1},$$

$$t_2=\frac{S_1-S_2}{2(\beta_2 S_2-\beta_1 S_1)},$$

$$t_3=\frac{V_1-V_2}{3(\beta_2 V_2-\beta_1 V_1)}.$$

4.25. У морозну осінню ніч на спокійній поверхні озера починає з'являтися крига і за 10 годин досягає товщини 10 см. Якої товщини досягне крига, якщо така температура протримається без змін протягом 1000 годин? Вважайте теплопровідність криги набагато більшою, ніж теплопровідність води, озеро дуже глибоке.

Розв'язок. Оскільки вода не переміщується, все тепло, яке виділяється при замерзанні криги, розсіюється тільки в повітря. Потік тепла прямо пропорційний різниці температур ΔT води та повітря і обернено пропорційний товщині x криги в кожний момент часу. Тому для зміни на Δx товщини криги за час Δt можна записати

$$\Delta x \sim \frac{\Delta T}{x}\Delta t,$$

або, враховуючи, що $\Delta T = const$,

$$x\Delta x \sim \Delta t .$$

Звідки отримуємо

$$x^2 \sim t \text{ та } x \sim k\sqrt{t} .$$

Коефіцієнт $k = \dfrac{x_{10}}{\sqrt{t_{10}}} = \dfrac{0{,}1\text{м}}{\sqrt{10\text{годин}}}$.

Через 1000 годин крига досягне товщини

$$x_{1000} = \frac{0{,}1}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{1000} = 1\text{м} .$$

4.26. Теплопровідність дерева вздовж волокон у 2 рази більше, ніж впоперек. Два довгих тонких циліндри однакових розмірів зроблені з такого дерева; вісь одного з них спрямована вздовж волокон, вісь іншого становить з напрямком волокон кут 30°. Бічні поверхні циліндрів теплоізолюють і створюють однакові різниці температур між торцями циліндрів. У скільки разів відрізняються теплові потоки у цих циліндрах?

Розв'язок. Тепловий потік Q через циліндр пропорційний різниці температур $(T_2 - T_1)$, що припадає на одиницю довжини L уздовж напрямку поширення тепла, і площі S поперечного перерізу. Позначивши коефіцієнт пропорційності K (коефіцієнт теплопровідності), отримаємо тепловий потік для першого випадку:

$$Q_1 = \frac{KS(T_2 - T_1)}{L} .$$

У другому випадку усе складніше. Будемо вважати, що повний тепловий потік складається з потоків тепла, які поширюються вздовж волокон (під кутом α до осі циліндру) і перпендикулярно цим волокнам. Ми могли б вибрати напрямки й інакше, але саме вздовж цих напрямків ми знаємо коефіцієнти теплопровідності. Для потоку вздовж волокон перепад температур на одиницю довжини виходить менше, ніж у першому випадку, – він дорівнює $\dfrac{(T_2 - T_1)\cos\alpha}{L}$. Врахуємо і зміну " поперечної " площі – для цього напряму вийде $S\cos\alpha$ Для потоку тепла в поперечному напрямку все аналогічно, але замість кута α треба взяти (90° - α) і вважати вдвічі меншим. Тоді повний потік тепла у другому випадку буде

$$Q_2 = \frac{KS(T_2 - T_1)\cos^2\alpha}{L} + \frac{0{,}5KS(T_2 - T_1)\sin^2\alpha}{L} .$$

Відношення теплових потоків становитиме

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{8}{7} \approx 1{,}14 .$$

4.27. При низьких температурах молярна теплоємність твердих речовин при постійному тиску залежить від абсолютної температури T за законом

$C_T = C_{T_0}\left(T/T_0\right)^3$. Один моль (40 г) твердого аргону при температурі 8 К привели в тепловий контакт з двома кілограмами твердого аргону при температурі 1 К і все разом теплоізольовали. Якою буде температура речовини, коли встановиться теплова рівновага?

Розв'язок. За яких низьких температурах (<10 К) зовнішній тиск, тобто тиск насиченої пари цієї самої речовини, настільки малий, що роботою, пов'язаною з тепловим розширенням речовини, можна знехтувати. Запас внутрішньої енергії ν молей речовини визначається підсумовуванням від нульової температури до кінцевої температури:

$$\int \nu C_{T_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^3 dT = \nu C_{T_0} \cdot \frac{1}{4} T\left(\frac{T}{T_0}\right)^3 = \nu T^4 \cdot \text{const}.$$

Після встановлення теплової рівноваги сумарна внутрішня енергія залишиться такою ж, і вся речовина буде мати однакову температуру. Звідси слідує, що

$$\nu_1 T_1^4 \cdot \text{const} + \nu_2 T_2^4 \cdot \text{const} = (\nu_1 + \nu_2) T_3^4 \cdot \text{const}.$$

Зауважимо, що 40 г – це 1 моль аргону, а 2 кг – це 50 молей. тоді отримаємо

$$T_3 = \left(\frac{\nu_1 T_1^4 + \nu_2 T_2^4}{\nu_1 + \nu_2}\right) \approx 3\text{К}.$$

4.28. Для зберігання маси m кисню треба виготовити сферичний балон, який не розриватиметься при температурі T. Визначити масу балона M, якщо його виготовляють з матеріалу, густина якого ρ. При випробуванні цього матеріалу на міцність з нього виготовили циліндр перерізом S, який розривався, коли, розривне навантаження досягало значення Q.

Розв'язок. Маса балона

$$M = 4\pi r^2 \delta\rho,$$

де δ — товщина стінок.

За законом Гука

$$p\pi r^2 = \sigma \cdot 2\pi r\delta,$$

де

$$\sigma = \frac{Q}{S};\ p = \frac{mRT}{M\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

З останніх двох рівнянь

$$4\pi r^2\sigma = \frac{3mRTS}{2MQ}.$$

Тоді маса балона

$$M = \frac{3mRTS}{2MQ}\rho.$$

Література

1. Гельфгат І. М. Фізика–10 : збірник задач / І. М. Гельфгат, І. Ю. Ненашев. – Харків : Гімназія, 2001. – 112 с.
2. Гончаренко С. У. Олімпіади з фізики. Завдання. Відповіді : [навч.-метод. видання] / С. У. Гончаренко. – Харків : Вид. група «Основа», 2008. – 400 с.
3. Гайдучок Г. М. Довідник з фізики для учнів / Г. М. Гайдучок, В. А. Лободюк, К. П. Рябошапка. – Київ : Радянська школа, 1981. – 112 с.
4. Друга соросівська олімпіада з фізики / [упоряд.: Т. М. Байдик, О. В. Лукович, В. В. Лукович]. – Київ : Фонд «Відродження», 1996. – 40 с.
5. Задачи московских физических олимпиад / А. И. Буздин, В. А. Ильин, И. В. Кривченков [и др.] ; под ред. С. С. Кротова. – Москва : Наука, 1988. – 192 с. – (Б-ка «Квант». Вып. 60).
6. Збірник задач республіканських фізичних олімпіад / [С. У. Гончаренко, М. Е. Кицай, Е. Л. Корженевич, Е. В. Коршак]. – Київ : Вища школа, 1976. – 192 с.
7. Збірник різнорівневих завдань з фізики / [упоряд.: В. Л. Головань, В. Д. Карасик, Ю. А. Костенко]. – Дніпропетровськ : ТОВ «Альфа»–НМОПІ, 1997. – 64 с.
8. Кремінський Б. Г. Задачі міжнародних фізичних олімпіад 1987–1999 рр. : [навчальне видання]. Вип. 3 / Б. Г. Кремінський, І. П. Пінкевич. – Тернопіль : Навчальна книга–Богдан, 2000. – 152 с.
9. Научно-популярний физико-математический журнал «Квант» : 1970–2017 [Електронний ресурс]. – Москва : Наука. – Режим доступа: http://kvant.mccme.ru/editor.htm
10. Обласні олімпіади з фізики. Задачі та розв'язки / В. Алексєйчук, О. Гальчинський, Г. Шопа. – Львів : СП «Євросвіт», 2000. – 168 с.
11. Пантюхов Г. И. Сборник задач по физике : [учеб. пособие] / Г. И. Пантюхов, В. В. Светозаров, А. И. Руденко. – Москва : Издание МИФИ, 1974. – 209 с.
12. Перша соросівська олімпіада з фізики / [упоряд.: Т. М. Байдик, В. О. Бардадим]. – Київ : Фонд «Відродження», 1995. – 28 с.
13. Пискунов С. Физика – быстро и без забот : справочное пособие / С. Пискунов. – Харків : Эврика, 2005. – 224 с.
14. П'ята соросівська олімпіада з фізики / [упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко, П. Р. Аракелян]. – Київ : ЗАТ «ВІПОЛ», 1999. – 32 с.
15. Сборник разноуровневых заданий для государственной итоговой аттестации по физике / И. М. Гельфгат, В. Я. Колебошин, Н. Г. Любченко [и др.] ; под ред. И. М. Гельфгат. – [3-е изд.]. – Харьков : Гимназия, 2003. – 80 с.
16. Сьома соросівська олімпіада з фізики / [упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко, П. Р. Аракелян]. – Київ : ЗАТ «ВІПОЛ», 2001. – 43 с.
17. Третя соросівська олімпіада з фізики / [упоряд.: З. В. Бурінська, С. Л. Парновський]. – Київ : Фонд «Відродження», 1997. – 44 с.
18. Четверта соросівська олімпіада з фізики / упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко [та ін.]. – Київ : Фонд «Відродження», 1998. – 38 с.
19. Шапиро А. И. Оригинальные методы решения физических задач : пособие для учителя / А. И. Шапиро, В. А. Бодик. – Київ : Магистр-S, 1996. – 159 с.
20. Шоста соросівська олімпіада з фізики / [упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко, П. Р. Аракелян]. – Київ : ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. – 32 с.

ДОВІДКОВІ ДАНІ

Основні фізичні константи

Назва константи	Позначення	Числове значення
Гравітаційна стала	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/ кг^2
Середній радіус Землі	R	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
Маса Землі	M	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Середня відстань від Землі до Сонця	l	$1{,}5\cdot10^{11}$ м
Число Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Об'єм одного моля ідеального газу за нормальних умов	V_μ	$22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/ моль
Нормальна температура	T_0	273 К
Нормальний тиск	p_0	$1{,}013\cdot10^{5}$ Па
Елементарний заряд	$e,\ q$	$-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Електрична стала	k	$9\cdot10^{9}$ Н·м^2/Кл^2
Стала Фарадея	F	$9{,}65\cdot10^{4}$ кг/моль
Маса спокою електрона	m_e	$9{,}1\cdot10^{-31}$кг
Питомий заряд електрона	e/m_e	$1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Маса спокою протона	m_p	$1{,}673\cdot10^{-27}$ кг
Маса спокою нейтрона	m_n	$1{,}675\cdot10^{-27}$ кг
Маса спокою α-частинки	m_α	$6{,}644\cdot10^{-27}$ кг
Електрична стала	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$Кл^2 /Н·м^2
Магнітна стала	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м
Швидкість світла у вакуумі	c	$3\cdot10^{8}$ м/с
Швидкість звуку в повітрі за нормальних умов	υ	332 м/с
Універсальна (молярна] газова стала	R	8,314Дж/(моль·К)
Стала Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{23}$ Дж/К
Стала Планка	h	$6{,}6261\cdot10^{-34}$Дж·с
Стала Рідберга	R	$1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$