МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра математики та методики її навчання

ВИБРАНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПЛАНІМЕТРІЇ

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
з дисципліни «Методика навчання математики»

Кривий Ріг
2023

УДК 373.5.016:51(03)(076)

Рецензенти

І. А. Акуленко – доктор педагогічних наук, професор, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

Т. Г. Крамаренко – кандидат педагогічних наук, доцент, Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна

І .С. Дереза – кандидат педагогічних наук, вчитель математики, Криворізький Центрально-Міський ліцей, м. Кривий Ріг, Україна

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету
(протокол № 8 від 22 лютого 2023)

Вибрані методи розв’язування задач планіметрії. Задачі для самостійної роботи студентів з дисципліни «Методика навчання математики» / І. В. Лов’янова, Р. Ю. Калугін; за заг. ред. проф. І. В. Лов’янової. Кривий Ріг: КДПУ. 2023. 76 с.

Посібник призначений для самостійної роботи студентів педагогічних ЗВО на заняттях з дисципліни «Методика навчання математики».

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник основною своєю ідеєю має задачний підхід. Оскільки останній отримав широке застосування у зв'язку з орієнтацією освітнього процесу на формування у школярів «уміння вчитися.

В посібнику дібрано і систематизовано задачі планіметрії, які потребують використання специфічних методів їх розв'язання, як-от: метод використання властивостей допоміжних трикутників, алгебраїчний метод, метод «подовженої» медіани, метод допоміжного кола, метод допоміжної площі. В даному посібнику містяться 200 задач, які забезпечують розгортання змістових ліній «Геометричні фігури та їх властивості. Геометричні величини та їх вимірювання». Крім загальних методів автори посібника пропонують знайомити учнів зі спеціальними методами розв'язування задач: метод геометричних перетворень (застосування центральної та осьової симетрії, застосування гомотетії та повороту), метод координат, векторний метод. Таким чином 100 задач в посібнику розкривають змістові лінії «Координати і вектори», «Геометричні перетворення». Також приділено увагу особливостям розв'язування задач змістової лінії «Геометричні побудови». В посібнику дібрані 100 задач на побудову, розв'язування яких також потребує використання особливих методів: методу подібності та метода геометричних місць.

В першому розділі подане описання методів розв'язування задач, наведені приклади розв'язання типових або ключових задач кожного окремого методу. В другому розділі задачі систематизовані за методами розв'язування, до задач на доведення та побудову подані вказівки, до задач на обчислення – відповіді.

Посібник може бути корисним для учнів ЗСО, вчителів, студентів педагогічних ЗВО спеціальності 014 Середня освіта (Математика).

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

I. Використання властивостей допоміжних трикутників

Трикутник, або кілька нерівних трикутників

Розв'язуючи геометричні задачі, дотримуйтесь такого плану:

1) відшукайте на малюнку трикутник (або утворіть його, провівши потрібні відрізки), який можна розв'язати;

2) задача буде розв'язаною, якщо знайдений елемент трикутника задовольняє умову задачі;

3) якщо знайдений елемент не задовольняє умову задачі, то, враховуючи цей елемент, відшукайте на рисунку інший трикутник. Якщо задачу задовольняє знайдений елемент другого трикутника, то задачу розв'язано. В іншому випадку розгляньте третій трикутник і т. д. доти, поки не дістанете такий трикутник, сторона чи кут якого дає розв'язок задачі.

Розв'яжемо для прикладу таку задачу.

Задача 1. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB і BC позначено точки K і L так, що $\angle LAK = 5°$, $\angle LCK = 10°$ (рис. 1). Знайдіть $\angle LKC$.

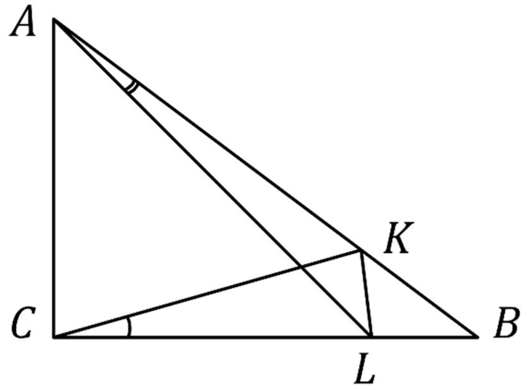

Рис. 1

Розв'язання:

$\angle LAC = 90° - \angle B = 50°$ тому $\angle LAC = 50° - \angle LAK = 45°$. Тоді ΔACL – рівнобедрений, звідки $CL = AC$. Розгляньмо ΔCKB. Його зовнішній кут AKC дорівнює $\angle LCK + \angle B = 50°$. Отже, $\angle AKC = \angle CAK$, тобто ΔACK – рівнобедрений, тому $AC = CK$. З рівностей $CL = AC$ і $AC = CK$ випливає, що $CL = CK$, тобто ΔLCK – також рівнобедрений. $\angle LKC = \frac{180° - \angle LCK}{2} = 85°$.

Відповідь: $85°$.

Рівні трикутники

Рівні трикутники використовуються під час доведення рівності двох відрізків або рівності двох кутів. Щоб довести рівність двох відрізків (кутів):

1) виділіть на рисунку два трикутники, елементами яких є ці відрізки (кути);

2) доведіть, що ці трикутники рівні за тією чи тією ознакою рівності трикутників;

3) зробіть висновок про рівність відрізків (кутів) як відповідних відрізків (кутів) рівних трикутників.

Якщо в задачі треба знайти певний відрізок (кут), то його корисно розглянути як сторону (кут) одного з двох рівних трикутників.

Покажемо реалізацію методу використання допоміжних рівних трикутників на прикладі такої задачі.

Задача 2. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ побудовано правильні трикутники BCK і DCL (рис. 2). Доведіть, що трикутник AKL правильний.

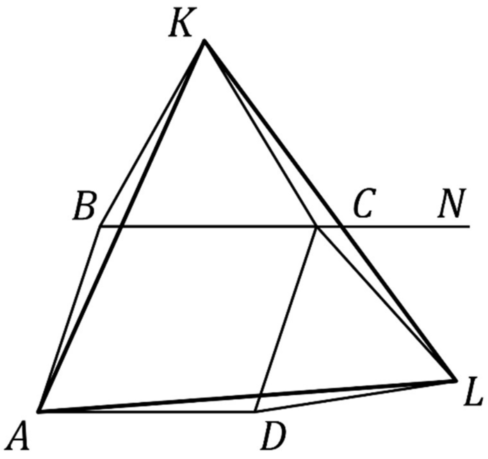

Рис. 2

Розв'язання:

Уведемо позначення: $AB = CD$, $BC = AD = b$, $\angle ABC = \beta$. Щоб довести, що ΔAKL – правильний, доведемо рівність трикутників ABK, LCK та LDA.

$AB = LC = LD =$, $BK = CK = DA =$.

$\angle ABK = \angle ABC + \angle CBK = \beta$ 60°, $\angle LDA = \angle ADC + \angle LDC = \beta$ 60°. Побудуємо продовження CN відрізка BC. $\angle LCK$ $\angle KCN + \angle LCN = 120° +$ $+ (\beta - 60°) = \beta + 60°$. Отже, $\angle ABK = \angle LCK = \angle LDA$.

За першою ознакою рівності трикутників $\Delta ABK = \Delta LCK = \Delta LDA$. Тоді $AK = LK = LA$ – як відповідні відрізки рівних трикутників. Отже, ΔAKL – правильний, що й треба було довести.

Подібні трикутники

Подібність трикутників використовують, зокрема, при доведенні рівностей, які містять добутки довжин двох пар відрізків. Щоб довести рівність добутків двох пар відрізків:

1) припустіть правильність рівності, яку доводите;

2) запишіть рівність, яку треба довести, у вигляді пропорції;

3) відшукайте на рисунку (або побудуйте), довжини сторін яких є членами утвореної пропорції;

4) обґрунтуйте подібність цих трикутників за тією чи тією ознакою подібності трикутників.

Якщо в задачі треба знайти певний відрізок, то його корисно розглянути як сторону одного з двох подібних трикутників і скласти відповідну пропорцію. Іноді подібність трикутників стає в нагоді при доведенні рівності двох кутів.

Покажемо реалізацію методу використання подібності трикутників на прикладі такої задачі.

Задача 3. Доведіть, що коли хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Розв’язання:

Нехай AB і CD – хорди деякого кола, які перетинаються в точці M (рис. 3).

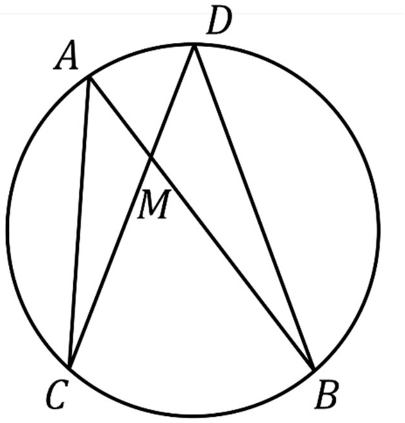

Рис. 3

Розглянемо ΔAMC і ΔDMB. $\angle AMC = \angle DMB$ – як вертикальні, $\angle MAC = \angle MDB$ – як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу кола. Отже, $\Delta AMC \sim \Delta DMB$. Тоді $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, звідки $AM \cdot BM = C \quad \cdot DM$, що й треба було довести.

II. Методи розв’язування задач на побудову

Метод подібності

Розв’язуючи задачу на побудову методом подібності:

1) виокреміть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника (відношення відрізків і кути);

2) побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;

3) побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри (довжини відрізків).

Задача 4. Побудуйте трикутник ABC за двома кутами A, B та периметром P.

Розв’язання:

Побудуємо довільний трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 4), у якому $\angle A_1 = \angle A, \angle C_1 = = \angle C$ і знайдемо його периметр P_1. Шуканий трикутник ABC подібний до побудованого з коефіцієнтом подібності $k = \frac{P}{P_1}$.

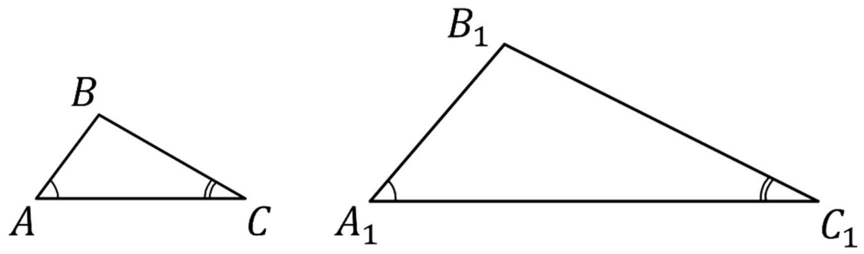

Рис. 4

Метод геометричних місць

Розв'язуючи задачу методом геометричних місць:

1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;

2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;

3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу, другу вимогу;

4) зробіть висновок про те, що шукана точка – це точка перетину знайдених геометричних місць.

Розв'яжемо методом ГМТ таку задачу на побудову.

Задача 5. Побудуйте трикутник ABC зі стороною a, висотою h_a і радіусом описаного кола R.

Розв'язання:

Побудуємо коло радіуса R і відкладемо на ньому довільну точку C – одну з вершин шуканого трикутника (рис. 5).

Точку B – другу вершину трикутника – визначимо як перетин побудованого кола і геометричного місця точок, віддалених від точки C на відстань a (кола з центром у точці C радіуса a).

Точку А – третю вершину трикутника – знайдемо як перетин першого кола і геометричного місця точок, віддалених від прямої BC на відстань h_a.

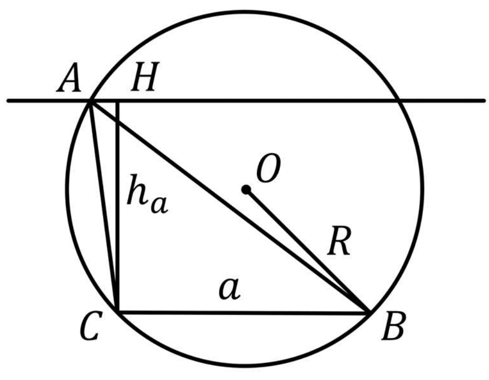

Рис. 5

ΔABC – шуканий.

III. Алгебраїчний метод

Розв'язуючи задачі алгебраїчним методом, дотримуйтесь таких етапів:

1) введіть позначення (найчастіше шукані величини позначають буквами x, y, z);

2) складіть рівняння або систему рівнянь, використовуючи відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами;

3) розв'яжіть складене рівняння або систему рівнянь. Якщо є потреба, дослідіть знайдені розв'язки.

Задача 6. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якого кут при основі дорівнює 30°, а основа більша за бічну сторону на 2 см.

Розв'язання:

Нехай ΔABC – даний, $AB = BC$ см, $AC = (x + 2)$ см, $\angle A = \angle C = 30°$ (рис. 6).

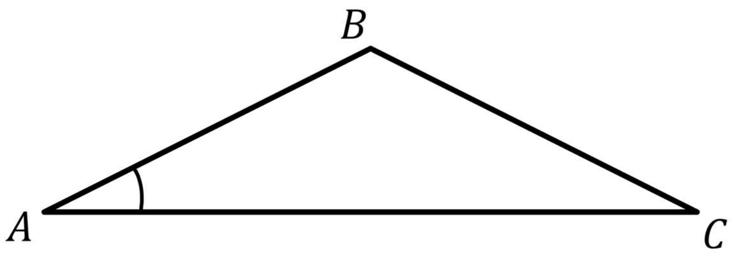

Рис. 6

$\angle B = 180° - 2 \cdot \angle A = 120°$. За теоремою синусів маємо: $\frac{BC}{sin\angle A} = \frac{AC}{sin\angle B}$, звідки

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{x+2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Розв'язавши складене рівняння, одержимо $x = \sqrt{3} + 1$.

Отже, $AB = BC$ $\left(\sqrt{3} + 1\right)$ см, $AC = \left(\sqrt{3} + 3\right)$ см; $P_{ABC} = \left(3\sqrt{3} + 5\right)$ см.

Відповідь: $\left(3\sqrt{3} + 5\right)$ см.

IV. Метод «подовження медіани»

Додаткова побудова – один із найбільш ефективних прийомів розв'язання геометричних задач. Проте такі побудови найчастіше пов'язані з серйозними трудноощами. Добре, коли умова задачі підказує, як доповнити креслення. Це стосується, зокрема задач, пов'язаних з медіаною. Так, «подвоєння» або «подовження» медіани на третину – ключ до розв'язання низки планіметричних задач. Покажемо, як «працює» цей метод на прикладі розв'язування такої задачі.

Задача 7. У трапеції $ABCD$ $(BC \| AD)$ M і N – середини основ BC і AD. Відомо, що $AC = \sqrt{15}$, BD 1, $MN = 2$. Знайдіть площу трапеції.

Розв’язання:

На прямій AD (рис. 7) відкладемо відрізок $DK = B$.

Оскільки $DBCK$ – паралелограм, то $BD = CK$ 1. Проведемо $CF \parallel MN$. Нескладно показати, що F – середина AK. Окрім того, $S_{BAC} = S_{BCD}$ (рівні основи і висоти). Тоді очевидно, що $S_{ABCD} = S_{ACK}$.

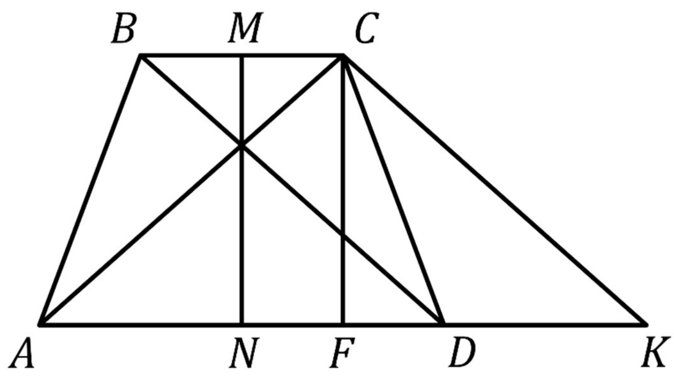

Рис. 7

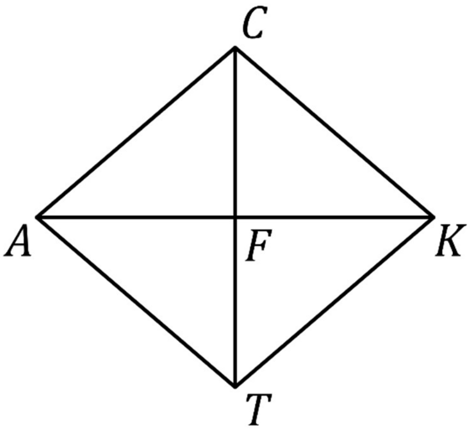

Рис. 8

Отже, задача звелася до пошуку площі трикутника ACK за двома сторонами $BD = 1$, CK 1 і медіаною до третьої сторони $CF = 2$. «Подвоїмо» медіану CF (рис. 8). Оскільки $AF = FK$ і $CF = FT$, то $ACKT$ – паралелограм. За теоремою про сторони і діагоналі паралелограма маємо:

$$AK^2 + CT^2 = 2(AC^2 + CK^2),$$

звідки $AK = 4$.

Далі просто ($\angle ACK = 90^\circ$).

Відповідь: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

V. Метод допоміжної площі

Ключем до розв’язання багатьох задач є робота з поняттям, на яке в умові немає навіть натяку. Нерідко такою допоміжною величиною є площа.

Наведемо *приклади розв’язування задач методом допоміжної площі*.

Задача 8. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90^\circ)$ CD – висота (рис. 9). Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і DCB, відповідно дорівнюють r_1 та r_2. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

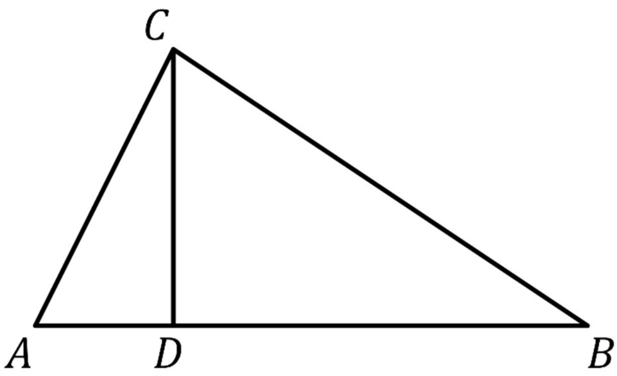

Рис. 9

Розв'язання:

Нехай площі трикутників ACD, DCB, ABC дорівнюють S_1, S_2, S відповідно. Зрозуміло, що ΔACD подібний ΔABC і ΔCBD подібний ΔABC.

Площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів. Маємо: $\frac{S_1}{S} = \frac{r_1^2}{r^2}, \frac{S_2}{S} = \frac{r_2^2}{r^2}$, де r – радіус кола, вписаного в трикутник ABC. Звідси $\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}$, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Задача 9. У трикутнику ABC вписано два кола, які дотикаються одне одного так, що одне дотикається сторін AB і AC, а інше – AB і BC. Доведіть, що сума радіусів цих кіл більша радіуса кола, вписаного в даний трикутник.

Розв'язання:

Проведемо дотичні CD_1 і CD_2 до даних кіл (рис. 10).

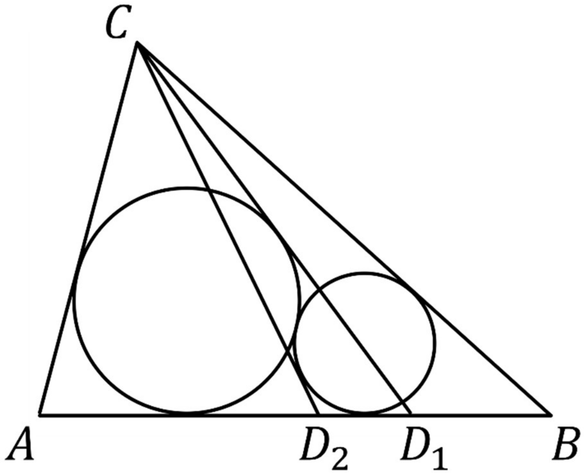

Рис. 10

Зрозуміло, що $S_{ABC} \leq S_{ACD_2} + S_{BCD_1}$. Тоді $pr \leq p_1r_1 + p_2r_2$, де p, p_1, p_2, r, r_1, r_2 – півпериметри і радіуси вписаних кіл трикутників ABC, ACD_1, D_2CB відповідно. Маємо:

$$r \leq \frac{p_1}{p} \cdot r_1 + \frac{p_2}{p} \cdot r_2.$$

Оскільки $p_1 < p$ і $p_2 < p$, то $\frac{p_1}{p} < 1$ і $\frac{p_2}{p} < 1$. Звідси $r < r_1 + r_2$, що й треба було довести.

VI. Метод допоміжного кола

Певно, допоміжне коло – одна з найбільш естетичних допоміжних побудов. Найімовірніше, це пов'язано з тим, що «побачити» коло там, де його немає, вже само собою нетривіально. Проте ми сподіваємося, що після вивчення цього параграфа у читача частіше виникатимуть «кола перед очима».

Нагадаємо деякі теоретичні відомості, які корисно знати для використання методу допоміжного кола:

❖ Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює $180°$, то навколо нього можна описати коло.

❖ Якщо точки B і C лежать в одній півплощині відносно прямої AD, причому $\angle ABD = \angle ACD$, то точки A, B, C і D належать одному колу.

❖ Якщо точки O і C знаходяться в одній (у різних) півплощинах відповідно прямої AB, причому $OA = OB$ і $\angle AOB = 2\angle ACB$ $\left(\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)\right)$, то точки A, B і C лежать на колі з центром у точці O.

Наведемо *приклади розв'язування задач методом допоміжного кола.*

Задача 10. Доведіть, що висоти AH_1, BH_2, CH_3 гострокутного трикутника ABC ділять навпіл кути трикутника $H_1H_2H_3$.

Розв'язання:

Оскільки $\angle AH_3H + \angle HH_2A = 180°$, то навколо чотирикутника AH_3HH_2 можна описати коло (рис. 11).

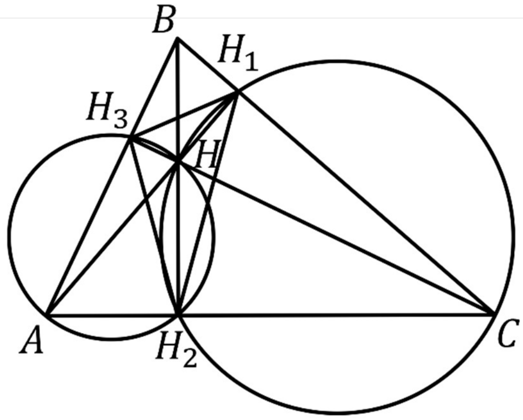

Рис. 11

Тоді $\angle H_3AH = \angle H_3H_2H$ як вписані, що спираються на одну дугу. Аналогічно доводять, що $\angle HH_2H_1 = \angle H_1CH$. Але $\angle BAH = \angle BCH$, оскільки вони доповнюють кут АBC до $90°$. Звідси $\angle H_3H_2H = \angle H_1H_2H$. Так само доводять, що $\angle H_3H_1H = \angle H_2H_1H$ і $\angle H_1H_3H = \angle H_2H_3H$.

Задача 11. У трикутнику ABC $\angle B = 60°$, AA_1 і CC_1 – бісектриси, що перетинаються в точці O (рис. 12). Доведіть, що $OA_1 = OC_1$.

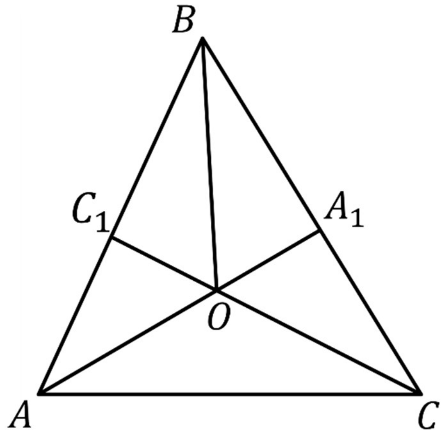

Рис. 12

Розв'язання:

$$\angle C_1OA_1 = \angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA) = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) =$$
$$= 180° - \tfrac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 180° - \tfrac{1}{2}(180° - 60°) = 120°.$$

Отже, $\angle C_1BA_1 + \angle C_1OA_1 = 180°$, тобто навколо чотирикутника OC_1BA_1 можна описати коло. Оскільки O – точка перетину бісектрис трикутника, то $\angle C_1BO$ $\quad$ $\angle OBA_1$. Таким чином, ▯$C_1O =$ ▯OA_1, а рівні дуги стягують рівні хорди, тобто $OC_1 = OA_1$, що й треба було довести.

Задача 12. На медіані AM трикутника ABC взято точку K так, що $\angle BKM = \angle ABC$ (рис. 13). Доведіть, що $\angle CK$ $\qquad$ $\angle ACB$.

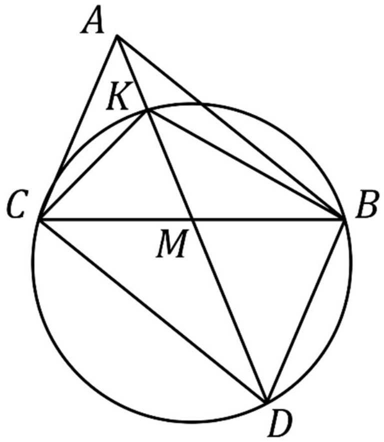

Рис. 13

Розв'язання:

«Подвоїмо» медіану AM. $\angle BCD = \angle ABC = \angle BKD$. Отже, точки C, K, B, D належать одному колу.

Тоді $\angle CKD = \angle CBD$ (як такі, що спираються на спільну дугу CD), але $\angle CBD = \angle ACB$. Звідси $\angle CKD = \angle ACB$, що й треба було довести.

Задача 13. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = AD = 10$, $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$ (рис.14). Знайдіть довжину діагоналі AC.

Розв'язання:

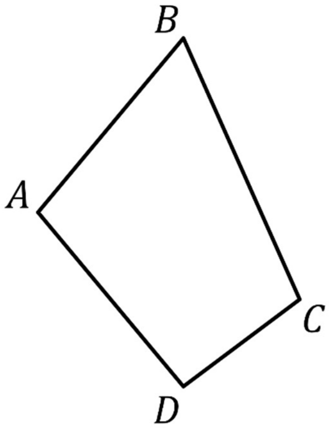

Рис. 14

Зазначимо, що $2(180° - \angle BCD) = 100° = \angle BAD$. Тоді точки B, D і C лежать на колі з центром у точці A.

Відповідь: $AC = 10$.

VII. Координатний метод

- Якщо точка A має координати x_1 і y_1, а точка B – x_2 і y_2, то

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

- Якщо точка $M(x, y)$ – середина відрізка AB, то її координати визначають за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

- Рівняння кола з центром у точці $K(a; b)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

- Загальне рівняння прямої має вигляд:

$$ax + by + c = 0,$$

де $a^2 + b^2 \neq 0$.

- Рівняння невертикальної прямої:

$$y = kx + l,$$

де $l \neq 0$.

Для використання *координатного методу* слід:

1. Виділити умову і вимоги задачі.
2. Вибрати систему координат (початок координат і напрям координатних осей). Як правило, за координатні осі беруть прямі, про які йдеться в задачі, або осі симетрії (якщо такі є) фігур, що розглядаються в задачі, тобто система координат має природно визначатися умовою задачі.
3. Перекласти умову і вимоги задачі на мову координат відносно обраної системи координат.
4. Перетворити одержані рівняння і співвідношення відповідно до вимог задачі.
5. Одержаний результат перекласти на мову геометрії і зробити висновок про справедливість вимог задачі.

Наведемо *приклади розв'язування задач координатним методом*:

Задача 14. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин A і B трикутника ABC дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини – точки C.

Розв'язання:

У задачах на метод координат важливо вдало, а точніше вигідно обрати систему координат. У нашій задачі зручно взяти середину відрізка AB – точку O – як початок відліку і «покласти» відрізок AB на вісь абсцис (рис. 15). Виберемо одиничний відрізок так, щоб $A(-1; 0)$ і $B(1; 0)$. Нехай координати точки $C(a; b)$, а точка $M(x; y)$ належить шуканому ГМТ.

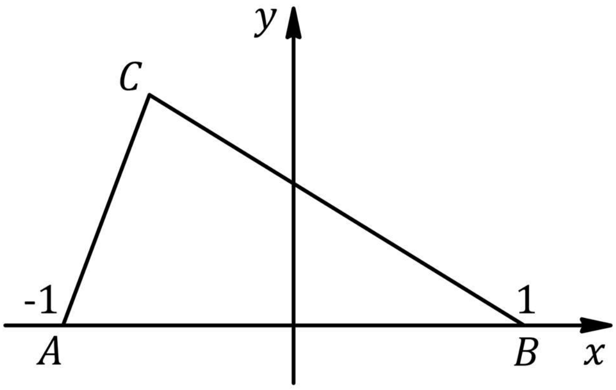

Рис. 15

Тоді $MA^2 + MB^2 = MC^2$. Причому останнє можна вважати необхідною і достатньою умовою належності точки M шуканому ГМТ. Маємо:
$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

Після відповідних перетворень дістанемо:
$(x+a)^2 + (y+b)^2 = 2(a^2 + b^2 - 1)$.

Тепер зрозуміло:

якщо $a^2 + b^2 < 1$, то шукане ГМТ – порожня множина;

якщо $a^2 + b^2 = 1$, то $(x+a)^2 + (y+b)^2 = 0$ і ГМТ складається з однієї точки $D(-a; -b)$, симетричної точці C відносно початку координат;

якщо $a^2 + b^2 > 1$, то маємо коло з центром у точці $D(-a; -b)$ і радіусом $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2}$.

Задача 15. У трикутнику ABC $\angle ACB = 60°$, а радіус кола, описаного навколо цього трикутника, дорівнює $R = 2\sqrt{3}$. На стороні AB взято точку D так, що $AD = 2DB$ і при цьому $CD = 2\sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

Розв'язання:

Маємо: $AB \quad 2R \sin 60° = 6$.

Тоді $AD = 4$, $DB = 2$. Оберемо систему координат як у попередній задачі (рис. 16).

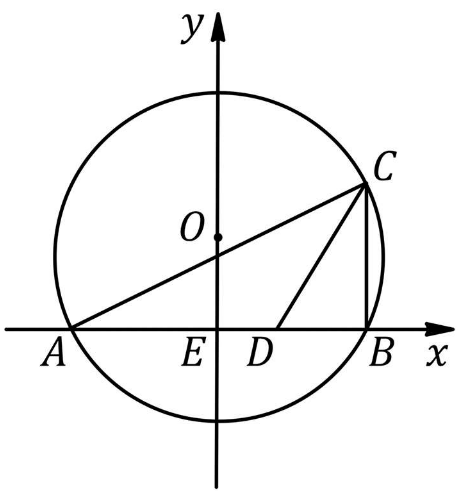

Рис. 16

Тоді координати точки $D(1; 0)$. Оскільки $\angle AOB = 120°$, то $OE = \sqrt{3}$, а координати точки $O\left(0; \sqrt{3}\right)$.

Нехай координати точки $C(x; y)$. Вона лежить на двох колах: одне з центром у точці O і радіусом $2\sqrt{3}$, друге – з центром у точці D радіусом $\sqrt{2}$. Маємо систему:

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 12, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, одержимо $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

Зауважимо, що $|y|$ – це довжина висоти, яка виходить з точки C трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2} AB \cdot |y| = 3\sqrt{2}$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$.

VIII. Векторний метод

❖ *Якщо* M – середина відрізка AB, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

❖ Для того, щоб точки A, B і C належали одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\overrightarrow{XB} = \alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XC}$, де X – довільна точка, а $\alpha + \beta = 1$.

❖ *Якщо* M – точка перетину медіан трикутника ABC, а X – довільна точка, то $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$.

❖ Щоб із попарно неколінеарних векторів $\overrightarrow{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо, щоб $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

❖ Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Векторний метод полягає у виконані таких кроків:

1. Виділення у формулюванні задачі умови і вимог. Побудова рисунку.
2. Формулювання умови і вимог мовою векторів, позначення векторів на рисунку.
3. Складання допоміжних векторних рівностей відповідно до умови і вимог задачі.
4. Перетворення складених рівностей згідно з вимогами задачі.
5. Переклад одержаної рівності на мову геометрії, формулювання висновків про співвідношення фігур або їх властивостей, що доводять істинність вимоги задачі.

Наведемо *приклади розв’язування задач векторним методом*:

Задача 16. Доведіть, що з медіан трикутника можна скласти трикутник.

Розв’язання:

Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – медіани трикутника ABC (рис. 17).

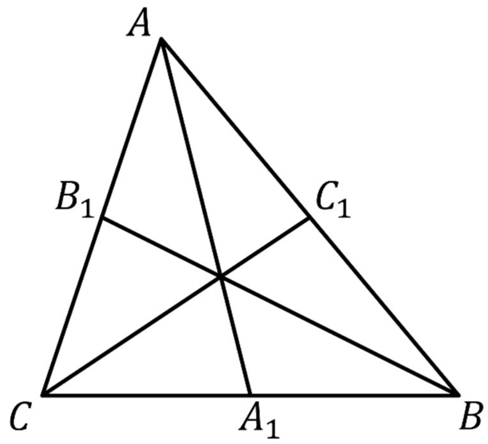

Рис. 17

Тоді $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right)$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}\right)$. Звідси $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Задача 17. На площині дано точки A і B. Знайдіть таку множину точок C цієї площини, що медіани трикутника ABC, проведені з вершин A і B, перпендикулярні.

Розв'язання:

Введемо систему координат так, що $A(0;0)$, $B(1;0)$ (рис. 18). Нехай $C(x;y)$.

Тоді $A_1\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right)$ і $B\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right)$. Маємо $\overrightarrow{AA_1} = \left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1} = \left(\frac{x-2}{2};\frac{y}{2}\right)$. З умови перпендикулярності медіан одержуємо: $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{4} = 0$. Звідси $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

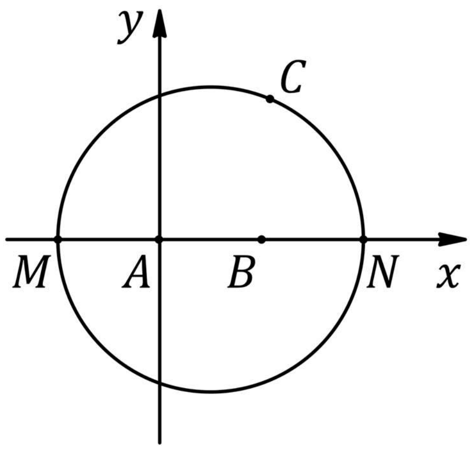

Рис. 18

Отже, точка C належить колу з центром у середині відрізка AB і радіусом $\frac{3}{2}AB$. Доведення того, що кожна точка (за винятком M і N) кола задовольняє умову, ми залишаємо читачеві.

IX. Метод геометричних перетворень

Метод геометричних перетворень реалізується за такою схемою:

1. Здійснити аналіз умови задачі.

2. Вибрати перетворення, яке зручно використати для доведення (на основі аналізу умови). Щоб вибрати тип перетворення, слід орієнтуватися на властивості фігур або їх частин, про які йдеться в умові задачі. Так, наприклад:

– осьову симетрію зручно застосовувати тоді, коли в умові фігурує бісектриса, або потрібно довести деякі співвідношення у фігурах, що мають вісь симетрії;

– поворот використовують під час доведення співвідношень у рівносторонньому трикутнику і квадраті, перпендикулярності прямих і відрізків, в теоремах і задачах із заданим кутом;

– паралельне перенесення – для доведення співвідношень у паралелограмі і трапеції;

– гомотетію – якщо наявні всі паралельні відрізки різної довжини, кола різних радіусів, відношення відрізків.

3. Знайти відповідні точки і образи фігур, які визначаються обраним перетворенням.

4. Використати властивості перетворень для доведення необхідних співвідношень.

Застосування центральної симетрії

❖ Точки A і A_1 називаються *симетричними* відносно точки O, якщо O – середина відрізка AA_1.

❖ Перетворення фігури, коли кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої точки O, називаються *центральною симетрією* з центром O.

❖ Центральна симетрія є рухом. Отже, симетричні фігури рівні.

❖ Обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії.

❖ Якщо прямі l_1 і l_2 симетричні відносно точки O, то $l_1 \parallel l_2$.

❖ Якщо чотирикутник має центр симетрії, то цей чотирикутник – паралелограм.

Наведемо *приклади розв'язування задач з використанням центральної симетрії*:

Задача 18. Два кола перетинаються в точці M. Проведіть через M пряму, яка перетинає коло в точках A і B так, що $AM = MB$.

Розв'язання:

Зауважимо, що при симетрії кола S_1 (рис. 19) відносно точки M точка B переходить у точку A. Отже, точку A можна одержати як перетин кіл S_2 і S_1'. B – точка перетину S_1 і прямої AM.

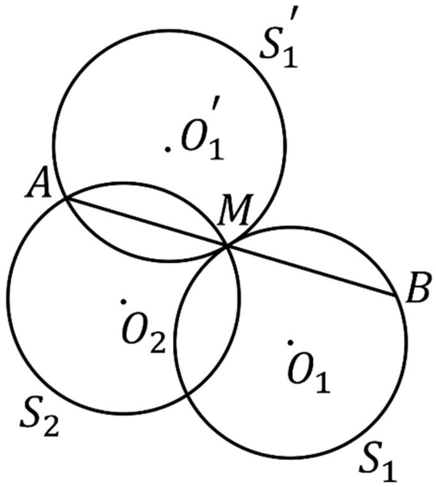

Рис. 19

Задача 19. Коло перетинає сторони BC, CA, AB трикутника ABC в точках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 відповідно. Доведіть: якщо перпендикуляри до сторін трикутника, проведені через точки A_1, B_1 і C_1, перетинаються в одній точці, то й перпендикуляри, проведені до сторін через A_2, B_2 і C_2, також перетинаються в одній точці.

Розв'язання:

Перпендикуляри, проведені в точках A_1, B_1 і C_1, симетричні перпендикулярам відповідно в точках A_2, B_2 і C_2 відносно центра кола O (доведіть). Отже, фігури, утворені цими трійками перпендикулярів, симетричні відносно точки O. Тобто перпендикуляри в точках A_2, B_2 і C_2 перетинаються в точці, симетричній M (M– перетин перпендикулярів у точках A_1, B_1 і C_1) відносно O.

Застосування осьової симетрії

❖ Точки A і A' називають *симетричними відносно прямої* l, якщо пряма l перпендикулярна до відрізка AA' і проходить через його середину.

❖ Перетворення фігури, завдяки якому кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої прямої l, називається *осьовою симетрією* з віссю l.

❖ Осьова симетрія є рухом, отже, симетричні фігури рівні.

Наведемо *приклади розв'язування задач з використанням осьової симетрії*:

Задача 20. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана $AM = m$ проведена до меншого катета й утворює з більшим кут $15°$. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання:

Побудуємо точку K, симетричну точці M відносно прямої AC (рис. 20). Тоді $\triangle KAC = \triangle MAC$ і $S_{KAC} = S_{MAC}$.

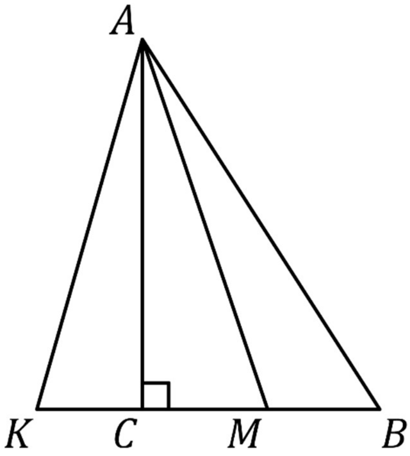

Рис. 20

Маємо:

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = S_{KAM} = \frac{1}{2}m^2 \sin 30° = \frac{m^2}{4}.$$

Відповідь: $\frac{m^2}{4}$.

Задача 21. Дано пряму AB і точки C і D з одного боку від неї. На прямій AB побудуйте таку точку X, щоб $|\angle AXC - \angle BXD| = 90°$.

Розв'язання:

Відобразимо точку C симетрично відносно прямої AB. Одержимо точку C_1.

На відрізку DC_1 як на діаметрі побудуємо коло. Воно перетинає пряму AB в точках X_1 і X (рис. 21), які і є шуканими. Покажемо це.

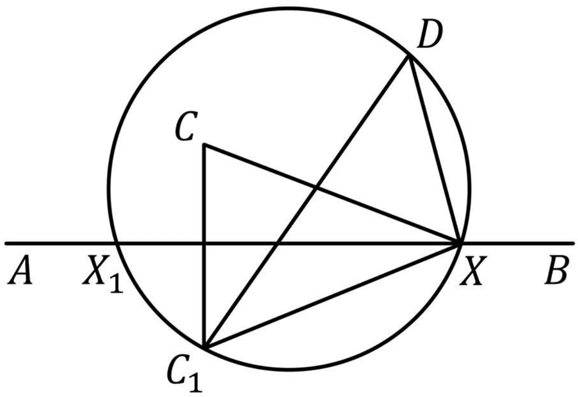

Рис. 21

$90° = \angle C_1XD = \angle C_1XA + \angle AXD = \angle AXC + 180° - \angle DXB$. Тоді $90° = 180° + \angle AXC - \angle DXB$, звідки $\angle DXB - \angle AXC = 90°$.

Для точки X_1 міркування аналогічні.

Застосування перетворення повороту

❖ Перетворення фігури F на фігуру F', коли кожна точка X фігури F переноситься в таку точку X' фігури F', що $X'O = XO$ і $\angle X'OX = \alpha$, де O – задана точка і α – даний кут, $0 < \alpha < \pi$, називають перетворенням повороту фігури F навколо точки O на кут α.

❖ Якщо точка X' – образ точки X при повороті навколо точки O на кут α, то цей факт будемо записувати так: $R_O^{\alpha}(X) = X'$.

❖ Перетворення повороту рухом.

Наведемо *приклади розв'язування задач з використанням перетворення повороту:*

Задача 22. На стороні BC рівнобічного трикутника ABC позначено точку D і на відрізку CD як на стороні побудовано рівнобічний трикутник CDE поза трикутником ABC. Точки K і M – відповідно середини відрізків AD і BE. Доведіть, що трикутник CKM – рівнобічний.

Розв'язання:

Розглянемо перетворення повороту з центром у точці C на кут $60°$ (рис. 22).

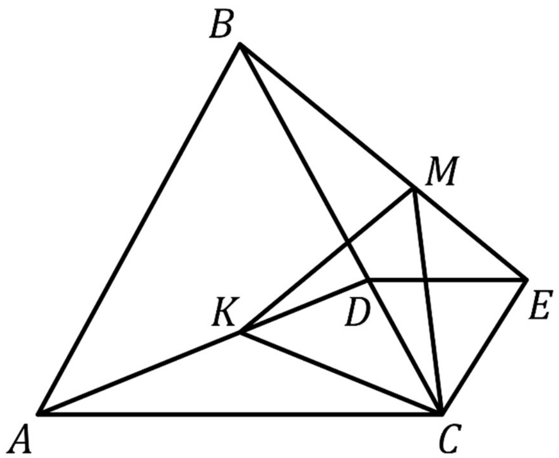

Рис. 22

Тоді $R_C^{60^\circ}(B) = A$, $R_C^{60^\circ}(E) = D$. Звідси образом відрізка BE за цим перетворенням буде відрізок AD. Оскільки M і K – середини цих відрізків, то $R_C^{60^\circ}(M) = K$. Отже, $CK = CM$, $\angle KC$ $60°$, тобто трикутник CKM – рівнобічний, що й треба було довести.

Задача 23. На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC в точці F. Доведіть, що $AE = ED + BF$.

Розв'язання:

Розглянемо поворот із центром A на кут $90°$. Тоді $R_A^{90^\circ}(D) = B$, $R_A^{90^\circ}(E) =$ $= E_1$, причому E_1 лежить на BC (рис. 23).

Тоді $DE = BE_1$ (нагадуємо, що поворот є рухом, отже, переводить фігуру в рівну їй фігуру). Маємо:

$E_1F = E_1B + BF = DE + BF.$

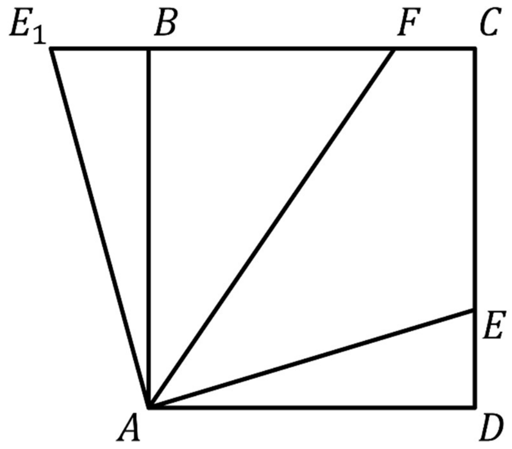

Рис. 23

Оскільки $\angle E_1AB = \angle EAD$, то $\angle E_1AF = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle BFA$, отже, $\angle E_1AF = \angle E_1FA$. Звідси $AE_1 = E_1F = DE +$.

Застосування гомотетії

- ❖ Гомотетія з центром O і коефіцієнтом k (який відрізняється від нуля) – це перетворення, коли кожній точці X ставиться у відповідність така точка X', що $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX'}$.
- ❖ Гомотетія відрізок переводить у відрізок.
- ❖ Гомотетія зберігає величину кута.
- ❖ При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.

Наведемо *приклади розв'язування задач з використанням гомотетії*:

Задача 24. На продовженнях медіан AK, BL і CM трикутника ABC взято точки P, Q та R так, що $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Знайдіть S_{PQR}, якщо $S_{ABC} = 1$.

Розв'язання:

Зауважимо, що $\frac{OP}{AO} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC} = \frac{5}{4}$ (рис. 24).

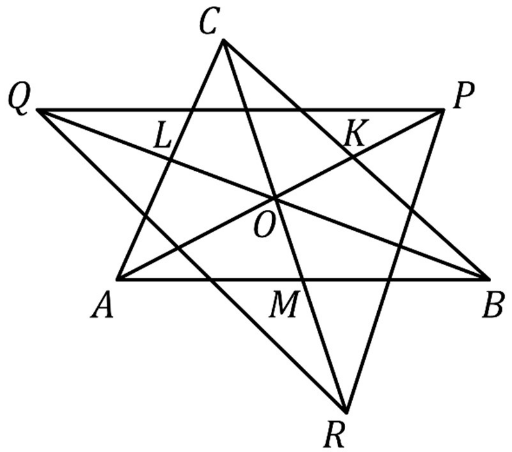

Рис. 24

Це означає, що трикутник PQR гомотетичний трикутнику ABC з коефіцієнтом гомотетії $k = -\frac{5}{4}$. Тоді $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{25}{16}$, звідки $S_{PQR} = \frac{25}{16}S_{ABC} = \frac{25}{16}$.

Відповідь: $\frac{25}{16}$.

Задача 25. AA_1, BB_1, CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$ вдвічі менший, ніж радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Розв'язання:

Нехай M, N, і P – точки перетину висот із колом, описаним навколо трикутника ABC (рис. 25). Доведемо, що $HA_1 = A_1M$.

Справді, $\angle C_1CB = \angle BAA_1 = 90° - \angle ABA_1$.

Але кути BAA_1 і MCB рівні як вписані, що спираються на спільну дугу MB. Тоді $\angle MCA_1 = \angle HCA_1$ і оскільки $CA_1 \perp HM$, то трикутник HCM рівнобедрений і $HA_1 = A_1M$. Так само $HB_1 = B_1N$ і $HC_1 = C_1P$.

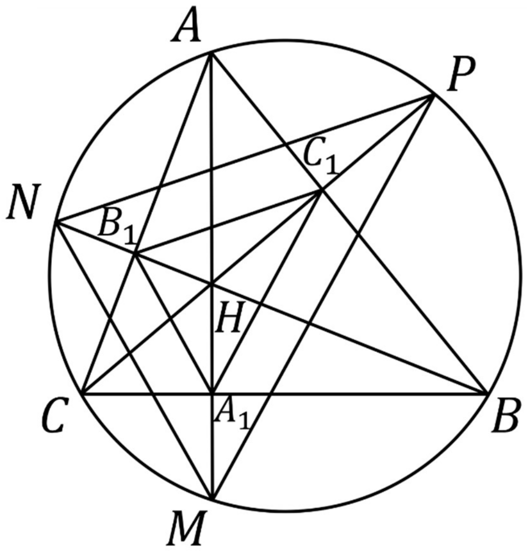

Рис. 25

Тепер зрозуміло, що трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику MNP з коефіцієнтом гомотетії $k = 2$ і $R_{HNP} = R_{ABC} = 2R_{A_1B_1C_1}$, що й треба було довести.

РОЗДІЛ 2. ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

У цьому розділі посібника зібрано низку тренувальних задач на використання методів, актуалізованих у Розділі І. До кожної задачі наведено метод (методи) її розв'язування та правильну відповідь. До задач на побудову і доведення є вказівки до розв'язування (див. Розділ 3 посібника).

Для зручності користування посібником будемо використовувати нумерацію методів, запропоновану раніше:

Метод	Шифр
Використання властивостей допоміжних трикутників – трикутник, або кілька нерівних трикутників, – рівні трикутники, – подібні трикутники	I
Методи розв'язування задач на побудову – метод подібності, – метод геометричних місць	II
Алгебраїчний метод	III
Метод «подовження медіани»	IV
Метод допоміжної площі	V
Метод допоміжного кола	VI
Координатний метод	VII
Векторний метод	VIII
Методи геометричних перетворень – застосування центральної симетрії, – застосування осьової симетрії, – застосування перетворення повороту, – застосування гомотетії	IX

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ НА ОБЧИСЛЕННЯ АБО ДОВЕДЕННЯ, ОБРАВШИ ЗАПРОПОНОВАНИЙ МЕТОД

Задача	Метод
А1. Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного і описаного кіл дорівнює сумі його катетів. Б1. Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума півпериметра і радіуса вписаного кола дорівнює сумі катетів.	I.
А2. У трикутнику основа дорівнює 56 см, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно $8\sqrt{37}$ см і 48 см. Обчислити діаметр описаного кола. Відповідь: 65 см. Б2. У трикутнику дві бічні сторони дорівнюють 52 і 60 см, а висота, проведена до основи, дорівнює 48 см. Обчислити діаметр вписаного кола. Відповідь: 32 см.	V.
А3. У трапеції відстані від центра вписаного в неї кола до кінців бічної сторони дорівнюють 75 і 100 см, а до кінців меншої основи – 65 і 75 см. Обчислити площу цієї трапеції. Відповідь: 1,764 $м^2$. Б3. Центр вписаного в трапецію кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см, а від кінців бічної сторони – на 156 і 65 см. Обчислити площу цієї трапеції. Відповідь: 1,764 $м^2$.	I. III.
А4. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 96 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює 42π см. Відповідь: 256 см. Б4. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює 50π см. Відповідь: 128 см.	I. III.
А5. Коло дотикається до двох суміжних сторін квадрата і ділить кожну із двох інших його сторін на відрізки 2 і 23 см. Обчислити радіус кола. Відповідь: 17 см. Б5. Коло радіусом 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата зі стороною 18 см. Обчислити відрізки, на які ділить коло кожну з двох інших сторін квадрата. Відповідь: 17 см, 1 см.	VII.

А6. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і точці перетину діляться у відношенні 13:5, починаючи від вершин гострих кутів. Визначити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 32 см. Відповідь: $298\frac{2}{3}$ см. Б6. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 3:13, починаючи від вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 48 см. Відповідь: 168 см.	III.
А7. Перпендикуляр, проведений із вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 41 і 57 см. Різниця сторін паралелограма дорівнює 14 см. Обчислити діагоналі паралелограма. Відповідь: 56 см, 98 см. Б7. Перпендикуляр, проведений із вершини гострого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 36 і 12 см. Периметр паралелограма дорівнює 192 см. Обчислити діагоналі паралелограма. Відповідь: 48 см, 84 см.	I. III.
А8. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено перпендикуляр, який ділить гіпотенузу на відрізки 36 і 64 см. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса більшого гострого кута цей перпендикуляр. Відповідь: 18 см, 30 см. Б8. Бісектриса меншого гострого кута прямокутного трикутника ділить перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута, на відрізки 30 і 18 см, починаючи від вершини прямого кута. Обчислити довжини відрізків, на які ділить гіпотенузу цей перпендикуляр. Відповідь: 36 см, 64 см.	I.
А9. Висота ромба дорівнює 24 см, а одна з його діагоналей дорівнює 40 см. Обчислити площу ромба. Відповідь: 600 см^2. Б9. Одна із діагоналей ромба дорівнює 30 см, а довжина вписаного кола дорівнює 24π см. Обчислити площу ромба. Відповідь: 600 см^2.	I. III. V.
А10. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 40 см, основа дорівнює 48 см. Обчислити різницю радіусів вписаного і описаного кіл.	I. V.

Відповідь: 13 см. Б10. У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють 24 і 50 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 256 см.	
А11. Довести, що в прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить навпіл кут між медіаною і висотою, проведеними з цієї вершини. Б11. Довести, що в прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, який дорівнює різниці гострих кутів трикутника.	I. III.
А12. У трикутнику висота дорівнює 48 см. Вона проведена до основи і ділить її на відрізки 20 і 36 см. Обчислити діаметр описаного кола. Відповідь: 65 см. Б12. У трикутнику основа дорівнює 56 см. До неї проведені медіана і висота, відстань між основами яких дорівнює 8 см. Більша бічна сторона дорівнює 60 см. Обчислити радіус вписаного кола. Відповідь: 16 см.	I. V.
А13. У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців меншої основи на відстані 65 і 75 см. Менша основа трапеції дорівнює 70 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 1,764 м^2. Б13. У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см. Довжина більшої основи дорівнює 224 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 1,764 м^2.	I. III. V.
А14. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 256 см, а медіана, що проведена до основи, дорівнює 96 см. Обчислити діаметр вписаного кола. Відповідь: 42 см. Б14. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бісектриса, що проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити діаметр описаного кола. Відповідь: 50 см.	I. III. V.
А15. З однієї точки до кола проведені січна і дотична. Сума їх дорівнює 15 см, а зовнішній відрізок січної на 2 см менший від дотичної. Обчислити січну й дотичну. Відповідь: 9 см; 6 см.	III.

Б15. З однієї точки проведено до кола січну й дотичну. Обчислити довжину зовнішнього і внутрішнього відрізків січної, якщо дотична дорівнює 18 см, а січна – 24 см. Відповідь:13,5 см; 10,5 см.	
А16. Основи трапеції дорівнюють 60 і 20 см, а бічні сторони – 13 і 37 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 480 см^2. Б16. Основи трапеції дорівнюють 142 і 89 см, а діагоналі – 120 і 153 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 8316 см^2.	І. ІІІ.
А17. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 24 і 36 см. Кут між цими висотами дорівнює 30°. Обчислити площу паралелограма. Відповідь: 1728 см^2. Б17. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 10 і 24 см. Кут між цими висотами дорівнює 150°. Обчислити площу паралелограма. Відповідь: 480 см^2.	І.
А18. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 120 см, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 600 см^2. Б18. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 112 см, а медіана, що проведена до гіпотенузи, дорівнює 25 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 336 см^2.	ІІІ. V.
А19. У ромбі діагоналі відносяться, як 3:4. Обчислити площу ромба, якщо довжина вписаного кола дорівнює 24π см. Відповідь: 600 см^2. Б19. У ромбі різниця діагоналей дорівнює 10 см. Обчислити площу ромба, якщо довжина вписаного кола дорівнює 24π см. Відповідь: 600 см^2.	І. ІІІ. V.
А20. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 55 см, а основа – 66 см. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи бісектрис даного трикутника. Відповідь: $180\sqrt{6}$ см^2. Б20. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 250 см, а основа – 300 см. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи висот даного трикутника. Відповідь: 6048 см^2.	І. ІІІ. V.

А21. Довести, що квадрат бісектриси кута при вершині трикутника дорівнює різниці між добутком бічних сторін і добутком відрізків, на які ділить ця бісектриса основу. Б21. Довести, що квадрат медіани, проведеної до основи трикутника, дорівнює різниці між половиною суми квадратів бічних сторін і квадратом половини основи.	IV. VI
А22. У трикутнику з однієї вершини проведені висота, бісектриса, медіана. Відстані від другої вершини трикутника до основ висоти, бісектриси, медіани відповідно дорівнюють 42, 50 і 54 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: $108(1+\sqrt{3})$ см. Б22. У трикутнику бічні сторони дорівнюють 150 і 156 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 144 см. Обчислити відрізки, на які ділить третю сторону бісектриса, що проведена до неї. Відповідь: 50 см; 52 см.	I. III.
А23. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони відповідно на 75 і 100 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 1,47 $м^2$. Б23. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від більшої бічної сторони на 12 см. Менша основа трапеції дорівнює 21 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 588 $см^2$.	I. V
А24. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 60 см. Висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки у відношенні 7:18, починаючи від вершини. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його ця висота. Відповідь: 336 $см^2$; 864 $см^2$. Б24. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 66 см. Бісектриса кута при основі ділить бічну сторону на відрізки у відношенні 5:6, починаючи від вершини. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його ця бісектриса. Відповідь: 660 $см^2$; 792 $см^2$.	I. III. V.
А25. З однієї точки поза колом проведено до нього дотичну і січну. Дотична більша від внутрішнього і зовнішнього відрізків січної відповідно на 2 і 4 см. Обчислити довжину січної. Відповідь: 12 см. Б25. З однієї точки поза колом поведено до нього січну і дотичну. Сума їх дорівнює 30 см, а внутрішній відрізок січної	III.

на 2 см менший від дотичної. Обчислити довжину січної і дотичної. Відповідь: 12 см; 18 см.	
А26. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 54 і 96 см, починаючи від вершини тупих кутів. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 430 см. Б26. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 64 і 36 см, починаючи від вершин гострих кутів. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 285 см.	III.
А27. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 30°, ділить протилежну сторону на відрізки 24 і 16 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити площу паралелограма. Відповідь: 480 см^2. Б27. У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює 150°, ділить протилежну сторону на відрізки 50 і 30 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити площу паралелограма. Відповідь: 2000 см^2.	I.
А28. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 80 см, а площа – 240 см^2. Обчислити довжину описаного кола. Відповідь: 34π см. Б28. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а довжина описаного навколо нього кола – 17π см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 60 см^2.	III.
А29. Сума діагоналей ромба дорівнює 70 см. Довжина вписаного кола дорівнює 24π см. Обчислити периметр ромба. Відповідь: 100 см. Б29. Різниця діагоналей ромба дорівнює 10 см. Площа вписаного круга дорівнює 144π см2. Обчислити площу ромба. Відповідь: 600 см^2.	I. III. V.
А30. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, – 24 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 80 см.	I. III. IV. V.

Б30. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 16 см, а медіана, проведена до бічної сторони, – $2\sqrt{97}$ см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 64 см.	
А31. Довести, що в рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює сумі квадрата бічної сторони та добутку основ. Б31. Довести, що у довільній трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.	I.
А32. Сторони трикутника відповідно дорівнюють 75, 51 та 78 см. Обчислити площі частин трикутника, на які його ділить висота, проведена до найменшої сторони. Відповідь: 756 см^2; 1080 см^2. Б32. Сторони трикутника дорівнюють 78, 75 та 51 см. Обчислити площі частин трикутника, на які його ділить бісектриса найменшого кута. Відповідь: 900 см^2; 936 см^2.	I. III. V.
А33. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 684 см^2. Б33. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 1085 см^2.	I
А34.У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 80 см, а бісектриса, проведена до основи, дорівнює 64 см. Обчислити радіуси вписаного та описаного кіл. Відповідь: 24 см; 50 см. Б34. У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного та описаного кіл відповідно дорівнюють 12 і 25 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 128 см.	I. V.
А35. З однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити дотичну, якщо вона на 5 см більша від зовнішнього відрізка січної і на стільки ж менша від її внутрішнього відрізка. Відповідь: 10 см. Б35. З однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити їх довжину, якщо дотична на 20 см менша від	III.

внутрішнього відрізка січної і на 8 см більша від її зовнішнього відрізка. Відповідь: 12 см; 36 см.	
А36. Більша основа трапеції дорівнює 42 см. Вписане в трапецію коло ділить одну з бічних сторін на відрізки 8 і 18 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 672 см^2. Б36. Одна з бічних сторін трапеції дорівнює 60 см, а друга бічна сторона точкою дотику до неї вписаного кола ділиться на відрізки 16 і 36 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 2688 см^2.	І. ІІІ.
А37. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 60°, ділить протилежну сторону на відрізки 33 і 55 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма. Відповідь: $29\frac{8}{13}$ см; $47\frac{5}{13}$ см. Б37. У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює 120°, ділить протилежну сторону на відрізки 24 і 16 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса більшу діагональ паралелограма. Відповідь: 21 см; 35 см.	І.
А38. Катети прямокутного трикутника відносяться, як 5:12. Обчислити периметр трикутника, якщо різниця між радіусами описаного і вписаного кіл дорівнює 9 см. Відповідь: 60 см. Б38. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відносяться, як 5:13. Обчислити площу цього трикутника, якщо сума радіусів вписаного і описаного кіл дорівнює 17 см. Відповідь: 120 см^2.	ІІІ.
А39. Площа ромба дорівнює 1344 см^2, а діагоналі відносяться, як 7:24. Обчислити периметр ромба. Відповідь: 200 см. Б39. Периметр ромба дорівнює 200 см, а діагоналі відносяться, як 7:24. Обчислити площу ромба. Відповідь: 1344 см^2.	І. ІІІ.
А40. До кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 12 см і висотою 8 см, проведена дотична, паралельна основі. Обчислити довжину відрізка дотичної, який знаходиться між сторонами трикутника. Відповідь: 3 см.	І. ІІІ.

Б40. Із однієї точки поза колом проведено до нього дві дотичні. Довжина кожної дотичної дорівнює 12 см, а відстань між точками дотику – 14,4 см. Обчислити радіус кола. Відповідь: 9 см.	
А41. Довести, що вписане в прямокутний трикутник коло ділить гіпотенузу на відрізки, добуток довжин яких дорівнює площі цього трикутника. Б41. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, яка проведена до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.	V.
А42. Одна із сторін трикутника дорівнює 40 см, а медіани, проведені двох інших сторін, дорівнюють 36 і 38 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 1152 см^2. Б42. Медіани трикутника відповідно дорівнюють 48, 60 і 36 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 1152 см^2.	IV.
А43. У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 35 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 372 см^2. Б43. У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 24 і 25 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 684 см^2.	I.
А44. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а медіана, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити площу описаного круга. Відповідь: 625π см^2. Б44. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити довжину вписаного кола. Відповідь: 24π см.	I. III. V.
А45. Дотична й січна, що виходять з однієї точки, відповідно дорівнюють 20 і 40 см. Січна віддалена від центра на 8 см. Обчислити радіус кола. Відповідь: 17 см. Б45. Обчислити відстань від центра кола до тієї точки, з якої виходить січна й дотична, якщо вони відповідно дорівнюють 8 і 4 см, а січна віддалена від центра на 12 см.	I. III.

Відповідь: 13 см.	
А46. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на меншій її основі і ділять її на відрізки 13 і 15 см. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см. Відповідь: 98 см. Б46. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на більшій її основі і ділять її на відрізки 13 і 15 см. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см. Відповідь: 70 см.	І.
А47. Сторони паралелограма дорівнюють 40 і 60 см, а різниця діагоналей дорівнює 8 см. Обчислити діагоналі паралелограма. Відповідь: 34 см; 42 см. Б47. Діагоналі паралелограма дорівнюють 80 і 120 см, а різниця його сторін дорівнює 48 см. Обчислити периметр паралелограма. Відповідь: 272м см.	ІІІ.
А48. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 30 і 40 см. Обчислити площу частин трикутника, на які його ділить висота, проведена до гіпотенузи. Відповідь: 216 см^2; 384 см^2. Б48. У прямокутному трикутнику катет і гіпотенуза дорівнюють 30 і 50 см. Обчислити площу частин трикутника, на які його ділить бісектриса прямого кута. Відповідь: $257\frac{1}{7}$ см; $342\frac{6}{7}$ см.	І.
А49. Різниця діагоналей ромба дорівнює 4 см, а периметр дорівнює 40 см. Обчислити площу ромба. Відповідь: 96 см. Б49. Сума діагоналей ромба дорівнює 28 см, а периметр дорівнює 40 см. Обчислити площу ромба. Відповідь: 96 см^2.	ІІІ.
А50. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 60 см, а периметр дорівнює 192 см. Обчислити відстань від точки перетину медіан до точки перетину бісектрис. Відповідь: 2 см. Б50. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 144 см, а периметр дорівнює 384 см. Обчислити відстань від точки перетину медіан до точки перетину серединних перпендикулярів. Відповідь: 11 см.	І.

А51. Довести, що у трапеції два трикутники, утворені бічними сторонами і відрізками діагоналей, мають однакову площу. Б51. Довести, що в будь-якому трикутнику добуток двох його сторін дорівнює добутку висоти, проведеної до третьої сторони, на діаметр описаного навколо трикутника кола.	V.
А52. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Обчислити третю сторону трикутника. Відповідь: $2\sqrt{5}$ см. Б52. Дві сторони трикутника дорівнюють 35 і 14 см, а бісектриса кута між ними дорівнює 12 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 235,2 $см^2$.	I. III. V.
А53. У прямокутній трапеції менша діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить другу діагональ на відрізки у відношенні 13:8. Обчислити площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см. Відповідь: 1134 $см^2$. Б53. У прямокутній трапеції більша діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить другу діагональ на відрізки у відношенні 13:18, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см. Відповідь: 1674 $см^2$.	I. III.
А54. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 42 см, а бічна сторона – 63 см. До бічних сторін проведені висоти. Обчислити довжину відрізка, кінцями якого є основи висот. Відповідь: $32\frac{2}{3}$ см. Б54. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона – 36 см. До бічних сторін проведені бісектриси. Обчислити довжину відрізка, кінцями якого є основи бісектрис. Відповідь: 14,4 см.	I. V.
А55. Перпендикуляр довжиною 12 см проведений з точки кола на діаметр і ділить його на відрізки, різниця яких дорівнює 18 см. Обчислити діаметр кола. Відповідь: 30 см. Б55. З точки кола на діаметр проведений перпендикуляр, який ділить його на відрізки 32 і 18 см. Обчислити відрізки, сполучають цю точку з кінцями діаметра. Відповідь: 30 см; 40 см.	I. III.
А56. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на меншій її основі і ділять її на відрізки 26 і	I.

30 см. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см. Відповідь: 196 см. Б56. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на більшій її основі і відповідно дорівнюють 26 і 30 см. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см. Відповідь: 140 см.	
А57. Сторони паралелограма дорівнюють 14 і 18 см, а діагоналі відносяться, як 4:7. Обчислити діагоналі паралелограма. Відповідь: 16 см; 28 см. Б57. Діагоналі паралелограма дорівнюють 14 і 22 см, а сторони відносяться, як 6:7. Обчислити периметр паралелограма. Відповідь: 52 см.	III.
А58. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника дорівнює $24\sqrt{2}$ см і ділить гіпотенузу на відрізки у відношенні 3:4. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 168 см. Б58. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки у відношенні 4:3. Периметр трикутника дорівнює 84 см. Обчислити довжину бісектриси. Відповідь: $12\sqrt{2}$ см.	III.
А59. Діагональ ромба ділить його висоту на відрізки 104 і 40 см. Обчислити площу ромба. Відповідь: 2,2464 $м^2$. Б59. Діагональ ромба ділить його висоту на відрізки у відношенні 5:13. Обчислити площу ромба, якщо його сторона дорівнює 130 см. Відповідь: 1,56 $м^2$.	I. III.
А60. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 120 см, а периметр – 384 см. Обчислити відстань від точки перетину бісектрис до точки перетину серединних перпендикулярів. Відповідь: 15 см. Б60. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 120 см, а основа – 144 см. Обчислити різницю радіусів описаного і вписаного кіл. Відповідь: 39 см.	I. V.
А61. Довести, що у вписаному чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін.	I.

Б61. Довести, що у гострокутному трикутнику сума відстаней від центра описаного кола до сторін трикутника дорівнює сумі радіусів вписаного і описаного кіл.	
А62. У трикутнику висота, яка дорівнює 72 см, ділить сторону на відрізки 21 і 30 см. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса цю сторону. Відповідь: 25 см; 26 см. Б62. У трикутнику бічні сторони дорівнюють 75 і 78 см, а висота, проведена до основи, дорівнює 72 см. Обчислити відрізки, на які ділить основу бісектриса, проведена до неї. Відповідь: 25 см; 26 см.	I.
А63. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 14 і 30 см, а більша діагональ є бісектрисою прямого кута. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 108 см. Б63. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 16 і 46 см, а менша діагональ є бісектрисою прямого кута. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 112 см.	I.
А64. У рівнобедреному трикутнику точка перетину серединних перпендикулярів віддалена від основи на 21 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює 150π см. Відповідь: 384 см. Б64. У рівнобедреному трикутнику вершина віддалена від точки перетину бісектрис на 26 см. Обчислити периметр трикутника, якщо площа вписаного круга дорівнює 100π см^2. Відповідь: 108 см.	I. III. V.
А65. У колі проведено дві хорди, які перетинаються. Одна з них дорівнює 165 см, а друга ділиться точкою перетину на частини 60 і 90 см. Обчислити відрізки, на які точкою перетину ділиться перша хорда. Відповідь: 45 см; 120 см. Б65. У колі проведено дві хорди, які перетинаються. Одна з них ділиться точкою перетину на відрізки, які дорівнюють 12 і 3 см, а друга – навпіл. Обчислити другу хорду. Відповідь: 12 см.	
А66. У трапеції бічні сторони і висота відповідно дорівнюють 25, 30 і 24 см. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій її основі. Обчислити площу трапеції.	I.

Відповідь: 1620 см^2. Б66. У трапеції бічні сторони і висота відповідно дорівнюють 25, 30 і 24 см. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на другій її основі. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 1020 см^2.	
А67. Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 і 11 см, його периметр – 34 см. Обчислити сторони паралелограма. Відповідь: 8 см; 9 см. Б67. Сторони паралелограма дорівнюють 7 і 9 см, а різниця діагоналей – 6 см. Обчислити діагоналі паралелограма. Відповідь: 8 см; 14 см.	III.
А68. У прямокутному трикутнику медіани, проведені до катетів, дорівнюють $\sqrt{52}$ см і $\sqrt{73}$ см. Обчислити периметр цього трикутника. Відповідь: 24 см. Б68. У прямокутному трикутнику бісектриси гострих кутів дорівнюють $9\sqrt{5}$ см і $8\sqrt{10}$ см. Обчислити периметр цього трикутника. Відповідь: 72 см.	I. III.
А69. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 41 см, а різниця катетів – 31 см. Обчислити радіус вписаного кола. Відповідь: 4 см. Б69. Катет прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а різниця гіпотенузи і катета дорівнює 2 см. Обчислити радіус описаного кола. Відповідь: 5 см.	III.
А70. У рівнобедреному трикутнику відстань між точками перетину медіан і бісектрис дорівнює 4 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює 40π см. Точка перетину бісектрис знаходиться ближче до основи, ніж точка перетину медіан. Відповідь: 216 см. Б70. У рівнобедреному гострокутному трикутнику відстань між точками перетину медіан і серединних перпендикулярів дорівнює 11 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює 150π см, а кут при вершині більший за 60°. Відповідь: 384 см.	I. III. V.

А71. Довести, що в трапеції сума квадратів відстаней від центра вписаного кола до вершин трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін. Б71. Довести, що сума квадратів діагоналей чотирикутника в два рази більша від суми квадратів відрізків, які сполучають середини його протилежних сторін.	I.
А72. Висоти трикутника дорівнюють 12, 15 і 20 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 150 см^2. Б72. Медіани трикутника дорівнюють 48, 60 і 36 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 1152 см^2.	III. IV. V.
А73. У прямокутній трапеції менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Сума основ трапеції дорівнює 62 см, а сума її бічних сторін – 72 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 341 см^2 або 1085 см^2. Б73. У прямокутній трапеції більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Сума основ трапеції дорівнює 57 см, а сума її бічних сторін – 49 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 684 см^2.	I. III.
А74. Вершина рівнобедреного трикутника віддалена від точки перетину медіан на 24 см. Обчислити периметр трикутника, якщо площа вписаного круга дорівнює 100π см^2. Відповідь: 108 см. Б74. Вершина рівнобедреного трикутника віддалена від точки перетину медіан на 24 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного круга дорівнює 100π см. Відповідь: 216 см.	I. III. V.
А75. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Основи дорівнюють 28 і 100 см. Обчислити відрізки, на які ділить діагональ трапеції висоту, що проведена з вершини тупого кута. Відповідь: 21 см; 27 см. Б75. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Основи дорівнюють 28 і 100 см. Обчислити відрізки, на які висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить її діагональ. Відповідь: 35 см; 45 см.	I.
А76. Периметр трапеції дорівнює 144 см, а кути при більшій основі дорівнюють по 60°. Діагональ трапеції ділить середню	I. III.

лінію на відрізки, один з яких на 16 см більший від другого. Обчислити основи трапеції. Відповідь: 24 см; 56 см. Б76. Діагональ рівнобічної трапеції ділить середню лінію у відношенні 5:9, а кути при меншій основі дорівнюють по 120°. Обчислити бічні сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 220 см. Відповідь: 40 см.	
А77. Сторони трикутника дорівнюють 15, 26 і 37 см. Обчислити радіус вписаного кола. Відповідь: 4 см. Б77. Сторони трикутника дорівнюють 32, 126 і 130 см. Обчислити радіус описаного кола. Відповідь: 65 см.	V.
А78. Обчислити бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника з катетами 24 і 18 см. Відповідь: $9\sqrt{5}$ см; $8\sqrt{10}$ см. Б78. Обчислити медіани, проведені до катетів прямокутного трикутника, якщо ці катети дорівнюють 24 і 18 см. Відповідь: $3\sqrt{73}$ см; $6\sqrt{13}$ см.	IV.
А79. У колі по різні боки від центра кола проведено дві паралельні хорди, які відповідно дорівнюють 18 і 24 см, а відстань між ними дорівнює 21 см. Обчислити діаметр кола. Відповідь: 15 см. Б79. У колі по різні боки від центра кола проведено дві паралельні хорди, які відповідно дорівнюють 40 і 48 см, а відстань між ними дорівнює 22 см. Обчислити радіус кола. Відповідь: 25 см.	I. III.
А80. У рівнобедреному трикутнику точка перетину медіан віддалена від основи на 24 см, а точка перетину бісектрис віддалена від вершини на 52 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 216 см. Б80. У рівнобедреному трикутнику точка перетину медіан віддалена від вершини на 48 см, а точка перетину бісектрис віддалена від основи на 20 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 216 см.	I. III. V.

А81. Довести, що різниця квадратів двох сторін трикутника дорівнює подвоєному добутку третьої сторони і проекції на цю сторону її медіани. Б81. Довести, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює подвоєній сумі квадратів половини третьої сторони і медіани до цієї сторони.	I. IV.
А82. У трикутнику одна зі сторін дорівнює 56 см, а друга сторона ділиться точкою дотику вписаного в нього кола на відрізки 24 і 38 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 160 см або 188 см. Б82. У трикутнику, периметр якого дорівнює 200 см, одна зі сторін ділиться точкою дотику вписаного в нього кола на відрізки 30 і 42 см. Обчислити дві інші сторони. Відповідь: 58 см; 70 см.	III.
А83. У прямокутній трапеції менша діагональ є бісектрисою прямого кута. Різниця основ дорівнює 30 см, різниця бічних сторін – 18 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 496 см^2. Б83. У прямокутній трапеції більша діагональ є бісектрисою прямого кута. Різниця основ дорівнює 16 см, різниця бічних сторін – 4 см. Обчислити площу трапеції. Відповідь: 660 см^2.	I. III.
А84. У рівнобедреному трикутнику вершина, протилежна основі, віддалена від точки перетину медіан на 60 см, а від точки перетину бісектрис – на 65 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 232,5 см. Б84. У рівнобедреному трикутнику вершина, протилежна основі, віддалена від точки перетину медіан на 64 см, а від точки перетину серединних перпендикулярів – на 75 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 384 см.	I. III. V.
А85. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Основи трапеції дорівнюють 28 і 100 см. Обчислити відрізки, на які діляться діагоналі точкою їх перетину. Відповідь: 17,5 см; 62,5 см. Б85. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Основи трапеції дорівнюють 28 і	I.

100 см. Обчислити відрізки, на які ділиться висота точкою перетину діагоналей. Відповідь: 10,5 см; 37,5 см.	
А86. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділиться висотою, яка проведена з вершини тупого кута, на відрізки 70 і 250 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить ця діагональ другу діагональ трапеції. Відповідь: 125 см; 195 см. Б86. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 і 21 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити відрізки, на які ділиться висота точкою перетину діагоналей. Відповідь: 37,5 см; 58,5 см.	I. III.
А87. У прямокутнику бісектриса прямого кута ділить сторону на відрізки 21 і 7 см, починаючи від найближчої для цього кута вершини. Обчислити відрізки, на які ділить ця бісектриса діагональ прямокутника. Відповідь: 15 см; 20 см. Б87. У прямокутнику бісектриса прямого кута ділить його діагональ на відрізки 15 і 20 см, починаючи від найближчої до цього кута вершини. Обчислити відрізки, на які ділить ця бісектриса сторону прямокутника. Відповідь: 21 см; 7 см.	I. III.
А88. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 45 і 60 см. Обчислити відстань між точкою перетину його бісектрис і точкою перетину медіан. Відповідь: 5 см. Б88. Катети прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 16 і 30 см. Обчислити відстань від центра вписаного в трикутник кола до центра описаного навколо нього кола. Відповідь: $\sqrt{85}$ см.	VII.
А89. Із однієї точки кола проведено дві хорди довжиною 9 і 17 см. Обчислити діаметр кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см. Відповідь: 42,5 см. Б89. Із даної точки кола проведено дві хорди довжиною 10 і 12 см. Обчислити радіус кола, якщо відстань від середини меншої хорди до більшої хорди дорівнює 4 см.	I. V.

Відповідь: 6,25 см.	
А90. У рівнобедреному трикутнику точка перетину медіан віддалена від основи на 32 см, а точка перетину серединних перпендикулярів від вершини – на 72 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 384 см. Б90. У рівнобедреному трикутнику точка перетину медіан віддалена від вершини на 64 см, а точка перетину серединних перпендикулярів віддалена від основи – на 21 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 384 см.	І. ІІІ. V.
А91. Довести, що коли з довільної точки кола провести перпендикуляр на діаметр, то квадрат цього перпендикуляра дорівнюватиме добутку відрізків, на які ділиться діаметр основою перпендикуляра. Б91. Довести, що квадрат хорди, яка сполучає будь-яку точку кола з кінцем діаметра, дорівнює добутку діаметра на проекцію цієї хорди на діаметр.	І.
А92. У трикутнику одна зі сторін дорівнює 56 см, а друга сторона ділиться точкою дотику вписаного в трикутник кола на відрізки 32 і 28 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: $448\sqrt{11}$ см^2 або 1344 см^2. Б92. У трикутнику, периметр якого 336 см, одна зі сторін ділиться точкою дотику вписаного в нього кола на відрізки 56 і 48 см. Обчислити площу трикутника. Відповідь: 5376 см^2.	ІІІ.
А93. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Основи трапеції дорівнюють 100 і 156 см. Обчислити відрізки висоти, проведеної з вершини тупого кута, на які ділить її ця діагональ. Відповідь: 21 см; 75 см. Б93. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Основ трапеції дорівнюють 100 і 136 см. Обчислити відрізки діагоналі, на які ділить її висота, проведена з вершини тупого кута. Відповідь: 35 см; 125 см.	І.
А94. У рівнобедреному трикутнику вершина, протилежна основі, віддалена від точки перетину серединних перпендикулярів на 25 см, а від точки перетину бісектрис – на 20 см. Обчислити периметр трикутника.	І. ІІІ. V.

Відповідь: 128 см. Б94. У рівнобедреному трикутнику точка перетину бісектрис віддалена від основи на 12 см, а точка перетину серединних перпендикулярів віддалена від вершини на 25 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 128 см.	
А95. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Відрізки, на які ділить діагональ трапеції висоту, проведену з вершини тупого кута, дорівнюють 27 і 21 см, починаючи від більшої основи. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 248 см. Б95. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Відрізки, на які висота трапеції, що проведена з вершини тупого кута, ділить її діагональ, дорівнюють 35 і 45 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 248 см.	І. ІІІ.
А96. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить другу діагональ на відрізки 97,5 і 62,5 см. Обчислити відрізки, на які ділить ця діагональ висоту трапеції, проведену з вершини тупого кута. Відповідь: 21 см; 75 см. Б96. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, яка проведена з вершини тупого кута, на відрізки 75 і 21 см. Обчислити відрізки, на які ділить ця бісектриса другу діагональ. Відповідь: 62,5 см; 97,5 см.	І. ІІІ.
А97. Довести, що коли через точку, яка лежить всередині кола, провести дві хорди, то добуток відрізків однієї хорди дорівнює добутку відрізків другої хорди. Б97. Довести, що коли з точки, яка лежить поза колом, провести до нього січну й дотичну, то квадрат дотичної дорівнюватиме добутку січної на її зовнішню частину.	І.
А98. Бісектриса прямого кута трикутника ділить його гіпотенузу на відрізки 30 і 40 см. Обчислити периметр трикутника. Відповідь: 168 см. Б98. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 24 і 30 см. Обчислити периметр трикутника.	ІІІ.

Відповідь: 216 см.	
А99. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Відрізки, на які діляться діагоналі, дорівнюють 62,5 і 17,5 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 248 см. Б99. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Відрізки, на які ділиться висота точкою перетину діагоналей, дорівнюють 37,5 і 10,5 см, починаючи від більшої основи. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 248 см.	I. III.
А100. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 і 21 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 456 см. Б100. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділиться висотою, яка проведена з вершини тупого кута, на відрізки 125 і 35 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити периметр трапеції. Відповідь: 456 см.	I.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ НА ДОВЕДЕННЯ АБО ПОБУДОВУ, ОБРАВШИ ЗАПРОПОНОВАНИЙ МЕТОД ТА СКОРИСТАЙТЕСЯ ВКАЗІВКАМИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ (РОЗДІЛ 3)

101. Провести через дану точку пряму так, щоб вона поділила площу даного паралелограма навпіл. 102. Вершини одного паралелограма лежать на сторонах іншого – по одній вершині на кожній стороні. Довести, що діагоналі обох паралелограмів перетинаються в одній точці. 103. Дві прямі, які проходять через центр паралелограма $ABCD$, перетинають сторону BC в точках M і N, а сторону AD – в точках K і F. Довести, що $MN = KF$.	IX

104. M – середина відрізка, який сполучає центри двох однакових кіл. Прямі, що проходять через точку M, перетинають одне з кіл у точках A і B, а друге – в K і F. Довести, що $AB = KF$.

105. Паралелограм $ABCD$ поділено його діагоналями на трикутники AOB, BOC, COD, і DOA. K, L, M, N – точки перетину медіан цих трикутників. Довести, що $KLMN$ – паралелограм.

106. Усередині кола дано точку M. через цю точку проведіть хорду AB так, що $AM = MB$.

107. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на двох даних прямих.

108. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на даному колі і даній прямій.

109. Усередині гострого кута задано точки A і C. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

110. Побудуйте ромб із центром у даній точці і трьома вершинами на трьох даних прямих.

111. Побудуйте ромб із центром у даній точці і трьома вершинами на трьох даних колах.

112. Побудувати паралелограм $ABCD$, вершини якого і C – задані точки, а вершини B і D лежать відповідно на прямих b і c.

113. Дано пряму a і два кола з різних боків від неї. На прямій взято відрізок CD. Побудуйте трикутник ABC так, щоб точки A і B лежали на колах, а відрізок CD був медіаною.

114. Дано два концентричних кола S_1 і S_2. Проведіть пряму, на якій ці кола вирізають три рівні відрізки.

115. Доведіть, що прямі, проведені через середини сторін вписаного чотирикутника перпендикулярно протилежним сторонам, перетинаються в одній точці.

116. Нехай P – середина сторони AB опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть: якщо площа трикутника PCD дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

---

117. Дано пряму MN і точки A і B в різних півплощинах відносно MN. Через A і B проведіть промені так, щоб кут між ними ділився MN навпіл.

118. Через вершину A трикутника ABC і точку D, яка лежить на стороні BC, проведено пряму. Знайдіть на цій прямій таку точку X, з якої відрізки BD і DC було б видно під однаковими кутами.

119. Побудувати трикутник ABC, якщо дано пряму AB і серединні перпендикуляри до сторін BC і CA.

120. Побудувати ромб $ABCD$ за серединами M і N сторін AB і BC і точкою E, що лежить на прямій AC.

121. Побудувати трикутник ABC за двома сторонами AB і AC і різницею кутів B і C. IX

122. Побудувати трапецію за бічними сторонами, основою і різницею кутів при цій основі.

123. Дано кут ABC, який дорівнює 45°, і точки M і N всередині кута. Побудувати рівнобедрений трикутник, вершина якого лежить на одній стороні, основа – на другій, а бічні сторони проходять через точки M і N.

124. Точки A і B розміщено з різних боків відносно прямої l. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб величина $|AX - XB|$ була найбільшою.

125. На стороні AC гострокутного трикутника ABC дано точку M. На сторонах AB і BC знайдіть такі точки N і P, щоб периметр трикутника MNP був найменшим.

126. Дано гострий кут ABC і точку P всередині нього. Знайдіть на сторонах BA і BC точки M і N, щоб периметр трикутника MPN був найменшим.

127. Дано гострий кут ABC і точки M і N всередині нього. Знайдіть на сторонах кута такі точки P і Q, щоб периметр многокутника $PMNQ$ був найменшим.

128. Доведіть, що площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$.

129. Точка Mлежить на діаметрі AB кола радіуса R. Хорда CD проходить через M і перетинає AB під кутом $45°$. Доведіть, що $CM^2 + DM^2 = 2R^2$.

130. Побудувати ромб так, щоб одна його діагональ мала задану довжину d і належала даній прямій l, кінці другої діагоналі належали відповідно прямій і даному колу.

131. Побудувати чотирикутник $ABCD$, у якого діагональ AC є бісектрисою кута A, знаючи довжини його сторін.

132. Дано пряму AB і точки C і D з одно боку від неї. На прямій AB побудуйте таку точку X, щоб $\angle AXC = 2\angle BXD$.

133. Через точку M основи AC рівнобедреного трикутника ABC проведено пряму, яка перетинає прямі BA і BC в точках N і P. Доведіть, що $\frac{NA}{NM} = \frac{PC}{PM}$.

134. На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M, яка відрізняється від C. Доведіть, що $MA + MB >$
$> CA + CB$.

135. Дано кут ABC і всередині нього точку M. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник із вершиною в точці M так, щоб дві інші його вершини лежали на сторонах кута.

136. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки цих прямих, які знаходяться всередині квадрата, однакові.

137. Побудуйте рівнобічний трикутник так, щоб три його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

138. На сторонах AB і AC трикутника ABC побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$ на зовнішню сторону. Доведіть, що $MC = BP$, $MC \perp BP$.

139. На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де O – центр квадрата.

140. На сторонах AB і AC рівнобічного трикутника ABC позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де O – центр трикутника. IX

141. У рівнобічній трапеції $ABCD$ на бічних сторонах AB і CD позначено точки K і M відповідно так, що $AK = CM$. Менша основа BC трапеції дорівнює бічній стороні, а гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Знайдіть кут KOM, де O – середина AD.

142. У ромбі $ABCD$ з тупим кутом A, що дорівнює $120°$, на сторонах AB і AD позначено точки K і M відповідно так, що $BK = AM$. Знайдіть кут KCM.

143. Усередині квадрата $ABCD$ взято точку K і на відрізку AK як на стороні побудовано квадрат $AKEM$, сторона KE якого перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $BK = DM$.

144. Кут C трикутника ABC дорівнює $120°$. Довести, що $l_C = \frac{ab}{a+b}$, де l_C – довжина бісектриси, яка виходить із вершини C, $AC = b$, $BC = a$.

145. З точки P, яку розміщено всередині рівнобічного трикутника ABC, сторону AB видно під кутом $150°$. Довести, що відрізки AP, BP, CP можуть слугувати сторонами прямокутного трикутника.

146. Через точки дотику двох кіл проведено дві січні, і їх другі точки перетину з кожним колом з'єднано хордами. Доведіть, що ці хорди паралельні.

147. Два кола дотикаються внутрішньо, причому менше проходить через центр більшого. Довести, що будь-яку хорду більшого кола, яке проходить через точки дотику, менше коло поділяє навпіл.

148. Знайти геометричне місце точок – середин хорд даного кола, які виходять з однієї точки цього кола.

149. Два кола дотикаються внутрішньо в точці O. У довільній точці M внутрішнього кола проведено до неї дотичну, яка перетинає друге коло в точках A і B. Довести, що $\angle AOM =$
$= \angle MOB$.

150. Дано кут ABC і точку P всередині нього. Провести через точку P пряму так, щоб її відрізок усередині кута ділився у відношенні 1:2.

151. Дано кут ABC і точку M всередині нього. Побудуйте коло, яке дотикається сторін кута і проходить через точку M.

152. Усередині кута AOB дано точку M. Знайти на промені OA точку, однаково віддалену від M і променя OB.

153. Усередині кута AOB дано точку M. Знайти на промені OA точку, відстань від якої до точки Mвдвічі більша, ніж відстань до променя OB.

154. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює R. Обчисліть радіус кола, описаного навколо трикутника, вершини якого є серединами медіан даного.

155. Побудувати трикутник за периметром і двома кутами. 156. Побудувати трикутник за двома кутами і радіусом описаного кола. 157. Впишіть у даний трикутник інший трикутник, сторони якого були б паралельними трьом даним прямим. 158. Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на основі трикутника, а дві інші – на бічних сторонах.	
159. Знайдіть множину точок площини, різниця квадратів відстаней від яких до двох даних точок постійна. 160. На площині дано точки A і B. Знайдіть множину точок площини, віддалених від A на відстань вдвічі більшу, ніж від B. 161. На площині дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$. 162. На площині дано дві точки A і B. Точка C переміщується в площині так, що довжина медіани AD трикутника ABC залишається незмінною. Знайдіть множину точок C. 163. На площині дано точки A і B. Знайдіть множину C таких точок площини, щоб у трикутнику ABC медіана AD дорівнювала стороні BC. 164. Знайдіть ГМТ площини, сума квадратів відстаней від яких до вершин даного трикутника – величина постійна. 165. Знайдіть множину точок площини, сума квадратів відстаней від яких до двох протилежних вершин даного прямокутника дорівнює сумі квадратів відстаней до двох інших його вершин. 166. На даному відрізку AB береться довільна точка C. З одного боку від AB на відрізках AC і CB будують квадрати. Знайдіть множину середин відрізків, які сполучають центри цих квадратів. 167. Коло вписане в ромб $ABCD$ з кутом $45°$. Довести, що для будь-якої точки M кола має місце така рівність:	VII

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

168. У трикутнику ABC на стороні BC обрано точку D. Доведіть, що має місце така рівність:
$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$.

169. Дано трикутник ABC, M – його центроїд. Доведіть, що для будь-якої точки X площини має місце рівність
$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2$.

170. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ сторони AB і CD продовжено до їх перетину в точці K. доведіть, що $MK^2 =$
$= MB^2 + MC^2$, де M – довільна точка кола, описаного навколо шестикутника.

171. У круг вписано трапецію $MNPQ$ $(MQ \parallel NP)$, A – довільна точка прямої, що містить діаметр, паралельний основам трапеції. Довести, що $AM^2 + AQ^2 = AN^2 + AP^2$.

172. На прямій l дано три точки A, B і C так, що точка B лежить між A і C. З одного боку від прямої l побудовано рівнобічні трикутники AMB і BNC.

173. Хорда AB стягує дугу кола, яка дорівнює $120°$. Точка C лежить на цій дузі, а точка D – на хорді AB. $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

174. У паралелограмі $ABCD$ на діагоналях AC і BD взято відповідно точки P і Q так, що $AP{:}PC = 2{:}3$, $BQ{:}QD = 1{:}4$. Знайдіть PQ, якщо $AB = 5$, $AD = 3$, $\angle ADB = 90°$.

175. Точка перетину середніх ліній чотирикутника збігається з точкою перетину його діагоналей. Довести, що чотирикутник – паралелограм.

176. Довести, що в чотирикутнику відрізок, який сполучає середини діагоналей, проходить через точку перетину середніх ліній і ділиться цією точкою навпіл. VIII

177. Точка M – середина відрізка AB, точка M' – середина відрізка $A'B'$. Довести, що середини відрізків AA', BB' і MM' лежать на одній прямій.

178. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

179. Доведіть, що точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину її бічних сторін і середини основ належить одній прямій.

180. Дано чотирикутник $ABCD$, середини сторін AB і CD і точка перетину діагоналей якого належать одній прямій. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

181. Середини сторін AB і CD, BC і DE п'ятикутника $ABCDE$ сполучено відрізками. Середини H і K одержаних відрізків знову сполучено. Доведіть, що $HK \parallel AE$ і $HK = \frac{1}{4}AE$.

182. На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Довести, що точки M, N і B належать одній прямій.

183. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

184. Точки D, E і F лежать на сторонах трикутника ABC так, що $\frac{BD}{DC} = 3$, $\frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}$ і $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}$. Довести, що прямі AD, BE і CF проходять через одну точку.

185. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC обрано точки F, M, N відповідно так, що $\frac{AF}{FB} = \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA}$. Довести, що точки перетину медіан трикутників ABC і FMN збігаються.

186. Дано чотирикутник і точку M. Довести, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін даного чотирикутника, є вершинами паралелограма.

187. Точки L і M – середини протилежних сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Довести: для того, щоб чотирикутник був трапецією, необхідно і достатньо $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

188. У правильному трикутнику ABC на стороні BC обрано точку M, з якої проведено перпендикуляри MN і MK на сторони AB і AC. Окрім того, проведено відрізки KN і OM (O – центр

трикутника), які перетинаються в точці P. Довести, що $NP = KP$.

189. У трикутнику ABC $AB = 4$, $AC = 10$, $\angle BAC = 60°$. Точка N належить стороні BC і $\frac{BN}{NC} = 3$. Знайти AN.

190. BD – медіана трикутника ABC. $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайти $\angle ABD$.

191. У трикутнику ABC на сторонах BC і AC відповідно обрано точки D і E так, що $BD = CD$, $AE = 2CE$. Знайти $\frac{BC}{AB}$, якщо $AD \perp BE$ і $\angle ABC = 60°$.

192. У паралелограмі $ABCD$ точка K – середина сторони BC, а точка M – середина сторони CD. Знайти AD, якщо $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.

193. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$. Медіани AD і BE взаємно перпендикулярні. Знайти $\angle ACB$.

194. У трикутнику ABC $\angle BAC = 60°$, $AB = 6$, $AC = 4$. Знайти кут між медіанами BD і CF.

195. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Довести, що медіани AM_1 і CM_2 перпендикулярні.

196. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$. $\angle A = 65°$, $\angle D = 85°$, $AB = \sqrt{3}$, $CD = 3$. Знайти довжину відрізка, що сполучає середини сторін AD і BC.

197. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці O. $OB = OC = 1$, $OA = 8$, $OD = 7$. Знайти кут між прямими AB і DC.

198. У трапеції $ABCD$ бічна сторона AB перпендикулярна основам Ad і BC. Точка E – середина сторони CD. Знайти відношення $\frac{AD}{BC}$, якщо $AE = 2AB$ і $AE \perp CD$.

199. Довести, що в довільному трикутнику ABC
$ctg\angle A + ctg\angle B + ctg\angle C = \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{4S}$.

200. Нехай M і N – середини сторін CD і DE правильного шестикутника $ABCDEF$, а P – точка перетину відрізків AM і BN. Знайти кут між прямими AM і BN.

Блок №1. Побудуйте трикутник за відомими лінійними елементами або лінійним і кутовим елементами

201. Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.

202. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

203. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і прилеглим гострим кутом.

204. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.

205. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при вершині.

206. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою, опущеною на основу, та кутом при вершині. II

207. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до основи.

208. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до б1чнох сторони.

209. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при основі.

210. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при основі.

211. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою, проведеною до основи і бічною стороною.

212. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за катетом.

213. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за гіпотенузою.

214. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і бісектрисою цього кута.

215. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

216. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

217. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

218. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом вписаного кола.

219. Побудуйте трикутник за висотою і двома кутами, які ця висота утворює зі сторонами трикутника, що мають з висотою спільну вершину.

220. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з цих сторін.

221. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони.

222. Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

223. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою і кутом при основі.

224. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї з цих сторін.

225. Побудуйте трикутник за стороною і проведеними до неї висотою і медіаною.

Блок №2. Побудуйте трикутник за сумою або різницею лінійних елементів та кутовим елементом

226. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.

227. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і сумою катетів.

228. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і різницею катетів.

229. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.

230. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і різницею бічної сторони та висоти, опущеної на основу.

231. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

232. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.

233. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.

234. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і сумою двох інших сторін.

235. Побудуйте трикутник за стороною, різницею кутів, прилеглих до цієї сторони, і сумою двох інших сторін.

236. Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

237. Побудуйте гострокутний трикутник за периметром, одним з кутів і висотою, проведеною з вершини іншого кута.

238. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола та висотою і медіаною, проведеними з однієї вершини.

239. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

240. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.

241. Побудуйте трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.

242. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

243. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і медіаною, проведеною до бічної сторони.

244. Побудуйте прямокутний трикутник за сумою катетів і гострим кутом.

245. Побудуйте прямокутний трикутник за різницею катетів і гострим кутом.

246. Побудуйте прямокутний трикутник за периметром і гострим кутом.

247. Побудуйте трикутник за двома кутами та сумою сторін, протилежних цим кутам.

248. Побудуйте трикутник за двома кутами та різницею сторін, протилежних цим кутам.

249. Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою третього кута.

250. Побудуйте трикутник за двома кутами і радіусом вписаного кола.

Блок №3. Побудуйте чотирикутник за п'ятьма відомими елементами

251. Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним із кутів.

252. Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами і двома діагоналями.

253. Побудуйте чотирикутник за його сторонами і однією з діагоналей.

254. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за кутами A і B, сторонами AB і BC та сумою сторін AD і DC.

255. Побудуйте паралелограм за стороною, проведеною до неї висотою і діагоналлю.

256. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і висотою.

257. Побудуйте паралелограм за гострим кутом і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.

258. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і висотою.

259. Побудуйте паралелограм за діагоналлю і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.

260. Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей і кутом між діагоналями.

261. Побудуйте прямокутник за стороною і кутом між діагоналями, який протилежний даній стороні.

262. Побудуйте прямокутник за діагоналлю і різницею двох сторін.

263. Побудуйте прямокутник за периметром і діагоналлю.

264. Побудуйте прямокутник за периметром і кутом між діагоналями.

265. Побудуйте прямокутник за двома сторонами.

266. Побудуйте прямокутник за діагоналлю і кутом між діагоналями.

267. Побудуйте ромб за сумою діагоналей і кутом між діагоналлю та стороною.

268. Побудуйте ромб за гострим кутом і різницею діагоналей.

269. Побудуйте ромб за гострим кутом і сумою сторони й висоти.

270. Побудуйте ромб за стороною і сумою діагоналей.

271. Побудуйте ромб за тупим кутом і сумою діагоналей.

272. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і стороною.

273. Побудуйте паралелограм за двома суміжними сторонами і одним із кутів

274. Побудуйте квадрат за його діагоналлю.

275. Побудуйте трапецію за бічною стороною, двома діагоналями, кутом між діагоналями.

Блок №4. Шукану точку визначте як точку перетину двох ГМТ, або точку перетину ГМТ і даної в умові задачі фігури

276. На прямій a знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B.

277. На даному колі знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B. Скільки розв'язків має задача?

278. На прямій, яка перетинає сторони даного кута, знайдіть точку, рівновіддалену від його сторін.

279. На даному колі побудуйте точку, рівновіддалену від сторін даного кута. Скільки розв’язків має задача?

280. Знайдіть на прямій a точку рівновіддалену від прямих b і c, які перетинаються.

281. На прямій a побудуйте точку, яка розміщується на відстані m від точки A. Скільки розв’язків має задача?

282. На даному колі знайдіть точку, яка розміщується на відстані d від точки B

283. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін кута ABC і точок M і K.

284. Прямі а і b перетинаються. Знайдіть точку, що лежить на відстані n від прямої a і на відстані m від прямої b.

285. Знайдіть точку, що рівновіддалена від точок A і B та розміщується на відстані d від прямої a.

286. Побудуйте точку, яка розміщується на відстані d від прямої a і рівновіддалена від прямих b і c, які перетинаються.

287. Знайдіть точку, що розміщується на відстані n від прямої a і на відстані m від точки M. Скільки розв’язків має задача?

288. Три прямі попарно перетинаються і не проходять через одну точку. Побудуйте точку, рівновіддалену від усіх трьох прямих. Скільки розв’язків має задача?

289. Точки A і B належать прямій m. Побудуйте точку, віддалену від прямої m на відстань a і рівновіддалену від точок A і B. Скільки розв’язків має задача? Скільки розв’язків має задача?

290. Точки B і C належать різним сторонам кута A. Побудуйте точку M, яка належить площині кута, рівновіддалена від його сторін і така, що $MB=MC$. Скільки розв’язків має задача?

291. Знайдіть усі точки, які належать даному колу і рівновіддалені від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків має задача?

292. Дано дві прямі а і *b,* які перетинаються, і відрізок *АВ*. Знайдіть точку на прямій *а,* яка віддалена від прямої *b* на відстані *АВ.* Скільки розв'язків має задача?

293. У трикутнику *АВС* кут *С*-прямий. На катеті *АС* побудуйте точку *М*, яка віддалена від *АВ* на відстань *СМ*.

294. Знайти точку, що знаходиться на відстані *a* від прямої *АВ* і на відстані *b* від прямої *СК.*

295. Знайти точку, що знаходиться від даної точки *А* на відстані, рівній *а*, і від даної точки *В* на відстані, рівній *b.*

296. Знайти точку, що знаходиться на рівних відстанях від двох даних точок *А* і *В*, і на рівній відстані від сторін даного кута *РКС.*

297. Знайти точку, що знаходиться на даній відстані *a* від точки *С* і на рівній відстані від точок *А* і *В*.

298. На стороні трикутника занйдіть точку, рівновіддалену від двох інших сторін трикутника.

299. Побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через дві дані точки.

300. Розділити навпіл кут між двома прямими, які неперетинаються в межах малюнка.

РОЗДІЛ 3. ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ ТА ДОВЕДЕННЯ (№№101–200)

101. Потрібна пряма проходить через центр симетрії паралелограма. **102.** Нехай O – точка перетину діагоналей $ABCD$ (див. рис. 26). При симетрії відносно O точка A переходить у точку C і відрізок MN – у відрізок PK. Аналогічно NP переходить в KM. Тобто при симетрії відносно точки O $KMNP$ переходить у себе.

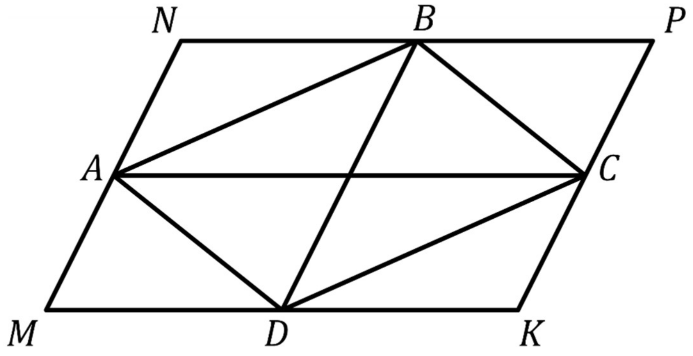

Рис. 26

104. При симетрії кола відносно M відрізок AB переходить у KF. **105.** Точки K і M, L і N симетричні відносно центра паралелограма. **106.** A і B – точки перетину даного кола, симетричного йому відносно точки M. **108.** Розгляньте симетрію даної прямої відносно даної точки. **110.** Точку C (див. рис. 27) можна знайти як точку перетину прямих l_2 і l_1', де l_1' – образ прямої l_1 відносно точки O.

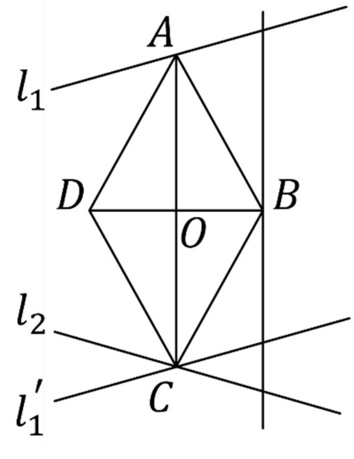

Рис. 27

112. Вершини B і D – точки перетину прямих b і c', c' і b' відповідно, де c' і b' – образи прямих c і b відносно середини відрізка AC. **113.** Відобразіть одне з кіл симетрично відносно точки D. Точка перетину другого кола з одержаним – вершина трикутника. **114.** Відобразіть менше коло S_1 симетрично відносно будь-якої точки A, що належить йому. Нехай B – точка перетину одержаного кола з колом S_2. Тоді AB – шукана пряма. **115.** Доведіть, що дані прямі є образами серединних перпендикулярів до сторін чотирикутника $ABCD$ (див. рис. 28) при симетрії відносно точки перетину відрізків KM і NL. **116.** Нехай точка D'

симетрична D відносно точки P. Площа трикутника PCD дорівнює сумі площ трикутників PBC і PBD'. Зауважте, що точка B лежить на відрізку $D'C$.

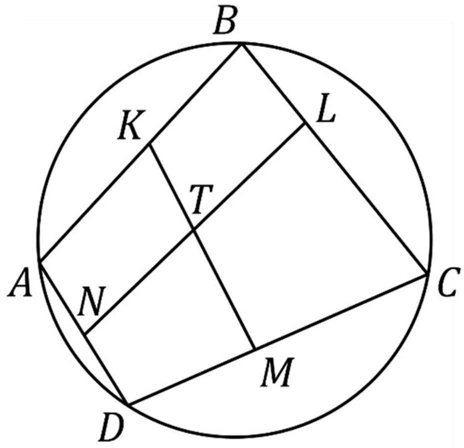

Рис. 28

117. Побудуйте точки A_1 і B_1, симетричні відповідно точкам A і B відносно прямої MN. **118.** *Вказівка*: відобразіть симетрично одну з вершин B або C відносно прямої AD. **119.** Відобразіть пряму AB відносно кожного з даних серединних перпендикулярів. **120.** Через точку E проведіть пряму, паралельну прямій MN. **121.** Якщо трикутник ABC відобразити симетрично відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, то можна побачити трикутник, в якому відомі дві сторони і кут між ними. **122.** Через одну з вершин проведіть пряму, паралельну бічній стороні. Задача зводиться до попередньої. **123.** Нехай точка M_1 симетрична точці M відносно сторони AB. На відрізку M_1N як на діаметрі побудуйте коло. Точка його перетину зі стороною AB є вершиною шуканого трикутника. **124.** Відобразіть точку A симетрично відносно прямої l. **125.** Відобразіть точку M симетрично відносно сторін BA і BC. Одержані точки сполучіть. **128.** Проведіть серединний перпендикуляр до діагоналі AC. Нехай точка B_1 симетрична B відносно проведеної прямої. $S_{ABCD} = S_{AB_1CD}$. **129.** Нехай C_1 і D_1 – точки, симетричні точкам C і D відносно AB. Хорда C_1D має постійну довжину, оскільки стягує дугу постійної градусної міри. **130.** Відобразіть дане коло симетрично відносно прямої l. Одержане коло перетинає дану пряму в одній із вершин ромба. **131.** Нехай точка B_1 симетрична точці B відносно AC. B_1 лежить на AD. У трикутнику B_1CD відомі всі три сторони. **132.** Нехай точка D_1 симетрична точці D відносно прямої AB. Побудуйте коло з центром у точці D_1 і радіусом $\frac{1}{2}DD_1$. Проведіть з точки C дотичну до побудованого кола. **133.** Побудуйте пряму N_1P_1 симетричну прямій NP відносно прямої AC. N_1 належить BA, P_1 – BC. $\triangle NAM \sim \triangle P_1CM$. **134.** Нехай точка B_1 симетрична точці B відносно бісектриси. B_1 лежить на прямій AC. Нехай точка A_1 симетрична точці A відносно тієї самої бісектриси. $AM + MB \quad {}_1M + MB > {}_1B$. **135.** *Вказівка*: розгляньте поворот із центром M на кут 90°. Нехай образ прямої BC перетинає пряму BA в точці N, тобто $R_M^{90^\circ}(BC) = B_1C_1$ і $B_1C_1 \cap BA = N$. Тоді

$R_M^{-90^\circ}(B_1C_1) = BC$, $R_M^{-90^\circ}(N) = K$, причому K належить BC. Отже, $MN = M$, $\angle NMK = 90°$. **136.** *Вказівка*: розгляньте поворот із центром у центрі квадрата на кут $90°$. **137.** *Вказівка*: нехай дано прямі a_1, a_2, a_3, причому a_2 лежить у смузі прямих a_1 і a_3. Оберемо на a_2 довільну точку O і розглянемо поворот $R_O^{60^\circ}$. Нехай $R_O^{60^\circ}(a_1) = a_1'$. Точка перетину прямих a_1' і a_3 – одна з вершин шуканого трикутника. **138.** *Вказівка*: розгляньте поворот із центром у точці A на кут $90°$. **139.** $90°$. *Вказівка*: розгляньте поворот із центром у точці O на кут $120°$. **140.** *Вказівка*: розгляньте поворот із центром у точці O на кут $120°$. **141.** $120°$. Вказівка: доведіть, що $AD = 2BC$. Розгляньте поворот із центром у точці O на кут $120°$. **142.** $60°$. **143.** Вказівка: Розгляньте поворот із центром у точці A на кут $90°$. **144.** *Вказівка*: нехай $R_C^{-60^\circ}(A) = A_1$, $AA_1 \parallel CD$, де CD – бісектриса кута C. Врахуйте, що $\triangle\, AA_1B$ та $\triangle\, CB$ подібні. **145.** *Вказівка*: $R_A^{60^\circ}(P) = P_1$. $P_1B = PC$, $AP = P_1P$, $\angle P_1PA = 60°$. **146.** *Вказівка*: розгляньте гомотетію з центром у точці дотику, коли центр одного кола переходить у центр другого. **147.** *Вказівка*: кола гомотетичні з коефіцієнтом $k = 2$ і центром гомотетії в точці A (див. рис. 29). **148.** Якщо M – дана точка, а O – центр кола, то шукане ГМТ – коло з діаметром OM, виключаючи точку M. Вказівка: розгляньте гомотетію з центром у точці M і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. **149.** *Вказівка*: нехай A_1 і B_1 – точки перетину OA і OB з меншим колом (див. рис. 30). Оскільки кола гомотетичні з центром у точці O, то $A_1B_1 \parallel AB$ і відрізки O_1M_1 і O_1M – серединні перпендикуляри до A_1B_1 і AB відповідно. Залишається помітити рівність дуг A_1M і MB_1.

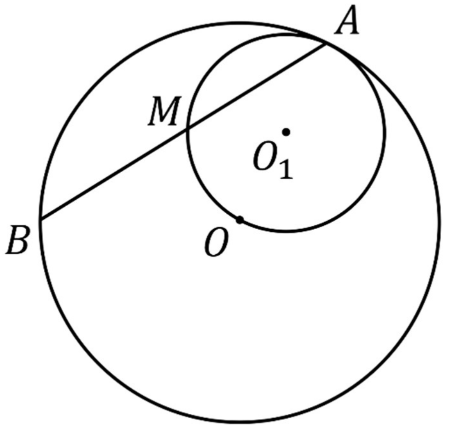

Рис. 29

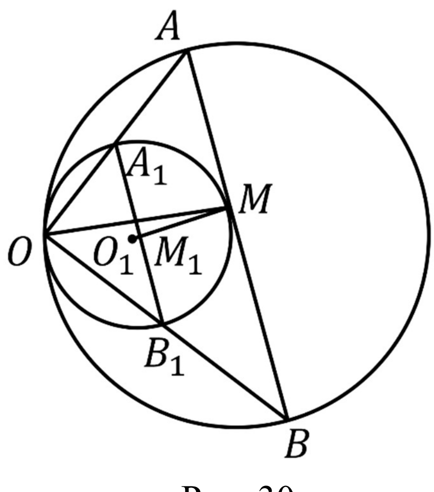

Рис. 30

150. *Вказівка*: розгляньте гомотетію з центром у точці P і коефіцієнтом $k = -2$. **151.** *Вказівка*: побудуйте довільне коло, яке дотикається сторін кута (див. рис. 31) і застосуйте гомотетію з центром B і коефіцієнтом $k = \frac{BM}{BM'}$. **152.** *Вказівка*: на промені OA оберемо довільну точку A'. Проводимо $A'B' \perp OB$ і $A'M' = A'B'$ (M' лежить на промені OM) (див. рис. 32). Застосуйте гомотетію з центром у точці O і коефіцієнтом $\frac{OM}{OM'}$.

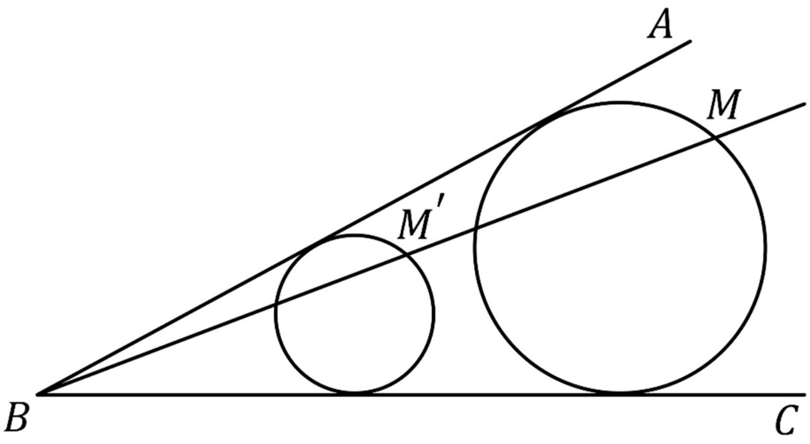

Рис. 31

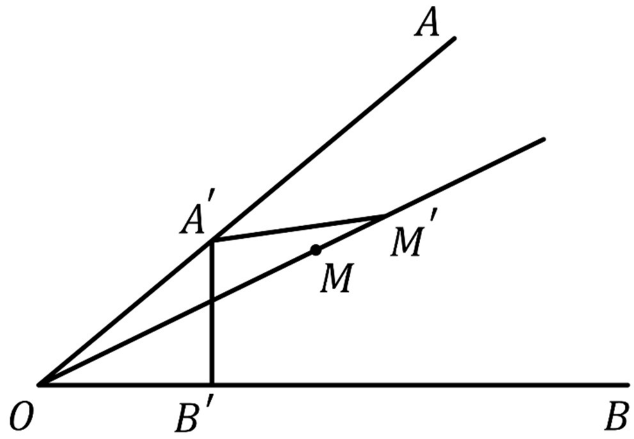

Рис. 32

154. $\frac{R}{4}$. **155.** *Вказівка*: побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний даному, а потім застосуйте гомотетію з центром у будь-якій із вершин і коефіцієнтом $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}$. **157.** *Вказівка*: побудуйте трикутник так, щоб його сторони були паралельними даним прямим, а дві вершини належали сторонам даного трикутника. Потім застосуйте гомотетію з центром у вершині даного трикутника. **158.** *Вказівка*: побудуйте квадрат $K'L'M'N'$, а потім застосуйте гомотетію з центром в точці A (див. рис. 33).

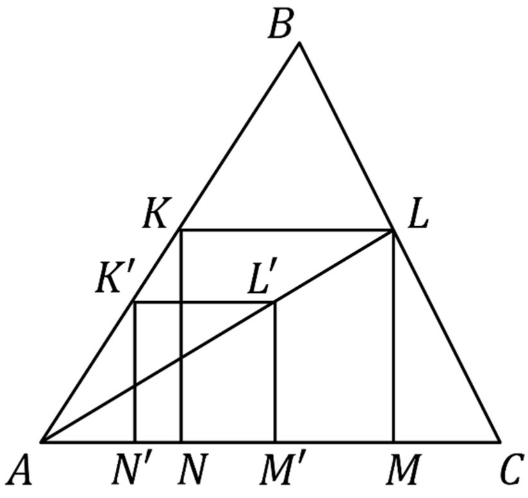

Рис. 33

159. Пряма перпендикулярна до відрізка, що сполучає дані точки. *Вказівка*: оберіть початок координат на середині даного відрізка. Вісь абсцис містить цей відрізок. **160.** Коло. *Вказівка*: нехай початок координат у точці A. Додатна піввісь збігається з променем AB). Рівняння кола буде $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$. **161.** Коло, центр якого ділить відрізок AB у відношенні 2:1, рахуючи від вершини A, радіусом $\frac{4}{3}AB$. **162.** Коло без точок перетину з прямою AB. *Вказівка*: оберемо систему координат як у попередній задачі. Якщо координати точки $C(x;y)$, то $D\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right)$. **163.** Коло з центром на прямій AB без точок перетину з прямою AB. **164.** Коло з центром у центроїді даного трикутника або сам центроїд. **165.** Уся площина. *Вказівка*: введіть систему координат із центром у точці перетину діагоналей прямокутника і осями, паралельними його сторонам. **166.** Відрізок, довжина якого дорівнює $\frac{1}{2}AB$. **167.** *Вказівка*: оберіть систему координат так, щоб початок збігався з точкою перетину діагоналей ромба, а осі містили діагоналі. Якщо $M(x;y)$, то $x^2+y^2=\frac{AB^2}{8}$. **168.** *Вказівка*: оберіть систему координат із центром в точці B, вісь абсцис збігається з променем BC. **169.** *Вказівка*: оберіть систему координат як у попередній задачі. **170.** *Вказівка*: оберіть початок координат у центрі кола з осями, які збігаються з осями симетрії шестикутника. **171.** *Вказівка*: нехай початок координат збігається з центром кола. Вісь ординат містить діаметр, про який говориться в умові. **172.** *Вказівка*: оберемо початок координат у точці A, вісь абсцис збігається з променем AC. Взявши сторони рівнобічних трикутників за a і b, знайдіть довжини відрізків BQ, BP, QP. **173.** *Вказівка*: див. розділ 1 задача 9. **174.** $\frac{\sqrt{73}}{5}$. *Вказівка*: оберіть початок координат у точці D, вісь абсцис – DA), вісь ординат – DB). **175.** *Вказівка*: нехай O – точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ (див. рис. 34). Точки M і N – середини сторін BC і Ad відповідно. Позначимо $\overrightarrow{OB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, а $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)$. Оскільки $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ – колінеарні, то $\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$ або $\frac{k}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)$. Звідси $(k-\alpha)\vec{a}=(\beta-k)\vec{b}$, але оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – не колінеарні, то $k=\alpha=\beta$.

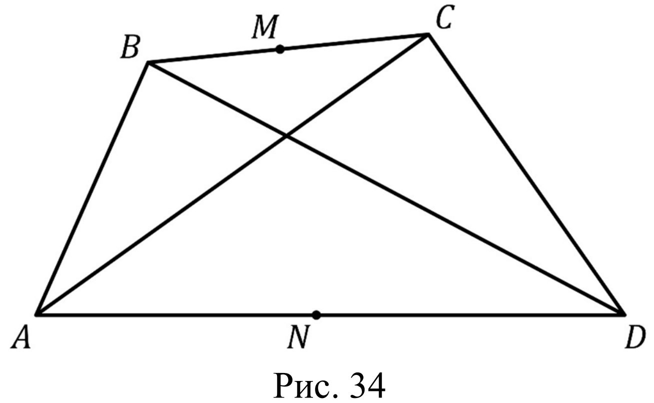

Рис. 34

Маємо: $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \alpha(\vec{b} - \vec{a})$, отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно можна показати, що $AB \parallel CD$. **177.** *Вказівка*: якщо точки K, L і P – середини відрізків AA', MM' і BB' відповідно, то $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)$, а $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}\right)$. **179.** *Вказівка*: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (див. рис. 35). З подібності трикутників AOD і COB: $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OM} = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Для доведення належності точок K, F і M до одної прямої використайте подібність трикутників BKC і AKD. **181.** *Вказівка*: доведіть, що вектор $\overrightarrow{HK}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{MF}$ (див. рис. 36).

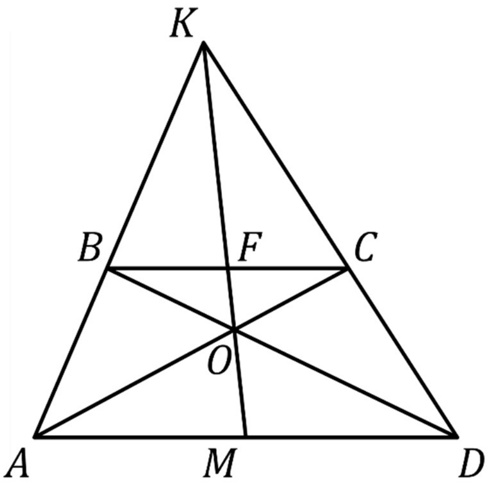

Рис. 35

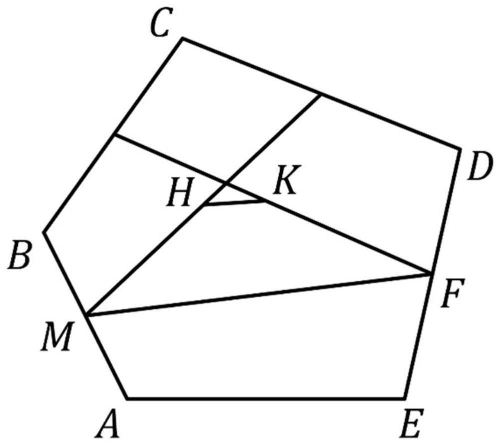

Рис. 36

182. *Вказівка*: $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{5}{6}\overrightarrow{BA}$ (див. рис. 37).

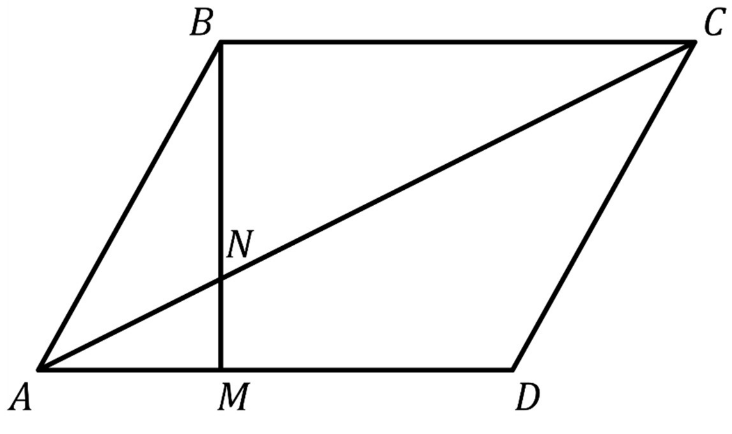

Рис. 37

183. $\frac{2}{3}$. *Вказівка*: $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right), \overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{CE} = \frac{k}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{CB}$ (див. рис. 38). $\overrightarrow{CO} =$ $= \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$. Прирівняйте коефіцієнти в одержаних рівняннях і врахуйте, що $\alpha + \beta = 1$.

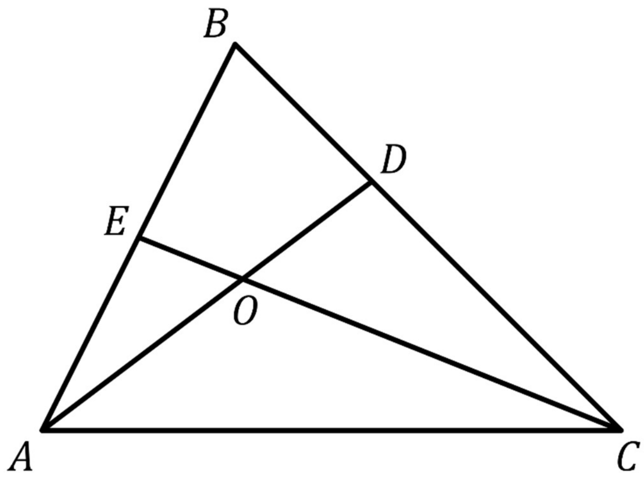

Рис. 38

184. *Вказівка*: знайдіть відношення $\frac{BO}{OE}$ (див. рис. 39) і доведіть, що вектори AO і OD колінеарні (O– точка перетину BE і CF).

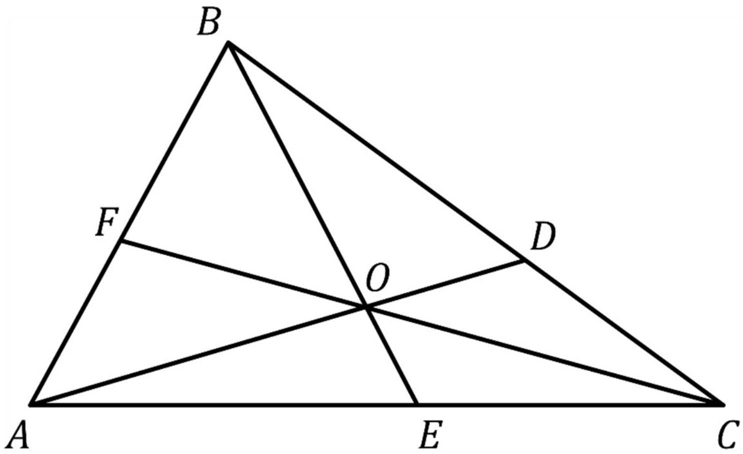

Рис. 39

185. *Вказівка*: якщо M_1 і M_2 – точки перетину медіан трикутника ABC і DEF, то $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}\right)$. **188.** *Вказівка*: введіть систему координат (див. рис. 40): $C(1; 0)$, $K(x; 0)$, $M\left(x; (1-x)\sqrt{3}\right)$, $N\left(-\frac{x}{2}; \sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

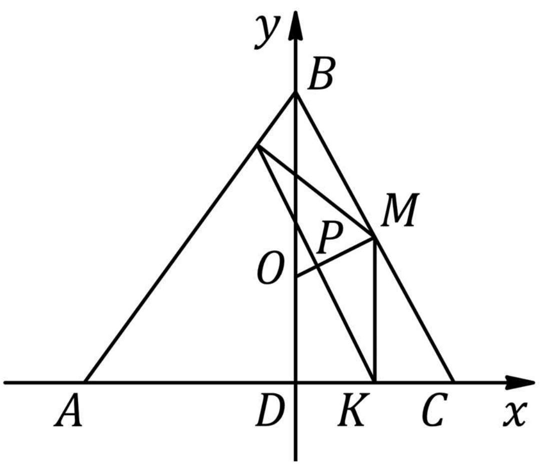

Рис. 40

Якщо P_1 – середина NK, то $P_1\left(\frac{x}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{4}\right)$. Доведіть, що $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$. **189.** $\frac{\sqrt{199}}{2}$. *Вказівка*: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Потім одержану рівність піднесіть до скалярного квадрата. **190.** 30°. **191.** $\frac{3+\sqrt{73}}{8}$. *Вказівка*: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{B\ \ }$, $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. З урахуванням $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ і $\angle ABC = 60°$ отримайте рівняння $4\frac{BC^2}{BA^2} - 3\frac{BC}{BA} - 4 = 0$. **192.** 4. **193.** $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$. **194.** $arccos\frac{11\sqrt{91}}{182}$. **195.** *Вказівка*: $\overrightarrow{CM_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C\ \ }\right)$, $\overrightarrow{AM_1} =$ $= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ (див. рис. 41). Перевірте, що $\overrightarrow{CM_2} \cdot \overrightarrow{AM_1} = 0$. **196.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

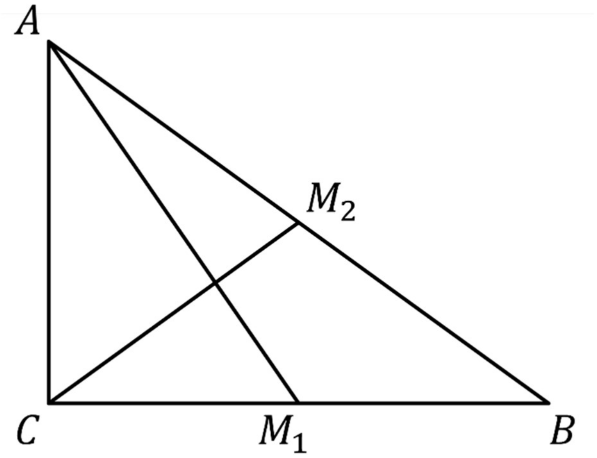

Рис. 41

197. $arccos\frac{3\sqrt{130}}{130}$. *Вказівка*: введіть систему координат із центром у точці перетину діагоналей. **198.** $\frac{8}{7}$. *Вказівка*: введіть систему координат так, що $A(0;0)$, $B(0;p)$, $C(1;p)$, $D(k;0)$. Тоді $E\left(\frac{k+1}{2}; \frac{p}{2}\right)$, $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{k+1}{2}; \frac{p}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD} = (k-1; -p)$. Тепер з умов $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ і $\left|\overrightarrow{AE}\right|^2 = 4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ одержіть систему для k і p. **199.** *Вказівка*: $\text{ctg}A + \text{ctg}B + \text{ctg}C = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC\sin A} + \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{AB\cdot BC\sin B} + \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{BC\cdot CA\sin C} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{2S}$. Далі скористайтеся тим, що $2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2 -$ $-\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right)$. **200.** 60°. *Вказівка*: введіть систему координат у центрі шестикутника.

РОЗДІЛ 4. Методичні завдання.

І. Завдання спрямовані на логічний аналіз змісту теми.

1. Виокреміть способи діяльності, які засвоюються учнями в процесі опанування таких методів розв'язування задач, як:
   - Використання властивостей допоміжних трикутників
   - Методи розв'язування задач на побудову
   - Алгебраїчний метод
   - Метод «подовження медіани»
   - Метод допоміжної площі
   - Метод допоміжного кола
   - Координатний метод
   - Векторний метод
   - Метод геометричних перетворень

2. Проаналізуйте задачі розділу «Тренувальні вправи» і оберіть вправи: а) на відпрацювання методу розв'язування задач; б) на застосування методу розв'язування задач. Завдання виконайте для кожного з наступних методів:
   - Використання властивостей допоміжних трикутників
   - Методи розв'язування задач на побудову
   - Алгебраїчний метод
   - Метод «подовження медіани»
   - Метод допоміжної площі
   - Метод допоміжного кола
   - Координатний метод
   - Векторний метод
   - Метод геометричних перетворень

ІІ. Завдання спрямовані на організацію навчання учнів.

1. Користуючись матеріалами розділу посібника «Тренувальні вправи» доберіть вправи для: а) колективної роботи учнів; б) роботи в малих групах; в) контролю знань учнів; г) індивідуальної роботи учнів з таких тем:
   - Використання властивостей допоміжних трикутників
   - Методи розв'язування задач на побудову
   - Алгебраїчний метод
   - Метод «подовження медіани»
   - Метод допоміжної площі
   - Метод допоміжного кола
   - Координатний метод
   - Векторний метод

- Метод геометричних перетворень

2. Розв'яжіть задачі на побудову (блок 1) і виявіть можливі труднощі учнів при їх виконанні та шляхи подолання цих труднощів.
3. Розв'яжіть задачі на побудову (блок 2) і виявіть можливі труднощі учнів при їх виконанні та шляхи подолання цих труднощів.
4. Розв'яжіть задачі на побудову (блок 3) і виявіть можливі труднощі учнів при їх виконанні та шляхи подолання цих труднощів.
5. Розв'яжіть задачі на побудову (блок 4) і виявіть можливі труднощі учнів при їх виконанні та шляхи подолання цих труднощів.
6. Розв'яжіть вправи на тему «Координатний метод», «Векторний метод», «Метод геометричних перетворень» і виявіть типові помилки учнів і способи їх виправлення.
7. Використовуючи матеріал посібника напишіть конспект уроку використання властивостей допоміжних трикутників.
8. Використовуючи матеріал посібника напишіть конспект фрагменту уроку: а) пояснення методу подовження медіани; б) засвоєння методу допоміжної площі; в) засвоєння методу допоміжного кола; г) застосування алгебраїчного методу розв'язування задач.
9. Продемонструйте використання на уроках різних типів матеріалів посібника в умовах очного і онлайн-навчання із залученням ІКТ.
10. Напишіть конспект уроку узагальнення і систематизації знань учнів, використовуючи розділ посібника «Тренувальні вправи».

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія. Підручник для 7 класу. Київ : Зодіак-ЕКО, 2007. 206 с.

2. Гайштут О. Г. Геометрія 7-11. Планіметрія. Стереометрія : збірник задач. Київ: КІМО, 1999. 144 с.

3. Литвиненко Г. М., Собко М. С. Завдання з математики для екзаменів за курс спеціалізованих фізико-математичних ліцеїв, шкіл, гімназій : навчально-методичний посібник. Київ : Освіта, 1993, 80 с.

4. Лов'янова І. В. Вибранні питання елементарної математики. Ч. 1. Планіметричні задачі : методичний посібник. Кривий Ріг : Кафедра математики КДПУ, 2003. 34 с.

5. Лов'янова І. В. Вибрані методи і прийоми розв'язування геометричних задач (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 10 клас : методичний посібник / за заг. ред. проф. Н. А. Тарасенкової. Черкаси : видавець Чабаненко Ю. А. 2014. 64 с.

6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Підручник для 7 класу. Київ : Гімназія, 2007, 200 с.

7. Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. Навчально-методичний посібник. Київ : Магістр-S, 1998. 256 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

УДК 373.5.016:51(03)(076)

ББК 74.262 я2

Навчальне видання

ВИБРАНІ МЕТОДИ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПЛАНІМЕТРІЇ

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
з дисципліни «Методика навчання математики»

Укладачі Лов'янова І. В., Калугін Р.Ю.

Комп'ютерний набір Лов'янова І. В, Калугін Р.Ю.

Комп'ютерна верстка Лов'янова І. В., Калугін Р.Ю.