

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ**

**ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ГЕОМЕТРИЧНІ ВЕЛИЧИНИ.
ДОВІДНИК-ТРЕНАЖЕР З ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО.
ЧАСТИНА 1. ПЛАНІМЕТРІЯ**

КРИВИЙ РІГ
2022

УДК 373.5.016:51(03)(076)

ББК 74.262 я2

Рецензенти

І. А. Акуленко – доктор педагогічних наук, професор, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна

К. В. Польгун – кандидат педагогічних наук, Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг, Україна

І. С. Дереза – кандидат педагогічних наук, вчитель математики Криворізький центрально-міський ліцей, м. Кривий Ріг, Україна

М 33 ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ГЕОМЕТРИЧНІ ВЕЛИЧИНИ. ДОВІДНИК-ТРЕНАЖЕР З ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО. ЧАСТИНА 1. ПЛАНІМЕТРІЯ / Укладачі Лов'янова І. В., Білоусова Г. М., Калугін Р. Ю. – Кривий Ріг: Видавець. – 2022. – 140 с.

Довідник-тренажер з підготовки до ЗНО містить означення, правила, алгоритми дій, приклади виконання вправ та завдання для тренування з тем шкільного курсу математики, які розкривають змістову лінію «Геометричні фігури. Геометричні величини» в курсі планіметрії. Довідник буде корисний для учнів основної і старшої школи, абітурієнтів, які повторюють курс планіметрії, а також студентів, які вивчають курси «Елементарна математика», «Вища математика», «Методика навчання математики», вчителів математики.

ISBN

© Лов'янова І. В., Білоусова Г. М., Калугін Р. Ю.

© видавництво

Зміст

Передмова	4
Розділ 1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	5
1.1. Елементарні геометричні фігури	5
1.2. Взаємне розміщення прямих на площині	18
1.3. Задачі практичного змісту	31
1.4. Вправи рівня ЗНО	35
Розділ 2. ТРИКУТНИКИ	37
2.1. Трикутник, його елементи. Рівні і подібні трикутники	37
2.2. Рівнобедрний трикутник. Рівносторонній трикутник	52
2.3. Прямокутний трикутник	59
2.4. Площа трикутників. Розв'язування трикутників.	70
2.5. Задачі практичного змісту	82
2.6. Вправи рівня ЗНО	83
Розділ 3. МНОГОКУТНИКИ. ЧОТИРИКУТНИКИ	91
3.1. Многокутники.	91
3.2. Паралелограм. Прямокутник. Ромб. Квадрат	92
3.3. Трапеція	101
3.4. Правильні многокутники	109
3.5. Задачі практичного змісту	112
3.6. Вправи рівня ЗНО	113
Розділ 4. КОЛО. КРУГ. ВПИСАНІ І ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ	122
4.1. Коло і круг.	122
4.2. Кути вписані в коло. Властивості хорд і дотичних	123
4.3. Вписані і описані многокутники.	127
4.4. Довжина кола. Площа круга	132
4.5. Задачі практичного змісту	134
4.6. Вправи рівня ЗНО	135
Список використаної і рекомендованої літератури	138
Додатки	138

Передмова

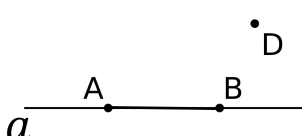
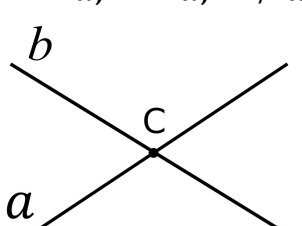
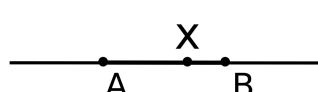
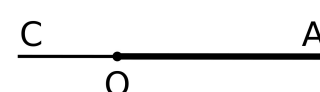
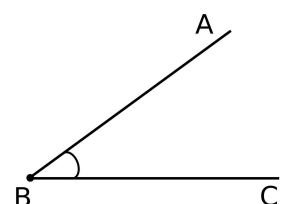
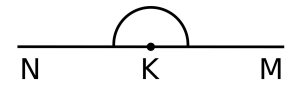
Пропонований посібник є черговою частиною довідника-тренажера з підготовки до ЗНО, який містить першу частину розділу «Геометричні фігури. Геометричні величини». В посібнику дібрано і систематизовано матеріал з планіметрії, який ілюструє розгортання змістових ліній «Геометричні фігури та їх властивості. Геометричні величини та їх вимірювання» в шкільному курсі геометрії з 7 по 9 клас. Зміст цього розділу розкритий в таких параграфах: «Елементарні геометричні фігури та їх властивості», «Трикутники», «Многокутники. Чотирикутники», «Коло. Круг. Вписані і описані многокутники».

Всі параграфи посібника структуровані однаково, в зручній для сприйняття формі для учнів із різними нахилами до оперування знаково-символічними засобами, а саме: означення, теореми, способи дій представлено у табличній формі у вигляді символічних записів та текстової інформації. Кожен теоретичний факт супроводжується прикладами. Кожен розділ містить задачі на готових малюнках, які сприяють засвоєнню основних понять і фактів розділу. Також у складі кожного розділу є тренувальні вправи, їх достатня кількість і відповіді до кожної задачі сприяють тренуванню і самоконтролю учнів. На відміну від інших частин посібника, даний посібник містить у складі кожного розділу підпункт «Задачі практичного змісту». Також дібрані і систематизовані вправи з відповідних тем за специфікацією завдань ЗНО 2010-2019 років, які включено у підпункт з однойменною назвою «Вправи рівня ЗНО». В додатках подано витяг з програми зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти, дібрано довідковий матеріал для виконання раціональних обчислень.

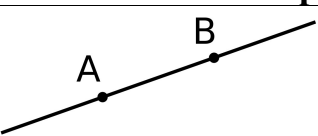
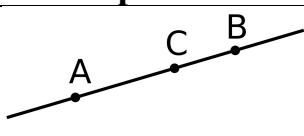
Серія довідників-тренажерів складається із кількох частин. Вже видані такі частини: «Числа», «Вирази». Продовження серії планується у виданні таких частин: «Функції». «Рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей. Задачі на складання рівнянь», «Геометричні фігури та їх властивості, геометричні величини та їх вимірювання.» (Частина 2. Стереометрія).

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

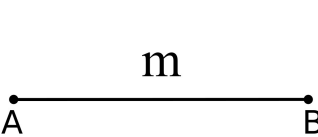
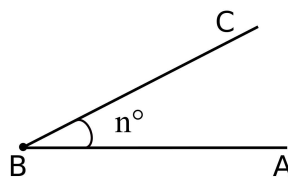

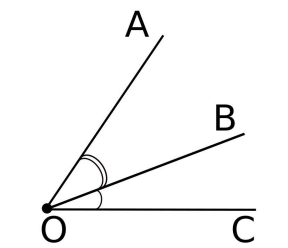
1.1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ


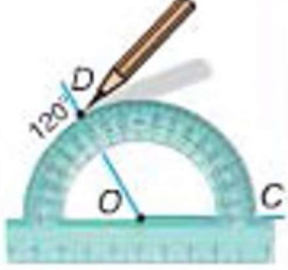
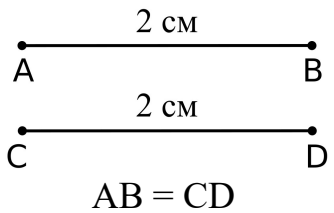
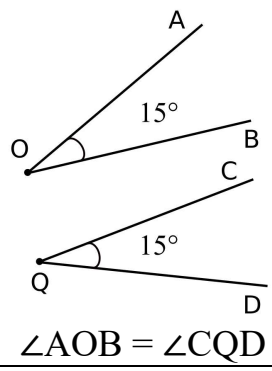
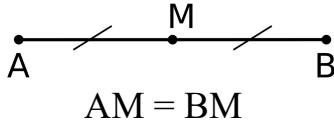
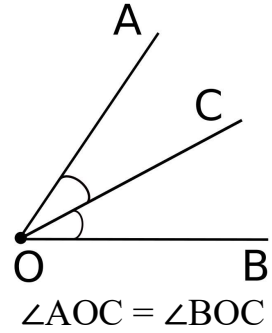
Точки і прямі	Відрізки	Промені	Кути
 <p>Пряма a або AB $A \in a, B \in a, D \notin a$</p>  <p>$C \in a, C \in b$ Прямі a і b перетинаються в точці C</p>	 <p>Відрізок AB – частина прямої</p> <p>Точки A і B – кінці відрізка</p> <p>Точка X – внутрішня точка відрізка AB</p>	 <p>Промінь OA – частина прямої</p> <p>Точка O – початок променя</p> <p>Промені OA і OC - доповняльні</p>	 <p>$\angle ABC$ утворюють промені BA і BC</p>  <p>$\angle NKM$ – розгорнутий, утворюють доповняльні промені KM і KN</p>

ВЛАСТИВОСТІ

прямої	розміщення точок на прямій	
 <p>Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну</p>	<p>Із трьох точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими</p>	

ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ

відрізків	кутів	
 <p>$AB = m > 0$</p>	<p>$\frac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра}}$ кожного $\frac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$ більша за нуль</p>	 <p>$\angle ABC = n^\circ > 0$</p>
 <p>$AC = AB + BC$</p>	<p>$\frac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$ дорівнює сумі $\frac{\text{довжин відрізків}}{\text{градусних мір кутів}}$, на які він розбивається будь-якою його точкою будь-яким променем, що проходить між сторонами кута</p>	 <p>$\angle AOC =$ $\angle AOB + \angle BOC$</p>

ВЛАСТИВОСТІ ВІДКЛАДАННЯ			
відрізків		кутів	
 <p>OC = m - одиниць</p>	<p>На промені від його початку Від променя по один бік від нього</p> <p>можна відкласти <i>тільки</i> один вірізок даної довжини</p> <p>кут даної градусної міри</p>	 <p>$\angle COD = n^\circ$ - єдиний</p>	
РІВНІСТЬ			
відрізків		кутів	
 <p>AB = CD</p>	<p>Відрізки Кути називаються <i>рівними</i>,</p> <p>якщо рівні їх $\frac{\text{довжини}}{\text{градусні міри}}$</p>	 <p>$\angle AOB = \angle CQD$</p>	
 <p>AM = BM</p>	<p>Точка М – середина АВ</p>	<p>Промінь ОС – бісектриса $\angle AOB$</p>	 <p>$\angle AOC = \angle BOC$</p>

№ 1.1. Розв'яжіть задачі на тему: «Точка і пряма. Відрізок».

1) Скільки різних прямих можуть визначати точки: а) А, В, С; б) А, В, С, D; в) А, В, С, D, О? Поясніть відповідь на малюнку.

2) Яке найбільше число точок перетину може бути у п'яти різних прямих? Покажіть на малюнку.

3) Скільки на мал.1 точок, кожна з яких є спільною принаймні для двох прямих?

4) Знайдіть таке розміщення n точок при якому вони визначають рівно n прямих.

5) Прямую a перетинають 6 прямих. Скільки може бути точок перетин цих прямих з прямою a . Відповідь поясніть за допомогою малюнків.

6) На прямій відмічені точки: а) А, В, С; б) А, В, С, D; в) А, В, С, D, О. Перелічіть відрізки з кінцями в цих точках. Чи зміниться число таких відрізків, якщо названі точки не будуть лежати на одній прямій?

7) Визначте кількість відрізків на малюнку 1, 2 і 3. Для полегшення підрахунку відмітьте на малюнку необхідні точки літерами.

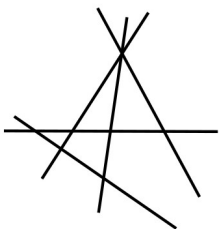
8) Дано коло. Побудуйте 5 відрізків з кінцями на цьому колі так, щоб ніякі два відрізки не мали спільних точок.

9) Побудуйте 4 відрізка з кінцями на даному колі, так щоб кожен з відрізків мав спільну точку з одним із решту відрізків, але ніяка точка не була спільною для трьох відрізків.

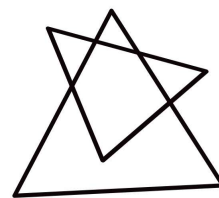
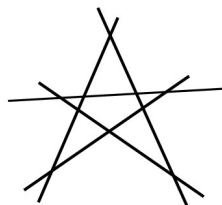
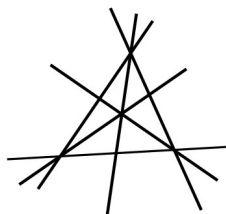
10) Відрізок АВ перетинають 5 прямих. На скільки частин вони ділять цей відрізок?

11) Визначте кількість відрізків на малюнках 2 і 3. Для полегшення підрахунку відмітьте на малюнку необхідні точки літерами.

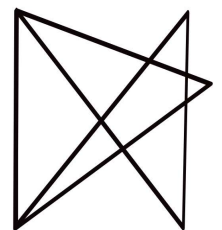
12) На двох прямих позначено по декілька точок. Чи можуть ці точки визначати на даних прямих 4, 5 або 6 відрізків?



Мал. 1.

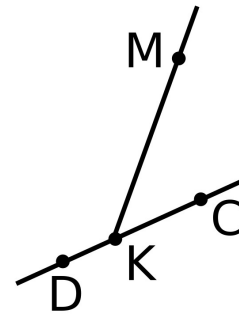


Мал. 2



Мал. 3

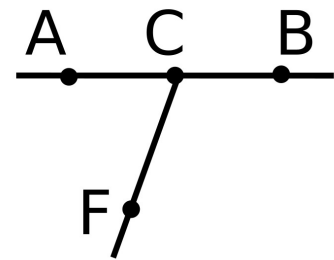
13) Проведіть пряму і позначте на ній точки E і F. Помітьте на цій прямій точку A, яка лежить між точками E і F, і точку K так, щоб точка F лежала між точками A і K.



Мал. 4

14) На малюнку 4 знайдіть всі промені з початком в точці K. Яким відрізком з кінцями в позначених точках (мал.4) належить точка K?

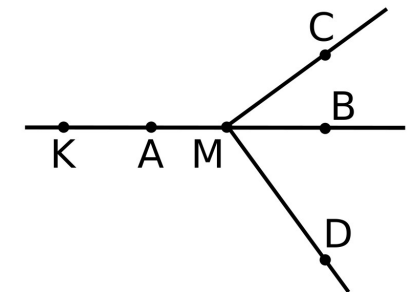
15) Проведіть пряму і позначте на ній точки M і N. Відмітьте на цій прямій точку D, яка лежить між точками M і N, і точку E так, щоб точка M лежала між точками E і D.



Мал. 5

16) На малюнку 5 знайдіть всі промені з початком в точці C. Яким відрізком з кінцями в позначених точках (мал. 5) належить точка C?

17) Позначте три точки. Проведіть всі прямі, які проходять через пари цих точок. Скільки таких прямих можна провести? Розгляньте всі можливі випадки.

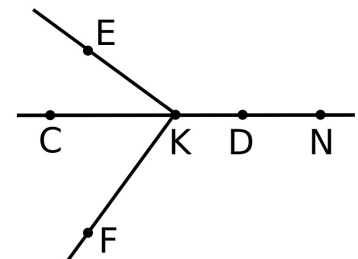


Мал. 6

18) На малюнку 6 знайдіть всі промені з початком в точках M і A. Яким відрізком з кінцями в позначених точках (мал. 6) належить точка M?

19) Намалюйте 3 прямих, у яких: а) тільки одна точка перетину; б) тільки дві точки перетину.

20) На малюнку 7 знайдіть всі промені з початком в точках K і D. Яким відрізком з кінцями в позначених точка (мал. 7) належить точка K?



Мал. 7

21) Позначте чотири точки. Проведіть всі прямі, що проходять через пари цих точок. Скільки таких прямих можна провести? Зробіть малюнок.

22) Скільки відрізків з кінцями в позначених точках зображено на мал. 5?

23) Скільки точок перетину може мати 3 прямі? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть малюнок.

24) Скільки відрізків з кінцями в позначених точках зображено на мал. 6?

№ 1.2. Розв'яжіть задачі на тему: «Вимірювання відрізків».

1) На прямій позначено точки A, B, C так, що $AB = 17, AC = 11, BC = 6$. Яка з цих точок лежить між двома іншими? Чи зміниться відповідь, якщо $AB = 17, AC = 11, BC = 28$?

2) На прямій позначено точки A, B, C, D так, що $AB = CD$. Чи визначають ці точки інші пари рівних відрізків?

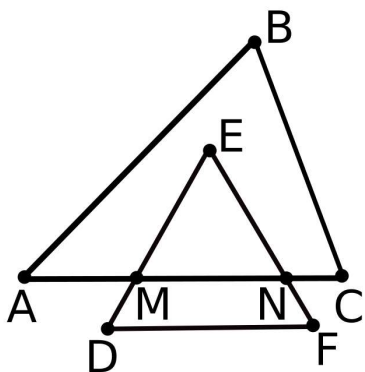
3) На прямій позначено точки A, B, C, D, H так, що $AB = BC = CD = DH$. Які ще рівні відрізки визначають ці точки?

4) Знаючи, що $AB = 6$, знайдіть на прямій AB всі точки, в яких сума відстаней від кінців відрізка AB дорівнюють: а) 6; б) 5; в) 9.

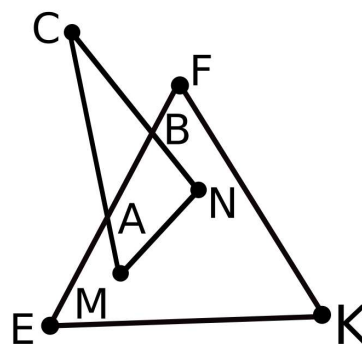
5) На прямій позначено послідовно точки A, B, C . Чи вірно, що відстань між серединами відрізків AB і BC удвічі менше відрізка AC ?

6) Знаючи, що $AB = 7$, знайти на прямій AB таку точку M , щоб $AM - BM = 1$.

7) Дано n прямих. Відомо, що є 5 точок, кожна з яких є спільною хоча б для двох прямих з числа даних. Визначте найменше можливе значення n .



Мал. 5



Мал. 6

8) Розв'яжіть задачу 7, супроводжуючи рішення малюнком, для числа точок 7, 9, 13.

9) П'ять прямих розміщені на площині так, що є 8 точок, через кожен з яких проходить не менше двох прямих із числа названих. Скільки відрізків визначають ці точки на названих прямих?

10) На прямій відмічені точки А, В, С (В між А і С). Відомо, що $AB = 3\text{см}$, $BC = 5\text{см}$. Користуючись лише циркулем, розділіть відрізок АВ на частини довжиною 1 см.

11) Точка В знаходиться між точками А і С, причому $AB = 7\text{см}$, $BC = 17\text{см}$. Користуючись лише циркулем, побудуйте на прямій АВ відрізок довжиною 1 см.

12) М — середина відрізків АВ. Знайдіть на прямій АВ всі такі точки Х, які задовільняють умові: $2XA = 3(XB + XM)$.

13) На прямій послідовно позначено точки $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ так, що $A_1 A_2 = 1$, $A_2 A_3 = 2$, $A_3 A_4 = 3, \dots$. Назвіть відрізки з кінцями в зазначених точках, які мають довжину 45.

14) За умовою попередньої задачі вкажіть два відрізки, відстань між серединами яких дорівнює 20.

15) На прямій а позначено точки А, В і С, причому $AB = 5\text{ см}$, $BC = 7\text{см}$. Якою може бути довжина АС?

16) Точка С — середина відрізка АВ. Знайдіть довжину відрізка АС в дециметрах, якщо $AB = 7\text{ м } 58\text{ см}$.

17) На прямій m позначено точки М, N і К причому $MN = 8\text{см}$ $NK = 12\text{ см}$. Якою може бути довжина МК?

18) Точка F — середина відрізка EL. $EF = 3\text{дм } 12\text{ см}$. Знайдіть довжину EL в метрах.

19) Точки А і В розміщені по різних сторонах від прямої а; $C \in a$, $AB = 37\text{дм}$, $AC = 12\text{дм}$, $CB = 26\text{дм}$. Чи є точка С точкою перетину АВ і а?

20) Точки С і D розміщені на відрізку АВ так, що $AC = DB$, точка С лежить між точками А і D. Знайдіть відстань між серединами відрізків АС і DB, якщо $AB = 58\text{ см}$, а $CD = 2,8\text{ дм}$.

21) Точки E і F розміщені по різних сторонах прямої b ; $M \in b$, $EF = 29\text{см}$, $EM = 14\text{см}$, $MF = 16\text{см}$. Чи є точка M точкою перетину EF і b ?

22) Точки E і F розміщені на відрізку CD так, що $CE = DF$, точка E лежить між точками C і F . Відстань між серединами відрізків CE і DF дорівнює $8,5$ дм, а довжина відрізка CD дорівнює $1,2$ м. Знайдіть EF .

23) На прямій a розміщені точки M , A і B . Знайдіть MA і MB , якщо $AB = 6\text{см}$ і $MA + MB = 9\text{см}$.

24) На прямій відмічено послідовно точки A , B , C і D так, що $AB = CD$. Чи існують ще пари рівних відрізків з кінцями в названих точках?

25) На прямій b розміщені точки A , E і F . Знайдіть AE і AF , якщо $EF = 8\text{см}$ і $AE + AF = 14\text{см}$.

26) На прямій послідовно позначені точки A , B , C і D так, що $AC = BD$. Чи існують пари рівних відрізків з кінцями в названих точках?

27) Знаючи, що $AB = 8$, M — середини відрізка AB , знайдіть на прямій AB всі такі точки X , для яких сума $XA + XB + XM$ дорівнює 9 . Покажіть ці точки на малюнку.

28) Знаючи, що $AB = 8$, M — середина відрізка AB , знайдіть на прямій AB всі точки X , для яких сума $XA + XB + XM$ дорівнює 15 . Покажіть ці точки на малюнку.

Відповіді:

№ 1.1

- 1) а) 1 або 3; б) 1, 4 або 6; в) 1, 5, 6, 8 або 10. 3) 7. 6) а) AB , BC , AC , ні
7) 16. 10) 6. 11) 25; 25. 12) так, ні, так.
14) а) KD , KC , KM ; б) DK , KC , DC , KM . 16) а) CA , CB , CF ; б) AC , CB , AB , CF .
18) а) MA , MB , MC , MD , MK , AM , AK , AB ; б) KM , AM , MB , KB , AB , MC , MD .
20) а) KC , KN , KE , KF , DK , DN ; б) KC , KD , KN , CD , CN , KE , KF .
22) 15. 23) жодної, 1,2 або 3. 24) 15.

№ 1.2

- 1) т.С; т.А 2) $AC=BD$ 3) $AC=BD=CH$; $AD=BH$.
4) а) кожна точка відрізка AB ; б) такої точки не існує. 5) так.

- | | | | |
|----------------------|---------------------------|-----------------|---------------------|
| 6) $AM=4$, $MB=3$. | 7) $n=4$. | 12) $AX:XB=3:1$ | 15) 12 см або 2 см. |
| 16) 37,9 дм. | 17) 20 см або 4 см. | 18) 0,624 м. | 19) ні. |
| 20) 4,3 дм. | 21) ні. | 22) 5 дм. | 23) 1,5 см; 7,5 см. |
| 24) так. | 25) $AE=3$ см, $AF=11$ см | | 26) так. |

№ 1.3. Розв'яжіть задачі на тему: «Кути».

- 1) Чи вірно що, два кути, які мають спільну сторону і в сумі дорівнюють 180° , є суміжними?
- 2) Два кути мають спільну сторону, їх бісектриси утворюють прямий кут. Чи є дані кути суміжними?
- 3) Чи можна визначити прямий кут, який дорівнює суміжному з ним куту?
- 4) Різниця двох суміжних кутів дорівнює одному із них. Визначте кожен із цих кутів.
- 5) Бісектриса кута ABC утворює з його стороною кут, який дорівнює куту, суміжному з кутом ABC . Визначте $\angle ABC$.
- 6) Один з суміжних кутів удвоє більший за різницю між ними. Визначте ці кути.
- 7) Скільки різних променів визначають три точки A , B , C , які лежать на одній прямій? Чи зміниться відповідь, якщо ці точки не лежать на одній прямій?
- 8) Два рівних кути, які мають спільну вершину, їх бісектриси - доповняльні напівпрямі. Доведіть, що ці кути - вертикальні.
- 9) Кут який зображений на папері, причому в межах паперу знаходяться досить малі частини сторін, що для його вимірювання не можна користуватися транспортиром. Як визначити градусну міру цього кута?
- 10) В результаті перетину двох прямих утворилася 4 кути, кожен із яких менший розгорнутого. Знайдіть величину кожного кута, якщо:
 - а) сума двох 78° ;
 - б) різниця двох 42° ;

- в) один із них в 5 разів менше за другий;
 г) один із них удвоє менше за суми решти.

11) Чи правильні наступні твердження:

а) якщо промінь OA утворює рівні між собою кути з сторонами кута BOC , то він є бісектрисою кута BOC ;

б) якщо два кути мають спільну вершину і їх бісектриси є доповняльними променями, то ці кути — вертикальні;

в) якщо бісектриси двох рівних кутів лежать на одній прямій, то ці кути — вертикальні?

12) Третину одного і три п'ятих другого із суміжних кутів дають в сумі прямий кут. Знайдіть ці суміжні кути.

13) Один із суміжних кутів в троє більший різниці між ними. Визначте градусні міри цих кутів.

14) Два кути мають спільну вершину, їх відповідні сторони взаємно перпендикулярні. Чи можуть ці кути виявитися вертикальними?

15) Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати тільки непарними цифрами; тільки парними цифрами?

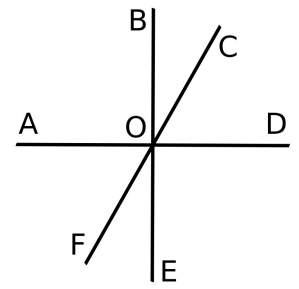
16) $\angle AOB$ і $\angle COD$ — кути з відповідними перпендикулярними сторонами. Чи вірно що, бісектриса кутів $\angle AOD$ і $\angle BOC$ лежать на одній прямій?

17) Скільки прямих кутів зображено на мал. 7?

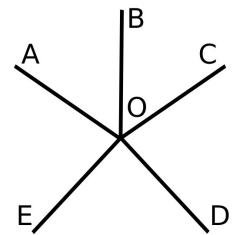
18) Скільки на мал. 7 кутів: а) розгорнутих; б) гострих; в) тупих?

19) Перелічіть і виміряйте на малюнках 8, 9, 10, 11: а) всі гострі кути; б) всі тупі кути.

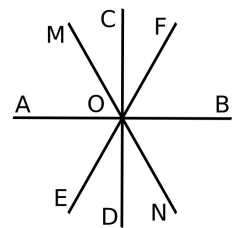
20) Назвіть на кожному з малюнків 8, 9, 10, 11 по три рівних кути. По кожному з цих малюнків запишіть декілька кутів в порядку зростання їх градусної міри.



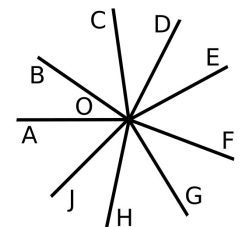
Мал. 7



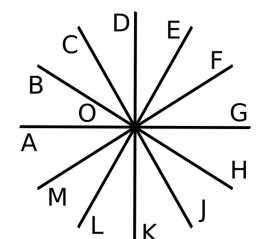
Мал. 8



Мал. 9



Мал. 10



Мал. 11

21) Визначте число пар вертикальних кутів на мал. 7, 9, 11.

22) З точки O виходять 9 променів, які утворюють кути по 40° . Яких кутів на малюнку більше — гострих чи тупих?

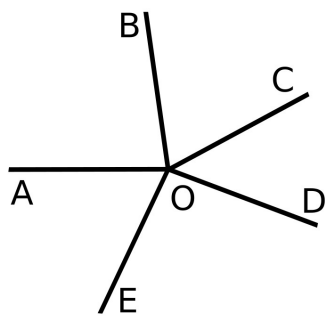
23) Точка O — початок восьми променів, які утворюють кути в $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$. Яких кутів на малюнку більше — гострих чи тупих? Визначте наявність розгорнутих кутів.

24) Розв'яжіть попередню задачу за умови, що кути рівні $8^\circ, 16^\circ, 24^\circ, 32^\circ, 40^\circ, 48^\circ, 56^\circ, 64^\circ, 72^\circ$.

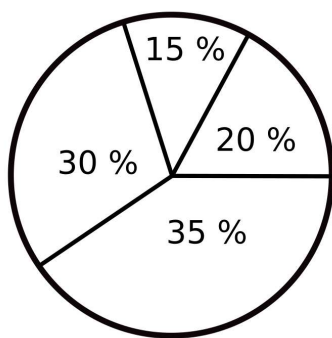
25) В одній напівплощині з границею AB побудовані кути: $\angle BAC = 38^\circ, \angle CAD = 68^\circ, \angle DAE = 85^\circ, \angle EAK = 99^\circ$. Визначте градусну міру $\angle KAC$.

Відповіді №1.3:

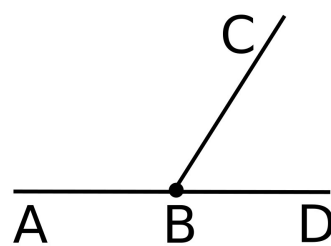
- 1) ні. 2) так. 3) так. 4) $60^\circ, 120^\circ$.
5) 120° . 6) $108^\circ, 72^\circ$. 7) 6, ні.
10) а) $39^\circ, 141^\circ, 39^\circ, 141^\circ$; б) $69^\circ, 111^\circ, 69^\circ, 111^\circ$; в) $30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ$;
г) $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$. 11) а) так; б) так; в) так.
12) $67,5^\circ, 112,5^\circ$. 13) $108^\circ, 72^\circ$. 14) так. 15) так; так.
16) так. 17) 4. 18) а) 6; б) 4; в) 4. 22) гострих.
23) гострих; розгорнутих 3 24) гострих; розгорнутих немає.
25) 108° .



Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14

№ 1.4. Розв'яжіть задачі на тему: «Вимірювання кутів».

1) Прямий кут розділений на дві частини, одна з яких на 8° більша за другу. Знайдіть отримані кути.

2) Розгорнутий кут розділений на чотири частини, одна з яких менша за інші відповідно в 2, 3, 4 рази. Визначте величини цих частин.

3) На мал. 12 побудовані кути AOB, BOC, COD, DOE, EOA. Визначте суму названих кутів.

4) $\angle AOB = 54^\circ$. Побудуйте такий промінь OC, що $\angle AOC = 2 \angle BOC$. Знайдіть кут AOC.

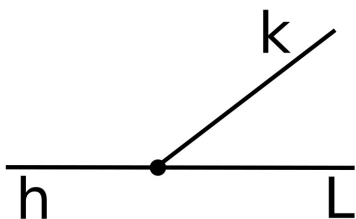
5) При побудові кругової діаграми по даним у відсотках розгорнутий кут відповідає 50%. Які градусні міри кутів на мал. 13, якщо вони відповідають 15%, 20%, 30%, 35%?

6) Один із кутів ABC і CBD (мал.14) на 50° більше за другий. Знайдіть ці кути.

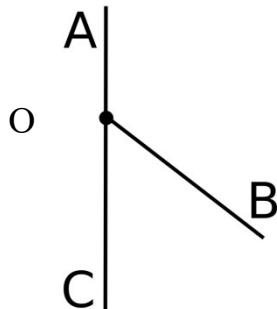
7) Один із кутів hk і kl на мал. 15, менше ніж інший в 3 рази. Знайдіть ці кути.

8) Різниця двох кутів AOB і COB на мал. 16 дорівнює 54° . Знайдіть ці кути.

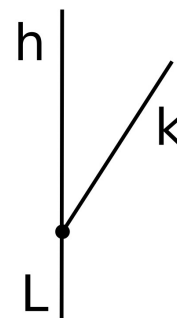
9) Градусні міри кутів hk і kl на мал. 17 відносяться як 1:4. Знайдіть ці кути.



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

10) На мал. 18 $BC \perp AD$, $\angle 2 = \angle 3$. Чи рівні кути 1 і 4?

11) На мал. 19 $KT \perp MP$, $\angle 3 = \angle 4$. Чи рівні кути 1 і 2?

12) Скільки розгорнутих і прямих кутів зображено на мал. 20? Назвіть які-небудь два гострих і два тупих кута.

13) Прямий кут AOB розділений променем OC на два кута, із яких один в 4 рази більше за другий. Знайдіть градусні міри цих кутів.

14) Скільки тупих, розгорнутих, прямих і гострих кутів зображено на мал. 21?

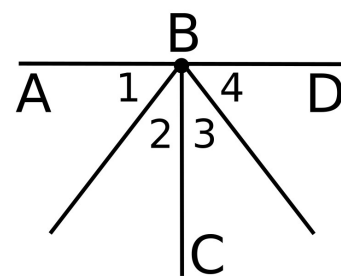
15) Кут AOB , дорівнює 124° , променем OC розділений на два кута, різниця яких дорівнює 34° . а) Знайдіть ці кути. б) Чому дорівнює кут утворений променем OC і бісектрисою кута AOB ?

16) Кут AOB , дорівнює 164° , променем OC розділений на два кута, градусні міри яких відносяться як 3:1. а) Знайдіть ці кути. б) Чому дорівнює кут утворений променем OC і бісектрисою кута AOB ?

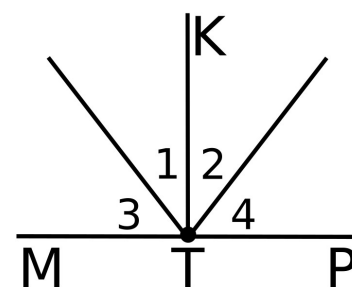
17) Скільки розгорнутих, прямих, гострих і тупих кутів зображено на малюнку 22? Запишіть в порядку зростання всі кути, які мають спільну сторону OB .

18) Промінь BM ділить розгорнутий кут ABC у відношенні 5:1, рахуючи від променя BA . Знайдіть кут ABK , якщо BK — бісектриса кута MBC .

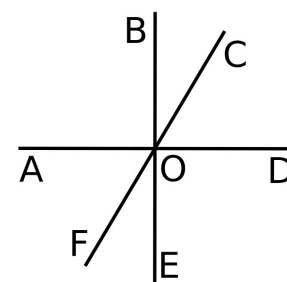
19) Промінь MF ділить розгорнутий кут EMH у відношенні 1:2, рахуючи від променя ME . Знайдіть величину кута LMH , якщо ML — бісектриса кута EMF .



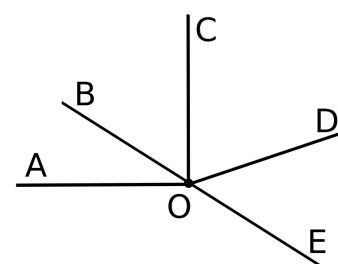
Мал. 18



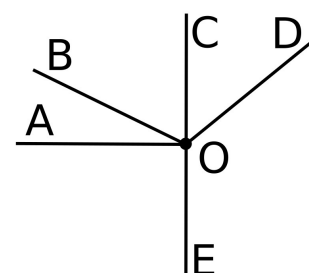
Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21

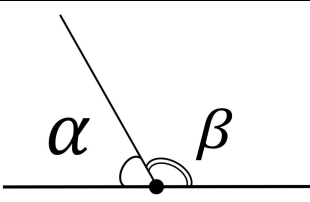
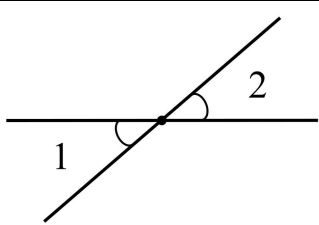
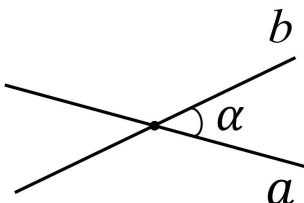
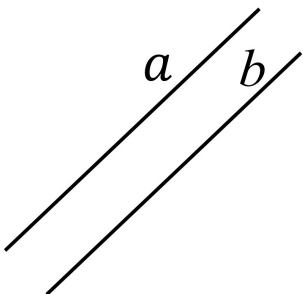
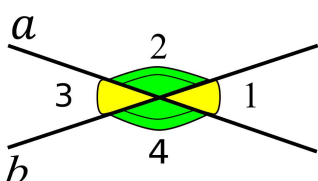
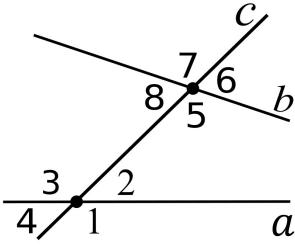
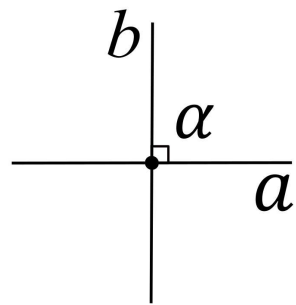
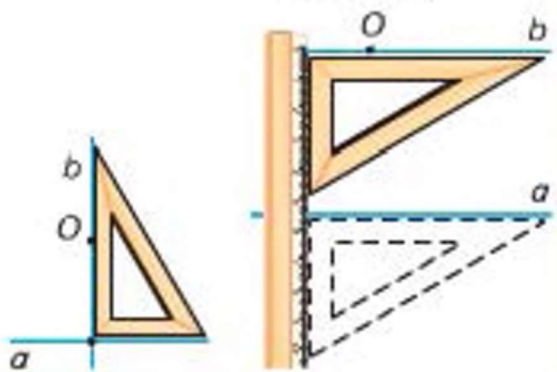


Мал. 22

Відповіді №1.4.:

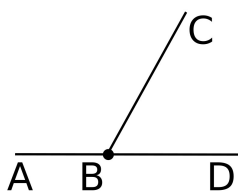
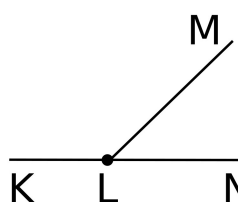
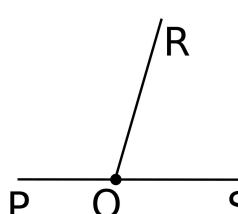
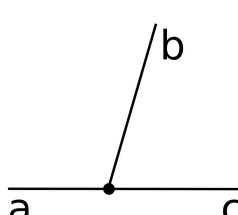
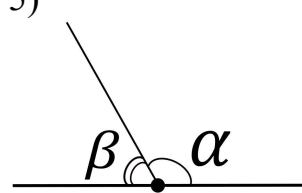
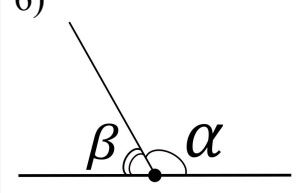
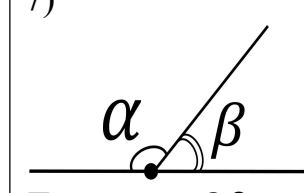
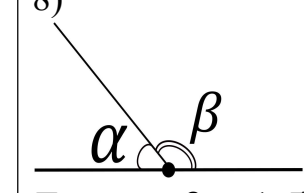
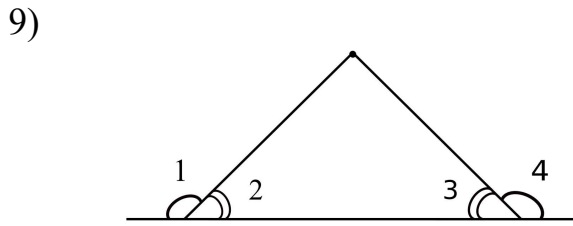
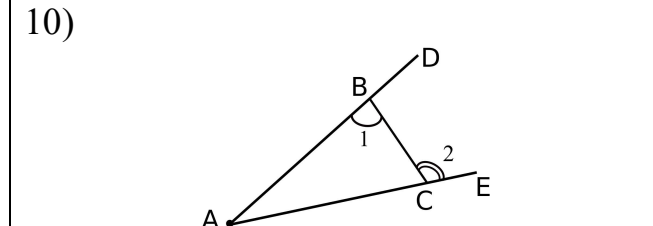
- 1) $41^\circ, 49^\circ$. 2) $39^\circ, 141^\circ, 39^\circ, 141^\circ$; 3) 360° . 4) 36° .
5) $54^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 126^\circ$. 6) $65^\circ, 115^\circ$. 7) $45^\circ, 135^\circ$. 8) $63^\circ, 117^\circ$.
9) $36^\circ, 144^\circ$. 10) так. 11) так. 12) 3 і 4.
13) $41^\circ, 49^\circ$. 14) 4, 1, 1, 4. 15) а) 45° і 79° ; б) 28° .
16) а) 123° і 41° ;
б) 41° .
17) 1,2,3,4; $\angle AOB, \angle BOC, \angle BOD, \angle BOE$.
18) 165° . 19) 150° .

1.2. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

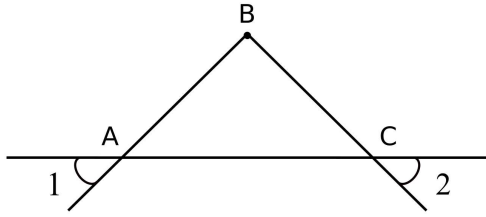
КУТИ		ПРЯМІ	
суміжні	вертикальні	перетинаються під кутом $\alpha < 90^\circ$	не перетинаються (паралельні)
 $\alpha + \beta = 180^\circ$	 $\angle 1 = \angle 2$		
між двома прямими	при двох прямих і січній	під кутом $\alpha = 90^\circ$ (перпендикулярні)	$a \parallel b$
<p><i>Вертикальні:</i> $\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$</p>  <p><i>Суміжні:</i> $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 3$ і $\angle 4$, $\angle 4$ і $\angle 1$</p>	<p><i>Внутрішні:</i> а) односторонні $\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$; б) різносторонні $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$</p>  <p><i>Відповідні:</i> $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$</p> <p><i>Зовнішні:</i> а) односторонні $\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$; б) різносторонні $\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$</p>	 $a \perp b$	<p>Через точку $\frac{\text{поза прямою або на прямій}}{\text{поза прямою}}$ можна провести єдину пряму, $\frac{\text{перпендикулярну}}{\text{паралельну}}$ даній</p> 

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ	
ОЗНАКИ	<p style="text-align: center;">ЯКЩО</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 60%;"> <p>при двох прямих і січній</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="width: 30%;"> <p>сума внутрішніх перпендикулярні односторонніх кутів прямої дорівнює 180°</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>внутрішні різносторонні кути рівні</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>відповідні кути рівні</p> </div> </div> </div> <div style="width: 35%;"> <p>дві прямі до третьої</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">ТО дані прямі паралельні</p>
ВЛАСТИВОСТІ	<p style="text-align: center;">ЯКЩО</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 60%;"> <p>дві прямі паралельні перпендикулярна і їх перетинає третя пряма (січна)</p> </div> <div style="width: 35%;"> <p>пряма до однієї з двох паралельних прямих</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">ТО</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="width: 30%;"> <p>сума внутрішніх перпендикулярна односторонніх кутів</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>внутрішні різносторонні кути</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>відповідні кути рівні</p> </div> <div style="width: 30%;"> <p>вона і до другої прямої</p> </div> </div>

№ 1.5. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками:

СУМІЖНІ КУТИ			
<p>1)</p> 	<p>Дано: $\angle ABC$ і $\angle CBD$ – суміжні, $\angle ABC - \angle CBD = 20^\circ$.</p> <p>Знайдіть: $\angle ABC$ і $\angle CBD$</p>		
<p>2)</p> 	<p>Дано: $\angle KLM$ і $\angle MLN$ – суміжні, $\angle KLM = 3\angle MLN$.</p> <p>Знайдіть: $\angle KLM$ і $\angle MLN$</p>		
<p>3)</p> 	<p>Дано: $\angle PQR$ і $\angle RQS$ – суміжні, $\angle RQS = 0,8\angle PQR$.</p> <p>Знайдіть: $\angle RQS$ і $\angle PQR$</p>		
<p>4)</p> 	<p>Дано: $\angle(ab)$ і $\angle(bc)$ – суміжні, $\angle(bc): \angle(ab) = 4:5$.</p> <p>Знайдіть: $\angle(ab)$ і $\angle(bc)$</p>		
СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ			
<p>5)</p>  <p>Дано: $\alpha - \beta = 30^\circ$. Знайти: α, β.</p>	<p>6)</p>  <p>Дано: $\alpha = 90^\circ + \beta$. Знайти: α, β.</p>	<p>7)</p>  <p>Дано: $\alpha = 3\beta$. Знайти: α, β.</p>	<p>8)</p>  <p>Дано: $\alpha: \beta = 1:5$. Знайти: α, β.</p>
<p>9)</p>  <p>Дано: $\angle 1 = \angle 4$. Довести: $\angle 2 = \angle 3$.</p>	<p>10)</p>  <p>Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Довести: 1) $\angle ABC = \angle ACB$; 2) $\angle DBC = \angle BCE$.</p>		

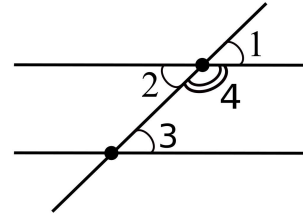
11)



Дано: $\angle 1 = \angle 2$.

Довести: $\angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$.

12)

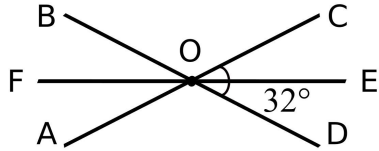


Дано: $\angle 2 = \angle 3$.

Довести: 1) $\angle 1 = \angle 3$;

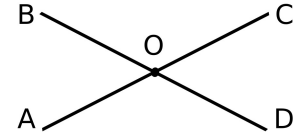
2) $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

13)



Знайти: $\angle BOC$.

14)



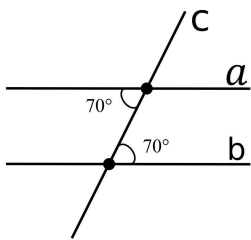
Дано: $\angle AOB = \frac{1}{8}(\angle BOC + \angle COD + \angle DOA)$.

Знайти: $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$.

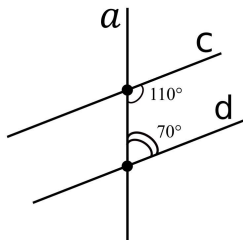
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

А) Знайдіть пари паралельних прямих (відрізків) та доведіть їх паралельність.

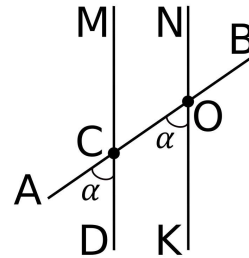
15)



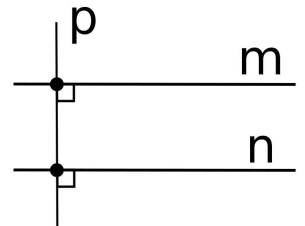
16)



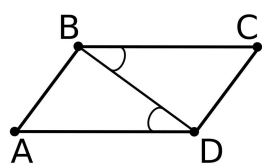
17)



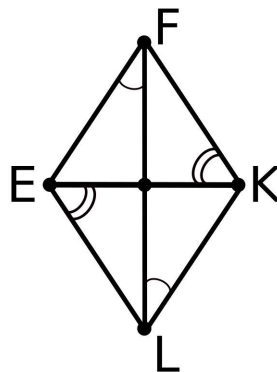
18)



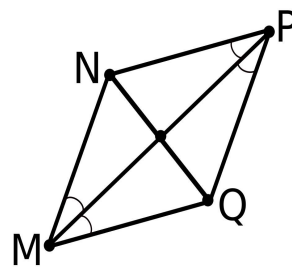
19)



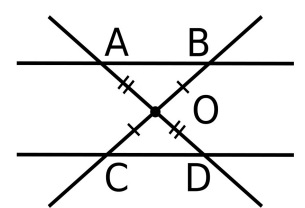
20)



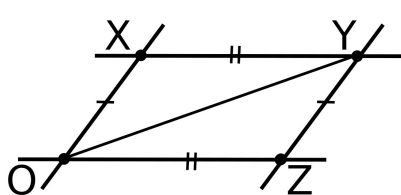
21)



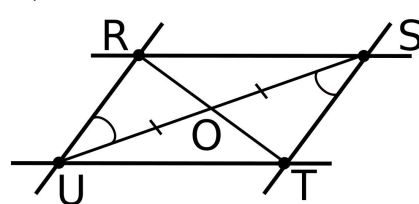
22)



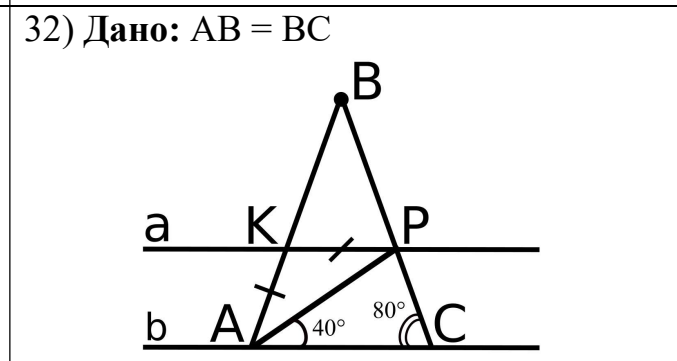
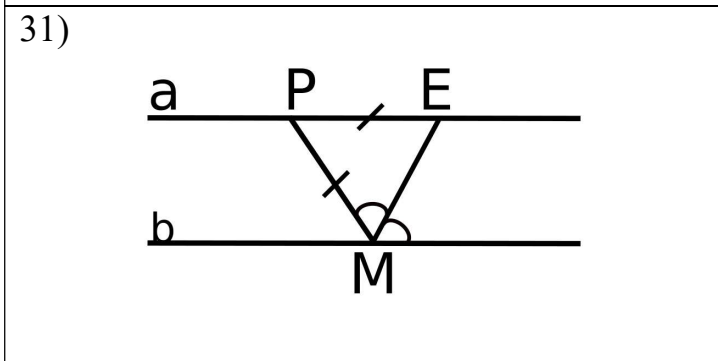
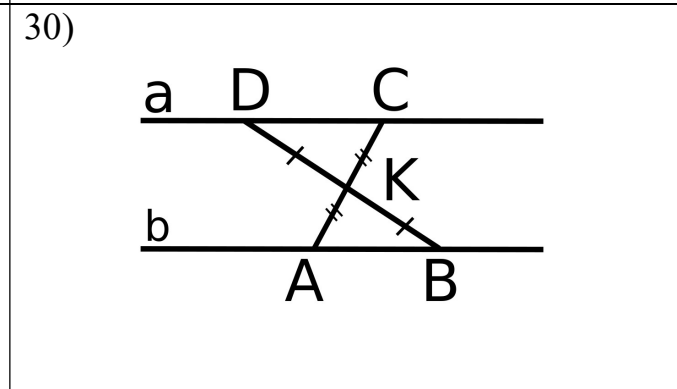
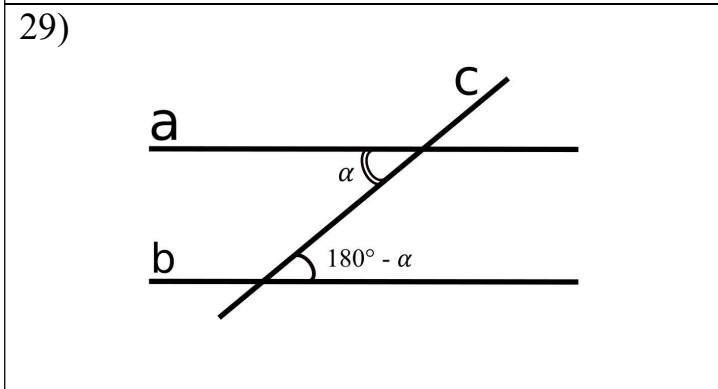
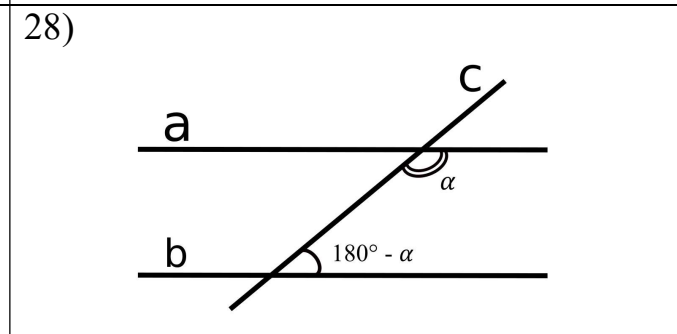
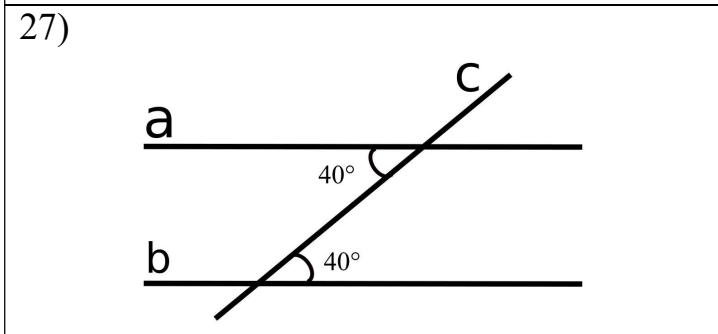
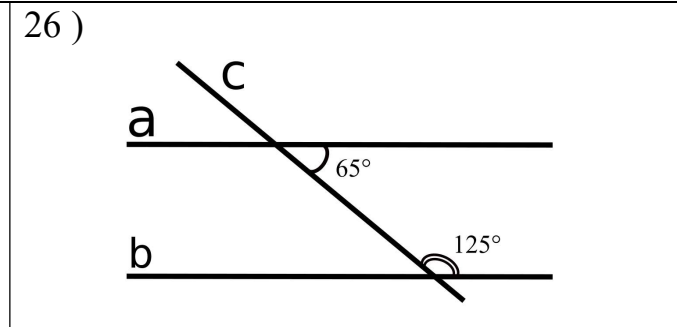
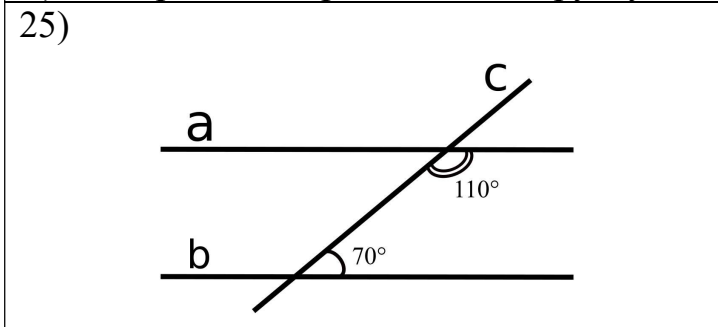
23)



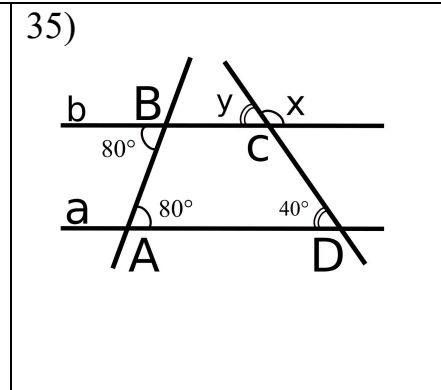
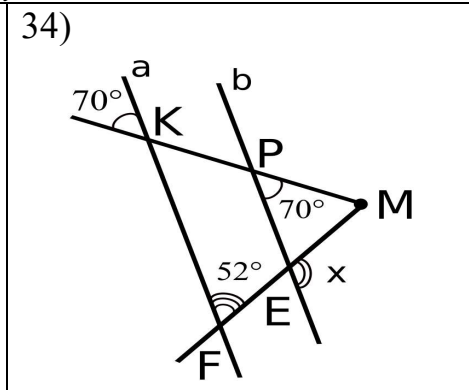
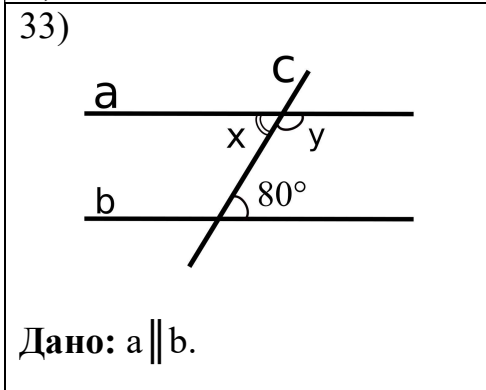
24)

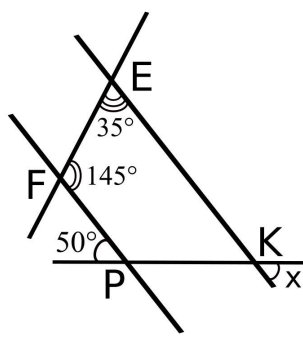
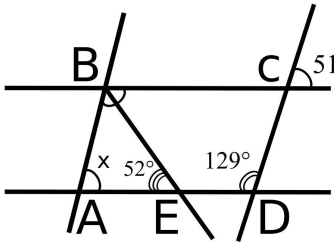
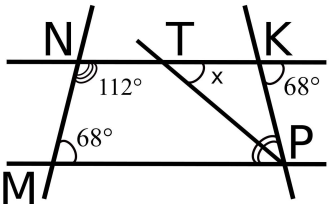
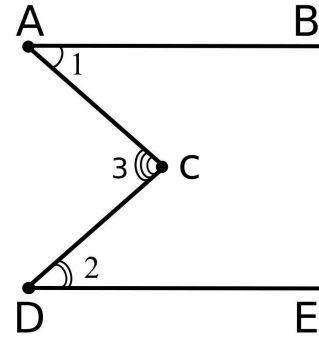
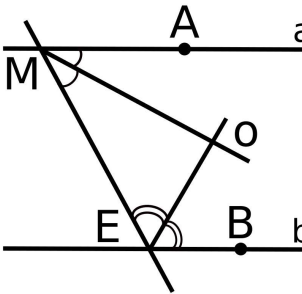
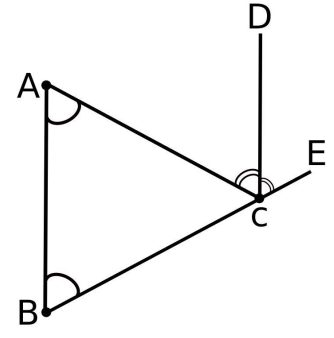
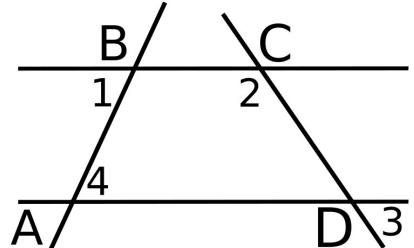
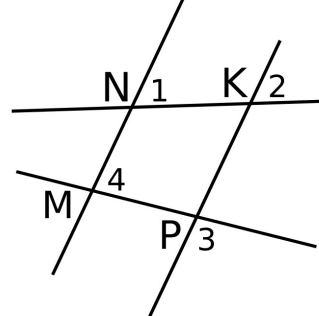
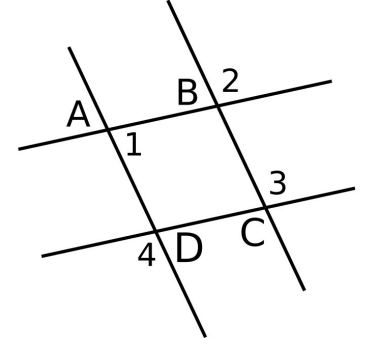
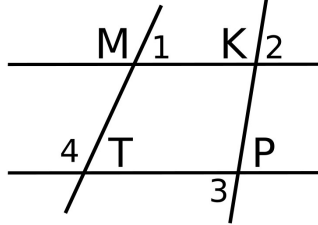
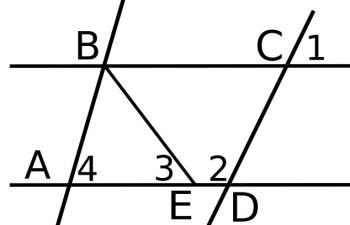
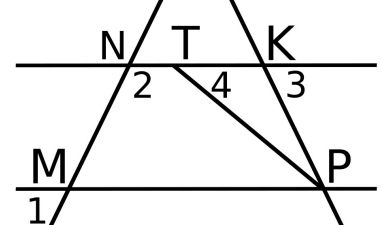


Б) Чи паралельні прямі a і b ? Обґрунтуйте відповідь.



В) У задачах 33-38 знайти x і y .

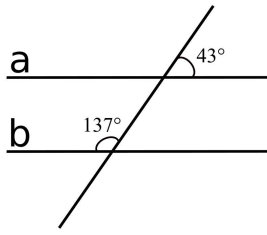


<p>36)</p> 	<p>37)</p>  <p>Дано: $\angle ABE = \angle CBE$.</p>	<p>38)</p> 
<p>39)</p>  <p>Дано: $AB \parallel DE$. Довести: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$.</p>	<p>40)</p>  <p>Дано: $a \parallel b$. Довести: $\angle MOE = 90^\circ$.</p>	<p>41)</p>  <p>Довести: $AB \parallel CD$.</p>
<p>42)</p>  <p>Дано: $\angle 1 = 67^\circ$, $\angle 2 = 127^\circ$, $\angle 4 = 67^\circ$ Знайти: $\angle 3$</p>	<p>43)</p>  <p>Дано: $\angle 1 = 73^\circ$, $\angle 3 = 92^\circ$, $\angle 2 = 73^\circ$. Знайти $\angle 4$.</p>	<p>44)</p>  <p>Дано: $\angle 1 = 82^\circ$, $\angle 2 = 98^\circ$, $\angle 4 = 102^\circ$. Знайти: $\angle 3$</p>
<p>45)</p>  <p>$\angle 1 = 63^\circ$, $\angle 2 = 77^\circ$, $\angle 4 = 117^\circ$ Знайти: $\angle 3$</p>	<p>46)</p>  <p>$\angle 1 = 51^\circ$, $\angle 2 = 129^\circ$, $\angle 3 = 52^\circ$, BE — бісектриса кута ABC. Знайдіть кут 4.</p>	<p>47)</p>  <p>$\angle 1 = \angle 3 = 68^\circ$, $\angle 2 = 112^\circ$, PT — бісектриса кута MPK. Знайдіть кут 4.</p>

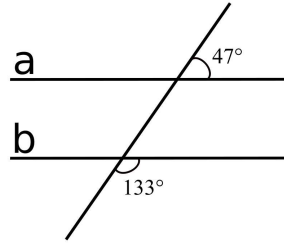
Відповіді:

№1.5

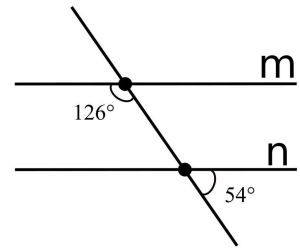
- 1) 100° і 80° . 2) 135° і 45° . 3) 80° і 100° . 4) 100° і 80° .
5) 105° , 75° . 6) 135° , 45° . 7) 135° , 45° . 8) 30° , 150° .
13) 148° . 14) 40° , 140° , 40° , 140° . 15) $a \parallel b$.
16) $c \parallel d$. 17) $DM \parallel KN$. 18) $m \parallel n$.
19) $BC \parallel AD, AB \parallel CD$. 20) $EF \parallel KL, LE \parallel FK$.
21) $NP \parallel QM, MN \parallel PQ$. 22) $AB \parallel CD$.
23) $OX \parallel YZ, ZO \parallel XY$. 24) $UR \parallel ST, RS \parallel TU$.
25) так. 26) так. 27) так. 28) так.
29) так. 30) так. 31) так. 32) так.
33) $x=80^\circ$, $y=100^\circ$. 34) $x=128^\circ$. 35) $x=140^\circ$, $y=40^\circ$. 36) $x=50^\circ$.
37) $x=76^\circ$. 38) $x=34^\circ$.
39) **вказівка:** через т.С провести пряму паралельну АВ
42) 53° . 43) 88° . 44) 102° . 45) 77° .
46) 76° . 47) 34° .



Мал. 23



Мал. 24

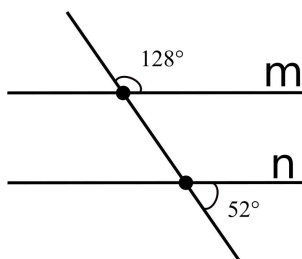


Мал. 25

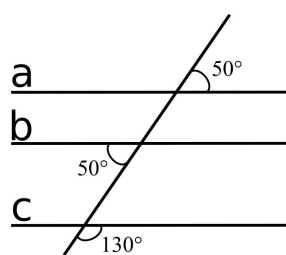
№ 1.6. Розв'яжіть задачі на тему: «Взаємне розміщення прямих на площині.

Паралельні прямі»

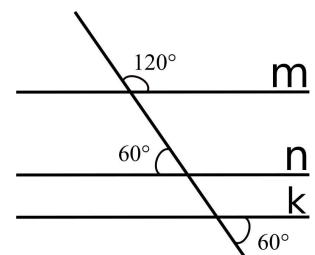
- 1) Чи паралельні прямі a і b , зображені на мал. 23?
- 2) Чи паралельні прямі a і b , зображені на мал. 24?
- 3) Чи паралельні промені m і n , зображені на мал. 25?
- 4) Чи паралельні промені m і n , зображені на мал. 26?
- 5) Чи паралельні прямі a і b , b і c , a і c , зображені на мал. 27?
- 6) Чи паралельні прямі m і n , m і k , n і k , зображені на мал. 28?
- 7) Прямі l_1, l_2, l_3 паралельні, а прямі AB і AC їх перетинають. Визначте кількість точок, кожної з яких належить хоча б двом з названих прямих.
- 8) Відомо, що $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ і $a \parallel b$, причому l_1 і a не паралельні. Визначте кількість точок перетину цих прямих.
- 9) Чи можуть на паралельних прямих лежати: а) вершини трикутника; б) сторони трикутника?
- 10) Чи можуть на перпендикулярних прямих лежати: а) вершини трикутника; б) сторони трикутника?
- 11) Дві прямі перетинаються. Чи можна провести третю пряму, паралельну кожній із них? Поясніть відповідь.



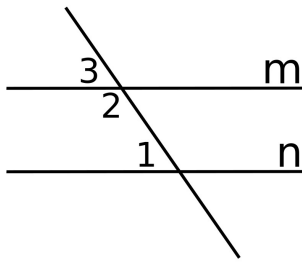
Мал. 26



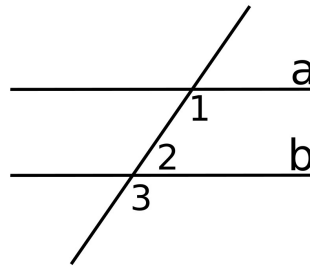
Мал. 27



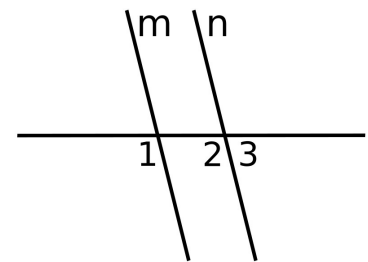
Мал. 28



Мал. 29



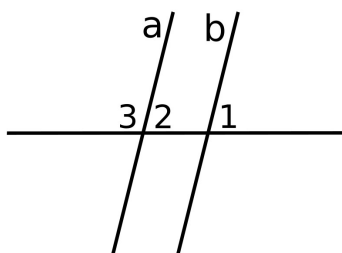
Мал. 30



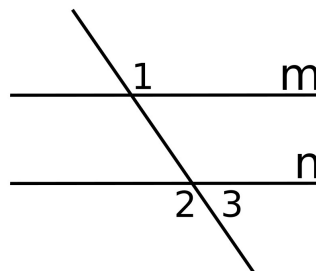
Мал. 31

№ 1.7. Розв'яжіть задачі на тему: «Властивості паралельних прямих»

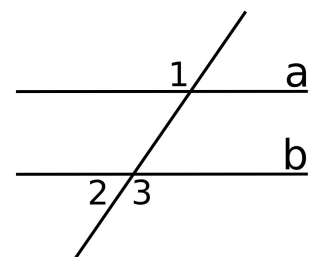
- 1) На мал. 29 прями m і n паралельні, $\angle 1 = 65^\circ$. Знайдіть кути 2 і 3.
- 2) На мал. 30 прями a і b паралельні, $\angle 1 = 132^\circ$. Знайдіть кути 2 і 3.
- 3) На мал. 31 прями m і n паралельні, $\angle 1 = 140^\circ$. Знайдіть кути 2 і 3.
- 4) Даний кут ABC , який дорівнює 76° . Через точку A проведена пряма, паралельно прямий BC і яка перетинає бісектрису кута в точці M . Знайдіть кути трикутника ABM .
- 5) На мал. 32 прями a і b паралельні, $\angle 1 = 74^\circ$. Знайдіть кути 2 і 3.
- 6) На мал. 33 прями m і n паралельні, $\angle 1 = 111^\circ$. Знайдіть кути 2 і 3.
- 7) На мал. 34 прями a і b паралельні, $\angle 1 = 131^\circ$. Знайдіть кути 2 і 3.
- 8) Поза кутом MOP проведенні паралельні промені MT і PK . Знайдіть кут MOP , якщо $\angle OMT = 15^\circ$, $\angle OPK = 31^\circ$.
- 9) В середині кута ABC проведенні паралельні промені AM і CK . Знайдіть кут ABC , якщо $\angle MAB = 140^\circ$, $\angle KCB = 131^\circ$.
- 10) Через точку M бісектриси кута ABC , який дорівнює 94° , проведена пряма, паралельна прямий AB і яка перетинає сторону BC в точці K . Знайдіть кути трикутника BMK .



Мал. 32



Мал. 33

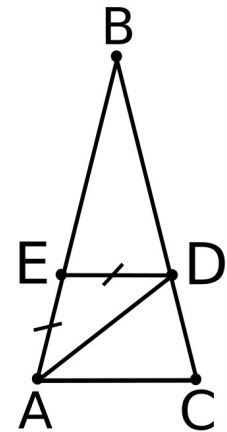


Мал. 34

11) Через вершину A трикутника ABC проведена пряма, паралельна BC . Які кути при вершині A дорівнюють кутам трикутника ABC ?

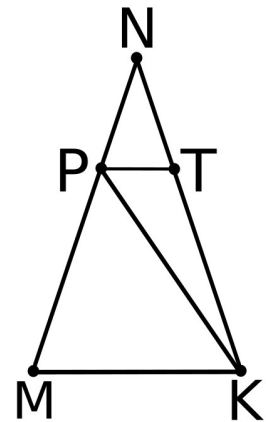
12) Чи правильне твердження: якщо при перетині двох прямих третьою утворилося рівно дві пари рівних гострих кутів, то ці дві прямі паралельні?

13) На мал. 35 $AB = BC$, $ED = AE$, $\angle C = 80^\circ$, $\angle DAC = 40^\circ$. Доведіть, що прямі ED і AC паралельні. Знайдіть кут BED .



Мал. 35

14) На мал. 36 $PN = NT$, PK — бісектриса кута MPT , $\angle NPT = 70^\circ$, $\angle PKM = 55^\circ$. Доведіть, що прямі PT і MK паралельні. Знайдіть кут PKT .



Мал. 36

15) Прямі a і b паралельні прямій c . Доведіть, що пряма, яка перетинає пряму a , перетинає також і пряму b .

16) Дві паралельні прямі перетинає третя. Скільки при цьому може бути кутів: 1) гострих; 2) тупих; 3) прямих?

17) За якої умови рівні всі кути, що утворені при перетині двох паралельних прямих третьою?

18) Чи правильне твердження: якщо при перетині двох прямих третьою утворилося рівно два кути по 91° , то прямі не паралельні?

19) Дві паралельні прямі перетинає третя так, що один з утворених кутів становить $1\frac{1}{3}$ прямого кута. Під яким кутом його бісектриса перетинає другу з паралельних прямих?

20) Доведіть, що бісектриси двох кутів з паралельними сторонами паралельні або перпендикулярні між собою.

21) З точки A виходять три промені. На одному з крайніх променів взято точку K , через яку проведено пряму, що перетинає середній промінь у точці M . Відомо, що $KM = AK$. За якої умови пряма KM буде паралельною іншому з крайніх променів?

22) На одній стороні кута O відкладено відрізки OA_1 і A_1A_2 , а на другій – відрізки $OB_1 = OA_1$ і $B_1B_2 = A_1A_2$. Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

23) Чи можна вважати, що два відрізка паралельні, якщо у них немає ні одної спільної точки?

24) Пряма a перпендикулярна прямій l , а пряма b не перпендикулярна прямій l . Чи паралельні прямі a і b ?

25) Прямі a і b перетинають пряму l під рівними гострими кутами. Чи паралельні прямі a і b ?

Відповіді:

№ 1.6

- | | | | |
|-------------------|--------------------|---------|---------|
| 1) так. | 2) так. | 3) так. | 4) так. |
| 5) так. | 6) так. | 7) 7. | 8) 6. |
| 9) 1) так. 2) ні. | 10) 1) ні. 2) так. | 11) ні. | |

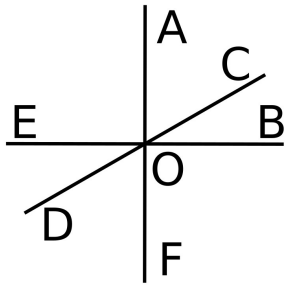
№ 1.7

- | | | | |
|-------------------------------|--|-------------------------------|--|
| 1) 115° і 65° . | 2) 48° і 132° . | 3) 140° і 40° . | 4) 38° , 38° , 104° . |
| 5) 74° і 106° . | 6) 111° і 69° . | 7) 49° і 131° . | 8) 46° . |
| 9) 91° . | 10) 47° , 47° , 86° . | 12) так. | 13) 80° . |
| 14) 15° . | 16) 1) 4. 2) 4. 3) 8. | 18) так. | 19) 60° . |
| 23) ні. | 24) ні. | 25) ні. | |

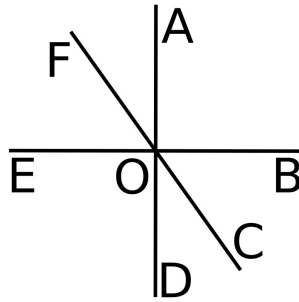
№ 1.8. Розв'яжіть задачі на тему: «Перпендикулярні прямі».

1) Через точку O проходять три прямі. Один із утворених кутів — прямий. Скільки, крім нього, утворилося прямих кутів при точці O ?

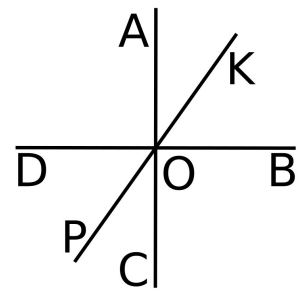
2) Два кута мають спільну вершину, а їх відповідні сторони взаємно перпендикулярні. Чи можуть ці кути бути вертикальними?



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39

3) Чи можна за допомогою шаблона кута в 27° побудувати дві взаємно перпендикулярні прямі?

4) Бісектриси двох кутів, які мають спільну сторону, взаємно перпендикулярні. Чи є ці кути суміжними?

5) Прямі a_1 і b_1 містять бісектриси кутів, що утворилися при перетині прямих a і b . Чи містять прямі a і b бісектриси кутів, які утворилися при перетині прямих a_1 і b_1 ?

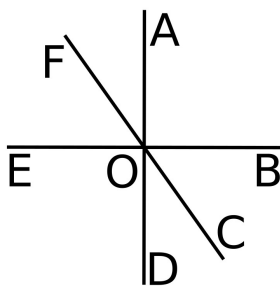
6) Через точку O прямої AB в одній півплощині побудували промені OC і OD , так, що $\angle AOC = \angle BOD$. Доведіть, що бісектриса кута COD перпендикулярна AB .

7) На мал. 37 $AF \perp EB$, $\angle COB = 20^\circ$. Знайдіть кут DOF ; знайдіть пару тупих вертикальних кутів.

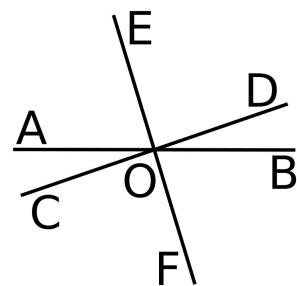
8) На мал. 38 $AD \perp BE$, $\angle EOF = 60^\circ$. Знайдіть кут DOC ; назвіть пару тупих вертикальних кутів.

9) На мал. 39 $AC \perp DB$, OK — бісектриса кута AOB . Чи може кут POC дорівнювати $44^\circ 59'$; знайдіть відношення величин кутів DOK і POB .

10) На мал. 40 $AD \perp BE$, OC — бісектриса $\angle DOB$. Чи може $\angle FOE = 45^\circ 1'$.



Мал. 40



Мал. 41

11) Прямі АВ, CD і EF перетинаються в точці О так, що промінь ОЕ — бісектриса кута АOD, який дорівнює 150° . Знайдіть кут АOF (мал. 41). Чи є на рисунку перпендикулярні прямі?

Відповіді:

№ 1.8

1) 3. 2) так. 3) так. 4) так. 5) ні.

6) **вказівка:** ОК –бісектриса кута COD. Показати, що $\angle AOK = \angle BOK$

7) 15° , $\angle DOA$ і $\angle FOC$. 8) 30° , $\angle FOD$ і $\angle COA$. 9) ні, 1:1.

10) ні. 11) 105° , ні.

1.3. ЗАДАЧІ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ.

- 1) В шкільній майстерні учень виготовив лінійку і для перевірки її якості відмітив на аркуші паперу точки А і В, потім двічі з'єднав їх лініями, по-різному прикладаючи лінійку. В одному випадку точки А і В були над, в другому - під лінійкою. Оскільки обидві лінії не співпали, учень вирішив, що лінійка виготовлена не якісно. Чи правий він?
- 2) Визначте величину кута між годинною і хвилинною стрілками:
 - а) в 10 год; б) в 14 г 30 хв; в) в 16 г 15 хв; г) в 19 г 20 хв.
- 3) О котрій годині годинна і хвилинна стрілки годинника утворюють прямий кут?
- 4) Скільки разів на добу годинна і хвилинна стрілки годинника утворюють розгорнутий кут?
- 5) Скільки разів на добу годинна і хвилинна стрілки годинника утворюють прямий кут?
- 6) Стрілки циферблата годинника не співпадають, однак якщо замінити їх місцями, то вони займуть узгоджене положення. Чи можливо це?
- 7) Чи можливо без допомоги транспорту або іншими кутомірячими інструментами побудувати кут в 1° , маючи шаблон кута 13° ? Розв'яжіть задачу за умови, що маємо шаблон кута 17° .
- 8) В одній напівплощині з границею АВ побудували трикутники, які не перекривають один одного з спільною вершиною А. У всіх трикутників кути при цій вершині по 24° . Скільки таких трикутників можна побудувати.
- 9) Від А до F по прямолінійній дорозі 35 км, зупинки автобуса розміщені в точках В, С, D, Е. Знаючи, що $AC = 12\text{км}$, $BD = 11\text{км}$, $CE = 12\text{км}$, $DF = 16\text{км}$, знайдіть АВ, ВС, CD, DE, EF.
- 10) Пункти А, В, С, D, Е, F, G, Н послідовно розташовані вдовж прямолінійного шосе. Знайдіть відстань між кожними двома сусідніми пунктами з числа названих, знаючи, що $AD = 19\text{км}$, $BE = 21\text{км}$, $CF = 19\text{км}$, $DG = 20\text{км}$, $AF = 32\text{км}$, $CH = 30\text{км}$, $EH = 14\text{ км}$.
- 11) Як за допомогою шнура, натертого крейдою, відмітити на класній дошці пряму? Як користуються шнуром для проведення прямої муляри й теслі?
- 12) Як, не користуючись лінійкою, перевірити, чи по прямій відрізано аркуш; картон; фанеру?
- 13) Поясніть зміст таких речень: 1) затемнення Сонця відбувається тоді, коли Місяць займає положення між Сонцем і Землею; 2) затемнення Місяця відбувається тоді, коли Земля займає положення між Сонцем і Місяцем.
- 14) Чи лежить точка С на відрізку АВ, якщо:
 $AB = 10\text{ см}$, $AC = 45\text{ мм}$, $BC = 0,55\text{ дм}$;
 $BC = 41\text{ мм}$, $AC = 0,5\text{ дм}$, $AB = 9,6\text{ см}$?

- 15) Чи можуть точки А, В, С лежати на одній прямій, якщо:
 $AB = 3,7$ см, $BC = 42$ мм, $AC = 0,8$ дм;
 $AC = 90$ мм, $BC = 3,8$ см, $AB = 0,52$ дм?
- 16) Точки А, В, С і D послідовно розміщені на прямій, причому $AB = CD$. Доведіть, що відрізки AD і BC мають спільну середину.
- 17) Точки А, В і С лежать на прямій, точки М і N – середини відрізків АВ і АС. Доведіть, що $BC = 2 MN$.
- 18) Точки А, В і С лежать на прямій, $AB = 6$ см, $BC = 10$ см. Якою може бути довжина відрізка АС? Для кожного з можливих випадків зробіть малюнок.
- 19) На прямій дано два відрізка $OA = 8$ см і $OB = 4$ см. Знайдіть: 1) відстань між точками А і В; 2) відстань між точкою О і серединою М відрізка АВ.
- 20) Три школи розміщено по прямій лінії. Відстань між школами № 1 і № 2 – 5 км, а між школами № 1 і № 3 – 4 км. Якою може бути відстань між школами № 2 і № 3?
- 21) Від центра агрофірми до центра її відділення прокладають телефонну лінію. Для цього через кожні 50 м слід поставити стовп. Скільки потрібно заготовити стовпів, якщо довжина лінії становить 4 км?
- 22) Через кожен метр 20 – метрового прямого паркану закопано стовп. 1) Скільки закопано стовпів? 2) Яка відстань між першим стовпом від початку і п'ятим – від кінця? 3) Десятим – від початку і десятим – від кінця?
- 23) На карті Києва, виконаній у масштабі 1:30000, довжина кварталу: 1) між вулицями Хрещатик і Пушкінською дорівнює 2 см, 2) між вулицями Липською та Шовковичною дорівнює 1,5 см. Яка довжина цих кварталів?
- 24) Майстерня має довжину 44 м і ширину – 24 м. Посередині коротшої стіни розташовано двері шириною 4 м, а довша стіна має п'ять вікон з рівними простінками між ними. Ширина кожного вікна дорівнює 4 м. Накресліть план майстерні в масштабі 1:400.
- 25) Вимірявши два відрізки в деяких одиницях довжини, ви одержали, що один з них довший за другий удвічі. Потім вирішили порівняти їх довжини точніше і для цього зменшили одиницю довжини в 10 разів (наприклад, замість 1 см взяли 1 мм). Чи досягли ви мети?
- 26) На аркуші паперу позначено дві точки А і В. Як треба зігнути цей аркуш, щоб поділити відрізок АВ навпіл?

- 27) Із 3-метрових і 4-метрових колод однакової товщини потрібно заготовити машину дров, розпилявши колоди на куски довжиною по 1 м. Які колоди вигідніше розпилувати?
- 28) Як можна швидко визначити приблизну кількість аркушів паперу, складеного у великий стос?
- 29) Потрібно виміряти лінійкою діаметр дуже тонкого дроту. Запропонуйте спосіб вимірювання.
- 30) Вам потрібно виміряти діагональ цеглини (відстань між найбільш віддаленими її вершинами). Запропонуйте спосіб вимірювання діагоналі лінійкою.
- 31) Виріжте із цупкого паперу смужку. Згинанням поділіть її на 3; 4; 6 рівних частин.
- 32) Як від куска тканини довжиною 8 м відрізати, не відмірюючи, 5 м?
- 33) Чи проходить промінь ОС між сторонами кута АОВ, якщо:
- $\angle AOC = 92^\circ$, $\angle BOC = 43^\circ$, $\angle AOB = 49^\circ$;
 $\angle AOC = 30^\circ$, $\angle BOC = 65^\circ$, $\angle AOB = 95^\circ$?
- 34) Як перевірити, чи є даний кут розгорнутим?
- 35) Якщо розгорнутий кут поділити на три рівні кути, то бісектриса середнього кута перпендикулярна до сторін розгорнутого кута. Доведіть.
- 36) Вася й Ваня в зошитах провели відрізок АВ, позначили на ньому точку О і побудували прямий кут КОМ. Вася з'ясував, що сума кутів АОК і ВОМ дорівнює 90° . Ваня ж наполягає на тому, що їх різниця дорівнює 90° . Хто з них правий?
- 37) На скільки градусів повернеться хвилинна стрілка за: 1) 20 хв; 2) 10 хв?
- 38) (Жарт.) Від аркуша паперу відрізали один з кутів. Скільки кутів матиме аркуш?
- 39) Як виміряти кут, вершина якого лежить за межами аркуша паперу?
- 40) На аркуші паперу проведіть пряму й позначте точку, яка не лежить на прямій, зігнувши аркуш, проведіть через дану точку пряму, перпендикулярну до даної прямої.
- 41) Як треба зігнути аркуш паперу, щоб провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій?

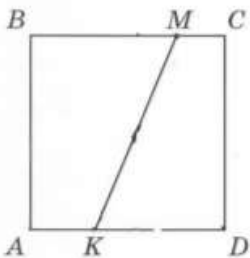
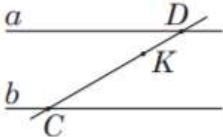
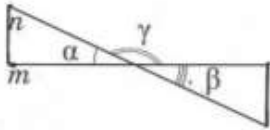
42) Як треба зігнути кусок тканини, щоб переконатися в тому, що два його краї паралельні?

Відповіді:

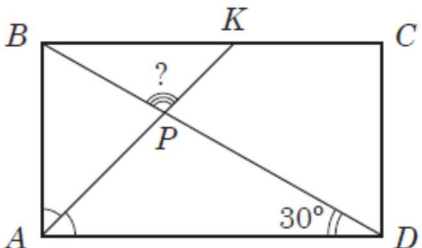
- | | | |
|---|------------------------------|---|
| 14) 1) так, 2) ні. | 15) 1) ні, 2) ні. | 18) 16 см або 4 см. |
| 19) 1) 12 см або 4 см, 2) 2 см або 6 см. | 20) 9 км або 1 км. | 21) 81. |
| 22) 1) 21, 2) 16м, 3) 2м. | 23) 1) 600м, 2) 450м. | 25) ні. |
| 25) ні. | 33) 1) ні, 2) так. | 36) Ваня. |
| | | 37) 1) 120° , 2) 60° . |

1.4. ВПРАВИ РІВНЯ ЗНО

Розв'яжіть задачі, які були запропоновані в завданнях ЗНО

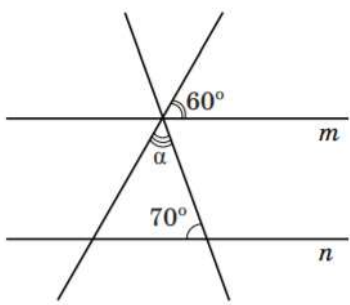
1.	<p>На рисунку зображено квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 12. На сторонах AD і BC квадрата вибрано точки K і M так, що $AK = 4$, $MC = 3$.</p>											
	<p>1. Визначте відстань між серединами відрізків AB і KM.</p> <p>2. Обчисліть довжину відрізка KM.</p>											
2.	<p>На відрізку AB вибрано точку M так, що довжина відрізка AM утричі більша за довжину MB. Визначте довжину відрізка AB, якщо $MB = 12$ см.</p>											
	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">А</th> <th style="padding: 5px;">Б</th> <th style="padding: 5px;">В</th> <th style="padding: 5px;">Г</th> <th style="padding: 5px;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">48 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">36 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">24 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">42 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">54 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	48 см	36 см	24 см	42 см	54 см	
А	Б	В	Г	Д								
48 см	36 см	24 см	42 см	54 см								
3.	<p>На рисунку зображено паралельні прямі a і b та січну CD. Знайдіть відстань між прямими a і b, якщо $CK = 5$ см, $KD = 2$ см, а відстань від точки K до прямої a дорівнює 1 см.</p>											
	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">А</th> <th style="padding: 5px;">Б</th> <th style="padding: 5px;">В</th> <th style="padding: 5px;">Г</th> <th style="padding: 5px;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">2,5 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">3 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">3,5 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">4 см</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">4,5 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	2,5 см	3 см	3,5 см	4 см	4,5 см	
А	Б	В	Г	Д								
2,5 см	3 см	3,5 см	4 см	4,5 см								
4.	<p>На рисунку зображено прямі m і n, що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ, якщо $\alpha + \beta = 50^\circ$.</p>											
	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">А</th> <th style="padding: 5px;">Б</th> <th style="padding: 5px;">В</th> <th style="padding: 5px;">Г</th> <th style="padding: 5px;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">310°</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">155°</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">145°</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">140°</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">130°</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	310°	155°	145°	140°	130°	
А	Б	В	Г	Д								
310°	155°	145°	140°	130°								
5.	<p>Точки A, B, C та D лежать в одній площині. Які з наведених тверджень є правильними?</p> <p>I. Якщо точка B належить відрізку CD, то $CB + BD = CD$.</p> <p>II. Якщо точка A не належить відрізку CD, то $CA + AD < CD$.</p> <p>III. Якщо відрізок CD перетинає відрізок AB в точці O під прямим кутом і $AO = OB$, то $AC = CB$.</p>											
	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">А</th> <th style="padding: 5px;">Б</th> <th style="padding: 5px;">В</th> <th style="padding: 5px;">Г</th> <th style="padding: 5px;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">лише I та II</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">лише I</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">лише I та III</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">лише II</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">I, II та III</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	лише I та II	лише I	лише I та III	лише II	I, II та III	
А	Б	В	Г	Д								
лише I та II	лише I	лише I та III	лише II	I, II та III								

6. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC і діагональ BD в точках K і P відповідно (див. рисунок). Визначте градусну міру кута BPK , якщо $\angle BDA = 30^\circ$.



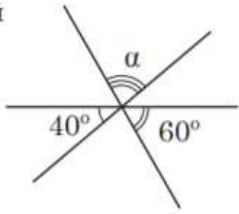
А	Б	В	Г	Д
105°	115°	75°	95°	125°

7. Усі зображені на рисунку прямі лежать в одній площині, прямі m і n є паралельними. Визначте градусну міру кута α .



А	Б	В	Г	Д
20°	50°	60°	70°	110°

8. Три прямі, розміщені в одній площині, перетинаються в одній точці (див. рисунок). Визначте градусну міру кута α .



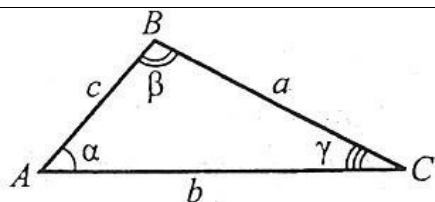
А	Б	В	Г	Д
80°	50°	90°	100°	70°

Відповідь: 1. 6,5; 13. 2. А. 3. В. 4. Б. 5. Б. 6. А. 7. Б. 8. А.

Розділ 2. ТРИКУТНИКИ

2.1. ТРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. РІВНІ І ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ.

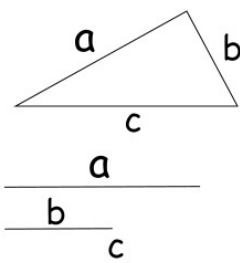
Означення трикутника



Трикутником називається геометрична фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки

Точки **A, B, C** – вершини трикутника **ABC**
кути $\angle\alpha, \angle\beta, \angle\gamma$ – кути трикутника **ABC**
відрізки **a, b, c** – сторони трикутника **ABC**

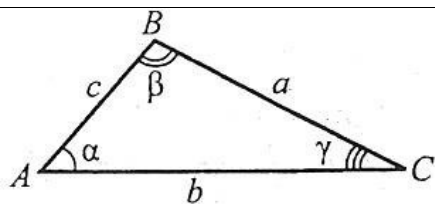
Нерівність трикутника



Будь-яка сторона трикутника менша за суму двох інших сторін, але більша за модуль їх різниці.

$$|a - b| < c < a + b$$

Сума кутів трикутника

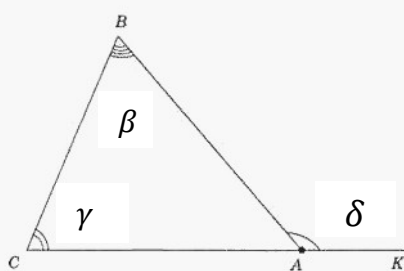


Сума кутів трикутника дорівнює 180° . Проти більшої сторони у трикутнику лежить більший кут і навпаки.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$b > a \leftrightarrow \beta > \alpha$$

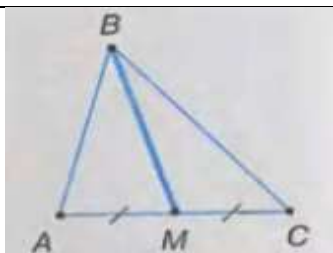
Зовнішній кут трикутника



Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

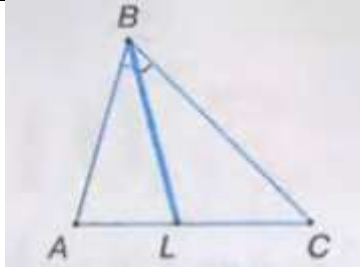
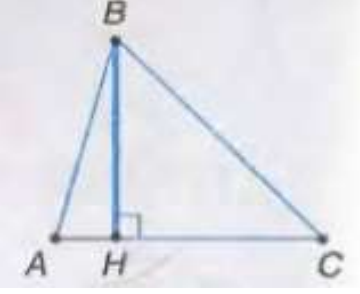
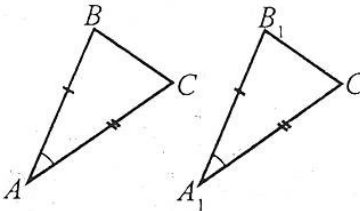
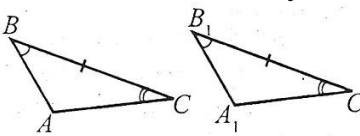
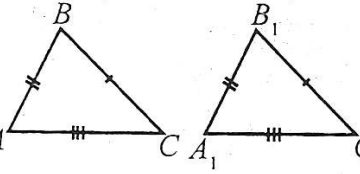
$$\delta = \gamma + \beta$$

Медіана, бісектриса, висота трикутника



Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

BM – медіана $AM = MC$

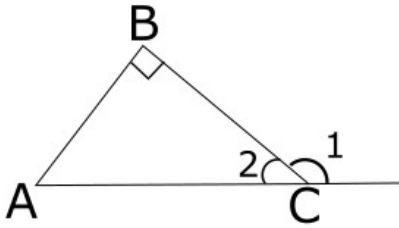
	<p>Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника.</p>	<p>BL - бісектриса $\angle ABL = \angle CBL$</p>
	<p>Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.</p>	<p>BH - висота, $BH \perp AC$</p>
<p>Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти. Їх позначають і маленькими буквами: медіану – m, бісектрису – l, висоту – h.</p>		
<p align="center">Ознаки рівності трикутників</p>		
<p>За двома сторонами і кутом між ними.</p> 	<p>Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника, відповідно рівні двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.</p>	<p>$AB = A_1B_1$ $AC = A_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$</p>
<p>За стороною і двома прилеглими до неї кутами.</p> 	<p>Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно рівні стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.</p>	<p>$BC = B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$ тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$</p>
<p>За трьома сторонами.</p> 	<p>Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.</p>	<p>$AB = A_1B_1$ $BC = B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$</p>
<p align="center">Ознаки подібності трикутників</p>		
<p>За двома пропорційними сторонами і кутом між ними.</p>	<p>Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то</p>	<p>$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ $\angle C = \angle C_1$ тоді $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$</p>

	такі трикутники є подібними.	
<p>За двома рівними кутами.</p>	Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники є подібними.	$\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$ тоді $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
<p>За трьома пропорційними сторонами.</p>	Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники є подібними.	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ тоді $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
Властивості медіани		
<p>Медіана</p> $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$	<ol style="list-style-type: none"> 1) Три медіани перетинаються в одній точці, яка є центром ваги трикутника. 2) Медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. 3) Кожна медіана ділить трикутник на два рівновеликих трикутника. 4) Три медіани ділять трикутник на 6 рівновеликих трикутників. 	
Властивості бісектриси		
<p>Бісектриса</p> $l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c}$	<ol style="list-style-type: none"> 1) Три бісектриси перетинаються в одній точці, яка завжди лежить всередині трикутника. Ця точка є центром вписаного кола. 2) Бісектриса ділить сторону трикутника на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b} \quad (a = a_1 + a_2)$ 3) Бісектриса є геометричним місцем точок рівновіддалених від сторін кута трикутника. 	

№2.1. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками

Обчисліть кути трикутника	
<p>1)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 + \angle 1 = 135^\circ$. Знайти $\angle 1$. 2) $\angle 2 = \angle 1 + 16^\circ, \angle 3 = 100^\circ$. Знайти $\angle 2$. 3) $\angle 3 = 2(\angle 1 - \angle 2)$. У скільки разів $\angle 1$ більший за $\angle 2$?

2)

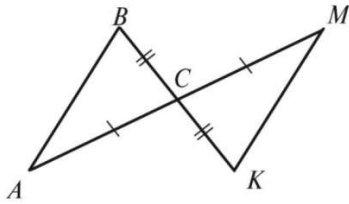


$$\angle B = 90^\circ$$

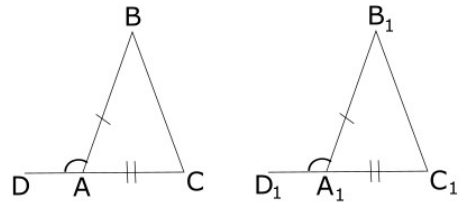
- 1) $\angle 1 = 3\angle A$. Знайти $\angle A$.
- 2) $2\angle A = \angle 1 - 50^\circ$. Знайти $\angle A$.
- 3) $AC = 2AB$. Знайти $\angle 1$. (не \exists)

Використайте одну із ознак рівності трикутників для доведення рівності кожної пари трикутників, або їх елементів

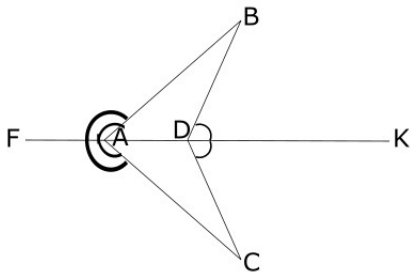
3)



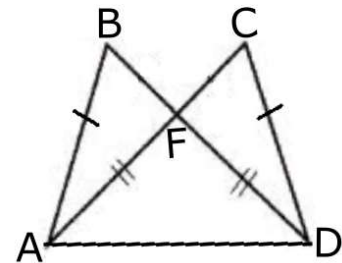
4)



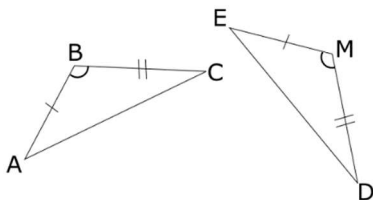
5)



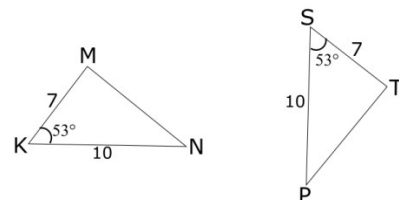
6)



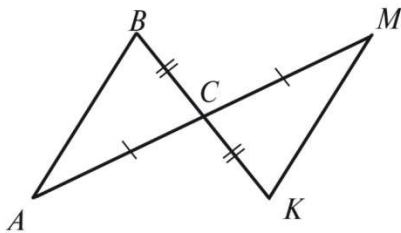
7)



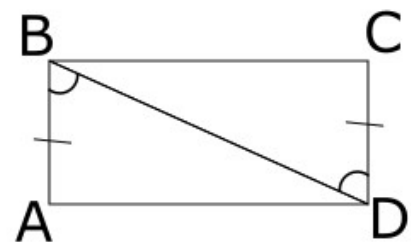
8)



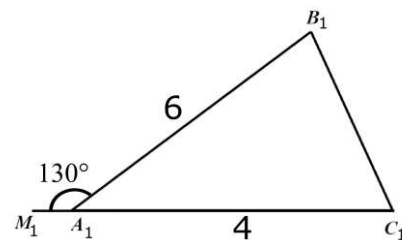
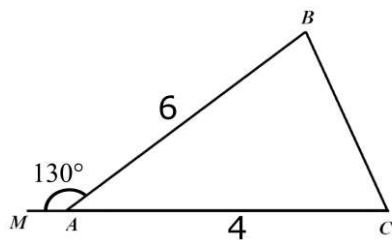
9)



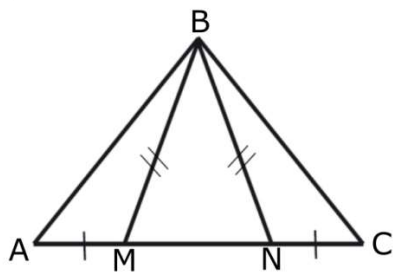
10)



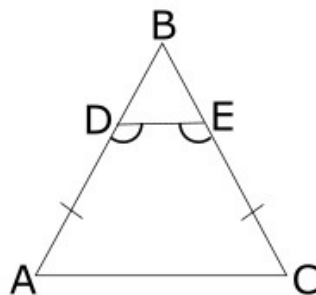
11)



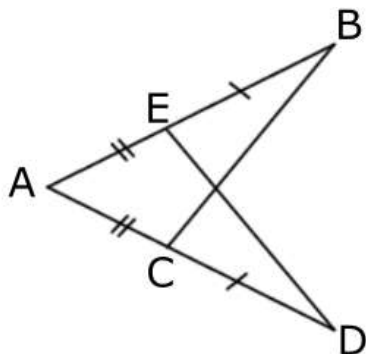
12) $AM = CN$, $BN = BM$.
Доведіть, що $AB = BC$.



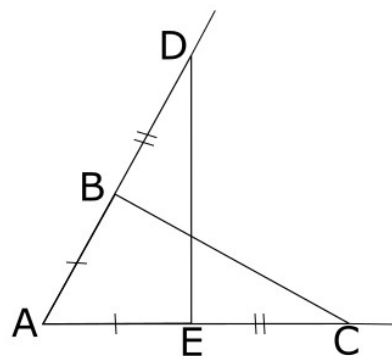
13) $AD = CE$, $\angle D = \angle E$.
Доведіть, що $\triangle ABC$ - рівнобедрений.



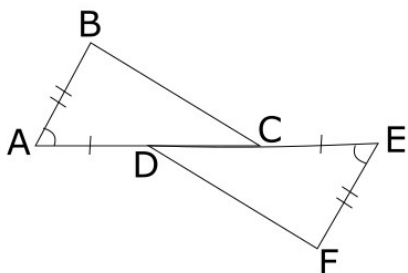
14) $AE = AC$, $AB = AD$, $\angle A$ - спільний.
Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADE$.



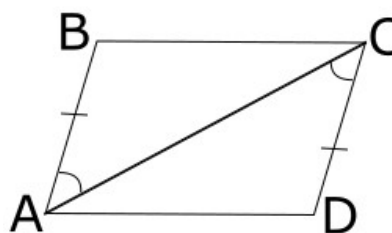
15) Обґрунтуйте чи рівні відрізки BC і DE



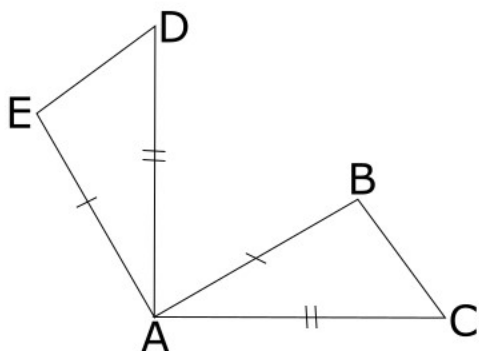
16) Обґрунтуйте чи рівні трикутники ABC і EFD



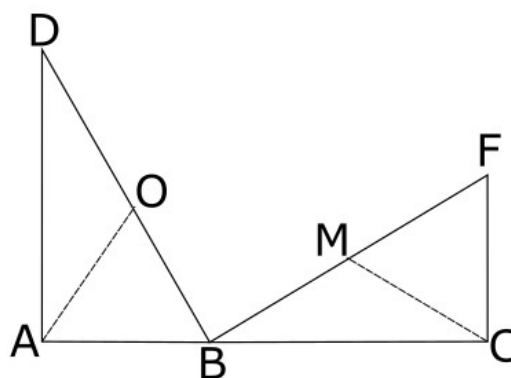
17) Обґрунтуйте чи рівні трикутники ABC і CDA



18) Чи рівні відрізки BC і DE?

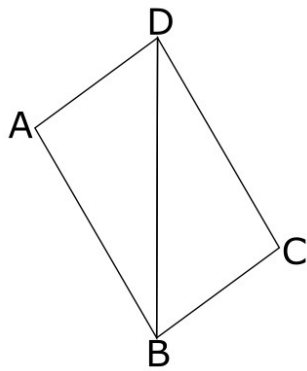


19) $\angle ACF = \angle CAD = 90^\circ$, $AD = BC$,
 $CF = AB$ Доведіть, що в трикутниках
 ABD і CFB медіани AO і CM рівні

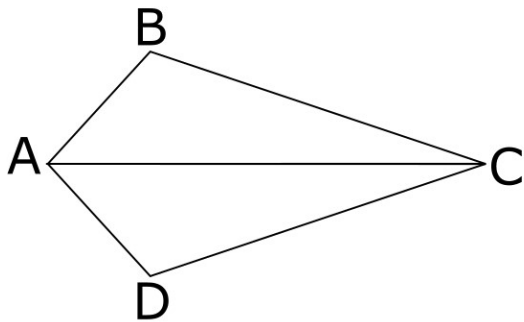


20) $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle ABD = 27^\circ$.
Знайдіть градусну міру кута BDC.

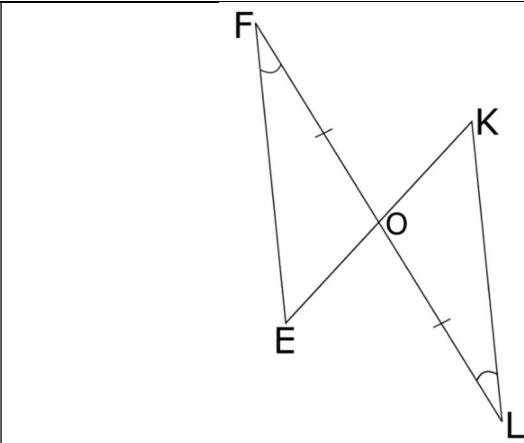
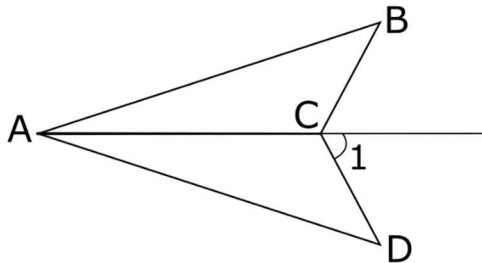
21) $FO = OL$, $\angle EFO = \angle OLK$.
Доведіть, що $FE = KL$.



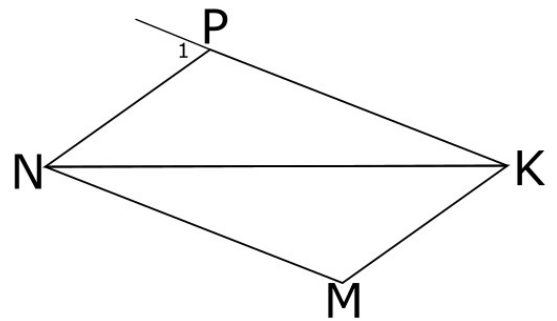
22) $AB = AD, BC = CD, \angle ACD = 19^\circ$.
Знайдіть градусну міру кута ACB .



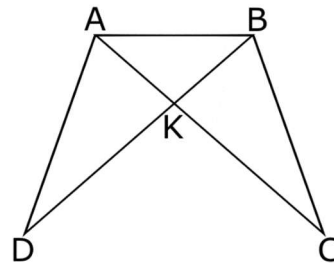
24) $AB = AD, BC = CD, \angle ACB = 121^\circ$.
Знайдіть $\angle 1$.



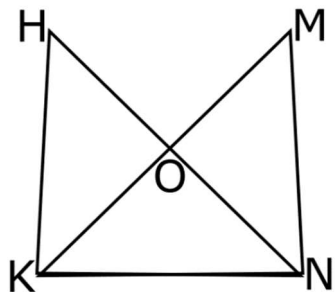
23) $NP = MK, MN = PK, \angle NML = 137^\circ$.
Знайдіть $\angle 1$.



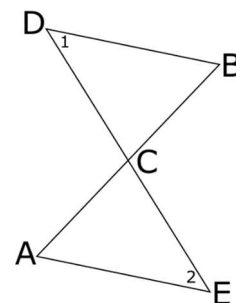
25) $\angle DAB = \angle ABC, AK = KB$.
Доведіть, що $\angle ADB = \angle BCA$.



26) На рис. 2.16 $\angle HKN = \angle MNK, KO = ON$. Доведіть, що $\angle KHN = \angle KMN$.



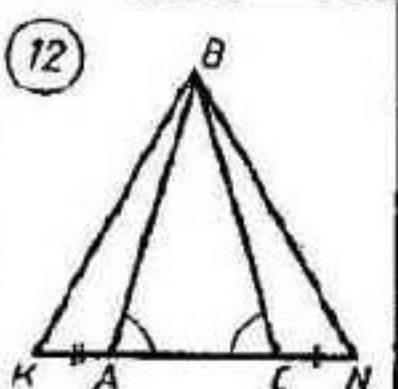
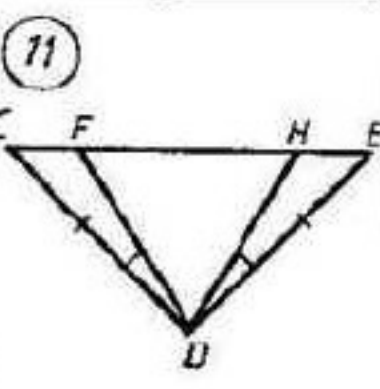
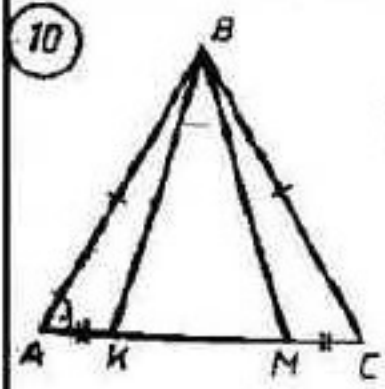
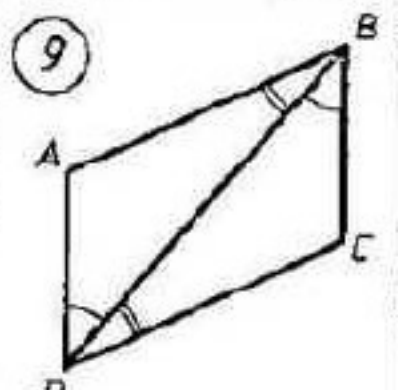
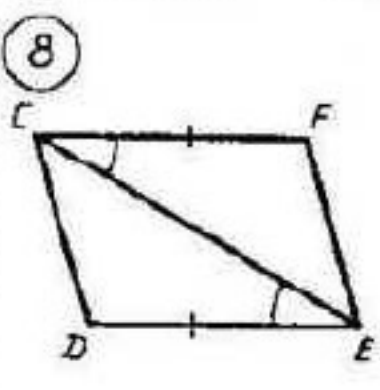
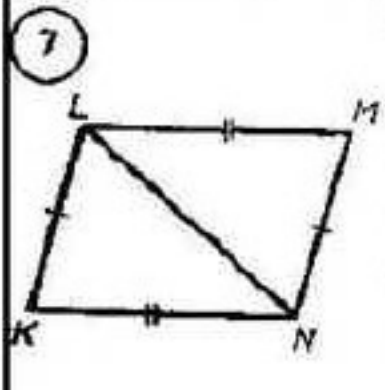
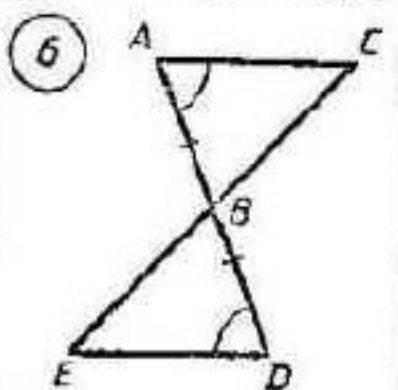
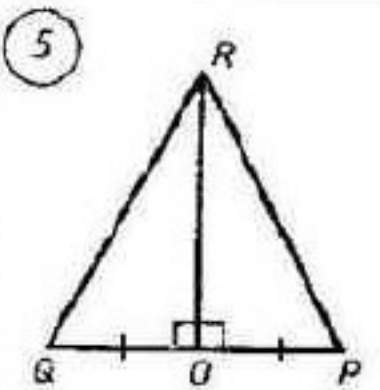
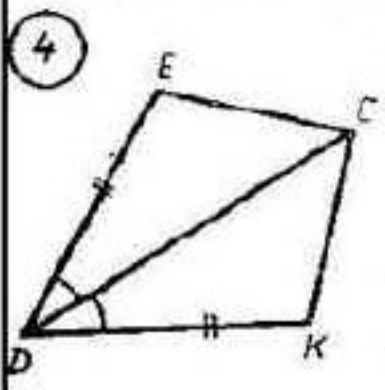
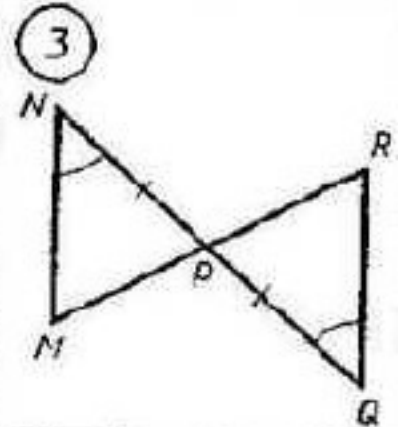
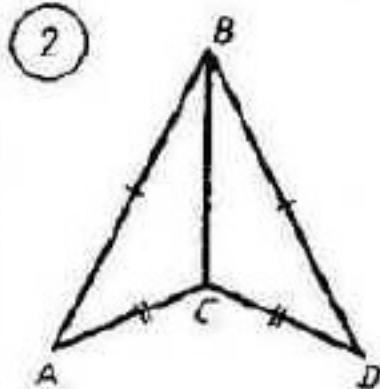
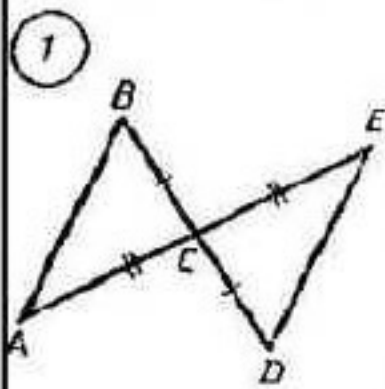
27) $\angle 1 = \angle 2$ і $DC = CE$. Доведіть, що $BC = AC$.



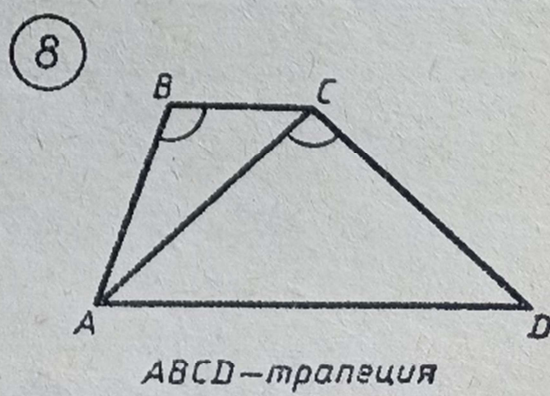
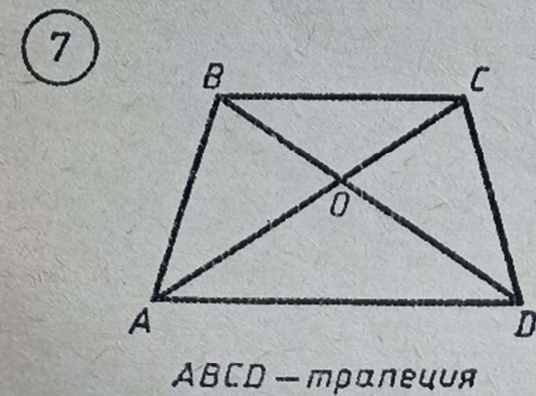
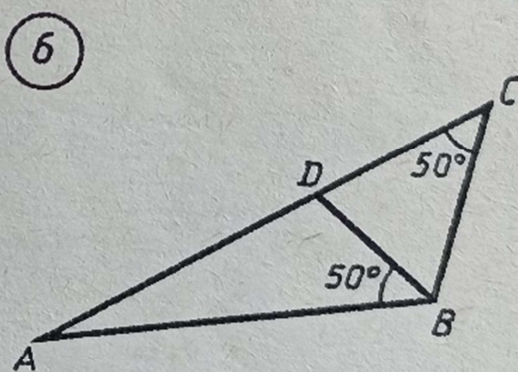
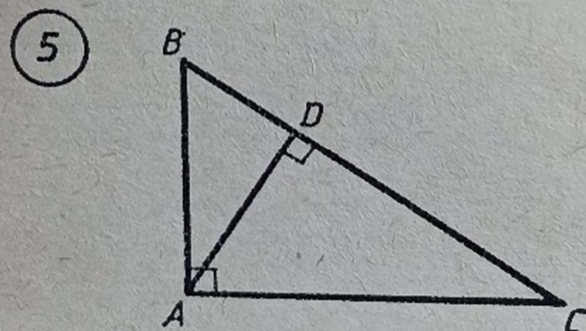
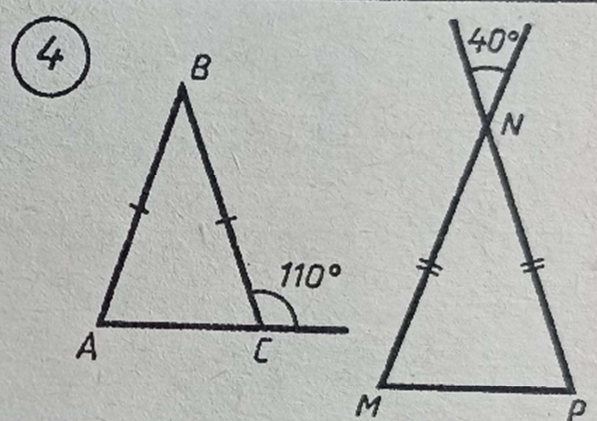
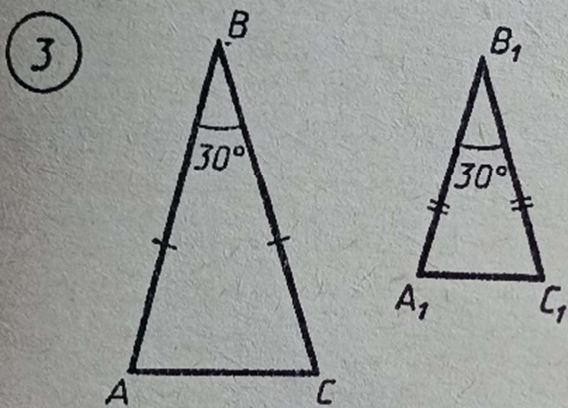
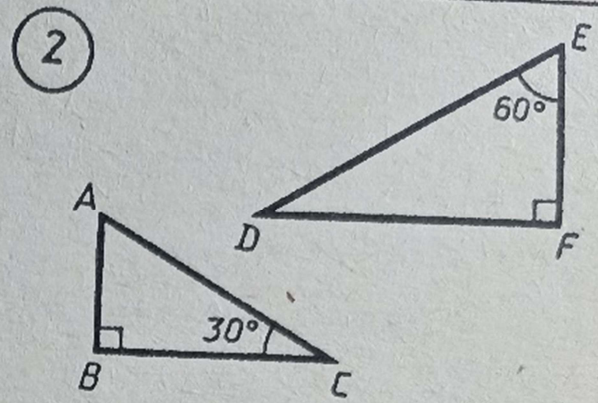
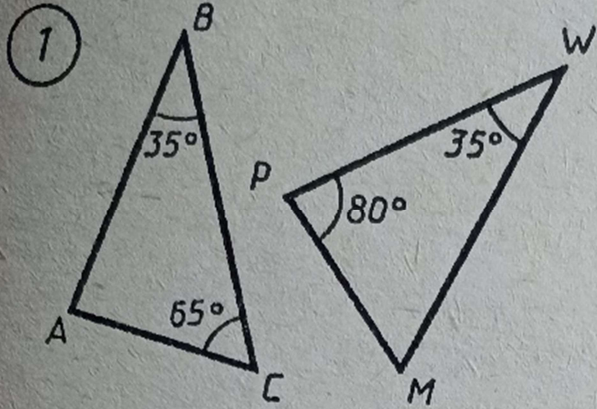
№ 2.1. Відповіді

1) $45^\circ; 58^\circ$; в 3 рази. 2) $45^\circ; 40^\circ$. 20) 27⁰. 22) 19° . 23) 43° . 24) 59° .

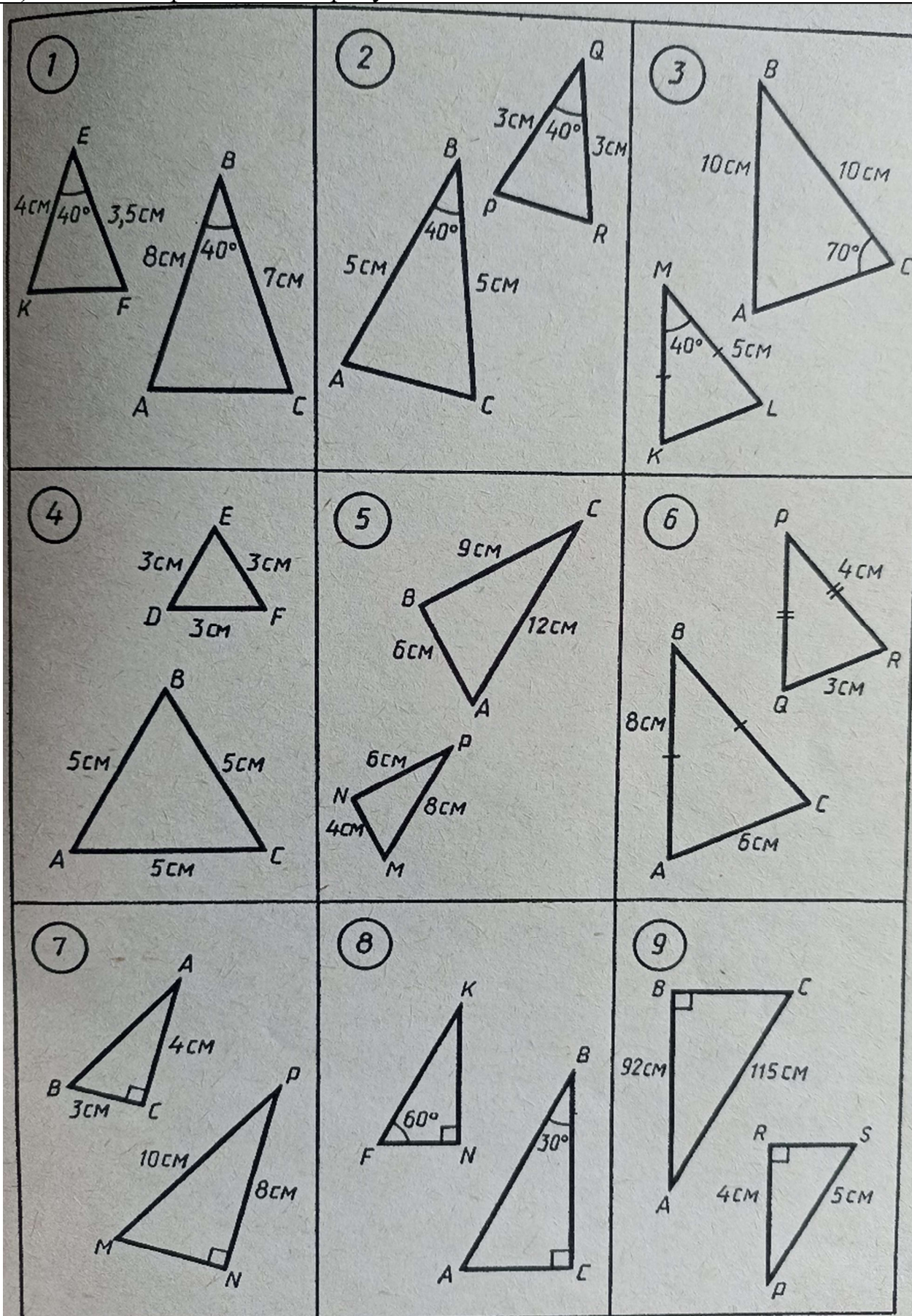
№ 2.2. А) Знайдіть пари рівних трикутників і доведіть їх рівність.



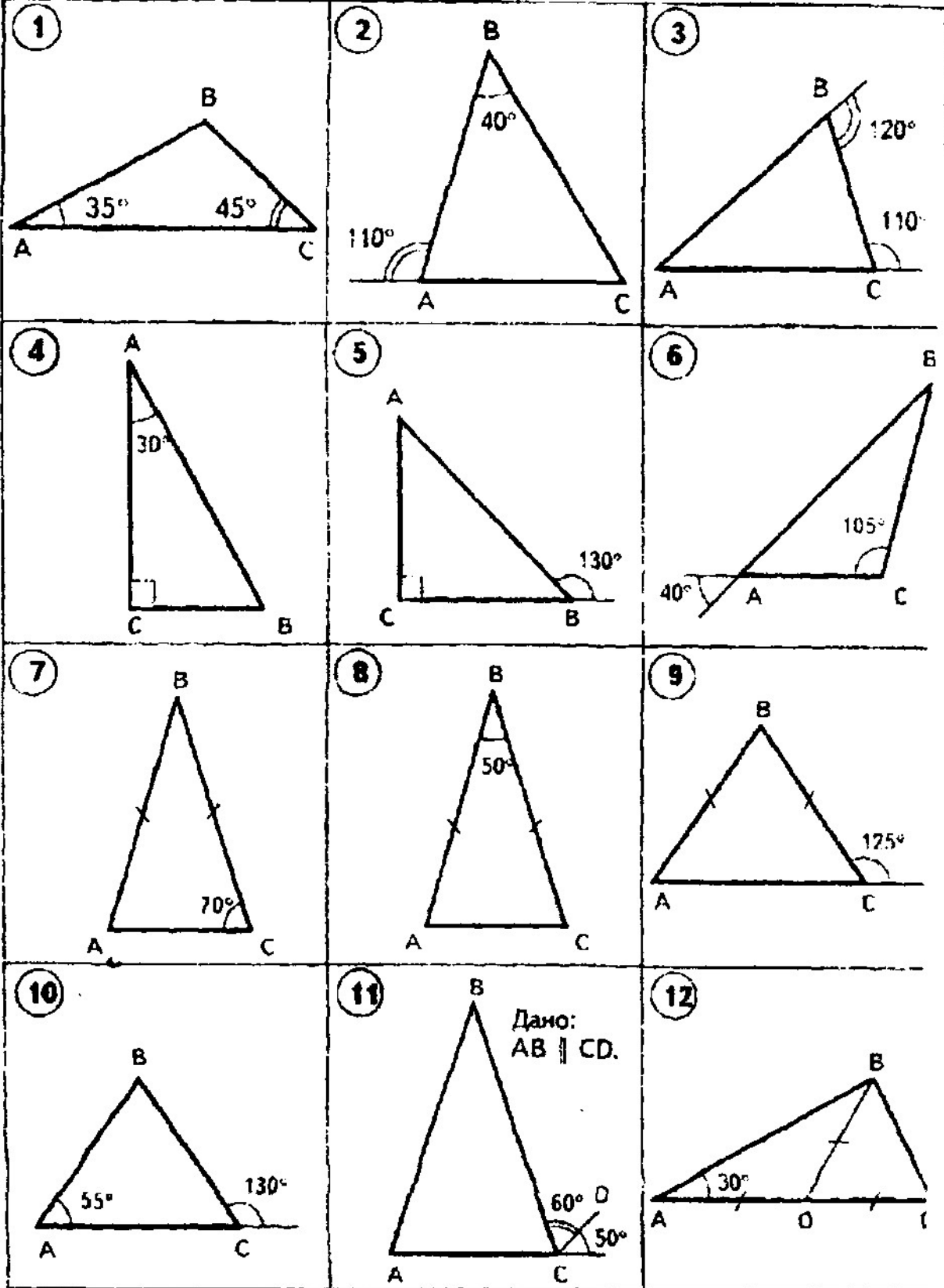
Б) Знайдіть пари подібних трикутників і доведіть їх подібність



В) Знайдіть пари подібних трикутників



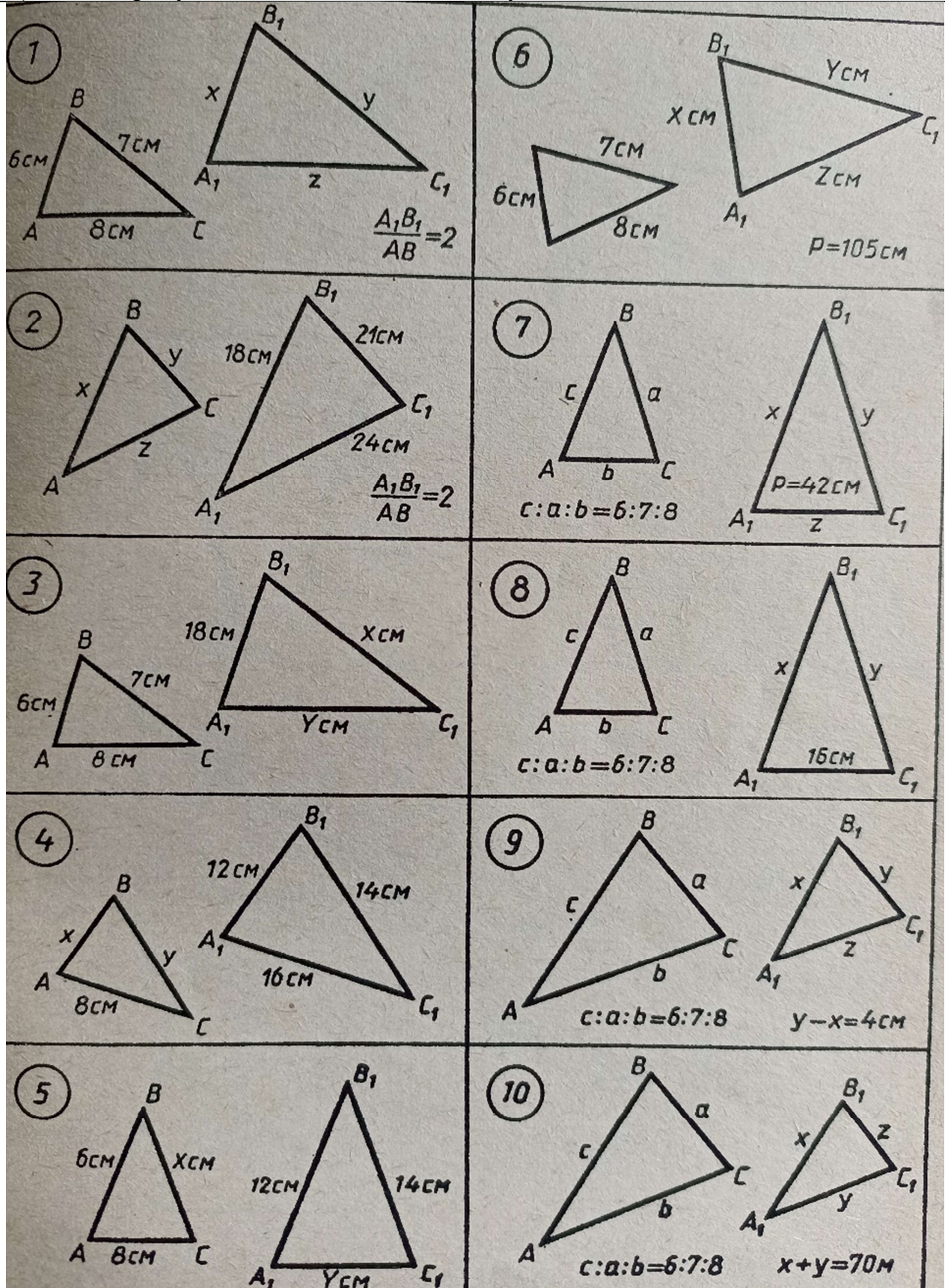
№ 2.3. А) Знайдіть невідомі кути трикутника



Відповіді:

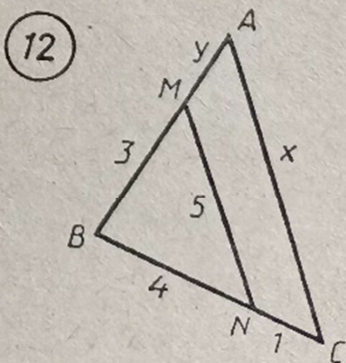
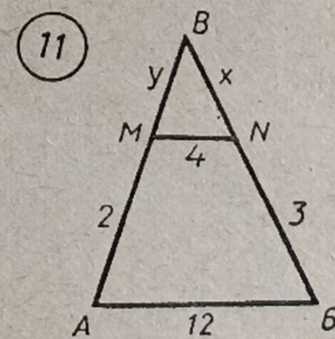
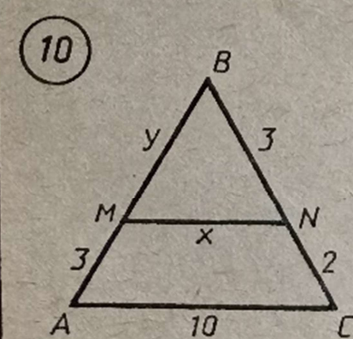
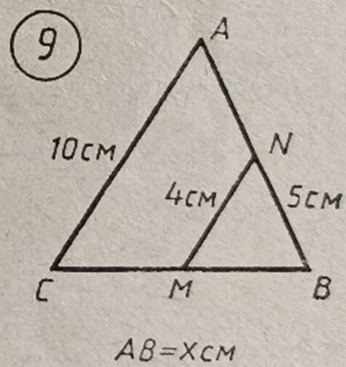
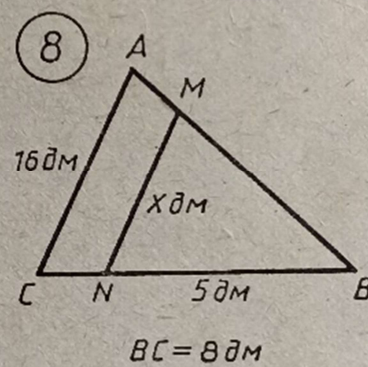
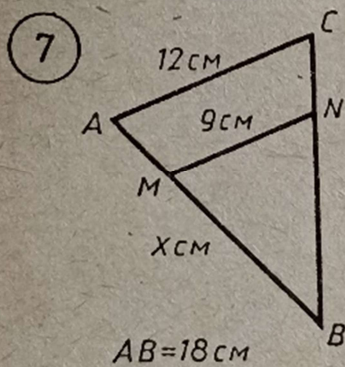
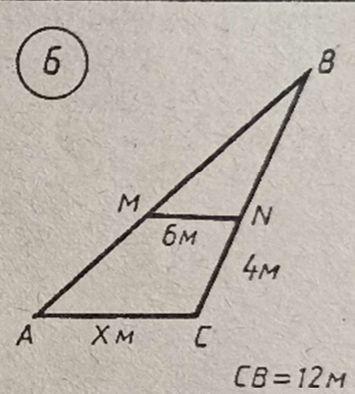
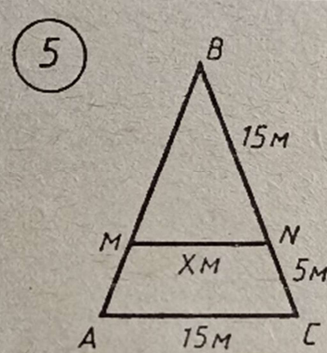
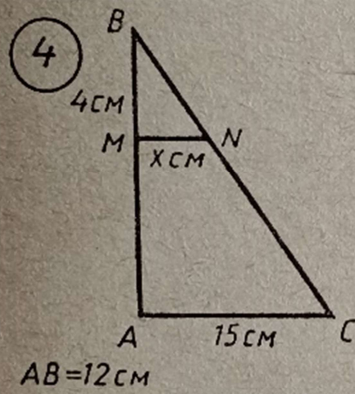
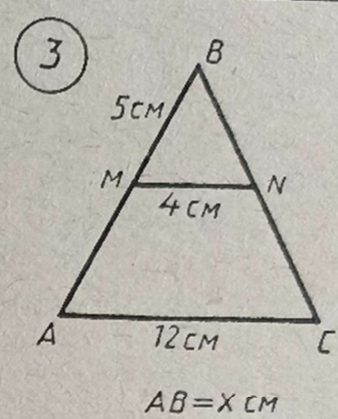
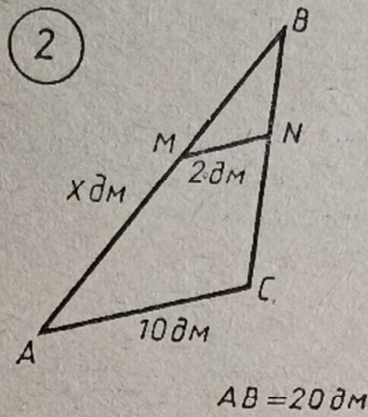
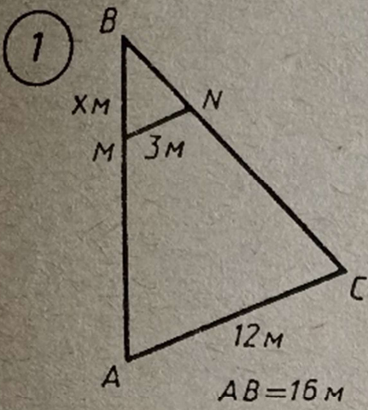
1) 100° .	2) $\angle A = 70^\circ, \angle C = 70^\circ$.	3) $\angle A = 50^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 70^\circ$.
4) 60° .	5) $\angle A = 40^\circ, \angle B = 50^\circ$.	6) $\angle A = 40^\circ, \angle B = 35^\circ$.
7) $\angle A = 70^\circ, \angle B = 40^\circ$.	8) $\angle A = \angle C = 65^\circ$.	9) $\angle A = 55^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 55^\circ$.
10) $\angle B = 75^\circ, \angle C = 50^\circ$.	11) $\angle A = 50^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 70^\circ$.	12) $\angle B = 90^\circ, \angle C = 60^\circ$.

Б) Задані трикутники подібні. Знайдіть x, y, z .



Відповіді: Б)	1) 12, 14, 16 см;	2) 9, 10, 5, 12 см;	3) 21 см, 24 см
4) 6 см, 7 см;	5) 7 см, 16 см;	6) 30, 35, 40 см;	7) 12, 14, 16 см;
8) 12, 14 см;	9) 24, 28, 32 см;	10) 30, 35, 40 м;	

В) В трикутнику ABC, $MN \parallel AC$. Знайдіть x і y .



Відповіді: В)

1) 4 м; 2) 16 дм;

3) 15 см; 4) 5 см;

5) 11,25 м; 6) 9 м;

7) 13,5 см; 8) 10 дм;

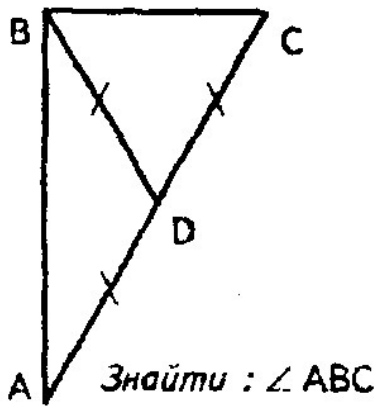
9) 12,5 см; 10) 6; 4,5;

11) 1,5; 1;

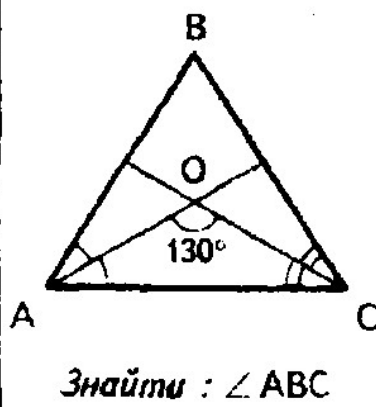
12) 6,25; 0,75.

№ 2.4. Виконайте завдання кожної задачі

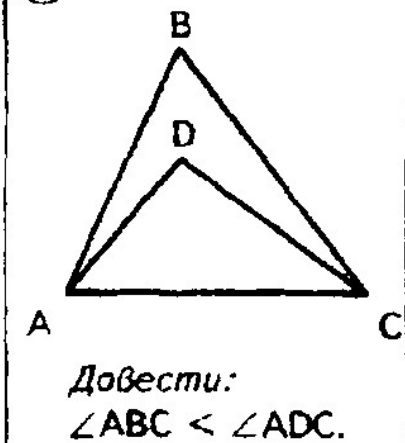
1



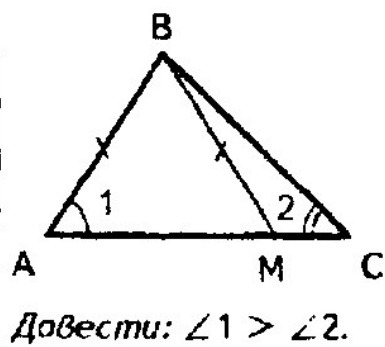
2



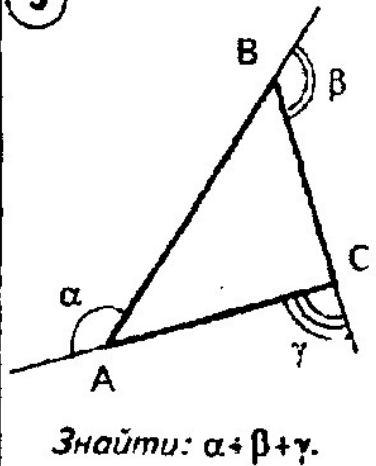
3



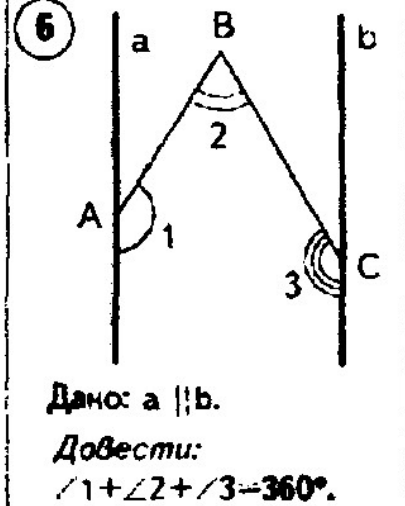
4



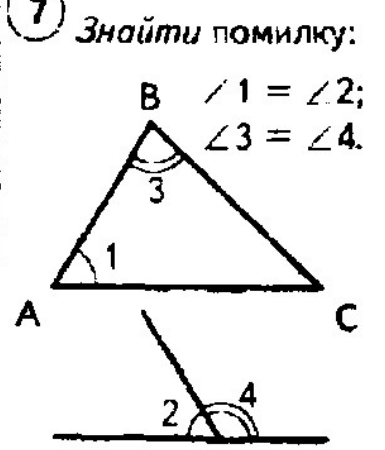
5



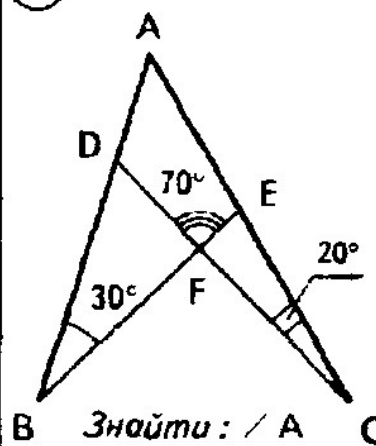
6



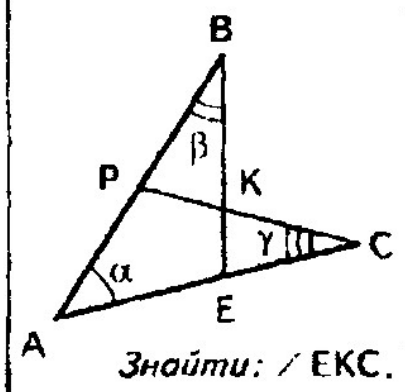
7



8



9



№ 2.4. Відповіді

- 1) 90° . 2) 80° . 5) 360° . 8) 20° . 9) $360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$

№2.5. Розв'яжіть задачі, використовуючи першу або другу ознаки рівності трикутників

- 1) Медіана AD трикутника ABC продовжена до точки E так, що $DE = AD$. Якій із сторін трикутника ABC дорівнює відрізок CE ?
- 2) Відрізок AB перпендикулярний відрізку CD і проходить через його середину. Чи рівні трикутники ABC і ABD ?
- 3) Доведіть, що висоти трикутника, при перетині, не діляться навпіл.
- 4) Через середину O сторони BC трикутника ABC проведена пряма, яка перетинає сторону AB в точці D , а продовження сторони AC – в точці E так, що $\angle B = \angle E$. Чи рівні трикутники OBD і OEC ?
- 5) Сторони AB і BC трикутника ABC рівні. На них взяті такі точки D і F , що $\angle BAF = \angle FCD$. Доведіть, що $AD = CF$.
- 6) Два кути трикутника рівні. Чи рівні бісектриси цих кутів?

Відповіді

- 1) $CE=AB$. 2) так. 4) ні.

№2.6. Розв'яжіть задачі, використовуючи факти про периметр, кути трикутника, його медіану, бісектрису, висоту

- 1) Знайдіть периметр трикутника ABC , $AB+BC=27$ см, $AB+AC=28$ см, $BC+AC=29$ см.
- 2) У трикутнику ABC $\angle A=55^\circ$, $\angle B=75^\circ$. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою трикутника, проведеними з вершини C .
- 3) Кут між висотою і бісектрисою трикутника, проведеними з вершини його прямого кута, дорівнює 12° . Знайдіть гострі кути даного трикутника.
- 4) Дві висоти рівнобедреного трикутника при перетині утворюють кут 100° . Знайдіть кути даного трикутника.
- 5) У трикутнику ABC кути A , B , C пропорційні числам 6, 8, 10. Знайдіть кути трикутника.
- 6) У трикутнику ABC кути A , B , C пропорційні числам 3, 6, 9. Знайдіть кути трикутника.
- 7) У трикутнику ABC проведено бісектрису AK . $\angle C=40^\circ$, $\angle AKC=100^\circ$. Знайдіть $\angle B$.
- 8) У трикутнику ABC проведено бісектрису AK . $\angle B=45^\circ$, $\angle AKB=130^\circ$. Знайдіть $\angle C$.
- 9) У трикутнику ABC кут B на 10° більший за кут C і на 50° менший, ніж зовнішній кут трикутника при вершині A . Знайдіть кут A .
- 10) У трикутнику ABC кут A на 40° менший від кута B і в 3 рази менший від кута C . Знайдіть кути трикутника.

Відповіді	1) 42 см.	2) 10°	3) $33^{\circ}, 57^{\circ}$.
4) $20^{\circ}, 80^{\circ}, 80^{\circ}$ або $80^{\circ}, 50^{\circ}, 80^{\circ}$.		5) $45^{\circ}, 60^{\circ}, 75^{\circ}$.	6) $30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$.
7) 60° .	8) 130° .	9) 70° .	10) $28^{\circ}, 68^{\circ}, 84^{\circ}$.

№ 2.7. Розв'яжіть задачі, використовуючи ознаки подібності трикутників, властивість медіан трикутника, властивість бісектрис трикутника.

1) Периметр трикутника 25 см, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки, рівні 7,5 см і 2,5 см. Знайдіть сторони трикутника.

2) Відрізок BD є бісектрисою трикутника ABC, кути ABD і A рівні. $AB = 28$ см, $BC = 36$ см, $DC = 27$ см. Знайдіть BD.

3) Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC в точках M і N. Знайдіть AC і відношення площ трикутників ABC і BMN, якщо $MB = 14$ см, $AB = 16$ см, $MN = 38$ см.

4) В трикутнику ABC $AB = 15$ м, $AC = 20$ м, $BC = 32$ м. На стороні AB відкладений відрізок $AD = 9$ м, а на стороні AC – відрізок $AE = 12$ м. Знайдіть DE і відношення площ трикутників ABC і ADE.

5) Чи подібні два рівнобедрені трикутники, якщо бічна сторона і основа одного із них пропорційні бічній стороні і основі другого? Відповідь обґрунтуйте.

6) Доведіть, що якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника пропорційні гіпотенузі і катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники подібні.

7) Знайдіть відстань від точки перетину медіан рівнобедреного трикутника ABC до сторони BC, якщо $AB = AC = 10$ см, $BC = 16$ см.

8) В рівнобедреному трикутнику відстань від точки перетину медіан до вершин трикутника рівні 25 см, 14 см і 25 см. Знайдіть сторони трикутника.

9) В трикутнику зі сторонами 15 см, 15 см, 24 см знайдіть відстань від точки перетину медіан до сторін трикутника.

10) Доведіть, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо бічна сторона і медіана, проведена до неї, одного трикутника пропорційні бічній стороні і медіані, проведеної до неї, другого трикутника.

Відповіді

3) 32 см, 64:49

4) 19,2 м, 25:9.

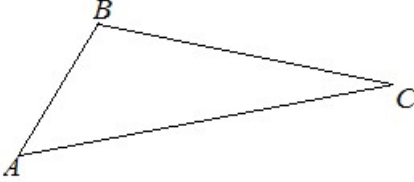
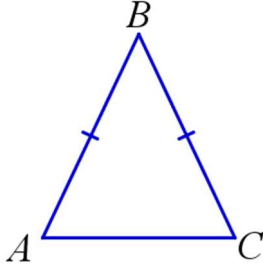
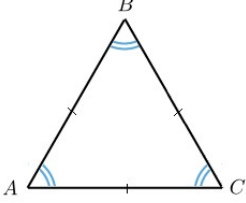
7) 2 см.

8) 48 см, $3\sqrt{113}$ см, $3\sqrt{113}$ см.

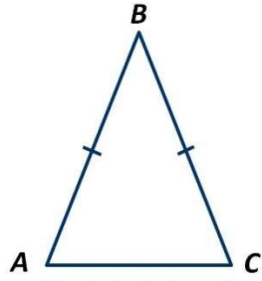
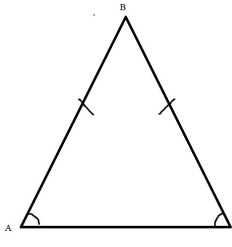
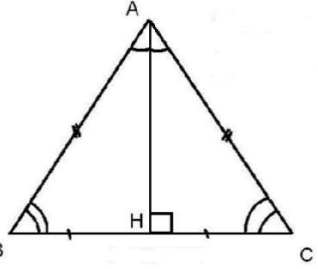
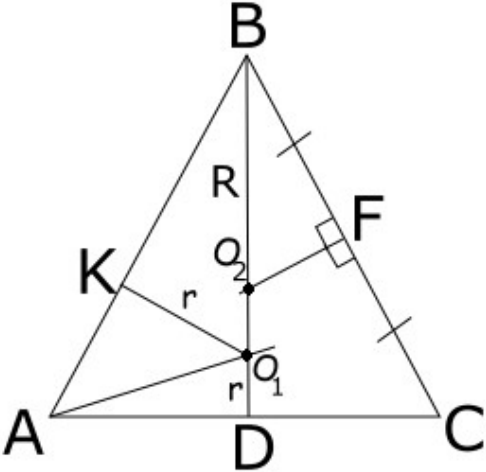
9) 4,8 см.

2.2. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК. РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИК

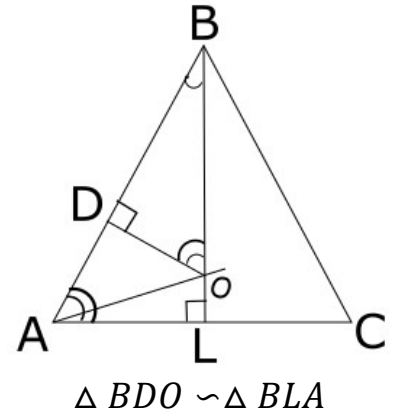
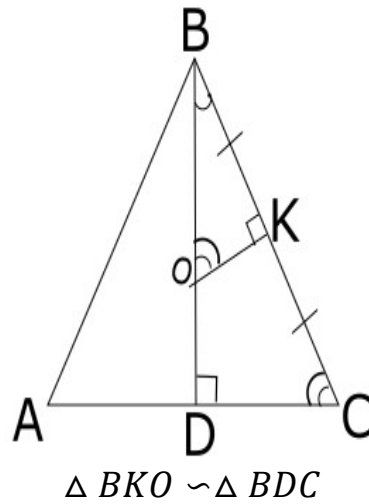
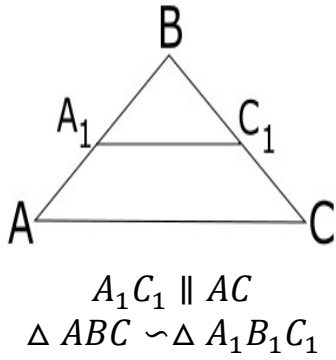
Залежно від довжини сторін трикутники поділяють на такі види:

<p>різносторонній, якщо всі сторони мають різну довжину;</p>	<p>рівнобедрені, якщо дві сторони рівні, ці сторони називають бічними сторонами, а третю сторону трикутника основою.</p>	<p>рівносторонній, якщо всі сторони рівні;</p>
 <p>Різносторонній $AB \neq BC \neq AC$</p>	 <p>Рівнобедренний $AB = BC \neq AC$</p>	 <p>Рівносторонній $AB = BC = AC$</p>

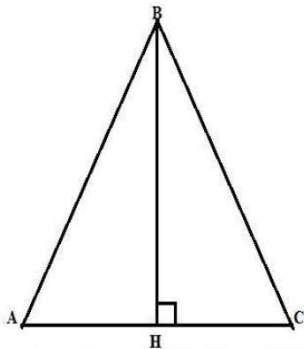
Рівнобедрений трикутник

Означення	Властивості
<div style="text-align: center;">  </div> <p>$AB = BC$ – бічні сторони, AC – основа B – вершина рівнобедреного трикутника $P_{\triangle ABC} = 2AB + AC$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>$\angle A = \angle C$</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>AH – бісектриса AH – медіана AH – висота</p> </div> </div>
<div style="text-align: center;">  </div>	<p>В рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола – точка перетину медіани, бісектриси і висоти, проведеної до основи і бісектриси кута при основі.</p> <p>Центр описаного кола – точка перетину медіани, проведеної до основи і серединного перпендикуляра до бічної сторони.</p>

Пари подібних трикутників в рівнобедрених трикутниках

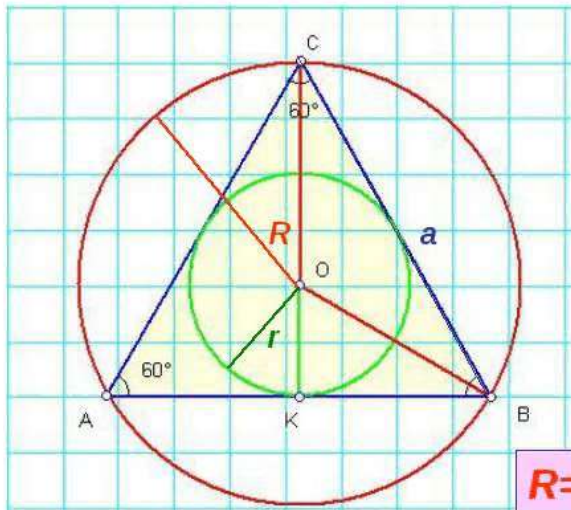


Формули площі для рівнобедрених трикутників



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin \angle ABC$$

Рівносторонній трикутник



Для рівностороннього трикутника

Радіус кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ сторона трикутника } a = \sqrt{3} \cdot R$$

Радіус кола, вписаного в трикутник

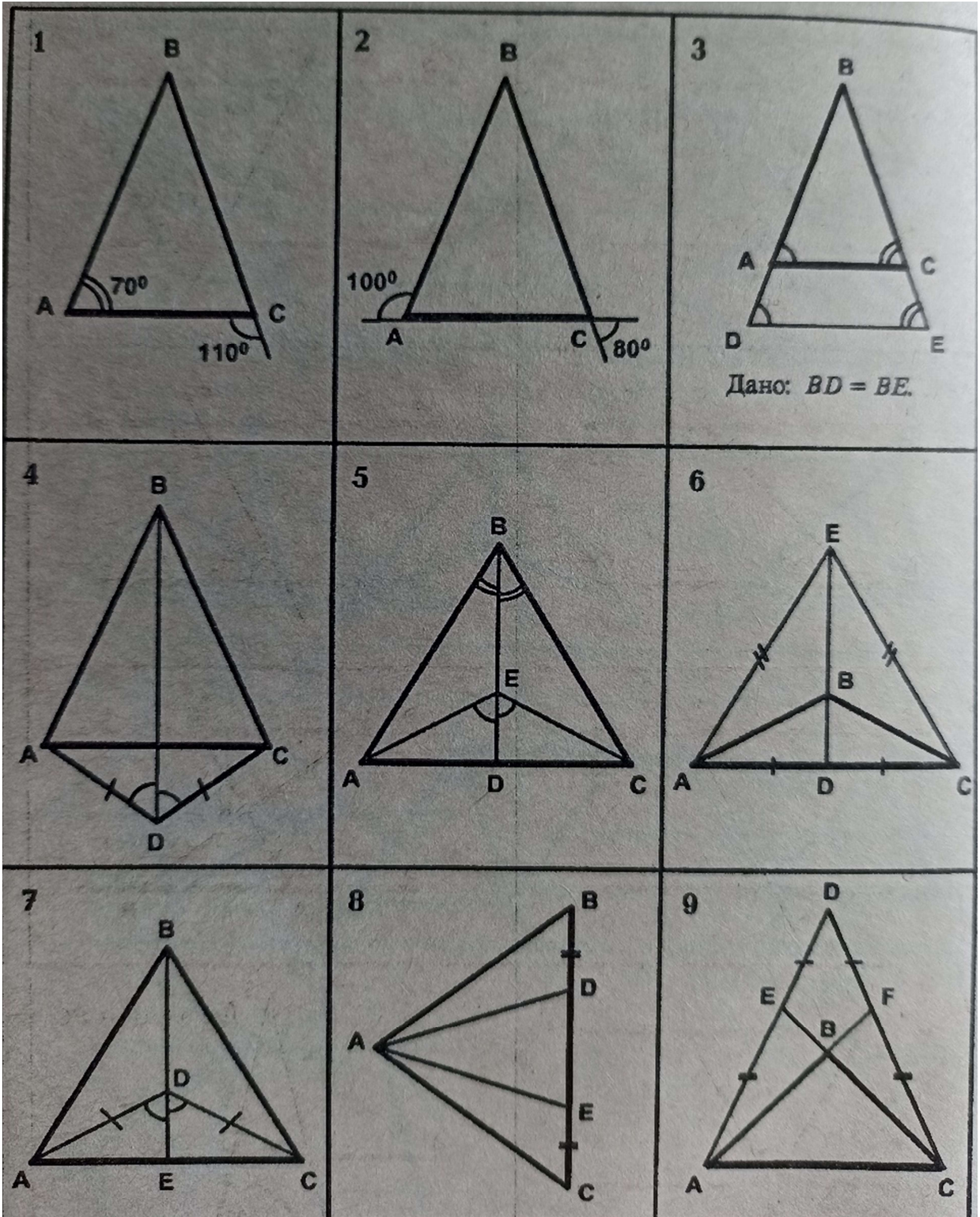
$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \text{ сторона трикутника } a = 2\sqrt{3} \cdot r$$

Площа рівностороннього трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ де } a - \text{сторона трикутника}$$

$R=2r$

№ 2.8. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений



№2.9. Розв'яжіть задачі використовуючи другу і третю ознаки рівності трикутників.

1) AD і CE – бісектриси рівнобедреного трикутника з основою AC . Доведіть, що $\triangle AEC = \triangle CDA$.

2) AE і KM – бісектриси рівнобедреного трикутника APK з основою AK . Доведіть, що трикутники APK і KPM рівні.

3) Точки M і E розташовані по різні сторони від прямої OP так, що $OM = PE$ і $MP = OE$. Доведіть, що $\angle MOP = \angle EPO$ і $\angle MPO = \angle EOP$.

4) На одній стороні кута з вершиною A позначено точки D і B , на другій стороні – C і E так, що $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см. Доведіть, що: а) $BC = ED$; б) $KB = KE$, де K – точка перетину відрізків BC і ED .

5) ABC і $A_1B_1C_1$ – рівнобедрені трикутники з основами AC і A_1C_1 , точки M і M_1 – середини сторін BC і B_1C_1 відповідно, $AB = A_1B_1$, $AM = A_1M_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

6) На одній стороні кута з вершиною B позначено точки M і O , на другій стороні – K і P так, що $BM = BP$, $BO < BM$, $BK < BP$, а $\angle OPB = \angle KMB$. Доведіть, що: а) $MK = OP$; б) $TM = TP$, де T – точка перетину відрізків MK і OP .

7) AC і A_1C_1 – основи рівнобедрених трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, точки M і M_1 – середини сторін BC і B_1C_1 відповідно, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

8) Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° , а висота, проведена до основи, — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

9) У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту AK , $\angle B = 46^\circ$. Знайдіть $\angle CAK$.

10) У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено висоту AK , $\angle BAK = 32^\circ$. Знайдіть $\angle C$.

Відповіді №2.9	2) Вказівка: Властивість рівнобедреного трикутника та друга ознака рівності трикутників		
4) Вказівка: доведіть рівність трикутників ADE і CBA			
5) Вказівка: доведіть рівність трикутників ABM і $A_1B_1M_1$ і відрізків AC і A_1C_1			
8) $6\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см, 18см.	9) 23°	10) 64° .	

№ 2.10. Розв'яжіть задачі, використовуючи властивості рівнобедреного трикутника

1(С). Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, різниця двох сторін 4 см, а один із його зовнішніх кутів гострий. Знайти сторони трикутника.

2(С). Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, бічна сторона менша основи на 1 см. Знайти висоту трикутника, проведено до основи.

3(С). Знайти бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його площа дорівнює 108 см^2 , а основа 18 см .

4(С). Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 23 см , а кут при вершині 60° .

5(С). Кут між нерівними висотами рівнобедреного трикутника дорівнює 130° . Обчислити кути трикутника.

6(С). В рівнобедреному трикутнику висота, опущена на бічну сторону, ділить її на відрізки 7 см і 1 см , рахуючи від вершини. Визначити основу трикутника.

7(С). В рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, дорівнює 10 см ; висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см . Визначити сторони трикутника.

8(С). Висота, опущена на бічну сторону рівнобедреного трикутника, ділить її на відрізки 8 см і 2 см , рахуючи від вершини. Знайти довжину цієї висоти і периметр даного трикутника.

9(С). Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см , а бічна сторона дорівнює 10 см . Визначити сторони трикутника, вершинами якого є основи висот даного.

10(Д). Визначити площу рівнобедреного трикутника, якщо основа дорівнює 15 см , а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см .

11(Д). Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, опущена на основу, дорівнює 10 см , а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см .

12(Д). Медіани рівнобедреного трикутника дорівнюють 18 см , 15 см і 15 см . Знайти площу цього трикутника.

13(Д). Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см , а висота, проведена до основи, на 6 см менша від основи. Знайдіть основу трикутника.

14(Д). Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, як що висота, проведена, до основи, дорівнює 8 см .

15(Д). У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см і ділить її на дві частини, одна з яких, прилегла до вершини трикутника, дорівнює 6 см . Знайдіть основу трикутника.

16(Д). Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см , рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу трикутника.

17(Д). У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=BC$) бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle AMB=117^\circ$.

18(Д). У рівнобедреному трикутнику MKE ($MK=KE$) бісектриса кута E перетинає сторону MK у точці C . Знайдіть кути трикутника MKE , якщо $\angle KCE=126^\circ$.

19(Д). Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до його основи як $5:6$, а висота трикутника, опущена на основу, дорівнює 12 см . Обчисліть периметр трикутника.

20(Д). Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як $8:3$, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см . Обчисліть периметр трикутника.

21(Д). Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи - 9 см.

22(Д). Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 72 см, а висота, проведена до основи, - 24 см. Знайдіть сторони трикутника.

23(Д). Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього - 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

24(Д). Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, - 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

25(Д). У трикутнику ABC $AC=BC$, $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle BAC=30^\circ$, AD - бісектриса. Знайдіть довжину відрізка AD .

26(Д). Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота опущена на основу, - 15 см. Знайдіть площу трикутника.

27(Д). Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 100 см, а висота, опущена на основу - 30 см. Знайдіть площу трикутника.

28(Д). Периметр трикутника ABC , описаного навколо кола, дорівнює 36 см. Точка дотику кола зі стороною BC ділить її у відношенні 2:5, рахуючи від точки B , а точка дотику зі стороною AC віддалена від точки A на 4 см. Знайдіть сторони трикутника.

29(В). У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 96 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює 42π см.

30(В). У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює 50π см.

31(В). У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 40 см, основа дорівнює 48 см. Обчислити різницю радіусів вписаного і описаного кіл.

32(В). У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють 12 і 25 см. Обчислити периметр трикутника.

33(В). У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 55 см, а основа - 66 см. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи бісектрис даного трикутника.

34(В). У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 250 см, а основа - 300 см. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є основи висот даного трикутника.

35(В). У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 60 см. Висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки у відношенні 7:18, починаючи від вершини. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його ця висота.

36(В). У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 66 см. Бісектриса кута при основі ділить бічну сторону на відрізки, у відношенні 5:6, починаючи від вершини. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його ця бісектриса.

37(В). У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 80 см, а бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити радіуси вписаного і описаного кіл.

38(В). У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють 24 і 50 см. Обчислити периметр трикутника.

№ 2.10. Відповіді	1) 7см, 7см, 11см.	2) 4 см.	3) 15см.
4) $23/\sqrt{3}$ см	5) $50^0, 50^0, 80^0$.	6) 4 см.	7) 12,5; 12,5; 15см.
8) 6см, $2(10+\sqrt{10})$ см.	9) 6; 6; 3,6 см.	10) 75см^2 .	11) 75см^2 .
12) 144см^2 .	13) 18 см.	14) 10; 10; 12 см	15) $4\sqrt{5}$ см.
16) $4\sqrt{10}$ см.	17) $78^0, 78^0, 34^0$.	18) $84^0, 84^0, 12^0$.	19) 48 см.
20) 144 см.	21) 15; 15; 24 см.	22) 26; 26; 20 см.	23) $6\sqrt{13}$ см
24) $4\sqrt{5}$ см	25) 2 см.	26) 300см^2 .	27) 480см^2 .
28) 14; 14; 8 см.	29) 256 см.	30) 128 см.	31) 13 см.
32) 128 см.	33) 360см^2 .	34) 6048см^2 .	
35) $336\text{см}^2, 864\text{см}^2$.	36) $792\text{см}^2, 660\text{см}^2$.	37) $16(5+\sqrt{21})$ см, 100 см.	
38) 256 см.			

№2.11. Розв'яжіть задачі на використання властивостей рівностороннього трикутника

1(Д). Довести, що сума відстаней від точки, взятої всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.

2(Д). Перпендикуляри, опущені з точки, яка лежить всередині рівностороннього трикутника зі стороною, яка дорівнює 24 см, на сторони трикутника, відносяться між собою як 1:2:3. Знайти довжини цих перпендикулярів.

3(Д). Доведіть, що медіана рівностороннього трикутника ділить його на два рівних прямокутних трикутника, у кожному з яких є гострий кут, що дорівнює 30^0 .

4(В). Доведіть, що середини сторін рівностороннього трикутника є вершинами іншого рівностороннього трикутника.

5(В). Доведіть, що бісектриса рівностороннього трикутника ділить його на два рівних прямокутних трикутника, у кожного з яких гіпотенуза у 2 рази більше за один з його катетів.

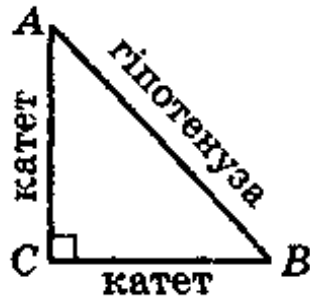
2.3. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Залежно від міри кутів трикутники поділяють на такі види:

- гострокутні, якщо всі кути гострі;
- тупокутні, якщо один з кутів тупий;
- прямокутні, якщо один з кутів прямий.

Прямокутний трикутник

1. Означення



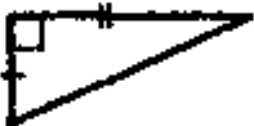
Трикутник, у якого є прямий кут, називається прямокутним. $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, $\triangle ABC$ — прямокутний. Сторону прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називають гіпотенузою, а дві інші його сторони — катетами.
 AB — гіпотенуза, AC і BC — катети.

2. Властивості

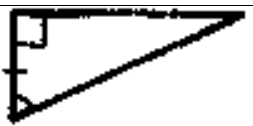
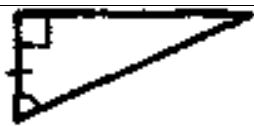
Якщо в трикутнику ABC кут C прямий, то $\angle A + \angle B = 90^\circ$. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .

Якщо в трикутнику ABC кут C прямий, то $AB > AC$ і $AB > BC$. Гіпотенуза більша за кожний із катетів.

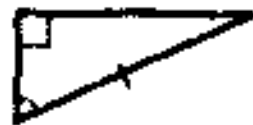
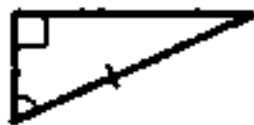
3. Ознаки рівності



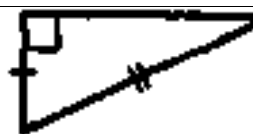
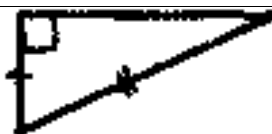
1) За двома катетами.



2) За катетом і прилеглим гострим кутом.



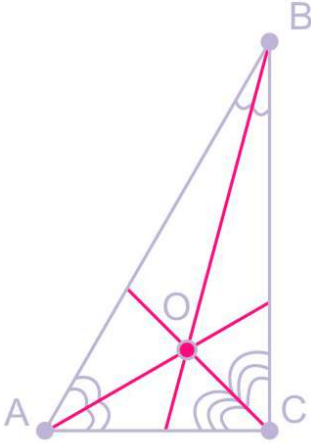
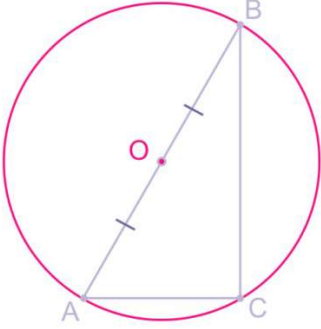
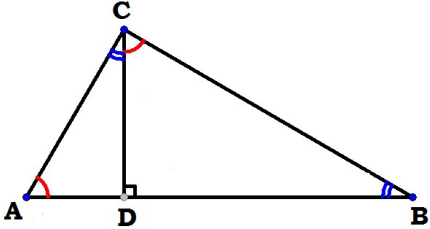
3) За гіпотенузою і прилеглим кутом.



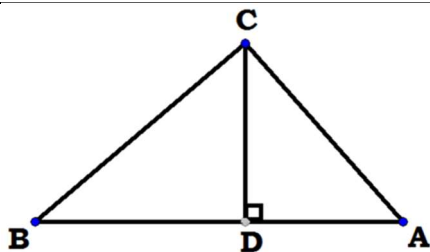
4) За катетом і гіпотенузою.

В прямокутному трикутнику катет, який лежить проти кута 30° дорівнює половині гіпотенузи.

В прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи дорівнює її половині.

Вписане коло прямокутного трикутника	
	<p>Коло називають вписаним в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.</p> <p>Радіус вписаного кола у прямокутний трикутник з катетами a та b і гіпотенузою c знаходиться за формулою:</p> $r = \frac{a + b - c}{2}$
Описане коло навколо прямокутного трикутника	
	<p>Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.</p> <p>Центр описаного кола прямокутного трикутника збігається з серединою його гіпотенузи.</p> $R = \frac{c}{2}$
Подібність прямокутних трикутників	
	<p>Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутників, кожен з яких подібний даному трикутнику.</p>
Ознаки подібності прямокутних трикутників	
<p>I. Два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного трикутника дорівнює гострому куту другого трикутника.</p>	<p>II. Два прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного трикутника пропорційні катетам другого трикутника.</p>
<p>III. Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.</p>	

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику



Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проєкцій катетів на гіпотенузу.

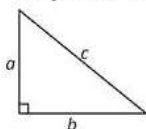
$$CD^2 = AD \cdot DB$$

Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи і проєкції цього катета на гіпотенузу.

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

$$CB^2 = AB \cdot DB$$

Теорема Піфагора

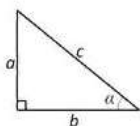


$$c^2 = a^2 + b^2$$

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Тригонометричні функції гострого кута. Розв'язування прямокутних трикутників

1. Синус, косинус, тангес і котангенс гострого кута



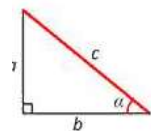
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

функція \ кут α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

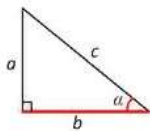
2. Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких кутів

3. Розв'язування прямокутних трикутників



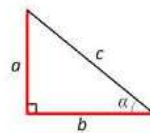
$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$



$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$c = \frac{a}{\cos \alpha}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

4. Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

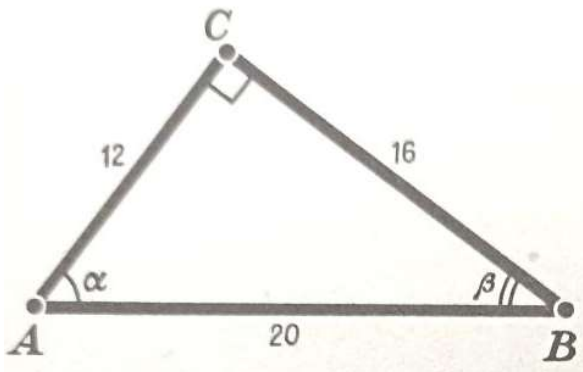
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

№2.12. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками

А) Виконайте завдання кожної задачі	
1) Кути А і D – прямі, $OC = OD$. Чи рівні трикутники OBD і OCA ?	
2) На сторонах кута А позначено такі точки В і С, що $AB = AC$. Перпендикуляри BF і CD до сторін кута перетинають сторони кута в точка F і D. Доведіть, що $BD = CF$.	
3) Знайдіть $\cos \alpha$ $\cos \beta$	
а)	б)
в)	г)
д)	ж)

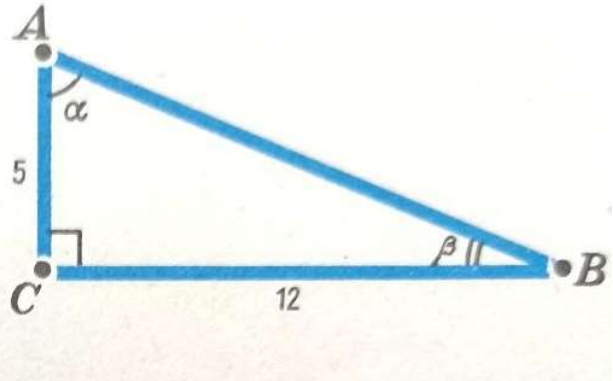
4) Знайдіть $\sin \alpha$, $\sin \beta$

a)

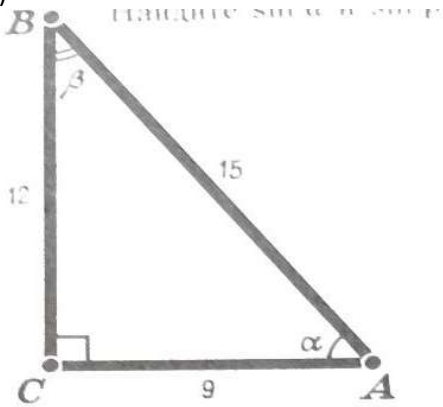


5) Знайдіть $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$

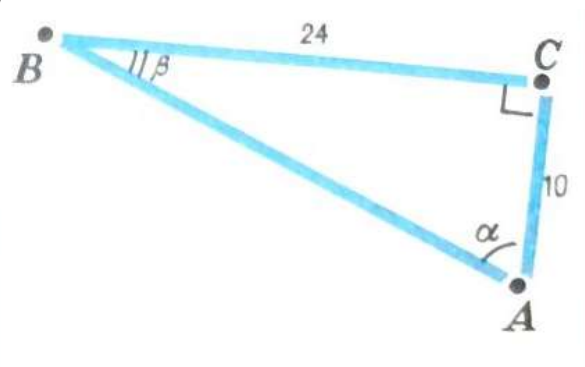
a)



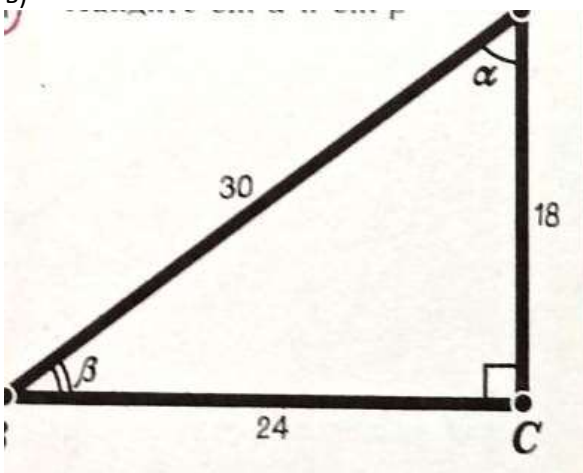
6)



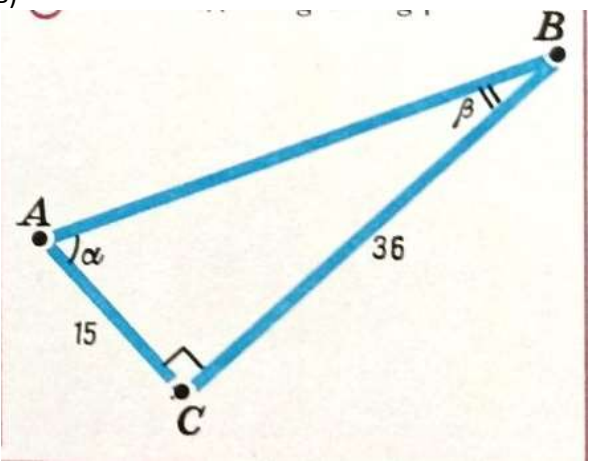
6)



в)

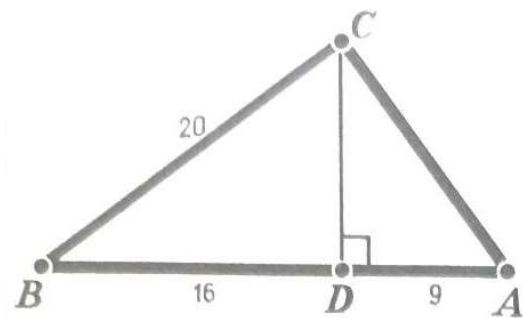


в)

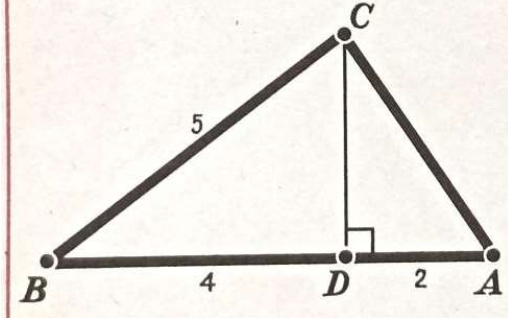


6) Знайдіть CD і CA використовуючи теорему Піфагора

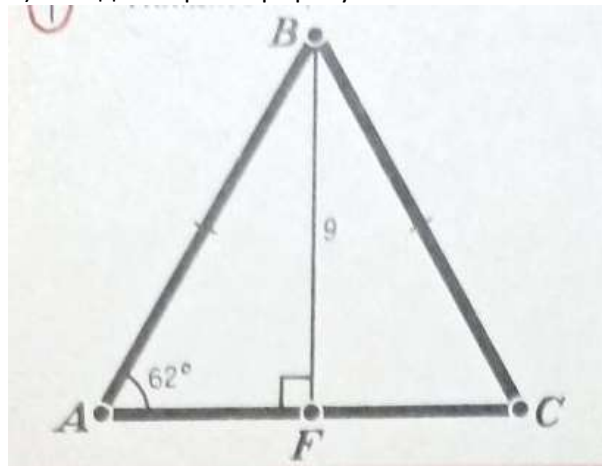
a)



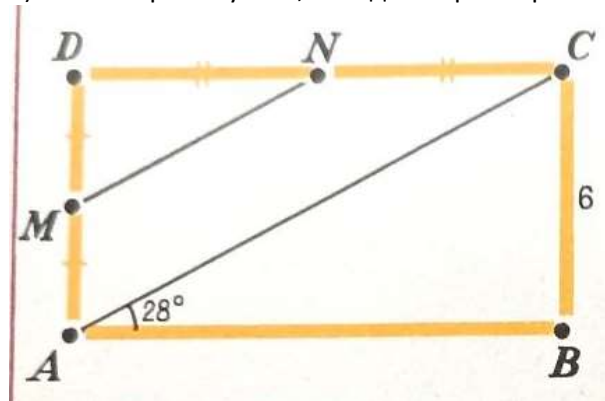
б)



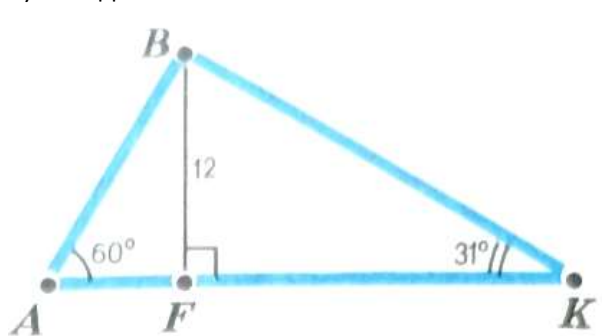
7) Знайдіть периметр трикутника ABC



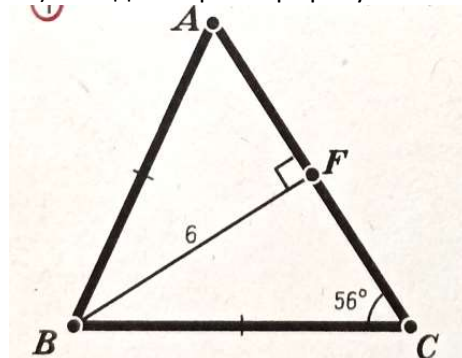
8) ABCD – прямокутник, знайдіть периметр MDN



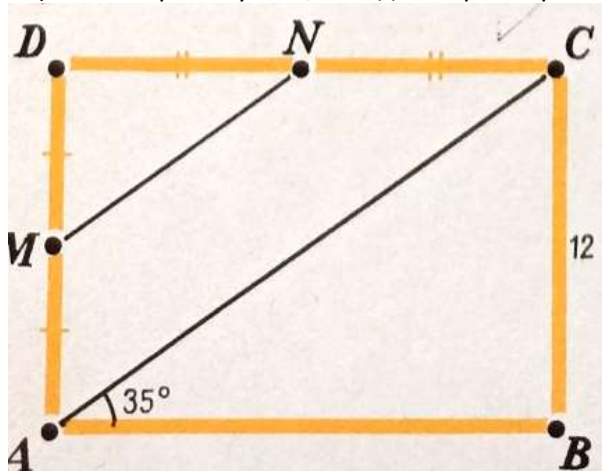
9) Знайдіть AK



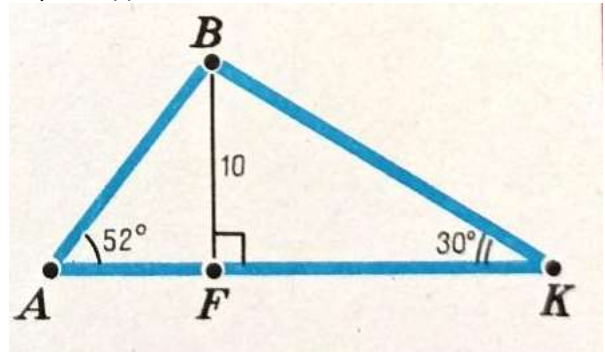
10) Знайдіть периметр трикутника ABC



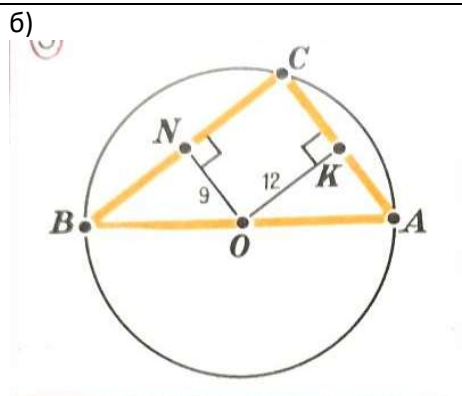
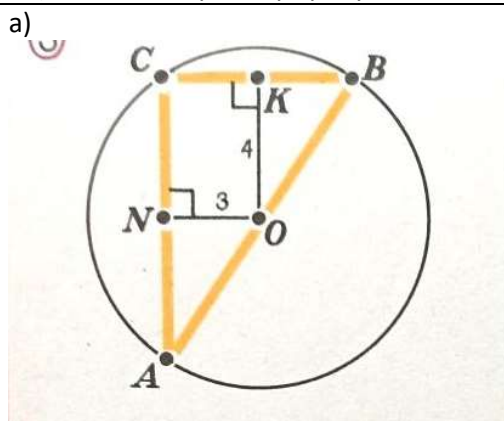
11) ABCD - прямокутник, знайдіть периметр MDN



12) Знайдіть AK



13) Знайдіть периметр трикутника ABC



. Відповіді

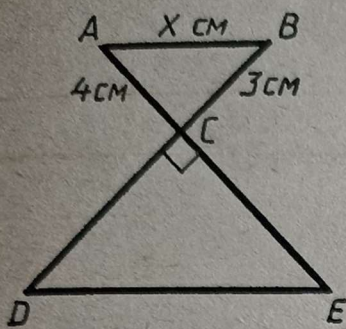
6)а) 12; 15. б) $3; \sqrt{13}$

7) $18\text{ctg}31^\circ$

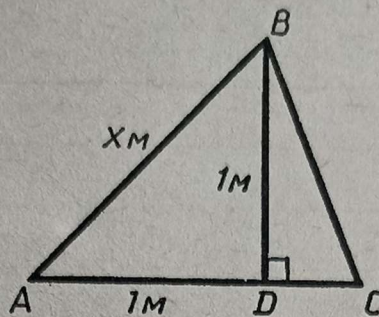
13)а) 24см; б) 72см;

Б) Знайдіть x за теоремою Піфагора.

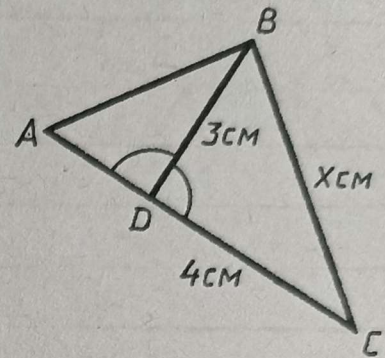
1



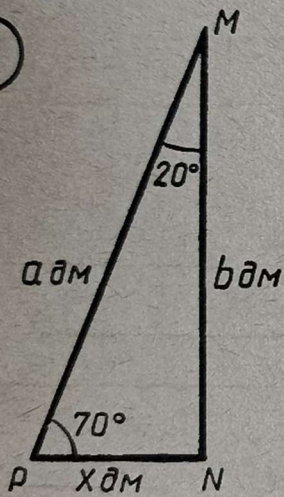
2



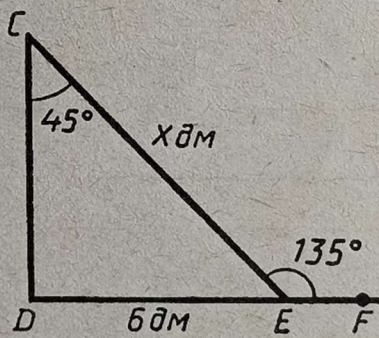
3



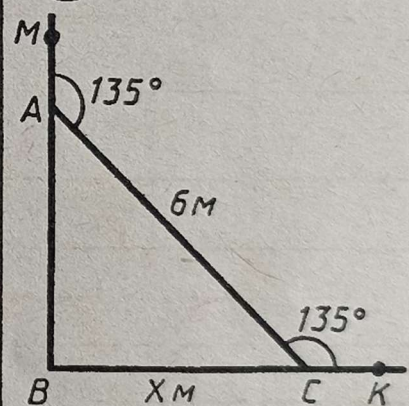
4



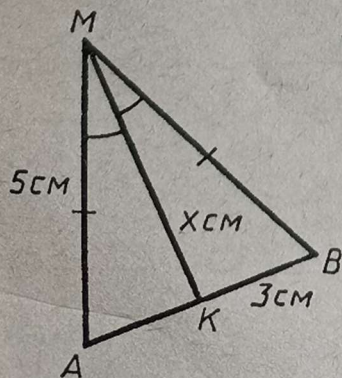
5



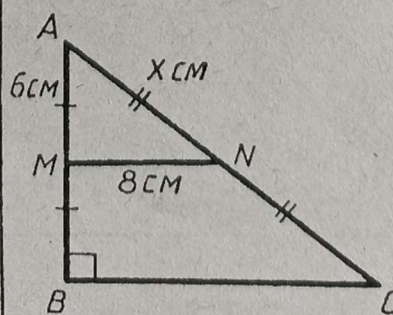
6



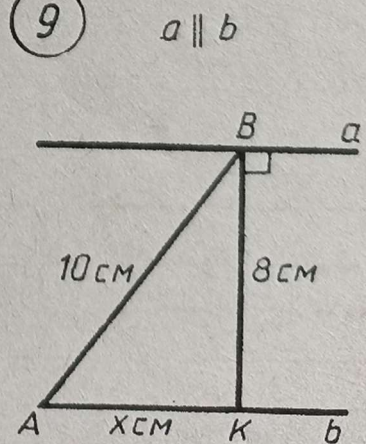
7



8

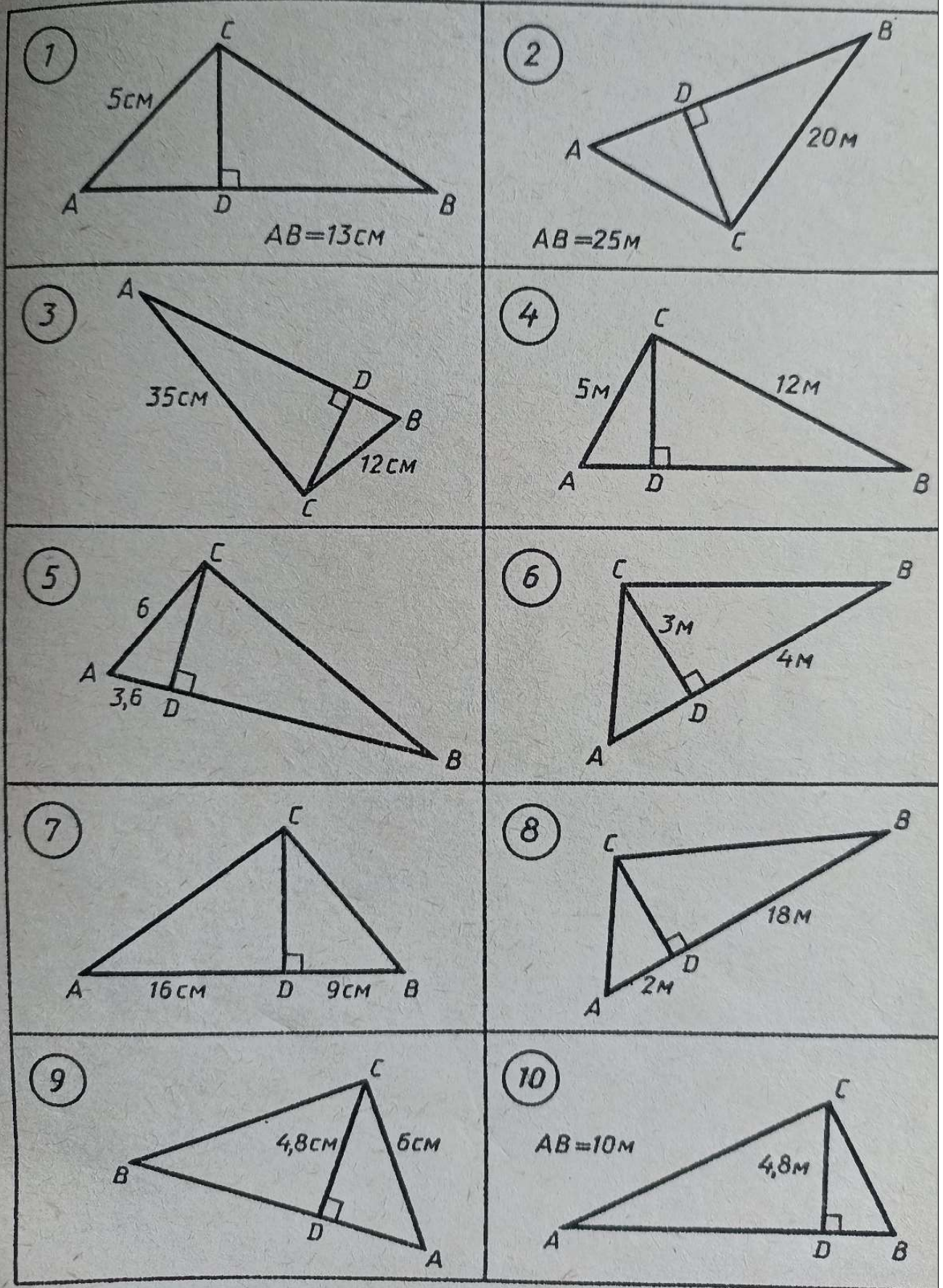


9



Відповідь: 3) 5 см; 6) $3\sqrt{2}$ м; 7) 4 см; 8) 10 см.

В) Знайдіть невідомі лінійні елементи трикутника ABC



Відповідь: 1) $CB=12$ см; 2) $AC=15$ см; 4) $AB=13$ см; 5) $CB=8$; 6) $AB=6,25$ м, $CB=5$ м, $AC=3,75$ м; 7) $AB=25$ см, $CB=15$ см, $AC=20$ см; 9) $AB=10$ см, $CB=8$ см.

№2.13. Розв'яжіть задачі на властивості прямокутного трикутника та його елементів

- 1(С). Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза більша за інший катет на 8 см. Знайти гіпотенузу.
- 2(С). Знайти довжину медіани, проведеної в прямокутному трикутнику до гіпотенузи, якщо катети дорівнюють 12 см, 9 см.
- 3(С). Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 6 см. Знайти радіуси вписаного і описаного кіл.
- 4(С). В прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки довжиною 4 см і 5 см. Обчислити периметр.
- 5(С). В прямокутному трикутнику медіана, що проведена до гіпотенузи, дорівнює одному з катетів. Обчислити найменший з кутів трикутника.
- 6(С). В прямокутний трикутник вписане коло. Гіпотенуза точкою дотику ділиться на відрізки довжиною 5 см і 12 см. Знайти площу трикутника.
- 7(С). У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута до гіпотенузи проведено медіану довжиною 50 см і опущено перпендикуляр довжиною 48 см. Обчислити периметр цього трикутника.
- 8(С). Знайти катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза рівна 5 см, а площа 6 см^2 .
- 9(С). Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет на частини в 10 см і 26 см. Знайти гіпотенузу.
- 10(С). Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за один з катетів на 8 см і більша за інший на 1 см. Знайти сторони трикутника.
- 11(Д). Катети прямокутного трикутника дорівнюють 4 см і 3 см, в трикутнику дано точку на відстані 1 см від кожного катета. Знайти відстань від даної точки до гіпотенузи.
- 12(Д). Медіана і висота прямокутного трикутника, проведені до гіпотенузи, дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
- 13(Д). Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 10 см, а відстань між серединою гіпотенузи і основою висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
- 14(Д). Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один із його катетів на відрізки 2 см і 8 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть сторони трикутника.
- 15(Д). Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть сторони трикутника.
- 16(Д). Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, - 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 17(Д). У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) катет AC дорівнює 5 см, а медіана AM - 13 см. Знайдіть гіпотенузу AB .
- 18(Д). Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а різниця катетів - 14 см.

19(Д). Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть площу трикутника.

20(Д). Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а радіус описаного навколо нього кола — 17 см. Обчисліть площу даного трикутника.

21(Д). Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, - 18,5 см. Обчисліть площу цього трикутника.

22(Д). AD - бісектриса трикутника ABC, $AD=l$, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$. Знайдіть довжину відрізка BD.

23(Д). На стороні BC трикутника ABC позначено точку D. Знайдіть довжину відрізка BD, якщо $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $AB = c$.

24(В). У трикутнику ABC. $\angle C=90^\circ$, $\angle A=15^\circ$, $AC=3\sqrt{3}$ см. CM - бісектриса. Знайдіть довжину відрізка AM.

25(В). Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного і описаного кіл дорівнює сумі його катетів.

26(В). Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума півпериметра і радіуса вписаного кола дорівнює сумі катетів.

27(В). Довести, що в прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить пополам кут між медіаною і висотою, проведеною з цієї вершини.

28(В). Довести, що в прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, який дорівнює різниці гострих кутів трикутника.

29(В). Периметр прямокутного трикутника дорівнює 120 см, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см. Обчислити площу трикутника.

30(В). Периметр прямокутного трикутника дорівнює 112 см, а медіана, що проведена до гіпотенузи, дорівнює 25 см. Обчислити площу трикутника.

31(В). Периметр прямокутного трикутника дорівнює 80 см, площа його дорівнює 240 см^2 . Обчислити довжину описаного кола.

32(В). Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, довжина описаного кола дорівнює 17π см. Обчислити площу трикутника.

33(В). Катети прямокутного трикутника відносяться, як 5:12. Обчислити периметр трикутника, якщо різниця між радіусами описаного і вписаного кіл дорівнює 9 см.

34(В). Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відносяться, як 5:13. Обчислити площу цього трикутника, якщо сума радіусів вписаного і описаного кіл дорівнює 17 см.

35(В). Довести, що вписане в прямокутний трикутник коло ділить гіпотенузу на відрізки, добуток довжин яких дорівнює площі цього трикутника.

36(В). Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, яка проведена до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.

. Відповіді	1) 13 см.	2) 7,5 см.	3) 2 см, 5см.
4) 36 см. 5) 30^0 . 6) 60 см^2 .	7) 240 см.	8) 3 см, 4 см.	9) 39см.
10) 3 см, 12 см, 13 см.	11) 1 см.	15) 12см, 16 см, 20см.	
18) 120 см^2 . 19) 294 см^2 .	20) 240 см^2 .	21) 210 см^2 .	29) 600 см^2 .
30) 336 см^2 .	32) 60 см^2 .	33) 60 см.	34) 120 см^2 .

№2.14. Використайте розв'язування прямокутних трикутників

1) У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона – 18 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику цього кола з бічними сторонами трикутника.

2) Доведіть, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо кути при їх вершинах рівні.

3) Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо в них є:

а) по рівному гострому куту;

б) по прямому куту;

в) по рівному тупому куту.

4) У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см і поділяє її на дві частини, одна яких, прилегла до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

5) Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.

6) Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, - 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

7) Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, - 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

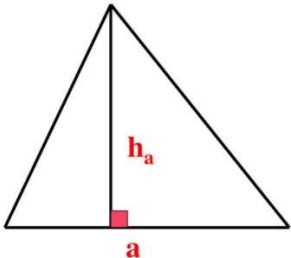
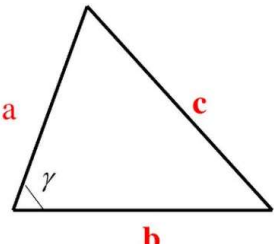
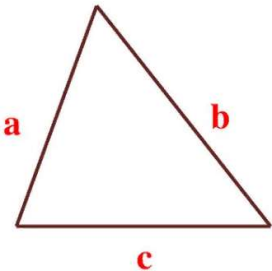
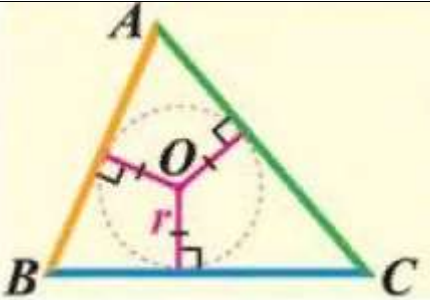
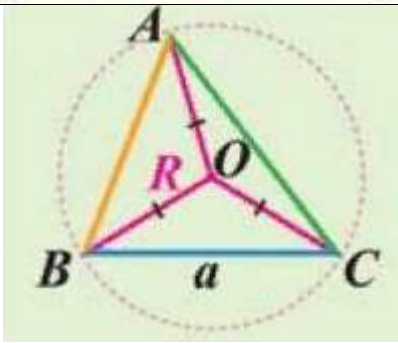
8) Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.

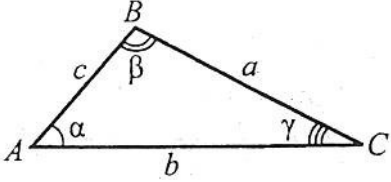
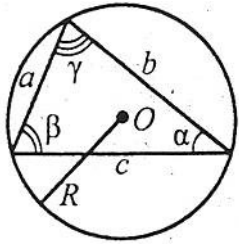
9) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота, проведена до основи, - 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

. Відповіді	1) 8 см.		
4) $4\sqrt{5}$ см	5) $4\sqrt{10}$ см	6) $4\sqrt{13}$ см	7) $4\sqrt{5}$ см
8) 10 см, 10 см, 12 см.	9) 25 см, 25 см, 40 см.		

2.4. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Площа трикутника

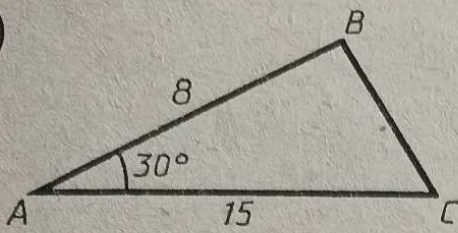
<p>Через сторону і висоту, проведену до неї.</p> 	<p>Площа трикутника дорівнює півдобутку його сторони (основи) на проведену до неї висоту.</p>	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
<p>Через дві сторони і кут між ними.</p> 	<p>Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.</p>	$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$
<p>Через три сторони (Формула Герона)</p> 	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $p = \frac{a+b+c}{2}$	
Вписане і описане коло		
	<p>У довільний трикутник можна вписати коло. Центр вписаного кола – точка перетину бісектрис.</p>	$r = \frac{S}{p}$ <p>r – радіус вписаного кола S – площа трикутника p - півпериметр</p>
	<p>Навколо довільного трикутника можна описати коло. Центр описаного кола – точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.</p>	$R = \frac{abc}{4S}$ <p>R – радіус описаного кола S – площа трикутника</p>

Теорема косинусів		
	<p>Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.</p>	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
Теорема синусів		
	<p>У довільному трикутнику відношення будь-якої сторони до синуса протилежного кута стає і дорівнює діаметру описаного навколо нього кола.</p>	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
Розв'язування трикутників		
<p>Розв'язуванням трикутників називається знаходження всіх його шести елементів (тобто трьох сторін і трьох кутів) за будь-якими трьома елементами, що визначають трикутник.</p>		
Види задач на розв'язування трикутників		
<p>Задача 1. Розв'язати трикутник за стороною a і кутами β, γ.</p>	<p>Формули для розв'язання.</p> $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	
<p>Задача 2. Розв'язати трикутник за двома сторонами a, b і кутом між ними γ.</p>	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	
<p>Задача 3. Розв'язати трикутник за трьома сторонами a, b, c.</p>	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	

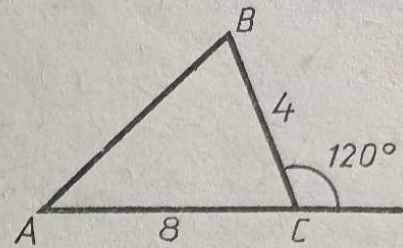
№2.15. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками

А) Обчисліть площу трикутника

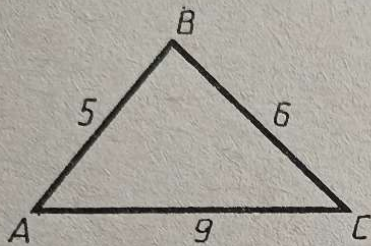
1



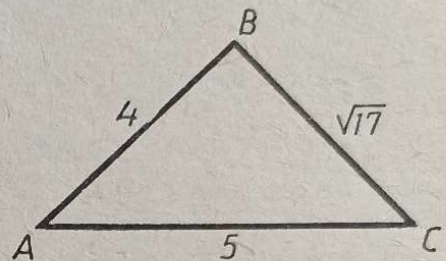
2



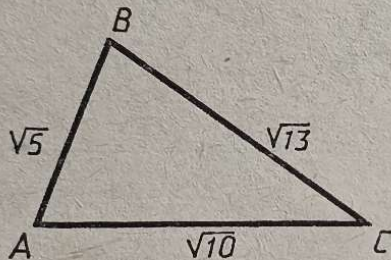
3



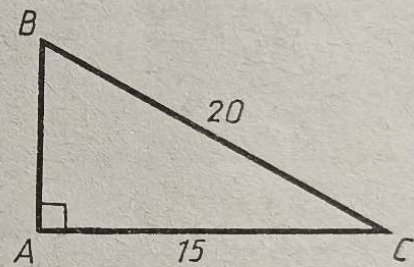
4



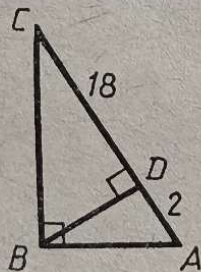
5



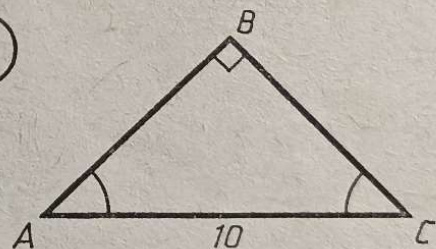
6



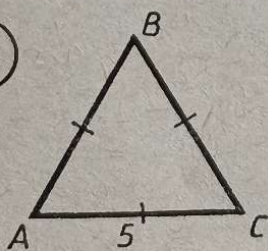
7



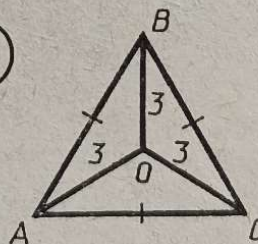
8



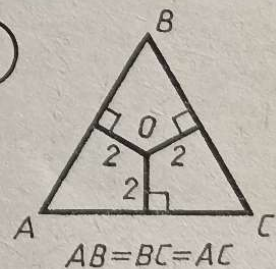
9



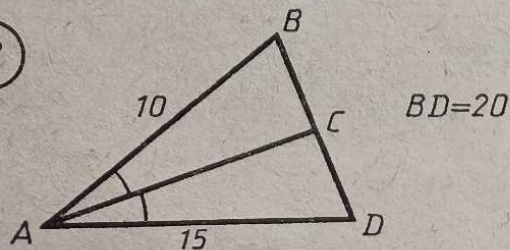
10



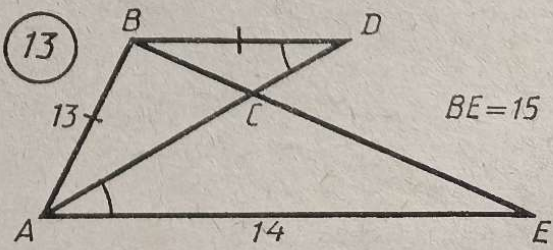
11



12

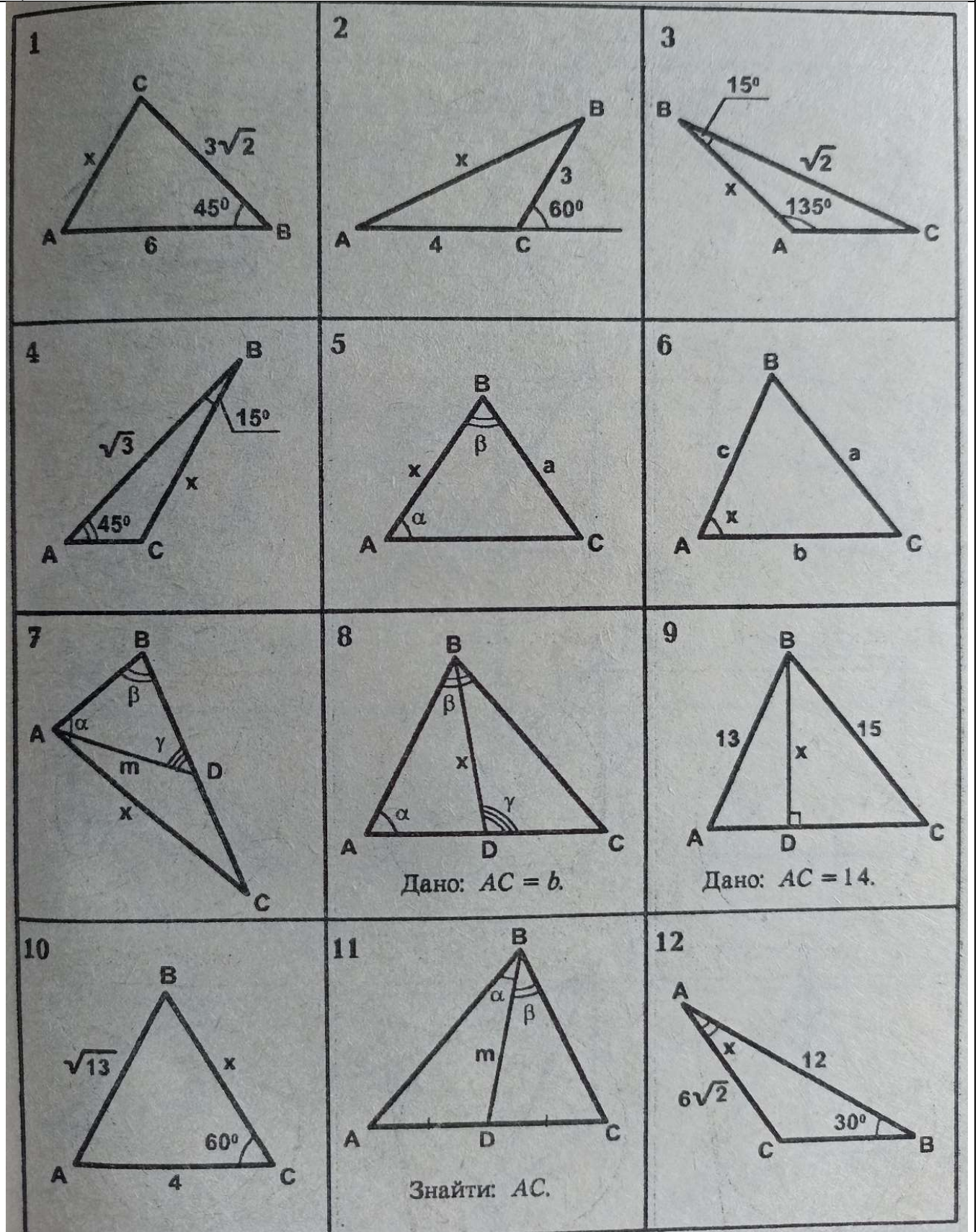


13



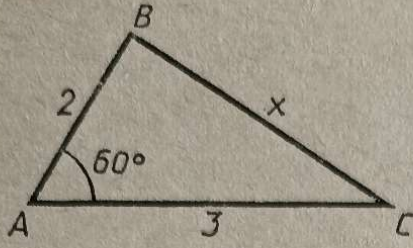
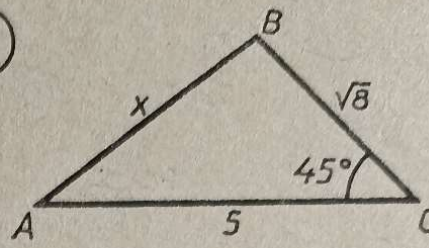
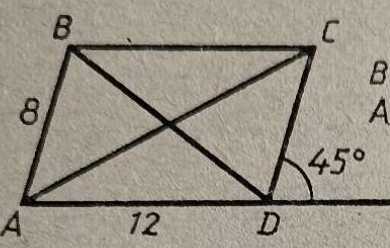
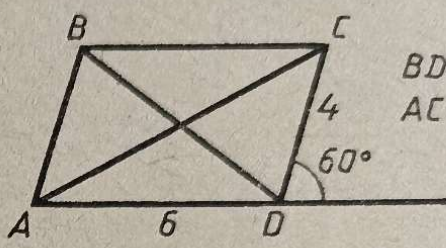
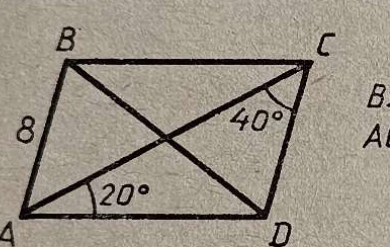
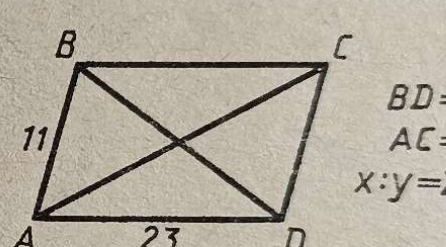
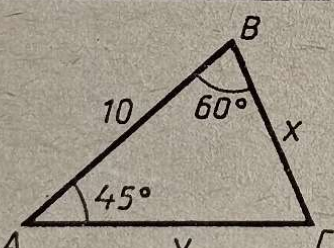
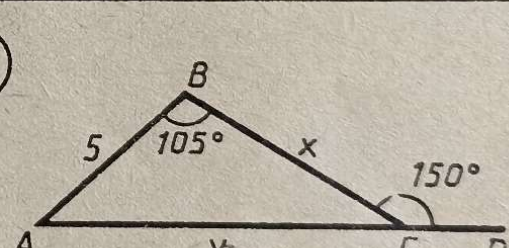
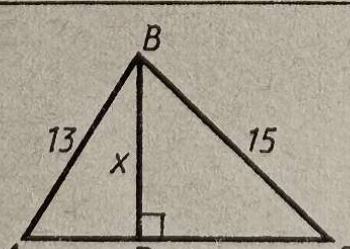
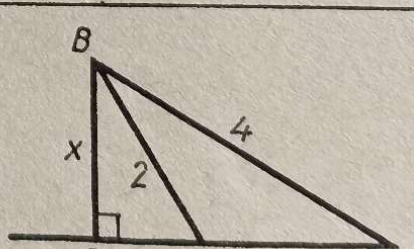
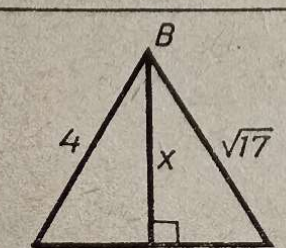
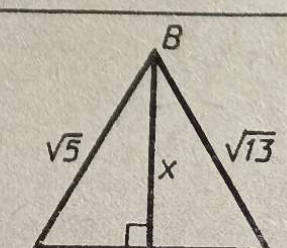
Відповіді: 1) 60; 2) $16\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{2}$; 4) 8; 7) 60; 8) 25.

Б) Знайдіть x



Відповіді: 1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{37}$; 3) 1; 4) $\sqrt{2}$; 9) 12; 10) 3; 1; 12) 15° .

В) Знайдіть x і y , враховуючи що $ABCD$ - паралелограм

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 
<p>9</p> 	<p>10</p> 
<p>11</p> 	<p>12</p> 

Відповіді 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{13}$;

4) $2\sqrt{19}$; $2\sqrt{7}$; 6) 20; 30;

11) 3,2.

№ 2.16. Розв'яжіть задачі на використання теореми косинусів

1) Гіпотенуза АВ прямокутного трикутника АВС дорівнює 9, катет ВС дорівнює 3. На гіпотенузі взята точка М, причому $AM:MB = 1:2$. Знайдіть СМ.

2) Сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$, а дві інші сторони утворюють кут 30° і відносяться як $1:2\sqrt{3}$. Знайдіть ці сторони.

3) Одна зі сторін трикутника дорівнює 6, інша сторона дорівнює $2\sqrt{7}$, а протилежний до неї кут дорівнює 60° . Знайдіть третю сторону трикутника.

4) В рівнобедреному трикутнику с бічною стороною, рівною 4, проведена медіана до бічної сторони. Знайдіть основу трикутника, якщо ця медіана дорівнює 3.

5) Сторони трикутника дорівнюють a, b, c . Знайдіть медіану, проведену до сторони, рівній c .

6) Сторони трикутника дорівнюють 11, 13 і 12. Знайдіть медіану, проведену до більшої сторони.

7) В трикутнику дві сторони дорівнюють 11 і 23, а медіана, проведена до третьої, дорівнює 10. Знайдіть третю сторону.

8) В рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона дорівнюють відповідно 5 і 20. Знайдіть бісектрису кута при основі.

9) В трикутнику АВС відомо, що $AC = 13, AB = 14, BC = 15$. На стороні ВС взята точка М така, що $CM:MB = 1:2$. Знайдіть АМ.

10) В трикутнику АВС відомо, що $AB = 12, AC = 15, BC = 18$. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини найбільшого кута.

11) Медіани трикутника АВС, проведені з вершин В і С, дорівнюють 6 і 9 і перетинаються в точці М. Відомо, що $\angle BMC = 120^\circ$. Знайдіть сторони трикутника.

12) Точка М лежить на стороні АС рівностороннього трикутника АВС зі стороною, рівною $3a$, причому $AM:MC = 1:2$. Точки К і L, що лежать на сторонах АВ і ВС, є вершинами другого рівностороннього трикутника МKL. Знайдіть його сторону.

13) В трикутнику АВС проведені висоти AD і CE. Знайдіть АС, якщо $BC = a, AB = b, \frac{DE}{AC} = k$.

14) Дано трикутник ABC. Відомо, що $AB = 4$, $AC = 2$ і $BC = 3$. Бісектриса кута BAC перетинає сторону BC в точці K. Пряма, що проходить через точку B і паралельна AC, перетинає продовження бісектриси AK в точці M. Знайдіть KM.

15) Медіана AD гострокутного трикутника ABC дорівнює 5. Проекції цієї медіани на сторони AB і AC дорівнюють 4 і $2\sqrt{5}$ відповідно. Знайдіть сторону BC.

. Відповіді	10) 10.	11) $2\sqrt{19}$; $4\sqrt{7}$; $2\sqrt{13}$.	12) $a\sqrt{3}$	14) $2\sqrt{6}$.	15) $2\sqrt{10}$.
-------------	---------	---	-----------------	-------------------	--------------------

№ 2.17. Розв'яжіть задачі на використання теореми синусів

1) В трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = a$; AD – бісектриса. Знайдіть BD.

2) Дано трикутник ABC, в якому $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45^\circ$. Знайдіть кут BAC.

3) Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника з гострим кутом, рівним 30° , якщо відомо, що бісектриса, проведена з вершини прямого кута, дорівнює a .

4) За допомогою теореми синусів доведіть, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.

5) В трикутнику відомі сторона a і два прилеглих до неї кута β і γ . Знайдіть бісектрису, проведenu з вершини третього кута.

6) Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути, рівні α і β відповідно. Знайдіть ці сторони.

7) Дано трикутник ABC, в якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні AB взята точка D, а на стороні AC – точка M, причому CD – бісектриса трикутника ABC, $DM \parallel BC$ і $AM = a$. Знайдіть CM.

8) Кути трикутника дорівнюють α , β і γ , а периметр дорівнює P . Знайдіть сторони трикутника.

9) Дві сторони трикутника дорівнюють a і b . Знайдіть третю сторону трикутника, якщо його кут, що лежить навпроти третьої сторони, в два рази більше кута, що лежить навпроти сторони, рівній b .

. Відповіді	2) 30° .	3) $a\sqrt{6}(1+\sqrt{3})/3\text{см}$	
-------------	-----------------	---------------------------------------	--

№ 2.18. Розв'яжіть задачі на знаходження площі трикутника

- 1) Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 61 см, а висота, проведена до основи, - 60 см. Знайдіть площу трикутника.
- 2) Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см², а бічна сторона – 13 см.
- 3) Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює b , а кут при основі дорівнює α .
- 4) Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h , а кут при вершині дорівнює β . Знайдіть площу трикутника.
- 5) Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c .
- 6) Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, - 9 см.
- 7) Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як 8:3, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см. Знайдіть площу трикутника.
- 8) Знайдіть площу трикутника ABC, якщо відомо, що $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.
- 9) Дві сторони трикутника дорівнюють 10 і 12, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 5. Знайдіть площу трикутника.
- 10) Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 і 8. Знайдіть висоту, опущену на гіпотенузу.
- 11) Знайдіть площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 1 і $\sqrt{15}$, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 2.
- 12) В трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Знайдіть бісектрису AM.
- 13) Сторони трикутника дорівнюють a і b , а кут між ними дорівнює α . Знайдіть бісектрису, проведену з вершини цього кута.
- 14) В трикутнику ABC відомо, що $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Знайдіть площу трикутника ABC.
- 15) Площа трикутника ABC дорівнює S , $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Знайдіть BC.

16) Дві сторони трикутника дорівнюють $2\sqrt{2}$ і 3, площа трикутника дорівнює 3. Знайдіть третю сторону.

17) Медіани AN і BM трикутника ABC дорівнюють 6 і 9 відповідно і перетинаються в точці K , причому кут AKB дорівнює 30° . Знайдіть площу трикутника ABC .

18) Відстань від точки M , що лежить всередині трикутника ABC , до його сторін AC і BC відповідно дорівнюють 2 і 4. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB , якщо $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.

19) Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює h . Знайдіть площу трикутника.

20) Точки B_1 і C_1 – основи висот трикутника ABC , площа якого дорівнює S , а кут BAC дорівнює α . Знайдіть площу трикутника AB_1C_1 .

21) Знайдіть площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 35 і 14, а бісектриса кута між ними дорівнює 12.

22) Знайдіть площу трикутника, медіани якого дорівнюють 24, 45 і 51.

23) З точки P , що лежить всередині гострокутного трикутника ABC , опущені перпендикуляри на його сторони. Довжини сторін і опущених на них перпендикулярів відповідно рівні a і k ; b і m ; c і n . Знайдіть відношення площі трикутника ABC до площі трикутника, вершинами якого є основи перпендикулярів.

24) На відрізьку AB лежать точки C і D , причому точка C – між точками A і D . Точка M взята так, що прямі AM і MD перпендикулярні, а прямі CM і MB також перпендикулярні. Знайдіть площу трикутника AMB , якщо відомо, що величина кута CMD дорівнює α , а площі трикутників AMD і CMB рівні S_1 і S_2 відповідно.

25) У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C , кутом B , рівним 30° , і катетом $CA = 1$ проведена медіана CD . Крім того, з точки D під кутом 15° до гіпотенузи, проведена пряма, що перетинає відрізок BC в точці F . Знайти площу трикутника CDF .

26(С) У трикутнику ABC : $AB = 13$ см, $BC = 21$ см, $AC = 20$ см. Визначити висоту, опущену на сторону BC .

27(Д) Сума двох сторін трикутника дорівнює 15 см, а висоти, опущені на ці сторони, дорівнюють 2 см і 8 см. Визначити площу трикутника.

28(Д) Дві сторони трикутника дорівнюють 20 см і 28 см, а кут проти першої з них дорівнює 45° . Знайти площу трикутника.

29(Д) Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Визначити площі трикутників, на які розбивається даний трикутник висотою і медіаною, проведеними до середньої за величиною сторони.

30(Д) Визначити площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 27 см і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.

31(Д) Сторони трикутника відносяться між собою, як 4:13:15, а площа дорівнює 24 см². Знайти сторони трикутника.

32(Д) Основа трикутника дорівнює 20 см, медіани бічних сторін дорівнюють 18 см і 24 см. Знайти площу трикутника.

33(Д) Сторони трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до меншої сторони.

34(Д) Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до більшої сторони.

35(Д). На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle A=90^\circ$) позначено точку K . Знайдіть площу трикутника KBC , якщо $AK=8$ см, $BK=17$ см, $BC=25$ см.

36(В) Одна із сторін трикутника дорівнює 40 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 36 і 48 см. Обчислити площу трикутника.

37(В) Медіани трикутника відповідно дорівнюють 48, 60 і 36 см. Обчислити площу трикутника.

Відповіді	9) 48.	11) $0,5\sqrt{15}$.	16) $\sqrt{5}$.	17) 18.	18) 5,8.
------------------	--------	----------------------	------------------	---------	----------

№2.19. Використайте розв'язування трикутників.

1(С) Один з кутів трикутника дорівнює половині суми двох інших, а другий дорівнює третій частині від суми двох інших. Обчислити кути трикутника.

2(С) Різниця двох сторін трикутника 1 см. Знайти ці сторони, якщо відомо, що вони лежать проти кутів 45° і 30° .

3(С) Знайти найменшу із висот трикутника, якщо його сторони мають довжини 15 см, 17 см, 8 см.

4(С) Дві сторони трикутника мають довжини 3 см і 4 см, а медіани, що проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти третю сторону трикутника.

5(С) Висота трикутника, що має довжину 6 см, ділить кут при вершині у відношенні 2:1, а основу трикутника - на відрізки, менший з яких дорівнює 3 см. Знайти сторони трикутника.

6(С) Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 18 см, а кути при основі 45° і 60° . Знайти сторони трикутника.

7(С) Визначити в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут 60° і відповідно дорівнюють 2 см і 8 см.

8(С) Визначити в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут 120° і відповідно дорівнюють 8 см и 5 см.

9(С) Визначити в трикутнику третю сторону, якщо дві інші утворюють кут 45° і відповідно дорівнюють 8 см і 3 см.

10(С) Сторони трикутника відносяться між собою як $13 : 14 : 15$, а висота, опущена на середню за величиною сторону, дорівнює 12 см. Знайти сторони трикутника.

11(С) Дві сторони трикутника відповідно дорівнюють 8 см й $\sqrt{7}$ см, а кут, що лежить проти більшої з них, дорівнює 60° . Визначити третю сторону.

12(С) Одна з сторін трикутника дорівнює 13 см, а кут, що лежить проти цієї сторони, дорівнює 120° ; сума двох інших сторін трикутника дорівнює 15 см. Визначити сторони трикутника.

13(С) Основа трикутника дорівнює 14 см, а бічні сторони дорівнюють 15 см і 13 см. Визначити медіану основи.

14(С) Основа трикутника дорівнює 3 м, а прилеглі до неї кути дорівнюють 30° і 45° . Визначити бічні сторони трикутника.

15(С) Одна із сторін трикутника дорівнює 35 см, а дві інші відносяться як $3:8$ і утворюють кут 60° . Знайдіть невідомі сторони трикутника.

16(С) Дві сторони трикутника відносяться як $3\sqrt{2}:7$, а кут між ними дорівнює 45° . Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона трикутника дорівнює 30 см.

17(Д) Висота AF ділить сторону BC трикутника ABC на відрізки BF і CF . Знайдіть довжину сторони AC , якщо $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle ABC = 60^\circ$, а сторона AB дорівнює 18 см.

18(Д) Висота AM трикутника ABC ділить його сторону BC на відрізки BM і MC . Знайдіть довжину відрізка MC , якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC=26$ см, $\angle B=45^\circ$.

19(Д) Висота NE трикутника FNP ділить його сторону FP на відрізки FE і PE . Знайдіть довжину відрізка NF , якщо $EP=8$ см, $NP=17$ см, $\angle F=60^\circ$.

20(Д) Знайдіть площу круга, вписаного в трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.

21(Д) Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см.

22(Д) Висота BD трикутника ABC ділить його сторону AC на відрізки AD і CD . Знайдіть довжину відрізка CD , якщо $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$.

23(Д) Сторони трикутника дорівнюють 14 см, 13 см і 15 см. Всередині трикутника дано точку на відстані 5 см від першої сторони і на відстані 2 см від другої. Знайти відстань від даної точки до третьої сторони.

24(Д) Висота BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки AD і CD так, що $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть довжину сторони BC , якщо $\angle A = 30^\circ$.

25(В) У трикутнику основа дорівнює 56 см, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно $8\sqrt{37}$ і 48 см. Обчислити діаметр описаного кола.

26(В) У трикутнику дві бічні сторони дорівнюють 52 і 60 см, а висота, проведена до основи, дорівнює 48 см. Обчислити діаметр вписаного кола.

27(В) У трикутнику висота дорівнює 48 см. Вона проведена до основи і ділить її на відрізки 20 см і 36 см. Обчислити діаметр описаного кола.

28(В) У трикутнику основа дорівнює 56 см. До неї проведені медіана і висота, відстань між основами яких, дорівнює 8 см, Більша бічна сторона дорівнює 60 см. Обчислити радіус вписаного кола.

29(В) У трикутнику з однієї вершини проведені висота, бісектриса, медіана. Відстані від другої вершини трикутника до основ висоти, бісектриси, медіани відповідно дорівнюють 42, 50 і 51 см. Обчислити периметр трикутника.

30(В) У трикутнику бічні сторони дорівнюють 159 і 156 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 144 см. Обчислити відрізки, на які ділить третю сторону бісектриса, що проведена до неї.

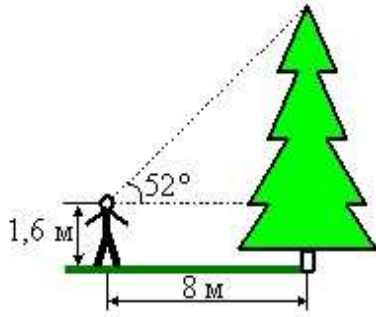
31(В) Сторони трикутника відповідно дорівнюють 75, 51 та 78 см. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його висота, проведена до найменшої сторони.

32(В) Сторони трикутника відповідно дорівнюють 78, 75 та 51 см. Обчислити площі частин трикутника, на які ділить його бісектриса найменшого кута.

. Відповіді	1(С) $45^{\circ}, 60^{\circ}, 75^{\circ}$.	2(С) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1), \sqrt{2}+1$.	4(С) $\sqrt{5}$ см.
5(С) $3\sqrt{5}, 10, 11$ см.	6(С) $12\sqrt{3}, 18\sqrt{2}, 6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ см.		7(С) $2\sqrt{21}$ см.
8(С) $\sqrt{129}$ см.	10(С) 13 см, 14 см, 15 см.		12(С) 7 см, 8 см.
13(С) $2\sqrt{37}$ см.			

2.5. Задачі практичного змісту.

1. За рисунком знайдіть висоту ялинки.



2. Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб по ній можна було піднятися на дах будинку заввишки 9 м, якщо ставити її під кутом 70° до поверхні землі?

3. Проїхавши від старту по прямолінійній ділянці шосе 300 м, велосипедист опинився на 11 м вище, ніж точка старту. Знайдіть кут підйому шосе на цій ділянці.

4. Під яким кутом падає на землю сонячний промінь, якщо вертикальна жердина завдовжки 1,5 м відкидає тінь завдовжки 0,7 м?

5. Безпосереднє вимірювання відстані між пунктами А і В неможливо. Тому позначили точку С і знайшли таку точку D, що $CD = BC$ і $\angle DCA = \angle BCA$ (рис.2.1). Далі виміряли відстань від D до А, вважаючи, що $AB = AD$. Чи вірне таке вимірювання?

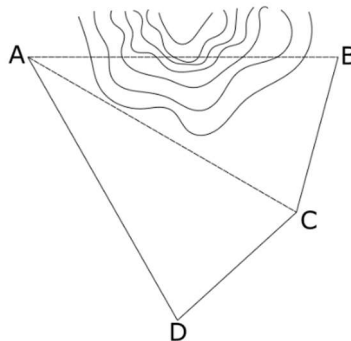


Рис. 2.1

6. Покажіть як за допомогою перегинань вирізаного з паперу гострокутного трикутника знайти в ньому такі лінії і точки: висоту, проведену з даної вершини; медіану, проведену до даної сторони; центр вписаного і описаного кіл.

7. За допомогою перегинань довільного паперового трикутника проілюструйте той факт, що сума кутів трикутника дорівнює 180° .

8. Кусок тканини має форму трикутника, як перегинанням тканини з'ясувати чи є цей кусок прямокутним, гострокутним чи тупокутним?

2.7. Вправи рівня ЗНО

Розв'яжіть задачі ЗНО попередніх років

1.

Установіть відповідність між початком речення (1–3) і його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

- 1 Трикутник, у якого центри вписаного й описаного кіл збігаються, зображено на
- 2 Трикутник, один із внутрішніх кутів якого дорівнює 30° , зображено на
- 3 Трикутник, у якого радіус описаного кола більший за 5 см, зображено на

Закінчення речення

- А рис. 1.
 Б рис. 2.
 В рис. 3.
 Г рис. 4.
 Д рис. 5.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

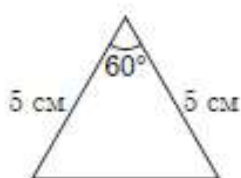


Рис. 1

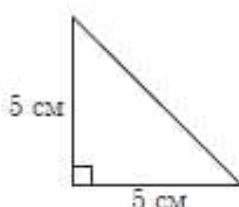


Рис. 2

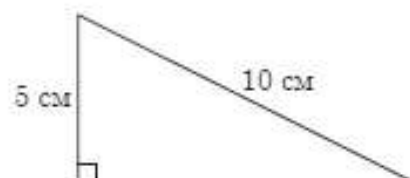


Рис. 3

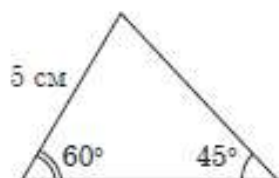


Рис. 4

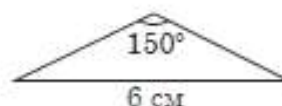


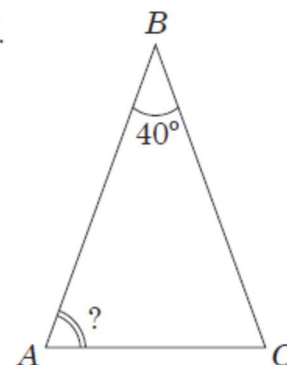
Рис. 5

№18,
2021

2.

У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC $\angle B = 40^\circ$.
 Визначте градусну міру кута A .

А	Б	В	Г	Д
80°	70°	60°	50°	40°



№5, 2021д

3. У трикутнику ABC кут B – тупий. Які з наведених тверджень є правильними?
 I. $\angle A + \angle C < 90^\circ$.
 II. $AB + BC < AC$.
 III. Центр кола, описаного навколо трикутника ABC , лежить поза його межами.

А	Б	В	Г	Д
лише I і II	лише I	лише II і III	I, II і III	лише I і III

№13, 2019 пробне

4. 14. Які з наведених тверджень є правильними?

- I. У будь-який трикутник можна вписати коло.
 II. У будь-який прямокутник можна вписати коло.
 III. У будь-який ромб можна вписати коло.

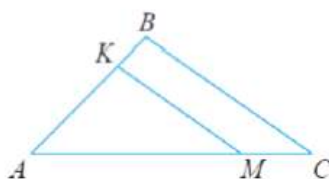
А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II і III	лише I і II	лише I і III	I, II і III

№14, 2019 д

5. Довжини сторін трикутника відносяться як 3:4:5. Визначте довжину найбільшої сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см. № 11, 2017

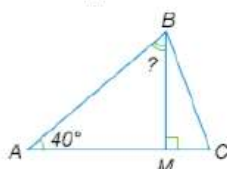
А	Б	В	Г	Д
20 см	24 см	30 см	35 см	36 см

6. На сторонах AB та AC трикутника ABC задано точки K і M відповідно, $KM \parallel BC$ (див. рисунок). Визначте довжину відрізка KM , якщо $AK = 6$ см, $KB = 2$ см, $BC = 10$ см. № 11, 2016

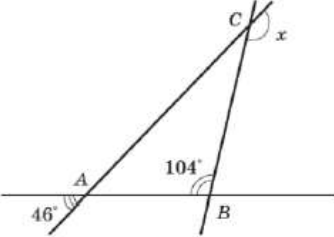
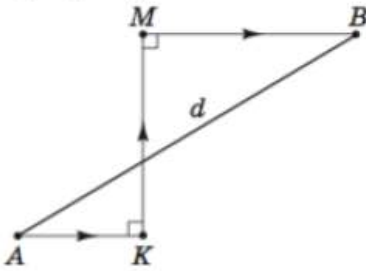
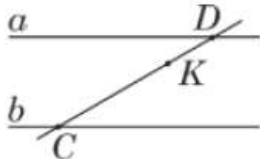


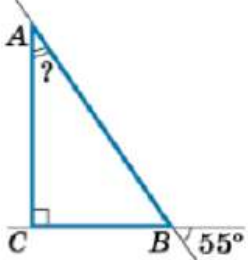
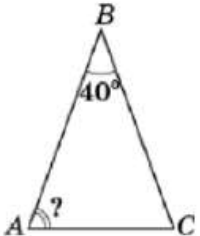
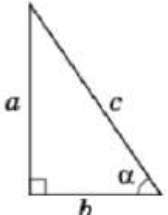
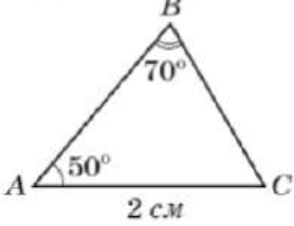
А	Б	В	Г	Д
6 см	7 см	7,5 см	8 см	8,5 см

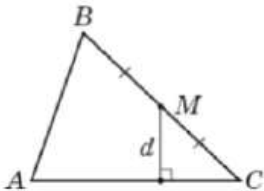
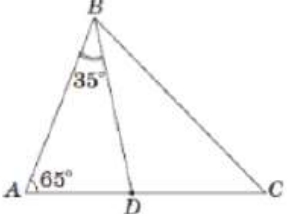
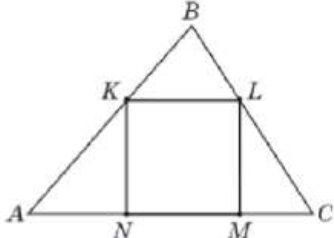
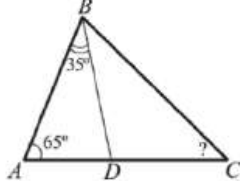
7. У трикутнику ABC проведено висоту BM (див. рисунок). Визначте градусну міру кута MBA , якщо $\angle A = 40^\circ$ № 2, 2014



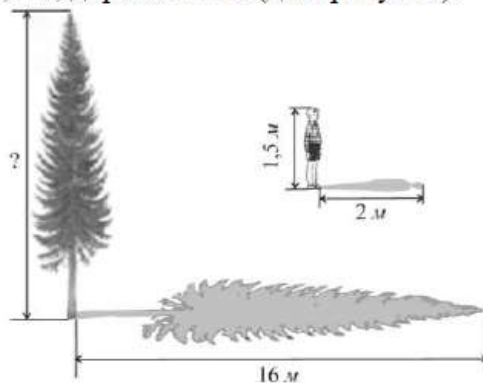
А	Б	В	Г	Д
20°	45°	50°	60°	90°

8.	<p>У трикутнику ABC: $AB = 6$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Обчисліть довжину медіани, проведеної з вершини C? № 24, 2010_II</p> <table border="1" data-bbox="427 232 1366 315"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\sqrt{5}$ см</td> <td>$\sqrt{14}$ см</td> <td>$2\sqrt{2}$ см</td> <td>$\sqrt{7}$ см</td> <td>$\sqrt{17}$ см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	$\sqrt{5}$ см	$\sqrt{14}$ см	$2\sqrt{2}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{17}$ см
А	Б	В	Г	Д							
$\sqrt{5}$ см	$\sqrt{14}$ см	$2\sqrt{2}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{17}$ см							
9.	<p>Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а висота, опущена на неї – 8 см. Знайдіть довжину основи трикутника. № 10, 2010_I</p> <table border="1" data-bbox="427 423 1366 506"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6 см</td> <td>$4\sqrt{2}$ см</td> <td>12 см</td> <td>$4\sqrt{5}$ см</td> <td>16 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	6 см	$4\sqrt{2}$ см	12 см	$4\sqrt{5}$ см	16 см
А	Б	В	Г	Д							
6 см	$4\sqrt{2}$ см	12 см	$4\sqrt{5}$ см	16 см							
10.	<p>Знайдіть градусну міру кута x, позначеного на рисунку № 22, 2009</p>  <table border="1" data-bbox="459 831 1329 902"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>95°</td> <td>120°</td> <td>140°</td> <td>150°</td> <td>160°</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	95°	120°	140°	150°	160°
А	Б	В	Г	Д							
95°	120°	140°	150°	160°							
11.	<p>У трикутнику ABC, $BC = 8$ см, $\angle BAC = 45^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника. № 23, 2009</p> <table border="1" data-bbox="427 1001 1366 1084"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$8\sqrt{2}$ см</td> <td>8 см</td> <td>$8\sqrt{3}$ см</td> <td>12 см</td> <td>16 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	$8\sqrt{2}$ см	8 см	$8\sqrt{3}$ см	12 см	16 см
А	Б	В	Г	Д							
$8\sqrt{2}$ см	8 см	$8\sqrt{3}$ см	12 см	16 см							
12.	<p>Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а один із катетів – 6 см. № 16, 2008</p> <table border="1" data-bbox="376 1189 1426 1267"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>15 см²</td> <td>24 см²</td> <td>30 см²</td> <td>48 см²</td> <td>60 см²</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	15 см ²	24 см ²	30 см ²	48 см ²	60 см ²
А	Б	В	Г	Д							
15 см ²	24 см ²	30 см ²	48 см ²	60 см ²							
13.	<p>На рисунку зображено траєкторію руху автомобіля з пункту A до пункту B, що складається з трьох прямолінійних ділянок AK, KM та MB. Визначте відстань d між пунктами A та B, якщо $AK = 60$ км, $KM = 120$ км та $MB = 160$ км (вважайте, що зображені на рисунку відрізки лежать в одній площині). № 29, 2012</p> 										
14.	<p>На рисунку зображено паралельні прямі a і b та січну CD. Знайдіть відстань між прямими a і b, якщо $CK = 5$ см, $KD = 2$ см, а відстань від точки K до прямої a дорівнює 1 см. № 11, 2018</p> <table border="1" data-bbox="432 1861 1050 1939"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2,5 см</td> <td>3 см</td> <td>3,5 см</td> <td>4 см</td> <td>4,5 см</td> </tr> </tbody> </table> 	А	Б	В	Г	Д	2,5 см	3 см	3,5 см	4 см	4,5 см
А	Б	В	Г	Д							
2,5 см	3 см	3,5 см	4 см	4,5 см							

15.	Визначте градусну міру кута B трикутника ABC , якщо $\angle A + \angle C = 70^\circ$	№2, 2016д										
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>20°</td> <td>70°</td> <td>110°</td> <td>145°</td> <td>160°</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	20°	70°	110°	145°	160°
А	Б	В	Г	Д								
20°	70°	110°	145°	160°								
16.	Якому значенню серед наведених може дорівнювати довжина сторони AC трикутника ABC , якщо $AB = 3$ см, $BC = 10$ см?	№ 8, 2016										
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>3 см</td> <td>5 см</td> <td>7 см</td> <td>11 см</td> <td>15 см</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	3 см	5 см	7 см	11 см	15 см
А	Б	В	Г	Д								
3 см	5 см	7 см	11 см	15 см								
17.	Катет CB і гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC лежать на прямих, що перетинаються під кутом 55° (див. рисунок). Визначте градусну міру $\angle CAB$.											
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>15°</td> <td>25°</td> <td>35°</td> <td>45°</td> <td>55°</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	15°	25°	35°	45°	55°
А	Б	В	Г	Д								
15°	25°	35°	45°	55°								
18.	На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Визначте градусну міру кута BAC , якщо $\angle B = 40^\circ$											
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>80°</td> <td>70°</td> <td>60°</td> <td>50°</td> <td>40°</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	80°	70°	60°	50°	40°
А	Б	В	Г	Д								
80°	70°	60°	50°	40°								
19.	На рисунку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c та гострим кутом α . Укажіть правильну рівність.											
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>$\cos\alpha = \frac{a}{b}$</td> <td>$\cos\alpha = \frac{c}{b}$</td> <td>$\cos\alpha = \frac{a}{c}$</td> <td>$\cos\alpha = \frac{c}{a}$</td> <td>$\cos\alpha = \frac{b}{c}$</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
А	Б	В	Г	Д								
$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$								
20.	У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту BM . Визначте довжину сторони AB , якщо $BM = 12$, $\angle A = \alpha$.	№ 13, 2014										
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>$\frac{12}{\cos\alpha}$</td> <td>$12\cos\alpha$</td> <td>$12\operatorname{tg}\alpha$</td> <td>$12\sin\alpha$</td> <td>$\frac{12}{\sin\alpha}$</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	$\frac{12}{\cos\alpha}$	$12\cos\alpha$	$12\operatorname{tg}\alpha$	$12\sin\alpha$	$\frac{12}{\sin\alpha}$
А	Б	В	Г	Д								
$\frac{12}{\cos\alpha}$	$12\cos\alpha$	$12\operatorname{tg}\alpha$	$12\sin\alpha$	$\frac{12}{\sin\alpha}$								
21.	У трикутнику ABC задано $AC = 2$ см, $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ (див. рисунок). Визначте BC (у см) за теоремою синусів.	№ 14, 2013_II										
												
<table border="1"> <tr> <td>А</td> <td>Б</td> <td>В</td> <td>Г</td> <td>Д</td> </tr> <tr> <td>$BC = \frac{2\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}$</td> <td>$BC = \frac{\sin 50^\circ}{2\sin 70^\circ}$</td> <td>$BC = \frac{2}{\sin 50^\circ \sin 70^\circ}$</td> <td>$BC = \frac{\sin 70^\circ}{2\sin 50^\circ}$</td> <td>$BC = \frac{2\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$</td> </tr> </table>			А	Б	В	Г	Д	$BC = \frac{2\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}$	$BC = \frac{\sin 50^\circ}{2\sin 70^\circ}$	$BC = \frac{2}{\sin 50^\circ \sin 70^\circ}$	$BC = \frac{\sin 70^\circ}{2\sin 50^\circ}$	$BC = \frac{2\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$
А	Б	В	Г	Д								
$BC = \frac{2\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ}$	$BC = \frac{\sin 50^\circ}{2\sin 70^\circ}$	$BC = \frac{2}{\sin 50^\circ \sin 70^\circ}$	$BC = \frac{\sin 70^\circ}{2\sin 50^\circ}$	$BC = \frac{2\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$								

22.	<p>У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC, $AC = 24$ см (див. рисунок). Знайдіть відстань d від точки M до сторони AC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см². 16, 2013_II</p> <table border="1" data-bbox="343 268 1157 347"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2 см</td> <td>3 см</td> <td>4 см</td> <td>6 см</td> <td>8 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	2 см	3 см	4 см	6 см	8 см	
А	Б	В	Г	Д								
2 см	3 см	4 см	6 см	8 см								
23.	<p>У трикутнику ABC: $\angle A = 65^\circ$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA, якщо $\angle ABD = 35^\circ$. № 6, 2013_I</p> <table border="1" data-bbox="359 504 1157 582"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>35°</td> <td>45°</td> <td>50°</td> <td>55°</td> <td>80°</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	35°	45°	50°	55°	80°	
А	Б	В	Г	Д								
35°	45°	50°	55°	80°								
24.	<p>У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см. № 20, 2013_I</p> <table border="1" data-bbox="343 795 1157 873"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>7,5 см</td> <td>12,5 см</td> <td>17,5 см</td> <td>15 см</td> <td>20 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	7,5 см	12,5 см	17,5 см	15 см	20 см	
А	Б	В	Г	Д								
7,5 см	12,5 см	17,5 см	15 см	20 см								
25.	<p>У прямокутнику $ABCD$: $BC = 80$, $AC = 100$. Через точки M і K, що належать сторонам AB і BC відповідно, проведено пряму, паралельну AC. Знайдіть довжину більшої сторони трикутника MBK, якщо $BK = 20$. № 18, 2012_I</p> <table border="1" data-bbox="414 1019 1157 1097"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>60</td> <td>50</td> <td>30</td> <td>25</td> <td>15</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	60	50	30	25	15	
А	Б	В	Г	Д								
60	50	30	25	15								
26.	<p>У трикутнику ABC. $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a, паралельна стороні AB, перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC, якщо $MC = 5$ см. № 21, 2011</p> <table border="1" data-bbox="462 1265 1157 1344"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>15 см</td> <td>24 см</td> <td>48 см</td> <td>21 см</td> <td>26 см</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	15 см	24 см	48 см	21 см	26 см	
А	Б	В	Г	Д								
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см								
27.	<p>У трикутнику ABC: $\angle A = 65^\circ$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA, якщо $\angle ABD = 35^\circ$. № 2, 2009</p> <table border="1" data-bbox="327 1456 1157 1534"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>35°</td> <td>45°</td> <td>50°</td> <td>55°</td> <td>65°</td> </tr> </tbody> </table>	А	Б	В	Г	Д	35°	45°	50°	55°	65°	
А	Б	В	Г	Д								
35°	45°	50°	55°	65°								

28. У сонячний день довжина тіні від дерева становить 16 м. У той самий час тінь від хлопчика, який має зріст 1,5 м, дорівнює 2 м (див. рисунок).



Визначте висоту дерева.

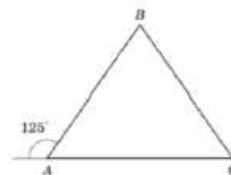
№ 7, 2009

А	Б	В	Г	Д
12 м	12,5 м	13 м	14 м	15,5 м

29. Градусна міра зовнішнього кута A рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) становить 125° . Знайдіть градусну міру внутрішнього кута B .

№ 17, 2007

А	Б	В	Г	Д
30°	40°	50°	60°	70°



30. Рівносторонній трикутник ABC та рівнобедрений трикутник ACD , у якому $AC = DC$ і $\angle ACD = 40^\circ$, лежать в одній площині (див. рисунок). Установіть відповідність між кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).

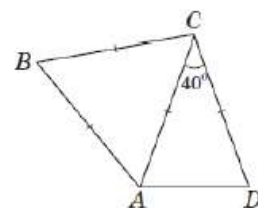
№ 23, 2017д

Вираз

Твердження про

значення виразу

1	$\angle ABC$	А	45°
2	$\angle ADC$	Б	50°
3	кут між прямими AB і AD	В	60°
4	кут між бісектрисами кутів BAC і CAD	Г	65°
		Д	70°




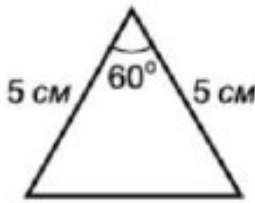
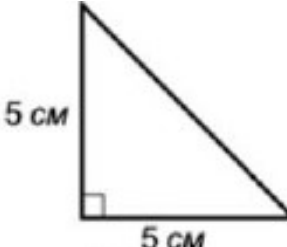
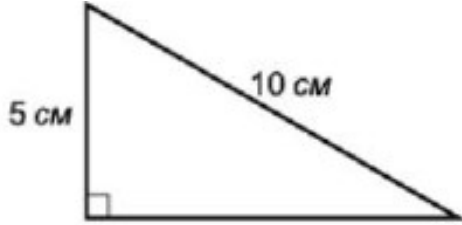
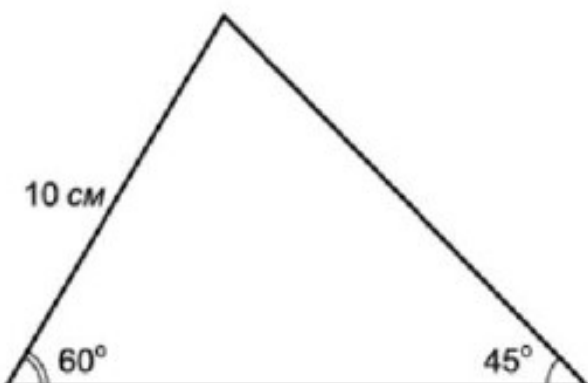
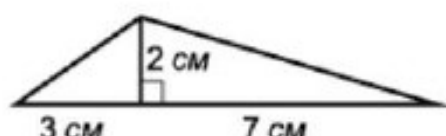
31. У трикутнику ABC : $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. До кожного початку речення (1–4) та доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

№ 23, 2017

Початок речення

Закінчення речення

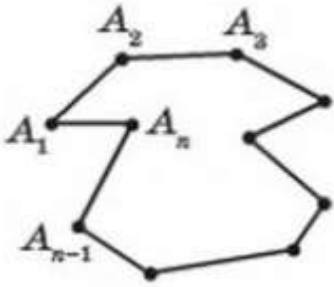
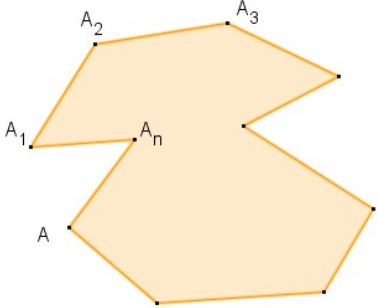
1	Якщо $a = b = c$	А	то $\angle C = 30^\circ$
2	Якщо $c^2 = a^2 + b^2$	Б	то $\angle C = 45^\circ$
3	Якщо $a = c = \frac{b}{\sqrt{2}}$	В	то $\angle C = 60^\circ$
4	Якщо $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$	Г	то $\angle C = 90^\circ$
		Д	то $\angle C = 120^\circ$

<p>32.</p>	<p>У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відстані від середини медіани BM до катетів AC і AB дорівнюють 5 см і 6 см відповідно.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Визначте довжину катета AC (у см) 2. Визначте радіус (у см) кола, описаного навколо трикутника ABC 	 <p>№ 26, 2018</p>
<p>33.</p>	<p>У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4,5$ см, $MB = 6$ см.</p> <p>№ 29, 2013_II</p>	
<p>34.</p>	<p>(Задача Л. Пізанського, XII—XIII ст.) Дві вежі, одна з яких – 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах). № 24, 2006</p>	
<p>35.</p>	<p>Установіть відповідність між запитанням (1–4) та правильною відповіддю на нього (А–Д) по рисунках, на яких наведено інформацію про п'ять трикутників. № 23, 2015_II</p> <p><i>Запитання</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1 На якому рисунку зображено трикутник, у якого центри вписаного й описаного кіл збігаються? 2 На якому рисунку зображено трикутник, один із внутрішніх кутів якого дорівнює 30°? 3 На якому рисунку зображено трикутник, площа якого дорівнює 10 см²? 4 На якому рисунку зображено трикутник, у якого діаметр описаного навколо нього кола дорівнює $10\sqrt{2}$ см? <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>Рис. 1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Рис. 2</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Рис. 3</p> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  <p>Рис. 4</p> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  <p>Рис. 5</p> </div>	

. Відповіді	5)В 6)В	7)В 8)А	9)Г 10)Г	12)Б 13)200км	14)В
15)В 16)Г	17)В 18)Б	19)Д 20)Д	21)Д 22)В	23)Б 24)Г	25)Г
26)Б 27)Б	28)А 29)Д	32)24см, 13см	33)5,25см.		

Розділ 3. МНОГОКУТНИКИ. ЧОТИРИКУТНИКИ

3.1. Многокутники

Многокутник	Розглянемо фігуру, яка складається з точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ таких, що жодні два сусідніх відрізків не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок, то цю частину площини разом з відрізками $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ називають многокутником	
Периметр многокутника	Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.	
Опуклий многокутник	Многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого називається опуклим.	
Властивості опуклого многокутника	1) опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону; 2) опуклий многокутник містить будь-яку свою діагональ.	
Теорема про суму кутів опуклого n-кутника	Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180^\circ (n-2)$.	
Плоский многокутник	Многокутник разом з його внутрішньою областю називається плоским многокутником	
Площа многокутника	Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості: 1) Рівні многокутники мають рівні площі 2) Якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників За одиницю виміру площі беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини	
Рівновеликі многокутники	Многокутники, які мають рівні площі, називають рівновеликими.	

Тренувальні вправи

№3.1. Розв'яжіть задачі на властивості многокутника.

- 1) Знайдіть суму кутів опуклого п'ятикутника.
- 2) Знайдіть суму кутів опуклого восьмикутника.
- 3) Знайдіть суму кутів опуклого двадцятичотирикутника.
- 4) Знайдіть суму кутів опуклого дев'ятикутника.

- 5) Знайдіть суму кутів опуклого шістнадцятикутника.
- 6) Знайдіть суму кутів опуклого сімнадцятикутника.
- 7) Чи існує опуклий багатокутник із сумою кутів 1800° ?
- 8) Чи існує опуклий багатокутник із сумою кутів 720° ?
- 9) Чи існує опуклий багатокутник із сумою кутів 1600° ?
- 10) Скільки вершин має опуклий багатокутник із сумою кутів 1080° ?
- 11) Скільки вершин має опуклий багатокутник із сумою кутів 1440° ?
- 12) Скільки вершин має опуклий багатокутник із сумою кутів 1620° ?
- 13) Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо вони відносяться як 3:3:4:4:5:5.
- 14) Знайдіть кути опуклого семикутника, якщо вони відносяться як 6:7:8:9:9:10:11.
- 15) Скільки діагоналей можна провести у дев'ятикутнику?
- 16) Скільки діагоналей можна провести у двадцятикутнику?
- 17) Скільки діагоналей можна провести у n-кутнику?
- 18) В опуклому багатокутнику 54 діагоналі. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

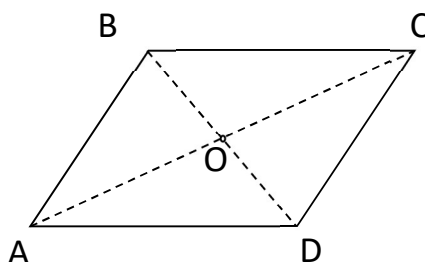
3.2. Паралелограм. Прямокутник. Ромб. Квадрат

Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

Властивості

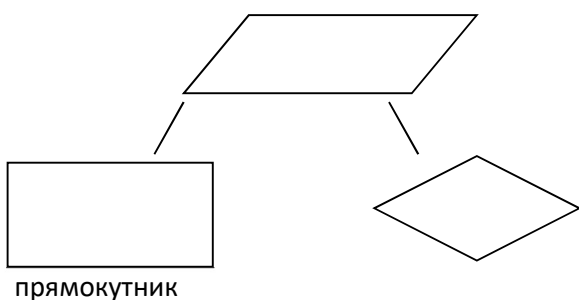
$$\begin{aligned} AB &= CD, \\ AD &= BC. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle C, \\ \angle B &= \angle D. \end{aligned}$$



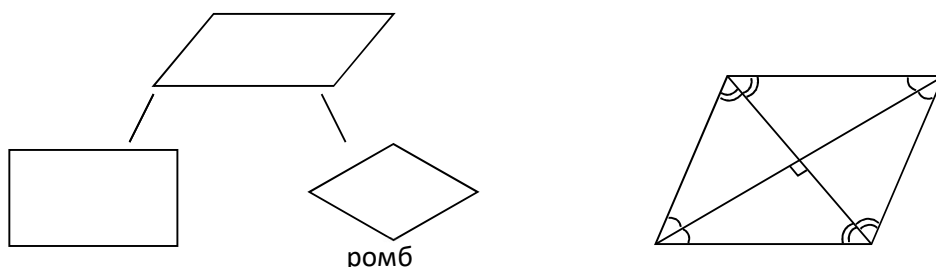
$$\begin{aligned} \angle A + \angle D &= 180^{\circ}, \\ \angle A + \angle B &= 180^{\circ}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BO &= OD, \\ AO &= OC. \end{aligned}$$



Прямокутник – паралелограм, у якого є прямий кут. Діагоналі прямокутника рівні між собою.

Ромб – паралелограм, у якого всі сторони рівні між собою. Діагоналі взаємно перпендикулярні й ділять кути навпіл.



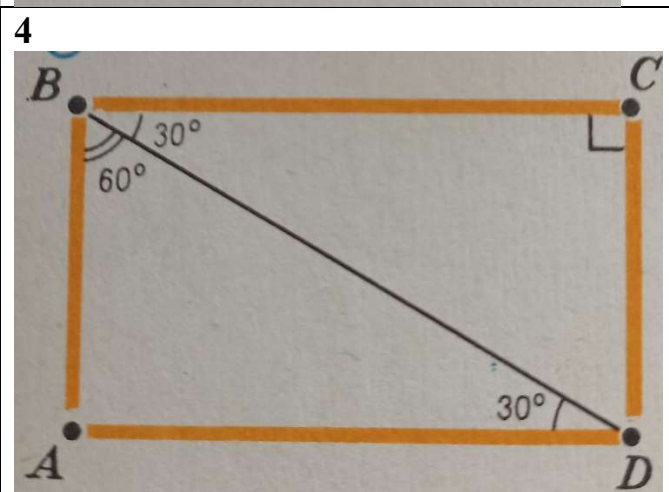
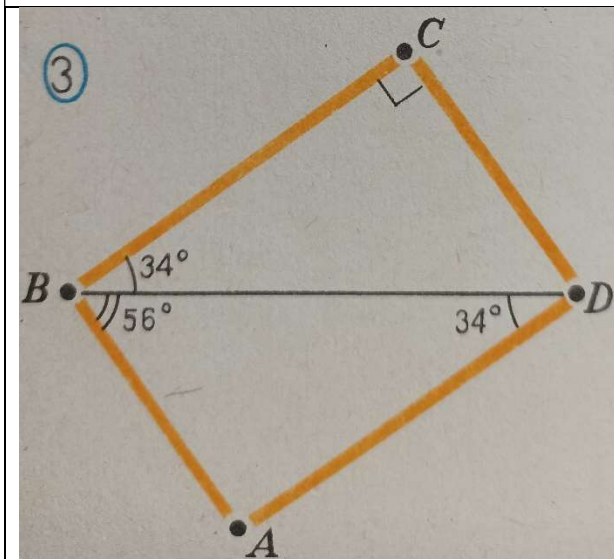
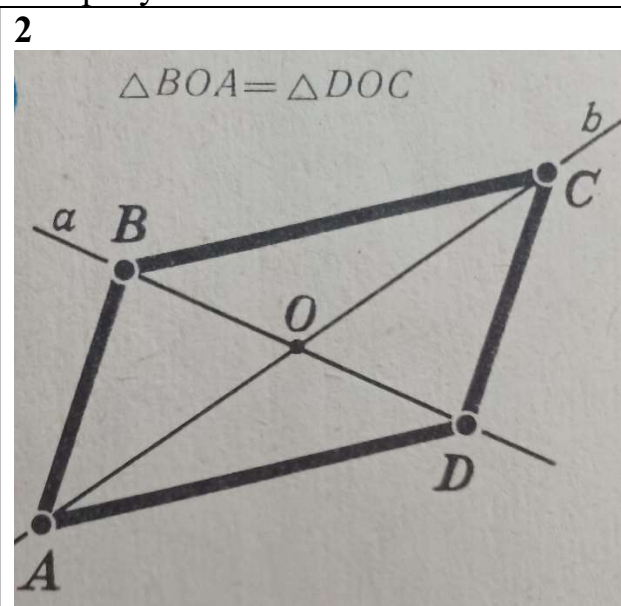
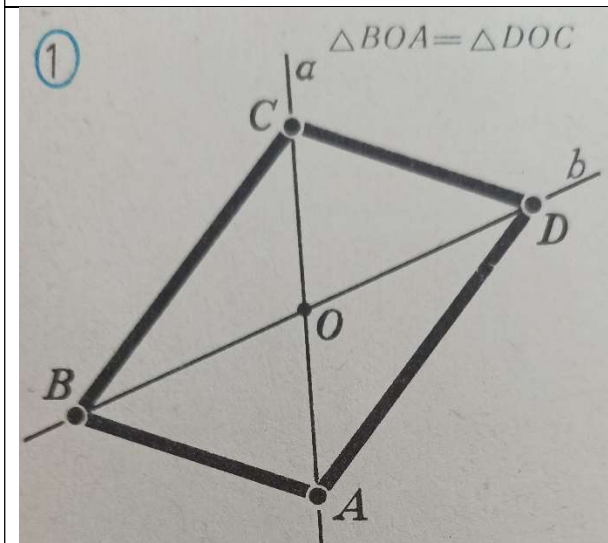
Квадрат - паралелограм, у якого всі сторони рівні і всі кути прямі. Квадрат має всі властивості ромба і прямокутника

Формули площ многокутників

Многокутник	Формули площі	Значення букв
Довільний трикутник	$S = \frac{1}{2} ah_a ; S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha ;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ; S = rp ;$ $S = \frac{abc}{4R}$	a,b,c-сторони, h_a - висота до a α -кут між a і b, p- півпериметр r-радіус вписаного кола R-радіус описаного кола
Прямокутний трикутник	$S = \frac{1}{2} ab ; S = \frac{1}{2} ch_c$	a,b-катети, c-гіпотенуза h_c -висота c , a-сторона
Рівносторонній трикутник	$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	a-сторона
Довільний опуклий чотирикутник	$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$	d_1, d_2 -діагоналі ϕ -кут між ними
Паралелограм	$S = ah_a ; S = ab \sin \alpha ;$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$	a,b-суміжні сторони α -кут між ними h_a -висота до a
Ромб	$S = ah_a ; S = \frac{1}{2} d_1 d_2 ; S = a^2 \sin \alpha$	a-сторона α -кут між суміжними сторонами d_1, d_2 -діагоналі
Прямокутник	$S = ab ; S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$	a,b- сторони d_1, d_2 -діагоналі ϕ -кут між ними
Квадрат	$S = a^2 ; S = \frac{d^2}{2}$	a-сторона d-діагональ

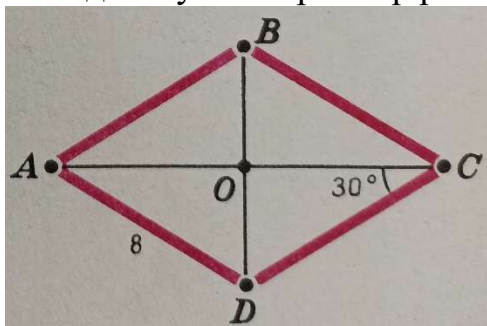
№3.2. Виконайте вправи за готовими малюнками

Визначити вид чотирикутника

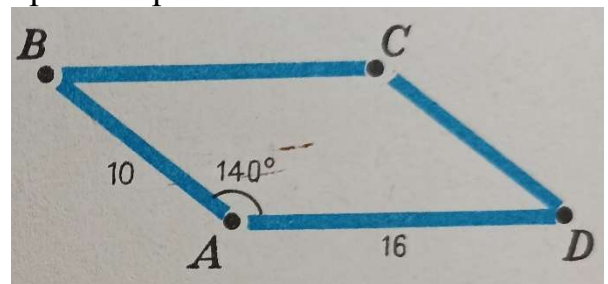


№3.3. Виконайте вправи за готовими малюнками

1) Знайдіть кути і периметр ромба

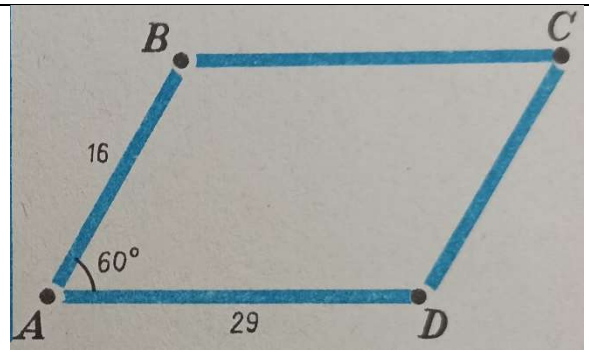
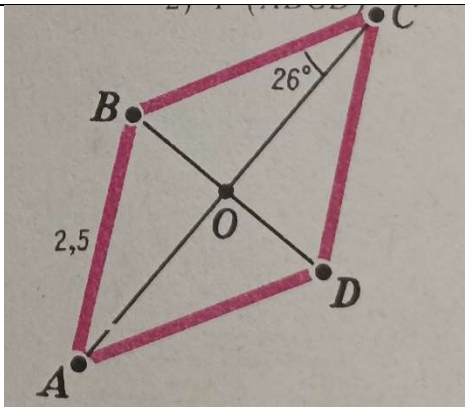


2) Знайдіть кути і периметр паралелограма

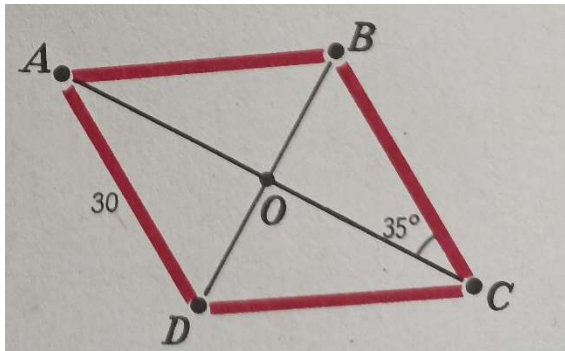


3) Знайдіть кути і периметр ромба

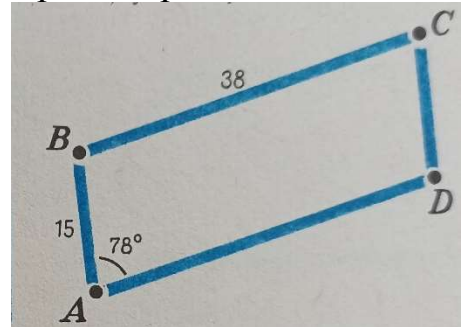
4) Знайдіть кути і периметр паралелограма



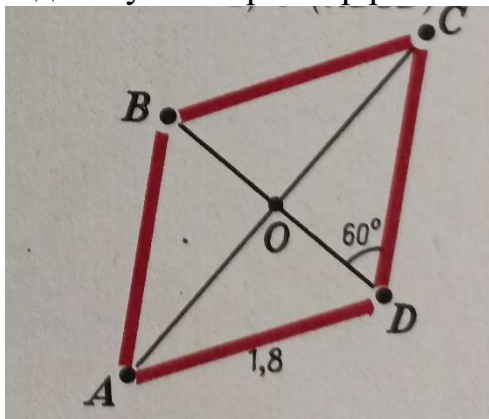
5) Знайдіть кути і периметр ромба



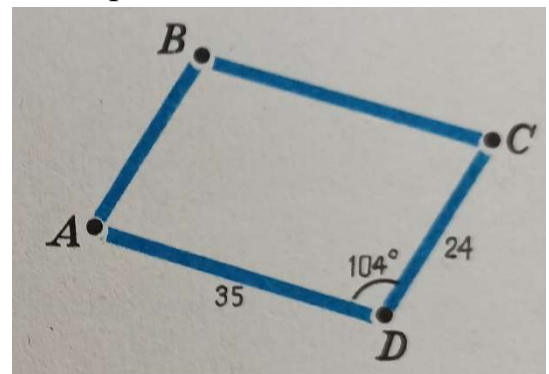
6) Знайдіть кути і периметр паралелограма



7) Знайдіть кути і периметр ромба

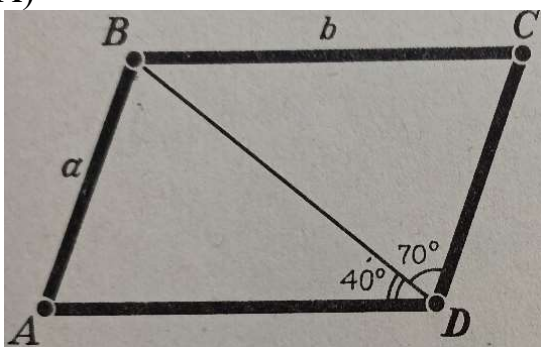


8) Знайдіть кути і периметр паралелограма

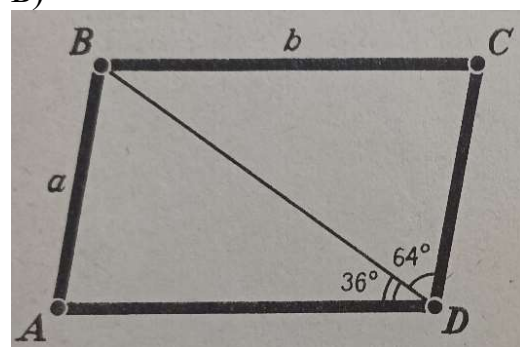


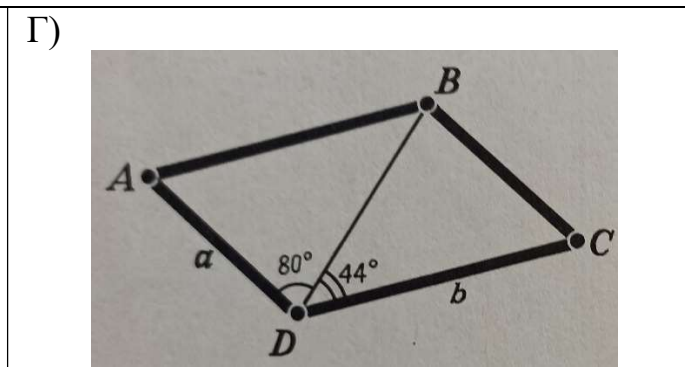
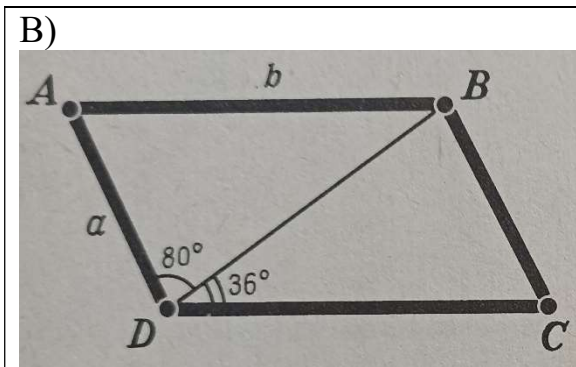
9) Знайдіть кути трикутників ABD і BDC та периметр паралелограма

А)

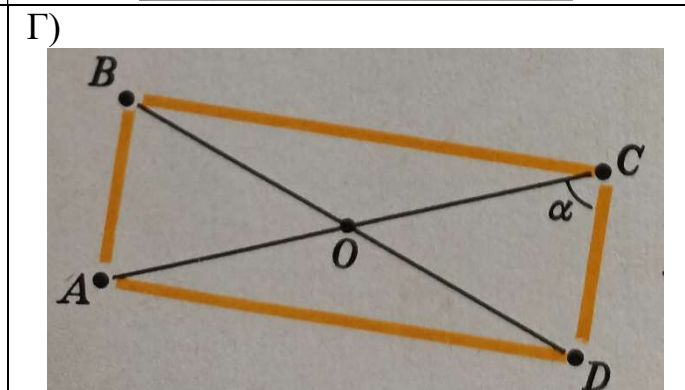
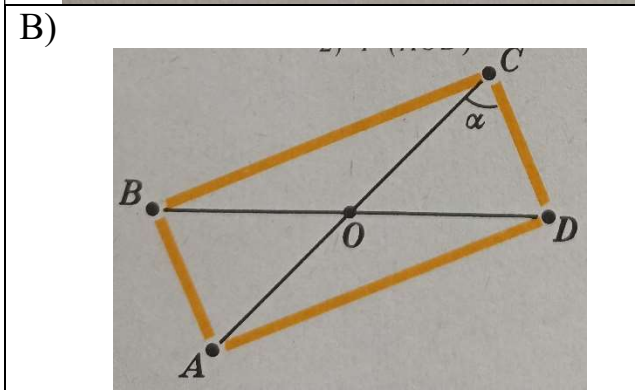
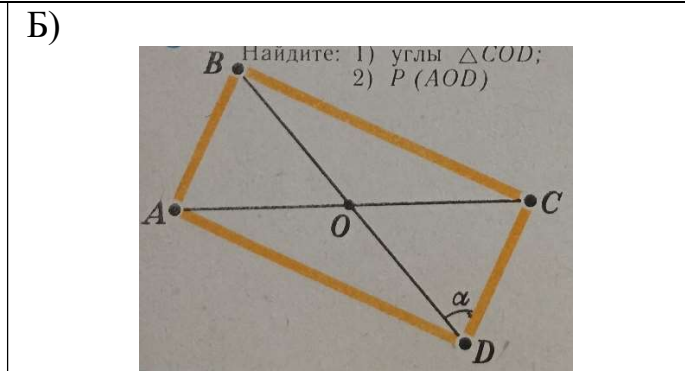
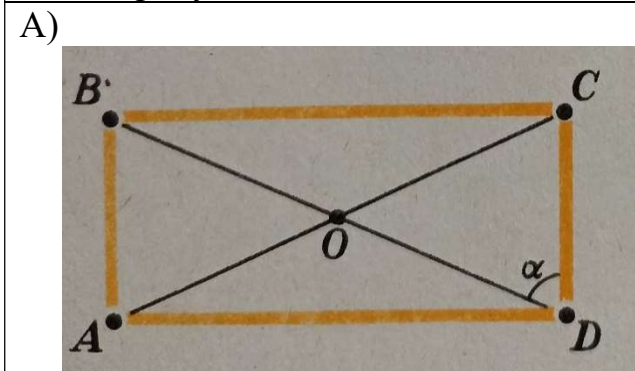


Б)





10) ABCD –прямокутник, $AO=a$, $BC=b$. Знайдіть кути трикутника COD і периметр трикутника AOD



Відповіді

1) $60^{\circ}, 120^{\circ}, 32$	2) $140^{\circ}, 40^{\circ}, 52$	3) $52^{\circ}, 128^{\circ}, 10$
4) $60^{\circ}, 120^{\circ}, 90$	5) $70^{\circ}, 110^{\circ}, 120$	6) $18^{\circ}, 162^{\circ}, 106$
7) $60^{\circ}, 120^{\circ}, 72$	8) $76^{\circ}, 104^{\circ}, 118$	9 А) $70^{\circ}, 70^{\circ}, 40^{\circ}; 40^{\circ}, 70^{\circ}, 70^{\circ}; 2(a+b)$
		10 А) $\alpha, 180^{\circ} - 2\alpha, \alpha; 2a+b$

Тренувальні вправи

№3.4. Розв'яжіть задачі використовуючи властивості паралелограма.

1.С Сторони даного паралелограма відповідно дорівнюють 3 см і 5 см, а діагоналі відносяться як $7:\sqrt{19}$. Визначити довжини діагоналей.

2.С. Висоти паралелограма відносяться, як 2:3, його периметр дорівнює 20 см, а гострий кут 30° . Визначити площу паралелограма.

3.С. Площа паралелограма дорівнює 36 см^2 , а відстані від точки перетину діагоналей до сторін відповідно дорівнюють 1 см й 3 см . Знайти периметр паралелограма.

4.С. Сторони паралелограма відносяться як $2:3$, гострий кут дорівнює 30° . Обчислити площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 50 см .

5.С. Одна із сторін паралелограма в 3 рази більша за висоту, що проведена до неї. Знайти їх довжини, якщо площа паралелограма 108 см^2 .

6.С. Діагоналі паралелограма дорівнюють 24 см і 28 см , а сторони відносяться як $7 : 11$. Обчислити периметр паралелограма.

7.С. Обчислити площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 6 см і 8 см , а кут між ними 45° .

8.С. Діагональ паралелограма, яка рівна 13 см , перпендикулярна до сторони паралелограма, рівній 12 см . Знайти площу паралелограма.

9.Д. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на частини завдовжки 3 см і 5 см , рахуючи від вершини гострого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 60° .

10.Д. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону на частини завдовжки 6 см і 2 см , рахуючи від вершини тупого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 30° .

11.Д. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см , а кут між ними 60° . Знайдіть площу паралелограма.

12.Д. Сторони паралелограма дорівнюють 24 см і 30 см , а кут між його висотами 30° . Знайдіть площу паралелограма.

13.Д. Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см і одна з них перпендикулярна до сторони.

14.Д. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см , а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.

15.В. а) Перпендикуляр, проведений із вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 41 і 57 см . Різниця сторін паралелограма дорівнює 14 см . Обчислити діагоналі паралелограма.

б) Перпендикуляр, проведений із вершини гострого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 36 і 12 см . Периметр паралелограма дорівнює 192 см . Обчислити діагоналі паралелограма.

16.В. а) Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 24 см і 36 см . Кут між цими висотами дорівнює 30° . Обчислити площу паралелограма.

б) Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 10 см і 24 см . Кут між цими висотами дорівнює 150° . Обчислити площу паралелограма.

17.В. а) У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 30° , ділить протилежну сторону на відрізки 24 см і 16 см , починаючи від вершини тупого кута. Обчислити площу паралелограма.

б) У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює 150° , ділить протилежну сторону на відрізки 50 см і 30 см , починаючи від вершини гострого кута. Обчислити площу паралелограма.

18.В. а) У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 60° , ділить протилежну сторону на відрізки 33 см і 55 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма.

б) У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює 120° , ділить протилежну сторону на відрізки 24 см і 16 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса більшу діагональ паралелограма.

Відповіді.

1.С. 7 см, $\sqrt{19}$ см. 2.С. 12 см. 3.С. 48 см. 4.С. 75 см^2 . 5.С. 6 см, 18 см. 6.С. 72 см. 7.С. $12\sqrt{2}$. 8.С. 156 см^2 . 9.Д. $12\sqrt{3} \text{ см}^2$. 10.Д. 24 см^2 . 11.Д. $64\sqrt{3} \text{ см}^2$. 12.Д. 360 см^2 . 13.Д. 96 см^2 . 14.Д. 108 см^2

№3.5. Розв'яжіть задачі використовуючи властивості прямокутника.

1.С. Сторони прямокутника 2 см і 24 см. Знайти сторони рівновеликого йому прямокутника, якщо їх відношення дорівнює 3:1.

2.С. Сторона прямокутника відноситься до його діагоналі, як 4:5, а інша сторона дорівнює 6 см. Знайти площу прямокутника.

3.С. Периметр прямокутника дорівнює 28 м, а площа 48 м^2 . Знайти діагональ цього прямокутника.

4.С. Знайти діагональ прямокутника, якщо його периметр дорівнює 14 см, а площа 12 см^2 .

5.С. Сторони прямокутника відносяться як 7:3, а його площа дорівнює 525 см^2 . Обчислити сторони цього прямокутника.

6.С. Обчислити площу прямокутника, якщо відомо, що бісектриса, проведена з вершини прямокутника, ділить його діагональ на відрізки 20 см і 15 см.

7.С. Діагональ прямокутника має довжину 8 см і ділить прямий кут у відношенні 1 : 2. Обчислити сторони прямокутника.

8.Д. Через середину діагоналі AC прямокутника $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD прямокутника в точках M і K відповідно, $AC=15$ см, $AK=4$ см, $KD=8$ см. Обчисліть площу чотирикутника $AMCK$.

9.Д. Через середину діагоналі BD прямокутника $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD прямокутника, в точках M і K відповідно, $BD=10$ см, $BM=6$ см, $MC=2$ см. Обчисліть площу чотирикутника $AMCK$.

10.Д. На стороні BC прямокутника $ABCD$ позначено точку M . Знайдіть площу чотирикутника $AMCD$, якщо $AM=13$ см, $AB=12$ см, $BO=20$ см.

Відповіді.

1.С. 4 см, 12 см. 2.С. 48 см^2 . 3.С. 10 см. 4.С. 5 см. 5.С. 15 см, 35 см. 6.С. 588 см^2 . 7.С. 4 см, $4\sqrt{3}$ см. 8.Д. 36 см^2 . 9.Д. 12 см^2 . 10.Д. 162 см^2 .

№3.6. Розв'яжіть задачі використовуючи властивості ромба.

1.С. Висота ромба дорівнює 12 см, а одна з його діагоналей дорівнює 15 см. Знайти площу ромба.

2.С. Знайти кут ромба, якщо його діагоналі рівні 23 см і 2 см.

3.С. Знайти сторону ромба, якщо його діагоналі рівні 10 см і 24 см.

4.С. Периметр ромба дорівнює 16 см, висота 2 см. Обчислити кути ромба.

5.С. Знайти сторону ромба, якщо його гострий кут 30° , а площа дорівнює 18 см^2 .
6.С. Сторона ромба дорівнює 17 см , а одна із діагоналей 30 см . Знайти довжину іншої діагоналі.

7.С. Знайти площу ромба, якщо його сторона рівна 10 см , а одна із діагоналей 12 см .

8.Д. Більша діагональ ромба дорівнює d , а гострий кут - α . Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

9.Д. Сторона ромба дорівнює a , а гострий кут - β . Знайдіть діагоналі ромба.

10.Д. Площа ромба дорівнює 120 см^2 , а його діагоналі відносяться як $5:12$. Знайдіть периметр ромба.

11.Д. Периметр ромба дорівнює 120 см , а його діагоналі відносяться як $3:4$. Знайдіть площу ромба.

12.Д. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 15 см , а сума діагоналей - 42 см .

13.Д. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см , а різниця діагоналей - 10 см .

14.Д. Довжини діагоналей ромба відносяться як $\sqrt{3}:1$. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см .

15.Д. Довжини діагоналей ромба відносяться як $\sqrt{5}:2$. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює 36 см .

16.Д. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см . Знайдіть діагоналі ромба.

17.Д. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см . Знайдіть діагоналі ромба.

18.Д. У трикутник ABC вписано ромб $AMFK$ так, що кут A в них спільний, а вершина F належить стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $AB=10 \text{ см}$, $AC=15 \text{ см}$.

19.Д. У трикутник ABC вписано ромб $CMKD$ так, що кут C у них спільний, а вершина K належить стороні AB . Знайдіть сторону BC , якщо $AC=12 \text{ см}$, а довжина сторони ромба 4 см .

20.В. а) Висота ромба дорівнює 24 см , а одна з діагоналей дорівнює 40 см . Обчислити площу ромба.

б) Одна із діагоналей ромба дорівнює 30 см , а - довжина вписаного кола дорівнює $24\pi \text{ см}$. Обчислити площу ромба.

21.В. а) Сума діагоналей ромба дорівнює 70 см . Довжина вписаного кола дорівнює $24\pi \text{ см}$. Обчислити периметр ромба.

б) Різниця діагоналей ромба дорівнює 10 см . Площа вписаного кола дорівнює $144\pi \text{ см}^2$. Обчислити площу ромба.

Відповіді.

1.С. 150 см^2 . 2.С. $60^\circ, 120^\circ$. 3.С. 13 см . 4.С. $30^\circ, 150^\circ$. 5.С. 6 см . 6.С. 16 см . 7.С. 96 см^2 . 8.Д. $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. 9.Д. $2a \cos \frac{\beta}{2}, 2a \sin \frac{\beta}{2}$. 10.Д. 52 см . 11.Д. 864 см^2 . 12.Д. 216 см^2 . 13.Д. 600 см^2 . 14.Д. $50\sqrt{3} \text{ см}^2$. 15.Д. $36\sqrt{5} \text{ см}^2$. 16.Д. $12\sqrt{5} \text{ см}, 6\sqrt{5} \text{ см}$. 17.Д. $10\sqrt{29} \text{ см}, 4\sqrt{29} \text{ см}$. 18.Д. 6 см . 19.Д. 6 см

№3.7. Розв'яжіть задачі, використовуючи властивості квадрата.

1.Д. На стороні EC квадрата $ABCD$ позначено точку M так, що $\angle DAM=60^\circ$. Знайдіть довжину відрізка MD , якщо $AB= \sqrt{3}$ см.

2.Д. На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку K так, що $\angle ABK=60^\circ$. Знайдіть довжину відрізка AK , якщо $BC= \sqrt{6}$ см.

3.Д. На стороні AB квадрата $ABCD$ позначено точку K , а на стороні CD - точку M так, що $AK:KB=1:2$, $DM:MC=3:1$. Знайдіть сторону квадрата, якщо $MK=26$ см.

4.Д. На стороні MN квадрата $MNFK$ позначено точку A , а на стороні FK - точку B так, що $MA:AN=2:13$, $KB:BF=2:1$. Знайдіть сторону квадрата, якщо $AB=34$ см.

5.В. а) Коло дотикається до двох суміжних сторін квадрата і ділить кожну із двох інших його сторін на відрізки 2 і 23 см. Обчислити радіус кола.

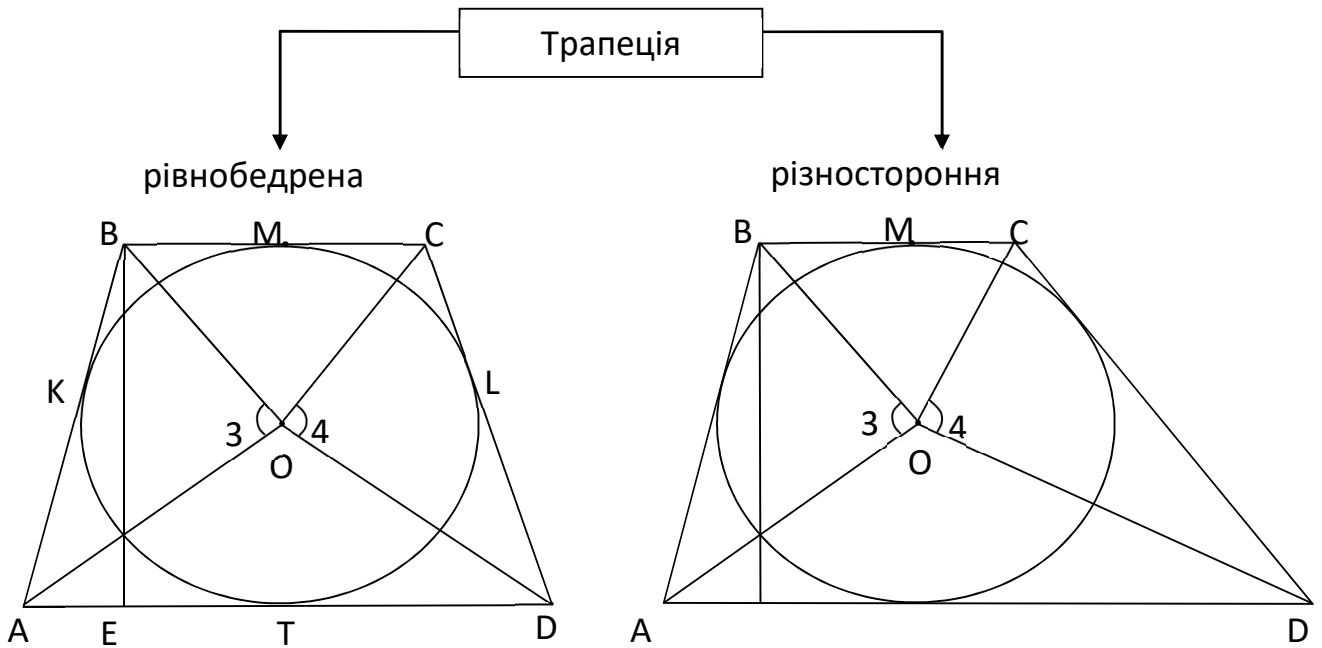
б) Коло радіусом 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата з стороною 18 см. Обчислити відрізки, на які ділить коло кожну з двох інших сторін квадрата.

Відповіді.

1.Д. $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ см. 2.Д. $\sqrt{14-4\sqrt{3}}$ см. 3.Д. 24 см. 4.Д. 30 см.

3.3. Трапеція

Трапеція - чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні, а дві інші не паралельні.



$$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ,$$

$$ED = AB$$

$$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$$

Доведення

$$\left(\begin{array}{l} \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ \\ BO \text{ і } AO - \text{бісектриси} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} BK = BM = ET \\ KA = LD = DT \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$(\angle OAB - \angle OBA = 90^\circ)$$

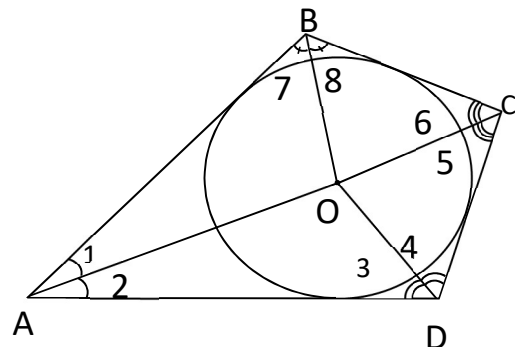
$$\Downarrow$$

$$(BK = ET; KA = DT)$$

$$AB + CD = AD - BC$$

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle 3 = \angle 4$$



Середня лінія дорівнює півсумі основ.

Сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° .

У рівнобедреній трапеції кути при основі рівні між собою.

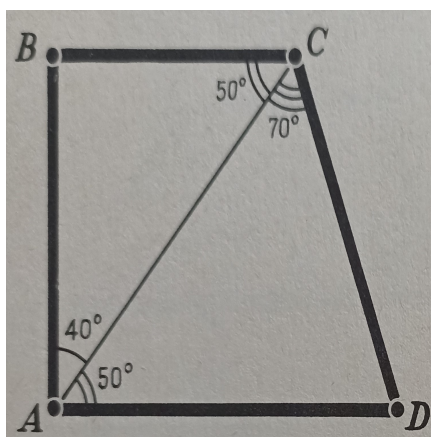
Формула площі трапеції

Трапеція	$S = \frac{a+b}{2}h$; $S = lh$	a,b- основи h-висота l-середня лінія
----------	---------------------------------	--

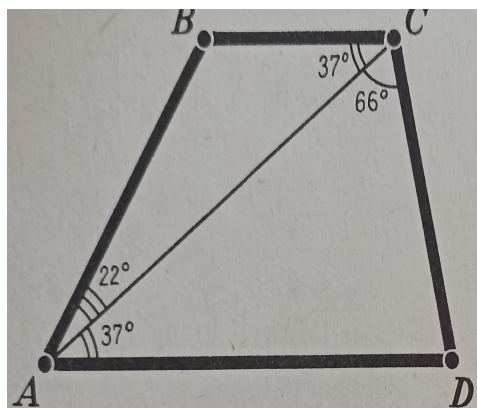
№3.8. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками

1) Визначити вид чотирикутника

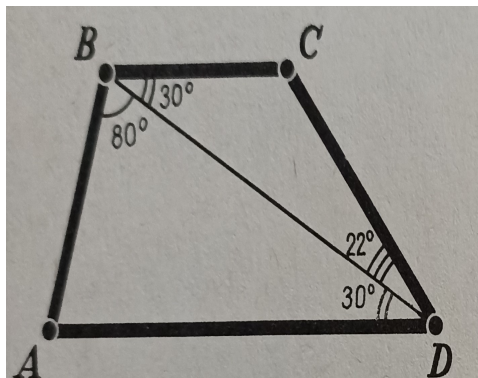
А)



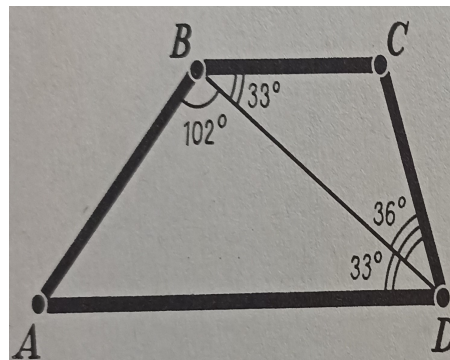
Б)



В)

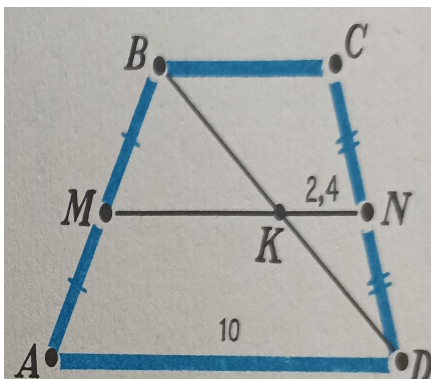


Г)

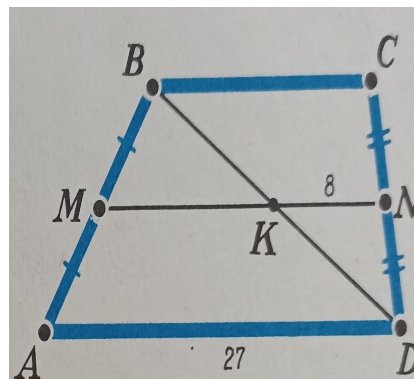


2) ABCD – трапеція, знайдіть MN і BC.

А)

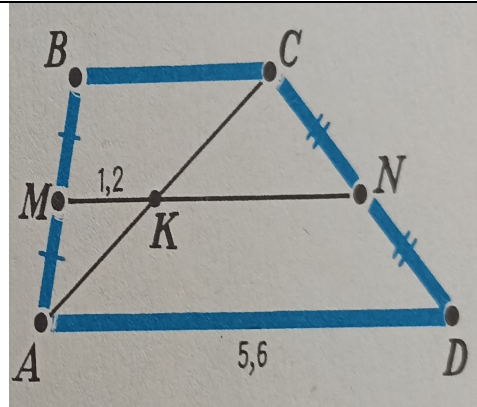
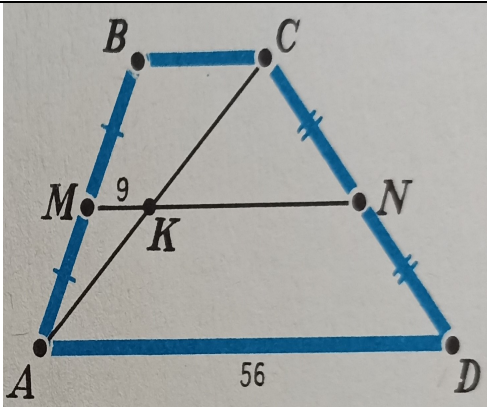


Б)



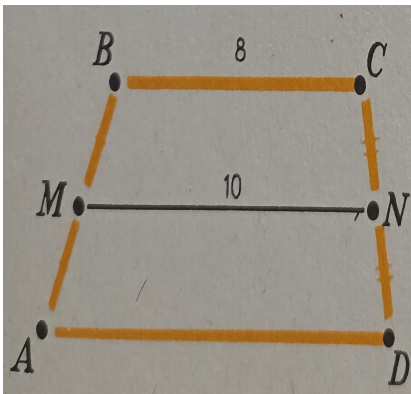
В)

Г)

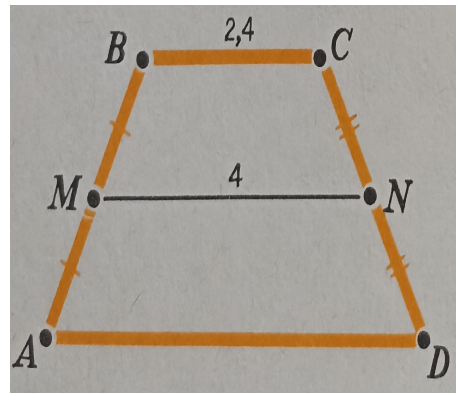


3) ABCD – трапеція, знайдіть AD.

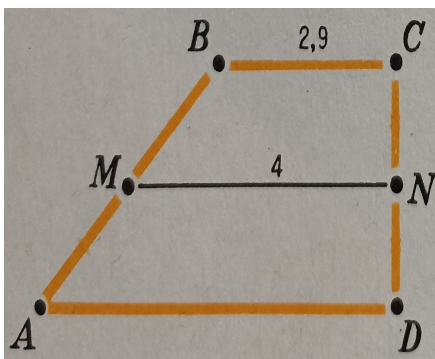
A)



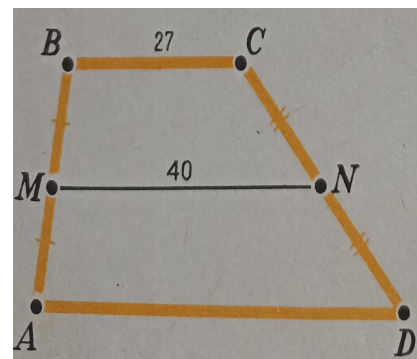
Б)



В)

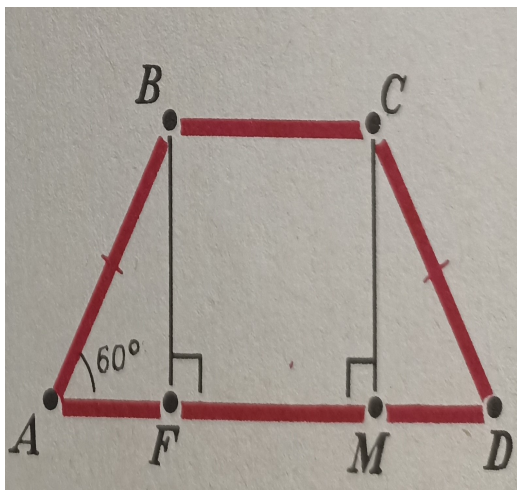


Г)

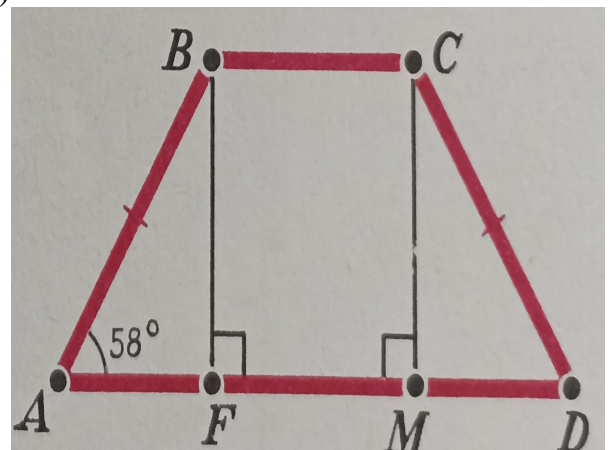


4) ABCD – трапеція, знайдіть кут CDM

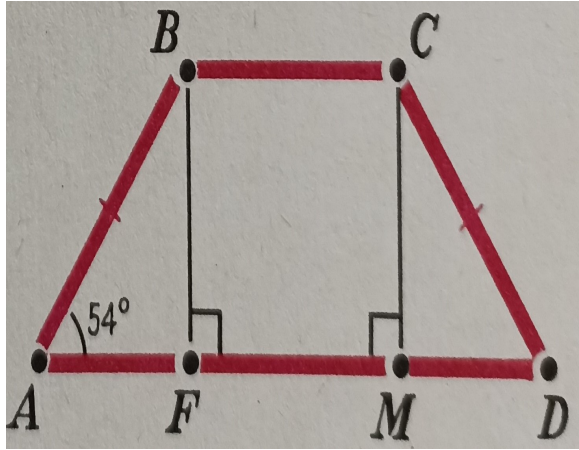
A)



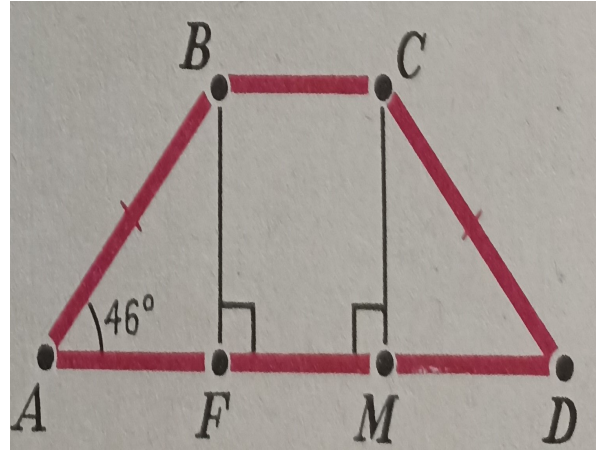
Б)



B)

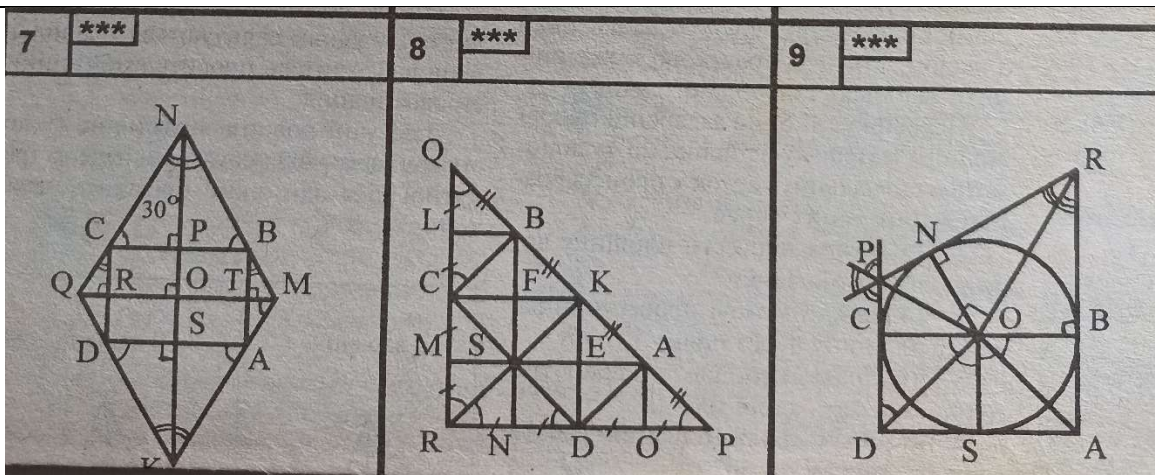


Г)

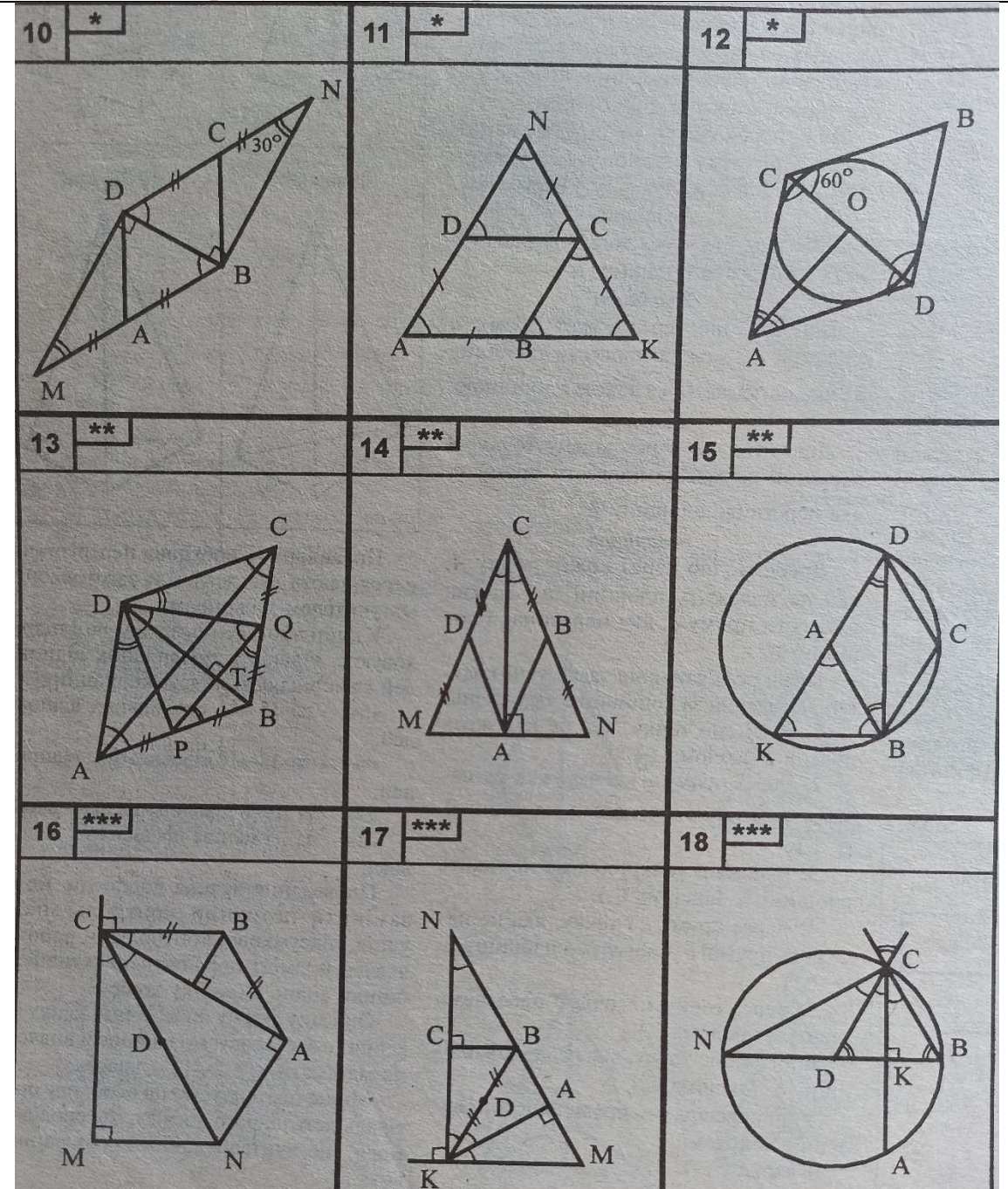


5) Доведіть, що чотирикутник ABCD – прямокутник

<p>1 * </p>	<p>2 * </p>	<p>3 * </p>
<p>4 ** </p>	<p>5 ** </p>	<p>6 ** </p>



б) Доведіть, що чотирикутник ABCD – ромб



Відповіді

2)	3)	4)
А) 7,4; 4,8	А) 12	А) 60°
Б) 21,5; 16	Б) 5,6	Б) 58°
В) 37; 18	В) 5,1	В) 54°
Г) 4; 2,4	Г) 53	Г) 46°

Тренувальні вправи

№3.9. Розв'яжіть задачі на властивості трапеції

1.С. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 11 см, а бічні сторони 3 см і 4 см. Визначити висоту трапеції.

2.С. В трапеції бічні сторони дорівнюють меншій основі, а діагональ утворює з основою кут 30° . Обчислити кути трапеції.

3.С. У рівнобічної трапеції основи дорівнюють 50 см і 30 см, а бічна сторона 26 см. Обчислити площу трапеції.

4.С. Обчислити периметр рівнобічної трапеції, якщо один із його кутів дорівнює 60° , а основи рівні 15 см і 49 см.

5.С. В трапеції основи дорівнюють 5 см і 8 см, бічні сторони 3,6 см і 3,9 см. Точка М є точкою перетину продовження бічних сторін. Обчислити відстань від точки М до кінців меншої основи.

6.С. В рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Периметр трапеції дорівнює 132 см, а основи відносяться як 2:5. Обчислити довжину середньої лінії трапеції.

7.С. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її менша основа дорівнює 18 см, висота 9 см і гострий кут 45° .

8.С. Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 16 см і 30 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

9.С. Бічні сторони і менша основа прямокутної трапеції дорівнюють 8, 10 і 10. Знайти більшу основу.

10.Д. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18 см і 12 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

11.Д. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.

12.Д. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основа BC дорівнює 6 см, висота $CE = 2\sqrt{3}$ см, а бічна сторона утворює з основою AD кут 60° . Знайдіть основу AD трапеції.

13.Д. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD і BC відповідно дорівнюють 18 см і 12 см. Бічна сторона утворює з основою кут 30° . Знайдіть діагональ трапеції.

14.Д. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.

15.Д. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть периметр трапеції.

16.Д. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а менша бічна сторона – $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 120° .

- 17.Д. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, а висота - $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 150° .
- 18.Д. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.
- 19.Д. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть площу цієї трапеції.
- 20.Д. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 6$ см, $BC=8$ см, $AD= 12$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута A трапеції.
- 21.Д. У прямокутній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $\angle A = 90^\circ$) $AB = 4$ см, $BC=7$ см, $AD=10$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута D трапеції.
- 22.Д. У рівнобічній трапеції $FKPE$ $FK=EP=9$ см, $FE=20$ см, $KP=8$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута F трапеції.
- 23.Д. У прямокутній трапеції $KDMT$ ($DM \parallel KT$, $\angle D=90^\circ$) $DM=16$ см, $KT=21$ см, $MT= 20$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута T трапеції.
- 24.Д. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і ділить другу діагональ на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть відрізки, на які ділить точка перетину діагоналей першу діагональ.
- 25.Д. Одна з діагоналей трапеції та її основи дорівнюють відповідно 40 см, 18 см і 30 см. Знайдіть відрізки, на які ділить точка перетину діагоналей дану діагональ.
- 26.Д. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці K . Менша основа BC дорівнює 4 см, $BK=5$ см, $AK= 15$ см. Знайдіть більшу основу трапеції.
- 27.Д. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E . Більша основа AD трапеції дорівнює 12 см, $AE=15$ см, $BE=5$ см. Знайдіть меншу основу трапеції.
- 28.Д. Відомо, що O - точка перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть довжини відрізків BO і OD , якщо $AO:OC=7:6$ і $BO = 39$ см.
- 29.Д. Відомо, що O - точка перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Знайдіть довжини відрізків BO і AO , якщо $AD:BC=3:2$, $OD = 9$ см, $CO=8$ см.
- 30.Д. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M . Знайдіть AM , якщо $AB = 6$ см і $BC:AD=3:4$.
- 31.Д. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці F . Знайдіть AB , якщо $AF= 10$ см і $BC:AD=2:5$.
- 32.Д. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M , $DC:CM=3:5$, BC - менша основа трапеції. Знайдіть основи трапеції, якщо їх сума дорівнює 26 см.
- 33.Д. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці F , $AB:BF=3:1$, AD - більша основа трапеції. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 6 см.
- 34.В. а) У трапеції відстані від центра вписаного в неї кола до кінців бічної сторони дорівнюють 75 і 100 см, а до кінців меншої основи — 65 і 75 см. Обчислити площу цієї трапеції.

б) Центр вписаного в трапецію кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см, а від кінців бічної сторони — 156 і 65 см. Обчислити площу цієї трапеції.

35.В. а) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 13 : 5, починаючи від вершини гострих кутів. Визначити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 32 см.

б) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів в точці перетину діляться у відношенні 3 : 13, починаючи від вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 48 см.

36.В. а) У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців меншої основи на відстані 65 і 75 см. Менша основа трапеції дорівнює 70 см. Обчислити площу трапеції.

б) У трапеції центр вписаного в неї кола віддалений від кінців більшої основи на відстань 156 і 100 см. Довжина більшої основи дорівнює 224 см. Обчислити площу трапеції.

37.В. а) Основи трапеції дорівнюють 60 і 20 см, а бічні сторони дорівнюють 13 і 37 см. Обчислити площу трапеції.

б) Основи трапеції дорівнюють 142 і 89 см, а діагоналі — 120 і 153 см. Обчислити площу трапеції.

38.В. а) Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони відповідно на 75 і 100 см. Обчислити площу трапеції.

б) Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від більшої бічної сторони на 12 см. Менша основа трапеції дорівнює 21 см. Обчислити площу трапеції.

39.В. а) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 54 і 96 см, починаючи від вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції.

б) У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 64 і 36 см, починаючи від вершин гострих кутів. Обчислити периметр трапеції.

40.В. а) Довести, що в рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює сумі квадрата бічної сторони та добутку основ.

б) Довести, що у довільній трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.

41.В. а) У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції.

б) У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчислити площу трапеції.

42.В. а) Більша основа трапеції дорівнює 42 см. Вписане в трапецію коло ділить одну із бічних сторін на відрізки 8 і 18 см. Обчислити площу трапеції.

б) Одна із бічних сторін трапеції дорівнює 60 см, а друга бічна сторона точкою дотику вписаного до неї кола ділиться на відрізки 16 і 36 см. Обчислити площу трапеції.

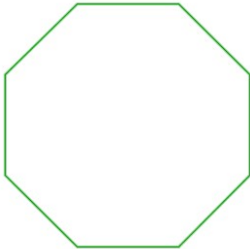
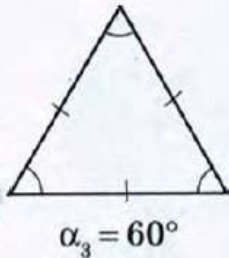
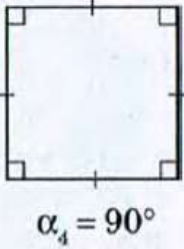
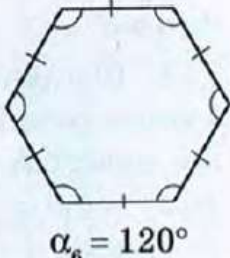
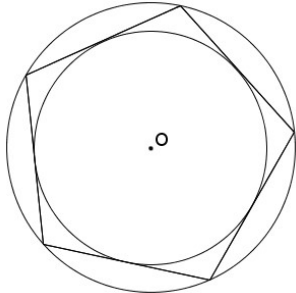
43.В. а) У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 24 і 25 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції.

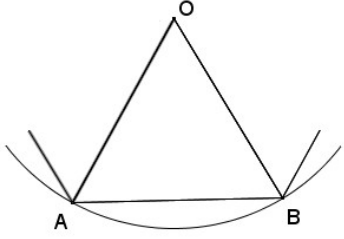
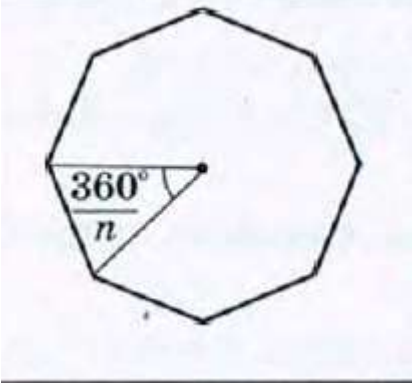
б) У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 35 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчислити площу трапеції.

Відповіді

1.С. 2,4 см. 2.С. 60°, 120°. 3.С. 960 см². 4.С. 132 см. 5.С. 6 см, 6,5 см. 6.С. 42 см. 7.С. 243 см² 8.С. 529 см² 9.С. 16 см. 10.Д. $90\sqrt{3}$ см² 11.Д. 195 см². 12.Д. 10 см. 13.Д. $2\sqrt{57}$ см. 14.Д. 80 см. 15.Д. 60 см. 16.Д. $56\sqrt{3}$ см². 17.Д. $72\sqrt{3}$ см². 18.Д. $128\sqrt{6}$ см². 19.Д. $45\sqrt{15}$ см². 20.Д. $\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 2\sqrt{2}$. 21.Д. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. 22.Д. $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}$ 23.Д. $\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{15}$ 24.Д. 10 см, 18 см. 25.Д. 15 см, 25 см. 26.Д. 16 см. 27.Д. 4 см. 28.Д. 18 см, 21 см. 29.Д. 6 см, 12 см. 30.Д. 24 см 31.Д. 6 см. 32.Д. 10 см, 16 см. 33.Д. 14 см, 20 см.

3.4. Правильні многокутники

Поняття	Формулювання означення	
Правильний многокутник	Многокутник називають правильним, якщо у нього всі сторони рівні і всі кути рівні.	
<p>Правильний трикутник</p>  <p>$\alpha_3 = 60^\circ$</p>	<p>Правильний чотирикутник (квадрат)</p>  <p>$\alpha_4 = 90^\circ$</p>	<p>Правильний шестикутник</p>  <p>$\alpha_6 = 120^\circ$</p>
Центр правильного многокутника	Точку, яка є центром вписаного і описаного кіл правильного многокутника, називають центром правильного многокутника.	

<p>Центральний кут правильного многокутника</p>	<p>Зображено фрагмент правильного n-кутника з центром O і стороною AB, довжину якої позначимо a_n. Кут AOB називають центральним кутом правильного многокутника.</p>	
<p>Центральний кут правильного многокутника обчислюється за формулою (дивись рисунок)</p>		
<p>Кожний кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Дійсно, оскільки сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180^\circ(n-2)$ і всі вони рівні, то кожен із них дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.</p>		

Формула площі правильного многокутника

<p>Правильний многокутник</p>	$S = \frac{na_n r}{2}; \quad S = \frac{1}{2} pr$	<p>a_n-сторона правильного n-кутника p-півпериметр r-радіус вписаного кола</p>
-------------------------------	--	--

Тренувальні вправи

№3.10. Розв'яжіть задачі на властивості правильного многокутника.

- 1) Чи правильне твердження: многокутник правильний, якщо всі його кути рівні? Відповідь поясніть.
- 2) Чи правильне твердження: будь-який чотирикутник з рівними кутами правильний? Відповідь поясніть.

- 3) Чи правильне твердження: трикутник правильний, якщо всі його кути рівні?
Відповідь поясніть.
- 4) Чи правильне твердження: будь-який рівносторонній трикутник правильний?
Відповідь поясніть.
- 5) Обчисліть кут правильного п'ятикутника.
- 6) Обчисліть кут правильного шестикутника.
- 7) Обчисліть кут правильного десятикутника.
- 8) Обчисліть кут правильного дванадцятикутника.
- 9) Обчисліть кут правильного вісімнадцятикутника.
- 10) Знайдіть центральний кут правильного двадцятикутника.
- 11) Знайдіть центральний кут правильного двадцятичотирикутника.
- 12) Знайдіть центральний кут правильного десятикутника.
- 13) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 30° .
- 14) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 36° .
- 15) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 120° .
- 16) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 24° .
- 17) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює 135° .
- 18) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює 150° .
- 19) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює 140° .
- 20) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює 120° .
- 21) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його сума кутів дорівнює 1800° .
- 22) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його сума кутів дорівнює 360° .
- 23) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його сума кутів дорівнює 3600° .
- 24) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його сума кутів дорівнює 540° .
- 25) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його сума кутів дорівнює 1080° .

- 26) Знайдіть кут правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 60° .
- 27) Знайдіть кут правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 26° .
- 28) Знайдіть кут правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 34° .
- 29) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 36° .
- 30) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 10° .
- 31) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 18° .
- 32) Знайдіть периметр правильного п'ятикутника зі стороною 4 см.
- 33) Знайдіть периметр правильного восьмикутника зі стороною 7 см.
- 34) Знайдіть периметр правильного десятикутника зі стороною 9 см.
- 35) Знайдіть периметр правильного п'ятнадцятикутника зі стороною 14 см.

3.5. Задачі практичного змісту

Розв'яжіть задачі:

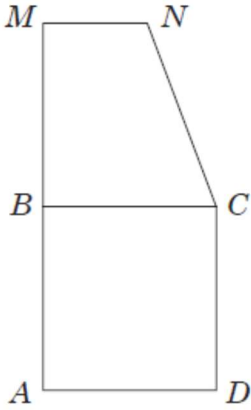
- 1) Відомо що площа ділянки дорівнює 6 арів. Скільки буде дорівнювати ця площа в квадратних метрах та в гектарах.
- 2) На плані з масштабом 1:100 ділянка прямокутної форми має довжини сторін 10см і 25см, яка площа цієї ділянки на місцевості?
- 3) Треба покрити підлогу лінолеумом у двох кімнатах розміром 2х8 метрів і 4х5 метрів. Чи вистачить для цього шматка лінолеуму розміром 9х4 метри?
- 4) Автомобіль займає площу розміром 4,5х1,8 метри. Якою має бути площа гаража, щоб в ньому помістити дві однакові машини і мати відстань від стін до машин і між машинами по 1 метру?
- 5) Ділянка має форму паралелограма. Проведіть межі так, щоб розділити цю ділянку на 3 частини однакової площі.
- 6) Паралелограм і прямокутник мають однакові сторони. Чи рівні їх площі?
- 7) Ділянка має форму трапеції. Проведіть пряму, перпендикулярну до її основ, так, щоб розділити площу ділянки навпіл.
- 8) Доведіть, що підлогу прямокутної форми можна покрити плитками ламінату, які мають форму правильних трикутників, чотирикутників або шестикутників.
- 9) Які перегинання чотирикутного куска тканини дають підставу стверджувати, що він має форму квадрата?

- 10) Квадратний аркуш паперу розрізаний по діагоналі на два трикутники. Які геометричні фігури можна скласти з частин, що утворилися?
- 11) Квадратний аркуш паперу розрізаний по його діагоналях. Які геометричні фігури можна скласти з чотирьох частин, що утворилися?
- 12) Чи можуть прямокутник і квадрат мати рівні периметри?
- 13) Сад має форму прямокутника зі сторонами 480 м і 275 м. Скільки яблунь у ньому росте, якщо на одне дерево припадає 16 кв. м.?
- 14) Картопляне поле прямокутної форми має розміри 450 м і 260 м. Скільки тон картоплі зберуть із цього поля, якщо на одному квадратному метрі росте 4 кущі картоплі і кожен кущ дає приблизно 2,2 кг врожаю?
- 15) Скільки листів заліза потрібно, щоб вкрити гараж, дах якого має форму прямокутника із розмірами 2,4 м і 6,5 м? Розміри листа заліза 1,44 м і 0,72 м.
- 16) Три ділянки землі, дві з яких квадратної форми, а третя прямокутної мають рівні площі. Ширина квадратної ділянки дорівнює 40 м, а ширина прямокутної на 8 м менша. Якою буде довжина каналу, якщо обкопати кожен з цих ділянок?
- 17) Скільки треба фарби і олифи, щоб пофарбувати підлогу в будинку прямокутної форми, розміри якого 12 м на 8,5 м, якщо на один квадратний метр підлоги витрачається 240 г фарби і 160 г олифи?
- 18) Самохідна косарка має ширину захвату 10 м. Скільки гектарів косарка викосить за 10 годин роботи, якщо вона рухається зі швидкістю 4,5 км/год?

3.6. Вправи рівня ЗНО

1.	<p>Які з наведених тверджень є правильними?</p> <p>I. Навколо будь-якого ромба можна описати коло.</p> <p>II. Діагоналі будь-якого ромба взаємно перпендикулярні.</p> <p>III. У будь-якому ромбі всі сторони рівні.</p> <table border="1" data-bbox="296 1429 1481 1541"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>лише I та II</td> <td>лише I та III</td> <td>лише II</td> <td>лише II та III</td> <td>I, II та III</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">№9, 2021 стандарт</p>	А	Б	В	Г	Д	лише I та II	лише I та III	лише II	лише II та III	I, II та III
А	Б	В	Г	Д							
лише I та II	лише I та III	лише II	лише II та III	I, II та III							
2.	<p>Сума трьох кутів паралелограма дорівнює 280°. Визначте градусну міру більшого кута цього паралелограма.</p> <table border="1" data-bbox="296 1771 1481 1865"> <thead> <tr> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>100°</td> <td>80°</td> <td>140°</td> <td>40°</td> <td>120°</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right;">№5, 2021 стандарт</p>	А	Б	В	Г	Д	100°	80°	140°	40°	120°
А	Б	В	Г	Д							
100°	80°	140°	40°	120°							

3. Квадрат $ABCD$ й прямокутна трапеція $BMNC$ лежать в одній площині (див. рисунок). Площа кожної із цих фігур дорівнює 36 см^2 , $AM = 15 \text{ см}$. Установіть відповідність між відрізком (1–3) і його довжиною (А – Д).



Відрізок

1 сторона квадрата $ABCD$
 2 висота трапеції $BMNC$
 3 менша основа трапеції $BMNC$

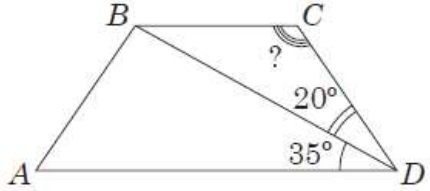
Довжина відрізка

А 2 см
 Б 3 см
 В 4 см
 Г 6 см
 Д 9 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

№19, 2021 стандарт

4. На рисунку зображено трапецію $ABCD$. Визначте градусну міру кута BCE , якщо $\angle ADB = 35^\circ$, $\angle BDC = 20^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
125°	165°	155°	145°	140°

№5, 2021 пробне

5. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Діагоналі будь-якого паралелограма рівні.
 II. Протилежні кути будь-якого паралелограма рівні.
 III. Відстані від точки перетину діагоналей будь-якого паралелограма до його протилежних сторін рівні.

А	Б	В	Г	Д
лише II	лише I і III	I, II, III	лише I і II	лише II і III

№10, 2021 пробне

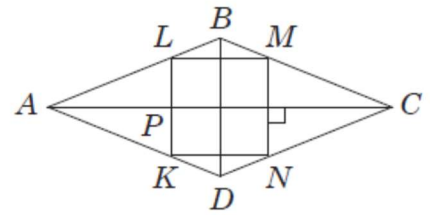
6. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K . Обчисліть площу чотирикутника $AKCD$, якщо $BK = KC = 8 \text{ см}$.

А	Б	В	Г	Д
48 см^2	72 см^2	96 см^2	128 см^2	192 см^2

№15, 2021 пробне

7.

У ромб $ABCD$ вписано квадрат $KLMN$, сторона KL якого перетинає діагональ AC в точці P (див. рисунок). $AL = 10$ см, $AP = 8$ см.

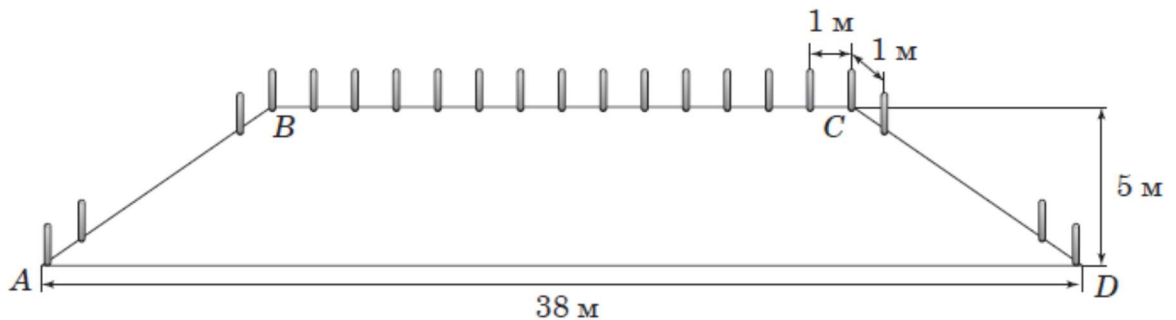


1. Обчисліть довжину сторони квадрата $KLMN$ (у см).
2. Обчисліть довжину діагоналі BD ромба $ABCD$ (у см).

№22, 2021 пробне

8.

Заїзна кишеня для висадки пасажирів громадського (маршрутного) транспорту й таксі, облаштована перед входом у супермаркет, має форму рівнобічної трапеції $ABCD$. Довжина більшої основи AD становить 38 м, ширина кишені дорівнює 5 м. Уздовж меншої основи BC й бічних сторін AB й CD планують установити запобіжні стовпчики на відстані 1 м один від одного. Частину з них уже встановили (див. рисунок). Скільки всього стовпчиків має бути за планом уздовж сторін AB , BC й CD цієї кишені, якщо вздовж BC вже встановлено 15 стовпчиків?

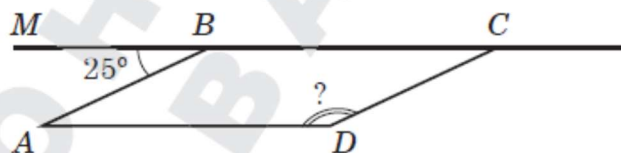


А	Б	В	Г	Д
39	41	42	43	45

№16, 2021 додаткова сесія

9.

На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, точка B лежить на прямій MC . Визначте градусну міру кута CDA , якщо $\angle MBA = 25^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
115°	65°	175°	165°	155°

№5, 2021 демонстраційна версія

10.

На рисунках (1–5) наведено інформацію про п'ять паралелограмів. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

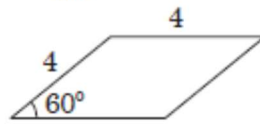


Рис. 1

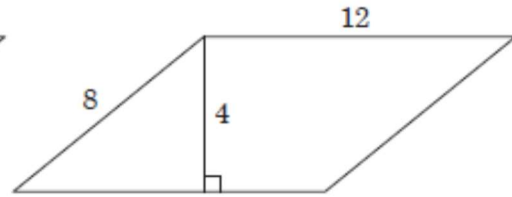


Рис. 2

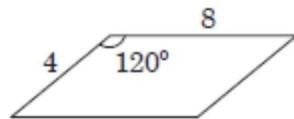


Рис. 3

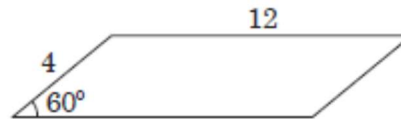


Рис. 4

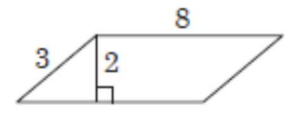


Рис. 5

Початок речення

- 1 Паралелограм, діагоналі якого перетинаються під прямим кутом, зображено на
- 2 Паралелограм, менший кут якого дорівнює 30° , зображено на
- 3 Паралелограм, площа якого дорівнює 16, зображено на

Закінчення речення

- А рис.1.
- Б рис.2.
- В рис.3.
- Г рис.4.
- Д рис.5.

№20, 2021 додаткова сесія

11.

Які з наведених тверджень є правильними?

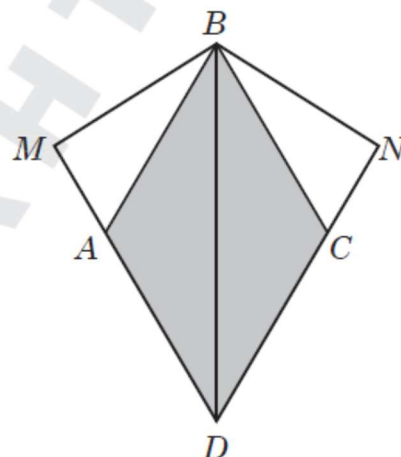
- I. Протилежні сторони будь-якого паралелограма рівні.
- II. Довжина сторони будь-якого трикутника менша за суму довжин двох інших його сторін.
- III. Довжина сторони будь-якого квадрата вдвічі менша за його периметр.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I та III	лише I та II	лише II та III	I, II та III

№10, 2021 демонстраційна версія

12.

На рисунку зображено поверхню повітряного змія, що складається з двох рівних прямокутних трикутників AMB й CNB та ромба $ABCD$. Точки A і C належать відрізкам DM і DN відповідно. Гострий кут ромба дорівнює 60° , $BD = 2$ м. Визначте площу поверхні (чотирикутника $MBND$) цього змія, якщо всі його елементи лежать в одній площині. Виберіть відповідь, найближчу до точної.

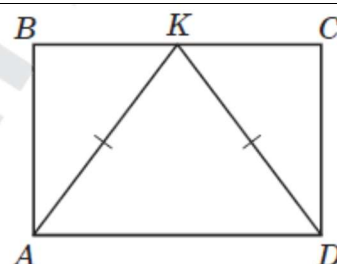


А	Б	В	Г	Д
$1,5 \text{ м}^2$	$1,7 \text{ м}^2$	$2,6 \text{ м}^2$	$3,4 \text{ м}^2$	$3,9 \text{ м}^2$

№16, 2021 демонстраційна версія

13.

У прямокутник $ABCD$ вписано рівнобедрений трикутник AKD так, як показано на рисунку. $AD = 12$ см, $AK = 10$ см. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

- Довжина сторони AB дорівнює
- Радіус кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, дорівнює
- Довжина середньої лінії трапеції $ABKD$ дорівнює

Закінчення речення

- А $2\sqrt{13}$ см.
 Б 8 см.
 В 9 см.
 Г $4\sqrt{13}$ см.
 Д 4 см.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

№19, 2021 демонстраційна версія

14.

Довжини сторін AB та BC прямокутника $ABCD$ відносяться як 2:5, а його периметр дорівнює 28 см. Визначте довжину більшої сторони цього прямокутника.

А	Б	В	Г	Д
10 см	20 см	7 см	14 см	8 см

№2, 2020

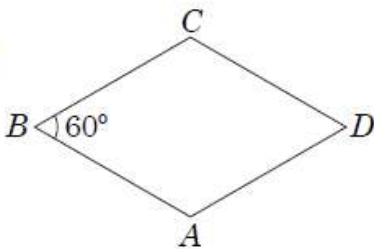
15. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Бічні сторони будь-якої трапеції паралельні.
 II. Сума кутів, прилеглих до бічної сторони будь-якої трапеції, дорівнює 180° .
 III. Сума протилежних кутів будь-якої трапеції дорівнює 180° .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I й II	лише II й III	I, II й III

№12, 2020

16. Довжина сторони ромба $ABCD$ дорівнює 8, $\angle B = 60^\circ$. Установіть відповідність між величиною (1–3) та її значенням (А – Д).



Величина

- довжина діагоналі AC
- довжина висоти ромба $ABCD$
- відстань від точки A до центра кола, яке вписане в ромб

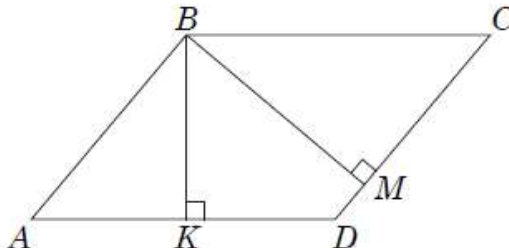
Значення величини

А 4
 Б $4\sqrt{3}$
 В 8
 Г $8\sqrt{3}$
 Д $8\sqrt{2}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

№23, 2020

17. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BK та BM (див. рисунок). $BK = 16$ см, $AK = 12$ см, $BM = 24$ см.

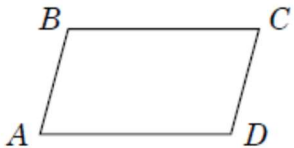


- Визначте довжину сторони AB (у см).
- Обчисліть площу (у см^2) паралелограма $ABCD$.

№26, 2020

18. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$.
 II. $AB = CD$.
 III. $AC \perp BD$.



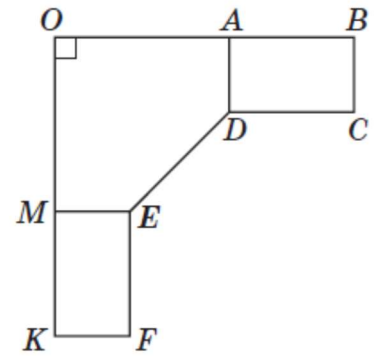
А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II і III	лише I і II	лише I і III	лише II

№13, 2019

19.

На кресленні кутової шафи (вид зверху) зображено рівні прямокутники $ABCD$ і $KMEF$ та п'ятикутник $EMOAD$ (див. рисунок). Визначте довжину відрізка ED , якщо $OK = OB = 1,2$ м, $KM = AB = 0,5$ м, $KF = 0,3$ м. Укажіть відповідь, найближчу до точної.

А	Б	В	Г	Д
0,5 м	0,55 м	0,65 м	0,6 м	0,7 м



№19, 2019

20.

Прямокутну трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) з більшою бічною стороною $CD = 10$ описано навколо кола радіуса 4. Установіть відповідність між величиною (1–4) та її числовим значенням (А – Д).

Величина

- 1 довжина сторони AB
- 2 довжина проекції сторони CD на пряму AD
- 3 довжина основи AD
- 4 довжина середньої лінії трапеції $ABCD$

Числове значення величини

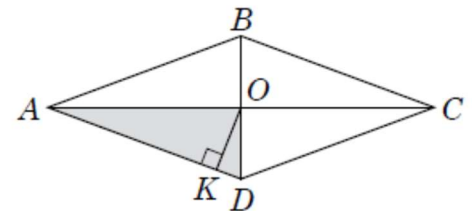
- | | |
|---|----|
| А | 6 |
| Б | 8 |
| В | 9 |
| Г | 12 |
| Д | 18 |

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

№23, 2019

21.

На рисунку зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Із цієї точки до сторони AD проведено перпендикуляр OK довжиною 3 см. Площа трикутника AOD дорівнює 15 см².



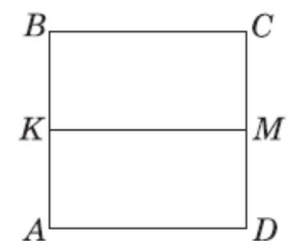
1. Визначте довжину сторони ромба $ABCD$ (у см).
2. Обчисліть тангенс гострого кута ромба $ABCD$.

№26, 2019

22.

На рисунку зображено квадрат $ABCD$. Точки K та M – середини сторін AB та CD відповідно. Визначте периметр чотирикутника $AKMD$, якщо периметр заданого квадрата дорівнює 72 см.

А	Б	В	Г	Д
36 см	42 см	48 см	54 см	60 см



№2, 2019 пробне

23.

Установіть відповідність між чотирикутником (1–4) та довжиною його висоти (А – Д).

Чотирикутник

Довжина висоти

- 1 ромб, гострий кут якого дорівнює 60° , а менша діагональ – $8\sqrt{3}$ см
- 2 ромб, гострий кут якого дорівнює 30° , а периметр – 80 см
- 3 прямокутна трапеція, основи якої дорівнюють 13 см і 7 см, а більша бічна сторона – 10 см
- 4 трапеція, середня лінія якої дорівнює 6 см, а площа – 84 см^2

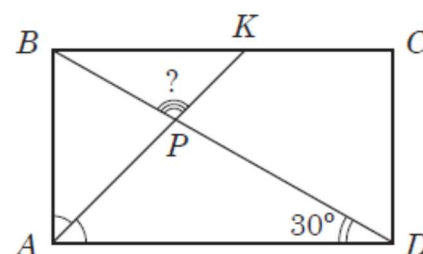
- А 7 см
 Б 8 см
 В 10 см
 Г 12 см
 Д 14 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

№23, 2019 пробне

24.

Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC і діагональ BD в точках K і P відповідно (див. рисунок). Визначте градусну міру кута BPK , якщо $\angle BDA = 30^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
105°	115°	75°	95°	125°

№4, 2019 додаткова сесія

25.

Основи BC й AD рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнюють 7 см і 25 см відповідно. Діагональ трапеції BD перпендикулярна до бічної сторони AB . До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

- 1 Середня лінія трапеції дорівнює
- 2 Проекція сторони AB на пряму AD дорівнює
- 3 Висота трапеції дорівнює
- 4 Сторона AB трапеції дорівнює

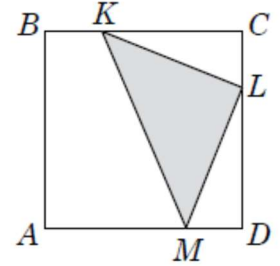
- А 9 см.
 Б 12 см.
 В 15 см.
 Г 16 см.
 Д 18 см.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

№23, 2019 додаткова сесія

26.

На рисунку зображено квадрат $ABCD$. Точки K , L , M належать сторонам BC , CD та AD відповідно, $BK = 8$ см. Трикутники KCL та LDM рівні, $KC = LD = 15$ см.



1. Визначте довжину відрізка KL (у см).
2. Обчисліть площу трикутника KLM (у см²).

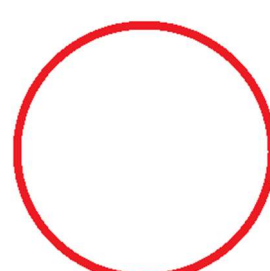
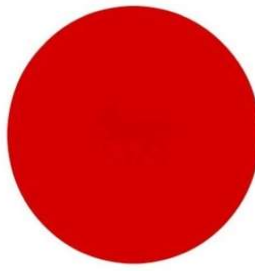
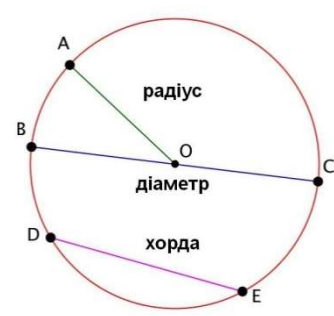
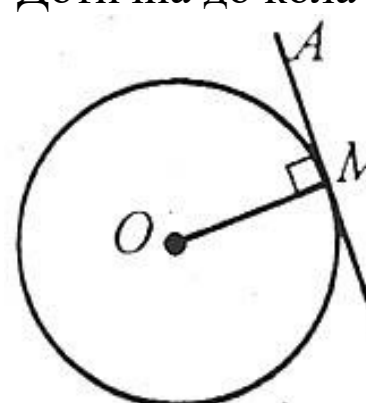
№26, 2019 додаткова сесія

Відповіді	1. Г	2. А	3. 1Г, 2Д, 3А
4. А	5. Д	6. Г	7. 1) 12, 2) 21
8. Б	9. Д	10. 1А, 2Д, 3В	11. В
12. В	13. 1Б, 2А, 3В	14. А	15. Б
16. 1В, 2Б, 3А	17. 1) 20, 2) 480	18. В	19. Б
20. 1Б, 2А, 3Г, 4В	21. 1) 10, 2) 0,75	22. Г	23. 1Г, 2В, 3Б, 4Д
24. А	25. 1Г, 2А, 3Б, 4В	26. 1) 17, 2) 144,5	

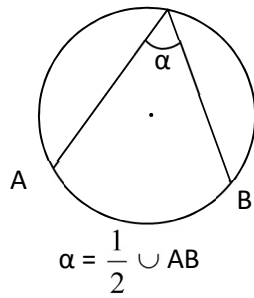
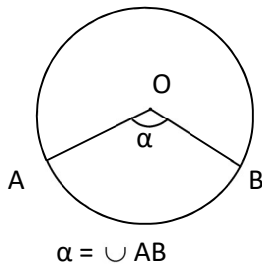
Розділ 4. КОЛО. КРУГ. ВПИСАНІ І ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ

4.1. Коло і круг.



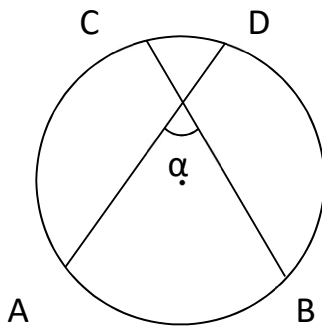
<h3>Коло</h3> 	<h3>Круг</h3> 
<h3>Радіус, хорда, діаметр</h3> 	<h3>Дотична до кола</h3> 

4.2. Кути вписані в коло. Властивості хорд і дотичних



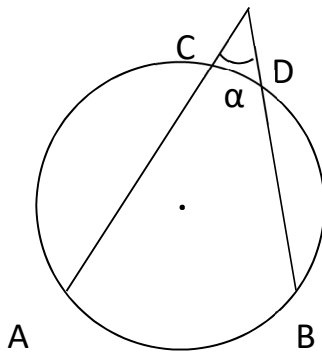
Центральний кут вимірюється дугою, на яку спирається.

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку спирається.



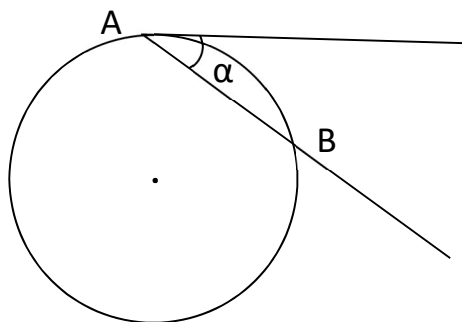
Кут, вершина якого лежить всередині круга, вимірюється напівсумою двох дуг, одна із яких міститься між його сторонами, а друга між продовженнями сторін.

$$\alpha = \frac{1}{2} (\text{arc } AB + \text{arc } CD)$$



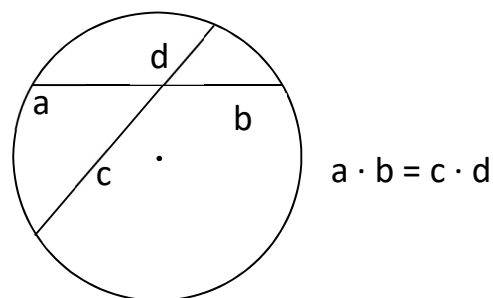
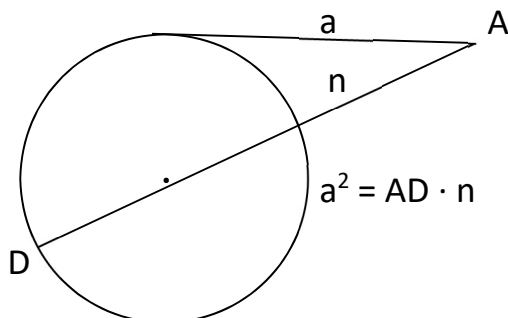
Кут, вершина якого лежить поза кругом, вимірюється напіврізницею двох дуг, що містяться між його сторонами.

$$\alpha = \frac{1}{2} (\text{arc } AB - \text{arc } CD)$$



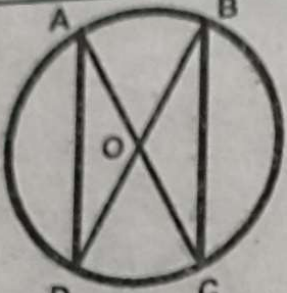
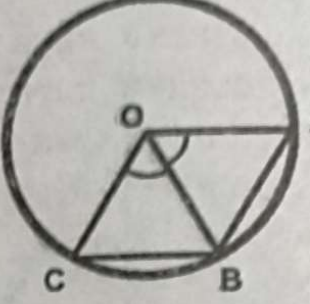
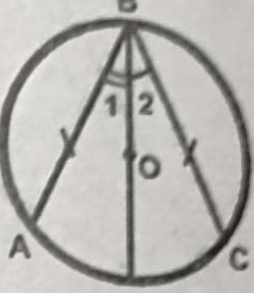
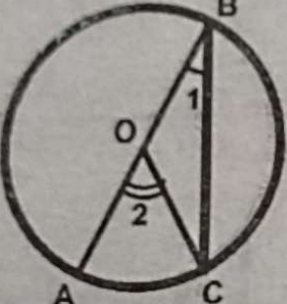
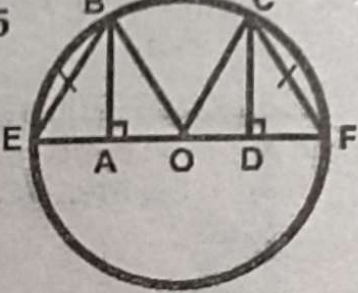
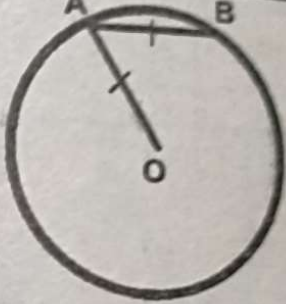
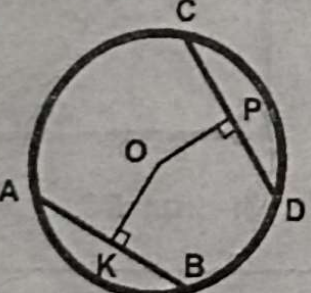
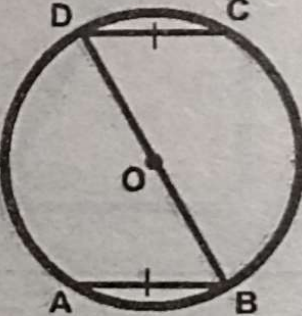
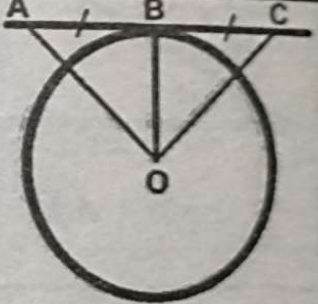
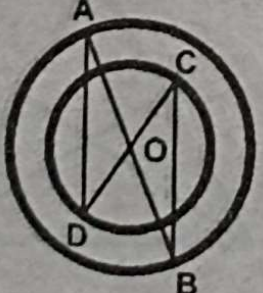
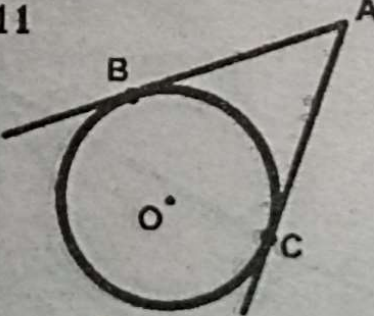
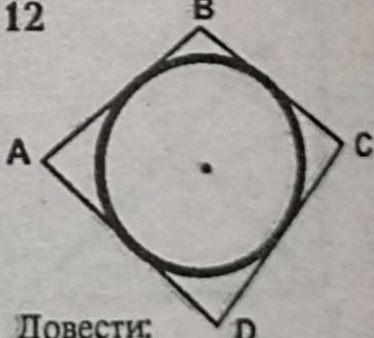
Кут, утворений дотичною й хордою, вимірюється половиною дуги, яка міститься всередині його.

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{arc } AB$$



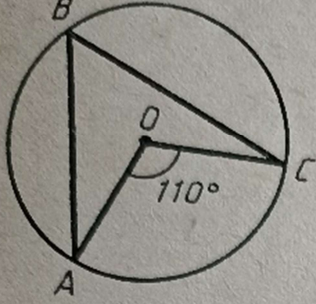
№4.1. Розв'яжіть задачі за готовими малюнками

1) Доведіть твердження

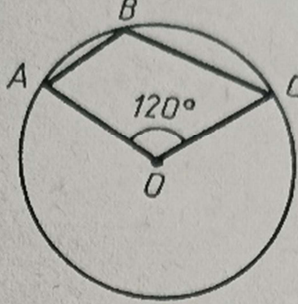
<p>1</p>  <p>Дано: $AD \perp BC$ Довести: $AD = BC$.</p>	<p>2</p>  <p>Довести: $AB = BC$.</p>	<p>3</p>  <p>Довести: $\angle 1 = \angle 2$.</p>
<p>4</p>  <p>Довести: $\angle 2 = 2\angle 1$.</p>	<p>5</p>  <p>Довести: $CD = BA$.</p>	<p>6</p>  <p>Знайти: $\angle BAO$.</p>
<p>7</p>  <p>Дано: $AB = CD$. Довести: $OK = OP$.</p>	<p>8</p>  <p>Довести: $AB \parallel CD$.</p>	<p>9</p>  <p>Дано: AC — дотична. Довести: $OA = OC$.</p>
<p>10</p>  <p>Довести: $AD = BC$.</p>	<p>11</p>  <p>Довести: $AB = AC$.</p>	<p>12</p>  <p>Довести: $AB + CD = BC + AD$.</p>

2) Знайдіть градусну міру вписаного кута ABC , O – центр кола

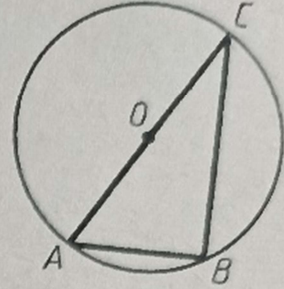
1



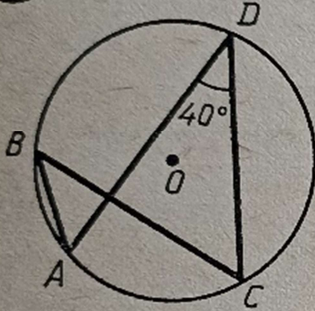
2



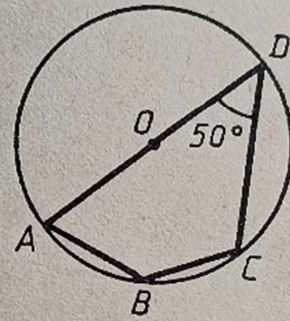
3



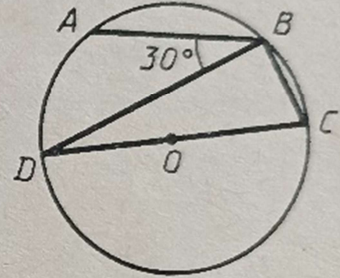
4



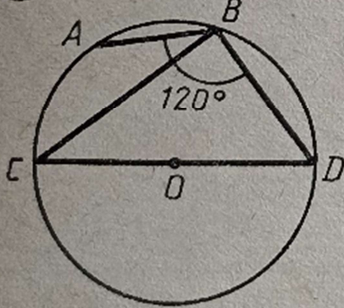
5



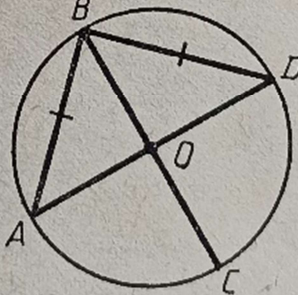
6



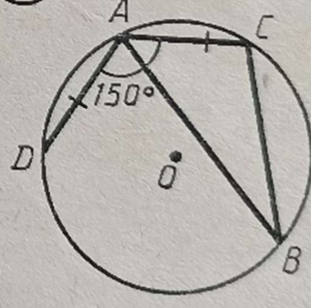
7



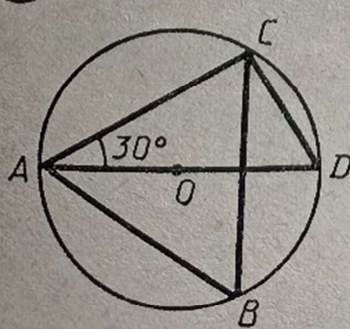
8



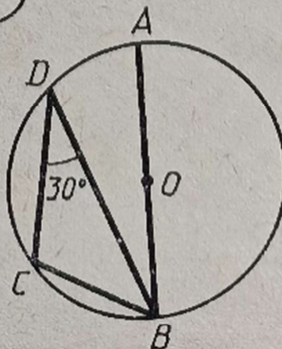
9



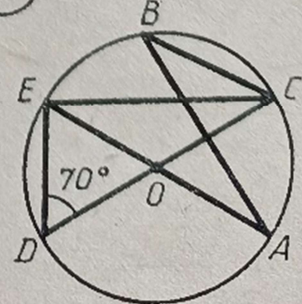
10



11



12



Тренувальні вправи

№4.2. Розв'яжіть задачі на властивості хорди.

1.С.В крузі дано дві взаємно перпендикулярні хорди, кожна з яких ділиться іншою на два відрізки в 9 см і 5 см. Знайти відстань до кожної хорди від центра.

2.С Хорда перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки в 9 см і 5 см. Знайти відстань від хорди до центра.

3.С. 3 однієї точки кола проведено взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра на 6 см і на 12 см. Визначити їх довжини.

4.С. В колі, радіус якого дорівнює 24 см, визначити відстань від центра до хорди, що стягує дугу в 120° .

8.С. Радіус кола дорівнює 25 см, а дві паралельні хорди цього кола відповідно дорівнюють 14 см і 40 см. Визначити відстань між хордами.

10.С. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 15 см і 20 см. Визначити відстань між центрами кіл, якщо довжина їх спільної хорди дорівнює 24 см.

16.С. В колі радіусом 13 см проведено хорду довжиною 24 см. Обчислити довжину відрізка, що з'єднує середину хорди і центр кола.

30.Д. У колі проведено хорди AB і CD , які перетинаються в точці M . Знайдіть довжину відрізка AC , якщо $CM=3$ см, $BM=9$ см, $BD=12$ см.

31.Д. У колі проведено хорди AK і BM , які перетинаються в точці C . Знайдіть довжину відрізка KM , якщо $AB=4$ см, $BC=2$ см, $KC=8$ см.

34.Д. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см. а відстань між їх центрами - 13 см. Знайдіть довжину їх спільної зовнішньої дотичної.

35.Д. Радіуси двох кіл дорівнюють 10 см і 2 см. а довжини їх спільної зовнішньої дотичної - 15 см. Знайдіть відстань між центрами кіл.

36.Д. Два кола з центрами O_1 і O_2 , радіуси яких дорівнюють 10 см і 16 см відповідно, мають зовнішній дотик у точці C . Пряма, що проходить через точку C , перетинає коло з центром O , у точці A , а інше - в точці B . Знайдіть довжини хорд AC і BC , якщо $AB = 39$ см.

37.Д. Два кола з центрами O_1 і O_2 - мають зовнішній дотик у точці C . Пряма, що проходить через точку C . перетинає коло з центром O_1 у точці A , а інше коло - в точці B . Хорда AC дорівнює 12 см. а хорда BC - 18 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо $O_1O_2 = 20$ см.

38.Д. У кут, величина якого становить 60° , вписано два кола, які зовнішньо дотикаються одне до одного. Знайдіть радіус більшого з них. якщо радіус меншого дорівнює 6 см.

39.Д. У кут, величина якого становить 60° , вписано два кола, які зовнішньо дотикаються одне до одного. Знайдіть радіус меншого з них, якщо радіус більшого дорівнює 12 см.

40.В. а) 3 однієї точки до кола проведені січна й дотична. Сума їх дорівнює 15 см, а зовнішній відрізок січної на 2 см менший від дотичної. Обчислити січну й дотичну.

б) 3 однієї точки проведено до кола січну й дотичну - Обчислити довжину зовнішнього і внутрішнього відрізків січної, якщо дотична дорівнює 18 см, а січна — 24 см.

41.В а) 3 однієї точки поза колом проведено до нього дотичну і січну. Дотична більша від внутрішнього і зовнішнього відрізків січної відповідно на 2 і 4 см. Обчислити довжину січної.

б) 3 однієї точки поза колом проведено до нього січну й дотичну. Сума їх дорівнює 30 см, а внутрішній відрізок січної на 2 см менший від дотичної. Обчислити довжину січної й дотичної.

42.В. а) 3 однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити дотичну, якщо вона на 5 см більша від зовнішнього відрізка січної і на стільки ж менша від її внутрішнього відрізка.

б) 3 однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити їх довжину, якщо дотична на 20 см менша від внутрішнього відрізка січної і на 8 см більша від її зовнішнього відрізка.

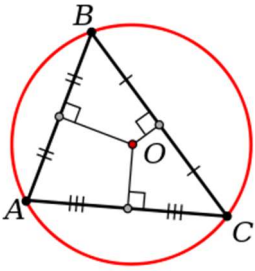
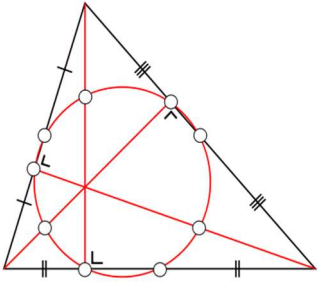
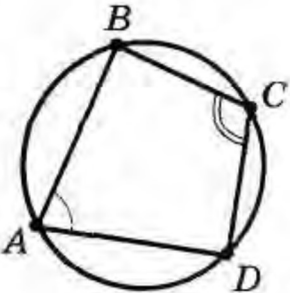
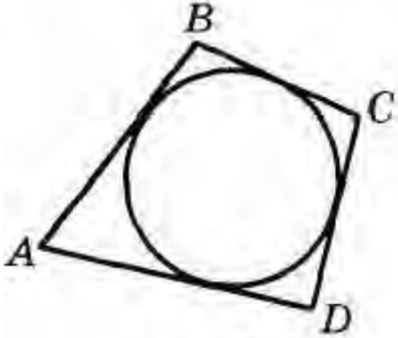
43.В. а) Дотична й січна, що виходять з однієї точки, відповідно дорівнюють 20 і 40 см. Січна віддалена від центра на 8 см. Обчислити радіус кола.

б) Обчислити відстань від центра до тієї точки, з якої виходять дотична і січна, якщо вони відповідно дорівнюють 4 і 8, а січна віддалена від центра на 12 см.

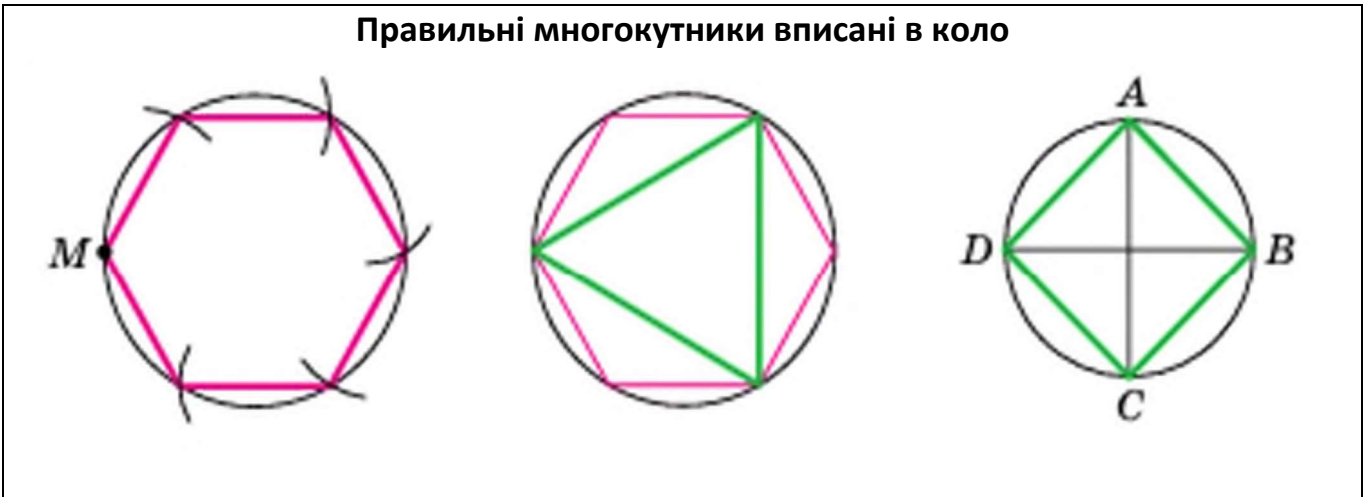
Відповіді.

1.С. 2 см. 2.С. 1 см. 3.С. 12 см і 24 см. 4.С. 12 см. 8.С. 39 см або 9 см 10.С. 25 м.
 16.С. 5 см. 17.С. 12 см^2 . 18.С. 128 см^2 . 19.С. 5 см, $5\sqrt{3}$ см. 23.С. 4 см. 24.С. 50 см. 25.С. 104 см . 26.С. $625\pi\text{ см}^2$. 27.С. 18 см^2 . 28.С. $2,4\pi\text{ см}$. 29.С. 640 см^2 . 30.Д. 4 см. 31.Д. 16 см. 34.Д. 12 см. 35.Д. 17 см. 36.Д. 15 см, 24 см. 37.Д. 8 см, 12 см. 38.Д. 18 см. 39.Д. 4 см.

4.3. Вписані і описані багатокутники.

<p>Трикутник вписаний в коло</p> 	<p>Трикутник описаний навколо кола</p> 
<p>Чотирикутник вписаний в коло</p> 	<p>Чотирикутник описаний навколо кола</p> 

Правильні многокутники вписані в коло



Будь – який правильний многокутник є одночасно вписаним і описаним при чому центри описаного і вписаного кіл збігаються.

Точка, яка є центром описаного і вписаного кіл правильного многокутника, називають центром правильного многокутника.

Кут, утворений двома радіусами описаного кола правильного многокутника, проведеними у дві сусідні вершини многокутника називається центральним кутом правильного многокутника. Розв'язуючи трикутник, утворений стороною многокутника і двома радіусами описаного кола, отримаємо що

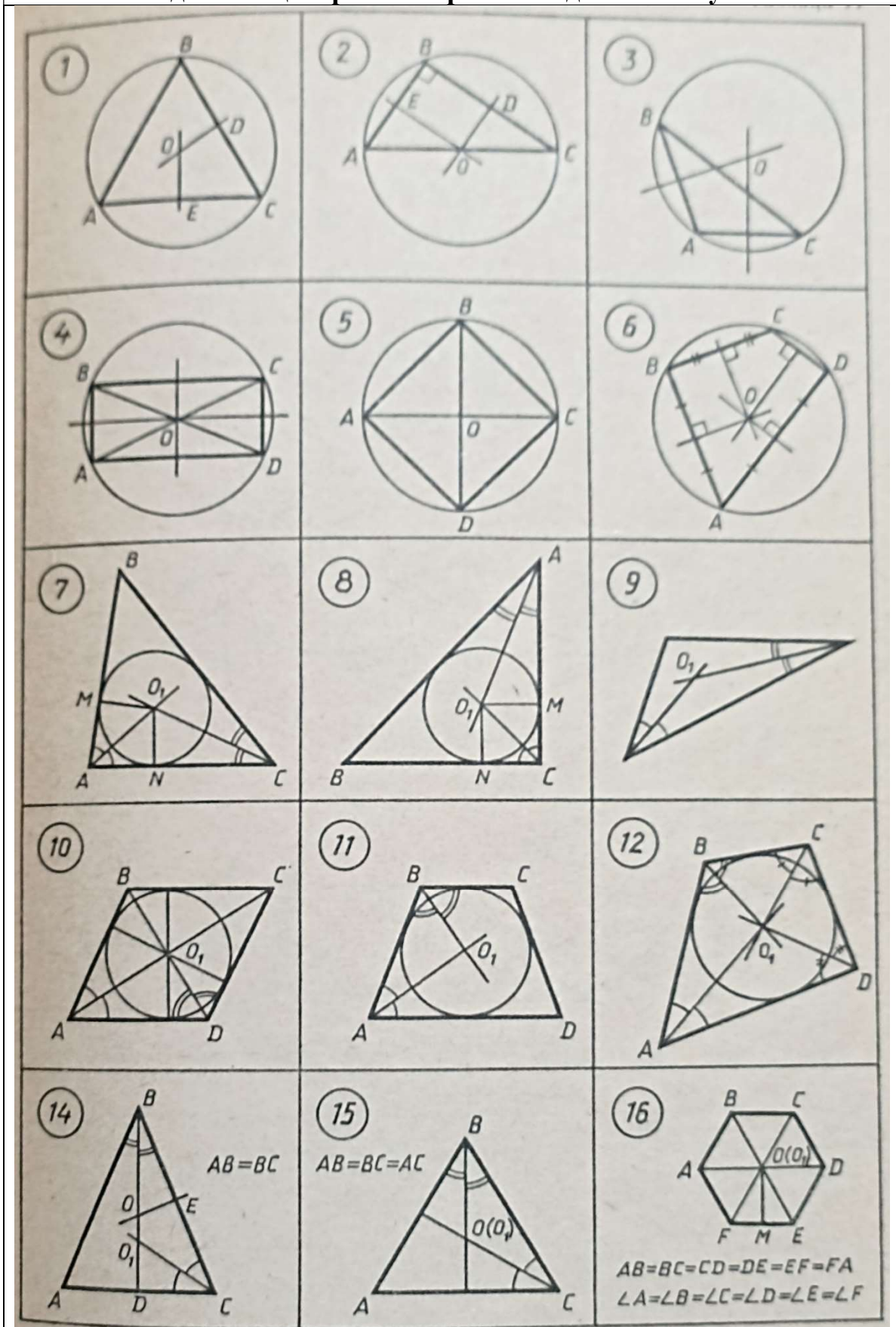
$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Формули для знаходження радіусів описаного і вписаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника, шестикутника зі стороною a

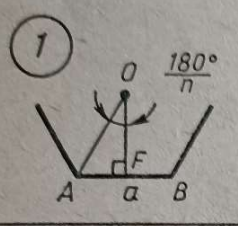
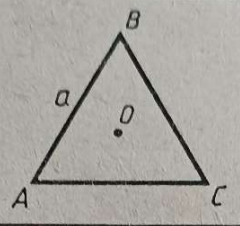
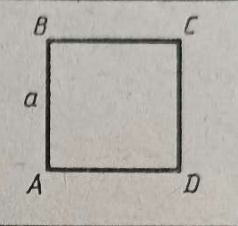
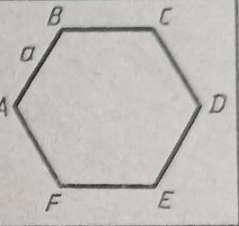
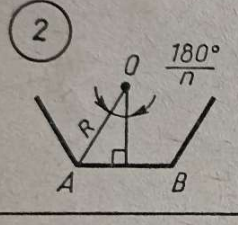
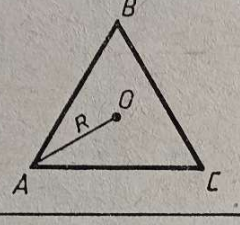
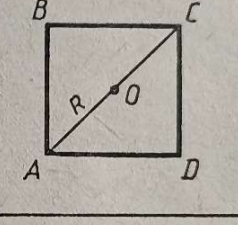
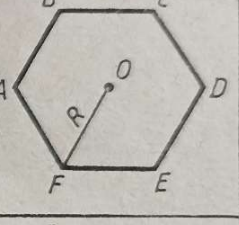
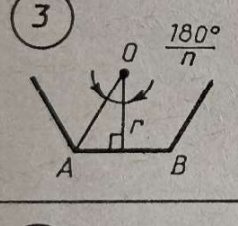
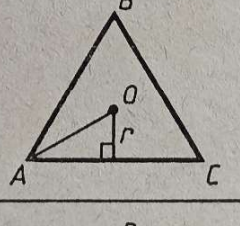
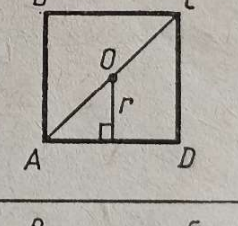
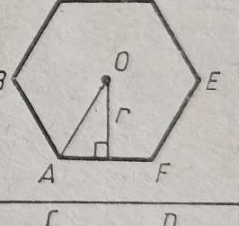
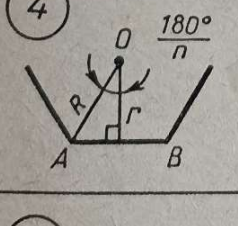
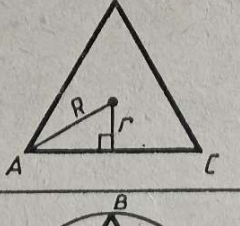
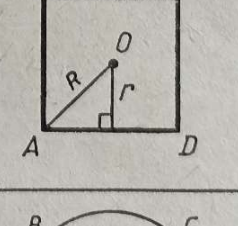
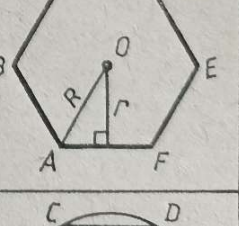
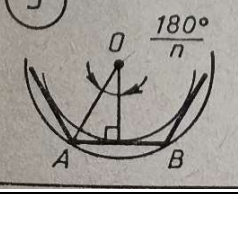
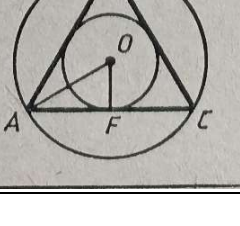
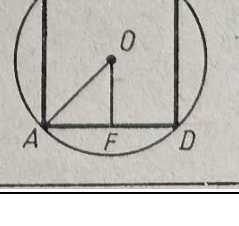
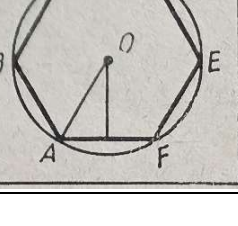
n	3	4	6
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Вписані і описані кола.
Знаходження центрів кіл в різних видах багатокутників**



№4.3. Розв'яжіть вправи за готовими малюнками

Задані правильні многокутники. a -сторона, S -площа многокутника, R -радіус описаного кола, r – радіус вписаного кола, $S_{кр}$ -площа описаного круга, $s_{кр}$ -площа вписаного круга

п-кутник	трикутник	чотирикутник	шестикутник	Знайти
				R, r, S
				a, S
				a, S
				$r : R$
				$S_{кр} : s_{кр}$

Тренувальні вправи

№4.4. Розв'яжіть задачі на властивості вписаних і описаних многокутників.

5.С. Бокова сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 3 см, кут при вершині дорівнює 120° . Визначити діаметр описаного кола.

6.С. Менша сторона прямокутника дорівнює 3 м, гострий кут між діагоналями дорівнює 60° . Знайти радіус описаного кола.

7.С. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 12 см і 9 см. Визначити радіус вписаного кола.

9.С. В коло радіусом 9 см вписано прямокутний трикутник так, що один з катетів вдвічі ближчий до центру, ніж інший. Визначити катети.

11.С. У рівнобедреній трапеції основи дорівнюють 10 м і 6 м, а висота дорівнює 4 м. Визначити радіус описаного навколо цієї трапеції кола.

12.С. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 м і 6 м. Визначити радіус вписаного кола.

13.С. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 6 см. Визначити радіус кола, що дотикається до катетів цього трикутника і має центр на гіпотенузі.

18.С. Обчислити площу квадрата, вписаного в коло радіусом 8 см.

19.С. Навколо прямокутника зі сторонами 8 см і 5 см описано коло. Обчислити радіус цього кола і сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

21.С. Сума двох сторін описаного чотирикутника дорівнює 12 см, а радіус вписаного в нього кола 5 см. Обчислити площу чотирикутника.

22.С. Обчислити довжини діагоналі і бічної сторони рівнобічної трапеції з основами 20 см і 12 см, якщо відомо, що центр описаного навколо трапеції кола лежить на більшій основі.

23.С. Радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює 2 см. Знайти радіус кола, описаного навколо нього.

25.С. Основи рівнобічної трапеції відносяться, як 4:9. Обчислити периметр трапеції, якщо довжина вписаного в неї кола дорівнює 24 π.

27.С. Сторони вписаного в коло чотирикутника дорівнюють 1 см, 4 см, 7 см, 8 см. Знайти його площу.

29.С. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки, один з яких в 4 рази більший за інший. Обчислити площу ромба, якщо довжина цього кола 16 см.

Відповіді.

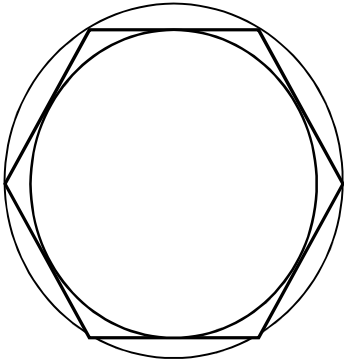
5.С. 6 см. 6.С. 3 м. 7.С. 3 м. 9.С. $\frac{18}{\sqrt{5}}$ см і $\frac{36}{\sqrt{5}}$ см. 11.С. 5 м. 12.С. 2 м. 13.С. 4 см.

18.С. 128 см². 19.С. 5 см, $5\sqrt{3}$ см. 23.С. 4 см. 25.С. 104 см. 26.С. 625π см². 27.С. 18 см². 29.С. 640 см².

4.4. Довжина кола, довжина дуги кола, площа круга та його елементів

Формула довжини кола: $l = \pi d$, $l = 2\pi r$.

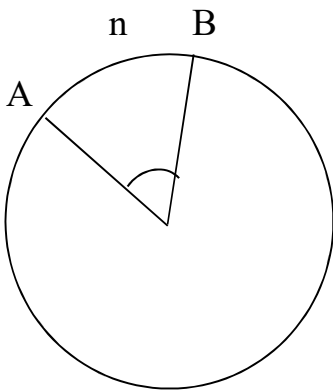
Емпіричні дослідження формули довжини кола



Кількість сторін	Периметр вписаного многокутника R=1	Периметр описаного многокутника R=1
6	6	6,9282
12	6,2117	6,4308
24	6,2653	6,3193
48	6,2787	6,2922
96	6,2821	6,2854
192	6,2829	6,2837

$$l \approx 6,28, \quad 6,28 = 2\pi \cdot 1$$

Після доведення теореми про відношення довжини кола до його діаметру, з якої слідує формула довжини кола слід запропонувати учням самостійно вивести формулу довжини дуги кола яка має градусну міру n° .



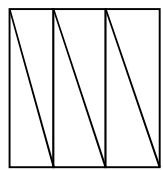
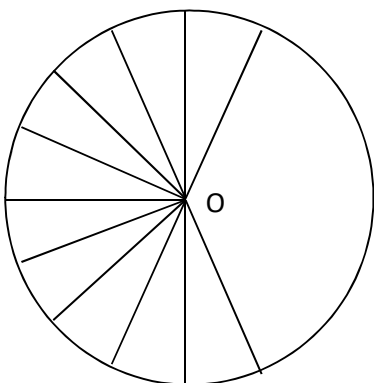
$$l = 2\pi R$$

$$l_{n^\circ} = \frac{\pi R n}{180} n^\circ$$

З цієї формули слідує, що довжини двох дуг одного радіуса відносяться як їх градусні міри.

Площа круга та його елементів.

Вписавши і описавши навколо круга квадрат учні переконуються що площа знаходиться в межах $2R^2 < S < 4R^2$, і роблять висновок, що $S \approx 3R^2$. Необхідно підвести учнів до формули $S = \pi R^2$. Для цього роблять наступне:



$$\pi R$$

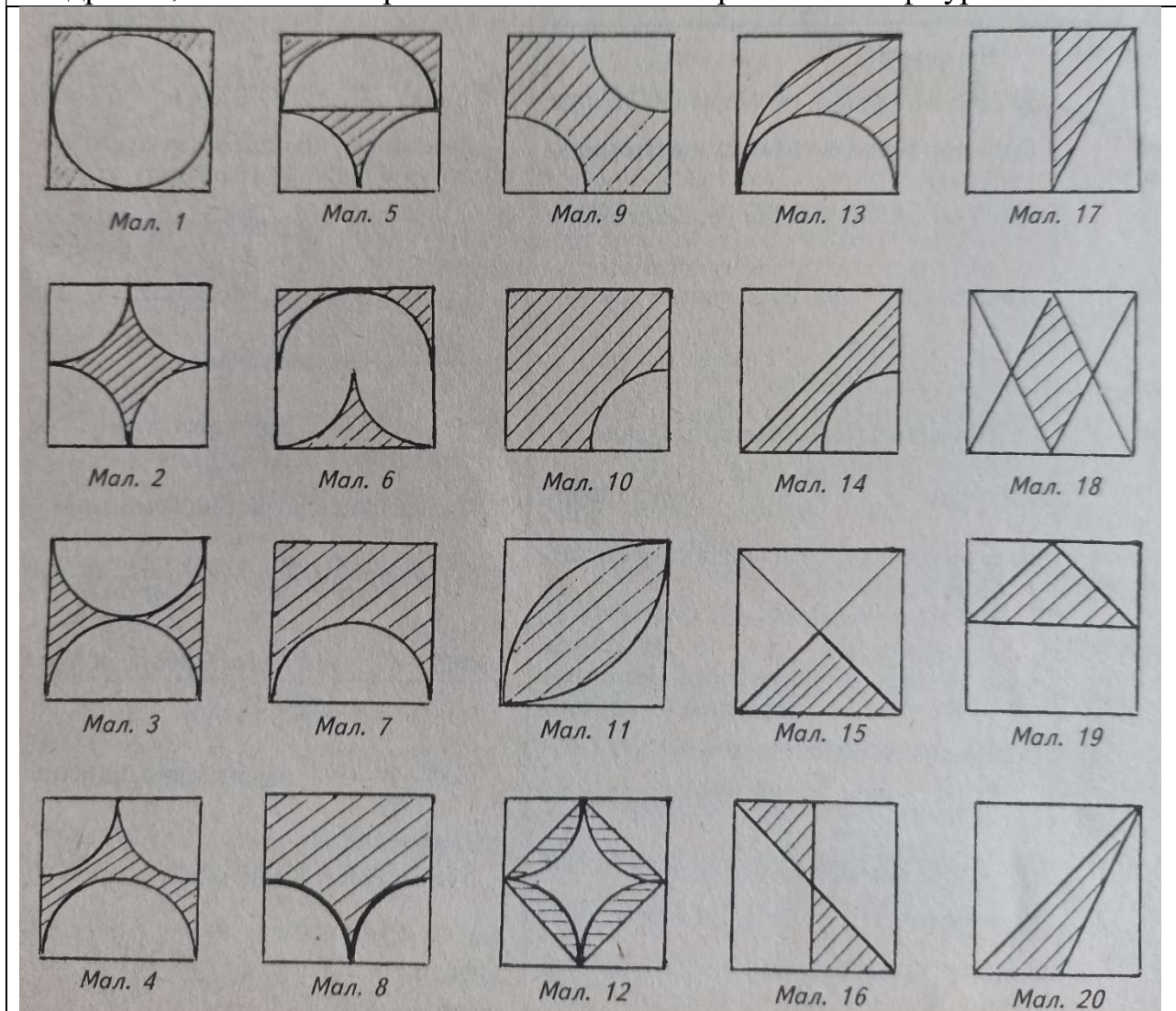


$$R$$

$$S = \pi R^2$$

№4.5. Розв'яжіть вправи за готовими малюнками

Знайдіть площі фігур, заштрихованих на малюнку, за даною стороною квадрата a , та вкажіть пари малюнків на яких є рівновеликі фігури.



Тренувальні вправи

№4.6. Розв'яжіть задачі на обчислення площі круга і довжини кола.

14.С. Обчислити площу круга, якщо довжина його кола рівна $\sqrt{\pi}$.

15.С. Круговим кільцем називається частина площини, обмежена двома концентричними колами. Знайти площу кругового кільця, якщо його внутрішній і зовнішній діаметри відповідно дорівнюють 3 см і 5 см.

17.С. Знайти площу круга, якщо його хорду довжиною 6см буде видно із центра круга під кутом 120° .

20.С. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 34 см, а більша основа 50 см. Обчислити площу круга, вписаного в цю трапецію.

24.С. Обчислити довжину кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, якщо її основи мають довжини 40 см і 14 см.

26.С. Коло описане навколо трикутника зі сторонами 14 см, 30 см, 40 см. Обчислити площу круга.

28.С. Периметр ромба 40 см, а відношення його діагоналей дорівнює 0,75. Обчислити довжину кола, вписаного в ромб.

Відповіді.

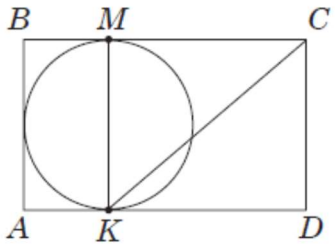
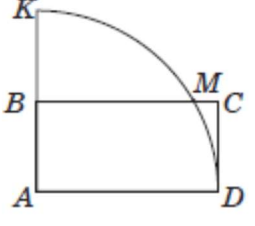
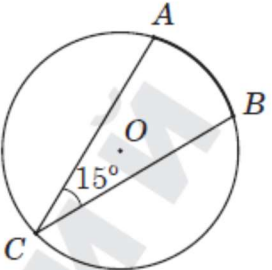
14.С. 6 15.С. 4π см². 17.С. 12 см². 24.С. 50 см. 26.С. 625π см². 28.С. $2,4\pi$ см.

4.5. Задачі практичного змісту

Розв'яжіть задачі:

1. Дві водопровідні труби з діаметрами 6 см і 8 см треба замінити однією трубою з такою самою пропускною здатністю. Знайдіть діаметр цієї труби.
2. Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, якщо його обхват дорівнює 1) 90 см, 2) 1,5 м.
3. Визначте як зміняться довжина кола і площа круга, якщо радіус кола збільшити втричі.
4. Визначте як зміняться довжина кола і площа круга, якщо діаметр кола зменшити в 5 разів.
5. Чи правильно, що довжина кола більша за його потрійний діаметр?
6. Накресліть два круга зі спільним центром і радіусами 2 см і 3 см. Порівняйте на око площу меншого круга з площею кільця, що утворилося. Перевірте правильність порівняння шляхом обчислень.
7. Обчисліть довжину кругової орбіти штучного супутника Землі, якщо він обертається на відстані 330 км від земної поверхні, а радіус Землі – 6370 км.
8. Довжина маятника настінного годинника дорівнює 60 см, а кут його коливань – 30° . Знайдіть довжину дуги, яку описує кінець маятника.
9. Довжина кола циркової арени дорівнює 75,36 м. Знайдіть діаметр арени та її площу.
10. Радіуси кіл стрілецької мішені дорівнюють 1, 2, 3, 4. Знайдіть площу кожного з трьох кілець мішені.

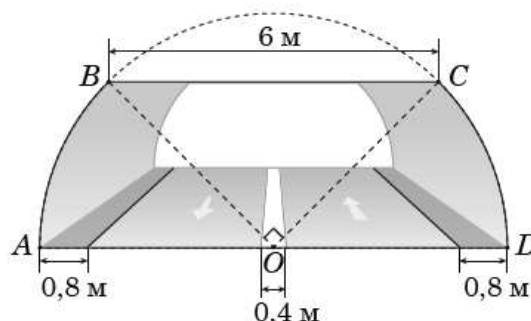
4.6. Вправи рівня ЗНО

1.	<p>На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ й коло, яке дотикається до сторони AB й сторін BC й AD в точках M і K відповідно. Периметр чотирикутника $ABMK$ дорівнює 24 см, а довжина відрізка KC – 17 см.</p>											
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Визначте радіус (у см) заданого кола. 2. Обчисліть площу (у см^2) прямокутника $ABCD$. 											
№22, 2021 стандарт												
2.	<p>На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ й сектор KAD, у якому $\angle KAD = 90^\circ$. Площа сектора KAD дорівнює $100\pi \text{ см}^2$. Дуга \widehat{KD} перетинає сторону BC в точці M, причому $BM = 16$ см.</p>											
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Визначте довжину (у см) сторони AD. 2. Обчисліть площу (у см^2) прямокутника $ABCD$. 											
№22, 2021 додаткова сесія												
3.	<p>На колі із центром у точці O вибрано точки A, B й C так, що $\angle ACB = 15^\circ$ (див. рисунок). Довжина меншої дуги AB кола дорівнює 8л см.</p>											
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Визначте градусну міру центрального кута AOB, що спирається на меншу дугу AB. 2. Визначте радіус цього кола (у см). 											
№22, 2021 демонстраційна версія												
4.	<p>Які з наведених тверджень є правильними?</p> <p>I. У будь-який трикутник можна вписати коло. II. У будь-який прямокутник можна вписати коло. III. У будь-який ромб можна вписати коло.</p>											
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 20%;">А</th> <th style="width: 20%;">Б</th> <th style="width: 20%;">В</th> <th style="width: 20%;">Г</th> <th style="width: 20%;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>лише I</td> <td>лише II і III</td> <td>лише I і II</td> <td>лише I і III</td> <td>I, II і III</td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	лише I	лише II і III	лише I і II	лише I і III	I, II і III
А	Б	В	Г	Д								
лише I	лише II і III	лише I і II	лише I і III	I, II і III								
№14, 2019 додаткова сесія												

5.

На рисунку зображено автомобільний тунель, поперечний переріз $ABCD$ якого утворено хордою BC , діаметром AD та двома рівними дугами \widehat{AB} й \widehat{DC} кола із центром у точці O . Хорду BC довжиною 6 м видно із центра O під кутом 90° . У тунелі прокладено дорогу з двома смугами руху транспорту однакової ширини, розділювальною смугою шириною 0,4 м та двома технічними смугами завширшки 0,8 м кожна. Визначте ширину однієї смуги руху транспорту. Укажіть відповідь, найближчу до точної.

А	Б	В	Г	Д
1,8 м	2 м	3 м	3,2 м	3,4 м

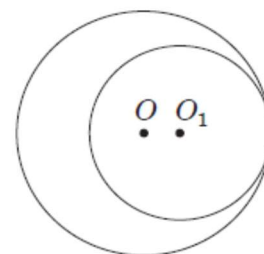


№20, 2020

6.

Кола із центрами в точках O і O_1 мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань OO_1 , якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
1,5 см	2 см	3 см	4 см	8 см

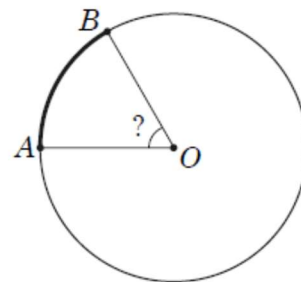


№2, 2019

7.

На колі з центром O вибрано точки A та B (див. рисунок). Визначте градусну міру кута AOB , якщо довжина дуги \widehat{AB} становить $\frac{1}{6}$ довжини цього кола.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°



№9, 2019

8.

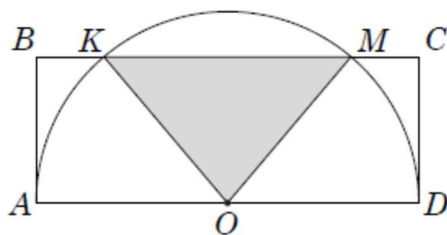
У трикутнику ABC кут B – тупий. Які з наведених тверджень є правильними?
 I. $\angle A + \angle C < 90^\circ$.
 II. $AB + BC < AC$.
 III. Центр кола, описаного навколо трикутника ABC , лежить поза його межами.

А	Б	В	Г	Д
лише I і II	лише I	лише II і III	I, II і III	лише I і III

№13, 2019

9.

На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ та півколо з центром O . AD – діаметр півкола. $BK : KM = 1 : 3$, $AB = 4$ см.



1. Визначте радіус півкола (у см).
2. Обчисліть площу трикутника KOM (у см^2).

№26, 2019

Відповіді	1. 1) 4, 2) 152	2. 1) 20, 2) 240	3. 1) 30° , 2) 48
	4. Г	5. Г	6. Д
	7. В	8. Д	9. 1) 20, 2) 480

Список використаної та рекомендованої літератури.

- Апостолова Г. В. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 216 с.
- Бевз Г. П. Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавництво «Відродження», 2015. 192 с.
- Бевз В., Кузьменко В. Провідні методологічні підходи у навчанні математики в профільній школі. *Математика в школі*. 2010. № 1-2. С. 3-8
- Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.
- Генденштейн Л.Є., Єршова А.П. Наочний довідник з геометрії. Тернопіль: Підручники і посібники, 1997. 96 с.
- Геометрія 7 – 11. Планіметрія. Стереометрія. Збірник задач / Гайштут О.Г. – К.: КІМО, 1999. – 144 с.
- Завдання з математики для екзаменів за курс спеціалізованих фізико-математичних шкіл, ліцеїв і гімназій / Литвиненко Г.М., Собко М.С. К.: Освіта, 1993. 80 с.
- Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас. За редакцією З.І. Слєпкань. Харків: Гімназія, 2002. 176 с.
- Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 184 с.
- Кушнір І.А., Фінкельштейн Л.П. Математика в задачах і прикладах: 101 порада абітурієнту. К.: Факт, 2001. 304 с.
- Лов'янова І.В. Вибрані питання елементарної математики. Частина 1. Планіметричні задачі. Методична розробка для учнів 10 – 11 класів фізико – математичного профілю. Кривий Ріг; КДПУ, 2003. 50 с.
- Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики Х.: Гімназія, 2015. 192 с.
- Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2015. 224 с.
- Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. Навч. методичний посібник. К.: Магістр – S, 1998. 256 с.

Додатки

Таблиця 1

Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

десятки	одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9606	9801

ДЛЯ НОТАТОК

УДК 373.5.016:51(03)(076)

Навчальне видання

ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ГЕОМЕТРИЧНІ ВЕЛИЧИНИ
Довідник-тренажер з підготовки до ЗНО
Частина 1. ПЛАНІМЕТРІЯ

Укладачі Лов'янова І. В., Білоусова Г. М., Калугін Р. Ю.

Комп'ютерний набір Лов'янова І. В.

Комп'ютерна верстка Лов'янова І. В.