МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УРСР

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ВИПУСК II

«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
Київ — 1957

НАУКОВІ ЗАПИСКИ
КРИВОРІЗЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
1957 р. Випуск II

ТАРНОПОЛЬСЬКИЙ В. Г.

КРИТЕРІЙ КОМПАКТНОСТІ МНОЖИНИ В ЛІНІЙНОМУ ТОПОЛОГІЧНОМУ ПРОСТОРІ

Метою цієї статті є узагальнення теореми Хаусдорфа[1] про критерій компактності множини в метричному просторі на випадок лінійного топологічного простору. В дальшому буде розглядатися лінійний топологічний простір T, в якому виконується перша аксіома зчисленності.

Нехай $\{U_\nu\}$ повна система оточень точки θ.[2] Не обмежуючи загальності, можна кожне оточення U_ν вважати симетричним відносно нуля, тобто таким, що містить в собі разом із кожною своєю точкою x також і точку $-x$. Дійсно, коли б це не мало місця, можна було б розглядати $U_\nu \cap (-U_\nu)$ замість U_ν, де через $(-U_\nu)$ позначена множина точок $-x$ для всіх $x \in U_\nu$. Повну систему симетричних оточень ми будемо називати нормальною системою оточень.

Означення. Множина L_ν називається U_ν-сіткою для множини $D \subset T$, коли $L_\nu \subset D$ і $\bigcup\limits_{x \in L_\nu} (x + U_\nu) \supset D$, тобто множини $(x + U_\nu)$ для всіх $x \in L_\nu$ покривають у сукупності множину D.

Тут через $(x + U_\nu)$ позначена множина точок виду $x + \xi$ для всіх $\xi \in U_\nu$. В дальшому під $U + V$ треба розуміти пряму суму оточень.

Відомо, що послідовність $\{x_n\}$ точок лінійного топологічного простору називається фундаментальною, коли для будь-якого оточення нуля $U(\theta)$ існує такий номер N, що для всіх номерів $m, n > N$:

$$x_m - x_n \in U(\theta). \tag{1}$$

Лінійний топологічний простір T, в якому кожна фундаментальна послідовність має границю, називається повним.

Теорема. Для компактності множини D лінійного топологічного простору T, в якому виконується перша аксіома зчисленності, необхідно, а у випадку повноти простору T — досить, щоб для будь-якого оточення $U_\nu(\theta)$ з нормальної си-

[1] Див., наприклад, [1].
[2] Див. [3].

стеми оточень нуля можна було побудувати скінченну U_ν- сітку для D.

Доведення.

Необхідність. Припустимо, що D — компактна. Нехай x_1 будь-яка точка з D. Коли точки $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ вже вибрані, то за x_k візьмемо таку точку з D, що

$$x_k \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{k-1} (x_i + U_\nu). \tag{2}$$

Внаслідок симетричності оточень U_ν точки

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

такі, що при $i \neq j$

$$x_i \overline{\in} (x_j + U_\nu). \tag{3}$$

Є дві можливості.

Або процес побудови точок після якогось k-го кроку обірветься, тобто для будь-якого $x \in D$ буде виконане одне з співвідношень:

$$x \in (x_i + U_\nu), \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4}$$

В цьому випадку

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{k} (x_i + U_\nu) \tag{5}$$

і, таким чином, $L_\nu = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ є скінченна U_ν-сітка для D.

Або вказаний вище процес побудови точок x_i можна продовжувати необмежено. Доведемо, що останнє припущення приводить до протиріччя. Дійсно, в цьому випадку ми одержали б нескінченну послідовність точок $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ таку, що

$$x_i \overline{\in} (x_j + U_\nu) \tag{6}$$

при $i \neq j$. Тоді

$$x_i - x_j \overline{\in} U_\nu(\theta) \tag{7}$$

при будь-яких $i \neq j$. Це значить, що кожна підпослідовність послідовності $\{x_k\}$ не фундаментальна і, таким чином, розбіжна, що протирічить компактності D.

Таким чином, процес побудови точок x_i обривається на якомусь k-му кроці і, значить, скінченна U_ν-сітка для D існує.

Достатність. Нехай лінійний топологічний простір T —

повний і $\{U_\nu\}$ — нормальна система оточень нуля в T. Нехай для будь-якого U_ν існує скінченна U_ν-сітка

$$L_\nu = \left\{ x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_{k_\nu}^{(\nu)} \right\} \tag{8}$$

для множини $D \subset T$.

Візьмемо довільну нескінченну множину $I \subset D$. Кожна точка з I попадає в одне з оточень:

$$(x_i^{(1)} + U_1), \quad i = 1, 2, \ldots, k_1. \tag{9}$$

Внаслідок того, що оточень скінченне число, принаймні в одному з них виявиться нескінченна множина точок з I. Позначимо цю підмножину множини I через I_1. Кожна точка з I_1 попадає в одне з оточень

$$(x_i^{(2)} + U_2), \quad i = 1, 2, \ldots, k_2. \tag{10}$$

Внаслідок того, що цих оточень скінченне число, принаймні в одному з них виявиться нескінченна множина точок з I_1. Позначимо цю підмножину множини I_1 через I_2.

Продовжуючи таким чином далі, ми одержимо послідовність нескінченних підмножин множини I, з яких кожна наступна належить попередній:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_\nu \supset \ldots, \tag{11}$$

причому для кожного ν

$$I_\nu \subset (x_{i(\nu)}^{(\nu)} + U_\nu). \tag{12}$$

Візьмемо тепер елемент $a_1 \in I_1$, елемент $a_2 \in I_2$, відмінний від a_1, елемент $a_3 \in I_3$, відмінний від a_1 і a_2 і т. д. Одержимо послідовність точок з I:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, \tag{13}$$

причому

$$a_n \in I_\nu \quad \text{при } n \geqslant \nu. \tag{14}$$

Послідовність (13) фундаментальна. Дійсно, нехай $U(\theta)$ яке-небудь оточення нуля в T. Існує, внаслідок неперервності додавання, таке оточення U_ν, що

$$(U_\nu + U_\nu) \subset U(\theta). \tag{15}$$

Внаслідок (14) $a_n, a_m \in U_\nu$ при $n, m \geqslant \nu$ і внаслідок (12)

$$a_n, a_m \in (x_{i(\nu)}^{(\nu)} + U_\nu) \tag{16}$$

для всіх $n, m \geqslant \nu$. Але тоді існують такі точки

$$\xi_n, \xi_m \in U_\nu(\theta),$$

що
$$a_n = x^{(\nu)}_{i(\nu)} + \xi_n, \quad a_m = x^{(\nu)}_{i(\nu)} + \xi_m. \tag{17}$$

Тому $a_n - a_m = \xi_n - \xi_m$. Але внаслідок (15) і внаслідок симетричності оточень $U_\nu(\theta)$

$$\xi_n - \xi_m \in U(\theta). \tag{18}$$

Тому

$$a_n - a_m \in U(\theta) \tag{19}$$

для всіх $n, m \geqslant \nu$, що доводить фундаментальність послідовності (13). Простір T — повний, отже, послідовність (13) збіжна, тобто множина D компактна. Теорема доведена.

Покажемо, як вищенаведений критерій може застосовуватися при доведенні теорем.

Означення. Будемо називати простором M лінійний топологічний простір з першою аксіомою зчисленності, в якому кожна обмежена множина компактна.

Теорема. Коли в M існує обмежене оточення $W(\theta)$ нуля, то M — сепарабельний.

Доведення.

Розглянемо точку $x \in M$. Очевидно,

$$\frac{1}{\nu} \cdot x \to \theta \tag{20}$$

при $\nu \to \infty$. Тому знайдеться номер N такий, що для всіх $\nu > N$

$$\frac{1}{\nu} \cdot x \in W(\theta). \tag{21}$$

Тоді $x \in \nu \cdot W(\theta)$ (для всіх $\nu > N$) і тому

$$M = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot W. \tag{22}$$

Множини $\nu \cdot W$ — обмежені і тому компактні. За доведеною вище теоремою в множині $\nu \cdot W$ існує скінченна U_ν-сітка

$$L_\nu = \{x^{(\nu)}_1, x^{(\nu)}_2, \ldots, x^{(\nu)}_{k_\nu}\}. \tag{23}$$

Нехай $L = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$. Тоді L зчисленна і скрізь щільна в M. Дійсно, зчисленність L очевидна. Нехай $x_0 \in M$. Існує, внаслідок (21), такий номер N, що $x_0 \in \nu \cdot W$ для всіх $\nu > N$. Нехай $V(x_0)$ яке-небудь оточення точки x_0. Тоді існує такий номер $\nu > N$, що

$$(x_0 + U_\nu) \subset V. \tag{24}$$

Тому що в $\nu \in W$ існує U^ν-сітка L_ν, то знайдеться така точка $x_{i(\nu)}^{(\nu)} \subset L_\nu$, що

$$x_0 \in (x_{i(\nu)}^{(\nu)} + U_\nu). \tag{25}$$

Внаслідок симетричності оточення U_ν

$$x_{i(\nu)}^{(\nu)} \in (x_0 + U_\nu) \tag{26}$$

і тому, внаслідок (24),

$$x_{i(\nu)}^{(\nu)} \in V(x_0). \tag{27}$$

Таким чином, $L = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$ скрізь щільна в M і, отже, M сепарабельний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
2. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, НКТП СССР, 1937.
3. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, ОНТИ, НКТП СССР, 1938.