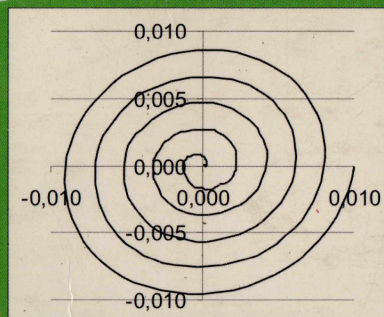
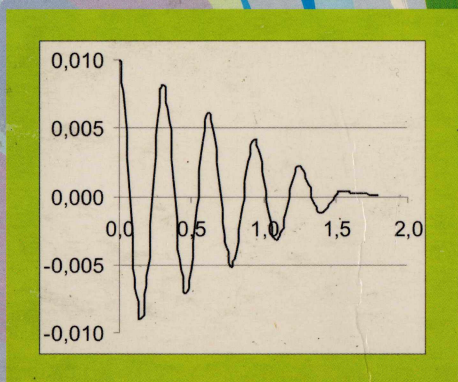


004.94(075.8)
Т34

І.О. Теплицький

ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ



Кривий Ріг
КДПУ
2009

004.94(075.8)

Т34

004.94(07)
32.818

Передмова I.O. Теплицький 8
Розділ 1. Моделювання як метод наукового пізнання 14

Глава 1. Моделі й моделювання 16

1.1. Які бувають моделі I.O. Теплицький 19

1.1.1. Аналогічне моделювання 22

1.1.2. Інтуїтивне моделювання 23

1.1.3. Математичне моделювання 23

1.1.4. Комп'ютерне моделювання 27

1.2. Моделювання процесів 27

1.2.1. Моделювання процесів з дискретним часом 27

1.2.2. Моделювання процесів з неперервним часом 28

1.2.3. Моделювання процесів з дискретним часом і неперервним простором 28

1.2.4. Моделювання процесів з неперервним часом і простором 28

1.3. Моделювання систем 28

1.3.1. Моделювання систем з дискретним часом і простором 28

1.3.2. Моделювання систем з неперервним часом і простором 28

1.3.3. Моделювання систем з дискретним часом і неперервним простором 28

1.3.4. Моделювання систем з неперервним часом і неперервним простором 28

1.4. Моделювання процесів з дискретним часом і простором 28

1.4.1. Моделювання процесів з дискретним часом і простором 28

1.4.2. Моделювання процесів з неперервним часом і простором 28

1.4.3. Моделювання процесів з дискретним часом і неперервним простором 28

1.4.4. Моделювання процесів з неперервним часом і неперервним простором 28

ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано

Міністерством освіти і науки України

Видання друге, виправлене і доповнене

КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА
Відроків КНУ

Кривий Ріг

2009

ал

3.2.2. Обчислювальний експеримент	49
Висновки	51
3.3. Наступне вдосконалення моделі	52
3.3.1. Алгоритм роботи з удосконаленою моделлю	54
3.3.2. Обчислювальний експеримент	54
Висновки	57
3.4. Закріплення: найпростіша модель епідемії	58
3.4.1. Постановка задачі	58
3.4.2. Створення моделі	59
3.4.2.1. Концептуальна модель	59
3.4.2.2. Математична модель	59
3.4.3. Алгоритм роботи з моделлю	60
3.4.4. Обчислювальний експеримент	61
Висновки	63
<i>Розділ 3. Елементи математичної екології</i>	<i>64</i>
Глава 4. Динаміка одновидової популяції	66
4.1. Модель одновидової популяції за відсутності обмежень	66
4.1.1. Постановка задачі. Опис моделі Мальтуса	66
4.1.2. Алгоритм роботи з моделлю	68
4.1.3. Обчислювальний експеримент	69
Висновки	71
4.2. Модель одновидової популяції за наявності обмежень	72
4.2.1. Алгоритм роботи з моделлю	73
4.2.2. Обчислювальний експеримент	74
4.2.3. Стійкість математичної моделі	77
Висновки	79
4.3. Промислове використання популяції	80
4.3.1. Алгоритм роботи з моделлю	81
4.3.2. Обчислювальний експеримент	81
Висновки	85
4.4. Удосконалена модель вилову	86
4.4.1. Автоматичне регулювання і зворотний зв'язок	87
4.4.2. Обчислювальний експеримент	89
Висновки	91
Глава 5. Модель “хижак–жертва”	93
5.1. Попередні зауваження	93
5.2. Постановка задачі і побудова математичної моделі	93
5.3. Обчислювальний експеримент	96
Висновки	102

Глава 6. Вікова модель одновидової популяції.....	104
Вступ.....	104
6.1. Найпростіша версія моделі.....	104
6.1.1. Постановка задачі.....	106
6.1.2. Алгоритм роботи з моделлю.....	107
6.1.3. Обчислювальний експеримент (тестування).....	108
6.2. Поліпшення моделі Леслі.....	110
6.2.1. Практична задача.....	112
6.2.1.1. Формалізована постановка задачі.....	112
6.2.1.2. Алгоритм роботи з моделлю.....	113
6.2.1.3. Обчислювальний експеримент.....	114
6.2.2. Аналіз результатів.....	116
6.3. Модель Леслі з природними обмеженнями.....	117
6.3.1. Алгоритм роботи з моделлю.....	118
6.3.2. Обчислювальний експеримент.....	119
Висновки.....	121
<i>Розділ 4. Комп'ютерне моделювання з фізики: механіка.....</i>	<i>122</i>
Глава 7. Механічні коливання.....	124
7.1. Рух тіла під дією сили пружності.....	124
7.1.1. Аналіз процесу (явища).....	124
7.1.2. Постановка задачі. Концептуальна (змістова) модель.....	125
7.1.3. Математична модель.....	126
7.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю.....	126
7.1.5. Остаточний алгоритм.....	128
7.2. Тестування моделі: нехтуємо опором.....	129
Покращення точності обчислень.....	130
Висновки.....	133
7.3. Рух тіла на пружині за наявності в'язкого опору.....	133
7.4. Рух тіла на пружині за наявності сили сухого тертя.....	134
7.5. Фазова площина.....	137
7.5.1. Теоретичні відомості.....	137
7.5.2. Дослідження коливальних процесів методом фазових діаграм.....	140
Висновки.....	143
Глава 8. Рух тіла в полі сили тяжіння.....	144
8.1. Рух штучного супутника планети.....	145
8.1.1. Постановка задачі.....	145
8.1.2. Алгоритм роботи з моделлю.....	147
8.1.3. Обчислювальний експеримент.....	147

Висновки	150
8.2. Рух природного супутника планети та рух компонентів системи "подвійна зірка"	151
8.2.1. Постановка задачі	151
8.2.2. Обговорення алгоритму	153
8.2.3. Алгоритм роботи	154
8.2.4. Обчислювальний експеримент	155
Висновки	160
8.3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння	160
8.3.1. Перший закон Кеплера	161
Алгоритм роботи	162
8.3.2. Другий закон Кеплера	163
Алгоритм роботи	164
8.3.3. Третій закон Кеплера	165
8.4. Узагальнення закону тяжіння на випадок довільного показника степеня k для відстані r між тілами	167
8.4.1. Постановка проблеми. План роботи	167
8.4.2. Обчислювальний експеримент	168
Висновки	174
8.5. Моделювання абсолютних та відносних рухів планет	175
8.5.1. Геліоцентрична система відліку	175
8.5.2. Геоцентрична система відліку	178
Висновок	181
Глава 9. Задача про політ паперового літачка	182
9.1. Рух тіла під дією декількох сил: загальні зауваження	182
9.1.1. План майбутньої роботи	182
9.1.2. Постановка задачі. Створення концептуальної моделі	182
9.1.3. Математична модель	183
9.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю	185
9.1.5. Остаточний алгоритм	186
9.2. Рух тіла під дією сили тяжіння (тестування моделі)	188
Короткі підсумки тестування	192
9.3. Рух тіла під дією сили тяжіння та сили опору середовища	193
Обчислювальний експеримент	195
Висновки	201
9.4. Рух тіла під дією трьох сил: сили тяжіння, сили опору середовища та піднімальної сили	202
Обчислювальний експеримент	204
Висновок	206

Глава 10. Задача про м'яку посадку на Місяць	207
10.1. Передмова	207
10.2. Постановка задачі	207
10.2.1. Формалізація задачі та побудова моделі	208
10.2.2. Аналіз умови й обговорення плану роботи	209
10.3. Обчислювальний експеримент	213
10.4. Поліпшення інтерфейсу користувача	214
Висновки	217
<i>Розділ 5. Імітаційне моделювання</i>	<i>218</i>
Глава 11. Моделювання за допомогою випадкових чисел	220
11.1. Детерміновані й стохастичні моделі	220
11.2. Метод Монте-Карло	220
11.3. Моделювання броунівського руху (найпростіша модель)	223
11.3.1. Комп'ютерна модель броунівського руху	224
11.3.2. Обговорення алгоритму роботи з моделлю	224
11.3.3. Обчислювальний експеримент	225
11.3.4. Статистичний аналіз результатів експерименту	226
11.3.5. Приклад природного розподілу	229
11.4. Моделювання за допомогою нормально розподілених випадкових чисел	231
11.4.1. Як отримати такий розподіл в середовищі електронних таблиць?	231
11.4.2. Картини броунівського руху з нормальним розподілом окремих випадкових переміщень	233
Висновки	235
Глава 12. Задача дослідження операцій	236
12.1. Вступ	236
12.2. Постановка задачі	236
12.3. Обговорення алгоритму розв'язування задачі	237
12.4. Побудова математичної моделі	239
12.5. Обчислювальний експеримент	239
Висновки	247
Післямова	249
Термінологічний словник	253
Література	261

Передмова

Ця книжка з'явилась як підсумок тривалого (з 1993 р.) викладання автором факультативного курсу "Комп'ютерне моделювання" учням середньої школи. Інтерес і зацікавленість, виявлені старшокласниками до вивчення курсу, навели на думку, що така робота може зацікавити і багатьох інших школярів.

Моделювання є потужним засобом наукового пізнання, воно потребує інтеграції знань із різних навчальних дисциплін і, таким чином, сприяє формуванню світогляду з позицій єдиного підходу до вивчення різноманітних явищ навколишнього світу.

Про значення модельних уявлень видатний фізик ХХ ст. Макс Борн говорив наступне: "Всі видатні експериментальні відкриття зобов'язані інтуїції тих людей, котрі широко використовували моделі. Ці моделі були, однак, не просто результатом їхньої фантазії, але являли собою відображення реальних предметів. Як взагалі може працювати експериментатор, як може він спілкуватися зі своїми колегами й сучасниками, якщо він не використовує моделі?"

Сьогодні моделювання виконує ще й важливу гуманістичну функцію, надаючи можливість прогнозувати негативні наслідки результатів людської діяльності, допомагає усуненню небажаних та небезпечних явищ аж до глобальних екологічних катастроф, серед яких, насамперед, загроза зміни клімату планети або жакливі наслідки ядерної війни. Через це комп'ютерне моделювання виявляється здатним впливати на формування змісту й стилю політичного мислення у сучасному світі. Воно є складовою науково-дослідної роботи і належить до тих видів інтелектуальної діяльності, які можна опанувати шляхом опрацювання спеціальної літератури і на основі аналізу власного досвіду такої роботи. І чим раніше такий досвід почне набуватись, тим вищою буде кваліфікація майбутнього дослідника. Адже дослідниками не народжуються – ними стають.

Комп'ютерне моделювання посідає провідне місце у практичних застосуваннях засобів електронно-обчислювальної техніки, тому, говорячи про практичні застосування комп'ютерів, ми з необхідністю приходимо до потреби в ознайомленні з ним школярів.

Головними задачами пропонованого курсу є ознайомлення з основними підходами до побудови й дослідження математичних моделей; вивчення найбільш поширених методів такої роботи, формування культури дослідницької діяльності з використанням засобів ЕОТ.

Навчальний матеріал містить широкий спектр задач із різних предметних галузей і передбачає вивчення початкових відомостей про моделі й технологію моделювання:

– на конкретних прикладах розглянуто весь цикл моделювання: постановка задачі та її змістовий аналіз → формалізація задачі й побудова математичної моделі → складання алгоритму → обчислювальний експеримент (включаючи перевірку моделі на адекватність) → інтерпретація результатів → наступне вдосконалення моделі;

– виходячи з природи досліджуваних явищ, виокремлюються детерміновані й стохастичні моделі і розглядаються особливості роботи з моделями кожного виду;

– обговорюються такі специфічні питання моделювання, як вибір придатного типу моделі та відповідного середовища для моделювання, дискретизація процесів, що моделюються, використання чисельних методів, походження похибок округлення та шляхи їх зменшення, формуються початкові уявлення про стійкість моделі та деякі прості способи її забезпечення;

– реалізуються елементи системного підходу, можливості побудови різних моделей для вивчення одного й того ж об'єкта та використання однакових моделей для вивчення різних об'єктів.

Спрощений попервах опис виучуваного явища в подальшому поглиблюється: майже кожна модель має не менше трьох версій. Поступово нагромаджується понятійний апарат і одночасно триває опанування нових методів роботи (проте кількість спеціальних понять і термінів зведена до мінімуму). Матеріал посібника підпорядкований ідеї адекватного застосування комп'ютера при розв'язанні наукових та прикладних задач.

Обчислювальний експеримент із математичною моделлю усуває багато ускладнень, що виникають при аналітичному розв'язуванні задач. Це робить такі задачі цілком доступними для старшокласників, що, у свою чергу, створює реальні передумови для розширення змістової частини різних навчальних предметів, оскільки з'являється можливість включати до них нові цікаві дослідницькі задачі. Ми постійно звертаємо увагу школярів на той привабливий факт, що вдало побудована модель здатна допомагати дослідникові отримувати нові (додаткові) відомості про виучуваний об'єкт.

Практична робота з комп'ютерними моделями вимагає вирішення проблеми вибору середовища для моделювання. На початковому етапі цілком придатним середовищем виявляються електронні таб-

лиці, вивчення яких передбачається чинною програмою шкільного курсу інформатики. Але при всій їхній простоті та наочності, електронні таблиці виявляються ефективними тільки для порівняно простих і (або) спеціально підібраних задач. Проте основні уявлення про особливості технології комп'ютерного моделювання вони дозволяють скласти. Взагалі ж при вивченні моделювання не слід обмежуватись якимось одним середовищем – у міру оволодіння знаннями з інформатики раціональним є перехід від одного середовища моделювання до іншого, більш досконалого. Застосування електронних таблиць дозволяє розпочати систематичне вивчення комп'ютерного моделювання помітно раніше, ніж вивчення мов програмування.

Навчальний матеріал містить широкий спектр задач із різних предметних галузей і передбачає вивчення початкових відомостей про моделі й технологію моделювання. Посібник складається з 12 глав, розмішених у п'яти розділах.

У першому розділі (Глави 1–2) формуються й у подальшому уточнюються загальні уявлення про моделі й моделювання; наводиться один з можливих підходів до класифікації моделей. Особлива увага тут приділена математичним моделям, вивчення яких складає основний зміст курсу. Два представлених тут приклади ілюструють можливості комп'ютера як потужного обчислювального пристрою і ефективного засобу побудови графіків математичних залежностей.

Другий розділ (Глава 3) знайомить із технологією створення моделі та подальшої роботою з нею. Сюжетна основа найпершої моделі в загальних рисах добре зрозуміла всім і не потребує спеціальних знань. Це на перший погляд проста, але в дійсності зовсім не тривіальна задача про поширення чуток. Перші результати роботи з укראй спрощеною версією цієї моделі виявляють її майже повну якісну невідповідність фактам, відомим із життєвих спостережень. Далі здійснюється поступове ускладнення моделі шляхом введення до неї нових суттєвих факторів, і в результаті модель стає більш повною й достовірною. При цьому ми дотримуємося принципу відповідності, згідно з яким кожна наступна вдосконалена версія має містити в собі попередні як окремі випадки.

Третій розділ (Глави 4–6) присвячений розв'язанню класичних задач математичної екології.

У Главі 4 розглянуті чотири версії моделі одновидової популяції. Спочатку досліджується найпростіша модель динаміки популяції за відсутності обмежень (модель Мальтуса) і як її розвиток – модель популяції з обмеженнями, пов'язаними з конкуренцією (модель Фер-

хюльста). Її логічним продовженням є дві моделі промислового використання популяції. Перша з них будується на основі жорсткого плану вилучення біомаси, що призводить до появи нестійкої рівноваги та до небезпеки невідвортної загибелі популяції. У другій моделі реалізується гнучке регулювання (модель з негативним зворотним зв'язком), що надійно забезпечує стійкі рівноважні стани. Інтерпретація результатів моделювання за двома останніми версіями виявляється корисною ще й з точки зору формування екологічної культури.

У двох наступних главах відповідно розглянуті модель співіснування популяцій двох видів на основі взаємин “хижак–жертва” (модель Вольтерра–Лотки) та вікова модель одновидової популяції (дискретна модель П. Леслі). Порівняння результатів моделювання за моделями Мальтуса та Леслі доводить їхню якісну схожість. Так само якісно схожими виявляються результати детермінованої моделі “хижак–жертва” та однойменної демонстраційної стохастичної моделі. Отже різні моделі одних і тих самих об'єктів здатні ефективно доповнювати одна одну.

Задачі, що пропонуються в четвертому розділі посібника (Глави 7–10), на відміну від попередніх потребують спеціальних знань із курсу фізики. Для дослідження тут пропонуються приклади механічних рухів тіл під дією змінних сил, а саме таких, що залежать від координат (сила пружності й сила всесвітнього тяжіння) та від швидкості (сила опору й аеродинамічна сила). Головна особливість, що відрізняє ці задачі від більшості шкільних задач із механіки, полягає в тому, що під дією змінних сил тіла набувають змінних прискорень. Тому точний розрахунок їхніх координат у довільний момент часу методами елементарної математики стає неможливим, і у природний спосіб виникають передумови для ознайомлення з найпростішими чисельними методами.

Перший в цій главі об'єкт дослідження – коливальний рух тіла на пружині з урахуванням опору (Глава 7). Тестування й налагодження моделі ведеться для випадку дії на тіло однієї лише сили пружності, оскільки закономірності такого руху добре відомі зі шкільного курсу фізики. Основний інтерес при цьому являє обговорення питання про нагромадження похибок обчислень та про підвищення точності обчислень шляхом поліпшення алгоритму. Врахування сил опору дає картини загасаючих коливань, причому помітно різні при переході від в'язкого тертя до сухого.

Наступний об'єкт – рух тіла в полі тяжіння (Глава 8). Тут пропонуються п'ять задач: 1) рух планети навколо Сонця або рух штуч-

ного супутника навколо планети; 2) рухи компонентів у системах типу “подвійна зірка”, де виникає потреба в переході до системи відліку, пов’язаної зі спільним центром мас; 3) розглядається обчислювальний експеримент із кількісної перевірки законів руху планет (законів Й. Кеплера); 4) узагальнення задачі на довільний дійсний показник степеня k в математичному записі закону всесвітнього тяжіння $F = Gm_1m_2/r^k$; 5) вивчення питань про вигляд планетних орбіт при переході від геліоцентричної системи відліку до геоцентричної.

У Главі 9 розглядається задача про політ паперового літачка під дією сили тяжіння й аеродинамічної сили, що проявляє себе через дві свої складові: силу лобового опору та піднімальну силу. Оскільки кожна з цих сил згідно теореми М.Є. Жуковського пропорційна квадратові швидкості, то предметом спеціального обговорення тут є пошук придатних значень відповідних коефіцієнтів пропорційності (коефіцієнтів моделі).

Четвертий розділ завершується розробкою задачі-гри про м’яку посадку на Місяць (Глава 10) з елементами оптимізації режиму процесу посадки та створенням зручного інтерфейсу користувача.

Глави 11 та 12 присвячені вивченню стохастичних моделей на основі методу випадкової вибірки (методу Монте-Карло). Тут розглядаються модель броунівського руху і задача на дослідження операцій. Побудова й опрацювання першої з моделей вводить у світ випадкових чисел і математичної статистики, сприяє формуванню уявлень про розподіли ймовірностей, зокрема ілюструє два поширені розподіли: рівномірний та нормальний. Вивчення другої моделі доводить, що в деяких ситуаціях вдасться помітно зменшити кількість і вартість ремонтів технічного обладнання виключно за рахунок вибору оптимальної організації обслуговування. До того ж з’являється нагода зрозуміти, як за допомогою рівномірно розподілених випадкових чисел і за відомим експериментальним законом розподілу відносних частот відмов обладнання стає можливим моделювання реальних випадкових подій і, таким чином, оцінити ефективність методу Монте-Карло. Не менш важливим тут є і висновок стосовно того, що дослідження подібних моделей часто дозволяє відокремити потенційно продуктивні рішення від хибних.

Оскільки пропонований курс є факультативним, робота з посібником не передбачає обов’язкового розгляду всіх без винятку наведених прикладів. Учитель може обирати їх на свій розсуд і за власними вподобаннями. Деякі із задач посібника автор у різні часи ви-

користувався при підготовці учнів до конкурсів МАН.

Підготовкою матеріалів цього посібника (обговоренням, зауваженнями, плідними порадами й рекомендаціями) автор зобов'язаний професорам національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова М.І. Жалдаку і Ю.С. Рамському, професору Дніпропетровського національного університету Ю.Д. Шелтуну, професорам Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького В.М. Соловйову і Ю.В. Триусу, науковцям Харківського державного педагогічного університету ім. Г. Сковороди професору Л.І. Білоусовій і доценту С.А. Ракову. За постійну допомогу, оптимізм і дружню підтримку автор щиро вдячний доценту С.О. Семерікову.

Проте відповідальність за припущені помилки й неточності у поданні навчального матеріалу та загальний науковий і методичний рівень посібника автор повністю покладає на себе.

Критичні зауваження будуть прийняті з подякою за адресою:

Україна, 50086, м. Кривий Ріг, проспект Гагаріна, 54, Криворізький державний педагогічний університет, кафедра інформатики та прикладної математики або E-mail: cc@optima.com.ua.

Розділ 1. Моделювання як метод наукового пізнання

Слово “*модель*” походить від латинського *modulus* (міра, зразок, норма). Початкове значення цього слова було пов’язане з ремеслами – ливарною справою, архітектурою тощо. Стародавні римські ливарники називали моделями зразки майбутніх відливок, в епоху середньовіччя воно означало масштаб, у якому подавалися всі пропорції будівлі, а в подальшому воно прийняло значення зразка, за яким щось створюється і в мистецтві. Оскільки зразок часто являв собою зменшену копію предмета, то й виникла уява про модель як про мініатюрне зображення, що було схоже на об’єкт у всьому, за винятком розмірів. У більш пізні часи поняття моделі набуває загальнонаукового характеру і ним починають користуватись у наукових дослідженнях, зокрема, в тих випадках, коли безпосереднє дослідження виявлялося неможливим або малоефективним. В такому разі досліджуваний об’єкт-оригінал внаслідок його значної складності замінювався іншим, вигаданим або штучно створеним, більш простим і доступним для вивчення, таким, що знаходився у деякій відповідності з оригіналом. Цей об’єкт-замінювач і одержав назву моделі вивчуваного об’єкту.

Таким чином, як складовий елемент пізнання навколишнього світу створення й дослідження моделей (моделювання) відоме давно. Воно з’явилося одночасно з науковим пізнанням і завжди його активно супроводжувало. Більше того, наукове пізнання в його сьогодинському розумінні без моделювання (також у його сьогодинському розумінні) взагалі неможливе.

Навчання людини також є пізнанням, але це пізнання відрізняється від наукового насамперед тим, що, навчаючись, людина за допомогою вчителів, книг, комп’ютерів і комп’ютерних мереж, а також інших засобів обміну інформацією пізнає вже відомі людству факти, тоді як наука пізнає нове, невідоме. Проте, і в науковому, і в навчальному пізнанні є спільні риси, до яких належить і робота з моделями, тобто моделювання.

Людський розум не здатний одночасно охопити всю складну взаємодію і взаємний вплив будь-якого об’єкту та його оточення. Саме з цієї причини у свій час відбувся поділ пізнання на окремі галузі – науки. Цей процес відбувається й тепер. Намагаючись пізнати (вивчити, дослідити) об’єкт, дослідник вимушений вдаватись до певних спрощень та обмежень. І в межах кожної окремої науки пі-

знання звичайно йде через спрощення й обмеження, а вже далі – від простого до складного.

Говорячи, наприклад, про будову частинок речовини – молекул, ми, в міру збагачення своїх знань про них, спочатку зображуємо їх у вигляді щільно розташованих у одній площині різнокольорових кульок – утворюючих атомів, пізніше – у вигляді ланцюжків атомів на площині, а далі – у тривимірному просторі з поданням кутів та відстаней між атомами. Всі такі зображення являють собою моделі будови молекул. Ці моделі не є застиглими: кожна з них лише на момент створення або вивчення відзеркалює існуючі відомості про об'єкт і завжди залишається відкритою для подальшого вдосконалення. Отже, навчання, так само, як і наукове пізнання, завжди пов'язане з переходом від одних моделей до інших, від простих до більш складних, проте й більш реалістичних.

Та хіба тільки навчання? Адже для того, щоб почувати себе в житті більш-менш упевнено та комфортно, ми постійно вимушені моделювати можливі ситуації й вибирати найбільш сприятливі з них. Так само й у трудовій сфері. Креслення й схеми, макети й випробувальні стенди, зразки нової техніки й одягу, авто- й авіатренажери, глобус і планетарій – все це приклади використання різноманітних моделей.

Ми не завжди ясно усвідомлюємо, що повсякденно і повсякчасно маємо справу з моделями. Скоріше навпаки, у своєму розумінні тієї ролі, що її відіграє моделювання у нашому власному житті та пізнанні, ми часто нагадуємо відомого мольєрівського героя Журдена, котрий несподівано виявив, що ось вже сорок років він говорить прозою. Моделювання в нашому житті – це буденна проза, і колись повинен-таки настати момент усвідомлення цього факту. Автор прагне, щоб для вас таке прозріння настало раніше, ніж у сорок років. Крім того, ми маємо на меті привернути вашу увагу до однієї з ефективних сучасних технологій пізнання, ім'я якої – Комп'ютерне Математичне Моделювання. Ви зможете познайомитися з основними ідеями і методами цієї технології та застосувати їх до створення та експериментального дослідження математичних моделей багатьох цікавих і різноманітних явищ. А для тих, хто знається на програмуванні, відкриваються широкі можливості для творчої реалізації власних ідей.

Глава 1. Моделі й моделювання

Вже давно поняття “модель” широко й різноманітно використовується в різних галузях природознавства й техніки, в гуманітарних науках і образотворчому мистецтві, в економіці і психології, в конструюванні одягу, взуття, зачісок, у художній літературі. Ось чому дати одразу зрозумілий опис або, тим більше, дати таке означення цього поняття, яке б відповідало різним його застосуванням і водночас було б доступним для фахівців різних галузей, зовсім непросто і, скоріш за все, мабуть, неможливо. Тому спочатку звернемося до деяких прикладів.

1. З метою пояснити, як працює радіоприймач, часто звертаються до малюнку, на якому з допомогою прямокутників зображують його окремі функціональні вузли (блоки), а стрілками між ними показують напрямки, вздовж яких відбувається обмін інформацією (електричними сигналами). Таке зображення на папері, яке зветься блок-схемою, – це модель.

2. Готуючись до запровадження біологічного методу боротьби зі шкідниками сільськогосподарських культур, у спеціальних лабораторіях створюють спрощені копії екологічних систем, куди приміщують представників певних культурних рослин, а також їхніх шкідників та ворогів цих шкідників. На таких мікросистемах вивчають особливості взаємодії всіх представників утвореного співтовариства. Лабораторна екосистема – це модель.

3. Перед тим, як почати серійний випуск нового типу літака (корабля, автомобіля), спочатку його зменшену копію, а у подальшому за можливості і самий цей об'єкт уміщують в аеродинамічну трубу і за допомогою спеціального обладнання визначають, які навантаження виникають у різних елементах конструкції. Літак у аеродинамічній трубі – це модель.

4. З метою оцінити довжину r дроту, який необхідно найбільш економно протягти з даху п'ятиповерхового будинку на дах розташованого поруч дев'ятиповерхового, можна виміряти відстань d між будинками та різницю висот цих будинків h , а далі обчислити

$$r = \sqrt{d^2 + h^2}.$$

Наведена формула при її використанні в умовах даної конкретної задачі – це модель.

Зрозуміло, що ознайомитися з принципом роботи радіоприймача не можна, зазирнувши в його середину, тому єдине, що тут залиша-

ється – це схема.

УГОЛОПО ОТОНАПЗЕР МВАОМУ АТОІ

Зрозуміло, можна було б придбати певну кількість ворогів шкідників і одразу розселити їх у даному регіоні. Та може виявитися, що вони стануть одночасно й ворогами деяких корисних комах або ж строки їх масового вильоту не співпадуть із відповідними строками у шкідників. У такому разі, по-перше, не будуть виправдані витрати, пов'язані з їх придбанням, і, по-друге, значна частина врожаю знов загине. Краще вже виконати лабораторне дослідження.

Звичайно, можна було б запустити літак у серійне виробництво, не маючи точної уяви про навантаження, що виникатимуть під час польоту в окремих його конструкціях. Але ці навантаження, якщо вони виявляться значними, призведуть до руйнування літака в польоті. Краще вже спочатку дослідити літак у трубі.

Можна було б, не виконуючи ніяких обчислень, по черзі підняти дріт на обидва дахи, змотуючи його з котушки, розташованої на землі. Але в такому разі на другий дах довелося б піднімати дріт помітно більшої довжини, ніж потрібна, а, отже, і важчий. Якщо це важкий кабель, то краще вже витратити деякий час на попередні нескладні вимірювання та на розрахунок і відрізати дротину саме потрібної довжини.

У всіх перелічених прикладах має місце співставлення деякого реального об'єкта-оригіналу з іншим, що його замінює:

- радіоприймач → схема на аркуші паперу;
- екосистема регіону → екосистема в лабораторії;
- серійний літак → одиночний літак у трубі;
- орієнтовна довжина дротину → формула.

У всіх цих випадках припускається, що якісь властивості або зберігаються при переході від реального об'єкта до замітника-моделі, або ж, навкрай, модель дозволяє скласти хоч деякі уявлення про такі властивості.

Так, прямокутники і стрілки на блок-схемі не мають нічого спільного з окремими елементами-радіодеталлями та їх групами в радіоприймачі, отже, тільки схема дозволить зрозуміти, як, звідки та куди йдуть електричні сигнали і яких змін вони зазнають.

Лабораторна екологічна система значно менша й суттєво бідніша за реальну, проте вона дозволяє скласти уявлення про ефективність обраного біологічного ворога шкідників.

Літак, що знаходиться в аеродинамічній трубі, не летить, але ті навантаження, що виникають у його окремих елементах, відповіда-

ють умовам реального польоту.

Та й відрізки, що фігурують у записі формули, мало нагадують поверхню землі разом із будинками, однак наведена формула дозволяє використати дріт більш-менш економно і здійснити задуману роботу за менший час і з меншими зусиллями.

Тепер розглянемо наступні означення:

Модель – це такий матеріальний або мислено уявлюваний об'єкт, який в процесі пізнання (вивчення) замінює собою реальний об'єкт-оригінал, і при цьому відтворює деякі важливі для даного дослідження риси оригіналу.

Тут термін “об'єкт” вжито у найбільш широкому розумінні: об'єктом може бути не тільки певний предмет, але й будь-яка ситуація, явище, процес тощо.

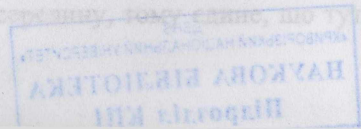
Модель є немов би посередником між досліджуваним об'єктом і дослідником.

Моделювання – це така форма дослідницької діяльності, коли з метою одержання нових відомостей про об'єкт експериментально досліджується не самий об'єкт, а його спрощений образ – модель.

Тут доречним є таке порівняння: дослідник, котрий розробляє модель, подібний до художника-карикатуриста, котрий, як відомо, відтворює оригінал не у всіх подробицях подібно до фотографа, а спрощує його так, щоб виявити й підкреслити найбільш характерні риси. Гарна модель об'єкта має бути саме його гарною “карикатурою”, такою, що відображує найбільш характерні й типові ознаки і властивості оригіналу, і навмисно ігнорує всі решту – несуттєві властивості. На моделюванні, по суті, ґрунтується будь-яке наукове дослідження – як теоретичне, так і експериментальне.

Як правило, *модель доступніша для дослідження, ніж реальний об'єкт*. До того ж слід розуміти, що є об'єкти, які взагалі не можуть бути досліджені безпосередньо: неприпустимі, наприклад, пізнавальні експерименти з економікою країни; принципово нездійсненими є експерименти з минулим, із зірками чи зоряними системами – галактиками; неможливо досліджувати процеси з дуже довгою або ж із надзвичайно короткою тривалістю в часі тощо. Єдиним придатним тут методом дослідження є метод моделювання.

Модель також дозволяє навчитись ефективно керувати об'єктом, випробовуючи різні варіанти управління саме на моделі цього об'єкта. Досліджувати з цією метою самий об'єкт у кращому випадку буває незручно, а взагалі й просто шкідливо чи неможливо,



оскільки виникає загроза привести об'єкт у небажаний або, ще гірше, у незворотний аварійний стан. Дуже сумний приклад тут – це аварія у 1986 році на Чорнобильській АЕС. Якщо помилка виявлена і усунута за допомогою моделі, то це завжди значно простіше, безпечніше та менш коштовно. Переконливим прикладом є вихід з ладу системи енергозабезпечення космічного корабля “Аполлон-13” під час його перебування на орбіті навколо Місяця (1970 р.). Лише відтворення аварійної ситуації та розігрування варіантів її усунення на моделі в центрі управління польотом дозволили повернути корабель з астронавтами на Землю.

Найбільш привабливим у моделюванні є те, що *вдало створена модель має дивну властивість: вона здатна давати нові, не передбачені до того відомості про об'єкт-оригінал.*

У випадках, коли об'єкт має характеристики, що залежать від часу (так звані *динамічні* характеристики), особливого значення набуває задача прогнозування зміни станів об'єкту. Тут використання моделей також надає велику допомогу.

Отже моделювання дає змогу

- зрозуміти будову конкретного об'єкту, його основні властивості, закономірності розвитку і взаємодії з навколишнім оточенням;
- навчитися керувати об'єктом з метою виявлення найкращих способів управління у відповідності до заданої мети;
- прогнозувати наслідки заданих способів впливу на об'єкт.

1.1. Які бувають моделі

Існують різні підходи до моделювання, які умовно можна об'єднати у дві великі групи: *матеріальне* (предметне, або речовинне) та *ідеальне* (мислене) моделювання. У свою чергу, їх поділяють на дещо конкретніші види.

У матеріальному моделюванні розрізняють моделювання *фізичне* й *аналогове*.

1.1.1. Фізичне моделювання

Фізичним називають моделювання, коли деякому об'єкту відповідає його збільшена або зменшена копія, яка дозволяє проводити дослідження (здебільшого за лабораторних умов). Результати, що їх отримують на моделі, переносять на об'єкт. В основу такої можливості покладена *теорія подібності* (див. нижче).

Наведемо декілька прикладів фізичних моделей:

- у гідротехніці – лотки з водою, що моделюють річки, канали,

шлюзи;

— у будівництві – макети споруд, на яких вивчають, наприклад, умови стійкості та розподіл навантажень;

— у літако- та суднобудуванні – зменшені копії літальних апаратів та кораблів.

Фізичні моделі можуть бути і просто демонстраційними (ілюстративними):

— у фізичній географії – телурій, що моделює добове й річне обертання Землі та пов'язані з ним наслідки (зміну дня й ночі, зміну пір року, затемнення, існування кліматичних поясів тощо);

— в астрономії – планетарій, який моделює видиме обертання зоряного неба та зміну його вигляду на протязі доби або при зміні пір року;

— у теплотехніці – розріз двигуна внутрішнього згоряння, що ілюструє циклічний принцип його дії.

Теорія подібності, яку було започатковано в VII ст. І. Ньютоном, є теоретичною основою *фізичного* моделювання.

Приклад використання теорії подібності: моделі суден у випробувальному каналі

Основна ідея теорії подібності полягає в тому, що фізичні явища можна характеризувати не тільки величинами, що мають певну розмірність, а й безрозмірними комбінаціями таких величин. Ці безрозмірні комбінації, складені за певними правилами, називають *критеріями подібності*.

Для того, щоб два фізичних процеси були подібні, необхідно й достатньо, щоб вони були якісно однаковими, а їхні критерії подібності – попарно рівними. Тоді, знаючи значення величин (швидкість, тиск, температуру, густину тощо), які характеризують один об'єкт, можна знайти значення відповідних (таких самих) величин, що характеризують інший. Саме так за результатами досліджень, проведених на моделі, визначають відповідні параметри, властиві оригіналу.

Для різних груп явищ існують свої критерії подібності. Кожен з них носить ім'я вченого, який його першим увів. Зокрема, одним із основних критеріїв подібності у гідродинаміці, яка вивчає рухи рідин і тіл у рідких середовищах, є число Фруда (за ім'ям англійського вченого-суднобудівника XIX ст. Уільяма Фруда):

$$Fr = \frac{v^2}{gl}, \quad (1)$$

де v – швидкість рідини на значній відстані від тіла, яке вона обтікає;
 l – характерний лінійний розмір тіла;
 g – прискорення сили тяжіння.

Цей критерій відіграє важливу роль при моделюванні процесів, пов'язаних з рухами кораблів. При невеликих швидкостях (для тихих суден) критерій Фруда $Fr = 0,4$ за умови, що швидкість визначається у вузлах (морських милях за годину).

Перед тим, як розпочати будівництво нового корабля, його зменшену копію – фізичну модель – досліджують у випробувальному каналі. Одним із багатьох питань, що цікавлять суднобудівників, є питання про швидкість.

З моделлю судна, здавалося б, усе зрозуміло: її дуже зменшено у порівнянні з натурою. Так, модель двохсотметрового танкера, яку виконано у масштабі 1:200, має довжину 1 м.

Припустимо, що реальний танкер повинен розвивати швидкість 19 вузлів. Поставимо питання:

з якою швидкістю має рухатись модель у каналі, щоб результати вимірювань, виконаних при її випробуваннях, допускали перерахунок на реальне судно?

Чи також зі швидкістю 19 вузлів, чи, можливо, швидкість слід зменшити у відношенні 1:200?

Фруд експериментально довів, що *максимальна швидкість судна за умови, що не вдаються ні до яких технічних “трюків”, ніколи не перевищує значення*

$$v_{max} = 2,5 \sqrt{\text{довжина вздовж ватерлінії}} \text{ вузлів.} \quad (2)$$

Двохсотметровий корпус танкера має вздовж ватерлінії довжину близько 190 м, а модель – відповідно 0,95 м. Максимальні швидкості танкера і моделі відповідно становлять

$$v_{max \text{ м}} = 2,5 \cdot \sqrt{190} = 34,5 \text{ вузла} = 64 \text{ км/год,}$$

$$v_{max \text{ м}} = 2,5 \sqrt{0,95} = 2,4 \text{ вузла} = 4,5 \text{ км/год.}$$

Якщо модель тягти швидше, ніж 2,4 вузла, то вона просто “вистрибне” з води.

Таким чином, випробовуючи майбутній двохсотметровий танкер на моделі, слід мати на увазі два закони подібності:

- 1) подібність геометричних розмірів моделі й реального судна;
- 2) подібність при моделюванні закону опору і відповідної швидкості при русі тіла у воді.

Зрозуміло, суднобудівник має заздалегідь знати, як поведе себе

танкер не тільки на максимальній швидкості, але й на економічній швидкості у звичайному рейсі. Відповідь на своє запитання він одержить із закону подібності:

$$\left[\frac{v^2}{gl} \right]_{\text{танкера}} = \left[\frac{v^2}{gl} \right]_{\text{моделі}}$$

і остаточно

$$v_{\text{танкера}} = v_{\text{моделі}} \cdot \sqrt{\frac{l_{\text{танкера}}}{l_{\text{моделі}}}} = v_{\text{моделі}} \cdot \sqrt{\frac{190}{0,95}} \approx 14,1 v_{\text{моделі}}$$

1.1.2. Аналогове моделювання

Аналогове моделювання засноване на аналогії (схожості за деякими ознаками) процесів та явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються *однаковими за виглядом рівняннями, логічними схемами тощо*. Це дає можливість вивчати одні явища, замінюючи їх іншими.

Так, зокрема, за формулою

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$$

де Z – шукана величина, можна знаходити

- загальний опір $R = Z$ двох паралельно сполучених провідників з опорами $R_1 = X$ та $R_2 = Y$;
- фокусну відстань $F = Z$ тонкої лінзи, якщо відомі відстань $d = X$ від лінзи до світної точки та відстань $f = Y$ від лінзи до зображення;
- час $t = Z$ спільного виконання деякої роботи двома виконавцями за умови, що один з них здатний виконати всю роботу за час $t_1 = X$, а другий – за час $t_2 = Y$;
- час $t = Z$ руху пасажирів на рухомому ескалаторі метро, якщо цей пасажир долає сходи нерухомого ескалатора за час $t_1 = X$, а сам ескалатор переміщує нерухомого пасажирів за час $t_2 = Y$.

Це означає, що можна скласти електричне коло з двома змінними резисторами, сполученими паралельно, і розв'язати будь-яку із згаданих щойно задач. Аби тільки ми мали можливість визначити опори кожного з резисторів і їхній загальний опір. До речі, поміркуйте, як це зробити. Було б дуже бажано, щоб за можливості ви проєктували з таким колом у шкільному фізичному кабінеті. Створення електричних аналогів реальних об'єктів (процесів, явищ)

було свого часу покладено в основу роботи *аналогових ЕОМ*.

Найбільш поширені приклади аналогового моделювання:

- вивчення механічних коливань за допомогою електричних кіл і навпаки;
- дослідження вихрових рухів повітряних мас за допомогою таких самих рухів рідин;
- вивчення та обчислення певних характеристик поля тяжіння за допомогою відповідних характеристик електростатичного поля.

Відмітимо, що в обох типах матеріального моделювання моделі являють собою деяке матеріальне втілення об'єкта-оригіналу і завжди пов'язані з ним своїми геометричними, фізичними або іншими характеристиками. До того ж і саме дослідження – *натурний експеримент* – пов'язане з матеріальним впливом на модель.

Від матеріального моделювання принципово відрізняється *ідеальне*, яке засноване не на матеріальній аналогії об'єкта й моделі, а на аналогії ідеальній, мисленій. Воно виникає в людській свідомості й існує в ній. Ідеальна модель може існувати в уяві однієї окремої людини, співтовариства або суспільства. Ідеальне моделювання має теоретичний, абстрактний характер. Розглядають два типи ідеального моделювання: *інтуїтивне* і *знакове*.

1.1.3. Інтуїтивне моделювання

Інтуїтивне моделювання засноване на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження; воно не підлягає математичному опису, або не потребує його. Образи різних об'єктів із навколишнього оточення, що виникають у нашій свідомості, відносять до інтуїтивних моделей цих об'єктів.

Так, добре відома дитяча гра-забава “А що було б, якби...?” – це, по суті, гра у передбачення. Напевно, вона подобається дітям внаслідок природної потреби дитини будувати моделі поведінки для правильного передбачення і прогнозування життєвих ситуацій, серед яких дитині доводиться існувати. Ще до приходу в школу діти вже конструюють свої власні моделі подумки, на папері або за допомогою ЕОМ чи інших засобів.

Прикладами інтуїтивного моделювання є також і ті добре відомі випадки, коли виникає необхідність прийняти рішення в умовах браку інформації, наприклад, вибору оптимальної стратегії майбутніх дій. Часто до розв'язання такої проблеми залучають групи спеціалістів і запроваджують *мозковий штурм*. З цього приводу деякі психологи схильні вважати, що прийняття правильних рішень в означених

ситуаціях засноване на властивості людського мозку підсвідомо поповнювати брак інформації з попереднього життєвого досвіду. В цьому розумінні життєвий досвід кожної людини можна вважати її власною інтуїтивною моделлю навколишнього світу. Проте, приймаючи відповідальні рішення, не варто перебільшувати ролі людської інтуїції і покладатись тільки на неї.

1.1.4. Знакове моделювання

Знакове моделювання використовує в якості моделі знакові перетворення будь-якого виду: схеми, графіки, креслення, набори символів, формули, та інші умовні позначення. Поза свідомістю та діяльністю людини ніяка знакова система неможлива.

Ось деякі приклади знакових моделей:

- географічні карти;
- записи шахових партій;
- різноманітні схеми (електричні, кінематичні тощо);
- нотні записи мелодій;
- зображення взаємозв'язку та взаємозалежності між словами в реченні при синтаксичному розборі;
- записи хімічних реакцій;
- формули (рівняння) математики, фізики, техніки;
- різноманітні піктограми

і таке інше.

1.2. Математичне моделювання

Надзвичайно важливим і поширеним видом знакового моделювання є *математичне моделювання*, в якому дослідження здійснюється з використанням моделі, сформульованої мовою математики (тобто у вигляді математичних виразів).

Оскільки основний зміст нашого курсу присвячений вивченню особливостей створення і методів роботи саме з математичними моделями, зупинимось на цих питаннях більш докладно.

Інформація (дані) про об'єкти, події, процеси вже є деякою їхньою моделлю – інформаційною. Окремим випадком інформаційних моделей є математичні моделі.

Математична модель – це опис деякого реального процесу або деякої досліджуваної ситуації мовою математичних формул та співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних виразів тощо), це подані у математичній формі основні закономірності та зв'язки, притаманні вивчуваному об'єкту.

Пригадаймо добре відомі ще з початкової школи задачі на складання рівнянь: “Два поїзди одночасно вийшли назустріч один одному...”, “В басейні встановлено дві труби ...”. В ті часи ви складали потрібні рівняння без усякої підозри про те, що ви займалися побудовою математичних моделей. У подібних задачах усе так просто й зрозуміло, що слова “математична модель” виглядають навіть як недоречний пафос. Проте саме тут і має місце факт опису реального процесу мовою абстрактних математичних понять.

Згадане вище аналогове моделювання за своєю суттю засноване на схожості математичних моделей різних за своєю природою процесів. А наведена формула являє собою узагальнену математичну модель перелічених там явищ. Таким чином, однакові моделі часто дозволяють вивчати різні явища. Але не менш важливим є й обернений факт – можливість і доцільність вивчення одного й того ж явища за допомогою різних моделей. У такому разі результати вивчення взаємно доповнюють один одного, даючи більш повне уявлення про об’єкт дослідження.

Отже, математична модель – це завжди спрощений образ реальної (взятої з оточуючого світу) ситуації; вона дозволяє звести складну реальну проблему до порівняно простої математичної задачі, такої, що має розв’язок, тобто дозволяє одержати результат (відповідь).

Математичне моделювання вже давно (від часів І. Ньютона – XVII ст.) з успіхом застосовувалось у різних галузях науки й техніки. Однак широке використання цього методу стримувалось недосконалими технічними засобами для численних і складних розрахунків. Та в середині XX ст. математичне моделювання зазнало свого другого народження. Це відбулося завдяки появі ЕОМ, які дозволили фахівцям з успіхом працювати зі значно більш складними математичними моделями, що містили тисячі різноманітних параметрів та невідомих величин. Перші ЕОМ, що з’явилися у 50-х роках, були створені саме для “обслуговування” математичних моделей, пов’язаних з оволодінням ядерною енергією та розробкою і вдосконаленням ракетно-космічної техніки. Прийшов час математичних моделей, які більш повно і точно відбивали складні реальні процеси.

Глава 2. Основні етапи моделювання

2.1. Створення моделі

На практиці вихідним пунктом моделювання стає деяка ситуація, що висуває перед дослідником задачу, для якої необхідно знайти відповідь. Проте, вживання в моделюванні таких слів, як “задача” й “відповідь”, можуть увести початківця в оману.

2.1.1. Постановка задачі

Реальні ситуації дуже рідко бувають чітко обумовленими, оскільки складні взаємодії досліджуваного об'єкту з навколишнім оточенням призводять до значних утруднень при описі цих ситуацій. Досвід показує, що в багатьох випадках практично неможливо одразу чітко сформулювати задачу так, щоб на її основі стало б можливим створення моделі. Процес народження задачі, який називають *постановкою задачі*, фактично зводиться до послідовних переформулювань проблеми – зміни її сюжетної основи шляхом заміни реальних об'єктів на їхні абстрактні образи. Так, навіть у наведеному вище простому прикладі про оцінку довжини дротини ми замінили будинки і поверхню землі прямими відрізками, і лише після цього задача звелася до знаходження гіпотенузи прямокутного трикутника.

Завершується постановка задачі словесним і математичним описом умови задачі. Словесне (текстове) формулювання задачі разом із пояснювальними рисунками або схемами називають *змістовою (концептуальною) моделлю*, а зв'язки між найбільш важливими характеристиками об'єкту, записані у вигляді математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних виразів), являють собою *математичну модель*.

2.1.2. Зміст відповіді

Відповідь (тобто результат моделювання), як уже зазначалось, має містити інформацію, що надавала б можливості для

- прогнозування нових результатів;
- одержання відомостей про непередбачені до цього властивості об'єкту;
- полегшення прийняття рішень;
- здійснення автоматичного управління.

Відповідь у моделюванні – це не обов'язково те, до чого ми звикли в шкільній математиці, фізиці, хімії: $x = 17$, $R = 400$ Ом або

$M = 98$ г/моль тощо. Результатами моделювання можуть бути також таблиці чисел та відповідні діаграми (графіки), креслення тощо.

Одержану відповідь необхідно *проаналізувати* й осмислити. Висновкують це люди (спеціалісти), вони й роблять необхідні *висновки*.

2.1.3. Спрощуючі припущення

Вже на стадії постановки задачі триває процес виявлення основних (суттєвих) ознак об'єкту. Деякі його риси уявляються дослідникові важливими, ряд інших – другорядними. Відмова від ряду особливостей, несуттєвих на думку дослідника, приводить до спрощення й ідеалізації. Опис об'єкту формулюється у вигляді спрощуючих припущень, які входять до сюжетної основи майбутньої концептуальної моделі.

Повертаючись знов до розглянутого прикладу, зазначимо, що, строго кажучи, визначення довжини дротини за теоремою Піфагора є не цілком коректним внаслідок провисання дроту, оскільки цей дріт має деяку певну масу. Використання наведеної формули передбачає припущення про те, що масою дроту, а отже і його провисанням можна знехтувати. З цієї причини одержаний результат слід розглядати тільки як *оцінку* довжини, про що й говориться в прикладі. Спрощуючі припущення зумовлюють існування певних границь застосовності будь-якої моделі.

2.1.4. Головне протиріччя в моделюванні

В моделюванні завжди існує серйозне протиріччя: з *одного боку* моделювання неможливе без спрощення, без нехтування другорядними чинниками, а з *другого* – завжди існує ризик “переспростити” модель, відкинувши якісь важливі риси об'єкту разом із другорядними. Адже заздалегідь важко зрозуміти, які риси об'єкту є важливими, а які – другорядними, адже цей об'єкт ще не вивчено. Як правило, це самий відповідальний етап у моделюванні.

Звернемося ще до наступного прикладу. Приймаючи припущення, що приріст населення деякого міста пропорційний кількості мешканців, ми одержимо математичну модель, яка виявляється правильною лише в дуже грубому наближенні. Якщо ж врахувати кількість людей похилого віку і дітей (непродуктивну частину населення), то модель зазнає певних ускладнень. А якщо включити до моделі такі чинники, як рівень освіти, кількість працюючих жінок, рівень добробуту і т.п., то математична модель стане вже настільки складною, що побудувати й вивчити її буде і зовсім непросто. Однак навіть при

врахуванні подібних факторів модель може виявитись далекою від дійсності: адже в ній не врахований ряд випадкових факторів – міграція населення, статистика шлюбів і розлучень та багато іншого.

Мета дослідника – знайти “золоту середину”: створити достатньо просту модель процесу, не позбавляючи його першорядних властивостей. Тут не існує якихось конкретних рекомендацій. Це сфера особистого досвіду, заснованої на ньому професійної інтуїції, рівня та якості освіти, інтелекту та творчості дослідника. Моделювання – це мистецтво і ним, як, до речі, й будь-яким іншим мистецтвом, можна оволодіти лише через аналіз чужих і власних вдалих і невдалих дій, лише виконуючи постійно вправи, тобто постійно розв’язуючи дослідницькі задачі.

2.1.5. Істотні й другорядні властивості об’єкту

Кожному об’єкту в залежності від мети дослідження можна поставити у відповідність різні моделі. Наприклад, якщо взяти таку складну систему, як популяція тварин, то для опису процесів життєдіяльності буде використано модель окремої тварини як біологічної істоти – представника біологічного виду, для моделювання поведінки тварин у численній групі (зграї) дослідник створить іншу, етологічну модель (етологія – наука про поведінку і повадки тварин), а для прогнозування динаміки зміни кількості особин із плином часу буде створена зовсім інша, екологічна модель. При цьому властивості об’єкта, суттєві при побудові однієї моделі, можуть виявитися (і часто виявляються) другорядними для іншої.

2.2. Обчислювальний експеримент

Математичне моделювання часто порівнюють з натурним (лабораторним) експериментом. При цьому аналогом математичної моделі є спеціально побудована дослідна установка, за допомогою якої дослідники задають питання природі шляхом контрольованої зміни умов досліду і вивчаючи наслідки таких дій. Саме так поводитися й ви при виконанні лабораторних та практичних робіт з фізики, хімії чи біології.

В математичному моделюванні питання задають математичній моделі. І якщо в сучасних складних і коштовних дослідних установках зміна деяких умов може призвести до значних технічних і економічних утруднень, то математичним моделям такі утруднення, як правило, невідомі.

Отже, після того, як математична модель створена, переходять

до наступного етапу, що має назву *обчислювальний експеримент*. Цей етап становить основний зміст розв'язування задачі з допомогою комп'ютера. Суть його найчастіше зводиться до повторення однотипних, однакових за змістом серій обчислень при зміні вхідних даних, або до пошуку відповіді на питання “Що відбудеться, якщо ...?”

Обчислювальний експеримент сьогодні – це сучасна технологія теоретичних досліджень, заснованих на експериментуванні з комп'ютерною математичною моделлю.

Дослідження математичних моделей реальних об'єктів часто (але не завжди) передбачає виявлення виду функціональних залежностей між характеристиками цих об'єктів. Таку роботу, як це зазначалося вище, зручно проводити в спеціалізованих середовищах для моделювання – математичних пакетах, пристосованих для певних предметних галузей знань (техніки, економіки, бухгалтерської справи тощо). Наш посібник орієнтований на використання знайомого всім школярам середовища «Електронні таблиці». В цьому середовищі ми й будемо проводити *обчислювальні експерименти*.

Відомо, що одним із можливих способів дослідження функціональних залежностей між змінними є подання цих залежностей у графічному вигляді. Електронні таблиці дозволяють легко будувати такі графіки. До того ж за необхідності можна одночасно будувати декілька графіків функцій від одного або декількох аргументів. Зрозуміло, що коли залежність має простий вигляд, такої потреби може й не бути, але в шкільному курсі фізики трапляються і не зовсім прості функції. Проілюструємо сказане двома прикладами з фізики.

2.2.1. Дослідження замкнутого електричного кола постійного струму

При вивченні шкільного курсу фізики відповідне лабораторне дослідження виконується в темі “Закон Ома для повного кола постійного струму”.

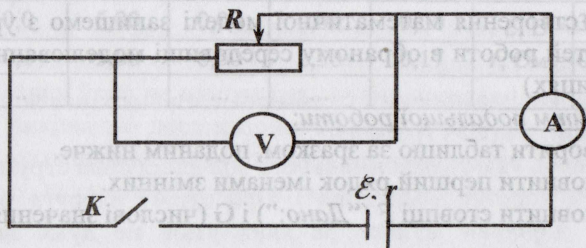


Рис. 2.1. Схема для дослідження повного кола постійного струму

Схема електричного кола для виконання лабораторної роботи має вигляд, поданий на рис. 2.1. Елементами кола є джерело струму з електрорушійною силою \mathcal{E} і внутрішнім опором r , вимикач K , споживачем є реостат R . Електровимірювальні прилади (амперметр і вольтметр) є єдиними джерелами числової інформації.

Побудова математичної моделі. На відміну від лабораторної роботи математична модель не зобов'язана включати електричну схему; теоретичну основу для побудови математичної моделі складають наступні співвідношення:

– закон Ома для повного кола постійного струму $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$,

а також вирази, за якими обчислюються

– напруга на кінцях споживача $U = IR$;

– корисна потужність $P_{\text{кор}} = IU$;

– коефіцієнт корисної дії $\eta = \frac{R}{R + r}$.

Характеристики джерела струму – ЕРС \mathcal{E} і внутрішній опір r – будемо вважати відомими.

Метою дослідження поставимо вивчення залежності перелічених величин (I , U , $P_{\text{кор}}$, η) від опору R споживача шляхом побудови відповідних графіків.

Таким чином, математичною моделлю поставленої задачі є наступна система чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \\ U = IR \\ P_{\text{кор}} = IU \\ \eta = \frac{R}{R + r} \end{cases}$$

Після створення математичної моделі запишемо з урахуванням особливостей роботи в обраному середовищі моделювання (електронних таблицях)

Алгоритм подальшої роботи:

1. Створити таблицю за зразком, поданим нижче.
2. Заповнити перший рядок іменами змінних.
3. Заповнити стовпці F (“Дано:”) і G (числові значення).

	A	B	C	D	E	F	G
1	R	I	U	$P_{кор}$	η	Дано:	
2						$\xi, B = 3$	
3						$r, Om = 0,5$	
...		

4. Заповнити вміст ключових комірок таблиці (комірок, які слід заповнювати з клавіатури):

комірка	формула/число
A2	0
A3	=A4+0,1
B2	=\$G\$2/(\$G\$3+A2)
C2	=B2*A2
D2	=B2*C2
E2	=A2/(\$G\$3+A2)

5. Формули з комірок B2, C2, D2, E2 копіювати в третій рядок.

6. Всі формули третього рядка копіювати в наступні 45 рядків.

7. За даними стовпців A, B, C, D, E побудувати в одній координатній площині графіки залежності змінних I , U , $P_{кор}$, η від опору R зовнішньої ділянки кола (споживача), як це показано на рис. 2.2.

З цією метою помічаємо всі комірки в стовпцях A, B, C, D, E і звертаємось до програми *Мастер диаграмм*. На вкладинці *Стандартные* вибираємо тип *Точечная* (саме цей тип забезпечує подання функціональної залежності виду $y = y(x)$ на відміну від типу *График*). При цьому за замовченням аргументами стають дані з першого виділеного стовпця (у даному випадку стовпця A), для них не будується лінія графіка, як це має місце для типу *График*. (Перевірте!).

Обчислювальний експеримент.

	A	B	C	D	E	F	G
1	R	I	U	$P_{кор}$	η	Дано:	
2	0,0	6,00	0,00	0,00	0,00	$\xi, B = 3$	
3	0,1	5,00	0,50	2,50	0,17	$r, Om = 0,5$	
...		

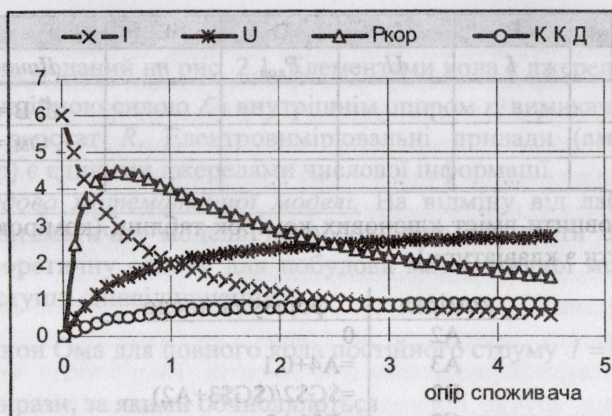


Рис. 2.2. Графіки залежності I , U , $P_{кор}$, η від опору R споживача

Аналіз результатів

Розглянута математична модель дозволяє висунути наступну гіпотезу:

максимальна корисна потужність $P_{кор}$ струму в колі розвивається, коли опір споживача дорівнює внутрішньому опорі джерела струму (як це видно з рис. 2.2, при $R = r = 0,5$ Ом), однак значення коефіцієнта корисної дії η при цьому не є максимально можливим (100%), а становить тільки 50%.

З метою перевірки гіпотези змодельуйте заміну джерела струму на нове з такою самою ЕРС, але з внутрішнім опором $r = 1,0$ Ом. Як це вплине на максимальні значення змінних $P_{кор}$ і η ? Повторіть обчислювальний експеримент, поклавши $\mathcal{E} = 5,0$ В, а внутрішній опір $r = 1,0$ Ом. Чи підтверджується гіпотеза за нових умов?

Цей висновок є справедливим для будь-яких електричних кіл. Його можна отримати і без комп'ютера, користуючись виключно аналітичними методами, але зараз ми маємо нагоду перевірити зазначений факт на комп'ютерній моделі.

Запитання і вправи

1. Чому копіювання вмісту комірок слід виконувати не з другого рядка таблиці, а саме з третього?

2. Зверніть увагу: максимального значення сила струму I набуває при $R = 0$ ("коротке замикання"). При цьому напруга U на кінцях споживача дорівнює нулеві. За яких умов це дуже небезпечний

режим експлуатації електричного кола, а коли це не так?

3. Аналітично дослідіть на екстремум наступні функції:

$$а) P_{кор} = P_{кор}(R) = \xi^2 \frac{R}{R+r}; \quad б) \eta = \frac{R}{R+r}.$$

2.2.2. Дослідження електричного кола змінного струму

Схема досліджуваного кола, подана на рис. 2.3. Під дією джерела змінної напруги в колі виникають *вимушені електричні коливання* сили струму – *змінний струм*. Амплітуда цих коливань залежить не тільки від прикладеної напруги U і параметрів кола R , X_L і X_C , але й від частоти ν вимушених коливань.

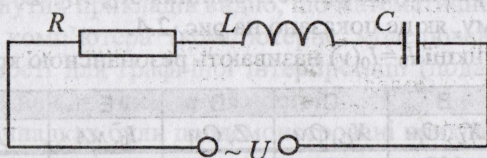


Рис. 2.3. Схема для дослідження кола змінного струму

Математична модель, як і в попередньому прикладі, не потребує схеми і будується на основі таких співвідношень:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \text{ – закон Ома для ділянки кола змінного}$$

струму, яка містить активний опір R , індуктивність L і ємність C . Тут U_0 – амплітуда напруги на кінцях ділянки кола;

$$X_L = 2\pi\nu L, \quad X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \text{ –}$$

формули відповідно індуктивного X_L , ємнісного X_C та повного Z опорів. Знаючи Z – повний опір кола, можна обчислити амплітуду

$$\text{сили струму: } I_0 = \frac{U_0}{Z}.$$

Оскільки повне аналітичне дослідження функції $I_0 = I_0(\nu)$ засобами диференціального числення потребує чимало часу, то, як правило, на уроці фізики його не виконують, а обмежуються якісними оцінками. Ми ж виконаємо дослідження з наступною графічною інтерпретацією за алгоритмом, майже таким, як попередній. Відмінність полягає в тому, що змінюється вміст ключових комірок нової таблиці:

Комірка	Формула/число
A2	=G\$6
A3	=A2+G\$7
B2	=2*3,14*A2*G\$4
C2	=1/(2*3,14* A2*G\$5)
D2	=(G\$3^2+(B2-C2)^2)^0,5
E2	=G\$2/D2*1000

Вміст комірок A2, B2, C2, D2, E2 слід копіювати в ті самі стовпці третього рядка, а всі формули третього рядка копіювати в наступні 18 рядків.

За даними стовпців A, B, C, D, E побудувати в одній координатній площині графіки залежності змінних X_L , X_C , Z , I_0 від частоти ν змінного струму, як це показано на рис. 2.4.

Графік функції $I_0 = I_0(\nu)$ називають резонансною кривою.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\nu, \text{Гц}$	$X_L, \text{Ом}$	$X_C, \text{Ом}$	$Z, \text{Ом}$	$I_0, \text{мА}$	Дано:	
2	25	118	455	337	44	$U_0, \text{В} = 15$	
3	30	141	379	238	63	$R, \text{Ом} = 10$	
4	35	165	325	160	93	$L, \text{Гн} = 0,75$	
5	40	188	284	96	155	$C, \Phi = 1,4\text{E}-05$	
6	45	212	253	42	357	$\nu_0, \text{Гц} = 25$	
7	50	236	227	13	1170	$\Delta\nu, \text{Гц} = 5$	
...	

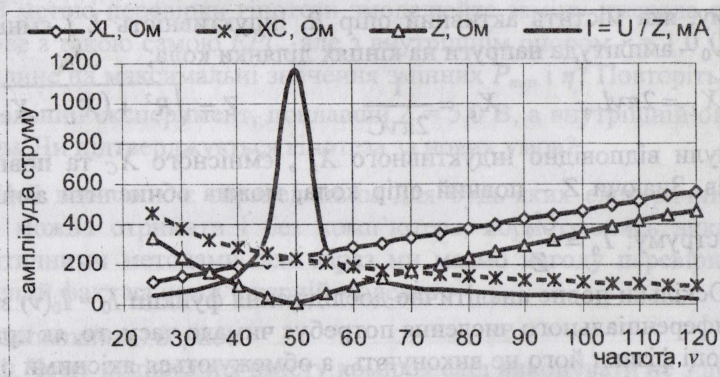


Рис. 2.4. Побудова резонансної кривої

1. Для одночасного виведення на екран усіх чотирьох графіків $X_L = X_L(\nu)$, $X_C = X_C(\nu)$, $Z = Z(\nu)$ та $I_0 = I_0(\nu)$ слід виділити всі заповнені

комірки у стовпцях А, В, С, D, Е. Якщо потрібна змістовна легенда, виділення слід починати з рядка 1, інакше – з рядка 2 (*перевірте!*).

2. Відповідні графіки наведені в нижньому фрагменті рис. 2.4.

$$X_L = 2\pi\nu L; X_C = 1/(2\pi\nu C); Z = (R^2 + (X_L - X_C)^2)^{1/2}; I_0 = U_0/Z.$$

3. З графіків добре видно, що при частоті вимушених коливань $\nu \approx 50$ Гц маємо: а) $X_L = X_C$; б) $Z = Z_{min}$; в) $I = I_{max}$.

4. Змінюючи по черзі значення активного опору R (комірка G3), індуктивності L (комірка G4) та ємності C (комірка G5), дослідіть їхній вплив на вигляд кожної кривої і, зокрема, резонансної кривої.

Висновки

1. З розглянутих прикладів видно, що математичне моделювання із залученням комп'ютера (комп'ютерне моделювання) відкриває широкі можливості для графічної інтерпретації (подання; представлення) складних аналітичних залежностей.

2. В обох випадках були продемонстровані приклади *адекватного використання комп'ютера* при вивченні природничих наук, і зокрема, фізики. В даному контексті «адекватне використання» означає використання комп'ютера тільки в тих випадках, коли без нього або незручно, або взагалі неможливо. Саме завдяки цій обставині економиться час роботи за рахунок автоматизації рутинних обчислювальних операцій.

3. Обчислювальний експеримент з математичною моделлю здатний суттєво спростити процедуру розв'язування задач.

2.3. Перевірка моделі на адекватність

Побудовану модель слід піддати перевірці на вірогідність, тобто встановити, чи досить правильно її результати відбивають поведінку об'єкта-оригіналу в досліджуваних ситуаціях, тобто, чи достатньо повною є відповідність результатів моделювання поведінці реально-го об'єкта. Це своєрідний «момент істини» для моделі. В такому разі говорять про *перевірку моделі на адекватність*. Ознакою адекватності моделі є, насамперед, задовільний збіг результатів моделювання з відомими та (або) достатньо надійними дослідними даними.

З метою перевірки моделі на адекватність обчислювальний експеримент часто спрямовують на підтвердження очевидних і задалегідь відомих властивостей об'єкта. Така процедура має назву *тестування моделі*. Що ж до тих випадків, коли відсутня можливість порівняння результатів, одержаних на моделі, з поведінкою самого об'єкта, порівняння проводять за результатами, що їх дають теорія та

відповідні розрахунки.

Модель, яка пройшла тестування, може вважатися якщо не задовільною, то щонайменше – правдоподібною.

2.4. Комп'ютерне моделювання та його особливості

Для ясного розуміння подальшого викладу нам слід на певний час вдатися до з'ясування ряду фактів, що зумовлюють деякі специфічні особливості комп'ютерного моделювання.

Майже все, про що йшлося вище, взагалі можна робити і без комп'ютерів. З появою ЕОМ можливості для моделювання піднялися на значно вищий рівень. Завдяки здатності комп'ютерів працювати з великими обсягами інформації, і, що не менш важливо, величезній (у порівнянні з іншими засобами) швидкості опрацювання інформації, комп'ютери стали в моделюванні основним робочим інструментом.

2.4.1. Особливості, що залежать від комп'ютерів

З природничих наук відомо, що процеси в природі можуть мати неперервний (в просторі й у часі) характер або переривчастий, стрибкоподібний. Ця переривчастість має спеціальну назву – *дискретність*.

Зрозумілий приклад щодо цього дає математика. Так множина всіх дійсних чисел при їх зображенні на числовій осі являє собою неперервну послідовність точок, а множина цілих чисел при цьому утворює послідовність дискретну.

Ще один приклад можна взяти з фізики. Для регулювання сили струму в електричному колі користуються реостатами, які бувають здебільшого двох типів: повзункові та ступінчасті. У перших опір змінюється плавно, неперервно, а у других – стрибками, переривчасто. Тому, в залежності від конструкції взятого реостату, сила струму в колі в одному випадку буде змінюватись неперервно, плавно, а в іншому – дискретно.

Цифровий комп'ютер за принципом своєї дії є дискретним пристроєм: опрацювання інформації в ньому відбувається переривчасто, дискретно під управлінням спеціальних тактових імпульсів, що дає можливість здійснення потрібної послідовності операцій. До речі, саме частота слідування цих імпульсів визначає швидкість виконання обчислювальних операцій або, як говорять, швидкодію. Оскільки і пам'ять комп'ютера має кінцевий обсяг, і кількість операцій в одиницю часу є скінченою, то й математичні моделі, які підлягають комп'ютерній обробці, також повинні бути дискретними і скінченими.

ми. Так при моделюванні процесів у рідинах, що, як відомо, містять величезну кількість частинок, яка значно перебільшує обсяг оперативної пам'яті комп'ютера, для задоволення обмежуючих вимог комп'ютера при моделюванні рідину представляють як систему елементарних комірок, до складу кожної з яких входить дуже багато молекул ($\sim 10^4$), а це не що інше, як дискретизація, що закладається в модель.

Відмітимо ще один принциповий факт. Комп'ютери не оперують з дійсними числами нескінченної точності, вони працюють з числами, що мають деякий фіксований набір цифр. Кількість цифр у такому наборі визначається апаратними засобами і програмним забезпеченням. Арифметичні операції, що виконуються з дійсними числами, можуть призводити до специфічної похибки, яку називають *похибкою округлення*. Якби, наприклад, наш комп'ютер оперував з дійсними числами, що містять лише один десятковий розряд, то результатом множення 2,1 на 3,2 було б число 6,7. Походження похибок округлення дозволяє зрозуміти, по-перше, їхню невідворотність, і, по-друге, той негативний факт, що вони нагромаджуються в міру зростання обсягу обчислень. Щоб якоюсь мірою послабити похибки округлення, намагаються обирати або створювати такі алгоритми, у яких ці похибки помітним чином не нагромаджуються.

2.4.2. Особливості, пов'язані з методами роботи

В математиці добре відомі ситуації, коли рівняння складене, але не існує відомих методів його точного аналітичного розв'язування (тобто одержання розв'язку у вигляді точної формули). Не набагато легше й у тих випадках, коли метод розв'язування існує, але він є настільки трудомістким та громіздким, що розв'язування вимагає значних витрат часу. До того ж далеко не завжди буває необхідною дуже висока точність. Тому математики наполегливо працюють над розробкою так званих *чисельних методів* розв'язування рівнянь, що становить зміст окремого і дуже важливого розділу математики, який має назву *обчислювальна математика*.

Оскільки комп'ютерне моделювання в наш час є дуже розповсюдженим видом дослідницької та конструкторської діяльності, то для задоволення потреб користувачів спеціалістами вже створені і продовжують створюватись окремі пакети програм, призначені для роботи з математичними моделями – так звані *спеціалізовані середовища* для комп'ютерного моделювання.

Підсумки

1. Математичне моделювання є ефективним інструментом теоретичних досліджень і важливою складовою сучасної інформатики.

2. Задачі моделювання виникають з практики й не бувають чітко сформульованими: перед створенням моделі завжди має пройти процес постановки задачі.

3. Створення математичної моделі завжди починають з ідеалізації об'єкту на основі спрощуючих припущень. З метою більш глибокого вивчення об'єкту до попередньої спрощеної версії його моделі вводять нові фактори, які розглядають тепер як суттєві.

4. Якщо в процесі створення моделі комп'ютер іноді безпосередньо не використовується, він все одно буде наступною ланкою в роботі з моделлю. Тому слід враховувати дискретний принцип його дії, а також невідворотність появи похибок округлення.

5. Центральне місце в моделюванні посідає обчислювальний експеримент, який має на меті дослідити поведінку моделі внаслідок зміни вхідних даних: саме так виявляють особливості перебігу процесу чи явища за різних умов.

6. Оскільки ніколи не існує повної впевненості в тому, що створена модель правильно відтворює описуване нею явище (процес), то завжди необхідною є перевірка моделі на адекватність.

7. Заключним етапом у моделюванні є аналіз результатів і формулювання висновків. Слід розуміти, що ці висновки справджуються лише в межах прийнятих припущень, поширювати їх поза ці межі, строго кажучи, не можна. Якщо ж інколи і вдаються до такого кроку, то йдуть на це свідомо і аналізують результати особливо обережно.

Для практичної роботи з моделлю (обчислювального експерименту) принциповим є *вибір середовища для моделювання* конкретної задачі. Найпростішим середовищем, яке задовольняє основні вимоги до подання результатів моделювання, є *електронні таблиці*, якими ми й скористуємось.

Загальні зауваження стосовно моделювання не можуть утворити більш-менш цілісного уявлення про цю непросту, але цікаву роботу, яку фахівці часто розглядають як мистецтво. Отже перейдемо до практичного вивчення прикладів.

Розділ 2. Найперші моделі

Пристаюючи до вивчення комп'ютерного моделювання, ми розглянемо задачі, які не вимагатимуть спеціальних знань з якоїсь певної предметної галузі. На прикладі їх розв'язування ми зможемо отримати початкові уявлення про основні етапи та деякі прийоми такої роботи.

Першою пропонується задача про поширення чуток. Навряд чи багатьох людей хвилювали проблеми, пов'язані з процесом поширення чуток, проте, як і більшість задач, що реально виникають на практиці, вона є прикладом типової задачі моделювання, а саме задачі із нечітко (погано) сформульованою умовою, чим суттєво відрізняється від звичних задач із підручників.

З метою закріплення умінь і навичок, набутих при роботі над задачею про поширення чуток, слідом за нею пропонується задача про створення й дослідження вкрай спрощеної моделі епідемії. На відміну від задачі про чутки тут наводяться тільки текстові коментарі і повністю відсутні зразки будь-яких таблиць і графіків. Цю частину роботи вам доведеться виконати самостійно, користуючись зразками з попередньої задачі. Наприкінці вам треба буде продумати й реалізувати більш досконалі версії цієї моделі.

Одразу ж зауважимо, що за змістом пропонованих ідей розглянуті нижче підходи до розв'язування задачі не є єдино можливими, і ця багатоваріантність підходів також є характерною ознакою задач моделювання.

Глава 3. Модель процесу поширення чуток

Постановка задачі

Сучасні засоби масової інформації (радіо, телебачення, преса, телеграф, Інтернет) дозволяють у короткий термін донести будь-куди які завгодно новини. Незважаючи на це і понині продовжує існувати давній спосіб передавання інформації – від людини до людини, – який здебільшого стосується чуток. При всій його часом удаваній недосконалості цей спосіб сьогодні може бути настільки ефективним (телефонний зв'язок, електронна пошта), що здатний легко конкурувати навіть із телебаченням. То ж спробуємо змоделювати процес поширення чуток у межах деякого населеного пункту. Метою моделювання поставимо пошук відповіді на питання:

Скільки мешканців знатимуть новину через деякий час, якщо у початковий момент вона відома лише кільком з них?

Визначимо загальний план наступної роботи.

1. З метою формалізації задачі і створення її змістової (концептуальної) моделі введемо певні кількісні характеристики процесу. Встановлення зв'язків між цими характеристиками у вигляді математичних співвідношень дозволить створити математичну модель.

2. Як це часто роблять у моделюванні, спочатку ми розглянемо найпростішу версію моделі, яку в подальшому будемо вдосконалювати.

3. Кожну чергову версію будемо завершувати аналізом отриманих результатів. Головна мета такого аналізу – виявлення найбільш слабких місць у створеній моделі і пошук шляхів щодо їх подолання в напрямі підвищення реалістичності (адекватності) моделі. Здебільшого джерелом слабких місць виявляються занадто спрощені припущення. Саме їх необхідно буде замінювати на складніші в надії на те, що вони виявляться й більш продуктивними.

Аналіз проблеми: особливості перебігу процесу

1. У різних розповідачів проміжки часу між послідовними передаваннями так само, як і тривалість цих передавань можуть набувати довільних випадкових значень.

2. Серед слухачів трапляються такі, котрим чуток ще невідома, і такі, що її вже знають, тобто “отримують” її повторно. Цілком природно, що за таких обставин деякі з цих останніх (повторних) можуть або втрачати інтерес до її подальшого поширення, або ж продовжу-

вати її розповсюдження.

3. Окремі люди розрізняються за ознакою здатності до спілкування (рівнем комунікабельності), і більш говірливі з них (назвемо їх *балакунами*) за однакових умов передають новину більшої кількості слухачів, ніж решта – *звичайні* розповідачі. Відомо, що деякі люди взагалі не люблять що-небудь розповідати. Це *мовчуни*.

4. З кожним наступним передаванням кількість знавців новини зростає, і за умови сталого чисельного складу мешканців пошук чергових слухачів із часом стає справжньою проблемою полювання на “вільні вуха”. Врешті має статися щось одне: або поширення чутки припиниться, або ж чутка буде “циркулювати” серед мешканців за принципом “я знаю, що ти знаєш, але все одно послухай...”.

Кожний із наведених вище факторів здатний суттєво ускладнити вивчення процесу, а про їх одночасний прояв годі й говорити.

3.1. Найпростіша версія моделі

З метою спрощення ситуації приймемо ряд припущень.

Припущення 1. Сеанси передавання починаються одночасно для всіх розповідачів і мають однакову тривалість.

Припущення 2. Кожен знавець чутки розповсюджує її протягом усього обраного нами часу моделювання, не вносячи при цьому спотворень.

Припущення 3. При кожному черговому передаванні інформація має потрапляти лише до осіб, які нею раніше не володіли. Для виконання цієї умови слід перш, ніж передати чутку, задати питання: “А ви чули, що ...?”.

Реально поширення чуток відбувається не цілодобово. Адже у переважної більшості людей є чимало й інших важливих справ, і найчастіше люди спілкуються не з метою слухання й розповсюдження чуток.

Припустимо, що тривалість одного сеансу передавання становить 2 години і за добу відбувається 6 сеансів. Якщо нас цікавитиме кількість знавців новини, наприклад, через 4 доби, то такому термінові буде відповідати час моделювання $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ годин. А за умови, що сеанс триватиме 1 годину і відбуватиметься 10 разів на добу, то за ті самі 4 доби час моделювання становитиме $1 \cdot 10 \cdot 4 = 40$ годин. Тому зручнішим видається *підрахунок кількості знавців новини не через певний час, а після певної кількості сеансів передавання*. В такому разі доцільно скоригувати мету моделювання, а саме:

Скільком людям чутка стане відомою після j сеансів передаван-

ня, якщо у початковий момент вона відома лише декільком з них?

Формалізуємо задачу. Введемо такі кількісні характеристики:

j – порядковий номер сеансу передавання ($j = 0, 1, 2, \dots$);

N_0 – початкова ($j = 0$) кількість знавців новини (чутки);

N_j – кількість знавців після j -го сеансу.

Нехай кожен знавець передає чутку k новим особам. В такому разі для виконання *Припущення 3* необхідно, щоб протягом сеансу передавання кожен знавець знаходив k осіб, яким чутка ще невідома.

Тут N, j, k – додатні цілі числа.

Як зазначалося вище, параметр k у різних людей може мати різні значення в залежності від рівня їхньої індивідуальної здатності до спілкування і, крім того, за різних обставин він може випадково змінюватися в часі. У зв'язку з цим приймемо ще одне

Припущення 4. Будемо вважати параметр k однаковим для всіх знавців і незмінним у часі.

Тоді, наприклад, $k = 2$ означатиме, що протягом усього часу моделювання кожен знавець за один сеанс передавання розповідає чутку двом новим особам, а кожен з тих двох у наступному сеансі передаватиме чутку двом іншим і т.д.

Якщо після $(j-1)$ -го сеансу інформацією володіють N_{j-1} осіб, то після наступного сеансу з номером j кількість знавців збільшиться на

$$\Delta N = N_{j-1} k, \quad (1)$$

а їхня загальна кількість становитиме

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N, \quad (2)$$

або, з урахуванням (1),

$$N_j = N_{j-1} (1 + k). \quad (3)$$

Системи рівнянь (1) і (2) або (1) і (3) являють собою найпростішу математичну модель задачі про поширення чуток.

Зауваження. У відповідності з нашою домовленістю в розглядуваній моделі час t явно не фігурує, тобто рівняння (1) і (2) не містять змінної t , але при потребі час t можна знайти за виразом $t = j \cdot \Delta t$, де Δt – тривалість одного сеансу передавання.

Таким чином, задачу формалізовано і створено її математичну модель.

3.1.1. Алгоритм роботи з моделлю

1. Створити за поданим нижче зразком електронну таблицю і заповнити її перший рядок іменами стовпців, а у стовпець D (“Дано:”) занести позначення (імена) параметрів моделі N_0, k разом із знаком “=”.

	A	B	C	D	E
1	j	ΔN	N	Дано:	
2				$N_0 =$	
3				$k =$	
...		

2. Увести до комірок E2 та E3 числові значення вхідних даних. Наприклад, 1 і 2 відповідно ($N_0 = 1$ і $k = 2$).

3. Заповнити другий рядок (початкові умови):

3.1. $j = 0$ – початковий номер сеансу передавання;

3.2. $\Delta N = 0$ – перед першим сеансом приріст ΔN кількості знавців новини дорівнює нулеві;

3.3. $N = N_0$ – посиланням на комірку E2 з “Дано:”.

Відповідні комірки таблиці матимуть такий уміст:

комірка	формули / числа
A2	0
B2	0
C2	=\$E\$2

4. Заповнити третій рядок, тобто вписати формули, що відповідають рівнянням (1) і (2) для $j = j + 1 = 0 + 1 = 1$ – номер наступного сеансу передавання:

комірка	формули / числа
A3	=A2+1
B3	=C2*\$E\$3
C3	=C2+B3

5. Команди третього рядка повторювати n разів, де n – кількість передавань, що моделюються (в нашому прикладі $n = 20$). Для цього слід копіювати всі формули третього рядка в n наступних рядків.

6. За даними таблиці побудувати графіки залежності $\Delta N = \Delta N(j)$ і $N = N(j)$.

3.1.2. Обчислювальний експеримент

Нехай, наприклад, у населеному пункті, всі мешканці якого мають параметр передавання $k = 2$, з'являється $N_0 = 1$ знавець чутки з таким самим параметром передавання. Скільком людям новина буде відомою після $n = 20$ сеансів передавання?

Підставляючи вхідні дані до комірок E2 та E3, одержуємо таблицю, фрагмент якої поданий на рис. 3.1. Тут видно, що в міру збільшення числа передавань відбувається стрімке зростання кількості знавців чутки. З таблиці також видно, що послідовні значення приро-

сту ΔN та кількості знавців N утворюють геометричні прогресії зі знаменником 3.

	A	B	C	D	E
1	j	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	1	$N_0 = 1$	
3	1	2	3	$k = 2$	
4	2	6	9		
5	3	18	27		
6	4	54	81		
7	5	162	243		
8	6	486	729		
9	7	1458	2187		
...		

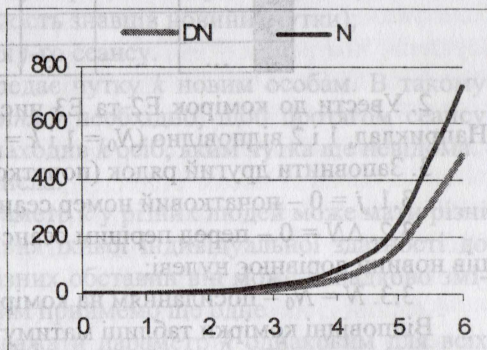


Рис. 3.1

Зуваження. Змінні ΔN і N за своїм змістом є цілими числами. Слід прийняти до уваги, що електронні таблиці дозволяють подати дійсні числа у форматі цілих з урахуванням правил округлення. Але при цьому в пам'яті комп'ютера ці числа будуть залишатись у форматі дійсних чисел з максимально можливою для даного табличного процесора кількістю розрядів. У всіх арифметичних операціях вони будуть фігурувати саме в такому форматі.

Вправа

1. З метою перевірки останнього Зуваження в будь-яку вільну комірку введіть формулу (вираз): $=22/7$.

1.1. Подайте результат у форматі "Цілі".

1.2. Далі скопіюйте без формул вміст цієї комірки в яку-небудь іншу вільну комірку і збільште розміри цієї комірки так, щоб побачити всі десяткові розряди.

2. Яка кількість рядків таблиці на рис. 3.1 було використано для побудови відповідного графіка? Які це рядки?

3. Аналізуючи вирази (1), (2) і (3), дайте відповіді на питання:

3.1. Чому при значенні параметра передавання $k = 2$ обидві прогресії значень ΔN і N мають знаменник 3?

3.2. При $N_0 = 1$ після шостого передавання кількість знавців становить 729. Якщо початкову кількість знавців збільшити в 10 разів (тобто взяти $N_0 = 10$), то чи можна стверджувати, що в 10 разів скоротиться число передавань j , потрібних для ознайомлення з чуткою такої самої кількості людей (729), що й при $N_0 = 1$? Свою відпо-

вiд перевiрте експериментально

У данiй версiї моделi процес поширення чутки вiдбувається так швидко, що вже пiсля 13-го передавання кiлькiсть знавцiв перевищує 2 мiльйони, а ще через два-три передавання стає бiльшою за населення будь-якого мiста у свiтi: геометрична прогресiя демонструє свiй крутий характер.

Якщо прийняти число передавань за добу рiвним 10, то зазначений ефект буде досягнутий швидше, нiж за двi доби. Зрозумiло, що такий хiд подiй не вiдповiдає дiйсностi, тобто побудована модель не є адекватною щодо реальних ситуацiй, i виникає потреба в покращеннi моделi. Але перш, нiж перейти до створення бiльш досконалої моделi, виконаємо деякi вправи з цiєї розглянутої.

Поцiкавимося тим, скiльки сеансiв передавання має вiдбутися, щоб чутка обiйшла усiх мешканцiв населеного пункту. Одразу ж з'являється природне бажання ввести до розгляду загальну кiлькiсть мешканцiв. Тодi, порiвнюючи це число зi значеннями змiнної N_j , ми зможемо дати вiдповiдь на поставлене питання. То ж i приймемо чергове

Припущення 5. Нехай протягом часу моделювання кiлькiсний склад розглядуваної групи залишається сталим (серед мешканцiв немає нi смертей, нi iзоляцiї, нiхто не вибуває й не прибуває). Для не дуже великих груп i не дуже тривалих промiжкiв часу з цим можна погодитися.

Тепер зробимо iнформацiю, що виводиться на екран, дещо бiльш зручною для огляду й аналізу. З цiєю метою штучно створимо обмеження кiлькостi знавцiв N_j так, щоб вона не перевищувала загальної чисельностi S мешканцiв населеного пункту.

З цiєю метою вдасмося до деяких змiн у алгоритмi:

– п. 2: додати до вхiдних даних нову змiнну S (комiрка D4) – чисельнiсть населення (наприклад, 10000 – комiрка E4);

комiрка	число
E4	10000

– п. 4.2: обчислити ΔN згiдно виразу (1)

якщо кiлькiсть знавцiв N_j не менша за S

то у наступному рядку виконати надання (при-
своювання) $\Delta N = S - N_{j-1}$

iнакше ΔN залишити попереднiм

все

Вiдповiдно у таблицi

комірка	формула
B3	=ЕСЛИ(C2*\$E\$3>=\$E\$4;\$E\$4-C2;C2*\$E\$3)

– п. 4.3:

якщо $N_{j-1} + \Delta N$ не менше за S
то у наступному рядку виконати надання $N_j = S$
інакше $N_j = N_{j-1} + \Delta N$
все

У таблиці це реалізувати наступною формулою:

комірка	формула
C3	=ЕСЛИ(B3=0;\$E\$4;C2+B3)

Решту пунктів алгоритму залишити без змін.

Перегляд нової таблиці (рис. 3.2) доводить, що поставленої мети досягнуто: тепер достатньо одного погляду, щоб одразу встановити, після якого передавання все населення стає інформованим. Одночасно з таблиці зникає зайва інформація.

	A	B	C	D	E
1	j	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	1	$N_0 = 1$	
3	1	2	3	$K = 2$	
4	2	6	9	$S = 10000$	
5	3	18	27		
6	4	54	81		
7	5	162	243		
8	6	486	729		
9	7	1458	2187		
10	8	4374	6561		
11	9	3439	10000		
12	10	0	10000		
...		

Рис. 3.2

Висновки

1. Розглянута версія моделі є украй спрощеною. Покладені в її основу *Припущення* 1–5 приводять до результату, який неважко було передбачити заздалегідь і без моделювання. А саме: чисельність знавців у міру зростання кількості передавань швидко й необмежено зростає.

2. Поява обмеження чисельності знавців принципово не робить модель більш вірогідною. Адже ми розуміємо, що вжиті задля цього дії мають відверто штучний характер: обмеження кількості знавців

аж ніяк не впливає із самої моделі (системи рівнянь).

3. На цьому етапі роботи ми не повинні серйозно обговорювати питання про відповідність між моделлю і розглядуваним процесом (питання про адекватність моделі): якщо вона навіть існує, то є украй поверховою.

Зауваження. При обговоренні питання про адекватність математичної моделі слід мати на увазі не адекватність взагалі (такої просто не існує), а адекватність відносно певних ознак або властивостей об'єкту. Зокрема, для даної моделі такою властивістю є динаміка зміни чисельності знавців новини. Ігнорування тієї обставини, що адекватність моделі є лише відносним фактом, може призвести до грубих помилок, заснованих на безконтрольному приписуванні реальному об'єкту властивостей його моделі. Саме тому не варто серйозно сприймати результат, згідно з яким через 15 сеансів передавання кількість знавців новини згідно рис. 3.1 перебільшуватиме населення Землі.

4. Основне значення даної версії полягає в тому, що вона може бути використана як основа для подальшого поліпшення моделі.

5. Згідно з п. 1 обчислювального експерименту вираз (3)

$$N_j = N_{j-1} (1 + k)$$

задає геометричну прогресію, суму її перших j членів можна знайти за відомою формулою

$$S_j = N_0 \cdot (1 + k)^j.$$

Варто звернути увагу на те, що існує чимало об'єктів, які описуються цією формулою *точно*, проте не мають ніякого відношення до поширення чуток. Зокрема, якщо N_0 – розмір початкового грошового внеску, а k – річний банківський відсоток, то S_j – розмір внеску через j років. В даному прикладі j – обов'язково натуральне число. У ряді інших випадків j може набувати дійсних значень.

А чи можете ви навести подібний приклад?

3.2. Поліпшена версія моделі

Припущення, використані нами у попередній версії, були занадто простими, тому й результати роботи з моделлю практично виявилися нецікавими. Перейдемо до вдосконалення моделі.

Згідно з *Припущенням 4* наша модель передбачає однорідний за ознакою балакучості склад населення. У житті такого фактично не буває. Тому, насамперед, частково знімемо це обмеження і сформулюємо

*Припущення 4**. Будемо вважати, що населення складається з

трьох груп: звичайних людей з параметром передавання $k_{зв}$, балакунів з параметром передавання k_b ($k_b > k_{зв}$) та мовчунів з параметром передавання $k_m = 0$. При цьому, як і раніше, значення відповідних параметрів вважатимемо незмінними в часі.

Нехай доля мовчунів становить M , а балакунів – B від усієї кількості населення. Тоді доля Z звичайних знавців становитиме

$$Z = 1 - M - B.$$

Не викликає серйозних заперечень твердження, що за достатньо великої чисельності населення у такий самий спосіб розподіляються відповідні долі й серед знавців новини. Так, наприклад, якщо доля мовчунів серед усього населення становить M , то й серед знавців ця доля буде також M .

Тепер приріст ΔN кількості знавців після j -го передавання буде забезпечуватися балакунами та звичайними людьми і становитиме

$$\Delta N = \underbrace{N_{j-1} \cdot B \cdot k_b}_{\text{за рахунок балакунів}} + \underbrace{N_{j-1} \cdot k_{зв} \cdot (1 - M - B)}_{\text{за рахунок звичайних}} \quad (4)$$

або

$$\Delta N = N_{j-1} (B \cdot k_b + k_{зв} \cdot Z); \quad (5)$$

загальна ж кількість знавців шукатиметься, як і раніше згідно (2):

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N,$$

або з урахуванням (5)

$$N_j = N_{j-1} (1 + B \cdot k_b + k_{зв} \cdot Z), \quad (5^*)$$

Рівняння (5) і (2) або (5) і (5*) являють собою поліпшену математичну модель процесу

Модифікована таблиця має такий вигляд:

	A	B	C	D	E
1	j	ΔN	N	Дано:	
2				$M =$	
3				$B =$	
4				$k_b =$	
5				$k_{зв} =$	
6				$N_0 =$	
...		

У відповідності до нових рівнянь потребує певних змін і

3.2.1. Алгоритм роботи з моделлю

– п. 2: до вхідних даних замість колишнього k додати нові параметри M , B , k_b і $k_{зв}$: (комірки E2–E5 відповідно), а параметр N_0 пе-

ренести до комірки E6.

п. 4.2: обчислювати приріст ΔN кількості знавців згідно (5):

комірка	формула
B3	$=C2*(\$E\$3*\$E\$4+\$E\$5*(1-\$E\$2-\$E\$3))$

Значення параметрів M і B повинні задовольняти умові $M+B \leq 1$, тому з метою хоч би часткового запобігання некоректного введення значень цих параметрів слід після заповнення комірок E2 та E3 в разі необхідності виводити на екран відповідне повідомлення. Для цього в комірці E8 слід створити формулу

$$=ЕСЛИ(E2+E3>1;"Має бути M+B<=1!";"")$$

Решту пунктів алгоритму залишити без змін.

3.2.2. Обчислювальний експеримент

1. Вважатимемо, для прикладу, що за ознакою балакучості мешканці деякого населеного пункту розподіляються у такий спосіб: доля мовчунів M становить 0,75 (75%), доля балакунів – 0,1 (10%), решта $Z = 1 - M - B$ – доля звичайних людей. Параметри передавання $k_b = 3$, $k_{zv} = 2$. Серед мешканців з'являється $N_0 = 1$ знавець чутки. Скільки людей знатимуть новину після $n = 22$ сеансів передавання?

2. Вводимо дані й одержуємо відповідну таблицю (рис. 3.3).

	A	B	C	D	E
1	j	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	1	$M = 0,75$	
3	1	1	2	$B = 0,1$	
4	2	1	3	$k_b = 3$	
5	3	2	4	$k_{zv} = 2$	
6	4	2	7	$N_0 = 1$	
7	5	4	10		
8	6	6	17		
9	7	10	27		
...		

Рис. 3.3

2.1. Чи утворює послідовність значень змінної N_j геометричну прогресію? Чому?

Якщо ваша відповідь негативна, то ви помиляєтесь. В оману вас увела саме несподіваність питання стосовно послідовності такого незвичного вигляду. По-перше, не слід забувати, що дійсні числа у комірках таблиці представлені у форматі цілих. По-друге, погляньте на вираз (5*): з нього видно, що кожний наступний член N_j послідо-

вності дорівнює попередньому N_{j-1} , помноженому на постійне число $q = 1 + k_6 \cdot B + k_{36} \cdot Z$. Отже, послідовність N_j -их – геометрична прогресія, а число q – її знаменник.

2.2. Напишіть формулу довільного члена утвореної послідовності у вигляді $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Для цього за нашими даними знайдіть конкретні значення N_1 (замість a_1), q і n .

2.3. Якого вигляду тепер набуде вираз для N_j ?

2.4. Створіть у таблиці після стовпця значень N новий стовець, у якому будуть обчислюватися значення N_j згідно виразу з п. 2.2:

$$N_j = N_1 \cdot (1 + k_6 \cdot B + k_{36} \cdot Z)^{j-1}.$$

Для цього в комірки D2 і D3 введіть вирази

комірки	формули
D2	=F\$6
D3	=C\$3*(1+F\$3*F\$4+F\$5*(1-F\$2-F\$3))^(A3-1)

2.5. Порівняйте значення N_j у стовпцях C і D, зробіть висновки.

2.6. Переконайтеся, що послідовність N_j є дійсно геометричною прогресією, можна й інакше – виходячи з означення такої послідовності, а саме: відношення N_j/N_{j-1} має бути сталим числом.

То ж видаліть зі стовпця D попередні значення і в комірці D3 створіть відповідну формулу =C3/C2, яку скопіюйте у решту комірок стовпця D. Як слід прокоментувати той факт, що значення всіх комірок стовпця D виявляються однаковими?

Тепер стовець D видаліть із таблиці.

3. З'ясуйте, як впливає на виведені значення N_j зміна параметрів M та B . З цією метою порівнюйте результати при початкових даних з результатами при

3.1. $M = 0,75$ і $B = 0,05$;

3.2. $M = 0,8$ і $B = 0,1$.

Прокоментуйте причини спостережуваних змін.

4. Поверніть параметрам M і B їхні початкові значення. Залишаючи їх незмінними, спробуйте одночасно підібрати для параметрів передавання k_{36} і k_6 такі нові значення, щоб у стовпці C залишилися попередні результати.

Коли вам набридне це заняття, введіть $k_{36} = 1$ і $k_6 = 4,5$ ($k_6 = 4,5$ можна інтерпретувати так: кожен балакун за два сеанси передавання знаходить 9 слухачів).

4.1. Звідки взяли ці числа 1 і 4,5? Чи існують інші такі пари? Скільки їх може бути? Інакше кажучи, чи існує зв'язок між парамет-

рами передавання k_{36} і k_6 за умовою п. 4?

На всі ці питання можна дати надійні відповіді, якщо знову звернутися до виразу (5*), який був переписаний у вигляді

$$N_j = N_{j-1} \cdot q,$$

де $q = 1 + k_6 \cdot B + k_{36} \cdot Z$.

Отже, ті самі значення N_j будуть з'являтися кожного разу, коли будуть забезпечені однакові значення для q : $q_1 = q_2$, тобто

$$B \cdot k_{61} + k_{361} \cdot Z = B \cdot k_{62} + k_{362} \cdot Z.$$

Це рівняння одночасно містить обидві невідомі k_{62} і k_{362} . Розв'язуючи його, наприклад, відносно k_{62} , маємо

$$k_{62} = \frac{B \cdot k_{61} + Z \cdot (k_{361} - k_{362})}{B}.$$

Беручи далі згідно умови $M = 0,75$; $B = 0,1$; $k_{361} = 2$; $k_{61} = 3$, отримуємо

$$k_{62} = \frac{0,6 - 0,15 \cdot k_{362}}{0,1},$$

або остаточно

$$k_{62} = 6 - 1,5 \cdot k_{362}.$$

Тепер можна надавати певних значень k_{362} і отримувати відповідні значення для k_{62} . Необхідно лише контролювати себе очевидними обмеженнями $k_{62} > 0$, $k_{362} > 0$, $k_{62} > k_{362}$.

Вправа

1. Дайте відповіді на питання п. 4.1.
2. Як і в п. 3 обчислювального експерименту попередньої версії моделі, створіть обмеження кількості знавців N_j так, щоб вона знов не перевищувала загальної чисельності S мешканців населеного пункту і порівняйте цю таблицю з таблицею попередньої версії.
3. За яких умов розглядувана версія моделі може бути зведена до попередньої?

Висновки

1. Поліпшена версія моделі є логічним продовженням попередньої і містить її як окремий випадок. Вона дещо цікавіша і більш реалістична, але все ще залишається дуже спрощеною і являє собою лише незначний крок уперед. Та й чого можна чекати від моделі, яка побудована на обмеженій кількості зовсім простих припущень?

2. Пошук відповідей на питання, поставлені у п. 4 при виконанні обчислювального експерименту, мав на меті продемонструвати одну з важливих особливостей роботи дослідника в процесі моделювання.

Суть її полягає в тому, що, виконуючи обчислювальний експеримент і аналізуючи його результати, можна, звичайно, пробувати шукати відповіді шляхом “сліпого” підбору, але значно ефективнішими є спроби розв’язання проблеми шляхом аналізу математичних співвідношень, покладених в основу моделі. Проте, як ми побачимо далі, в моделюванні часто трапляються випадки, коли дослідник позбавлений такої можливості, і тоді залишається єдиний шлях – саме підбір.

3. Знов, як і у попередній версії моделі, поява обмеження чисельності знавців не робить модель більш вірогідною. Причина та сама – обмеження кількості знавців є *штучним*, воно зовсім не впливає із самої моделі.

4. В обох розглянутих версіях моделі найбільш слабким місцем є вимога, сформульована у *Припущенні 3*. Дійсно, хіба обов’язково чутка має потрапляти лише до тих осіб, яким вона невідома? Якщо цю вимогу зняти, то це означатиме, що слухачами можуть стати й ті особи, котрим чутка вже відома (повторні знавці). Тим більше, що у житті часто саме так і відбувається.

3.3. Наступне вдосконалення моделі

Тепер почнемо не зовсім просту розмову про спосіб підрахунку кількості X повторних знавців.

Навіть, якщо у наступному сеансі виключити можливість повернення інформації від щойно спеченого знавця чутки до його безпосереднього інформатора, все одно інформація може повернутися до цього самого інформатора від кого-небудь з інших знавців. Це означає, що виключення згаданої можливості не є принциповим, тобто вже у наступному сеансі чутка може повернутися до того, хто поширював її у попередньому сеансі. Крім того, повторні знавці можуть з’явитися й при самому першому передаванні, якщо $N_0 > 1$ (дехто з початкових знавців може стати слухачем іншого початкового знавця). Отже, *підрахунок кількості X повторних знавців можна починати від самого першого сеансу передавання.*

Пригадаймо знайому ситуацію: на перерві зібралася невелика група учнів, які слухають новину від свого товариша. Всі, крім одного, зацікавлені. А цьому байдуже – поширювана чутка на цей момент йому вже відома. Він, як і будь-який інший знавець, і сам при нагоді завжди готовий передати її будь-кому, адже згідно *Припущення 2* кожен(!) знавець розповсюджує інформацію протягом усього часу моделювання. Скільки ж *нових* знавців з’являється внаслідок розглянутого передавання? Зрозуміло, що на одного менше, ніж було слу-

хачів у групі.

Таким чином, відмовляючись від *Припущення 3*, ми опиняємося перед необхідністю не зараховувати до числа нових знавців тих осіб, для яких чутка не є новою, тобто тих, хто отримує її повторно. І не тому, що в житті здебільшого інтерес являють лише нові відомості, а саме тому, що *повторні знавці не збільшують нової загальної кількості володарів новини*. Для врахування кількості таких людей можна скористатися різними ідеями. Розглянемо одну з можливих.

Будемо вважати, що на самому початку розповсюдження чутка є новою для всіх S мешканців населеного пункту. Після першого передавання загальна кількість знавців (для кого вона є новою разом з тими, кому вона вже відома – N_0) збільшиться на Δn (для приросту лише нових знавців ми, як і раніше, залишимо позначення ΔN). Зауважимо, що *повторні знавці можуть знаходитися тільки серед приросту Δn* , який будемо обчислювати за формулою (3) або (3*) з попередньої версії моделі.

Вираз $\Delta n/S$ має зміст тієї *доли* від усього населення, в межах якої доцільно шукати повторних знавців, а $Q = X/\Delta n$ – *доля повторних знавців у черговому прирості* ($Q \leq 1$).

Шукатимемо X у два кроки.

1. Спочатку приймемо

Припущення 6. Доля Q осіб, котрі під час чергового передавання одержують інформацію повторно, пропорційна $\Delta n/S$:

$$Q = G \frac{\Delta n}{S}, \quad (5)$$

де G – коефіцієнт, що *підбирається* шляхом експериментування.

2. Далі обчислимо абсолютну кількість X осіб, котрі одержують інформацію повторно,

$$X = Q \cdot \Delta n. \quad (6)$$

Тоді фактичний приріст ΔN кількості осіб, котрим новина надходить вперше, становитиме

$$\Delta N = \Delta n - X. \quad (7)$$

Діючи згідно (5)–(7) при кожному наступному передаванні, ми й надалі будемо знаходити приріст ΔN лише тих осіб, які одержуватимуть новину вперше. Обчислюючи далі

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N,$$

ми матимемо загальну кількість саме тих знавців, котрі поширюватимуть її в наступних передаваннях.

Тепер залишається внести відповідні зміни до алгоритму.

3.3.1. Алгоритм роботи з удосконаленою моделлю

– пп. 1, 2: вхідні дані вирізати зі стовпця Е і перенести у стовець Н; до вхідних даних додатково ввести змінні S та G (комірки Н2 та Н8, решту параметрів розташувати у Н3–Н7 в зазначеному раніше порядку). В утворених трьох нових стовпцях будемо вести спостереження за поведінкою змінних Δn , X та Q (D, E та F відповідно).

– п. 4.2:

$Z = 1 - M - B$ – доля звичайних передавачів;

$\Delta n = N_{j-1} \cdot (B \cdot k_b + Z \cdot k_{za})$ – як і у попередній версії моделі, але тут Δn – тимчасове значення змінної ΔN ;

$Q = G \frac{\Delta n}{S}$ – доля осіб, які одержують чутку повторно;

G – коефіцієнт, що добирається шляхом експериментування;

$X = Q \cdot \Delta n$ – кількість осіб, котрі під час чергового передавання одержують чутку повторно;

$\Delta N = \Delta n - X$ – остаточний приріст кількості нових знавців (лише тих, котрим чутка надходить вперше).

Відповідні комірки таблиці мають такий уміст:

комірка	Формули / числа
A3	=A2+1
B3	=D3-E3
D3	=C2*($\$H\$4*\$H\$5+(1-\$H\$3-\$H\$4)*\$H\6)
E3	=F3*D3
F3	= $\$H\$8*D3/\$H\2

– п. 4.3 залишити без змін: $N_j = N_{j-1} + \Delta N$,

тут N_j – остаточна кількість знавців новини, здатних до її поширення після передавання з порядковим номером j .

У відповідній комірці С3 таблиці, як і для попередньої версії моделі, це матиме таке відображення:

комірка	формула
C3	=C2+B3

– так само без змін залишити п. 5:

– формули з комірок А3, В3, С3, D3; Е3 та F3 копіювати в решту комірок стовпців А, В, С, D, Е та F відповідно.

3.3.2. Обчислювальний експеримент

1. Нехай $S = 10000$; $M = 0,6$; $B = 0,05$; $k_b = 4$; $k_{za} = 2$; $N_0 = 1$; $G = 1,5$ (рис. 3.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	j	ΔN	N	Δn	X	Q	Дано:	
2	0	0	1	0	0	0,000000	$S = 10000$	
3	1	1	2	1	0	0,000135	$M = 0,6$	
4	2	2	4	2	0	0,000256	$B = 0,05$	
5	3	3	7	3	0	0,000487	$k_6 = 4$	
6	4	6	13	6	0	0,000926	$k_{36} = 2$	
7	5	12	25	12	0	0,001758	$N_0 = 1$	
...	$G = 1,5$	
24	22	0	7407	6667	6667	1,000000		
25	23	0	7407	6667	6667	1,000000		

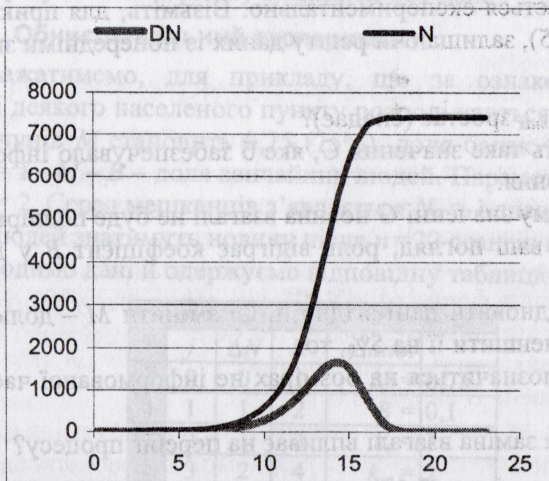


Рис. 3.4

Розглядаючи утворену таблицю, звертаємо увагу на такі:

1.1. На початку процесу ймовірність появи повторних знавців (її характеризує Q) дуже мала, але поступово вона зростає до 1 (100%), тобто всі нові знавці з часом стають повторними.

1.2. Приріст ΔN дорівнює зміні числа знавців за одне передавання, тому ΔN характеризує швидкість поширення новини. З таблиці видно, що на початку процесу ця швидкість також дуже мала. У міру перебігу процесу його швидкість повільно зростає до максимуму, а далі швидко спадає до нуля і залишається такою на всю решту часу моделювання. Одночасно перестав змінюватися (зростати) загальна чисельність N_j знавців новини.

1.3. Виведемо на екран графіки залежностей $\Delta N = \Delta N(j)$ та $N(j)$ і переконаймося у сказаному вище.

1.4. Привертає увагу принципово новий і в певній мірі несподіваний факт:

$$N_{j \max} < S.$$

Це означає, що за прийнятих вхідних даних частина населення може так і залишитись не інформованою.

2. Проаналізуйте розміри цієї не інформованої частини $S - N_{j \max}$ в залежності від різних чинників.

2.1. З'ясуйте, насамперед, залежність $N_{j \max}$ від коефіцієнта пропорційності G у виразі (5), про який було сказано, що його значення добирається експериментально. Візьміть, для прикладу, $G = 1$ (а далі $G = 0,5$), залишаючи решту даних із попередніми значеннями.

Вправа

1. Чому $N_{j \max}$ зростає (спадає)?
2. Підберіть таке значення G , яке б забезпечувало інформованість усього населення.
3. При якому значенні G новина взагалі не буде поширюватись?
4. Яку, на ваш погляд, роль відіграє коефіцієнт B у даній версії моделі?
5. Якщо відновити дані згідно п. 1 і змінити M – долю мовчунів, наприклад, зменшити її на 5%, то:
 - а) як це позначиться на розмірах не інформованої частини населення?
 - б) як така заміна взагалі впливає на перебіг процесу?

2.2. Повторіть п. 2.1 почергово для решти вхідних даних ($B, Z, k_b, k_{зв}, N_0$). Кожного разу намагайтеся пояснити причини спостережуваних подій.

2.3. Наступне дослідження заслуговує на особливу увагу.

Знов поверніться до п. 2.2 у тій його частині, де пропонується експериментування з параметрами k_b і $k_{зв}$. Надайте їм таких значень: $k_b = 7, k_{зв} = 5$. Таблиця набуває незвичного і незрозумілого вигляду:

- у послідовних сусідніх комірках стовпця для ΔN з'являються додатні й від'ємні значення з великою різницею, які весь час чергуються;
- у рядках, що відповідають від'ємним числам, $Q > 1$;
- взагалі в цій частині таблиці спостерігаються коливання значень всіх змінних.

Можливо, при виконанні попередніх експериментів перед вами

ренести до комірки Е6.

п. 4.2: обчислювати приріст ΔN кількості знавців згідно (5):

комірка	формула
B3	=C2*(E\$3*E\$4+E\$5*(1-E\$2-E\$3))

Значення параметрів M і B повинні задовольняти умові $M+B \leq 1$, тому з метою хоч би часткового запобігання некоректного введення значень цих параметрів слід після заповнення комірок E2 та E3 в разі необхідності виводити на екран відповідне повідомлення. Для цього в комірці E8 слід створити формулу

$$=ЕСЛИ(E2+E3>1;"Має бути M+B<=1!";"").$$

Решту пунктів алгоритму залишити без змін.

3.2.2. Обчислювальний експеримент

1. Вважатимемо, для прикладу, що за ознакою балакучості мешканці деякого населеного пункту розподіляються у такий спосіб: доля мовчунів M становить 0,75 (75%), доля балакунів – 0,1 (10%), решта $Z = 1 - M - B$ – доля звичайних людей. Параметри передавання $k_b = 3$, $k_{zb} = 2$. Серед мешканців з'являється $N_0 = 1$ знавець чутки.

Скільки людей знатимуть новину після $n = 22$ сеансів передавання?

2. Вводимо дані й одержуємо відповідну таблицю (рис. 3.3).

	A	B	C	D	E
1	j	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	1	$M = 0,75$	
3	1	1	2	$B = 0,1$	
4	2	1	3	$k_b = 3$	
5	3	2	4	$k_{zb} = 2$	
6	4	2	7	$N_0 = 1$	
7	5	4	10		
8	6	6	17		
9	7	10	27		
...		

Рис. 3.3

2.1. Чи утворює послідовність значень змінної N_j геометричну прогресію? Чому?

Якщо ваша відповідь негативна, то ви помиляєтесь. В оману вас увела саме несподіваність питання стосовно послідовності такого незвичного вигляду. По-перше, не слід забувати, що дійсні числа у комірках таблиці представлені у форматі цілих. По-друге, погляньте на вираз (5*): з нього видно, що кожний наступний член N_j послідо-

вності дорівнює попередньому N_{j-1} , помноженому на постійне число $q = 1 + k_b \cdot B + k_{38} \cdot Z$. Отже, послідовність N_j -их – геометрична прогресія, а число q – її знаменник.

2.2. Напишіть формулу довільного члена утвореної послідовності у вигляді $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Для цього за нашими даними знайдіть конкретні значення N_1 (замість a_1), q і n .

2.3. Якого вигляду тепер набуде вираз для N_j ?

2.4. Створіть у таблиці після стовпця значень N новий стовпець, у якому будуть обчислюватися значення N_j згідно виразу з п. 2.2:

$$N_j = N_1 \cdot (1 + k_b \cdot B + k_{38} \cdot Z)^{j-1}$$

Для цього в комірки D2 і D3 уведіть вирази

комірки	формули
D2	=F\$6
D3	=C\$3*(1+F\$3*F\$4+F\$5*(1-F\$2-F\$3))^(A3-1)

2.5. Порівняйте значення N_j у стовпцях C і D, зробіть висновки.

2.6. Переконайтеся, що послідовність N_j є дійсно геометричною прогресією, можна й інакше – виходячи з означення такої послідовності, а саме: відношення N_j/N_{j-1} має бути сталим числом.

То ж видаліть зі стовпця D попередні значення і в комірці D3 створіть відповідну формулу =C3/C2, яку скопіюйте у решту комірок стовпця D. Як слід прокоментувати той факт, що значення всіх комірок стовпця D виявляються однаковими?

Тепер стовпець D видаліть із таблиці.

3. З'ясуйте, як впливає на виведені значення N_j зміна параметрів M та B . З цією метою порівняйте результати при початкових даних з результатами при

3.1. $M = 0,75$ і $B = 0,05$;

3.2. $M = 0,8$ і $B = 0,1$.

Прокоментуйте причини спостережуваних змін.

4. Поверніть параметрам M і B їхні початкові значення. Залишаючи їх незмінними, спробуйте одночасно підібрати для параметрів передавання k_{38} і k_b такі нові значення, щоб у стовпці C залишилися попередні результати.

Коли вам набридне це заняття, введіть $k_{38} = 1$ і $k_b = 4,5$ ($k_b = 4,5$ можна інтерпретувати так: кожен балакун за два сеанси передавання знаходить 9 слухачів).

4.1. Звідки взялися ці числа 1 і 4,5? Чи існують інші такі пари? Скільки їх може бути? Інакше кажучи, чи існує зв'язок між параметрами

рами передавання k_{36} і k_6 за умовою п. 4?

На всі ці питання можна дати надійні відповіді, якщо знову звернутися до виразу (5*), який був переписаний у вигляді

$$N_j = N_{j-1} \cdot q,$$

де $q = 1 + k_6 \cdot B + k_{36} \cdot Z$.

Отже, ті самі значення N_j будуть з'являтися кожного разу, коли будуть забезпечені однакові значення для q : $q_1 = q_2$, тобто

$$B \cdot k_{61} + k_{361} \cdot Z = B \cdot k_{62} + k_{362} \cdot Z.$$

Це рівняння одночасно містить обидві невідомі k_{62} і k_{362} . Розв'язуючи його, наприклад, відносно k_{62} , маємо

$$k_{62} = \frac{B \cdot k_{61} + Z \cdot (k_{361} - k_{362})}{B}.$$

Беручи далі згідно умови $M = 0,75$; $B = 0,1$; $k_{361} = 2$; $k_{61} = 3$, отримуємо

$$k_{62} = \frac{0,6 - 0,15 \cdot k_{362}}{0,1},$$

або остаточно

$$k_{62} = 6 - 1,5 \cdot k_{362}.$$

Тепер можна надавати певних значень k_{362} і отримувати відповідні значення для k_{62} . Необхідно лише контролювати себе очевидними обмеженнями $k_{62} > 0$, $k_{362} > 0$, $k_{62} > k_{362}$.

Вправа

1. Дайте відповіді на питання п. 4.1.
2. Як і в п. 3 обчислювального експерименту попередньої версії моделі, створіть обмеження кількості знавців N_j так, щоб вона знов не перевищувала загальної чисельності S мешканців населеного пункту і порівняйте цю таблицю з таблицею попередньої версії.
3. За яких умов розглядувана версія моделі може бути зведена до попередньої?

Висновки

1. Поліпшена версія моделі є логічним продовженням попередньої і містить її як окремий випадок. Вона дещо цікавіша і більш реалістична, але все ще залишається дуже спрощеною і являє собою лише незначний крок уперед. Та й чого можна чекати від моделі, яка побудована на обмеженій кількості зовсім простих припущень?

2. Пошук відповідей на питання, поставлені у п. 4 при виконанні обчислювального експерименту, мав на меті продемонструвати одну з важливих особливостей роботи дослідника в процесі моделювання.

Суть її полягає в тому, що, виконуючи обчислювальний експеримент і аналізуючи його результати, можна, звичайно, пробувати шукати відповіді шляхом “сліпого” підбору, але значно ефективнішими є спроби розв’язання проблеми шляхом аналізу математичних співвідношень, покладених в основу моделі. Проте, як ми побачимо далі, в моделюванні часто трапляються випадки, коли дослідник позбавлений такої можливості, і тоді залишається єдиний шлях – саме підбір.

3. Знов, як і у попередній версії моделі, поява обмеження чисельності знавців не робить модель більш вірогідною. Причина та сама – обмеження кількості знавців є *штучним*, воно зовсім не впливає із самої моделі.

4. В обох розглянутих версіях моделі найбільш слабким місцем є вимога, сформульована у *Припущенні 3*. Дійсно, хіба обов’язково чутка має потрапляти лише до тих осіб, яким вона невідома? Якщо цю вимогу зняти, то це означатиме, що слухачами можуть стати й ті особи, котрим чутка вже відома (повторні знавці). Тим більше, що у житті часто саме так і відбувається.

3.3. Наступне вдосконалення моделі

Тепер почнемо не зовсім просту розмову про спосіб підрахунку кількості X повторних знавців.

Навіть, якщо у наступному сеансі виключити можливість повернення інформації від щойно спеченого знавця чутки до його безпосереднього інформатора, все одно інформація може повернутися до цього самого інформатора від кого-небудь з інших знавців. Це означає, що виключення згаданої можливості не є принциповим, тобто вже у наступному сеансі чутка може повернутися до того, хто поширював її у попередньому сеансі. Крім того, повторні знавці можуть з’явитися й при самому першому передаванні, якщо $N_0 > 1$ (дехто з початкових знавців може стати слухачем іншого початкового знавця). Отже, *підрахунок кількості X повторних знавців можна починати від самого першого сеансу передавання*.

Пригадаймо знайому ситуацію: на перерві зібралася невелика група учнів, які слухають новину від свого товариша. Всі, крім одного, зацікавлені. А цьому байдуже – поширювана чутка на цей момент йому вже відома. Він, як і будь-який інший знавець, і сам при нагоді завжди готовий передати її будь-кому, адже згідно *Припущення 2* кожен(!) знавець розповсюджує інформацію протягом усього часу моделювання. Скільки ж *нових* знавців з’являється внаслідок розглянутого передавання? Зрозуміло, що на одного менше, ніж було слу-

ячів у групі.

Таким чином, відмовляючись від *Припущення 3*, ми опиняємося перед необхідністю не зараховувати до числа *нових* знавців тих осіб, для яких чутка не є новою, тобто тих, хто отримує її повторно. І не тому, що в житті здебільшого інтерес являють лише нові відомості, а саме тому, що *повторні знавці не збільшують нової загальної кількості володарів новини*. Для врахування кількості таких людей можна скористатися різними ідеями. Розглянемо *одну з можливих*.

Будемо вважати, що на самому початку розповсюдження чутка є новою для всіх S мешканців населеного пункту. Після першого передавання загальна кількість знавців (для кого вона є новою разом з тими, кому вона вже відома – N_0) збільшиться на Δn (для приросту лише нових знавців ми, як і раніше, залишимо позначення ΔN). Зауважимо, що *повторні знавці можуть знаходитися тільки серед приросту Δn* , який будемо обчислювати за формулою (3) або (3*) з попередньої версії моделі.

Вираз $\Delta n/S$ має зміст тієї *долі* від усього населення, в межах якої доцільно шукати повторних знавців, а $Q = X/\Delta n$ – *доля* повторних знавців у черговому прирості ($Q \leq 1$).

Шукатимемо X у два кроки.

1. Спочатку приймемо

Припущення 6. Доля Q осіб, котрі під час чергового передавання одержують інформацію повторно, пропорційна $\Delta n/S$:

$$Q = G \frac{\Delta n}{S}, \quad (5)$$

де G – коефіцієнт, що *підбирається* шляхом експериментування.

2. Далі обчислимо абсолютну кількість X осіб, котрі одержують інформацію повторно,

$$X = Q \cdot \Delta n. \quad (6)$$

Тоді фактичний приріст ΔN кількості осіб, котрим новина надходить вперше, становитиме

$$\Delta N = \Delta n - X. \quad (7)$$

Діючи згідно (5)–(7) при кожному наступному передаванні, ми й надалі будемо знаходити приріст ΔN лише тих осіб, які одержуватимуть новину вперше. Обчислюючи далі

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N,$$

ми матимемо загальну кількість саме тих знавців, котрі поширюватимуть її в наступних передаваннях.

Тепер залишається внести відповідні зміни до алгоритму.

3.3.1. Алгоритм роботи з удосконаленою моделлю

– пп. 1, 2: вхідні дані вирізати зі стовпця Е і перенести у стовпець Н; до вхідних даних додатково ввести змінні S та G (комірки Н2 та Н8, решту параметрів розташувати у Н3–Н7 в зазначеному раніше порядку). В утворених трьох нових стовпцях будемо вести спостереження за поведінкою змінних Δn , X та Q (D, E та F відповідно).

– п. 4.2:

$Z = 1 - M - B$ – доля звичайних передавачів;

$\Delta n = N_{j-1} \cdot (B \cdot k_b + Z \cdot k_{зв})$ – як і у попередній версії моделі, але тут Δn – тимчасове значення змінної ΔN ;

$Q = G \frac{\Delta n}{S}$ – доля осіб, які одержують чутку повторно;

G – коефіцієнт, що добирається шляхом експериментування;

$X = Q \cdot \Delta n$ – кількість осіб, котрі під час чергового передавання одержують чутку повторно;

$\Delta N = \Delta n - X$ – остаточний приріст кількості нових знавців (лише тих, котрим чутка надходить вперше).

Відповідні комірки таблиці мають такий уміст:

комірка	Формули / числа
A3	=A2+1
B3	=D3-E3
D3	=C2*(H\$4*H\$5+(1-H\$3-H\$4)*H\$6)
E3	=F3*D3
F3	=H\$8*D3/H\$2

– п. 4.3 залишити без змін: $N_j = N_{j-1} + \Delta N$,

тут N_j – остаточна кількість знавців новини, здатних до її поширення після передавання з порядковим номером j .

У відповідній комірці C3 таблиці, як і для попередньої версії моделі, це матиме таке відображення:

комірка	формула
C3	=C2+B3

– так само без змін залишити п. 5:

– формули з комірок A3, B3, C3, D3; E3 та F3 копіювати в решту комірок стовпців A, B, C, D, E та F відповідно.

3.3.2. Обчислювальний експеримент

1. Нехай $S = 10000$; $M = 0,6$; $B = 0,05$; $k_b = 4$; $k_{зв} = 2$; $N_0 = 1$; $G = 1,5$ (рис. 3.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	j	ΔN	N	Δn	X	Q	Дано:	
2	0	0	1	0	0	0,000000	$S = 10000$	
3	1	1	2	1	0	0,000135	$M = 0,6$	
4	2	2	4	2	0	0,000256	$B = 0,05$	
5	3	3	7	3	0	0,000487	$k_6 = 4$	
6	4	6	13	6	0	0,000926	$k_{39} = 2$	
7	5	12	25	12	0	0,001758	$N_0 = 1$	
...	$G = 1,5$	
24	22	0	7407	6667	6667	1,000000		
25	23	0	7407	6667	6667	1,000000		

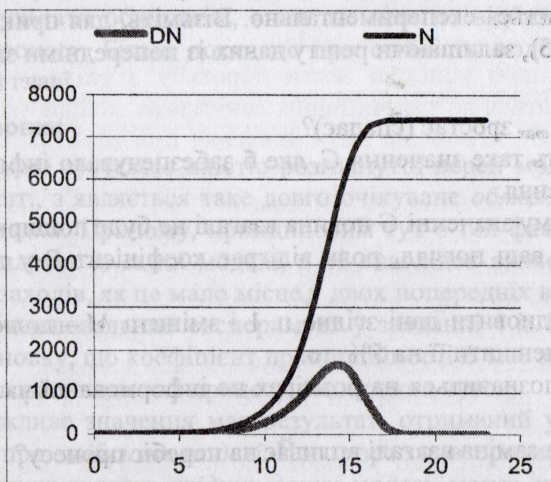


Рис. 3.4

Розглядаючи утворену таблицю, звертаємо увагу на такі:

1.1. На початку процесу ймовірність появи повторних знавців (її характеризує Q) дуже мала, але поступово вона зростає до 1 (100%), тобто всі нові знавці з часом стають повторними.

1.2. Приріст ΔN дорівнює зміні числа знавців за одне передавання, тому ΔN характеризує швидкість поширення новини. З таблиці видно, що на початку процесу ця швидкість також дуже мала. У міру перебігу процесу його швидкість повільно зростає до максимуму, а далі швидко спадає до нуля і залишається такою на всю решту часу моделювання. Одночасно перестає змінюватися (зростати) загальна чисельність N_j знавців новини.

1.3. Виведемо на екран графіки залежностей $\Delta N = \Delta N(j)$ та $N(j)$ і переконаймося у сказаному вище.

1.4. Привертає увагу принципово новий і в певній мірі несподіваний факт:

$$N_{j \max} < S.$$

Це означає, що за прийнятих вхідних даних частина населення може так і залишитись не інформованою.

2. Проаналізуйте розміри цієї не інформованої частини $S - N_{j \max}$ в залежності від різних чинників.

2.1. З'ясуйте, насамперед, залежність $N_{j \max}$ від коефіцієнта пропорційності G у виразі (5), про який було сказано, що його значення добирається експериментально. Візьміть, для прикладу, $G = 1$ (а далі $G = 0,5$), залишаючи решту даних із попередніми значеннями.

Вправа

1. Чому $N_{j \max}$ зростає (спадає)?
2. Підберіть таке значення G , яке б забезпечувало інформованість усього населення.

3. При якому значенні G новина взагалі не буде поширюватись?

4. Яку, на ваш погляд, роль відіграє коефіцієнт B у даній версії моделі?

5. Якщо відновити дані згідно п. 1 і змінити M – долю мовчунів, наприклад, зменшити її на 5%, то:

а) як це позначиться на розмірах не інформованої частини населення?

б) як така заміна взагалі впливає на перебіг процесу?

2.2. Повторіть п. 2.1 почергово для решти вхідних даних (B , Z , k_b , k_{z_b} , N_0). Кожного разу намагайтеся пояснити причини спостережуваних подій.

2.3. Наступне дослідження заслуговує на особливу увагу.

Знов поверніться до п. 2.2 у тій його частині, де пропонується експериментування з параметрами k_b і k_{z_b} . Надайте їм таких значень: $k_b = 7$, $k_{z_b} = 5$. Таблиця набуває незвичного і незрозумілого вигляду:

– у послідовних сусідніх комірках стовпця для ΔN з'являються додатні й від'ємні значення з великою різницею, які весь час чергуються;

– у рядках, що відповідають від'ємним числам, $Q > 1$;

– взагалі в цій частині таблиці спостерігаються коливання значень всіх змінних.

Можливо, при виконанні попередніх експериментів перед вами

уже виникали подібні ситуації. У чому ж причина?

Будь-які спроби знайти тут логічне обґрунтування (у межах розглядуваної моделі) заздалегідь приречені на невдачу.

У моделюванні подібні ситуації добре відомі. У більшості випадків, і зокрема, коли сама модель за своєю внутрішньою логікою не передбачає коливних процесів, причина спостережуваних значних коливань змінних (до того ж і зі зміною знаків) завжди однакова: *за певних значень вхідних даних модель втрачає стійкість*. Це одна з важливих особливостей всякої більш-менш складної моделі. Що ж до вмісту самої таблиці, то тепер значення змінних у ній – це усього лише результати обчислень, вони аж ніяк не відбивають реальний перебіг процесу. Більш докладно про стійкість моделі йтиметься у наступній главі.

Висновки

1. Самою суттєвою якістю розглянутої версії моделі є те, що в ній, нарешті, з'являється таке довго очікуване *обмеження кількості знавців новини*. Причому, принциповим тут є той факт, що це обмеження впливає із самої моделі, а не внаслідок якихось додаткових штучних заходів, як це мало місце у двох попередніх версіях.

2. Обчислювальний експеримент у завданні 4 із *Вправ* дозволяє дійти висновку, що коефіцієнт пропорційності B має зміст своєрідного регулятора швидкості процесу поширення чуток.

3. Важливе значення має результат, отриманий у п. 2.3, а саме уявлення про *стійкість моделі*. Його варто повторити:

За певних значень вхідних даних модель може втратити стійкість. Числові значення змінних при цьому являють собою усього лише результати обчислень і ніяк не відображують реальний перебіг процесу або явища

Найпершими ознаками (мовою медиків – симптомами) втрати моделлю стійкості є коливання з великою амплітудою та зміною знаків значень змінних у сусідніх комірках деякого стовпця. Проте, тут треба бути впевненим, що спостережувані коливання не є наслідком внутрішніх закономірностей моделі. В таких ситуаціях допомогти дослідникові встановити справжню причину зазначених коливань може особистий досвід роботи з математичного моделювання.

3.4. Закріплення: найпростіша модель епідемії

Як зазначалося, ця задача пропонується з метою закріплення початкових умінь, набутих у роботі з попередньою задачею про поширення чуток. Але тут будуть наводитись тільки текстові коментарі, а зразки таблиць і графіків будуть відсутні. Цю роботу вам доведеться виконати самостійно, користуючись попереднім розв'язуванням.

3.4.1. Постановка задачі

За багато років існування людства чимало життів було забрано внаслідок різних епідемій. Чума, холера, грип та деякі інші хвороби нерідко вражали численні маси людей.

Для того, щоб успішно вести боротьбу з епідеміями, тобто своєчасно вдаватися до тих чи інших санітарних заходів (карантини, вакцинації тощо), необхідно мати уявлення про ефективність таких заходів. І щоб порівнювати їх за ефективністю, треба бути впевненим, що є можливість передбачати, як той чи інший захід впливатиме на хід епідемії, тобто як із часом буде змінюватись кількість захворювань. Звідси виникає потреба у побудові моделі, яка б могла допомогти в прогнозуванні явища. Метою такого моделювання буде *прогнозування кількості хворих у будь-який момент часу за умови, що відома їхня кількість у початковий момент.*

Зрозуміло, що більш-менш реалістична модель епідемії має враховувати вплив багатьох різноманітних факторів і зокрема:

- закономірності, що обумовлюють розвиток бактеріальних клітин;
- наявність чи відсутність засобів боротьби з хворобою;
- ступінь сприйнятливості до інфекції окремих людей;
- ймовірність зустрічей носіїв інфекції зі здоровими людьми і багато іншого.

Тобто обговорювана модель епідемії мала б ґрунтуватися на знаннях із різних наук (мікробіологія, медицина, санітарія, фармакологія, теорія ймовірностей і математична статистика, соціальна психологія тощо). Проте врахувати означені вище чинники або навіть частину з них ми не в змозі. Ситуація виявляється для нас занадто складною, і тому доцільно прийняти ряд припущень, спрямованих на її спрощення. Аби не засмучувати наші перші кроки в роботі з моделювання, домовимося, що поширювана хвороба не є смертельно небезпечною.

3.4.2. Створення моделі

3.4.2.1. Концептуальна модель

Нехай у деякий момент часу в групу здорових людей потрапляють декілька хворих – носіїв інфекції. Зрозуміло, що загальний кількісний склад цієї групи (здорові + хворі) може змінюватися в часі (приїзди й від'їзди, смерті й народження і таке інше), і тоді тільки вивчення змін цього кількісного складу становитиме самостійну не дуже просту задачу. З метою спрощення приймемо ряд припущень.

Припущення 1. Під час епідемії, ніяких кількісних змін у групі не відбувається (немає ні смертей, ні народжень, ні ізоляції, ніхто з мешканців не прибуває й не вибуває). Для не дуже великих груп і не занадто тривалих проміжків часу із цим можна погодитись.

Припущення 2. Воно стосується механізму передавання інфекції: здорова людина заражається сама і стає джерелом інфекції у момент зустрічі з хворим.

У такому разі ми нехтуємо тривалістю латентного (прихованого) періоду хвороби у порівнянні з тривалістю епідемії. Такі хвороби медицині відомі. З відповідних довідників можна дізнатися, що, наприклад, для грипу й холери цей період становить кілька годин, а для дифтерії, чуми, коклюшу – від двох діб і більше.

Припущення 3. Один хворий може зустрітись лише з одним здоровим (групові зустрічі не відбуваються).

Припущення 4. Серед заходів боротьби із захворюванням обираємо найпростіший: в цьому напрямі нічого не робиться. Такі дії не є гуманними, проте ж і йдеться всього лише про найпростішу модель, та й хвороба не така вже й небезпечна.

3.4.2.2. Математична модель

Весь час спостереження розбіємо на достатньо малі однакові проміжки (інтервали) Δt (малі в порівнянні з тривалістю епідемії).

Уведемо позначення:

i – порядковий номер проміжку Δt ;

M_i , N_i – відповідно кількість хворих і здорових людей у довільний проміжок часу з номером i .

На початку спостереження ($i = 0$), отже $M_i = M_0$, $N_i = N_0$.

Згідно з *Припущенням 1* у довільний момент часу

$$M_i + N_i = M_0 + N_0. \quad (1)$$

Зауважимо тут, що M_i і N_i – величини змінні, з плином часу вони монотонно змінюються в протилежних напрямках: у міру зростання

M_i відбувається спадання N_i .

Припущення 5. Приріст чисельності хворих ΔM_i пропорційний тривалості проміжку Δt і кількості зустрічей здорових людей із хворими за цей проміжок часу.

Припущення 6. Кількість зустрічей пропорційна як кількості хворих (M_i), так і кількості здорових (N_i) людей на початок i -го проміжку Δt . В такому разі кількість зустрічей пропорційна добуткові M_i і N_i .

На основі *Припущень 5 та 6* можна записати:

$$\Delta M = k \cdot M_i N_i \Delta t, \quad (2)$$

де $0 < k < 1$ – коефіцієнт пропорційності, який назвемо коефіцієнтом зараження. Цей коефіцієнт має статистичний зміст і враховує, насамперед, такі фактори, як імовірність зустрічей і сприйнятливість окремої людини до хвороби.

Значимо, що різні індивіди в групі можуть проявляти різну сприйнятливість до хвороби, внаслідок чого в міру перебігу епідемії спочатку захворюватимуть найбільш сприйнятливі, а наприкінці залишатимуться найстійкіші. Одночасно зменшується ймовірність зустрічей. Це означає, що числове значення k може брати незмінним.

Припущення 7. Нехай коефіцієнт зараження k є незмінним у часі.

З (1) маємо

$$N_i = M_0 + N_0 - M_i \quad (3)$$

і після підстановки (3) у (2) остаточно отримуємо:

$$\Delta M_i = k M_{i-1} (M_0 + N_0 - M_{i-1}) \Delta t. \quad (4)$$

Знайдемо нову кількість хворих M_i , додаючи до її попереднього значення M_{i-1} щойно обчислений приріст ΔM_i :

$$M_i = M_{i-1} + \Delta M_i \quad (5)$$

Рівняння (4) і (5) являють собою найпростішу математичну модель епідемії. Якщо вони будуть розв'язані відносно M_i , то ми отримаємо можливість щодо прогнозування перебігу епідемії.

Про рівняння (4) говорять, що воно записане у формі *скінчених різниць*. У шкільній математиці не вивчаються аналітичні методи розв'язування рівнянь такого виду. Тому для досягнення кінцевої мети виконаємо розв'язування чисельним методом. Використовуючи в якості середовища для моделювання електронні таблиці, будемо виводити на екран результати у вигляді таблиць та відповідних графічних залежностей змінних ΔM_i , M_i і N_i від часу.

3.4.3. Алгоритм роботи з моделлю

Попереднє зауваження. За змістом змінних M_i , N_i , та ΔM_i

доцільно їхні значення подати у форматі цілих чисел.

1. Створити таблицю, в стовпцях А, В, С, D якої в першому рядку помістити імена змінних: t , ΔM , M , N . Значення цих змінних будуть вноситись у наступні рядки, починаючи з другого.

2. У стовпці Е ("Дано:") помістити імена констант: N_0 , M_0 , k , Δt , а у стовпці F – їхні значення.

3. Заповнити другий рядок ($i = 0$) початковими значеннями змінних:

– $t = 0$;

– $\Delta M = 0$ (приросту чисельності ще немає);

– M і N – посиланнями на відповідні комірки стовпця F зі значеннями M_0 і N_0 .

4. Заповнити наступний (третій) рядок ($i = 1$) формулами для обчислення чергових значень змінних:

– $t_i = t_{i-1} + \Delta t$;

– ΔM згідно (4): $\Delta M_i = kM_{i-1}(M_0 + N_0 - M_{i-1})\Delta t$;

– M у відповідності з (5): $M_i = M_{i-1} + \Delta M_i$;

– N за виразом (3): $N_i = M_0 + N_0 - M_i$.

Повторювати $n = 20$ разів (на один екран) п. 4. З цією метою копіювати формули третього рядка в наступні 19 рядків.

5. Стосовно критерію вибору нижньої межі значень проміжку Δt зауважимо таке. Якщо подальше зменшення Δt не приводить до помітних змін результатів, то можна залишити його значення попереднім. Проте занадто мале значення Δt призведе до значного збільшення кількості повторень. Це, у свою чергу, потребуватиме збільшеного обсягу оперативної пам'яті і відповідно збільшить час опрацювання даних. Останнє зауваження має загальний характер, а в даному конкретному випадку (за малої кількості стовпців і рядків) згадане збільшення часу буде непомітним.

Примітка. Методами вищої математики можна отримати точний аналітичний розв'язок рівняння (4) у вигляді складної функції часу, але зараз важливіше інше. Адже відповідь у моделюванні, як відомо, не зводиться просто до числа або формули: бажано одержати таблицю значень шуканої величини для різних моментів часу і за цією таблицею побудувати графіки відповідних залежностей. Аналіз інформації, поданої у графічній формі, часто ефективніший, аніж аналітичний аналіз формул. Це зовсім не означає, що аналітичне дослідження у комп'ютерному моделюванні не є актуальним.

3.4.4. Обчислювальний експеримент

1. Надайте параметрам моделі наступних значень:

$$N_0 = 10000; M_0 = 1; k = 0,1; \Delta t = 0,1.$$

Це означає, що в початковий момент у групу з десяти тисяч здорових людей потрапляє один хворий.

1.1. Підготуйте потрібну електронну таблицю і заповніть 22 її рядки один екран). З цієї таблиці видно, що вже на шостому кроці перестає виконуватись умова стійкості різницевого рівняння (4).

1.3. Для виправлення ситуації зменшимо проміжок Δt на один порядок, тобто введемо $\Delta t = 0,01$. Тепер, схоже, все гаразд.

2. Декілька останніх рядків таблиці показують, що через деякий час хворими стають всі члени групи. Дійсно, нові хворі не з'являються ($\Delta M = 0$), а кількість хворих становить 10001 згідно (1). За даною таблицею побудуємо графіки залежності від часу кількості хворих $M = M(t)$, кількості здорових $N = N(t)$ і графік $\Delta M = \Delta M(t)$.

3. Зменшимо проміжок Δt ще вдвічі: $\Delta t = 0,005$. Спостерігаємо уповільнення зміни ΔM і M . Таким чином, тепер для завершення розрахунків ми вимушені довести кількість повторень майже до 50. Проте істотних якісних змін у відповідних таблицях і графіках ми не виявляємо. То ж виходить, що останнє зменшення Δt було необов'язковим. Тому залишимо $\Delta t = 0,01$.

4. Стовпець ΔM містить виключно додатні числа, отже кількість хворих із часом лише збільшується (це видно зі стовпця M), а в описі моделі якраз і зазначається, що в напрямі боротьби з хворобою нічого не робиться, отже ніхто й не одужає. Бачимо, що наша модель правильно відбиває заздалегідь очікуваний результат. Розробники моделей навіть спеціально вдаються до подібних заходів, уводячи такі вхідні дані, за якими має відтворитись очікуваний результат. Така робота (тестування моделі) має виконуватись завжди.

5. З'ясуємо тепер питання: як позначиться на часові перебігу епідемії збільшення вдвічі початкової кількості хворих, тобто при $M_0 = 2$? Чи буде правильною відповідь, що така заміна приведе до помітного скорочення цього часу? Тут ми маємо можливість перевірити відповідь на моделі, поклавши $M_0 = 2$. Результат спростовує запропоновану відповідь! Час поширення епідемії дійсно скорочується, проте... скорочення це майже непомітне – всього один рядок таблиці, один проміжок Δt . Цей результат, взагалі кажучи, можна було б передбачити при уважному огляді таблиці при $M=1$: адже $M = 2$ з'являється тут саме в другому рядку.

6. Середню швидкість поширення епідемії $\Delta M/\Delta t$ можна оцінювати за значеннями приростів ΔM , оскільки всі проміжки Δt однакові. І таблиця, і графік $\Delta M = \Delta M(t)$ показують, що швидкість поширення епідемії не є сталою. Дійсно, за таблицею (стовпець ΔM) видно, що ця швидкість спочатку зростає, а далі спадає. Можна

дізнатися, на якому навіть такті процесу вона стає максимальною. Але та наочність, яку забезпечує графік, не йде ні в яке порівняння з табличною: якщо одночасно вивести на екран графіки залежності $\Delta M = \Delta M(t)$, $M = M(t)$ і $N = N(t)$, то отримана інформація буде зручнішою для порівняльного аналізу.

Виконайте таку побудову й аналіз кожного з графіків.

Вправа

1. Як визначають значення коефіцієнтів моделі, зокрема, k ?
2. Як встановити, що проміжок Δt обраний занадто великим або занадто малим?
3. Якого змісту слід було б надати появі від'ємних значень у стовпчику ΔM ?
4. Експериментально перевірте той факт, що добуток двох обмежених змінних, які міняються в протилежних напрямках (в нашій моделі такими є змінні M і N), набуває максимуму, коли значення змінних стають однаковими. Тепер прокоментуйте графік залежності $\Delta M = \Delta M(t)$.

Висновки

Розглянута модель є вкрай спрощеною і дуже наближеною, проте результати, отримані на її основі, дозволяють стверджувати:

1. Стосовно динаміки розвитку процесу модель непогано узгоджується з даними численних спостережень: адже добре відомо, що на початку епідемії (для тварин *epizootii*) кількість захворювань різко зростає, а далі швидкість поширення хвороби знижується.
2. Обумовлений при описі моделі сталий кількісний склад групи може розглядатись, як рекомендація, як один із заходів у боротьбі з епідемією шляхом запровадження *карантину*. Якби не було нічого відомо про карантин, то можна було б навіть претендувати на відкриття.
3. Чисельне розв'язування цієї задачі можна виконати за допомогою олівця й паперу, але така робота буде тривалою, нудною і стомлюючою, внаслідок чого напевно з'являтимуться помилки. Не сильно допоможе і мікрокалькулятор. Ось чому саме такого виду роботу, в першу чергу, доцільно перекладати на комп'ютери, які здатні швидко й надійно опрацювати величезну кількість циклів.

Розділ 3. Елементи математичної екології

Термін “екологія” був запропонований німецьким біологом Е. Геккелем у 1869 р., та довгий час цей термін не використовували. Як самостійна наука екологія сформувалась близько 1900 р., але тільки кількома останніми десятиліттями слово “екологія” набуло особливої популярності. Коротке визначення екології – “біологія оточуючого середовища”. Сьогодні екологія – це багатогранна галузь знань, що охоплює уявлення майже всіх наук про взаємодії живих організмів, включаючи людину, між собою та з довкіллям.

Перші спроби математичного опису зміни в часі чисельності окремих популяцій та їх співтовариств мають досить давню історію, що ведеться ще з XVIII ст. Сучасна ж математична екологія зароджувалася у 20–30-х роках XX століття. Саме в цей час у біологію почали проникати методи математики та ідеї моделювання. Причому, як і в інших науках, моделювання тут було і залишається важливим засобом теоретичного вивчення природних систем.

Основою математичної екології є математична теорія динаміки популяцій, в якій формалізовані у вигляді математичних співвідношень фундаментальні біологічні уявлення про динаміку чисельності певних видів тварин, рослин, мікроорганізмів та їх взаємодії. Отже, математична екологія поєднує математичні моделі і методи, що використовуються при вирішенні проблем екології.

В останні десятиліття увагу біологів привертають можливості комп’ютерного моделювання. Насамперед, це обумовлено потребами сучасних підходів до розв’язання складних і багатосторонніх проблем. Ці підходи сьогодні відомі під загальною назвою “*системний аналіз*”. В математичній екології такий аналіз передбачає дослідження певного об’єкта за допомогою декількох різних його моделей, і в цьому напрямі досягнуті цілком задовільні результати. Надії, що їх покладають біологи на математичне моделювання, ґрунтуються на визначних успіхах, отриманих у інших природничих науках (зокрема, у фізиці).

Перед сучасною екологією стоїть чимало проблем, серед яких і такі, що в загальних рисах вже згадувались у Вступі, а саме:

– прогнозування станів екологічної системи під впливом антро-

погенних факторів (результатів людської діяльності);

– вибір оптимальної (найбільш ефективної за даних умов) стратегії раціонального використання різних поновлюваних природних ресурсів – промислових риб, мисливських або земельних угідь тощо;

– управління популяціями та їх співтовариствами з метою боротьби зі шкідниками сільськогосподарських культур, але не шляхом застосування отрутохімікатів, а заходами, пов'язаними з використанням природних ворогів шкідників;

– розробка наукових засад і практичних методів контролю за станом навколишнього середовища.

В цьому розділі ми розглянемо декілька прикладів математичного моделювання в екології і познайомимося з новими підходами до побудови моделей і до роботи з ними, що обумовлено специфікою означеної науки. При цьому традиційно ми будемо просуватися від простого до складного, тобто спочатку розглядати украй спрощені версії моделей, а потім поступово будемо їх ускладнювати.

Глава 4. Динаміка одновидової популяції

4.1. Модель одновидової популяції за відсутності обмежень

Спрощено уявити собі одновидову популяцію, що існує без зовнішніх обмежень, можна на такому *ідеалізованому* прикладі. Нехай у великому ставку розводять рибу (наприклад, карасів). Вони не заважають одне одному: їжі, світла та місця вистачає, хижаки відсутні і рибу не виловлюють.

Метою дослідження поставимо пошук відповіді на питання:

Як буде змінюватися чисельність популяції з плином часу?

Нагадаємо, що моделі, в яких досліджується зміна в часі деякої величини, називають *динамічними*.

4.1.1. Постановка задачі. Опис моделі Мальтуса

Введемо такі позначення:

N_0 – кількість особин на початку спостереження (в момент часу $t = 0$);

N – чисельність популяції у довільний момент часу t ;

ΔN – приріст чисельності за достатньо малий проміжок часу Δt ,

а вираз $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ матиме зміст середньої швидкості приросту впродовж цього проміжку. Умову “достатньої малості” ми обговоримо дещо пізніше.

Цілком природно, що середня швидкість приросту популяції має залежати, насамперед, від факторів, що характеризують здатність особин до відтворення, і одночасно – їхню здатність до виживання. Введемо відповідні характеристики:

a – коефіцієнт народжуваності;

b – коефіцієнт смертності.

Цим коефіцієнтам надамо такого змісту: якщо чисельність популяції становить N особин, то за проміжок часу Δt від них народжуються aN особин і одночасно bN особин гинуть. В такому разі ефективний (результуючий) приріст чисельності $\Delta N = (a - b)N$, причому у випадку зростання чисельності $a > b$, а при її зменшенні $a < b$.

Позначимо далі $k = a - b$. У математичній екології параметр k є кількісною мірою (характеристикою) внутрішньої здатності популяції до чисельного росту і називається *коефіцієнтом приросту*.

Спостереження доводять, що в природних умовах

1) параметри a і b , а отже й k , змінюються з плином часу (з віком

особин);

2) у багатьох біологічних видів моменти появи потомства від окремої особини мають зазвичай майже періодичний характер, але у великій сукупності різних особин ці періоди можуть перекриватися, так що фактично потомство з'являється постійно й неперервно.

З метою спрощення приймемо ряд припущень.

Припущення 1. Будемо вважати, що за незмінних зовнішніх умов коефіцієнт приросту k є величиною, сталою в часі; народження та загибель особин відбуваються неперервно; тривалість життя кожної з особин значно менша за час “спостереження” (час моделювання).

Нехай за деякий i -ий достатньо малий інтервал часу Δt (тут i – порядковий номер даного інтервалу) чисельність зростає на ΔN . Тоді на початок наступного такого ж інтервалу з номером $i + 1$ чисельність становитиме N_{i+1} . Цілком зрозуміло, що більша кількість особин за такий самий проміжок часу Δt даватиме більший приріст ΔN , тому середня швидкість приросту $\Delta N/\Delta t$ має зростати. *За незмінних зовнішніх умов швидкість приросту залежить від чисельності популяції в даний момент.* Проте вигляд цієї залежності нам невідомий і, взагалі кажучи, може бути різним. Маючи на меті створення *найпростішої моделі*, приймемо

Припущення 2. Нехай залежність середньої швидкості приросту від чисельності популяції у даний момент є найпростішою – прямою пропорційною:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN. \quad (1)$$

Якщо переписати (1) у вигляді

$$\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t, \quad (2)$$

то можна сказати, що *за будь-який малий проміжок часу Δt приріст чисельності пропорційний як кількості особин на початку проміжку Δt , так і тривалості цього проміжку.*

Характерною властивістю рівнянь такого виду є те, що вони справедливі лише для малих приростів аргументів; підстанівка у них довільних значень аргументів є некоректною.

Згідно з (1) або (2)

$$k = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta t},$$

тобто чисельно параметр k дорівнює відносному приросту $\Delta N/N$ за одиницю часу.

Рівняння (1) вперше було запропоноване в 1798 р. англійським вченим Томасом Мальтусом і в математичній екології дістало назву

“модель Мальтуса”.

Це рівняння містить невідому величину N та швидкість її зміни $\Delta N/\Delta t$. Вище вже зазначалось, що засобами елементарної математики рівняння такого типу не розв’язуються, тому скористаємось чисельним методом – покроковим розв’язуванням:

1. У початковий момент часу ($t = 0$) покладемо $N=N_0$ і $\Delta N=0$.

2. Наступний момент візьмемо наприкінці першого проміжку часу Δt і згідно (2) обчислимо ΔN – зміну кількості особин за цей проміжок.

3. Знайдемо нову кількість особин N_i , додаючи до її попереднього значення N_{i-1} щойно обчислену зміну ΔN :

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N, \quad (3)$$

або підстановкою (2) в (3) отримаємо

$$N_i = N_{i-1} + k \cdot N_{i-1} \cdot \Delta t, \quad (4)$$

Вираз (4) є еквівалентним (2) і (3), записаним у формі скінчених різниць.

4. Повторюючи пункти 2 і 3 для наступних моментів $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, будемо знаходити відповідні нові значення N .

Рівняння (2) і (3) або (4) являють собою математичну модель динаміки популяції за відсутності обмежень. Вони дозволяють знайти чисельність популяції на інтервалі Δt з номером i , якщо відома чисельність на попередньому інтервалі з номером $(i-1)$. Рівняння (4), таким чином, є рекурентним.

Як і раніше, швидкість приросту $\Delta N/\Delta t$ можна оцінювати за значеннями самих приростів ΔN , оскільки всі проміжки Δt однакові.

Зауваження 1. Проміжки часу Δt , що фігурують в даній математичній моделі, як і сам час t , доцільно подавати в умовних одиницях. У залежності від біологічного виду це можуть бути хвилини, години, роки і т.п. Важливо, щоб ці проміжки Δt були набагато меншими за час моделювання і щоб протягом такого проміжку приріст чисельності ΔN становив малу долю від загальної кількості особин N на даний момент. Саме у такий спосіб і буде задовольнятися умова “достатньої малості проміжку часу”. Що може відбуватись із моделлю при порушенні цієї умови, ми з’ясуємо трохи пізніше.

Оскільки постановка задачі і створення її математичної моделі виконані, запишемо

4.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

1. Створити електронну таблицю та заповнити перший її рядок іменами змінних за зразком, наведеним у попередній главі, замінивши j на t .

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2				$N_0 = 100$	
3				$k = 0,25$	
4				$\Delta t = 0,1$	
...		

2. Увести вхідні дані та початкові умови (заповнити стовпець "Дано:" і наступний за ним).

3. Заповнити другий рядок таблиці (для початкового моменту часу з номером $i=0$):

$$t = 0;$$

$N = N_0$ – посиланням на відповідне значення зі стовпця E;

$\Delta N = 0$ – на початку спостереження приросту ще немає.

4. Заповнити третій рядок (для кінця першого ($i=1$) проміжку Δt , тобто для моменту часу $t + \Delta t$), перетворивши на табличні формули подані нижче вирази:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t;$$

$$\Delta N_i = N_{i-1} \cdot k \cdot \Delta t \text{ згідно з (2);}$$

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N_i \text{ згідно з (3).}$$

Значення змінних N і ΔN відповідно до змісту цих величин подає у форматі цілих.

5. Повторювати n разів п. 4, де n – кількість проміжків часу. Нехай для визначеності $n = 22$ (один екран).

За наведеним алгоритмом заповнимо відповідні комірки таблиці і почнемо

4.1.3. Обчислювальний експеримент

Введемо такі початкові значення змінних:

$N_0 = 100; k = 0,25; \Delta t = 0,1$ (рис. 4.1).

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	100	$N_0 = 100$	
3	0,1	3	103	$k = 0,25$	
4	0,2	3	106	$\Delta t = 0,1$	
5	0,3	3	109		
6	0,4	3	113		
7	0,5	3	116		
8	0,6	3	119		
...		

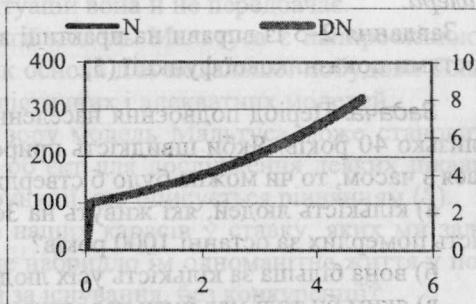


Рис. 4.1

З таблиці легко бачити, що

1) чисельність N популяції з плином часу монотонно зростає, так само зростає і середня швидкість $\Delta N/\Delta t$ приросту популяції;

2) значення змінних N і ΔN є несумірними, а саме $N \gg \Delta N$, тому графіки залежностей $N = N(t)$ і $\Delta N = \Delta N(t)$ доцільно виводити на різних осях: $N = N(t)$ – на основній, а $\Delta N = \Delta N(t)$ – на допоміжній осі.

Вправи

1. Як за допомогою таблицею встановити, що залежність чисельності від часу $N = N(t)$ не є лінійною функцією?

Визначте, через який час початкова чисельність збільшиться удвічі? Ще удвічі?

2. Чи можна зробити висновок, що за моделлю Мальтуса послідовні подвоєння чисельності N відбуваються через однакові проміжки часу?

3. Чи виконується така сама закономірність для приростів чисельності ΔN ?

4. Візьміть два однакових за тривалістю проміжки часу (наприклад, $2\Delta t$ або $3\Delta t$) і знайдіть на кожному з них відношення кінцевої чисельності до початкової. Виконайте це у вільних комірках електронної таблиці.

5. Повторіть завдання з якими-небудь іншими, але знов однаковими проміжками часу. Порівняйте результати, зробіть висновки.

Зуваження 2. Аналітичний розв'язок рівняння (1) в математиці добре відомий. Він має вигляд

$$N = N_0 e^{kt}, \quad (5)$$

де N_0 – кількість особин у початковий момент часу $t = 0$;

$e = 2,718\dots$ – основа натуральних логарифмів; це число на честь видатного математика XVIII ст. Леонарда Ейлера називають *числом Ейлера*.

Завдання 2–5 із вправи на практиці знайомлять з деякими властивостями показникової функції (5).

Задача. Період подвоєння населення Землі у наш час становить близько 40 років. Якби швидкість приросту чисельності не змінювалася з часом, то чи можна було б стверджувати, що

а) кількість людей, які живуть на Землі сьогодні, більша за кількість померлих за останні 1000 років?

б) вона більша за кількість усіх людей, що колись померли?

в) яким би тоді мав бути час існування людства?

г) то ж чи змінювалася швидкість приросту населення? Якщо

так, то як саме?

д) поміркуйте, як треба було б змінити вхідні дані в таблиці, щоб перевірити свої відповіді за допомогою даної моделі, та виконайте таку перевірку.

Висновки

1. При $k > 0$ модель Мальтуса дає *необмежене зростання* чисельності популяції з плином часу, чого в природних умовах ніколи не спостерігається. Адже слід мати на увазі, що згадані на початку природні ресурси (такі як простір, їжа, вода, світло) обмежені. Це має приводити до існування верхньої межі чисельності. Таким чином, зміну чисельності популяцій рослинного і тваринного світу не можна описувати простим законом Мальтуса: її динаміку у складний спосіб обумовлюють багато різних чинників.

2. Працюючи з цією моделлю, ми мали нагоду впевнитися в тому, що результати моделювання цілком відповідають припущенням, прийнятим при побудові моделі. *Будь-яка модель є адекватною лише в межах прийнятих припущень*. Але чим менш обґрунтованими є ці припущення, тим менше шансів сподіватися на задовільні й реалістичні (адекватні) результати.

3. Результати моделювання можуть виявитись хибними принаймні з таких причин:

- в основу моделі покладені необґрунтовані припущення;
- дослідник поширює область застосування моделі, виходячи за межі, обумовлені прийнятими припущеннями (екстраполяція);
- на етапі прийняття припущень дослідник не враховує деякі суттєві фактори.

От і модель Мальтуса непогано відповідає дійсності лише за відсутності обмежень. Інших ситуацій вона й не передбачає.

4. В математичній екології модель Мальтуса є найпростішою і зазвичай використовується як основа для подальшої побудови більш досконалих, тобто більш реалістичних і адекватних моделей.

5. З пізнавальної точки зору модель Мальтуса може становити додатковий інтерес ще й як об'єкт для дослідження деяких цікавих властивостей показникової функції, що описується рівнянням (5).

Повернемося, однак, до наших карасів у ставку, яких ми залишили у повній ідилії. А чи не набридло їм одноманітне життя у повному достатку? Без боротьби за існування, без конкуренції?

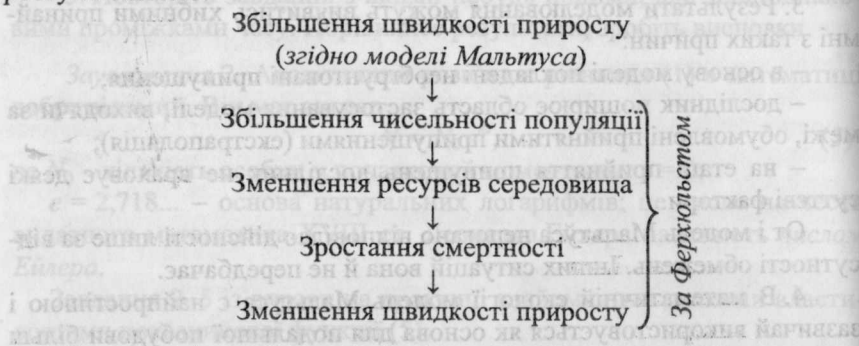
От і розглянемо далі

4.2. Модель одновидової популяції за наявності обмежень

Вже давно добре відомо, що у живій природі жодна тенденція зростання не може бути необмеженою, оскільки кожен з використуваних ресурсів завжди має певну природну границю. Тому й розмноження кожного виду в природі *саморегулюється* так, щоб цей вид зберігався у процесі еволюції. З огляду на цей факт модель Мальтуса містить суттєвий недолік: вона ігнорує залежність коефіцієнта смертності b від кількості особин N , тобто не враховує обмеженості ресурсів. Дійсно, якщо коефіцієнт народжуваності зумовлюється здебільшого генетично, то на коефіцієнт смертності суттєвий вплив чинить середовище.

Наступний крок щодо вдосконалення моделі був зроблений у 1845 р. німецьким математиком П. Ферхюльстом, який увів до моделі Мальтуса деякі обмеження. Розглянемо їх.

З плином часу при $k > 0$ кількість особин збільшуватиметься, і їм вже не вистачатиме вільного простору, а, можливо, і їжі та деяких інших ресурсів середовища. Тому подальший приріст чисельності вже не повинен відповідати рівнянню (2). Адже за розглянутих умов виникатиме *конкуренція*, яка призведе до зменшення швидкості приросту за схемою:



Проте, оскільки можливий вигляд залежності коефіцієнта смертності b від кількості особин N нам заздалегідь невідомий, приймемо для спрощення чергове

Припущення 3. Будемо вважати, що коефіцієнт b лінійно залежить від кількості особин:

$$b = d + q \cdot N,$$

де d і q – деякі сталі величини.

Таке припущення має певне обґрунтування: як відомо з математики, за достатньо малої зміни значень аргументу довільну гладку

функцію можна з непоганим наближенням замінити лінійною функцією.

З урахуванням останнього виразу маємо для k нове значення:

$$k = a - b = a - (d + qN) = a - d - qN.$$

Виконуючи далі заміну $p = a - d$, замість (2) отримуємо

$$\Delta N = (p - q \cdot N) \cdot N \cdot \Delta t, \quad (6)$$

де p – параметр, що враховує здатність популяції до відтворення (тут параметр p відіграє роль, аналогічну k з попередньої моделі);

q – параметр, що враховує наявність конкуренції, $q \geq 0$.

Як, на вашу думку, буде поводити себе модель за умови $q = 0$?

Параметр p дістав назву “коефіцієнт відтворення”, а параметр q – “коефіцієнт опору середовища”. Параметр p є сталим у часі, тому що сталими в часі вважалися параметри a і d .

Оскільки

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N, \quad (3)$$

то аналогічно до (4) можна записати:

$$N_i = N_{i-1} + (p - q \cdot N_{i-1}) \cdot N_{i-1} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Рівняння (3) і (6) або (7) є математичною моделлю динаміки популяції з урахуванням конкуренції, пов’язаної з обмеженням ресурсів середовища.

У математичній екології ця модель має назву “*модель Ферхюльста-Перла*”.

Точний аналітичний розв’язок рівняння (6) має вигляд складної функції. Ми ж, як і у попередній версії моделі, вдаємося до покрокового чисельного методу розв’язування.

У зв’язку зі змінами, що їх зазнала модель, відповідним чином змінимо й

4.2.1. Алгоритм роботи з моделлю

– п. 1: замість k увести до вхідних даних параметри p та q ;

– п. 4: обчислювати приріст кількості особин ΔN_i згідно (6):

$$\Delta N = (p - q \cdot N) \cdot N \cdot \Delta t.$$

Зауваження 3. Воно стосується конкретних значень коефіцієнтів моделі p і q . У випадках, коли вони заздалегідь невідомі, можна вдасться до одного з перелічених нижче заходів:

а) виконати натурний експеримент, в ході якого отримати якомога більше значень для N та ΔN , що відповідають різним моментам часу, а далі методами математичної статистики визначити шукані параметри p та q ;

б) спробувати визначити їх хоч би орієнтовно за допомогою додаткових теоретичних міркувань;

в) добирати їх інтуїтивно шляхом послідовних проб, так щоб одержані результати забезпечували хоч би задовільну адекватність моделі.

4.2.2. Обчислювальний експеримент

1. Skorистаємося останнім зауваженням і на основі обчислювального експерименту з моделлю після декількох попередніх спроб, уведемо такі дані:

$$N_0 = 100; \quad p = 5; \quad q = 0,01; \quad \Delta t = 0,01 \text{ (рис. 4.2).}$$

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0,00	0	100	$N_0 = 100$	
3	0,01	4	104	$p = 5$	
4	0,02	4	108	$q = 0,01$	
5	0,03	4	112	$\Delta t = 0,01$	
6	0,04	4	117		
7	0,05	4	121		
8	0,06	5	126		
9	0,07	5	130		
...		

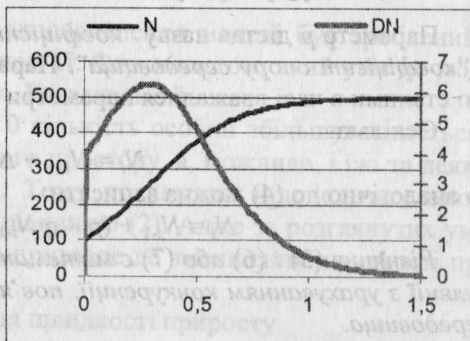


Рис. 4.2

З таблиці й графіка $N = N(t)$ видно, що з плином часу чисельність карасів у ставку зростає до деякої верхньої межі (у нашому випадку до 500 особин), а далі підтримується сталою, тобто популяція приходить у рівноважний стан: саме з цього моменту приріст чисельності ΔN стає і залишається надалі рівним нулеві (чорна крива). При цьому чисельність популяції зросла на 400 особин у порівнянні з початковою.

Розглядаючи значення змінних у стовпцях B і C, можна побачити, що в комірках C6 і C9 ці значення не відповідають формулі $N_i = N_{i-1} + \Delta N_i$. У чому полягає ця невідповідність?

Цей факт є платнею за заміну формату дійсних чисел на цілий. Як можна в цьому переконатись?

2. Візьмемо початкову кількість особин $N_0 = 800$ (на 300 більше за виявлену межу), а решту параметрів залишимо з попередніми значеннями. З таблиці та відповідних графіків бачимо, що тепер із плином часу чисельність "населення" у ставку монотонно зменшується,

аж поки знов не стабілізується. Але, що цікаво, стабілізація відбувається на попередній межі – 500 особин!

3. Переконайтесь у тому, що, експериментуючи з довільними значеннями N_0 , ми кожного разу будемо одержувати те саме граничне значення $N_{гр} = 500$ особин (рис. 4.3, 4.4).

Зауваження 4. Ситуація, з якою ми зустрілися, у природних процесах досить поширена, вона заслуговує на більш докладне обговорення. Цю ситуацію можна було б передбачити, і не виконуючи обчислювальний експеримент. Дійсно, якщо дана модель має рівноважні стани, то в цих станах приріст чисельності ΔN має бути рівним нулю (це видно з таблиці). З виразу (6) неважко побачити, що $\Delta N = 0$ за умови, що нулю дорівнює вираз у дужках

$$p - q \cdot N = 0,$$

звідки

$$N_{гр} = \frac{p}{q}$$

Цей вираз називають *вмістом середовища*.

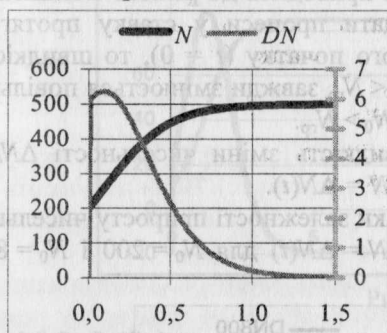


Рис. 4.3

$N_0 = 200; N_{гр} = 500$

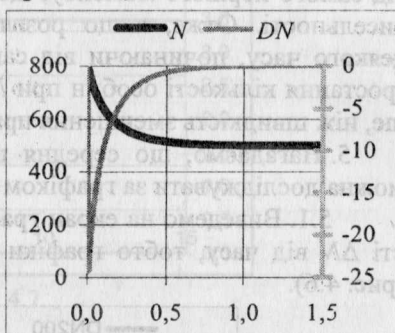


Рис. 4.4

$N_0 = 800; N_{гр} = 500$

Згідно з нашими даними $N_{гр} = 50/0,01 = 500$.

4. Цікаву картину являють одночасно виведені на екран графіки $N = N(t)$ – залежності кількості особин від часу для $N_0 = 200$ і $N_0 = 800$ (рис. 4.5). Цей рисунок фактично поєднає рис. 4.3 і рис. 4.4 й ілюструє той факт, що згідно прийнятої моделі за будь-якої початкової кількості особин N_0 їхня остаточна кількість із плином часу завжди встановлюється рівною вмісту середовища $N_{гр}$.

Вправа. Самостійно побудуйте графіки згідно рис. 4.5.

Звертає на себе увагу ще одна особливість: хоч числа 200 і 800 є

симетричними відносно 500, отримані графіки не є симетричними: графік для $N_0 = 800$ спадає крутіше, аніж зростає графік для $N_0 = 200$.

Які міркування про те, що саме так і має бути, ви б могли тут навести?

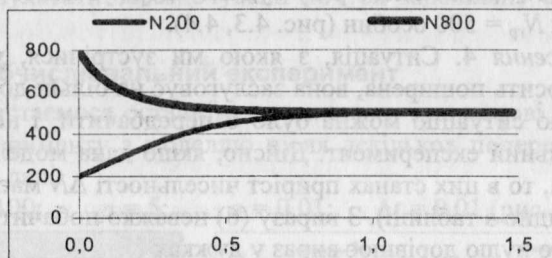


Рис. 4.5

Справа в тому, що при $N_0 < N_{гр}$ населення ставка (200 особин) помітно не конкурує і деякий час значення приросту зростають повільно. Якщо ж $N_0 > N_{гр}$, то фактор конкуренції починає проявляти себе від самого першого моменту, що й приводить до різкого зменшення чисельності. Отже, якщо розглядати процеси у ставку протягом деякого часу, починаючи від самого початку ($t = 0$), то швидкість зростання кількості особин при $N_0 < N_{гр}$ завжди змінюється повільніше, ніж швидкість зменшення при $N_0 > N_{гр}$.

5. Нагадаємо, що середня швидкість зміни чисельності $\Delta N/\Delta t$ можна досліджувати за графіком $\Delta N = \Delta N(t)$.

5.1. Виведемо на екран графіки залежності приросту чисельності ΔN від часу, тобто графіки $\Delta N = \Delta N(t)$ для $N_0 = 200$ і $N_0 = 800$ (рис. 4.6).

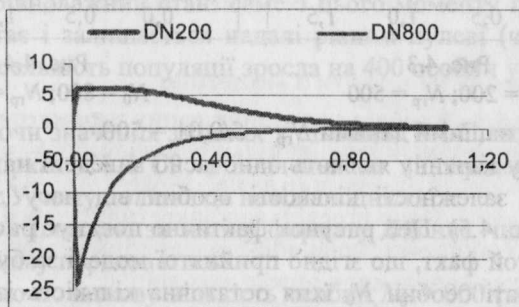


Рис. 4.6

Оразу ж бачимо, що перший з них не є монотонним, а має максимум; другий – монотонно зростає до нуля. Наявність максимуму у

першого графіка показує, що швидкість приросту спочатку зростає, а далі спадає до нуля, тому що чисельність N особин перестає змінюватись. Цей факт для нас не є несподіванкою і наводиться тут лише як вправа для тренування дуже корисних (зокрема, в моделюванні) навичок аналізу інформації, поданої у графічній формі. Так, маючи графік швидкості зміни деякої величини, бажано вільно уявляти собі поведінку самої цієї величини.

5.2. Тепер іще раз виведіть на екран графік залежності $N = N(t)$.

Графіки яких функцій нагадують вам окремі ділянки цього графіка?

6. Виконайте експерименти з величиною p/q – вмістом середовища. Для визначеності введіть такі дані:

$$N_0 = 10; \quad p = 1,7; \quad q = 0,02; \quad \Delta t = 0,1 \text{ (рис. 4.7).}$$

Порівняйте новий вміст середовища $N_{гр} = p/q$ за таблицею і за розрахунком.

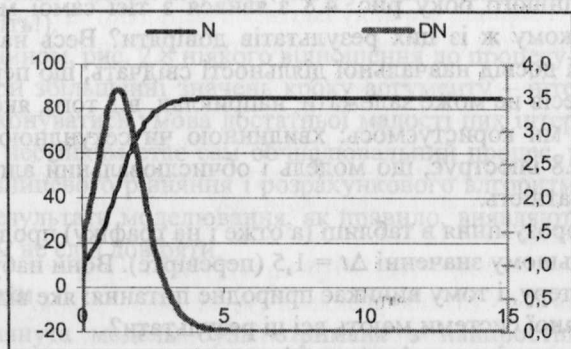


Рис. 4.7

4.2.3. Стійкість математичної моделі

Наступне дослідження стосується прийнятних значень проміжків часу Δt . Про це вже йшлося в задачі про чутки на с. 56 (п. 2.3).

Надамо інтервалові часу Δt більшого значення, ніж у попередньому досліді. Нехай $\Delta t = 0,5$. Поясніть причину спостережуваної зміни у таблиці та на відповідному графіку.

Продовжимо далі збільшення інтервалів Δt , надаючи їм послідовних зростаючих значень $\Delta t = 1; \Delta t = 1,1; \dots$ (рис. 4.8).

У порівнянні з рис. 4.7 в таблиці та на екрані спостерігаються дивні речі: чисельність N популяції, як і її приріст ΔN , перед виходом на усталений режим рівноваги деякий час коливаються відносно гра-

нично можливого значення $N_{гр}$.

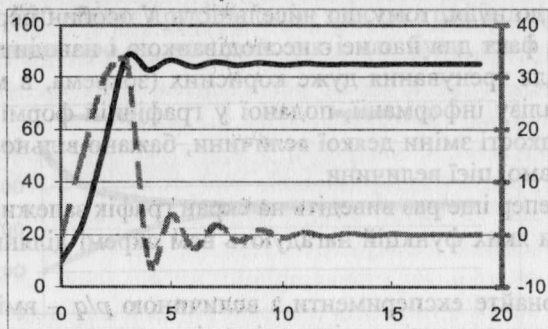


Рис. 4.8

Як віднестись до отриманого результату? Його прийняття означатиме, що значення проміжків часу Δt здатні впливати на хід процесів, але з іншого боку рис. 4.8 з'явився з тієї самої моделі, що й рис. 4.7. Якому ж із цих результатів довіряти? Весь наш життєвий досвід, як і досвід навчальної діяльності свідчать, що перебіг природних процесів не може залежати, наприклад, від того, якою стрілкою годинника ми користуємось: хвилинною чи секундною. Скоріш за все, рис. 4.8 ілюструє, що модель і обчислювальний алгоритм втратили адекватність.

Непорозуміння в таблиці (а отже і на графіку) продовжуються і при ще більшому значенні $\Delta t = 1,5$ (перевірте). Вони набувають стійкого характеру, і тому виникає природне питання: яке відношення до досліджуваної системи мають всі ці результати?

Виявляється, що фахівцям із комп'ютерного моделювання такі ситуації добре відомі. Справа в тому, що, коли до процесу розв'язування задачі залучається комп'ютер – пристрій, що працює за дискретним принципом, – то при побудові комп'ютерної моделі завжди виникає необхідність замінювати неперервні в часі процеси на їхні дискретні аналоги. Зрозуміло, що математична модель може бути як неперервною, так і дискретною, тоді як комп'ютерна модель завжди дискретна. Рівень дискретизації може бути різним: зменшення кроку дискретизації наближає модель до неперервної. У практичній реалізації це означає перехід від аналітичних методів розв'язування до чисельних методів (до покрокових обчислень за рекурентними виразами). І саме тут даються взнаки специфічні особливості комп'ютерних обчислень – нагромадження похибок округлення різного походження. Їх вивчає окремий розділ обчислювальної матема-

тики – теорія дискретних математичних моделей. У ній розробляються методи встановлення відповідності між обома типами моделей – неперервними і дискретними. Визначення умов стійкості розрахункових алгоритмів, тобто умов, за яких похибки обчислень не нагромаджуються, – одна з важливих задач дискретної математики.

Стосовно обговорюваного прикладу (і деяких наступних задач) ця теорія дає просту і надійну умову:

$$\Delta t \leq \varepsilon h^2,$$

де Δt – крок зміни по вісі часу (аргументу);

ε – деяка стала (іноді беруть $\varepsilon = 1$);

h – крок зміни іншої величини, залежної від часу (у нашому прикладі h відповідає кроку вздовж вісі N).

При $\Delta t < 0$ з цієї умови випливає важливий висновок: якщо крок для h малий (при великих кроках не буде досягнута очікувана стійкість), то крок Δt уздовж вісі часу має бути ще меншого порядку малості (доведіть!).

Таким чином, рис. 2.8 ніякого відношення до процесу не має. Річ у тім, що при збільшенні значень кроку аргументу – інтервалу Δt – перестає виконуватись умова достатньої малості цих інтервалів, внаслідок чого нестійким стає сам обчислювальний процес, руйнується стійкість різницевого рівняння і розрахункового алгоритму. В таких ситуаціях результати моделювання, як правило, виявляються хибними, а тому їм не слід довіряти.

Висновки

1. Розглянута модель була отримана з найпростішої моделі Мальтуса шляхом вдосконалення останньої, а саме – врахуванням реальних обмежень на ресурси середовища, що призвело до появи конкуренції між особинами в популяції.

2. У відповідності до прийнятих припущень ця модель на якісному рівні задовільно відображує зміну чисельності особин у природних популяціях. Зокрема, було встановлено існування рівноважного стану: за будь-яких відхилень чисельності від $N_{гр}$ популяція самостійно повертається у цей стан. Таку рівновагу називають стійкою. Одночасно ми виявили фактори, від яких залежить значення вмісту середовища $N_{гр}$.

3. За можливості математичну модель доцільно аналітично перевіряти на наявність у ній рівноважних станів.

4. Обчислювальний експеримент дозволив виявити умови, за яких порушується стійкість розрахункового алгоритму. Такі ситуації

потребують особливої уваги й аналізу, оскільки вони часто ведуть до хибних висновків про поведінку досліджуваної системи.

Що ж до наших карасів у ставку, то чи не прийшов час не тільки вести підрахунки чисельності, а й використовувати їх як харчовий ресурс?

4.3. Промислове використання популяції

До цього часу ми розглядали одновидову популяцію карасів, яка розвивалася вільно: зовнішні фактори помітним чином не впливали на її чисельність. Припустимо тепер, що ми приймаємо рішення проводити вилов карасів з постійною абсолютною швидкістю, тобто за кожну одиницю часу вилучати з популяції однакову кількість риб.

Нехай c – абсолютна швидкість вилучення, $c \geq 0$. Параметр c характеризує дозволену швидкість вилову і зветься *квотою* (у даному випадку – *абсолютною квотою*). Цей параметр чисельно дорівнює кількості особин, що вилучаються з популяції за одиницю часу.

Тепер рівняння (6) необхідно переписати у вигляді

$$\Delta N = (p - q \cdot N) \cdot N \cdot \Delta t - c \cdot \Delta t$$

або

$$\Delta N = ((p - q \cdot N) \cdot N - c) \cdot \Delta t. \quad (8)$$

За аналогією з двома попередніми версіями згідно (3) маємо

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N,$$

і замість (6) стає

$$N_i = N_{i-1} + ((p - q \cdot N_{i-1}) N_{i-1} - c) \cdot \Delta t \quad (9)$$

Рівняння (8) і (3) або рівняння (9) являють собою найпростішу математичну модель вилову з постійною абсолютною квотою.

Зрозуміло, що, ведучи вилов, бажано не знищити популяцію. То чи можна вести його у такий спосіб, щоб чисельність особин із часом не змінювалась? Питання можна перефразувати: *чи можна вести вилов так, щоб популяція залишалась у рівноважному стані?*

Якщо таке можливо, то значення параметра c не можуть бути довільними, і знову виникає проблема пошуку таких його значень, які б забезпечували рівновагу системи. Для цього, як ми вже бачили, приріст чисельності ΔN за рівнянням (8) має дорівнювати нулеві (саме це і є умовою рівноваги): $(p - q \cdot N) \cdot N - c = 0$, звідки

$$c = (p - q \cdot N) \cdot N. \quad (10)$$

Згідно (10) параметр c є квадратичною функцією чисельності N . Якщо в координатах N, c ми побудуємо графік такої залежності – параболу (рис. 4.9), то цей графік перетинатиме горизонтальну вісь N у точках $N=0$ і $N=N_{\text{тр}}=p/q$, які є нулями функції (доведіть!).

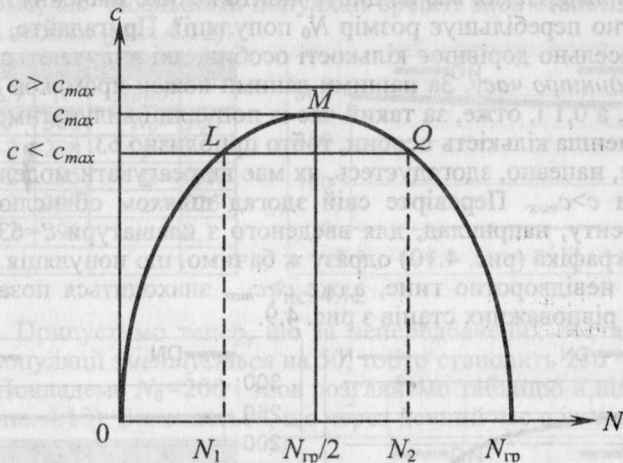


Рис. 4.9

Кожна точка цієї параболи відповідає деякому одному з множини можливих рівноважних станів, тобто дана версія моделі передбачає безліч рівноважних станів.

Щоб упевнитися в цьому, достатньо взяти в якості N_0 будь-яке значення N з інтервалу $0 \leq N \leq p/q$ і обчислити відповідне значення c – кожна така пара чисел N і c буде обертати ΔN з рівняння (10) на нуль. Максимального значення середня швидкість вилову c набуватиме при $N = N_{гр}/2 = p/2q$, і воно буде становити (переконайтесь у цьому самостійно):

$$c_{max} = p^2/4q. \quad (11)$$

Накреслимо тепер лінії $c = c_{max}$, $0 < c < c_{max}$ і $c > c_{max}$. Перша з них перетинає параболу в одній точці (вершині M), друга – у двох точках L і Q (нижче вершини), а третя не має жодної спільної з параболою точки. З'ясуємо зміст цих трьох випадків.

У відповідності до наведених міркувань змінимо

4.3.1. Алгоритм роботи з моделлю

- п. 1: додати до вхідних даних параметр c ;
- у окремій вільній комірці стовпця Е обчислити значення параметру c_{max} згідно (7);
- п. 4: приріст чисельності ΔN знаходити за виразом (8):

$$\Delta N = ((p - q \cdot N) \cdot N - c) \cdot \Delta t.$$

4.3.2. Обчислювальний експеримент

1. Уведіть такі дані: $N_0 = 250$; $p = 5$; $q = 0,01$; $\Delta t = 0,1$ і обчисліть

значення параметра c_{max} .

Примітка. Нехай вас не дивує нібито велике значення $c_{max} = 625$, яке помітно перебільшує розмір N_0 популяції. Пригадайте, що параметр c чисельно дорівнює кількості особин, які вилучаються з популяції за *одиницю часу*. За нашими даними кожен проміжок Δt становить не 1, а 0,1 і, отже, за такий час із популяції вилучатиметься відповідно менша кількість особин, тобто приблизно 63.

2. Ви, напевно, здогадуєтесь, як має відреагувати модель у випадку, коли $c > c_{max}$. Перевірте свій здогад шляхом обчислювального експерименту, наприклад, для введеного з клавіатури $c=635$. З таблиці та з графіка (рис. 4.10) одразу ж бачимо, що популяція через деякий час невідворотно гине, адже $c > c_{max}$ знаходиться поза межами параболи рівноважних станів з рис. 4.9.

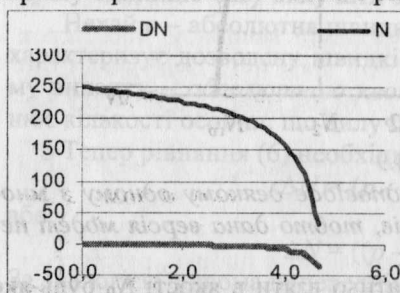


Рис. 4.10

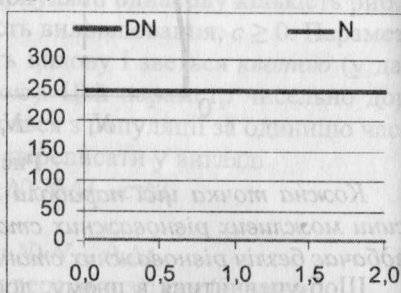


Рис. 4.11

3. Тепер дослідимо стан популяції при максимальній швидкості вилуви $c=c_{max} = 625$ (рис. 4.11).

3.1. Виведемо на екран таблицю результатів і відповідний графік. Чи відповідають вони очікуванім?

Справа в тому, що за даних параметрів у системі із самого початку виникає стан рівноваги. При цьому чисельність популяції підтримується на сталому рівні 250 особин. Біологи додали б тут: “за рахунок внутрішнього саморегулювання”.

Такий рівноважний стан може тривати як завгодно довго, якщо не будуть змінюватися зовнішні умови. Оскільки таких гарантій дати неможливо, то доцільним є дослідження поведінки популяції (фактично, моделі) в умовах незначних відхилень її початкової чисельності відносно рівноважної (у нашому прикладі 250 особин).

Говорячи про рівноважні стани, завжди слід уточнювати питання про стійкість рівноваги. *Якщо за невеликих відхилень від рівноважного стану виникають фактори, що повертають систему у цей стан, то така рівновага зветься стійкою. Якщо ж за незначних відхилень від рівноважного стану система продовжує віддалятися від нього, то така рівновага є нестійкою.*

3.2. Збільшимо початкову кількість особин на 50, тобто нехай

$N_0 = 300$. Параметр c залишимо попереднім.

Бачимо, що чисельність популяції в решті знов стабілізується на рівні 250 особин (рис. 4.12).

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	300	$N_0 = 300$	
3	0,1	-3	298	$p = 5$	
4	0,2	-2	295	$q = 0,01$	
5	0,3	-2	293	$c = 625$	
6	0,4	-2	291	$\Delta t = 0,1$	
		

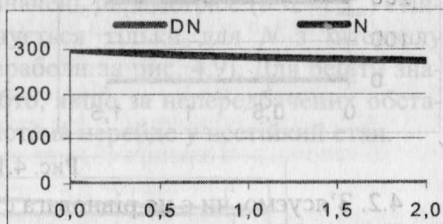


Рис. 4.12

3.3. Припустимо тепер, що за непередбачених обставин чисельність популяції зменшується на 50, тобто становить $250 - 50 = 200$ особин. Покладемо $N_0 = 200$ і знов розглянемо таблицю й відповідний графік (рис. 4.13). Виявляється, що через певний час популяція гине.

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	200	$N_0 = 200$	
3	0,1	-3	198	$p = 5$	
4	0,2	-3	195	$q = 0,01$	
5	0,3	-3	192	$c = 625$	
6	0,4	-3	188	$\Delta t = 0,1$	
		

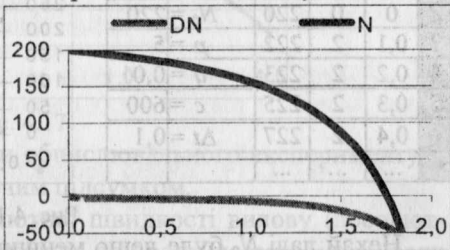


Рис. 4.13

Отже, за максимальної швидкості вилову рівновага системи є нестійкою.

4. Дізнаємось, нарешті, що відбуватиметься за умови $c < c_{max}$. У цьому випадку графік функції $c = const$, як це було встановлено вище, перетинає параболу у двох точках L і Q , симетричних відносно вертикалі, що проходить через точку $N_{TP}/2$. На горизонтальній вісі N їм відповідають дві точки N_1 і N_2 по обидва боки від точки $N_{TP}/2 = 250$ і на однакових відстанях від неї: $N_1 = 200$, $N_2 = 300$. Обчислимо згідно (8) значення параметра c , яке має забезпечити рівноважний стан. Одержимо

$$c_1 = (5 - 0.01 \cdot 200) \cdot 200 = 600; c_2 = (5 - 0.01 \cdot 300) \cdot 300 = 600.$$

Перевіримо наявність рівноваги для $N_0 = N_1 = 200$, та $N_0 = N_2 = 300$ при $c = 600$.

Уведемо по черзі ці значення до умови і, переглядаючи відповідні комірки таблиці або відповідні графіки (рис. 4.14), впевнюємося в тому, що обидва рази виникає рівновага.

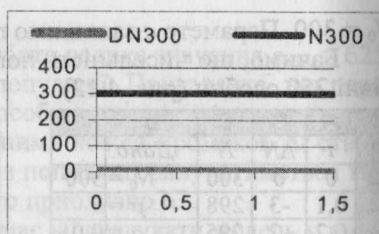
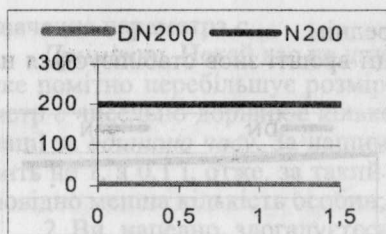


Рис. 4.14

4.2. З'ясуємо, чи є ця рівновага стійкою для N_1 .

Надамо N_0 значення, дещо більшого за N_1 , наприклад, 220. З таблиці можна побачити, що чисельність популяції поступово зростає і повільно наближається до 300, як це зображено на рис. 4.15.

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	220	$N_0 = 220$	
3	0,1	2	222	$p = 5$	
4	0,2	2	223	$q = 0,01$	
5	0,3	2	225	$c = 600$	
	0,4	2	227	$\Delta t = 0,1$	
		

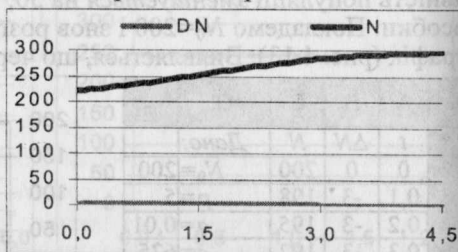


Рис. 4.15

Нехай далі N_0 буде дещо меншим за N_1 , наприклад, 180. Звернувшись до таблиці і графіка (рис. 4.16), бачимо, що чисельність популяції спадає до нуля – популяція гине.

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	180	$N_0 = 180$	
3	0,1	-2	178	$p = 5$	
4	0,2	-3	175	$q = 0,01$	
5	0,3	-3	172	$c = 600$	
6	0,4	-4	168	$\Delta t = 0,1$	
		

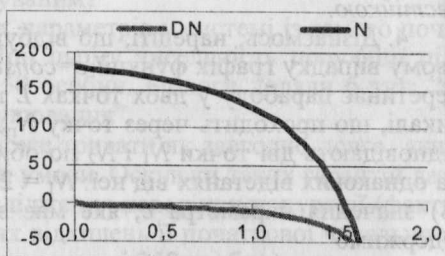


Рис. 4.16

Таким чином, при $N_0 = N_1 = 200$ особин рівновага системи виявляється нестійкою.

Вправа. Виконайте самостійно аналогічні експерименти для другої точки ($N_0 = N_2$) і переконайтесь у тому, що при $N_0 = N_2 = 300$

особин рівноваги системи стійка.

Висновки

1. За будь-яких прийнятних значень параметра c ($0 < c < c_{max}$) стійка рівновага популяції забезпечується тільки для N з інтервалу $N_{gr} > N > N_{gr}/2$ (спадаюча гілка параболи за рис. 4.9). Для решти значень N рівновага є нестійкою, тобто, якщо за непередбачених обставин виявиться, що $N \leq N_{gr}/2$, то система перейде у нестійкий стан.

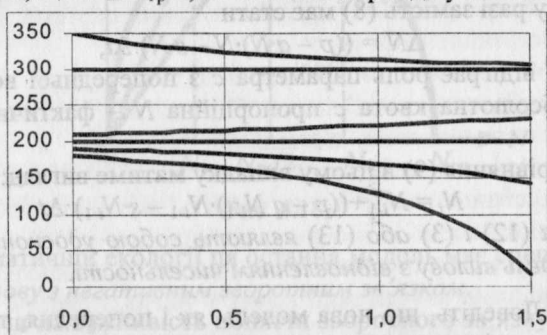


Рис. 4.17

Рис. 4.17 відтворює всі етапи обчислювального експерименту і, таким чином, є їхнім узагальнюючим підсумком.

2. Допустимі значення абсолютної швидкості вилову (абсолютної квоти) можуть бути якими завгодно, аби вони не перебільшували $c_{max} = p^2/4q$. Якщо абсолютна квота виявиться більшою за c_{max} , це завжди вестиме до невідворотного знищення популяції. *Будь-які спроби максимізувати прибуток (кількість вилученої біомаси) небезпечні – популяція може увійти в нестійкий стан і загинути!*

3. Практично прийнятною стратегією слід вважати вилов з абсолютною квотою, меншою за максимальну. При цьому значення рівноважної чисельності N дещо зростає ($N > N_{gr}/2$) і відповідно зменшиться улов.

Цей факт є найбільш важливим результатом виконаного аналізу. Одночасно він викриває і найбільш істотний недолік даної моделі, який обмежує можливості раціонального вилову.

Виявляється, однак, що можна так організувати справу, щоб отримувати стійкий улов без виявленого обмеження. Про це – далі.

4.4. Удосконалена модель вилову

Як досягти оптимального вилову за умови збереження популяції на деякому стійкому рівні? Насамперед, не призначати жорсткого плану вилову, а вести його з використанням так званого *негативного зворотного зв'язку*. Замість абсолютної швидкості вилову c введемо *відносну швидкість* s – виловлювану за одиницю часу долю від наявної чисельності популяції. Її ще називають *відотною квотою*.

У такому разі замість (8) має стати

$$\Delta N = ((p - q \cdot N) \cdot N - s \cdot N) \cdot \Delta t, \quad (12)$$

де вираз $s \cdot N$ відіграє роль параметра c з попередньої версії моделі, але тепер абсолютна квота c пропорційна N – фактично існуючим ресурсам.

Аналог рівняння (9) в цьому випадку матиме вигляд:

$$N_i = N_{i-1} + ((p - q \cdot N_{i-1}) \cdot N_{i-1} - s \cdot N_{i-1}) \cdot \Delta t \quad (13)$$

Рівняння (12) і (3) або (13) являють собою удосконалену математичну модель вилову з відновленням чисельності.

Вправа. Доведіть, що нова модель, як і попередня, також передбачає наявність рівноважних станів за умови

$$s = p - q \cdot N. \quad (14)$$

Результат (14) дійсно нескладно одержати формально (аналітично), прирівнюючи ΔN до нуля. Якщо ж викладки провести у дещо інший спосіб – з використанням геометричних міркувань, – то можна отримати цікаві результати щодо геометричного унаочнення множини рівноважних станів.

Дійсно, $\Delta N = 0$ означає

$$(p - q \cdot N) \cdot N - s \cdot N = 0.$$

Останнє рівняння можна замінити системою рівнянь

$$\begin{cases} c = (-q \cdot N + p) N \\ c = s \cdot N \end{cases}$$

Перше з них – це рівняння відомої вже нам з попередньої версії параболи, всі точки якої відповідають множині рівноважних станів у координатах N, c (рис. 4.9). Друге – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом s , яка проходить через початок координат. Будь-яка точка перетину цих графіків відповідає одному з можливих рівноважних станів у новій версії моделі (рис. 4.18).

Інтервал значень кутового коефіцієнта s визначимо з (14):

$$\begin{aligned} s_{\max} \text{ відповідає } N_{\min} = 0 & \Rightarrow s_{\max} = p, \\ s_{\min} \text{ відповідає } N_{\max} = N_{\text{гр}} = p/q & \Rightarrow s_{\min} = 0, \end{aligned}$$

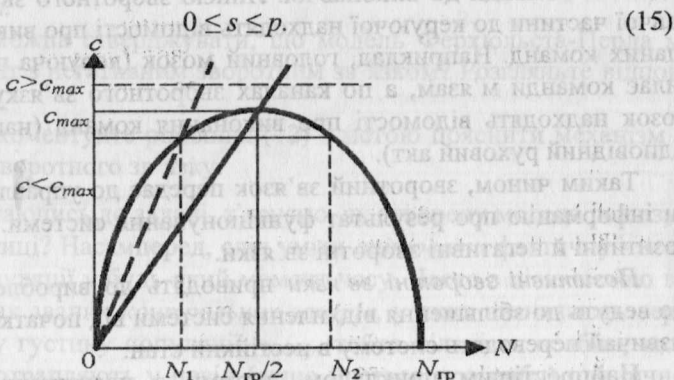


Рис. 4.18

В математичній екології ця остання модель має спеціальну назву – *модель вилову з негативним зворотним зв'язком*.

Зважаючи на важливість поняття зворотного зв'язку, розглянемо його дещо докладніше.

4.4.1. Автоматичне регулювання і зворотний зв'язок

Поняття зворотного зв'язку належить до основних понять кібернетики – науки про управління і зв'язок у природних, технічних і суспільних процесах – і заслуговує на більш докладне висвітлення.

Всі біологічні і більшість складних технічних систем відносять до *саморегульованих систем*, які за непередбачених зовнішніх впливах здатні самостійно підтримувати свій стан або режим функціонування на певному заданому рівні.

Необхідною умовою існування таких систем є зворотні зв'язки. Усяка саморегульована система містить *керуючу (управляючу)* і *виконавчу* частини. Схема найпростішої системи автоматичного керування подана на рис. 4.19.

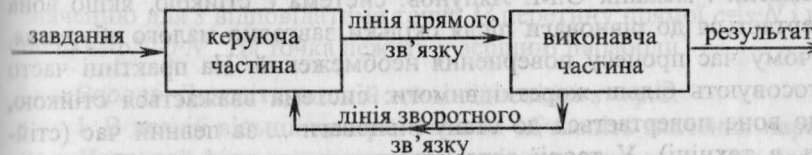


Рис. 4.19.

Лінією прямого зв'язку відповідно до завдання керуюча частина

надсилає команди до виконавчої. Лінією зворотного зв'язку з виконавчої частини до керуючої надходять відомості про виконання надісланих команд. Наприклад, головний мозок (керуюча частина) надсилає команди м'язам, а по каналах зворотного зв'язку в головний мозок надходять відомості про виконання команд (наприклад, про відповідний руховий акт).

Таким чином, зворотний зв'язок передає до управляючої частини інформацію про результат функціонування системи. Розрізняють позитивні й негативні зворотні зв'язки.

Позитивні зворотні зв'язки приводять до вироблення команд, що ведуть до збільшення відхилення системи від початкового стану і зазвичай переводять систему в нестійкий стан.

Найпростішим прикладом системи з позитивним зворотним зв'язком є акустична система, що містить звуковий підсилювач, до входу якого підключено мікрофон, а до виходу – гучномовець. Якщо звуковий сигнал від гучномовця надходить до мікрофону, виникатиме добре відомий акустичний ефект у вигляді свисту з наростаючою гучністю та частотою.

За участю позитивних зворотних зв'язків, наприклад, можуть розвиватися деякі хвороби. Так, ослаблення серцевої діяльності може приводити до закупорки судин, що, в свою чергу, викликає ще більше ослаблення серцевої діяльності.

Негативні зворотні зв'язки ведуть до зменшення відхилення в системі і тим самим стабілізують режим її функціонування. Наприклад, при перегріві організму підсилюється потовиділення, частішає дихання, що приводить до збільшення тепловіддачі в навколишнє середовище і до зниження температури організму. Класичним прикладом пристрою з негативним зворотним зв'язком є широко відомий механічний відцентровий регулятор, призначений для стабілізації частоти обертання двигунів.

Точне визначення стійкості системи регулювання дав відомий математик і механік О.М. Ляпунов: система є стійкою, якщо вона повертається до рівноваги після скільки завгодно малого збурення, причому час процесу повернення необмежений. На практиці часто застосовують більш жорсткі вимоги: система вважається стійкою, якщо вона повертається до стану рівноваги ... за певний час (стійкість в техніці). У теорії автоматичного регулювання кібернетику іноді тлумачать як учення про зворотний зв'язок у складних технічних, біологічних і соціальних системах.

Вправа.

1. Чи можна стверджувати, що модель Ферхюльста-Перла містить елемент з негативним зворотним зв'язком? Розгляньте відповідне рівняння.

2. Прокоментуйте рівняння (12) з метою пояснити механізм негативного зворотного зв'язку.

Повертаючись до задачі, з'ясуємо, як створену модель реалізувати на практиці? Насамперед, слід уміти *оцінювати* фактичну чисельність N популяції у будь-який момент часу. Часто з цією метою вдаються до так званих *контрольних замірів*, у яких визначають середню об'ємну густину популяції $n_{\text{контр}}$, тобто кількість особин, що за один раз потрапляють у невід (якщо йдеться про рибу) одиничного об'єму. Якщо популяція рівномірно розподілена у всьому об'ємі V водоймища, обчислюють далі $N = n_{\text{контр}} \cdot V$. Якщо ж розподіл нерівномірний, то $n_{\text{контр}}$ визначають у різних місцях з наступним усередненням результатів. Схожим способом підраховують кількість дичини у мисливських угіддях, кількість дерев на певній ділянці лісу. Тут $n_{\text{контр}}$ називають середньою поверхневою густиною і відносять до одиниці площі. При цьому $N = n_{\text{контр}} \cdot S$.

Далі отримане значення N слід було б увести в комп'ютер у якості N_0 і обчислити абсолютну квоту $c = s \cdot N$, а потім і вираз $c \Delta t$. Проте, якщо ареал (акваторія) проживання популяції настільки великі, що описана процедура моніторингу $n_{\text{контр}}$ може стати занадто складною внаслідок значних фінансових і часових витрат, то слід буде перейти до більш ефективних засобів розвідки, можливо, й до космічної.

Тепер у відповідності до вдосконаленої моделі вилову самостійно внесіть зміни до алгоритму і розпочинайте

4.4.2. Обчислювальний експеримент

Припустимо, що ми знов плануємо виловлювати максимально можливу кількість риби, тобто будемо вести вилов на рівні c_{max} . Тоді значенню для s відповідатиме точка M перетину прямої $c = s \cdot N$ і параболи $c = pN - q \cdot N^2$. Ця точка лежить у вершині параболи.

Вправа. Доведіть, що цій точці відповідає $s = p/2$.

1. В деякій вільній комірці таблиці обчисліть значення параметра s . Чому той факт, що значення s помітно менше за c_{max} , не повинен викликати подиву?

2. Створіть нову таблицю при $N_0 = 500$. Зверніть увагу на те, що після деякого періоду усталення популяція виходить на рівноважний

(стаціонарний) режим – її чисельність перестав змінюватись і залишається на рівні 250 (рис. 4.20). Чому саме 250?

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0	0	500	$N_0 = 500$	
3	0,01	-13	488	$p = 5$	
4	0,02	-12	476	$q = 0,01$	
5	0,03	-11	465	$s = 2,5$	
6	0,04	-10	455	$\Delta t = 0,01$	
7	0,05	-9	446		
8	0,06	-9	437		
...		

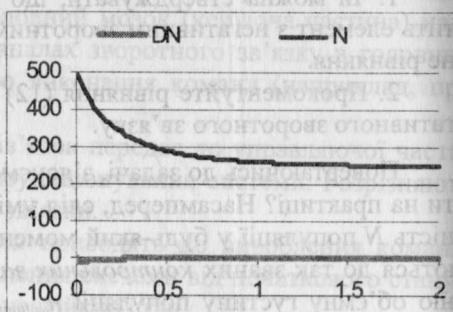


Рис. 4.20

3. У попередній версії результат був таким самим, але там було встановлено, що при $c = c_{max}$ рівновага виявлялася нестійкою: при випадковому зменшенні чисельності ($N < N_{тр} / 2$ – ліва гілка параболі) популяція гинула. Дана версія позбавлена такої вади і в цьому легко переконатись.

Уменшіть N_0 до 100, залишаючи решту вхідних даних незмінними. З отриманої таблиці можна дізнатись, що популяція не тільки не гине, а, навпаки, чисельність її починає зростати, аж поки не стабілізується на значенні 200. До речі, як ви гадаєте, що відбуватиметься з популяцією при $N_0 = 1$? І взагалі, чи існує в даній моделі нижня границя для N_0 ? Перевірте свої припущення експериментально і дайте оцінку встановленому факту.

4. До позитивних якостей даної версії моделі слід віднести й те, що ця модель жорстко обумовлює межі можливих значень відносної квоти s у відповідності з (14). Будь-яка спроба виходу за ці межі призводить до одного з двох наслідків:

4.1. Значенням $s < 0$ відповідає “від’ємний вилов”, що рівноцінне додаванню риби у водоймище. Проте сказати про зазначену ситуацію словами прислів’я “носити дрова в ліс” – це ще сказати не все. Дійсно, якщо візьмемо $s = -2,5$, то одержимо таблицю, з якої добре видно, що чисельність популяції не зростає необмежено (як це було б згідно прислів’я), а стабілізується на рівні 750 (рис. 4.21). Адже продовжує діяти механізм обмеження, пов’язаного з конкуренцією!

Вправа. Виконайте експерименти з $N_0 = 200, 100, 10$ при тому самому $s = -2,5$. Зробіть висновки, порівнюючи граничні чисельності

у кожному випадку.

	A	B	C	D	E
1	t	ΔN	N	Дано:	
2	0,00	0	500	$N_0 = 500$	
3	0,01	13	513	$p = 5$	
4	0,02	12	525	$q = 0,01$	
5	0,03	12	536	$s = -2,5$	
6	0,04	11	548	$\Delta t = 0,01$	
7	0,05	11	559		
8	0,06	11	570		
...		

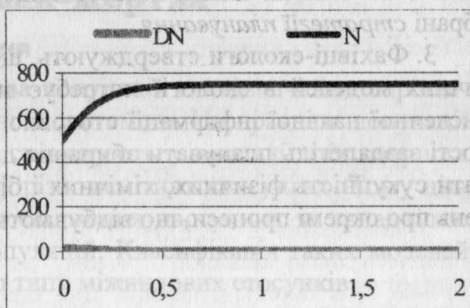


Рис. 4.21

4.2. При $s > p$ пряма $c = sN$ і парабола $c = -qN^2 + pN$ (рис.4.18) не матимуть жодної точки перетину, окрім нецікавого випадку $N = 0$. Це означає, що рівноважних станів не існує: вилов перевищує реальні ресурси популяції і вона гине.

Рис. 4.22 подає результат моделювання при $N_0 = 500$ і $s = 7$.

	A	B	C	D	E
1	T	ΔN	N	Дано:	
2	0,00	0	500	$N_0 = 500$	
3	0,01	-35	465	$p = 5$	
4	0,02	-31	434	$q = 0,01$	
5	0,03	-28	407	$s = 7$	
6	0,04	-25	382	$\Delta t = 0,01$	
7	0,05	-22	360		
...		

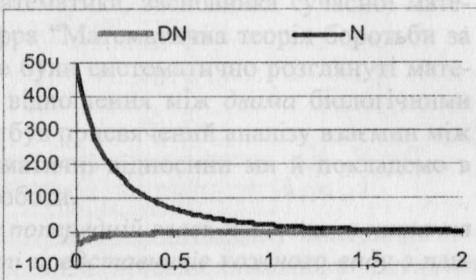


Рис. 4.22

Висновки

1. Модель вилову з негативним зворотним зв'язком забезпечує на довгий час оптимальний вилов – такий самий, як і при жорсткому плані з постійною абсолютною квотою. При цьому слід зазначити, що велика продуктивність тут неможлива. Однак при жорсткому плані внаслідок випадкових причин система може втратити стійкість і, отже, бути винищеною, а негативний зворотний зв'язок стабілізує її чисельність і відвертає від катастрофи.

2. Моделі, подібні до розглянутої, але помітно складніші, допомагають створювати стратегії ефективного використання відновлю-

Глава 5. Модель “хижак–жертва”

5.1. Попередні зауваження

Розглянута вище одновидова популяція є надзвичайно спрощеною та ідеалізованою екологічною системою. Насправді ж популяції в природі існують, а точніше, співіснують у вигляді співтовариств різних видів, які перебувають у різноманітних стосунках. Тому цілком природним і логічним є дослідження наступних за складністю моделей співіснування двох популяцій. Класифікація таких моделей здійснюється у відповідності до типу міжвидових стосунків:

- модель “хижак–жертва”;
- модель “паразит–хазяїн”;
- модель конкуренції за обмежені спільні ресурси існування тощо.

На початку Глави 2 зазначалося, що математична екологія як наука почала формуватися у 20–30-х роках ХХ століття. Визначальною подією для подальшого розвитку цієї науки стала поява в 1931 р. книги відомого італійського математика, засновника сучасної математичної екології Віто Вольтерра “Математична теорія боротьби за існування”. В цій книзі вперше були систематично розглянуті математичні моделі, що описують відношення між двома біологічними видами. Один із розділів книги був присвячений аналізу взаємин між хижаками й жертвами. Ці драматичні відносини ми й покладемо в основу подальшої навчальної роботи.

Метою дослідження як і в попередній главі, поставимо питання про характер зміни чисельності представників кожного виду з плином часу.

5.2. Постановка задачі і побудова математичної моделі

Нехай у знайомому нам ставку з карасями (жертвами) з’являються щуки (хижаки).

Припущення 1. За умови, що хижаки й жертви ізольовані одні від інших, а зовнішні обмеження на ресурси середовища для карасів відсутні, динаміку кожної популяції для достатньо малих проміжків часу Δt можна описати законом Мальтуса, де з метою спрощення всі індекси 1 відносяться до жертв, а індекси 2 – до хижаків.

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = k_1 N_1; \quad \frac{\Delta N_2}{\Delta t} = -k_2 N_2$$

Тут $k_1 = \frac{\Delta N_1}{N_1 \Delta t}$ і $k_2 = \frac{\Delta N_2}{N_2 \Delta t}$ – відповідні відносні прирости чисе-

льності жертв і хижаків за одиницю часу. Знак “-” у другому рівнянні означає, що ізольовані від жертв (їжі) хижаки матимуть від’ємний приріст, тобто їхня чисельність із плином часу зменшуватиметься, і вони вимиратимуть.

Але якщо хижаки й жертви опиняються поруч, зміни чисельності обох популяцій стають взаємозалежними. За цих умов приймемо

Припущення 2. Швидкість приросту жертв має залежати від розмірів популяції хижаків, причому вона буде зменшуватись із зростанням чисельності хижаків. Для швидкості приросту хижаків має справджуватись протилежне: швидкість приросту хижаків збільшуватиметься одночасно зі зростанням чисельності жертв.

Оскільки хижак з’їдає жертву лише при зустрічі з нею, приймемо

Припущення 3. Число зустрічей пропорційне як кількості жертв N_1 , так і хижаків N_2 , тобто добуткові $N_1 \cdot N_2$.

Для опису динаміки популяцій В. Вольтерра запропонував таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\Delta N_1}{\Delta t} = k_1 N_1 - a_1 N_1 N_2 \\ \frac{\Delta N_2}{\Delta t} = -k_2 N_2 + a_2 N_1 N_2 \end{cases} \quad (1)$$

Тут N_1, N_2 – чисельності жертв і хижаків у деякий момент часу;

k_1, a_1, k_2, a_2 – постійні коефіцієнти.

Завдання. Поясніть, чому вирази, пропорційні добутку $N_1 \cdot N_2$, входять до рівнянь системи (1) з протилежними знаками?

Перепишемо наведену систему (1) у формі скінчених різниць:

$$\begin{cases} \Delta N_1 = N_1(k_1 - a_1 N_2) \Delta t \\ \Delta N_2 = -N_2(k_2 - a_2 N_1) \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

Система рівнянь (1) або (2) – це математична модель динаміки співіснування двох біологічних видів на основі відносин “хижак – жертва”. У математичній екології вона відома під назвою “**модель Вольтерра – Лотки**”.

В. Вольтерра згадував, що у 1925 році його знайомий розповів цікавий факт. Коли в роки першої світової війни та в перші повоєнні роки інтенсивність промислів на Адріатиці різко скоротилась, то в уловах почали спостерігати помітне зростання відносної долі хижих риб. Щоб пояснити це, Вольтерра й запропонував модель (1).

При формалізації стосунків “хижак – жертва” приймемо далі *Припущення 4*. Коефіцієнти моделі (k_1, a_1, k_2, a_2) не залежать від того, яку саме частину кожної популяції ми бажаємо описати. Таку популяцію називають *просторово однорідною*.

У випадку ж неоднорідного розподілу хижаків і жертв може скластися ситуація, коли частина хижаків знаходяться дуже далеко від жертв (a_2 малий), а решта – поблизу (a_2 великий). В такому разі опис кожної популяції системою рівнянь (1) стає неможливим. Отже, будемо вважати, що *коефіцієнти моделі є сталими в просторі і не змінюються з плином часу*.

Далі виявилось, що *модель Вольтерра–Лотки не має точних аналітичних розв’язків*, тобто виразити $N_1(t)$ і $N_2(t)$ через відомі елементарні функції неможливо. Тому єдине, що залишається в означеній ситуації – це скористатися чисельним розв’язуванням. Для нас цей факт є принциповим: адже в попередніх задачах (моделях) аналітичні розв’язки існували, проте ми наполегливо й планомірно освоювали чисельний метод. Виявляється, що *недарма*.

То ж підготуємо таблицю за таким зразком:

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	N_1	N_2	ΔN_1	ΔN_2	Дано:	
2						$k_1 =$	
3						$k_2 =$	
4						$a_1 =$	
5						$a_2 =$	
6						$N_{01} =$	
7						$N_{02} =$	
8						$\Delta t =$	
...		

Комірки другого рядка цієї таблиці (для $t = 0$) матимуть такий уміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=\$G\$6
C2	=\$G\$7
D2	=B2*(\$G\$2-\$G\$4*C2)*\$G\$8
E2	=-C2*(\$G\$3-\$G\$5*B2)*\$G\$8

Заповнимо третій рядок, який далі скопіюємо у наступні n рядків, де $n = t_{\text{моделювання}} / \Delta t$:

комірки	формули
A3	=A2+\$G\$8
B3	=B2+D2
C3	=C2+E2
D3	=B3*(\$G\$2-\$G\$4*C3)*\$G\$8
E3	=-C3*(\$G\$3-\$G\$5*B3)*\$G\$8

Тепер можна розпочинати

5.3. Обчислювальний експеримент

1. Уведемо такі вхідні дані: $k_1 = 5$; $k_2 = 0,001$; $a_1 = 0,002$; $a_2 = 10$; $N_{01} = 15000$; $N_{02} = 2500$; $\Delta t = 0,01$. З метою отримати декілька періодів візьмемо кількість рядків таблиці $n = 402$.

2. Результати моделювання подані на рис. 5.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	T	N_1	N_2	ΔN_1	ΔN_2	Дано:	
2	0,00	15000	2500	0	125	$k_1 = 5$	
3	0,01	15000	2625	-38	131	$k_2 = 10$	
4	0,02	14963	2756	-77	137	$a_1 = 0,002$	
5	0,03	14886	2893	-117	141	$a_2 = 0,001$	
6	0,04	14769	3034	-158	145	$N_{01} = 15000$	
7	0,05	14611	3179	-198	147	$N_{02} = 2500$	
8	0,06	14413	3326	-238	147	$\Delta t = 0,01$	
...		

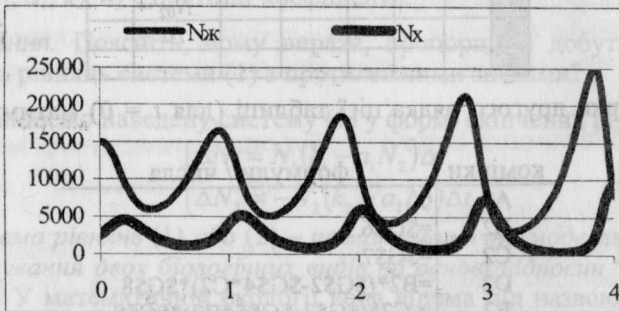


Рис. 5.1.

3. З таблиці й графіків на рис. 5.1 видно, що зміни чисельності, як хижаків, так і жертв, є коливаннями із майже однаковими періодами (переконайтесь за таблицею) та зростаючими амплітудами.

Завдання

1. Чим, на вашу думку, обумовлене зростання амплітуд?
2. Як ви вважаєте, чому фази цих коливань не співпадають?

4. Дослідимо вплив параметрів моделі на перебіг процесу. Загальноприйнятим тут є такий підхід: усі параметри моделі, крім одного, фіксуються, а незафіксованому параметру надають різних значень. Нехай для початку таким параметром буде N_{01} .

4.1. Зменшимо N_{01} , наприклад, від 15000 до 13000.

Чи змінився помітним чином період коливань?

4.2. Стосовно амплітуд коливань кількості хижаків і кількості жертв зазначимо, що тепер вони стали меншими.

Для того, щоб мати можливість *проаналізувати* результати впливу N_{01} на амплітуди цих коливань, будемо зменшувати N_{01} із певним кроком, наприклад, 2000, тобто надаватимемо N_{01} значень 15000, 13000, 11000, 9000, 7000, 5000. При цьому спостерігаємо, що амплітуди спочатку спадають (до $N_{01} = 11000$), а потім зростають (для $N_{01} > 9000$). Одразу виникає два питання:

- а) при якому значенні N_{01} амплітуди коливань чисельності хижаків і жертв набувають мінімумів;
- б) якими є ці мінімальні значення?

Узявши $N_{01} = 10000$, ми одразу одержуємо відповідь і, крім того, принципово важливий результат: *модель Вольтерра – Лотки передбачає рівноважний стан* (рис. 5.2).

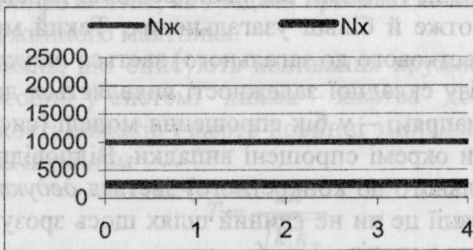


Рис. 5.2

Тут слід зазначити, що нам просто пощастило. Якби значення параметра N_{01} , що відповідає рівноважному стану, знаходилося не в точці 10000, то пошуки його шляхом обчислювальних експериментів могли б виявитись досить тривалими.

Після цього слід було б зафіксувати деяке значення параметру N_{01} , а експериментувати з параметром N_{02} .

Та виявляється, що в цьому немає ніякої необхідності: адже ми маємо вже певний досвід аналітичного пошуку рівноважних станів і можемо ним скористатись. Оскільки рівноважному стану відповідає $\Delta N_1 = 0$ і $\Delta N_2 = 0$, то з (2) одразу видно, що нулю повинні дорівнювати вирази в дужках: $k_1 - a_1 N_2 = 0$ і $k_2 - a_2 N_1 = 0$, звідки для будь-якого, в тому числі й початкового моменту $t = 0$, маємо

$$N_{02} = \frac{k_1}{a_1} \quad \text{і} \quad N_{01} = \frac{k_2}{a_2} \quad (3)$$

Залишається виконати перевірку:

$$N_{02} = \frac{5}{0.002} = 2500 \quad \text{і} \quad N_{01} = \frac{10}{0.001} = 10000.$$

Отже, рівноважні стани визначаються тільки значеннями параметрів k_1 , a_1 , k_2 і a_2 – коефіцієнтів моделі.

При одержанні розв'язку (3) передбачалося, що чисельності N_1 і N_2 не змінюються з часом ($\Delta N_1 = 0$ і $\Delta N_2 = 0$). Це один із багатьох розв'язків – *стаціонарний*.

5. Залишився не з'ясованим той факт, що періоди коливань чисельності хижаків і жертв, по-перше, однакові між собою і, по-друге, ці періоди не залежать від значень, що їх набувають N_1 і N_2 у ході своєї зміни.

Звернемо тут увагу на наступне. Модель Вольтерра – Лотки була нами взята в готовому вигляді і виявилася досить складною. Коли моделі складали ми, то йшли від найпростіших версій до все більш ускладнених, а отже й більш узагальнених. Такий метод побудови міркувань (від часткового до загального) зветься *індуктивним*. Часто, однак, для аналізу складної залежності виявляється доцільним іти в протилежному напрямі – у бік спрощення моделі (системи рівнянь), тобто розглядати окремі спрощені випадки. Відповідний метод міркувань (від загального до конкретного) зветься *дедуктивним*. До речі, в нашій ситуації це чи не єдиний шлях щось зрозуміти, не вдаючись до чисельних методів.

5.1. То ж припустимо, що система “хижак – жертва” якимось чином (не має значення, яким саме) виявилась поблизу рівноваги. При цьому чисельності хижаків і жертв мало відрізняються від відповідних стаціонарних значень.

Отже, нехай

$$N_1 = \frac{k_2}{a_2} + n \quad \text{і} \quad N_2 = \frac{k_1}{a_1} + x,$$

де n та x малі у порівнянні з N_1 і N_2 .

Якщо ці вирази підставити в (1) і знехтувати добутком nx внаслідок його малості у порівнянні з рештою членів, то одержуємо

$$\begin{cases} \frac{\Delta n}{\Delta t} = -k_2 \frac{a_1}{a_2} x; \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} = k_1 \frac{a_2}{a_1} n. \end{cases} \quad (4)$$

Уведемо нову змінну $v = k_1 \frac{a_2}{a_1} n$. Після відповідної заміни система (1) набуває такого спрощеного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v; \\ \frac{\Delta v}{\Delta t} = -k_1 k_2 x. \end{cases} \quad (5)$$

5.2. Якби ми нічого не знали про модель Вольтерра–Лотки, і перед нами було б поставлене питання: “Що саме описує система рівнянь (5), де k_1 і k_2 – деякі постійні числа?”, то рано чи пізно у цій системі ми б, напевно, впізнали рівняння, що описують рух вантажу на пружині за умови, що x – зміщення вантажу від положення рівноваги, v – швидкість вантажу і вираз $k_1 \cdot k_2$ дорівнює відношенню жорсткості пружини до маси вантажу. Звідси випливає, що система (5) має такий самий розв’язок, як і задача про малі коливання вантажу на пружині – пружинного маятника.

Збіг рівнянь, що описують коливання пружинного маятника і чисельність особин у системі “хижак – жертва” дозволяє стверджувати, що кількості хижаків і жертв повинні змінюватись за гармонічним законом із періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1 k_2}}. \quad (6)$$

Якщо далі пригадати, що коливання швидкості маятника випереджають коливання його координати на чверть періоду (на $\pi/2$ рад), то слід зробити висновок, що коливання чисельності хижаків також мають випереджати коливання чисельності жертв на чверть періоду.

5.3. Таким чином, розв’язком системи рівнянь Вольтерра–Лотки є коливання чисельності хижаків і жертв, зсунуті одне відно-

но одного за фазою, з періодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_{cx} \cdot k_{пж}}}$. Звісно, коли амплітуда

цих коливань зростає, вони перестають описуватися законом косинуса або синуса, тобто перестають бути гармонічними, що видно з графіків на рис. 5.1, проте період залишається незмінним.

Вправа

1. Поясніть, чому період коливань не залежить від N_1 і N_2 .

2. Обчисліть період T згідно (6) і порівняйте одержане значення з тим, що дає таблиця на рис. 5.1, на якій зображено не менше трьох періодів. За результатами порівняння зробіть висновки.

5.4. Завершимо експериментальне дослідження моделі Вольterra–Лотки побудовою й аналізом графіків зміни чисельності обох популяцій в залежності від часу згідно спрощеної системи (5). Будемо мати на увазі, що система (1) автоматично переходить до спрощеного вигляду за умови, визначеної у п. 5.1, а саме, коли початкові кількості особин кожного виду N_{01} і N_{02} трохи відрізняються від своїх стаціонарних значень (10000 і 2500 відповідно). Для цього візьмемо для них такі, наприклад, значення: $N_{01} = 10040$ і $N_{02} = 2520$.

Результат, поданий на рис. 5.3, виявляється надзвичайно невізразним (перевірте!). Причиною цього є те, що на кожній з координатних осей ми вирішили показати несумірні пари чисел 10000 і 40 та 2500 і 20.

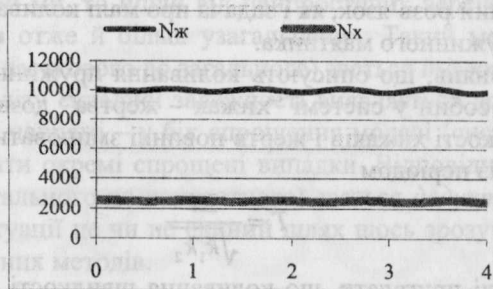


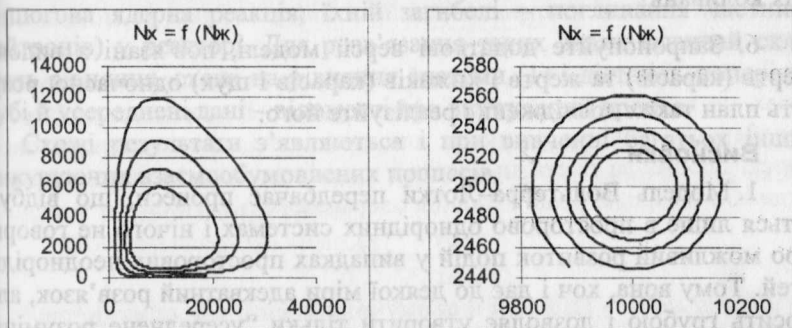
Рис. 5.3

Чисельне розв'язування системи (2) привело до висновку, що чисельності популяцій обох видів із плином часу здійснюють складні коливання з наростаючою амплітудою (рис. 5.1). У спрощеній системі (5) ці коливання набувають гармонічного характеру, але безпосе-

редньо побачити цей факт досить складно, тому що результат на графіку, поданому на рис. 5.3, виявляється не переконливим.

Наступний текст доцільно вивчати після розгляду теми “Фазова площина” з Глави 7.

Щоб отримати переконливу інформацію про досліджуваний процес, зобразимо його на фазовій площині в координатах N_1, N_2 , що, як ми бачили, є аналогами зміщення x , і швидкості його зміни v , тобто виведемо на екран графіки залежності $N_2 = f(N_1)$ – рис. 5.4.



(а) $N_{01} = 15000; N_{02} = 5000$

(б) $N_{01} = 10040; N_{02} = 2520$

Рис. 5.4

З рис. 5.4а видно, наступне:

- процес дійсно є коливальним;
- амплітуда коливань постійно зростає.

Згущення траєкторії зображувальної точки біля координатних осей обумовлене тим, що величини N_1 і N_2 за своєю природою є додатними числами і не можуть набувати від’ємних значень, а тому вони “вимушені” групуватись у вузьких смугах біля осей.

У порівнянні з рис. 5.1 ніяких принципово нових відомостей тут немає, а от фазовий портрет процесу, поданий на рис. 5.4б, повністю усуває недоліки, перелічені при аналізі рис. 5.3.

Вправа

1. Проаналізуйте рис. 5.4б.
2. За рис. 5.1 з’ясуйте, чи утворюють послідовності максимумів функцій $N_1 = N_1(t)$ і $N_2 = N_2(t)$ прогресії. Якщо так, то які: арифметичні чи геометричні?
3. І все ж погодьтесь, не дуже віриться, що розглядувана нами система “хижак – жертва” є таким своєрідним генератором незату-

хаючих коливань!

3.1. Якщо ж із цим погодитись, то як у такому разі в системі реалізується позитивний зворотний зв'язок, необхідний для переходу системи в режим генерації?

3.2. Висловіть свої міркування про джерело енергії, за рахунок якої можуть здійснюватись такі коливання (до того ж зі зростаючими амплітудами).

3.3. За яких умов, на вашу думку, може відбутись загасання цих коливань?

6. Запропонуйте додаткові версії моделі, пов'язані з вилітом жертв (карасів) та жертв і хижаків (карасів і щук) одночасно, розробіть план таких досліджень і реалізуйте його.

Висновки

1. Модель Вольтерра–Лотки передбачає процеси, що відбуваються лише в просторово однорідних системах і нічого не говорить про можливий розвиток подій у випадках просторових неоднорідностей. Тому вона, хоч і дає до деякої міри адекватний розв'язок, але є досить грубою і дозволяє утворити тільки “усереднене розуміння” того, як із плином часу змінюється кількість елементів системи.

2. У методі моделювання широко використовують два принципово різні підходи.

При першому підході створюється математична модель процесу і виконується аналітичне або чисельне її розв'язування, яке за можливості супроводжується графічними побудовами. Тут комп'ютер використовується здебільшого як високоефективний обчислювальний засіб. Саме у такий спосіб ми здійснили описане вище дослідження.

Другий підхід – *комп'ютерне імітаційне моделювання* складної системи. Воно дозволяє одержати більш докладні уявлення про процеси (в моделі Вольтерра – Лотки було б урахування просторових неоднорідностей). Але зазвичай такий підхід потребує значно складніших алгоритмів і більших витрат часу й пам'яті. Розв'язуючи подібні задачі, дослідники активно використовують якісний аналіз, моделюють систему у спеціалізованих сучасних середовищах на спеціалізованих комп'ютерах, розробляють “правила гри” і розмірковують над тим, які з цих “правил” найбільш повно відповідають реальній системі. У цих моделях дуже часто характеристикам процесу надають випадкових значень, і такі моделі прийнято називати *імітацій-*

ними.

Докладніше про імітаційні моделі йтиметься далі у Главі 11.

3. Виявляється, що з неменшим успіхом моделлю Вольтерра-Лотки можна скористатись і для з'ясування проблем, пов'язаних із кінетикою (тобто розвиток процесу в часі) хімічних та ядерних реакцій. Тут частинки реагентів унаслідок дифузії рухаються, зустрічаються, вступають у реакції, в результаті яких вони "гинуть", продукуючи нові частинки і т.п. Розмноженню риб відповідає, наприклад, ланцюгова ядерна реакція, їхній загибелі — поглинання частинок (нейтронів) у реакторі. Для розв'язання таких задач зазвичай складають рівняння, схожі на рівняння системи (1) і дістають попередні, грубі й усереднені дані — відомості про виучуваний процес.

Схожі результати з'являються і при вивченні багатьох інших конкуруючих взаємообумовлених процесів.

Формалізуємо
$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} N_j - \mu_i N_i$$

(*)

... (The text in this section is extremely faint and largely illegible due to bleed-through from the reverse side of the page.)

3.1. Матриця коефіцієнтів

... (The text in this section is extremely faint and largely illegible due to bleed-through from the reverse side of the page.)

... (The text in this section is extremely faint and largely illegible due to bleed-through from the reverse side of the page.)

... (The text in this section is extremely faint and largely illegible due to bleed-through from the reverse side of the page.)

$$V_j = 0.5$$

Глава 6. Вікова модель одновидової популяції

Вступ

У цій главі буде розглянута математична модель одновидової популяції, яку в 1945 р. запропонував американський біолог П. Леслі. Її привабливість, на наш погляд, полягає в тому, що в цій моделі був здійснений цікавий і нетрадиційний на той час підхід до моделювання динаміки популяції.

Традиційне розв'язання такої задачі, як ми бачили у попередніх главах на прикладах моделі Т. Мальтуса та її ускладнених версій, передбачає складання рівняння для швидкості зміни загальної чисельності особин за достатньо малий проміжок часу і наступне аналітичне або чисельне розв'язування одержаного рівняння

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = f(N).$$

Вікова модель П. Леслі в цьому відношенні має принципову відмінність – в її основу покладено розподіл популяції за групами у відповідності з віком особин. Ця модель визначає правила, за якими змінюються характеристики, що описують еволюцію окремих груп і популяції в цілому. При цьому її словесний опис легко формалізується, тобто його нескладно подати у вигляді математичних співвідношень. Цією моделлю в математичній екології було започатковано новий клас так званих *матричних дискретних моделей*.

6.1. Найпростіша версія моделі

Для вивчення змін чисельності, що відбуваються в популяції із плином часу, розглянемо популяцію, розподілену за віковими групами. Цей розподіл стосовно *продуктивної частини популяції* заданий такими *Правилами*:

Правило 1. Першу групу складають всі особини віком до 1 року, другу – особини другого року життя і т.д. Нехай до першої групи входять N_1 особин, до другої – N_2 , ..., до j -ї – N_j , де $j = 1, 2, \dots$ – вік особин (номер групи).

Правило 2. Смертність спрощено можна врахувати у такий спосіб: особини вмирають (гинуть) після перебування у k -тій віковій групі, де k – максимальний вік ($k = j_{max}$).

Загальна кількість особин у популяції становить

$$\Sigma N_j = N_1 + N_2 + \dots + N_k.$$

Правило 3. Для кожної j -ї вікової групи встановлюється коефіцієнт народжуваності B_j з таким змістом: річний приплід, обумовлений присутністю j -ї вікової групи з чисельністю N_j , становить $B_j \cdot N_j$. Коефіцієнт B_j не обов'язково має бути цілим числом, більшим 1. Зокрема, в залежності від біологічного виду і умов життя можливі навіть випадки, коли $0 \leq B_j \leq 1$ (докладніше далі). Річний приплід для усієї популяції підраховується наприкінці року і становить

$$B_1 \cdot N_1 + B_2 \cdot N_2 + \dots + B_k \cdot N_k.$$

Правило 4. Особини, котрі в i -у році належали до j -ї вікової групи, у наступному $(i+1)$ -у році переходять до $(j+1)$ -ї групи, а особини, котрі належали до k -ї групи, за **Правилом 2** гинуть.

Потомство поточного року – це особини, яким у наступному році виповниться 1 рік, а тому наступного року вони мають увійти до складу першої вікової групи.

Формалізуємо **Правило 4**:

$$N_{ij} = N_{(i+1)(j+1)}, \quad (*)$$

де $i = 1, 2, \dots, m$ – номер року (рядок таблиці), $j = 1, 2, \dots, (k-1)$ – номер вікової групи (стовпець таблиці).

Таким чином у i -му й у наступному $(i+1)$ -му році згідно з новим розподілом загальна чисельність ΣN_j популяції становитиме:

$$i\text{-й рік:} \quad \Sigma N_j = \underbrace{B_1 \cdot N_1 + B_2 \cdot N_2 + \dots + B_k \cdot N_k}_{N_1} + \underbrace{N_1 + N_2 + \dots + N_{k-1}}_{\text{всі решта груп, починаючи з другої}}$$

$$(i+1)\text{-й рік:} \quad \Sigma N_j = \underbrace{N_1}_{\text{перша вікова група (приплід за попередній рік)}} + \underbrace{N_2 + N_3 + \dots + N_k}_{\text{всі решта груп, починаючи з другої}}$$

Припустимо, що в деякій популяції кожна продуктивна особина протягом року дає приплід, рівний 1. При цьому половину загальної кількості щорічного потомства складають особини чоловічої статі, половину – жіночої (непродуктивна і продуктивна частини популяції). Припустимо далі, що необхідно вести підрахунок лише продуктивної частини популяції. Якого значення в такому разі слід надати коефіцієнту народжуваності B_j ?

Порівняйте свої міркування з нашими.

Якби треба було підраховувати всіх, а не лише продуктивних представників потомства, то для коефіцієнта народжуваності згідно умови слід було б прийняти $B_j = 1$. Оскільки продуктивна частина потомства складає половину його загальної чисельності, то фактично $B_j = 0,5$.

На рис. 6.1 наведена схема, що ілюструє механізм розподілу популяції за віковими групами при переході у наступний рік.

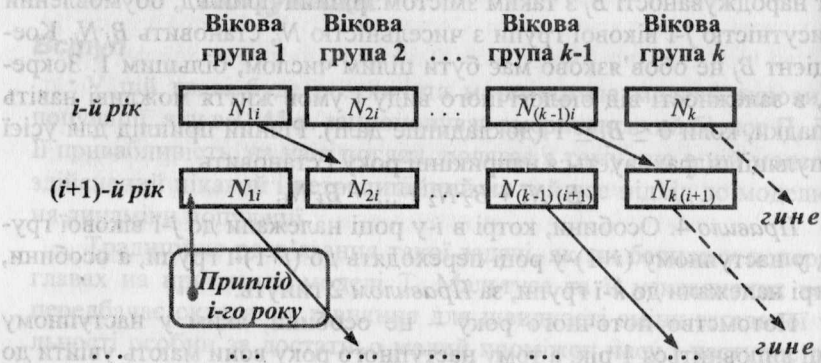


Рис. 6.1

Окремо слід звернути увагу на питання про час і ось чому.

1. З біологічної точки зору час існування живої істоти складається з періодичних повторень життєво важливих процесів – репродуктивних циклів, що завершуються появою потомства. Максимальна кількість циклів (від одного до декількох) та їх тривалість залежать від біологічного виду. Тому цілком логічно одиницею виміру часу вважати тривалість одного репродуктивного циклу, а вік істоти визначати за кількістю таких циклів. Отже, стосовно продуктивної частини популяції можна сказати, що певну вікову групу в моделі Лесли утворюють особини, що пройшли однакову кількість репродуктивних циклів.

2. До жодного *Правила*, як і до жодної формули моделі час не входить як аргумент. Він фігурує тут лише як лічильник (порядковий номер, індекс) циклів – тактів “життя” популяції, але для визначеності тривалість циклу має умовну назву “1 рік”.

Вправа

1. Які значення може приймати коефіцієнт народжуваності B_1 ?
2. Чи має сенс поширювати подібні міркування на людину?

6.1.1. Постановка задачі

Вважаючи заданими

- механізм (правила) розподілу популяції за віковими групами;
- $N_{01}, N_{02}, \dots, N_{0k}$ – початковий кількісний склад вікових груп;
- B_1, \dots, B_k – коефіцієнти народжуваності для відповідних груп;

– k – максимальний вік особин,
 визначати чисельність кожної вікової групи і загальну чисельність популяції на протязі кожного з наступних t років, де N_1, N_2, \dots, N_k ; k, t – додатні цілі числа; B_1, \dots, B_k – додатні дійсні числа.

Примітка. Той факт, що в моделі Леслі фігурують коефіцієнти народжуваності на відміну від коефіцієнтів розмноження з попередніх моделей, дає привід думати, що вона пристосована більше до опису динаміки чисельності класу ссавців (тварин). Саме для їхнього розмноження застосовують термін “народжуваність”.

6.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

1. Покласти $k = 6$, створити електронну таблицю за зразком:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$P_{ik}(i)$	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	ΣN_j	Дано:	
2										Початкові чисельн.:
3									$N_{01} =$	
...									...	
8									$N_{06} =$	
9										Коефіцієнти
10										народжуваності:
11									$B_1 =$	
...									...	
16									$B_6 =$	
...		

2. Заповнити перший рядок таблиці іменами змінних.

3. Увести імена вхідних даних і знак “=” у стовпець “Дано.” – $N_{01} =, \dots, N_{06} =; B_1 =, \dots, B_6 =$.

4. Заповнити другий рядок початковими значеннями змінних:

а) покласти $i = 1$;

б) проставити для N_{11}, \dots, N_{16} відповідні значення посиланнями $=\$J\$3, \dots, =\$J\8 на комірки, що містять початкові значення N_{01}, \dots, N_{06} ;

в) загальна чисельність популяції на кінець року (“ ΣN_j ”):

$$\Sigma N_j = N_{11} + \dots + N_{16}.$$

5. Заповнити третій рядок таблиці

а) $i = 2$;

б) за *Правилом 3* обчислити річний приплив минулого року, який є значенням першої вікової групи в даному році:

$$N_{21} = B_1 \cdot N_{11} + B_2 \cdot N_{12} + \dots + B_6 \cdot N_{16};$$

в) у відповідності до (*) – Правила 4 – для решти комірок цього рядка N_{22}, \dots, N_{26} увести відповідно:

$$N_{22} = N_{11}; N_{23} = N_{12}; \dots, N_{26} = N_{15};$$

г) обчислити загальну чисельність популяції на кінець року:

$$\Sigma N_j = N_{21} + \dots + N_{26}.$$

5. Повторювати п. 4 для $i = 3, 4, \dots$ копіюванням всіх формул другого рядка в 11 наступних рядків.

Згідно пп. 1–5 уміст комірок таблиці має бути таким:

комірка	формули / числа	коментарі
з B2 по G2	=J\$3, ..., =J\$8	– зі стовпця “Дано:”
H2	=СУММ(B2:G2)	– у стовець “ ΣN_j ”
B3	=B2*J\$11+C2*J\$12+D2*J\$13+E2	Формули рядка 3
	*J\$14+F2*J\$15+G2*J\$16	від B3 по H3 включно
з C3 по G3	=B2, ..., =F2	копіювати
H3	=СУММ(B3:G3)	у наступні 11 рядків

6.1.3. Обчислювальний експеримент (тестування)

1. Виконаємо тестування на прикладі деякої поки що вигаданої популяції, в якій особини мають максимальний вік 6 років:

– кількість вікових груп $k = 6$;

– початкові чисельності у групах нехай становлять:

$$N_{01} = 10, N_{02} = 13, N_{03} = 12, N_{04} = 15, N_{05} = 11, N_{06} = 14;$$

– коефіцієнтам народжуваності B_i надамо таких значень:

$B_1 = 0$ (вважаємо, що особини першого року життя не здатні до відтворення);

$$B_2 = 0,25; B_3 = 0,3; B_4 = 0,4; B_5 = 0,35; B_6 = 0,25.$$

Зауваження 1. Обрані значення початкових чисельностей N_{01}, \dots, N_{06} та змінних k і B_i взяті довільно і без посилань на будь-які наукові джерела. Проте для тестування механізму роботи моделі такий підхід є цілком прийнятним.

Будемо відслідковувати динаміку чисельності популяції протягом $t = 15$ років, отже таблиця буде мати 16 рядків (рис. 6.2).

Перевірте:

– чи виконується правило переходу у наступний рік, зображене схемою на рис. 4.1?

– чи правильно обчислюються щорічні суми?

– чи правильно обчислюється приплид хоча б у початковому й наступному роках?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Рік (i)	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	ΣN_j	Дано:	
2	1	10	13	12	15	11	14	75	Початк. чисельн.	
3	2	20	10	13	12	15	11	81	$N_{01}=10$	
...
8	7	29	26	22	21	19	20	138	$N_{06}=14$	
9	8	33	29	26	22	21	19	151	Коефіцієнти	
10	9	36	33	29	26	22	21	168	народжуваності:	
11	10	41	36	33	29	26	22	188	$B_1=0$	
...
16	15	71	64	57	51	45	41	329	$B_6=0,25$	

Рис. 6.2

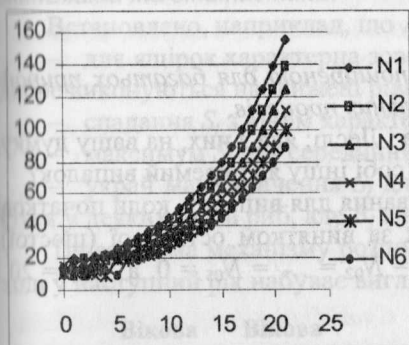


Рис. 6.3a

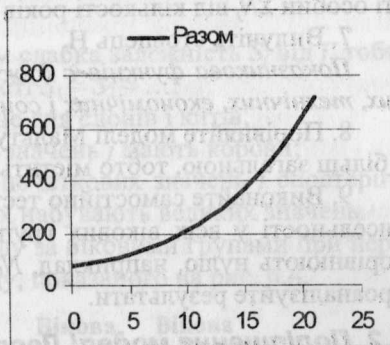


Рис. 6.3б

Виведемо на екран графіки, що відображують динаміку чисельності кожної з вікових груп N_1-N_6 (рис. 6.3a) і динаміку загальної чисельності ΣN_j популяції (рис. 6.3б).

Аналіз графіків показує, що чисельність кожної окремої групи, як і загальна чисельність популяції після декількох коливань починає

монотонно зростати, набуваючи вигляду, що дуже нагадує аналогічний графік для моделі Мальтуса – показникову функцію виду

$$N = N_0 e^{kx}$$

Перевірте зазначений факт у такий спосіб: обчисліть відношення будь-якого члена послідовності ΣN_j , починаючи з того, який вже не коливається, до наступного. Якщо значення таких відношень виявляться однаковими, то це й стане прямим доказом того, що послідовність є геометричною прогресією, тобто дійсно являє собою показникову функцію. З цією метою виконайте вправу.

Вправа

1. Після стовпця Н (перед стовпцем І) створіть новий стовпець. Він стане стовпцем І, а колишній стовпець І стане тепер стовпцем К.
2. В комірку І3 введіть формулу (вираз) для обчислення відношення загальної чисельності популяції ΣN_j попереднього і наступного років.
3. Скопіюйте цю формулу вниз у решту вільних комірок нового стовпця.
5. Забезпечте у новому стовпці точність до третього десяткового знаку і прогляньте результати.
6. Зробіть висновок про характер залежності загальної чисельності особин ΣN_j від кількості років i .
7. Вилучіть стовпець Н.

Показникова функція є дуже поширеною для багатьох природних, технічних, економічних і соціальних процесів.

8. Порівняйте моделі Мальтуса і Леслі: яка з них, на вашу думку, є більш загальною, тобто містить у собі іншу як окремих випадок?

9. Виконайте самостійно тестування для випадку, коли початкові чисельності у всіх вікових групах за винятком останньої (шостої), дорівнюють нулю, наприклад, $N_{01} = N_{02} = \dots = N_{05} = 0$, а $N_{06} = 20$ і проаналізуйте результати.

6.2. Поліпшення моделі Леслі

Одним із суттєвих недоліків розглянутої версії моделі є украй спрощене уявлення (припущення) про смертність. Модель не враховує того очевидного факту, що в реальних популяціях життєва стійкість (здатність до виживання) особин дуже часто буває пов'язана з їхнім віком і може бути різною для різних вікових груп.

Модель можна зробити більш реалістичною, якщо для всіх вікових груп, окрім коефіцієнтів народжуваності B_j , додатково ввести коефіцієнти виживання S_j : S_1, \dots, S_k , де $0 < S_j \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$). Це означатиме, що коли у поточному (i -му) році j -та вікова група має чисельність N_j , то у наступному ($i+1$ -у) році, ставши $(j+1)$ -ю групою, вона матиме чисельність $S_j \cdot N_j$. Оскільки вік особин не може перебільшувати k років, то $S_k = 0$.

Потомство поточного року не належить ні до якої групи, а перейде до першої у наступному році. Для врахування можливих втрат уведемо S_0 – коефіцієнт виживання потомства. Тоді кількість особин у першій віковій групі становитиме

$$N_{(i+1)1} = S_0 \cdot (B_1 \cdot N_1 + B_2 \cdot N_2 + \dots + B_k \cdot N_k).$$

Вправа

1. Як слід розуміти $S_1 = 1$?

2. Чи згодні ви з тим, що до $S_k = 0$ не буде потреби звертатись у подальшому?

Зауваження 2. Коефіцієнти виживання S_j так само, як і коефіцієнти народжуваності B_j , повинні братися на основі багаторічних спостережень за популяціями певного виду. Їхні значення є усередненими, оскільки у окремих індивідів вони дещо відрізняються і являють собою, строго кажучи, численну сукупність випадкових величин. Закономірності таких сукупностей вивчає спеціальна дисципліна – *математична статистика*.

Встановлено, наприклад, що

- для ящірок характерна зовсім слабка залежність S_j від j , тобто добре виконуються наближені рівності $S_1 \approx S_2 \approx \dots$;
- спадання S_j з віком характерне для слонів і китів;
- максимум S_j для серединних значень j мають корови;
- у край мале значення S_j для початкових значень j спостерігається у деяких видів риб, але B_j в них набувають великих значень.

Тепер схема механізму розподілу за віковими групами при переході у наступний рік набуває вигляду, показаного на рис. 6.4.

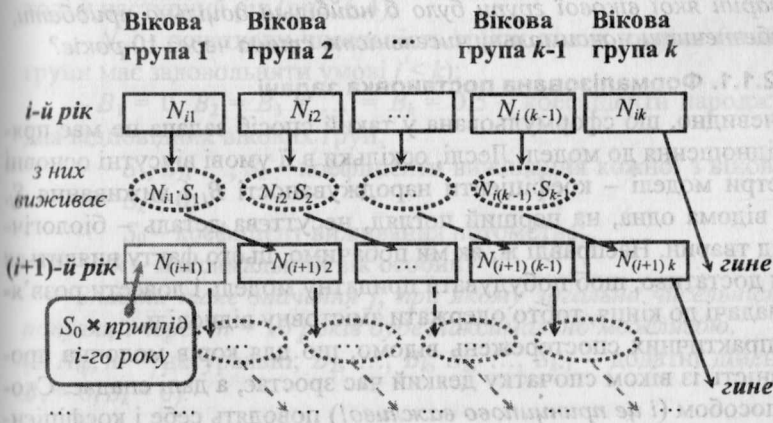


Рис. 6.4

Таким чином, вважаючи, що додатково задані S_0, S_1, \dots, S_k , знову розглянемо задачу розрахунку чисельності окремих вікових груп і популяції в цілому через t років.

6.2.1. Практична задача

Дослідимо динаміку чисельності популяції за новою моделлю на прикладі наступної практичної задачі.

Задача. У тваринницькому господарстві займаються розведенням великої рогатої худоби за наступною стратегією.

1. Основну масу тварин у стаді складають корови, тобто продуктивна частина популяції.

2. Із щорічного приплоду забирають бичків, яких у подальшому утримують окремо від основного стада і після першого року життя здають на м'ясо, тобто однорічні бички утворюють одну із складових м'ясної продукції господарства.

3. Другу частину м'ясної продукції складають корови останньої вікової групи, які внаслідок пов'язаного з віком зниження молочної продуктивності також вилучаються на м'ясо.

4. Умови утримання худоби забезпечують продуктивність тварин і їхнє виживання на досить високому рівні (від $S_0 \approx 0,9$ до $S_0 \approx 1$). Господарство планує придбати і в подальшому розводити нову, більш продуктивну породу корів. Існує можливість придбати 20 тварин будь-якої з k вікових груп. При цьому вартість тварини пропорційна її молочної продуктивності.

Тварин якої вікової групи було б найбільш доцільно придбати, щоб забезпечити максимальну чисельність стада через 10 років?

6.2.1.1. Формалізована постановка задачі

Очевидно, що сформульована у такий спосіб задача не має прямого відношення до моделі Леслі, оскільки в її умові відсутні основні параметри моделі – коефіцієнти народжуваності B_j і виживання S_j . Проте відома одна, на перший погляд, несуттєва деталь – біологічний вид тварин. Насправді ж, як ми побачимо, цього факту виявиться цілком достатньо, щоб побудувати придатну модель і довести розв'язання задачі до кінця, тобто одержати змістовну відповідь.

З практичних спостережень відомо, що для корів молочно продуктивність із віком спочатку деякий час зростає, а далі спадає. Схожим способом (*і це принципово важливо!*) поводять себе і коефіцієнти виживання S_j . Отже, між молочною продуктивністю і коефіцієнтами виживання існує деяка відповідність.

Зв'язок між величинами, який суттєво ускладнюється наявністю багатьох невідомих випадкових факторів, на відміну від функціонального, називають статистичним або *кореляцією*. Якщо такий зв'язок існує, то говорять, що величини корелюють між собою. У даному

випадку молочна продуктивність корелює з коефіцієнтами виживання, тобто за зміною в часі коефіцієнтів виживання можна судити про відповідну зміну молочної продуктивності. Орієнтовні значення цих коефіцієнтів не складно уточнити з бесід із фахівцями. Заздалегідь відомо тільки, що $S_k = 0$ у відповідності до п. 3 умови задачі.

Продовжимо міркування:

- група, яку збираються придбати, складатиметься лише з корів (продуктивного поголів'я);
- кожна з тварин, починаючи з другої вікової групи, протягом року дає приплід, рівний 1;
- тварини першого року життя не здатні до відтворення, $B_1 = 0$;
- в загальному річному приплоді кількість тварин обох статей з достатнім ступенем точності будемо вважати розподіленою порівну.

У відповідності з п. 2 умови задачі коефіцієнти народжуваності для всіх вікових груп, окрім першої, слід прийняти однаковими:

$$B_1 = 0; B_2 = B_3 = \dots = 0,5.$$

Формалізація умови цієї задачі зведеться до її *переформулювання* в термінах моделі Леслі.

Будемо вважати заданими:

- механізм розподілу популяції за віковими групами при переході у наступний рік (рис. 6.4);
- N_{0j} – початкову чисельність групи нових тварин (номер j цієї групи має задовольняти умові $j \leq k$);
- $B_1 = 0, B_2 = B_3 = \dots = B_k = 0,5$ – коефіцієнти народжуваності для відповідних вікових груп;
- S_1, S_2, \dots, S_k – коефіцієнти виживання кожної з вікових груп, $S_k = 0$;
- S_0 – коефіцієнт виживання потомства;
- k – максимальний вік особин.

Знайти таке значення j , при якому загальна чисельність нової популяції через $t = 10$ років буде максимально можливою.

(k, N_{0j}, t – натуральні; $B_2, \dots, B_k, S_2, \dots, S_{k-1}$ – додатні дійсні числа; $B_1 = 0, S_k = 0$).

6.2.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

– п. 2: до вхідних даних додати S_0, \dots, S_5 :

в таблиці з'являться комірки K18–K22 для нових даних; комірки J18–J22 тимчасово залишити пустими.

– п. 4.2:

$N_{i2} = N_{(i-1)1} \cdot S_1, \dots, N_{i6} = N_{(i-1)5} \cdot S_5$, тобто зазнають змін фор-

мули переходів у наступні вікові групи у комірках С3–G3.
Уміст комірок таблиці стане таким:

комірка	формули	коментарі
C3	=B2*\$K\$18	<i>Формули рядка 3 від B3 по H3 включно копіювати у наступні 11 рядків</i>
D3	=C2*\$K\$19	
E3	=D2*\$K\$20	
F3	=E2*\$K\$21	
G3	=F2*\$K\$22	

Оскільки настає відповідальний момент роботи, доцільно здійснити контрольне порівняння вмісту решти комірок третього рядка:

комірка	формули	коментарі
B3	=B2*\$K\$11+C2*\$K\$12 +D2*\$K\$13+E2*\$K\$14 +F2*\$K\$15+G2*\$K\$16	<i>Підрахунок річного приплоду для формування першої групи N_{12}</i>
H3	=СУММ(B3:G3)	<i>Для стовпця ΣN_j</i>
I3	=B3+G3	<i>Для стовпця "М'ясо"</i>

6.2.1. 3. Обчислювальний експеримент

1. Нехай для визначеності $k = 6$. Це значення дещо занижене проти реального (7–8 років) і приймається таким лише з міркувань зменшення трудомісткості при роботі з моделлю. Як далі стане зрозуміло, на результатах дослідження суттєво це не позначиться.

2. Уведемо до таблиці нові вхідні дані:

$$S_1 = 0,95; S_2 = 0,96; S_3 = 0,97; S_4 = 0,98; S_5 = 0,96; S_6 = 0.$$

За цими даними найбільш життєстійкими, а, отже, й найбільш продуктивними (проте і найбільш коштовними) виявляються особи *четвертої вікової групи*. Тому почнемо саме з них і введемо

$$N_{04} = 20;$$

$$N_{01} = N_{02} = N_{03} = N_{05} = N_{06} = 0;$$

$$B_1 = 0; B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,5.$$

Виконаємо копіювання третього рядка у наступні 11 рядків.

Значення загальної чисельності тварин через 10 років виявляється рівним 71.

3. Дотримуючись головного принципу моделювання "А що відбудеться, якщо...?", подивимось, як відреагує наша модель на інше рішення:

придбати 20 тварин третьої вікової групи.

Після введення нових даних ($N_{03} = 20; N_{04} = 0$) дещо несподівано отримуємо більше значення загальної чисельності тварин через зазначений час – 89.

Не заглиблюючись поки що у причини цього факту, спробуємо

провести експеримент із тваринами другої вікової групи.

Результат ще вищий – 100! (рис. 6.5)

Експерименти з тваринами першої, п'ятої та шостої вікових груп приводять до помітно менших результатів (*перевірте!*):
по першій – 74; по п'ятій – 51; по шостій – 29.

Вправа

1. Виконайте відповідні експерименти і переконайтесь у справедливості наведених результатів.

2. Дослідіть по роках кількість голів скота, що йде у м'ясну продукцію.

3. Після стовпця "ΣN" вставте у таблицю новий стовпець "М'ясо".

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<i>Рік</i>	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	ΣN_j	<i>М'ясо</i>	<i>Дано:</i>	
2	<i>1</i>	0	20	0	0	0	0	20	0	Початк. чисельн.:	
3	<i>2</i>	9	0	18	0	0	0	27	9	$N_{01}=0$	
4	<i>3</i>	8	8	0	18	0	0	34	8	$N_{02}=20$	
5	<i>4</i>	11	7	7	0	17	0	43	11	$N_{03}=0$	
6	<i>5</i>	14	10	7	7	0	16	54	30	$N_{04}=0$	
7	<i>6</i>	18	12	9	6	7	0	52	18	$N_{05}=0$	
8	<i>7</i>	15	15	11	9	6	6	63	22	$N_{06}=0$	
9	<i>8</i>	21	13	14	11	9	6	74	27	Коефіцієнти	
10	<i>9</i>	24	18	12	13	11	8	86	31	- народжуваності:	
11	<i>10</i>	28	20	17	12	13	10	100	38	$B_1=0$	
12	<i>11</i>	32	24	19	16	11	12	115	45	$B_2=0,5$	
13	$B_3=0,5$	
14										$B_4=0,5$	
15										$B_5=0,5$	
16										$B_6=0,5$	
17										- виживання:	
18										$S_0=0,9$	
19										$S_1=0,86$	
20										$S_2=0,92$	
21										$S_3=0,96$	
22										$S_4=0,98$	
23										$S_5=0,93$	

Рис. 6.5

4. Доведіть, що до комірок нового стовпця потраплятимуть суми $N_{i1} + N_{i6}$ – така собі компанія з молодих бичків і застарілих корівок

5. Переконайтеся, що значення чисельності у цьому стовпці добре узгоджується з результатами експерименту за пп. 1–3.

Результати виконаної справи підтверджують правильність прийнятого рішення про доцільність придбання продуктивних тварин саме другої вікової групи. В цьому разі м'ясна продукція господарства так само, як і продуктивне поголів'я, будуть максимально можливими.

6.2.2. Аналіз результатів

1. Насамперед, дамо пояснення того результату, що найбільш ефективним є придбання тварин другого року життя. Дійсно, тварини цього віку вже здатні до відтворення і при цьому проходять найдовший (по відношенню до решти вікових груп) життєвий шлях. Виявлений факт заздалегідь передбачити складніше, ніж при застосуванні даної моделі, тому що він не такий вже й очевидний. Отже, у відповідності до сформульованих у моделі припущень *максимально вигідним виявляється придбання найбільш молодих тварин, здатних до відтворення*. Тут максимальна вигода містить три складові:

- по-перше, 20 тварин другої вікової групи коштують дешевше, ніж 20 тварин четвертої групи;
- по-друге, вони забезпечать максимальну кількість поголів'я через 10 років;
- по-третє, максимальною буде і загальна м'ясна продукція.

Запитання. Чи можна стверджувати, що коливання чисельності кожної вікової групи і загальної чисельності популяції на перших етапах обумовлені поганим доглядом за тваринами?

Після обрання оптимальної стратегії ми зіштовхуємося з проблемою обмеженості максимально можливої кількості особин, яку здатне утримувати господарство. В даному випадку ця кількість дорівнює 100 ($28+20+17+12+13+10$). Якщо господарство має можливість утримувати таку кількість поголів'я, воно залишає її. Але через рік кількість особин перевищить 100. В такій ситуації найпростішою стратегією буде просте вилучення надлишкових особин із кожної вікової групи. З рис. 4.5 видно, що через 11 років чисельність поголів'я стане 115 ($32+24+19+16+11+12$). З допомогою *щорічних* вилучень з відповідних груп можна встановлювати таку саму кількість, як і після попереднього 10-го року.

Вправа

1. Здійсніть на папері щорічні вилучення. Яка при цьому виникає проблема?
2. Яке розв'язання цієї проблеми пропонуєте Ви?

Вилучені особини можуть бути реалізовані або через продаж іншим господарствам для подальшого розведення, або через поповнення м'ясної продукції даного господарства.

Обмеження чисельності тварин, про яке щойно йшлося, здійснюється людьми, а тому є штучним. Які ж реальні обмеження можуть мати місце в природних умовах, тобто для вільних популяцій?

6.3. Модель Леслі з природними обмеженнями

Чисельність вільних популяцій ссавців для різних їх видів на певних ареалах може змінюватися з часом у широких межах. В основі цих змін знаходяться різноманітні і не завжди зрозумілі причини. Біологи вважають, що відмінність у чисельності виникає в результаті зміни інтенсивності народжуваності і смертності особин (в термінах моделі Леслі – зміни коефіцієнтів народжуваності B_j і коефіцієнтів виживання S_j), які здебільшого обумовлюються наступним:

- зміною у достатку кормів та їх доступності;
- захворюваннями, що за певних умов набувають характеру різноманітних епізоотій (епідемій у тварин);
- коливаннями погодних умов (тривалих і несвоєчасних приморозків чи опадів у вигляді снігопадів та дощів або ж посух);
- наявністю хижаків тощо.

Масові захворювання не тільки призводять до безпосередньої загибелі тварин, але й знижують плодовитість, а також полегшують переслідування жертви хижаками і роблять тварин менш стійкими до згубної дії несприятливих умов. Фахівцями встановлено існування в популяціях внутрішніх механізмів регулювання чисельності, суть яких проявляється в залежності від ситуації: зростання коефіцієнтів розмноження при різкому зменшенні чисельності або зниження цих коефіцієнтів внаслідок різкого зростання чисельності (густини популяції). Для ряду видів зміна чисельності має деяку, хоч і не строго витриману періодичність. Тривалість періоду залежить від виду й умов існування.

Вивчення динаміки змін чисельності популяцій з метою її прогнозування (мисливські угіддя, рибні запаси, хвороби тварин) ускла-

днюється тим, що зазначені причини виявляються взаємопов'язаними і взаємообумовленими.

Спростимо таку задачу настільки, щоб до її розв'язування можна було застосувати модель Леслі. Припустимо, що коли на кінець року чисельність вільної популяції виявляється більшою за деяке фіксоване число L , то внаслідок надмірно великого скупчення особин коефіцієнти виживання S_j у наступному році зменшуються в Q разів. Причиною зменшення, зокрема, може стати загострення конкуренції за їжу та простір (як результат обмеженості ареалу, на якому мешкає популяція) або епізоотія, що призведе до збільшення смертності.

Вважаючи L і Q заданими (L – натуральне; $Q \geq 1$ – дійсне), знов повернемося до задачі розрахунку загальної чисельності популяції через t років.

6.3.1. Алгоритм роботи з моделлю

- п. 2: – до вхідних даних додати значення величин L і Q ;
 п. 4.2: – для визначення моменту зміни коефіцієнтів виживання S_j треба кожного разу при переході до наступної групи перевіряти, чи перевищує загальна чисельність популяції ΣN_j на кінець попереднього ($i-1$)-го року значення параметра L .

Якщо це так, то замість коефіцієнтів виживання S_j використовувати вирази S_j/Q , інакше S_j залишити без змін.

якщо $\Sigma N_{j(i-1)} > L$

то поділити S_j на Q

інакше поділити S_j на 1 (залишити без зміни)

все

Уміст комірок має бути таким:

комірки	Формули	коментарі
B2, ..., G2	=J\$5, =J\$10	
H2	=СУММ(B2:G2)	
B3	=J\$20*(B2*J\$13+C2*J\$14+D2*J\$15+E2*J\$16+F2*J\$17+G2*J\$18)	Формування першої групи з потомства
C3	=B2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$21/J\$3;J\$21)	Усі формули
D3	=C2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$22/J\$3;J\$22)	третього рядка
E3	=D2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$23/J\$3;J\$23)	від A3 по H3
F3	=E2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$24/J\$3;J\$24)	копіювати вниз
G3	=F2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$25/J\$3;J\$25)	у наступні
H3	=СУММ(B3:G3)	рядки

6.3.2. Обчислювальний експеримент

Уведемо початкові дані (стовпець “Дано:”):

- нехай, як і раніше, кількість вікових груп $k = 6$;
- початкові чисельності у групах N_0 , нехай будуть дорівнювати $N_{01} = 21, N_{02} = 18, N_{03} = 16, N_{04} = 13, N_{05} = 10, N_{06} = 6$;
- коефіцієнти народжуваності B_j розподілимо у такий спосіб: $B_1 = 0,6; B_2 = 0,65; B_3 = 0,75; B_4 = 0,85; B_5 = 0,8; B_6 = 0,6$;
- коефіцієнти виживання приймемо рівними $S_0 = 0,6; S_1 = 0,7; S_2 = 0,75; S_3 = 0,8; S_4 = 0,82; S_5 = 0,7$.
- покладемо параметри $L = 80, Q = 3$.

Виконаємо копіювання третього рядка в наступні 20 рядків.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<i>Рік</i>	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	ΣN_j	<i>Дано:</i>	
2	<i>1</i>	21	18	16	13	10	6	84	$L=80$	
3	<i>2</i>	35	5	5	4	4	2	55	$Q=3$	
4	<i>3</i>	21	25	4	4	3	2	59	Початк. чисельності:	
5	<i>4</i>	23	15	19	3	3	2	65	$N_{01}=21$	
6	<i>5</i>	26	16	11	15	2	2	73	$N_{02}=18$	
...
10	<i>9</i>	23	15	18	4	3	2	66	$N_{06}=6$	
11	<i>10</i>	27	16	11	15	3	2	74	Коефіцієнти	
12	<i>11</i>	31	19	12	9	12	2	85	- народжуваності:	
13	<i>12</i>	35	7	5	3	2	3	55	$B_1=0,6$	
...
18	<i>17</i>	35	7	5	3	2	3	56	$B_6=0,6$	
19	<i>18</i>	22	25	5	4	3	2	60	- виживання:	
20	<i>19</i>	24	15	19	4	3	2	67	$S_0=0,6$	
...

Рис. 6.6

1. Огляд таблиці на рис. 6.6 дає можливість побачити, що після чергового виконання умови $N_{i-1} > L$ відбувається повторення значень чисельності в кожній віковій групі і в популяції в цілому, до того ж ці повторення мають майже періодичний характер. При заданих вище параметрах період коливань (за таблицею) становить приблизно 5 одиниць часу. Це означає, що саме через такий строк відбувається відновлення загальної чисельності та чисельності у окремих вікових групах.

Наочне підтвердження зазначених закономірностей можна одержати, якщо вивести на екран відповідний графік залежності загальної чисельності від часу (рис. 6.7), з якого добре видно, що ці майже періодичні коливання є до того ж пилкоподібними.

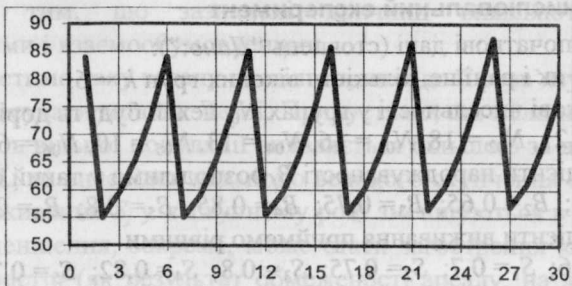


Рис. 6.7

2. Уважно розглядаючи цей графік, можна помітити тенденцію до повільного зростання чисельності у кожному наступному періоді. З метою дослідження цієї тенденції збільшимо час моделювання на порядок. Для цього скопіюємо останній рядок формул у наступні 300 рядків і побудуємо новий графік (рис. 6.8).

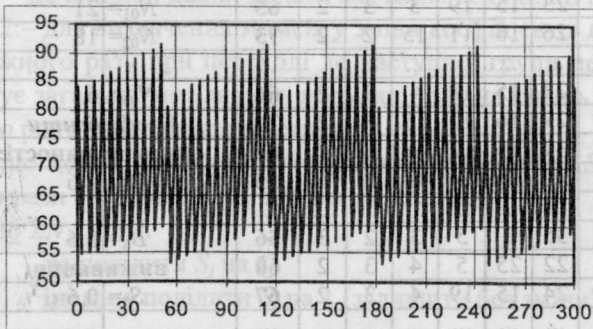


Рис. 6.8

Не дуже очікуваний результат! Виявляється, що окрім короткочасного майже п'ятирічного періоду досліджувана модель має ще й довготривалий період.

Вправа

1. З графіка видно, що тривалість цього періоду близько 50. Встановіть за таблицею його більш точне значення.

2. Від чого залежить тривалість обох цих періодів? Відповідь на таке питання потребує спеціального експериментального і теоретичного дослідження, оскільки загальна чисельність популяції є складною функцією від усіх вісімнадцяти аргументів зі стовпця "Дано:", які в різній мірі впливають на тривалість обох періодів. У цьому мо-

жна переконатись, змінюючи параметри моделі у стовпці J.

Висновки

1. Модель Леслі дозволяє зазирнути у внутрішнє життя популяції лише в моменти завершення репродуктивних циклів і нічого не повідомляє про поступові зміни чисельності, що відбуваються впродовж циклу, оскільки в ній закладено *фіксований* часовий інтервал. Працюючи з моделлю, ми уподібнюємося до клієнта ощадного банку: якщо відсотки приросту капіталу розраховується банком на рік, то банк виконує перерахування тільки за цілу кількість років. Ця модель і подібні до неї належить до класу *дискретних моделей*.

2. М'ясомолочне стадо, яке розглядається в *Задачі*, стосовно м'ясної продукції є відновлюваним ресурсом. Розв'язування задачі звелось до прогнозованого пошуку оптимальної стратегії промислового використання цього ресурсу, що становить одну з актуальних проблем сучасної популяційної екології.

3. Розглянутий у *Задачі* механізм щорічного підтримання загальної чисельності продуктивного стада на сталому рівні забезпечує рівновагу кількісного розподілу тварин за віковими групами. Фактично це механізм регулювання з негативним зворотним зв'язком: видалення тварин відбувається в залежності від їх наявної кількості. Таким самим є і механізм природного обмеження для вільної популяції. Схожа ситуація нами вже була досліджена у попередній главі при вивченні удосконаленої моделі промислового рибальства.

4. Чи можна на практиці скористатися результатами проведеного у *Задачі* дослідження? Питання риторичне і фактично зводиться до іншого. Що краще: протягом десятиліть проводити натурні експерименти і нагромаджувати досвід чи скористатися прогнозом, одержаним на основі моделі? Основне утруднення тут полягає в тому, щоб виявити, наскільки обґрунтованими є припущення, покладені в основу моделі, наскільки сама модель є несуперечливою і, головне, наскільки вона є адекватною досліджуваному об'єкту.

5. Факт існування довгострокового періоду в третій версії моделі виявився непередбаченим. Проте виявити його вдалося досить швидко лише завдяки можливості *графічного* подання інформації за наслідками обчислювального експерименту.

Розділ 4. Комп'ютерне моделювання з фізики:

механіка

Спостережувані нами механічні рухи оточуючих тіл – це результат їхньої взаємодії з іншими тілами, своєрідна гра діючих на них сил. То ж давайте поспостереігаємо за цією грою – адже правила її, якими в механіці є закони збереження і закони Ньютона, нам відомі.

З усього розмаїття механічних рухів ми розглянемо приклади рухів тіл під дією *змінних сил*, а саме таких, що залежать від координат (сила пружності, сила всесвітнього тяжіння) та від швидкості (сила опору, аеродинамічна сила). Пропоновані приклади виходять за межі шкільного підручника фізики, і тому для вас – школярів – являють досить незвичні об'єкти для дослідження. Головна особливість, що відрізняє їх від переважної більшості задач на вивчення рухів за шкільними підручниками, полягає в тому, що *під дією змінних сил тіла набувають змінних прискорень*. За таких умов швидкість руху вже не є лінійною функцією часу, а змінюється у більш складний спосіб. Унаслідок цього точний розрахунок координат, прискорення й швидкості тіла у будь-який момент часу засобами елементарної математики стає неможливим. Проте сучасні комп'ютерні технології дозволяють це утруднення подолати.

Першим об'єктом дослідження оберемо *коливальний рух тіла на пружині з урахуванням опору середовища*. При цьому спочатку розглянемо силу опору у вигляді сили в'язкого, а далі – сухого тертя. Тестування математичної моделі такого руху проведемо для випадку дії на тіло лише однієї сили – сили пружності. Закономірності зазначеного руху вивчаються в шкільному курсі фізики і нам добре відомі.

Одночасно з тестуванням обговоримо важливе питання про підвищення точності комп'ютерних обчислень.

Наступним об'єктом вивчення стане *рух під дією сили всесвітнього тяжіння* (п'ять фрагментів, серед яких 1) задачі про рух супутника навколо планети або рух планети навколо Сонця, 2) рух компонентів у системах подвійних зірок і багато іншого), 3) перевірка законів руху планет засобами обчислювального експерименту, 4) дослідження закону тяжіння для довільного показника степеня у формулі закону, 5) вигляд планетних орбіт у геліоцентричній та геоцентричній системах відліку). На відміну від попереднього прикладу, де сили діють вздовж однієї лінії і де для опису руху цілком вистачить однієї координатної вісі, в даному випадку знадобляться вже дві

координатні вісі, оскільки тут рух відбуватиметься у площині, і всі вектори (сили тяжіння, з якими взаємодіятимуть тіла, відповідні прискорення й швидкості) матимуть дві проєкції.

Третьою стане задача про *рух паперового літачка у повітряно-му середовищі* під дією трьох сил – сили тяжіння, сили опору і піднімальної сили. Цей рух відбуватиметься у вертикальній площині, і кожна з діючих сил також матиме дві проєкції.

Сюжетною основою останньої моделі є *задача про м'яку посадку на Місяць*, що свого часу (у 80-і роки – пору масового поширення в нашій країні програмованих мікрокалькуляторів) обійшла сторінки ряду науково-популярних журналів.

Як і раніше, дослідження кожного об'єкту будемо виконувати у такій послідовності:

1. Здійснимо фізичний аналіз процесу і постановку задачі. З цією метою на основі деяких спрощуючих припущень формалізуємо умову задачі, яку супроводимо пояснювальним рисунком, тобто складемо змістову (концептуальну) модель досліджуваного явища.

2. Від змістової моделі перейдемо до моделі математичної, тобто запишемо у вигляді математичних співвідношень залежності між величинами, що характеризують досліджуваний рух.

3. Складемо алгоритм роботи з моделлю.

4. Проведемо обчислювальний експеримент.

5. На основі аналізу результатів обчислювального експерименту дамо необхідні інтерпретації та сформулюємо висновки.

Середовищем для моделювання залишатимуться електронні таблиці.

Глава 7. Механічні коливання

7.1. Рух тіла під дією сили пружності

На змачений горизонтальний стержень надінемо кулю, що може ковзати вздовж нього, і циліндричну пружину, один кінець якої закріпимо на стержні, а другий – на кулі (рис. 7.1).

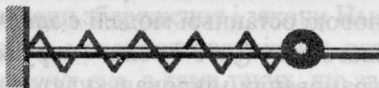


Рис. 7.1

На початку спостереження пружина не деформована і куля перебуває у спокої. Відведемо кулю у нове положення й відпустимо. Здійснивши декілька коливань зі спадаючою амплітудою, куля нарешті зупиниться у положенні рівноваги.

7.1.1. Аналіз процесу (явища)

При малому зміщенні кулі від положення рівноваги пружина деформується і в ній виникає сила пружності F_{np} , яка за законом Гука пропорційна величині деформації Δl і напрямлена до положення рівноваги (тобто проти деформації):

$$F_{np} = -k\Delta l,$$

де k – жорсткість пружини.

Сила пружності діє на кулю й на пружину і надає прискорення обом цим тілам. Розгляд загального випадку коливань тіла (кулі) масою m_1 під дією пружини масою m_2 являє собою зовсім непросту задачу. Вдамося до ідеалізації і прийнемо деякі спрощуючі припущення.

Припущення 1. Пружина є однорідною, тобто фізичні властивості її однакові вздовж усієї довжини. Це дозволяє вважати жорсткість k пружини величиною сталою.

Припущення 2. Будемо вважати пружину невагомою. Ця вимога задовольняється, якщо маса пружини набагато менша за масу вантажу ($m_{пружини} \ll m_{вантаж}$), тобто всю масу системи будемо вважати зосередженою в кулі.

Припущення 3. Оскільки куля – тверде тіло, то всі її точки рухатимуться однаково і описуватимуть однакові за формою траєкторії, тому рух всієї кулі опишемо, як рух однієї точки – її центра мас.

Для рухів тіл у в'язких середовищах сила опору залежить від

швидкості руху тіла. За таких умов її називають *силою в'язкого тертя*. В нашому прикладі вона обумовлюється ковзанням кульки вздовж *змащеного* стержня. З експериментальних досліджень відомо, що при малих швидкостях руху сила опору пропорційна швидкості, а при великих – квадратів швидкості. Вважаючи швидкість тіла невеликою, прийнемо чергове

Припущення 4. Сила опору середовища пропорційна швидкості тіла:

$$F_{on} = -rv,$$

де r – стала, що зветься *коефіцієнтом опору* і залежить від фізичних властивостей середовища та форми й розмірів рухомого тіла.

7.1.2. Постановка задачі. Концептуальна (змістова) модель

Сформулюємо умову з урахуванням прийнятих припущень.

Нехай тіло масою m , що з'єднане з невагомою пружиною, здійснює малі коливання вздовж горизонтального стержня. Враховуючи опір середовища, встановити характер руху тіла, тобто відшукати відповіді на питання про

- 1) положення (координату), швидкість та прискорення тіла в будь-який момент часу;
- 2) період його коливань;
- 3) характер залежності від часу амплітуди коливань.

Для фізичного опису такого руху цілком достатньо однієї координатної вісі, яку ми спрямуємо в бік початкового відхилення тіла (рис. 7.2, а). На рис. 7.2, б зображено стан тіла у деякий довільний момент часу.

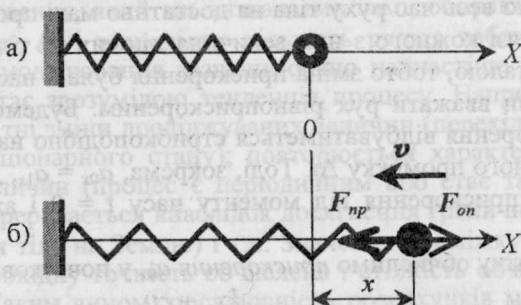


Рис. 7.2

7.1.3. Математична модель

При переході до проєкцій сила пружності у довільний момент визначатиметься виразом

$$F_{np\ x} = -kx,$$

де x – координата тіла.

Для сили опору маємо

$$F_{on\ x} = -rv_x.$$

Рівнодійна сил пружності й опору надає тілу прискорення

$$a_x = \frac{F_{np\ x} + F_{on\ x}}{m}$$

або

$$a_x = -\frac{kx + rv_x}{m}.$$

При русі тіла з плином часу відбувається зміна його координати x і проєкції швидкості v_x . Це приводить до відповідної зміни прискорення, що видно з останнього виразу.

Рівняння (1) є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили в'язкого опору середовища.

7.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю

Таким чином, ми маємо дослідити рух із прискоренням, яке змінюється в часі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося чисельним методом і виконаємо розв'язування шляхом покрокових обчислень. Головна ідея методу тут полягає у заміні складного неперервного руху послідовністю окремих короткочасних рівноприскорених рухів.

Розіб'ємо весь час руху тіла на достатньо малі проміжки Δt такі, щоб на протязі кожного з них величина діючих на тіло сил могла б вважатися сталою, тобто зміна прискорення була б настільки малою, аби ми могли вважати рух рівноприскореним. Будемо вважати, що зміна прискорення відбуватиметься стрибкоподібно на початку кожного наступного проміжку Δt . Тоді, зокрема, $a_{0x} = a_{1x}$, де a_{1x} – проєкція вектора прискорення від моменту часу $t = 0$ і аж до моменту $t = 0 + \Delta t$.

1. Спочатку обчислимо прискорення a_{0x} у початковий момент:

$$a_{0x} = a_{1x} = -\frac{kx_0 + rv_{0x}}{m}.$$

2. Далі обчислимо швидкість v_{1x} наприкінці першого проміжку часу Δt . Для рівноприскореного руху

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{1x} \Delta t,$$

де v_{0x} – проекція вектора швидкості у початковий момент $t = 0$.

Зауваження 1. При обчисленні швидкості наприкінці будь-якого i -го інтервалу часу Δt ми й надалі будемо використовувати значення прискорення на початку цього інтервалу:

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t,$$

де $v_{(i-1)x}$ – кінцева швидкість тіла на попередньому інтервалі Δt , яка одночасно є початковою швидкістю на даному інтервалі часу.

3. Нове положення тіла (нову координату) наприкінці першого проміжку Δt знайдемо за рівнянням

$$x_1 = x_0 + v_{1x} \Delta t.$$

Зауваження 2. При обчисленні координати наприкінці будь-якого інтервалу часу Δt будемо використовувати значення координати із попереднього інтервалу, а швидкості – із поточного, оскільки її значення на цей момент буде вже обчислене:

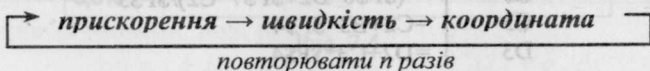
$$x_i = x_{i-1} + v_{ix} \Delta t.$$

Записаний вираз для обчислення нової координати має відверто наближений характер, адже він справджується лише для рівномірного руху. Ось чому цей вираз тим точніший, чим менший інтервал Δt . Саме тому цей інтервал має бути настільки малим, щоб за цей час швидкість не змінювалася б помітним чином. Проте виявляється, що цей вираз може бути *достатньо точним*, навіть коли інтервал Δt і не зникаюче малий.

Маючи нові значення швидкості v_i та координати x_i , на наступному кроці знов можна визначити прискорення:

$$a_{(i+1)x} = -\frac{kx_i + rv_{ix}}{m}.$$

Отже пп. 1–3 будемо повторювати n разів, де $n = t_{\text{mod}}/\Delta t$. Тут t_{mod} – час моделювання, який ми визначаємо самі, обираючи тривалість проміжку часу Δt і відповідну кількість рядків таблиці. Стосовно вибору часу моделювання зазначимо, що найчастіше це такий час, через який стає зрозумілою тенденція процесу. Наприклад, припиняються помітні зміни досліджуваних величин (перехід до рівноважного або стаціонарного стану); повторюється характер змін досліджуваних величин (процес є періодичним або стає таким); процес вимушено переривається внаслідок досягнення граничних умов (зокрема, падіння тіла на Землю) і т.п. Значення проміжку Δt має забезпечувати необхідну точність обчислень і стійкість обчислювального алгоритму. Таким чином, послідовність розрахунків має здійснюватися за такою циклічною схемою:



7.1.5. Остаточний алгоритм

1. Підготувати таблицю для введення даних та виведення результатів, перший її рядок заповнити іменами змінних.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2					$x_0, \text{м} =$	
3					$v_{0x}, \text{м/с} =$	
4					$\Delta t, \text{с} =$	
5					$m, \text{кг} =$	
6					$k, \text{Н/м} =$	
7					$r, \text{кг/с} =$	
...		

Рис. 7.3

2. Увести вхідні дані й початкові умови: заповнити стовпець E іменами змінних, а стовпець F – їх числовими значеннями (рис. 7.3).

3. Заповнити табличними формулами другий рядок (для початкового моменту часу $t = 0$), використовуючи посилання на відповідні комірки стовпця F:

$$t = 0; \quad a_x = -\frac{k}{m}x_0 - \frac{rv_{0x}}{m}; \quad v_x = v_{0x}; \quad x = x_0.$$

Комірки таблиці матимуть такий зміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=\$F\$6*\$F\$2+\$F\$7*\$F\$3)/\$F\$5
C2	=\$F\$3
D2	=\$F\$2

5. Заповнити третій рядок (для кінця першого проміжку Δt , тобто для моменту часу $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, де $i = 1$):

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t;$$

$$a_{ix} = -\frac{k}{m}x_{i-1} - \frac{rv_{(i-1)x}}{m};$$

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix}\Delta t;$$

$$x_i = x_{i-1} + v_{ix}\Delta t.$$

Відповідно в таблиці

комірки	формули
A3	=A2+\$F\$4
B3	=\$F\$6*D2+\$F\$7*C2)/\$F\$5
C3	=C2+B3*\$F\$4
D3	=D2+C3*\$F\$4

Для заповнення наступних рядків формули п. 4 повторювати n разів шляхом копіювання третього рядка у n наступних, де $n = t_{\text{мод}}/\Delta t$.

7.2. Тестування моделі: нехтуємо опором

Як було зазначено вище, виконаємо тестування моделі для випадку дії на тіло однієї лише сили пружності. З метою виключення з розгляду сили опору, покладемо $r = 0$ (комірка F7). В такому разі

$$a_x = -\frac{kx}{m} = -\frac{k}{m}x.$$

Цей вираз є математичною моделлю руху тіла під дією сили пружності.

Задамо початкові умови для руху тіла масою $m = 100$ г, прикріпленого до пружини жорсткістю $k = 40$ Н/м, і у початковий момент відведеного від положення рівноваги на відстань $x_0 = 1$ см:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0,01 \text{ м}; \quad v_0 = 0; \quad k = 40 \text{ Н/м}; \quad m = 0,1 \text{ кг}.$$

Тривалість проміжку часу Δt візьмемо рівною 0,01 с, а час моделювання – 1 с. Тоді кількість рядків таблиці буде $n + 2 = 102$ (два рядки – перший і другий – на цей момент вже заповнені).

Фрагмент таблиці з результатами обчислень і відповідний графік залежності координати від часу $x = x(t)$ подані на рис. 7.4.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,040	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,840	-0,078	0,009	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,526	-0,114	0,008	$m, \text{ кг} = 0,10$	
6	0,04	-3,072	-0,144	0,006	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,494	-0,169	0,005	$r, \text{ кг/с} = 0$	
...	

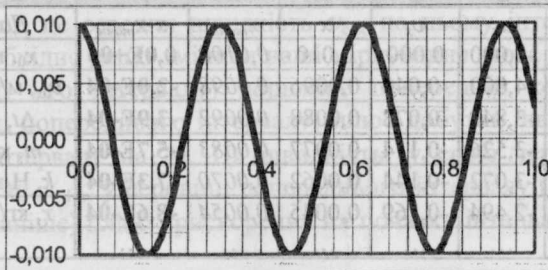


Рис. 7.4

Аналізуючи за таблицею результати моделювання, можна простежити картину руху тіла: спочатку воно знаходиться у спокої, далі поступово набуває швидкості в бік положення рівноваги ($v_x < 0$), а це приводить до зменшення його відстані від положення рівноваги. При цьому, хоч прискорення і стає меншим, швидкість за модулем продовжує зростати.

У міру наближення до положення рівноваги ($x = 0$) прискорення стає все меншим, швидкість зростає все повільніше аж до точки $x = 0$. В цю точку тіло приходить приблизно через 0,08 с після початку руху (встановіть ціну дрібної поділки на горизонтальній вісі t). В цей момент пружина не деформована і на тіло не діє сила пружності. Маючи деяку швидкість, тіло за інерцією продовжує рухатись далі, але тепер усе йде навпаки: координата тіла стає від'ємною, а проекція прискорення – додатною. Швидкість поступово зменшується до нуля, після чого процес повторюється у зворотному порядку.

Покращення точності обчислень

Зі шкільних курсів математики й фізики відомо, що точним аналітичним розв'язком задачі про рух тіла під дією сили пружності при заданих початкових умовах ($x = x_0$ при $t = 0$) є функція

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

Завдання. З метою порівняння результатів моделювання (стовпець D) із точними значеннями згідно наведеної формули створіть у таблиці два додаткових стовпці, у яких будуть обчислюватися значення x (стовпець E) за щойно наведеною формулою і різниця $x - x_{\text{точне}}$ (стовпець F), як це показано на рис. 7.5. Виявляється, що в межах точності наших розрахунків (чотири десяткові розряди) результат не є задовільним: розбіжність сягає 12%.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	a_x	v_x	x	$x_{\text{точн}}$	$x - x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,0	-4,000	0,000	0,010	0,0100	0,0E+00	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,040	0,0096	0,0098	-2,0E-04	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,840	-0,078	0,0088	0,0092	-3,9E-04	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,526	-0,114	0,0077	0,0083	-5,7E-04	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04	-3,072	-0,144	0,0062	0,0070	-7,3E-04	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,494	-0,169	0,0045	0,0054	-8,6E-04	$r, \text{ кг/с} = 0$	
...		

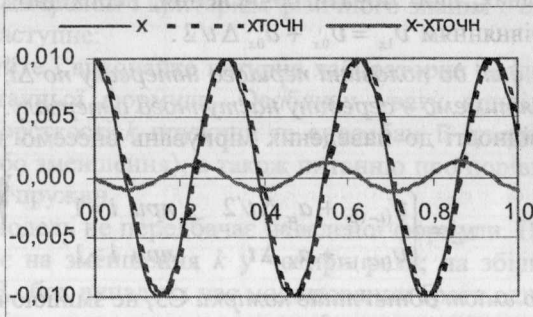


Рис. 7.5

Зрозуміло, що точність можна поліпшити за рахунок зменшення тривалості проміжку часу Δt , але це призведе до збільшення обсягу необхідної оперативної пам'яті комп'ютера і часу виконання обчислень. Відомий інший шлях підвищення точності. Він полягає в покращенні обчислювального алгоритму, що ми і зробимо.

Як було показано при попередньому обговоренні алгоритму, нова координата тіла дорівнює попередній плюс добуток проекції швидкості v_x на інтервал часу Δt . Але що це за швидкість? У який момент? Адже на початку інтервалу швидкість одна, а наприкінці вона зовсім інша. Якщо відома швидкість у деякий момент і відомо, що вона безупинно змінюється, то хіба можна сподіватися одержати задовільний результат, припускаючи, що тіло рухається весь час Δt із однаковою швидкістю, такою, яку воно мало на початку інтервалу?

Доцільнішим буде використати деяку проміжну швидкість між початком та кінцем інтервалу.

Найпростіший прийом підвищення точності обчислень полягає в тому, щоб брати швидкість у середині інтервалу. Для рівноприскореного руху, яким за нашою домовленістю є рух тіла протягом інтервалу Δt , це середня швидкість v_{cix} на цьому інтервалі. Таким чином, необхідно дещо змінити наші міркування: нова координата x_i (наприкінці i -го інтервалу) дорівнює попередній координаті x_{i-1} (наприкінці попереднього інтервалу) плюс добуток швидкості v_{cix} у середині інтервалу на Δt . Ця швидкість, у свою чергу, дорівнює швидкості $v_{c(i-1)x}$ у середині попереднього інтервалу (тобто на проміжок Δt раніше) плюс прискорення на початку інтервалу, помножене на Δt .

Іншими словами, нові рівняння матимуть вигляд:

$$x_i = x_{i-1} + v_{cix} \Delta t, \quad v_{cix} = v_{c(i-1)x} + a_{ix} \Delta t.$$

Тепер, однак, щоб почати обчислення, необхідно скористатися додатковим рівнянням $v_{ix} = v_{0x} + a_{0x} \Delta t/2$.

Додаючи далі до половини першого інтервалу по Δt , ми кожного разу потраплятимемо в середину наступного інтервалу.

У відповідності до наведених міркувань внесемо зміни до п. 4 алгоритму:

$$v_{ix} = \begin{cases} v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t/2 & \text{при } i=1 \\ v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t & \text{при } i>1 \end{cases}$$

тобто змінимо вміст однієї лише комірки С3, не змінюючи всі інші.

Результат не примусить на себе чекати (рис. 5.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	a_x	v_x	x	$x_{\text{точн}}$	$x-x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,0	-4,000	0,000	0,0100	0,0100	0,0E+00	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	0,0098	-6,7E-07	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,920	-0,059	0,0092	0,0092	-2,6E-06	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,683	-0,096	0,0082	0,0083	-5,7E-06	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04	-3,299	-0,129	0,0070	0,0070	-9,6E-06	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,783	-0,157	0,0054	0,0054	-1,4E-05	$r, \text{ кг/с} = 0$	
...	

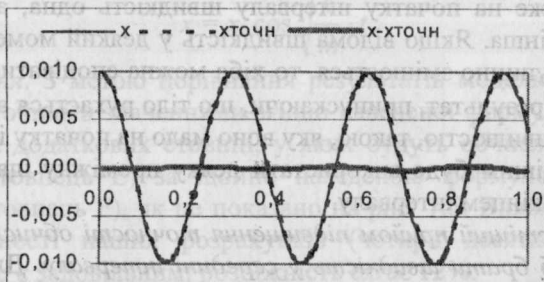


Рис. 7.6

Так що тепер ми маємо наочне уявлення про ефективність чисельного аналізу: такий простий розрахунок за поліпшеним алгоритмом дає такий гарний результат. Адже тепер розбіжність не перебільшує 2,5%.

Вправа. З підручника фізики відомо, що частота власних коливань пружинного маятника визначається за формулою

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Оскільки джерелом і критерієм фізичного знання є експеримент, пропонуємо наступне:

1. Сплануйте і виконайте натурне лабораторне дослідження для перевірки останньої формули. Особливу увагу приділіть методу визначення жорсткості k пружини та способам її *практичної зміни* (збільшення або зменшення), а також питанню про порівняння жорсткостей різних пружин.

2. Наша модель не передбачає наведеної формули. Перевірте, як вона відреагує на зменшення k у чотири рази; на збільшення m у чотири рази. В обох випадках час моделювання брати однаковим.

3. Обчисліть за наведеною вище формулою частоту коливань тигара на пружині, підставляючи у формулу параметри даної моделі. Чи узгоджуються результати моделювання з теоретичними розрахунками? Зробіть висновок щодо адекватності моделі.

4. Виведіть на екран на одному рисунку графіки залежностей

$$x = x(t), \quad v = v(t) \quad a = a(t).$$

Це завдання має на меті проілюструвати зміст уявлень про зсуви фаз коливань координати, швидкості та прискорення або їхніх аналогів у електродинаміці (заряду, сили струму та швидкості зміни сили струму) при розгляді електромагнітних коливань.

При виконанні завдання може виникнути проблема одночасного виведення графіків несумірних (непорівнянних) величин. Так у нашій конкретній моделі $|a_{max}| \gg |x_{max}|$. Тому в середовищі електронних таблиць ми радимо виводити графік $x = x(t)$ з використанням додаткової вісі та добором для неї придатного масштабу.

Висновки

1. Точність комп'ютерних обчислень можна помітно поліпшити шляхом удосконалення обчислювального алгоритму.

2. Комп'ютерне моделювання є одним з ефективних методів *теоретичних* досліджень, і тому при вирішенні питання про адекватність моделі особливо важливо, щоб результати обчислювального експерименту хоча б задовільно узгоджувалися з результатами натурального експерименту.

3. Тестування моделі довело її задовільну адекватність відносно дослідних даних і результатів теоретичного аналізу.

7.3. Рух тіла на пружині за наявності в'язкого опору

Продовжимо експеримент, поклавши числове значення r (коефіцієнта опору) рівним не 0, а, наприклад, 0,4 (рис. 7.7).

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,000	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,010	-4,000	-0,020	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	-3,840	-0,058	0,009	-0,003	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	-3,453	-0,093	0,008	-0,005	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	-2,943	-0,122	0,007	-0,006	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	-2,336	-0,146	0,006	-0,007	$r, \text{ кг/с} = 0,1$	
...		

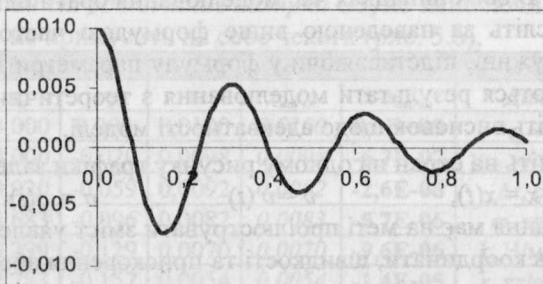


Рис. 7.7

Запитання

1. У який спосіб, на вашу думку, відреагує модель, якщо коефіцієнтові опору r надати від'ємного значення? Перевірте для $r = -0,1$.
2. Який фізичний зміст може мати отриманий результат?
3. Якого змісту слід було б тепер надати виразу $F_{om} = -rv$?

7.4. Рух тіла на пружині за наявності сили сухого тертя

При вивченні в шкільному курсі фізики сили тертя основну увагу приділяють розгляду сили сухого тертя, а при вивченні механічних коливань з урахуванням опору зазвичай розглядають силу в'язкого тертя. Справа в тому, що і фізичний аналіз коливань з урахуванням сухого тертя, і аналітичний розв'язок відповідного рівняння руху тут помітно складніші, ніж у випадку в'язкого тертя. Проте можливість застосування комп'ютера для чисельного розв'язування рівняння руху суттєво спрощує проблему.

Як відомо, модуль сили сухого тертя при горизонтальному русі визначається виразом $F_{mp} = \mu mg$ і в певних межах не залежить від швидкості. Напрямок цієї сили завжди протилежний напрямку вектора швидкості. При коливаннях тіла проекція вектора швидкості

періодично змінює свій знак, тому й проекція сили тертя також має змінювати знак, але у протилежній фазі.

У попередній версії моделі ця властивість сили опору не створювала проблем, тому що проекція швидкості входила до виразу для сили опору безпосередньо, але тепер така проблема є. Розв'язати її можна, дописавши в останній вираз множником функцію $\text{sgn}(v_x)$, яка передає у вираз знак свого аргументу v_x :

$$F_{mp} = -\mu mg \cdot \text{sgn}(v_x).$$

А саме:

$$\text{sgn}(v_x) = \begin{cases} 1 & \text{при } v_x > 0 \\ 0 & \text{при } v_x = 0 \\ -1 & \text{при } v_x < 0 \end{cases}.$$

Завдання. Доведіть, що таку саму властивість має вираз $\frac{v_x}{|v_x|}$.

Перехід до нової версії моделі зводиться до зміни у виразі a_x :

$$a_x = -\frac{kx + \mu g \cdot \text{sgn}(v_x)}{m}.$$

Останнє рівняння є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили сухого тертя.

У відповідності до цього внесемо зміни й до комірок таблиці:

комірки	формули / числа
B2	$=-(\$F\$6*\$F\$2+\$F\$7*9,81*3НАК(\$F\$3))/\$F\5
B3	$=-(\$F\$6*D2+\$F\$7*9,81*3НАК(C2))/\$F\5

Результати моделювання подані на рис. 7.8.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,0	-4,00	0,00	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,00	-0,04	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,64	-0,08	0,009	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03	-3,34	-0,11	0,008	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04	-2,90	-0,14	0,006	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05	-2,34	-0,16	0,005	$\mu = 0,002$	
...		

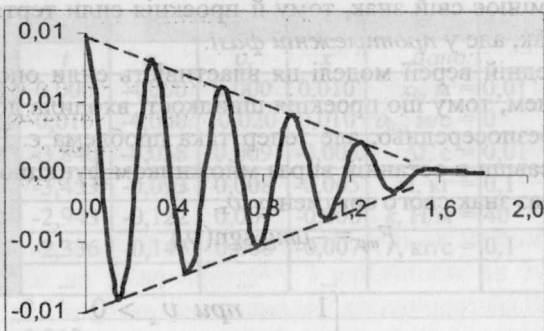


Рис. 7.8

Вправи

1. Підберіть таке мінімальне значення μ , при якому коливання припиняються за 2,5 с від початку. Скільки повних коливань здійснює кулька за цей час?

2. Замість функції $\text{sgn}(v_x)$ скористайтесь виразом $\frac{v_x}{|v_x|}$. Порів-

няйте результати.

3. Добудовані штрихові прямі на рис. 7.8 наводять на думку, що послідовність значень амплітуд є спадаючою лінійною функцією часу. У який спосіб можна в цьому переконатись, не будуючи прямі лінії, а користуючись таблицею?

В разі утруднення пропонуємо в окремому стовпці вивести різниці значень *двох послідовних амплітуд* і переконатись, що всі такі різниці однакові. Звідси випливає, що послідовність значень амплітуд утворює спадаючу арифметичну прогресію. Отже, залежність амплітуди від часу є спадаючою лінійною функцією.

4. Користуючись моделлю, розв'яжіть задачу.

Задача. Брусок масою 500 г, сполучений із закріпленою пружиною жорсткістю 2,45 Н/см, може ковзати на горизонтальній площині. Коефіцієнт сухого тертя становить 0,055.

Скільки коливань здійснить брусок до повної зупинки, якщо у початковий момент пружина розтягнута на 3 см?

На рис. 7.9 подано чисельне розв'язання задачі (з відповідним графіком), одержане на основі побудованої моделі.

Таким чином, обчислювальний експеримент із математичною моделлю усуває багато ускладнень, що виникають при аналітичному

решенні виваженні задач. Це робить їх цілком доступними для школярів.

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-14,70	0,00	0,030	$x_0, \text{м} = 0,03$	
3	0,01	-14,70	-0,15	0,029	$v_{0x}, \text{м/с} = 0$	
4	0,02	-12,90	-0,28	0,026	$\Delta t, \text{с} = 0,01$	
5	0,03	-11,55	-0,39	0,022	$m, \text{кг} = 0,5$	
6	0,04	-9,63	-0,49	0,017	$k, \text{Н/м} = 245$	
7	0,05	-7,24	-0,56	0,011	$\mu = 0,055$	
...		

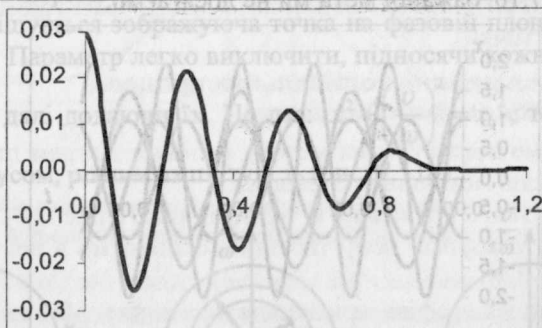


Рис. 7.9

На закінчення настійно радимо опрацювати наступний матеріал про дуже ефективний метод аналізу коливальних процесів – *метод фазових діаграм*.

7.5. Фазова площина

7.5.1. Теоретичні відомості

Вивчаючи механічні рухи тіл, ми можемо цікавитися тим, яким буде їхнє положення в деякий момент часу (головна задача механіки), або тим, коли тіло прийде у деяке певне положення (саме так ставиться задача у сферичній астрономії при прогнозуванні моментів настання затемнень Сонця або Місяця, схожа задача розв'язується при проєктуванні виробничого конвеєра).

Однак можна зацікавитися й іншим: загальним характером руху – тим, зокрема, є він періодичним чи ні. Саме такий підхід є характерним для *теорії коливальних процесів*. Наприклад, питання про те, чи може під дією поштовхів сильно розгойдатися міст, вирішується не тим, наскільки вони сильні, а тим, яким є ритм цих поштовхів і скільки часу вони тривають. Інакше кажучи, цікавим є питання про харак-

тер руху, взятого в цілому. Це означає, що ми бажаємо мати таке графічне зображення (діаграму) руху коливальної фізичної системи, яке охоплює усі значення часу t . Бажано, крім того, відобразити на одній діаграмі все розмаїття рухів, що їх може здійснювати рухоме тіло.

Найпростішим прикладом механічної коливальної системи є вантаж на пружині. В такій системі рух відбувається за законом

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (*)$$

Якщо показати в координатах x, t всі можливі графіки цієї функції з урахуванням різних початкових умов (x_0 і φ_0), то, як можна бачити з рис. 7.10, бажаної мети ми не досягаємо.

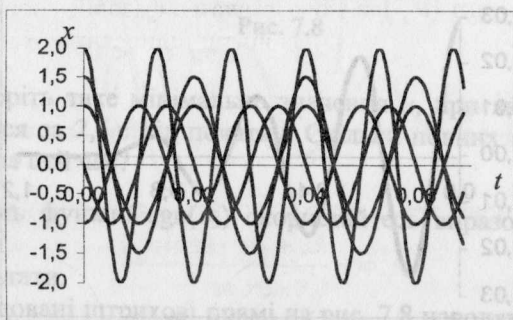


Рис. 7.10

Вийшло щось не зовсім розбірливе: графіки перетинаються між собою і, до того ж, на такій діаграмі можна показати лише частину кожного графіка внаслідок обмеження вісі t розмірами рисунку. До того ж збільшення значень часу t (продовження вісі абсцис) ніякої нової інформації стосовно процесу не дасть.

Проте ми отримуємо те, чого бажаємо, якщо візьмемо декартову систему координат і будемо відкладати на вісі абсцис зміщення x , а на вісі ординат – його похідну, тобто швидкість руху v (ще краще, пропорційну їй величину v/ω). Нагадаємо, що ω має назву *циклічна частота* і вона пов'язана зі звичайною частотою ν співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu. \quad \text{Ці дві величини } x \text{ і } \frac{v}{\omega} \text{ повністю характеризують стан тіла,}$$

що здійснює коливання: будь-яка точка на площині змінних $x, \frac{v}{\omega}$ зображує стан системи. Таку точку називають *зображуючою точкою*. Оскільки характеристику стану коливальної системи називають *фазою*, площину $x, v/\omega$ називають *фазовою площиною*. Коли вантаж

на пружині здійснює коливання, його швидкість змінюється, зображуюча точка переміщується на фазовій площині. Диференціюючи вираз (*), знаходимо: $\frac{v}{\omega} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Розглянемо тепер систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{v}{\omega} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Вони є параметричними рівняннями лінії (траєкторії), вздовж якої переміщується зображуюча точка на фазовій площині, параметром є час t . Параметр легко виключити, підносячи кожне з рівнянь до квадрату і далі додаючи їх. Це дає: $x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = x_0^2$, тобто рівняння кола з радіусом, рівним амплітуді x_0 (рис. 7.11а).

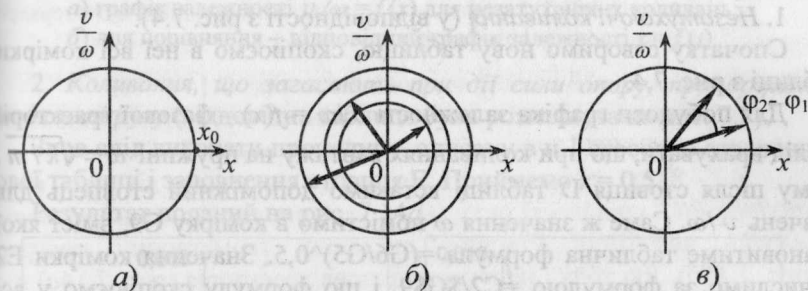


Рис 7.11

Коліванням з різними амплітудами відповідають концентричні кола з центром у початку координат (рис. 7.11б).

Коліванням з однаковими амплітудами, але з різними фазами відповідає рух зображуючих точок уздовж одного кола, але при цьому в однакові моменти часу зображуючі точки займають різні положення. Різниця фаз дорівнює куту між відповідними радіусами-векторами зображуючих точок у однакові моменти часу (рис. 7.11в).

Розгляд питання про фазовий простір (у даному випадку двовимірний) відповідає головному принципу математичного моделювання – *принципу множинності математичних моделей*: оскільки при використанні будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі сторони реальності, то для більш повного її вивчення необхідною виявляється сукупність моделей, які дозволяють з різних боків і з

різним ступенем деталізації відобразити об'єкт дослідження.

Так при вивченні коливальних процесів широко використовуються відомі вам часові діаграми, що відображують залежність коливної величини від часу, в електротехніці поширеними є так звані векторні діаграми, в загальній теорії коливань до щойно згаданих підходів додається метод фазових діаграм. Всі ці підходи реалізують різні моделі певних об'єктів (процесів, явищ).

Слід розуміти, що фазовий простір не має нічого спільного з реальним простором (у випадку плоского руху – з координатною площиною XOY). Зокрема, траєкторія руху зображуючої точки – фазова траєкторія (фазовий портрет) – не є траєкторією руху тіла (матеріальної точки).

7.5.2. Дослідження коливальних процесів методом фазових діаграм

Розглянемо застосування методу фазових діаграм для вивчення різних прикладів механічних коливань.

1. Незатухаючі коливання (у відповідності з рис. 7.4).

Спочатку створимо нову таблицю, скопіюємо в неї всі комірки таблиці з рис. 7.4.

Для побудови графіка залежності $v/\omega = f(x)$ – фазової траєкторії – слід врахувати, що при коливаннях вантажу на пружині $\omega = \sqrt{k/m}$. Тому після стовпця D таблиці вставимо допоміжний стовпець для значень v/ω . Саме ж значення ω помістимо в комірку G9, вміст якої становитиме таблична формула $= (G6/G5)^{0,5}$. Значення комірки E2 обчислимо за формулою $= C2/\$G\9 , і цю формулу скопіюємо у всі наступні комірки стовпця E. Нижче наведено остаточний вигляд нової таблиці (рис. 7.12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	a_x	v_x	x	v_x/ω	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,0100	0,000	$x_0, \text{м} =$	0,01
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	-0,001	$v_{0x}, \text{м/с} =$	0
4	0,02	-3,920	-0,059	0,0092	-0,003	$\Delta t, \text{с} =$	0,01
5	0,03	-3,683	-0,096	0,0082	-0,005	$m, \text{кг} =$	0,1
6	0,04	-3,299	-0,129	0,0070	-0,006	$k, \text{Н/м} =$	40
7	0,05	-2,783	-0,157	0,0054	-0,008	$r, \text{кг/с} =$	0
8	$\omega, \text{с}^{-1} =$	20
...		

Рис. 7.12

Виділивши стовпці D і E, будемо графік залежності $v/\omega = f(x)$, показаний на рис. 7.13а.

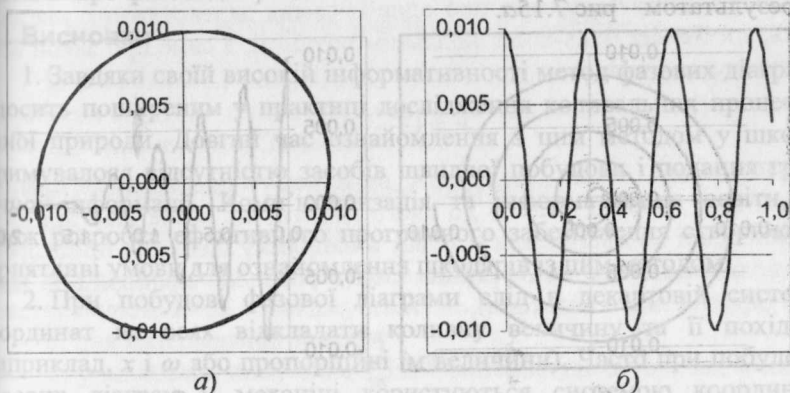


Рис. 7.13

- а) графік залежності $v/\omega = f(x)$ для незатухаючих коливань;
 б) для порівняння – відповідний графік залежності $x = f(t)$.

2. *Коливання, що загасають при дії сили опору, пропорційної швидкості руху* (відповідна таблиця була розглянута на рис. 7.7).

Знов слід виконати процедуру, описану в п.1 стосовно створення нової таблиці і заповнення стовпця E. Прийемо $r = 0,5$.

Результат поданий на рис. 7.14а.

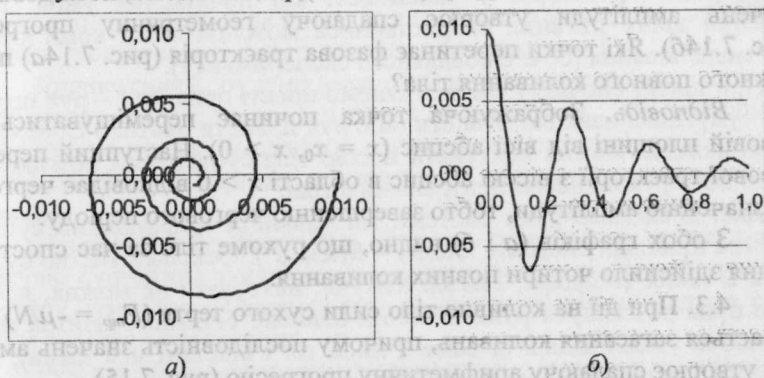


Рис. 7.14

- а) фазовий портрет коливань, що загасають при дії сили опору, пропорційної швидкості руху;
 б) для порівняння – відповідний графік залежності $x = f(t)$.

3. Коливання, що загасають при дії сили сухого (кулонівського) тертя. Основою для побудови діаграми тут буде таблиця на рис. 7.8, а результатом – рис 7.15а.

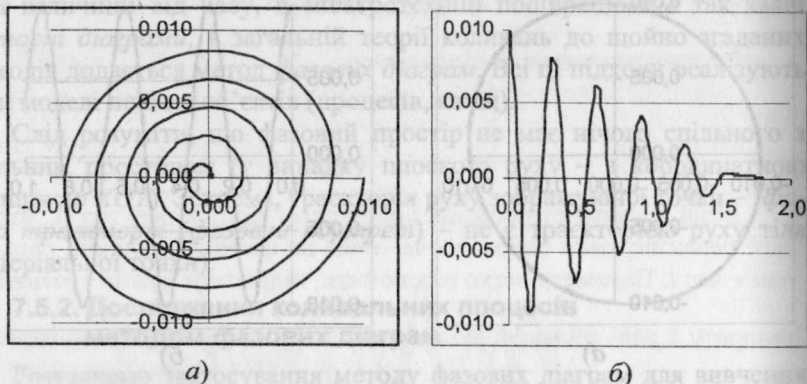


Рис. 7.15

- а) фазовий портрет коливань, що загасають при дії сухого тертя;
 б) відповідний графік залежності $x = f(t)$.

4. Порівняльний аналіз результатів за рис. 7.13 – 7.15.

4.1. Ознакою незатухаючих коливань на фазовій площині є замкнута траєкторія руху зображуючої точки (рис. 7.13).

4.2. Якщо коливання гальмуються внаслідок дії сили опору, пропорційної швидкості руху ($F_{on} = -rv$), то, як відомо, послідовність значень амплітуди утворює спадаючу геометричну прогресію (рис. 7.14б). Які точки перетинає фазова траєкторія (рис. 7.14а) після кожного повного коливання тіла?

Відповідь. Зображуюча точка починає перемішуватись на фазовій площині від вісі абсцис ($x = x_0, x > 0$). Наступний перетин фазової траєкторії з віссю абсцис в області $x > 0$ відповідає черговому значенню амплітуди, тобто завершенню чергового періоду.

З обох графіків (а і б) видно, що рухоме тіло за час спостереження здійснило чотири повних коливання.

4.3. При дії на коливне тіло сили сухого тертя ($F_{тр} = -\mu N$) відбувається загасання коливань, причому послідовність значень амплітуд утворює спадаючу арифметичну прогресію (рис. 7.15).

4.4. Яких змін зазнає цей рисунок при збільшенні часу спостереження за процесом від 1 с до 2 с?

5. Чим відрізняються фазові діаграми функцій

$$x = x_0 \cos \omega t \text{ і } x = x_0 \sin \omega t?$$

6. Поверніться до п. 5 Глави 5 “Хижак–жертва” нашого посібника і для опрацювання розглянутих там питань скористайтесь відомостями про фазові діаграми.

Висновки

1. Завдяки своїй високій інформативності метод фазових діаграм є досить поширеним у практиці дослідження коливальних процесів різної природи. Довгий час ознайомлення з цим методом у школі стримувалося відсутністю засобів швидкої побудови і подання графічної інформації. Комп'ютеризація та інформатизація освіти, а також розробка ефективного програмного забезпечення створюють сприятливі умови для ознайомлення школярів із цим методом.

2. При побудові фазової діаграми слід в декартовій системі координат на осях відкладати коливну величину та її похідну (наприклад, x і ω або пропорційні їм величини). Часто при побудові фазових діаграм у механіці користуються системою координат “Імпульс – кінетична енергія”, оскільки кінетична енергія є похідною від імпульсу.

3. Подані вище відомості стосовно особливостей методу фазових діаграм розглянуті лише на рівні ознайомлення. Більш докладне вивчення цього методу виходить за рамки нашого посібника.