МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УРСР

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ВИПУСК III

«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
КИЇВ — 1958

В. Г. ТАРНОПОЛЬСЬКИЙ,
ст. викладач

ПРО ОДИН КЛАС ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Ця стаття присвячена побудові спектрального розкладу діагонального оператора в просторі послідовностей подібно до того, як в одній статті І. П. Натансона [1] розв'язане відповідне питання для простору Гільберта.

§ 1. Почнемо з деяких загальних міркувань. Будемо розглядати лінійний простір (s) всіх послідовностей дійсних чисел, в якому сума елементів і добуток елемента на дійсне число визначені звичайним способом, а збіжність послідовності елементів визначена таким способом: послідовність елементів

$$x^{(n)}\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$$

збігається до елемента

$$x\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\right),$$

коли $x_k^{(n)} \to x_k$ для всіх k при $n \to \infty$.

Відомо, що кожний лінійний функціонал fx в просторі (s) має вигляд

$$fx = \sum_{k=1}^{N} f_k x_k. \tag{1}$$

Це значить, що кожний лінійний функціонал f, заданий в просторі (s), може бути ототожнений з деякою послідовністю

$$f(f_1, f_2, \ldots, f_N, 0, 0, \ldots)$$

дійсних чисел таких, що $f_k = 0$ для $k > N$, і, навпаки, кожна така послідовність дійсних чисел породжує лінійний функціонал в (s).

Розглянемо далі лінійні оператори, що відображують (s) в (s). Зрозуміло, що кожному такому лінійному оператору A

взаємно однозначно відповідає послідовність лінійних функціоналів. Таким чином, кожний лінійний оператор A, що відображує (s) в (s), можна ототожнити з нескінченною матрицею $\| a_{ik} \|$ дійсних чисел, в якої кожному i відповідає номер N_i такий, що $a_{ik}=0$, коли $k > N_i$, і, навпаки, кожна така нескінченна матриця породжує лінійний оператор, що відображує (s) в (s). Наприклад, діагональна матриця, тобто така матриця, що $a_{ik}=0$ при $i \neq k$, породжує лінійний оператор. Будемо цей оператор називати діагональним оператором. Позначимо для діагональної матриці $a_{kk}=\sigma_k$. Очевидно, діагональний оператор визначається послідовністю $\{\sigma_k\}$.

§ 2. Нехай A — діагональний оператор, породжений послідовністю $\{\sigma_k\}$.

Теорема 1. Спектр оператора A збігається з послідовністю $\{\sigma_k\}$ і складається лише з характеристичних чисел.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$Ax - \lambda x = y, \tag{2}$$

де $x, y \in (s)$.

Коли $\lambda \neq \sigma_k$ ні при одному k, то рівняння (2) при кожному y має один і тільки один розв'язок. Дійсно, нехай $y = y(y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ і $x = x(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$.

Тоді з (2) випливає

$$\sigma_k x_k - \lambda x_k = y_k, \tag{3}$$

звідки

$$x_k = \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \cdot y_k. \tag{4}$$

З другого боку

$$x = x\left\{\frac{1}{\sigma_k - \lambda} \cdot y_k\right\} \tag{5}$$

дійсно задовольняє рівнянню (2) і, таким чином, існування і єдиність розв'язку доведені. Зокрема, однорідне рівняння

$$Ax = \lambda x \tag{6}$$

має в розглянутому випадку лише нульовий розв'язок. Діагональний оператор R_λ, що визначається послідовністю $\left\{\frac{1}{\sigma_k - \lambda}\right\}$, є, очевидно, резольвента оператора A, бо легко бачити, що

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}. \tag{7}$$

Таким чином, числа $\lambda \neq \sigma_k$ є регулярні числа оператора A.

Коли ж при якому-небудь $k \lambda = \sigma_k$, то рівняння (6) має ненульовий розв'язок (наприклад, орт $e^{(k)}$). Навпаки, коли рівняння (6) має ненульовий розв'язок, то при деякому k $\sigma_k = \lambda$, бо лише при цій умові можлива рівність

$$\sigma_k x_k = \lambda x_k \text{ при } x_k \neq 0. \tag{8}$$

Таким чином, σ_k є характеристичні числа оператора A. Теорема доведена.

§ 3. Нехай $f(t)$ дійсна функція, задана для всіх дійсних значень аргументу. Позначимо $f(A)$ — діагональний оператор, породжений послідовністю $\{f(\sigma_k)\}$.

Розглянемо функцію

$$\omega_\lambda(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t < \lambda; \\ 0 \text{ при } t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Легко бачити, що різниця

$$\omega_\mu(t) - \omega_\lambda(t)$$

при $\mu > \lambda$ має таку властивість:

$$\omega_\mu(t) - \omega_\lambda(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } \lambda \leqslant t < \mu; \\ 0 \text{ при } t < \lambda \text{ або } t \geqslant \mu. \end{cases}$$

Оператор $\omega_\lambda = \omega_\lambda(A)$ будемо називати спектральною функцією оператора A.

Очевидно,

$$\omega_\lambda x = \{\omega_\lambda(\sigma_k) x_k\}$$

одержується з x збереженням тих x_k, для яких $\sigma_k < \lambda$, і заміною нулями всіх інших x_k.

Легко бачити, що

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \omega_\lambda = \Theta, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \omega_\lambda = I.$$

Коли послідовність $\{\sigma_k\}$ обмежена і $m \leqslant \sigma_k < M$, то

$$\omega_\lambda = \begin{cases} \Theta \text{ при } \lambda \leqslant m; \\ I \text{ при } \lambda \geqslant M. \end{cases}$$

Теорема 2. Оператор ω_λ неперервний зліва по λ.

Доведення. Нехай $\lambda_n \to \lambda - 0$. Тоді для будь-якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що для всіх $n > N$

$$\lambda - \varepsilon < \lambda_n \leqslant \lambda. \tag{9}$$

Нехай тепер

$$\omega_\lambda x = \{\omega_\lambda(\sigma_k) x_k\} \text{ і } \omega_{\lambda_n} x = \{\omega_{\lambda_n}(\sigma_k) x_k\}.$$

Нехай

$$y_k = \omega_\lambda(\sigma_k)\, x_k \text{ і } y_k^{(n)} = \omega_{\lambda_n}(\sigma_k)\, x_k.$$

Розглянемо який-небудь номер k. Коли $\sigma_k \geqslant \lambda$, то $\sigma_k \geqslant \lambda_n$ і тому

$$\omega_\lambda(\sigma_k) = \omega_{\lambda_n}(\sigma_k) = 0. \tag{10}$$

Коли ж $\sigma_k < \lambda$, то, прийнявши $\varepsilon = \lambda - \sigma_k$, одержимо $\lambda - \varepsilon = \sigma_k$. Тому, згідно (9), існує такий номер N, що

$$\sigma_k < \lambda_n \leqslant \lambda \tag{11}$$

при всіх $n > N$. Звідси, при всіх $n > N$

$$\omega_\lambda(\sigma_k) = \omega_{\lambda_n}(\sigma_k) = 1. \tag{12}$$

В обох випадках для всіх $n > N$ $y_k^{(n)} = y_k$. Тому $\omega_{\lambda_n} x \to \omega_\lambda x$ для будь якого x, тобто $\omega_{\lambda_n} \to \omega_\lambda$, що і потрібно було довести.

Теорема 3. Оператор ω_λ розривний справа по λ в точках $\lambda = \sigma_k$.

Доведення. Нехай $\lambda_n \to \sigma_k + 0$ і $\lambda_n \neq \sigma_k$ (скрізь в доведенні теореми k зафіксовано одне і те ж). Тоді $\sigma_k < \lambda_n$ для всіх n. Одержимо

$$\left.\begin{aligned} y_k &= \omega_{\sigma_k}(\sigma_k)\, x_k = 0; \\ y_k^{(n)} &= \omega_{\lambda_n}(\sigma_k)\, x_k = x_k. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Звідси, $\lim\limits_{n \to \infty} y_k^{(n)} \neq y_k$. Таким чином, $\omega_{\lambda_n} x$ не прямує до $\omega_{\sigma_k} x$, тобто ω_{λ_n} не прямує до ω_{σ_k}, що і потрібно було довести.

Теорема 4. Оператор ω_λ неперервний справа по λ в точках $\lambda \neq \sigma_k$

Доведення. Нехай $\lambda_n \to \lambda + 0$, $\lambda \neq \sigma_k$. Тоді для довільного наперед заданого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що для всіх $n > N$:

$$\lambda \leqslant \lambda_n < \lambda + \varepsilon. \tag{14}$$

Нехай

$$y_k = \omega_\lambda(\sigma_k)\, x_k \quad \text{і} \quad y_k^{(n)} = \omega_{\lambda_n}(\sigma_k)\, x_k.$$

Розглянемо який-небудь номер k. Коли $\sigma_k < \lambda$, то $\sigma_k < \lambda_n$ і тому

$$\omega_\lambda(\sigma_k) = \omega_{\lambda_n}(\sigma_k) = 1. \tag{15}$$

Коли ж $\sigma_k > \lambda$, то, прийнявши $\varepsilon = \sigma_k - \lambda$, одержимо $\lambda + \varepsilon = \sigma_k$. Тому, згідно (14), існує такий номер N, що

$$\lambda \leqslant \lambda_n < \sigma_k \tag{16}$$

при всіх $n > N$. Звідси при всіх $n > N$

$$\omega_\lambda(\sigma_k) = \omega_{\lambda_n}(\sigma_k) = 0. \tag{17}$$

В обох випадках для всіх $n > N$

$$y_k^{(n)} = y_k.$$

Тому $\omega_{\lambda_n} x \to \omega_\lambda x$ для довільного x, тобто $\omega_{\lambda_n} \to \omega_\lambda$, що і потрібно було довести.

Наслідок. Оператор ω_λ неперервний по λ в усіх точках $\lambda \neq \sigma_k$ і розривний в точках $\lambda = \sigma_k$.

Іншими словами, множина регулярних чисел діагонального оператора A є множина точок неперервності його спектральної функції ω_λ, а спектр діагонального оператора A є множина точок розриву його спектральної функції ω_λ.

§ 4. Нехай $f(t)$ функція, рівномірно неперервна на всій числовій осі. Розіб'ємо числову вісь на частини точками

$$\ldots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots,$$

в кожному інтервалі (t_i, t_{i+1}) виберемо по точці μ_i і розглянемо оператор

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_i)(\omega_{t_{i+1}} - \omega_{t_i}). \tag{18}$$

Нехай $Sx = \{y_k\}$. Тоді

$$y_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_i)\,[\omega_{t_{i+1}}(\sigma_k) - \omega_{t_i}(\sigma_k)]\,x_k. \tag{19}$$

Коли $t_{i_0} \leqslant \sigma_k < t_{i_0+1}$, то різниця в квадратних дужках дорівнює нулю при $i \neq i_0$ і дорівнює одиниці при $i = i_0$. Тому

$$y_k = f(\mu_{i_0})\,x_k. \tag{20}$$

Таким чином,

$$\left| y_k - f(\sigma_k)\,x_k \right| = \left| f(\mu_{i_0}) - f(\sigma_k) \right| \cdot \left| x_k \right|. \tag{21}$$

Нехай δ — довжина найбільшого з інтервалів (t_i, t_{i+1}), а $\varepsilon(\delta)$—модуль неперервності функції $f(t)$. Тоді

$$|y_k - f(\sigma_k)\,x_k| < \varepsilon(\delta) \cdot |x_k|. \tag{22}$$

Звідси $Sx \to f(A)x$ при $\delta \to 0$ для довільного x. Іншими словами, при $\delta \to 0$ $S \to f(A)$. Але S є сума Рімана-Стілтьєса. Тому

$$f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,d\omega_t. \tag{23}$$

Зокрема, при $f(t) \equiv t$ одержимо

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t d\omega_t. \tag{24}$$

Нехай діагональний оператор A має замкнутий спектр. Тоді множина регулярних чисел відкрита і може бути представлена у вигляді об'єднання інтервалів, що не мають спільних точок. Очевидно, кінці цих інтервалів є точками спектра. Нехай (σ_p, σ_q) один з цих інтервалів. Нехай μ і ν два числа з цього інтервалу. Тоді $\omega_\mu = \omega_\nu$. Дійсно, нехай $x(x_k) \in (s)$ і

$$y_k = \omega_\mu(\sigma_k) x_k, \quad z_k = \omega_\nu(\sigma_k) x_k.$$

Напівсегмент $[\mu, \nu)$ вільний від точок σ_k. Тому

$$\omega_\mu(\sigma_k) = \omega_\nu(\sigma_k). \tag{25}$$

Звідси $y_k = z_k$ для всіх k. Таким чином, $\omega_\mu x = \omega_\nu x$. Внаслідок довільності x $\omega_\mu = \omega_\nu$.

З доведеного легко випливає, що коли діагональний оператор має замкнутий спектр, то формули (23) і (24) набувають вигляду:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\sigma_k) \omega_{\sigma_k}; \tag{26}$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \omega_{\sigma_k}. \tag{27}$$

Коли функція $f(t)$ рівномірно неперервна на множині $\{Z - (\alpha, \beta)\}$, де Z — множина всіх дійсних чисел, а інтервал (α, β) не містить в собі точок спектра діагонального оператора A, то і в цьому випадку вірна формула (23).

Дійсно, функцію $f(t)$ в цьому випадку можна представити у вигляді

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), \tag{28}$$

де

$$\left.\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} f(t) \text{ при } t < \alpha, \\ 0 \text{ при } t > \alpha; \end{cases} \\ f_2(t) &= \begin{cases} f(t) \text{ при } t \geqslant \beta, \\ 0 \text{ при } t < \beta; \end{cases} \\ f_3(t) &= \begin{cases} f(t) \text{ при } \alpha < t < \beta, \\ 0 \text{ при } t \leqslant \alpha \text{ або } t \geqslant \beta. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Все, що було сказано відносно функції, рівномірно неперервної на $(-\infty, +\infty)$, справедливо і для функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$. Тому

$$\left.\begin{aligned} f_1(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, d\omega_t; \\ f_2(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, d\omega_t. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Крім того,

$$f_3(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\, d\omega_t = \Theta. \tag{31}$$

Тоді

$$f(A) = f_1(A) + f_2(A) + f_3(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, d\omega_t + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, d\omega_t +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\, d\omega_t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\omega_t. \tag{32}$$

§ 5. Нехай

$$r(t) = \frac{1}{t-\lambda}, \tag{33}$$

де λ не належить замиканню спектра діагонального оператора A. Тоді існує інтервал (α, β), що містить в собі точку λ і не містить точок спектра оператора A. Поза цим інтервалом функція $r(t)$ рівномірно неперервна. Тому, виходячи з попереднього,

$$r(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_t}{t-\lambda}. \tag{34}$$

Але

$$r(A) = (A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda. \tag{35}$$

Таким чином,

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_t}{t-\lambda}. \tag{36}$$

Зокрема, коли спектр діагонального оператора A замкнутий, то формула (36) має місце для довільного регулярного значення λ. Але в цьому випадку спектральна функція ω_t оператора A кусочно-постійна і тому

$$R_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{\sigma_k}}{\sigma_k - \lambda}. \tag{37}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон, Об одном классе линейных операторов в пространстве Гильберта. Учёные записки ЛГУ, серия математических наук, вип. 15, № 96, 1948.

2. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1951.