Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-4-006 УДК 378.147:[37.011.3-051:51]:[519.2:004]

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО У НАВЧАННІ СТОХАСТИКИ В КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО ВПРОВАДЖЕННЯ STEM-ОСВІТИ

Тетяна КРАМАРЕНКО ✉
Криворізький державний педагогічний університет, Україна
kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-2125-2242

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Актуальною проблемою в освіті є запровадження STEM-навчання. Методика підготовки учителів математики (014 Середня освіта. Математика) в контексті реалізації STEM-освіти потребує удосконалення. Наскрізне використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики є engineering-інструментом, успішне опанування яким сприятиме інтеграції знань та умінь здобувачів освіти з математики та інформатики, підготовці учителів до впровадження STEM-підходів у навчанні математики. Метою статті є висвітлення доробку автора з питання впровадження STEM-підходів у навчанні стохастики.*

Матеріали і методи. *В роботі використані теоретичні й емпіричні методи дослідження: аналіз для уточнення тезаурусу дослідження; аналіз наукових джерел для визначення важливих напрямків, на яких варто зосередити увагу для формування STEM-компетентностей здобувачів освіти; синтез, спостереження за освітнім процесом; систематизація й узагальнення результатів дослідження; використання статистичного критерію для визначення зсуву у значеннях ознаки (критерій Вілкоксона).*

Результати. *Наскрізне використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики позитивно впливає на рівень навчальних досягнень здобувачів освіти та їх готовність до впровадження STEM-підходів у навчанні учнів.*

Висновки. *Застосування методу Монте-Карло як engineering-інструменту зміщує акценти навчання з теоретичної в експериментальну площину. У ході дослідження встановлено, що наскрізне використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики позитивно впливає на рівень навчальних досягнень здобувачів освіти. Експериментально підтверджено підвищення рівня готовності майбутніх учителів до подальшого впровадження STEM-підходів у навчанні учнів.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод Монте-Карло; генератор випадкових чисел; таблиці Google та Microsoft Excel; система динамічної математики GeoGebra, стохастика, теорія ймовірностей та математична статистика, методика STEM-навчання; професійна освіта; підготовка майбутніх учителів математики.

USING THE MONTE CARLO METHOD IN TEACHING STOCHASTICS IN THE CONTEXT OF TRAINING MATHEMATICS TEACHERS TO IMPLEMENT STEM EDUCATION

Tetiana KRAMARENKO ✉
Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine
kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-2125-2242

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The introduction of STEM education is an urgent problem in education. The methodology for training mathematics teachers (014 Secondary Education. Mathematics) in the context of STEM education needs to be improved. The cross-cutting use of the Monte Carlo method in teaching stochastics is an engineering tool, the successful mastery of which will help integrate the knowledge and skills of students in mathematics and computer science, and to train teachers to implement STEM approaches in mathematics teaching. The purpose of the article is to highlight the author's work on the implementation of STEM approaches in teaching stochastics.*

Materials and methods. *The paper uses theoretical and empirical research methods: analysis to clarify the thesaurus of the study; analysis of scientific sources to identify important areas that should be focused on for the formation of STEM competencies of students; synthesis, observation of the educational process; systematization and generalization of research results; use of statistical criteria to determine shifts in the value of the feature (Wilcoxon criteria).*

Results. *The cross-cutting use of the Monte Carlo method in teaching stochastics has a positive effect on the level of academic achievement of students and their readiness to implement STEM approaches in teaching students.*

Conclusions. *The use of the Monte Carlo method as an engineering tool shifts the emphasis of learning from the theoretical to the experimental plane. The study found that the cross-cutting use of the Monte Carlo method in teaching stochastics has a positive effect on the level of academic achievement of students. The increase in the level of readiness of future teachers for further implementation of STEM approaches in teaching students has been experimentally confirmed.*

KEYWORDS: Monte Carlo method; random number generator; Google and Microsoft Excel spreadsheets; GeoGebra system of dynamic mathematics, stochastics, probability theory and mathematical statistics, STEM teaching methods; vocational education; training of future math teachers.

ВСТУП

Постановка проблеми. Одним із найважливіших нормативних документів, які окреслюють перспективи розвитку STEM-освіти в Україні, є Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти на період до 2029 року «Нова українська школа». Набула чинності Концепція розвитку природничо-математичної освіти до 2027 року – STEM-освіти. STEM-орієнтований підхід до навчання є актуальним напрямом модернізації та інноваційного розвитку природничо-математичного й гуманітарного профілів освіти, а STEM-грамотність – міждисциплінарною областю дослідження, яка поєднує науку, технології, інженерію та математику.

Для цитування:	Крамаренко Т. Використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики в контексті підготовки учителів математики до впровадження STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 4. С. 42-48. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-4-006
	Крамаренко, Т. (2023). Використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики в контексті підготовки учителів математики до впровадження STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*, 38(4), 42-48. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-006
For citation:	Kramarenko, T. (2023). Using the Monte Carlo method in teaching stochastics in the context of training mathematics teachers to implement STEM education. *Physical and Mathematical Education*, 38(4), 42-48. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-006
	Kramarenko, T. (2023). Vykorystannia metodu Monte-Karlo u navchanni stokhastyky v konteksti pidhotovky uchyteliv matematyky do vprovadzhennia STEM-osvity [Using the Monte Carlo method in teaching stochastics in the context of training mathematics teachers to implement STEM education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(4), 42-48. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-006

✉ Corresponding author

Запорукою запровадження актуальної на сьогодні STEM-освіти можуть стати креативні педагоги, у тому числі й учителі математики, які здатні своїми знаннями та вміннями зробити привабливими STEM-програми і методи навчання, спроможні генерувати ідеї, застосовувати фундаментальні знання для вирішення складних, практичних завдань у майбутній професійній діяльності теперішніх здобувачів освіти.

Однак, методика підготовки учителів математики («01 Освіта (014 Середня освіта. Математика)») в контексті реалізації STEM-освіти потребує удосконалення. Тому використання методу Монте-Карло у навчанні майбутніх учителів математичних дисциплін, зокрема теорії ймовірностей та математичної статистики, розглядаємо як engineering-інструмент, успішне опанування яким сприятиме інтеграції знань та умінь здобувачів освіти з математики та інформатики, підготовці учителів до впровадження STEM-підходів у навчанні математики.

Аналіз актуальних досліджень. Концептуальні підходи та практичні напрями реалізації STEM-освіти досліджують багато науковців, методистів. Зокрема О. Барна, В. Олексюк, Н. Балик та ін. (2018), Ю. Ботузова, Н. Валько, І. Василашко, Д. Васильєва, К. Власенко та ін. (2019; 2021), С. Горбенко, О. Гриб'юк, О. Кузьменко, Н. Морзе, О. Патракєєва, В. Пікалова (2021), О. Струтинська, Н. Хараджян та ін. На основі аналізу досліджень STEM-освіту трактуємо як цілісну систему природничої і математичної освітніх галузей. STEM-навчання базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань для розв'язання практичних проблем для подальшого використання цих знань і вмінь у професійній діяльності. Метою STEM-освіти є, зокрема, розвиток особистості через формування STEM-компетентностей, бачення природничо-наукової картини світу здобувачами освіти, використання трансдисциплінарного підходу до навчання. Очікуваними результатами має стати трансфер знань, який забезпечує впровадження досягнень наукової сфери в освітній процес.

Проблеми підготовки, підвищення кваліфікації учителів математики в контексті використання інноваційних технологій навчання та розвитку навчальних компетентностей здобувачів освіти знайшли відображення в дослідженнях І. Лов'янової, К. Власенко та ін. (2019; 2021). Автори акцентують увагу на необхідності посилення практичної спрямованості навчання математики.

В. Пікалова (2021) в дисертаційній роботі обґрунтовує комплекс педагогічних умов використання GeoGebra як інструмента реалізації STEM-освіти в процесі підготовки майбутніх учителів математики. Зокрема супроводу різних видів навчальної діяльності студентів із використанням пакету GeoGebra.

Часто для визначення характеристик деяких процесів, перебіг яких не є детермінованим і залежить від випадкових факторів, розробляють спеціальні імітаційні моделі та здійснюють імітацію з використанням програмних засобів. Генерація випадкових чисел є важливим компонентом багатьох застосунків, включаючи криптографію, системи безпечного зв'язку, симуляції та імовірнісні алгоритми. Здійснивши статистичне моделювання, усереднені результати спостережень використовують для наближеного визначення шуканих характеристик процесів, що досліджують. У цьому полягає суть методу статистичних випробувань – методу Монте-Карло (Жалдак та ін., 2009; Семеніхіна, 2008).

У деяких випадках метод Монте-Карло є єдиним, за яким можна дістати наближені розв'язки задач, які не можна проаналізувати іншими аналітичними чи чисельними методами. Метод Монте-Карло – метод імітації для відтворення реальних явищ. Заснований на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного процесу, який здійснюється так, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Наприклад, щоб середнє значення за отриманою вибіркою було оцінкою для невідомого математичного сподівання. Застосування методу дає змогу побудувати модель, щоб мінімізуючи вхідні дані, отримати максимально правдоподібний результат. Оскільки метод використовується, зокрема, через симуляції за допомогою програмних засобів для розв'язування задач математики, фізики, економіки, оптимізації, теорії управління тощо, то його застосування можна розглядати як один із ефективних engineering-інструментів, успішне опанування яким сприятиме підготовці учителів до впровадження STEM-підходів у навчанні природничо-математичних дисциплін.

По суті, STEM-підхід у навчанні стохастики розглядається у працях М. І. Жалдака та Г. О. Михаліна (Жалдак та ін., 2009), О. В. Семеніхіної та М. Г. Друшляк (Семеніхіна & Друшляк, 2015), Т. П. Кобильника та ін., хоча і не використовується відповідна термінологія.

О. В. Семеніхіна (2008) звертає увагу на те, що метод Монте-Карло доцільно використовувати при вивченні циклу математичних дисциплін. З цією метою необхідно актуалізувати міжпредметні зв'язки. Наприклад, курсу інформаційних технологій з математичним аналізом чи теорією ймовірностей та математичною статистикою. У статті наводиться приклад оцінювання значення кратного інтеграла через застосування методу Монте-Карло у *спеціалізованому пакеті MAPLE*.

Для розв'язування задач стохастики, опрацювання статистичних вибірок, візуалізації експериментальних випробувань на основі випадкових подій дослідники використовують також системи динамічної математики. Зокрема, висвітлювалося застосування *програмного засобу Gran1* (Жалдак та ін., 2009; Семеніхіна & Друшляк, 2015). Дослідження імітаційного моделювання з використанням *системи динамічної математики GeoGebra* знайшли відображення в роботах науковців О. Хоминської та ін. (2022).

Генератори псевдовипадкових чисел та квантові генератори випадкових чисел є двома основними типами генераторів випадкових чисел. Як стверджують автори публікації Д. Проскурін та ін. (2023), останні забезпечують кращу безпеку завдяки своїй непередбачуваності. Автори публікації розглядають модель глибинного навчання, яка навчається та оцінюється на наборі даних, що містить зокрема послідовності випадкових чисел.

Висвітлення особливостей навчанню методу Монте-Карло у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики нами започатковано у публікації (Крамаренко, 2016).

У розглянутих публікаціях, на нашу думку, методу Монте-Карло як engineering-інструменту STEM-навчання майбутніх учителів математики приділено недостатньо уваги. Недостатньою є кількість досліджень, присвячених моделюванню процесів, пов'язаних з випадковими подіями та випадковими величинами, які в подальшому здобувачі освіти зможуть використати у навчанні учнів. Потребує детальнішого розгляду методика навчання майбутніх учителів математики в контексті підготовки їх до впровадження STEM-навчання учнів. Зокрема, використання методу Монте-Карло для візуалізації абстракцій, висунення гіпотез, перевірки їх вірогідності.

Метою статті є висвітлення доробку автора з питання впровадження STEM-підходів у навчанні стохастики, зокрема наскрізного використання методу Монте-Карло у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В роботі використані теоретичні й емпіричні методи дослідження: аналіз для уточнення тезаурусу дослідження; аналіз наукових джерел для визначення важливих напрямків, на яких варто зосередити увагу для формування STEM-компетентностей здобувачів освіти; синтез, спостереження за освітнім процесом; систематизація й узагальнення результатів дослідження; використання статистичного критерію Вілкоксона для визначення зсуву у значеннях ознаки.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

За програмою підготовки фахівців за спеціальностями «Середня освіта. Математика» та «Середня освіта. Інформатика» метод Монте-Карло зустрічається принаймні при вивченні чисельних методів, теорії ймовірностей та математичної статистики, навчанні студентів програмуванню. Тому доцільно більше уваги приділити реалізації міжпредметних зв'язків при вивченні теми. Наприкінці вивчення курсу теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів-математиків та майбутніх учителів інформатики в педагогічному університеті для опанування методом Монте-Карло відводиться 2 години лекцій, 4 години практики та 6 годин самостійної роботи. Враховуючи важливість теми, зокрема, при підготовці майбутніх учителів до STEM-навчання, ми експериментально перевірили доцільність *наскрізного застосування методу при вивченні стохастики*. Наші дослідження показали, що при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики доцільно застосовувати метод Монте-Карло впродовж усього курсу.

У низці підручників з теорії ймовірностей та математичної статистики рекомендується окремі поняття описової статистики, числові та графічні характеристики вибірки вводити перед вивченням випадкових величин та законів розподілу ймовірностей значень випадкових величин. Зокрема, практично-орієнтованому спрямуванню навчання стохастики перевагу віддають М. І. Жалдак та ін. (2009).

Власне ознайомлення з методом Монте-Карло здобувачів освіти розпочинаємо на етапі *означення ймовірності випадкової події*. Студентам пропонуємо провести кілька стохастичних експериментів, визначити відносні частоти відбування тієї чи іншої події. Рекомендації щодо проведення і опрацювання результатів стохастичних експериментів, доступних учням старшої школи та студентам 1-2 курсів фахових коледжів, висвітлено нами у розробленому навчально-методичному посібнику «Математика в STEMі». Розглядаючи означення статистичної ймовірності випадкової події, можемо запропонувати здобувачам освіти наближено обчислити ймовірності випадання випадкових чисел, рівних сумі чисел на верхніх гранях двох кубиків. Доцільно порівняти отримані значення з обчисленими ймовірностями, здійснити пропедевтику вивчення закону великих чисел. А саме, продемонструвати стійкість відносних частот в серії повторних незалежних випробувань. Подібні експерименти розглядають і у підручниках для поглибленого вивчення математики в 9-му та в 11-му класах.

Е*ксперимент №1* з підкидання двох кубиків та визначення суми чисел на верхніх гранях (рис.1). Навіть при відносно невеликій кількості реалізацій (на поданому рисунку майже 900), отримуємо, що відносні частоти та ймовірності практично не відрізняються. Для візуалізації результатів дослідження будуємо полігони відносних частот та ймовірностей з використанням таблиць Google.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
2	4	3	8	9	7	8	3	4	6	1	55	
4	1	2	7	6	2	9	3	7	4	5	50	
2	3	5	6	5	8	4	9	2	3	6	53	
1	2	5	7	14	6	13	4	1	5	2	60	
1	6	6	13	13	19	12	11	9	5	5	100	
1	1	5	8	3	9	9	5	2	5	2	50	
1	1	3	6	11	4	7	6	3	5	3	50	
1	1	6	8	6	8	10	6	2	2	0	50	
3	5	5	6	7	9	8	12	5	4	1	65	
1	2	3	1	8	15	4	6	4	6	0	50	
1	3	5	3	6	11	8	8	1	1	3	50	
1	3	5	9	10	9	8	9	5	1	0	60	
4	5	3	4	6	7	1	2	9	8	1	50	
3	3	8	4	9	8	8	7	5	3	2	60	
2	2	3	6	9	14	12	4	2	6	3	63	
28	42	67	96	122	136	121	95	61	64	34	866	
0,03	0,05	0,08	0,11	0,14	0,16	0,14	0,11	0,07	0,07	0,04	1,00	відносна частота
0,03	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,14	0,11	0,08	0,06	0,03	1,00	ймовірність

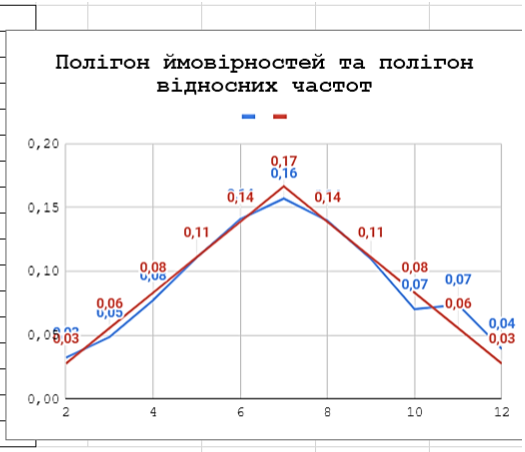

Рис. 1. Полігон відносних частот та ймовірностей викидання суми чисел на верхніх гранях двох кубиків

Експеримент №2 стосувався написання чотирьох випадкових слів, визначення кількості літер, встановлення, чи отримане число є парним. Далі потрібно розрахувати і порівняти відносні частоти та ймовірності того, що з чотирьох слів одне, два, три чи чотири з парною кількістю літер.

Експеримент №3. Методом Монте-Карло *оцінку для значення π* можна здійснити шляхом генерації випадкових точок в квадраті і обчислення пропорції точок, що лежать усередині вписаного в квадрат круга, до числа точок, кинутих у квадрат.

У навчанні учнів стохастики також доцільно запропонувати наступний STEM-підхід. На дні коробки квадратної форми побудувати вписане в квадрат коло. Далі всипаємо в коробку горошинки так, щоб вони одним шаром були відносно рівномірно розподілені на дні коробки. Записуємо, скільки горошинок всипано в коробку та кількість, яка потрапляє в круг. У подальшому подібний експеримент доцільно провести для визначення площі фігури, побудованої на дні коробки, та наближеного оцінювання значення визначеного інтеграла.

У ході експерименту доцільно зробити кілька реєстрацій даних, попередньо перемішуючи розташування горошинок. Адже у подальшому, при вивченні закону великих чисел обґрунтовується стійкість середнього вибіркового.

Ймовірність того, що точка, кинута в квадрат, потрапить в круг, пропорційна відношенню площі круга до площі квадрата. При програмуванні методу, наприклад на мові Python, привабливість алгоритму полягає в тому, що взагалі не потрібна графіка чи симуляція для відображення згенерованих точок. Генеруємо випадкові (x, y) пари, а потім перевіряємо, чи виконується нерівність $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \le \mathrm{r}^2$. Якщо так, то збільшуємо кількість точок, які з'являються всередині кола. У рандомізованих алгоритмах і алгоритмах моделювання, таких як Монте-Карло, чим більше число ітерацій, тим точніший результат. Тому оцінку числа π будемо здійснювати за формулою:

$$\pi \approx 4 \cdot (\text{N точок, що потрапили у круг})/(\text{N точок, кинутих у квадрат}) \quad (1)$$

Експеримент №4. Класичним прикладом на застосування методу Монте-Карло є *задача Бюффона для оцінки числа π*. Завдання також пропонується учням для ознайомлення у підручниках для 11-го класу при поглибленому вивченні математики.

Для отримання більшої кількості реалізацій в одних і тих же умовах доцільно попередньо визначитися з учасниками експерименту щодо довжини сірника ($2 \cdot l = 4$ см), який підкидають, та ширини між проведеними на аркуші горизонтальними лініями ($2 \cdot \mathrm{a} = 6$ см). Для обчислення ймовірності випадкової події *A* «сірник перетнув лінію», необхідно визначити простір елементарних подій. Для цього описують положення голки/сірника кутом, який утворюється з додатним напрямом осі абсцис та відстанню від центра голки до найближчої з горизонтальних ліній. При цьому кут φ вимірюється в межах від 0° до 180° (від 0 до π радіан). Простір елементарних подій подаємо у вигляді прямокутника, одна з сторін якого дорівнює π, а інша рівна половині відстані між горизонтальними лініями. Тоді в прямокутнику заштриховують фігуру, обмежену знизу віссю абсцис, а зверху графіком функції $l \cdot \sin(\varphi)$. Відношення площі утвореної фігури до площі прямокутника наближено дорівнює відношенню кількості перетинів голкою лінії до загального числа підкидань голки. Отримуємо формулу для наближеного обчислення π.

Спочатку при реалізації задачі Бюффона студенти не розуміли, чому запис простору елементарних подій Ω важливий і є ключем для подальшого моделювання та програмування. $\Omega = \{(x;\varphi)|\ 0 \le x \le a; 0 \le \varphi \le \pi\}$. Випадкова подія при цьому буде описуватися множиною точок $A = \{(x;\varphi)|\ 0 \le x \le l \cdot \sin(\varphi); 0 \le \varphi \le \pi\}$, де 2a – відстань між паралельними прямими, $2 \cdot l$ – довжина голки. Для імітації процесу кидання голки достатньо випадково обрати пару чисел (x; φ) з проміжків [0; a] та [0; π] відповідно та перевірити виконання умови перетину голкою лінії $x \le l \cdot \sin(\varphi)$.

До кожного з чотирьох експериментів ми пропонували студентам змоделювати процеси, скласти програму на одній з мов програмування, насамперед Python, протестувати її, обговорити з одногрупниками код програми, можливості застосування бібліотек статистичних функцій. Для перших трьох експериментів і простір елементарних подій, і множина, що відповідає події, були інтуїтивно зрозумілими. Студенти зазначали, що найважче було запрограмувати задачу Бюффона, оскільки необхідна була попередня підготовка і встановлення того, яким є простір елементарних подій та множина, що відповідає події «сірник перетнув лінію».

Розглядаючи означення ймовірності випадкової події, доцільно використати наочності з GeoGebra Sada Manuel, О. Хоминської та ін. (2022). Це симуляції до задач теорії ймовірностей та математичної статистики, реалізовані в системі динамічної математики. Ми пропонували здобувачам освіти створювати подібні наочності в GeoGebraBook через генерування випадкових чисел.

Метод Монте-Карло доцільно застосувати при вивченні основних *законів розподілу дискретних та неперервних випадкових величин*. Варто розглядати як алгоритми генерації випадкових чисел за певними законами, так і розігрування повної групи подій. Наприклад, отримати значення випадкової величини з експоненціальним розподілом ймовірностей. Розглянутий датчик випадкових чисел широко використовується при імітації за допомогою програмних засобів функціонування деяких систем масового обслуговування. Так, проміжок часу між двома послідовними запитами на обслуговування є випадковою величиною з експоненціальним розподілом ймовірностей. Для генерації достатньо знайти значення випадкової величини з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку [0; 1], надавати функції розподілу ймовірностей цих значень і обчислювати аргумент функції за відповідними формулами:

$$F(x_i) = 1 - e^{-\lambda \cdot x_i} = r_i; \quad x_i = \ln(1 - r_i) \quad (2)$$

Доцільно для генерації значень випадкової величини за певним законом розподілу ймовірностей використати бібліотеку статистичних функцій Python, вбудованих функцій таблиць Google чи Microsoft Excel. Наприклад, для біноміального розподілу BINOM.INV(), для нормально розподілених випадкових величин можна використати NORM.INV(), NORM.S.INV(). Тоді як традиційно для нормального розподілу використовують функцію Лапласа.

Доцільно перевірити, генератори псевдовипадкових чисел дають числа, що мають рівномірний розподіл.

Актуальним в контексті дослідження може стати побудова та дослідження стохастичних моделей на основі методу Монте-Карло. Доцільно розглянути модель броунівського руху, побудова й опрацювання якої вводить у світ випадкових чисел і математичної статистики, сприяє формуванню уявлень про розподіли ймовірностей, зокрема ілюструє рівномірний та нормальний розподіли. Моделювання за допомогою випадкових чисел доцільно здійснювати з використанням *таблиць Microsoft Excel* і *GeoGebra*.

При вивченні *закону великих чисел* актуалізуються результати досліджень, отримані при проведенні описаних вище чотирьох експериментів. Здійснене моделювання використовуємо для демонстрації стійкості вибіркового середнього, стійкості відносних частот. Тут доцільно ще раз наголосити на тому, що для обчислення оцінок певних величин, наприклад, площі фігури, найкраще брати середнє арифметичне отриманих результатів. Доцільно для побудови графіків полігону ймовірностей чи функції щільності розподілу ймовірностей при *додаванні значень випадкових величин* пропонувати наочності Wolfram Demonstrations, розглянути розроблені фрагменти програм з відкритими кодами для цих наочностей чи створити власні.

Надзвичайно важливо розв’язати серію задач на визначення кількості проведення випробувань методом Монте-Карло для забезпечення заданої точності з використанням нерівності Чебишова та теореми Лапласа. Це можуть бути як завдання на визначення ймовірності випадкової події, так і наближені обчислення інтегралів, зокрема кратних. Приклад задачі: ймовірність відбування деякої події визначається методом Монте-Карло. Знайти кількість незалежних випробувань, які забезпечують з ймовірністю не менш як 0,99 обчислення шуканої ймовірності з похибкою, що не перевищує 0,02. Оцінку подати за допомогою нерівності Чебишова та теореми Лапласа.

Доцільно застосувати отримані результати експериментів при *перевірці статистичних гіпотез*. Зокрема, чи суттєво відрізняються отримані відносні частоти від розрахованих ймовірностей. Тобто здійснити перевірку гіпотези про відхилення коефіцієнта пропорційності від стандарту. Наприклад, відносну частоту $p^* = 0{,}16$ випадання суми чисел, рівної семи (рис.1), на рівні значущості 0,05 порівняти з ймовірністю $p = 0{,}17$ і встановити, що нема підстав відкидати нульову гіпотезу про відсутність відмінностей у значеннях ($|(0{,}16 - 0{,}17)/\sqrt{(0{,}17 * (1 - 0{,}17)/900)}| < 1{,}64$).

Важливо також, використовуючи датчики випадкових чисел, перевірити гіпотези про закони розподілу ймовірностей випадкових величин. Доцільно перевірити, наскільки якісно генеруються набори випадкових чисел відповідно до законів розподілу ймовірностей за допомогою таблиць Google, Microsoft Excel чи системи динамічної математики GeoGebra. Зокрема, рівномірного та нормального розподілів. Варто порівнювати як реалізується розігрування випадкової величини в табличному процесорі Excel, зокрема з використанням «Пакету аналізу», та, наприклад, в системі динамічної математики GeoGebra.

На завершальному етапі вивчення стохастики необхідно узагальнити прийоми використання методу Монте-Карло для обчислення визначених інтегралів, середнього значення функції на відрізку, кратних інтегралів тощо.

Ми досліджували, як може впливати наскрізне використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики на розвиток STEM-компетентностей здобувачів освіти – майбутніх учителів математики. Встановили, що наскрізне використання методу Монте-Карло сприяє посиленню інтегрованого навчання, демонструє, як математичні методи реалізуються через використання мов програмування. І навпаки: як методами інформатики можемо розв’язувати математичні задачі практичного змісту. Інтегроване навчання – це сукупність послідовних та взаємопов'язаних дій учасників навчального процесу. Вони спрямовані на формування у здобувачів освіти цілісної картини на основі об'єднання навчального матеріалу з різних освітніх галузей (навчальних предметів).

Однією з важливих характеристик для майбутніх учителів є готовність до впровадження STEM-підходів у навчанні учнів. Як складники характеристики розглядалося уміння ефективного застосування ІКТ, зокрема, використання датчиків випадкових чисел, постановка математичних задач для учнів, організація співробітництва для досягнення інноваційних результатів і розв’язування складних завдань. При цьому в командах працювали особистості з різним науковим і технічним бекграундом. Навчання в області STEM надає широкі можливості для спілкування “один на один” і “один-до-багатьох”. Зокрема, розвитку комунікативності сприяло сумісне програмування, обговорення та удосконалення кодів. У процесі навчання розвивається критичне мислення у здобувачів освіти як здатність осмислити, вдумливо й обґрунтовано проаналізувати і застосовувати знання. Встановили вплив на розвиток творчості –використання креативних вмінь для покращення наукового і технологічного проєкту, демонстрації його нерозкритих можливостей.

Метою опитування студентів спеціальностей 014.04 Середня освіта. Математика, додаткова спеціальність Інформатика та 014.08 Середня освіта. Фізика, додаткова спеціальність Математика перед вивченням курсу теорії ймовірностей та математичної статистики та після його завершення було визначити ступінь обізнаності здобувачів освіти з поняттям та змістом STEM-освіти, умінням сформулювати для майбутніх учнів тему та визначити зміст завдань для STEM-проєкту, обрати доцільні методи та засоби для вирішення певної практичної проблеми. Здобувачам освіти пропонувалося прочитати питання і за допомогою запропонованих варіантів обрати відповідь чи записати розширену відповідь. Наведемо приклади питань, які наводилися в анкеті: як розшифровується абревіатура STEM / STREM; наскільки ви обізнані у змісті поняття «STEM-освіта»; як у навчанні математики та STEM-заходах можна використовувати системи динамічної математики, наприклад, GeoGebra; яке обладнання / програмне забезпечення може використовуватися на STEM-заняттях; як знання з теорії ймовірностей та математичної статистики можуть використовуватися при впровадженні STEM-проєктів, як за 5-бальною шкалою оцінюєте власний рівень компетентності для впровадження STEM-навчання в освітній процес закладу середньої освіти тощо. Оскільки питання щодо STEM-навчання піднімалися при вивченні багатьох тем курсу стохастики, зокрема при вивченні кореляційного та регресійного аналізу, то опитування включало окремі питання, пов’язані саме з використанням методу Монте-Карло. Пропонувалися для розв’язування приклади завдань, ключовими моментами у яких було визначення площі фігури і об’єму тіла наближеними методами, зокрема за фотознімками.

У ході анкетування студенти відзначали підвищення рівня особистісної характеристики – готовності до впровадження STEM-підходів у навчанні математики учнів. Об’єм вибірки склав 42 особи. Для опрацювання результатів дослідження скористалися критерієм для виявлення зсувів у значеннях рівня ознаки – критерієм Вілкоксона. Застосовували критерій для зіставлення показників, виміряних у двох різних умовах на одній і тій самій вибірці. Типовим виявився зсув у напрямку підвищення готовності впроваджувати STEM-підходи у навчанні математики. За допомогою критерію була змога на рівні значущості 5% встановити не тільки спрямованість змін, але й їхню вираженість, тобто констатувати, що зсув показників у типовому напрямку є інтенсивнішим, ніж в нетиповому ($T_{\text{кр }0{,}01} = 266 < T_{\text{емп}} = 272 < T_{\text{кр }0{,}05} = 319$).

Обговорюючи підсумки анкетування, студенти звертали увагу на те, що для STEM-навчання з використанням методу Монте-Карло характерне подання навчальних відомостей через життєві ситуації; заохочення до експериментальних досліджень; прикладні аспекти – розв’язування задач/проблем практичного змісту; міждисциплінарний підхід як поєднання відомостей з декількох предметів, зокрема математики, інформатики, географії та ін. При цьому визначалися в доцільній послідовності етапи дослідження: проблема, гіпотези, експеримент, аналіз, висновки.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Запропонований виклад теми «Метод Монте-Карло» впродовж вивчення курсу стохастики майбутніми учителями математики дає змогу краще реалізувати компетентнісний підхід у навчанні. Перспективним бачимо впровадження наскрізного використання методу в науково-педагогічну практику.

Наскрізне використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики позитивно впливає на рівень навчальних досягнень здобувачів освіти та їх готовність до впровадження STEM-підходів у навчанні учнів. У ході анкетування студенти відзначали підвищення рівня особистісної характеристики – готовності до впровадження STEM-підходів у навчанні математики учнів. Експериментально підтверджено підвищення рівня готовності майбутніх учителів до подальшого впровадження STEM-підходів у навчанні учнів.

При наскрізному навчанні методу Монте-Карло з використанням таблиць Google, Microsoft Excel, системи динамічної математики GeoGebra закладається значний потенціал інструментарію щодо використання STEM-підходів у навчанні математики, для організації випадкових випробувань, візуалізації їх результатів.

Аналіз завдань, які можуть бути виконані у навчанні стохастики через використання методу Монте-Карло, підтверджує тезу про те, що його застосування надає навчальному процесу дослідницького характеру. Застосування методу Монте-Карло як engineering-інструменту зміщує акценти навчання з теоретичної в експериментальну площину.

Подальші наші дослідження будуть пов'язані з трансдисциплінарним підходом у підготовці майбутніх учителів математики до впровадження STEM-навчання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Balyk, N., Barna, O., Shmyger, G., & Oleksiuk, V. (2018). Model of Professional Retraining of Teachers Based on the Development of STEM Competencies. *ICT in Education, Research and Industrial Applications. Proc. 14th Int. Conf. ICTERI 2018*, 2. 318–331 https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_157.pdf
2. Proskurin, Dm., Gnatyuk, S., & Okhrimenko,T. (2023). Predicting Pseudo-Random and Quantum Random Number Sequences using Hybrid Deep Learning Models. *Proceedings of the Modern Machine Learning Technologies and Data Science Workshop Lviv, Ukraine, June 3, 2023. 3426* (77-88). https://ceur-ws.org/Vol-3426/paper7.pdf
3. Vlasenko, K, Lovianova, I, Armash, T, Sitak, I, & Kovalenko, D. (2021). A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school. *Journal of Physics*. 1946. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012003
4. Vlasenko, K., Sitak, I., Chumak, O., & Kondratyeva, O. (2019). Review of the Experience with the Implementation of STEM-education Technologies. *Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education.* SCASPEE. 97–110. https://drive.google.com/file/d/0B0mGM6lS_wnKZVpKWFk1LWlKRTdaVndEdFVvLU5SeFRpRWN3/view
5. Wolfram Demonstrations Project. (2023). https://demonstrations.wolfram.com/
6. Жалдак, М. І., Кузьміна, Н. М., & Михалін, Г. О. (2009). *Теорія ймовірностей і математична статистика* (2-ге вид.). Довкілля.
7. Крамаренко, Т. Г. (2016). Особливості вивчення методу Монте-Карло в теорії ймовірностей та математичній статистиці. *Новітні комп'ютерні технології* (с. 28-29). Видавничий центр ДВНЗ «Криворізький національний університет», (14). https://ccjournals.eu/ojs/index.php/nocote/issue/view/60/63
8. Пікалова, В. В. (2021). *Використання пакету GeoGebra як інструмента реалізації концепції STEM-освіти у процесі підготовки майбутніх учителів математики.* Автореф. дис. канд. пед. наук, Луганський національний університет імені Тараса Шевченка. Репозитарій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка. http://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7747
9. Семеніхіна, О. В. (2008). Розв'язування задач методом Монте-Карло у спеціалізованому пакеті MAPLE. *Педагогічні науки*, (3), 406-412. https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/7855/1/Semenikhina_O_V.pdf
10. Семеніхіна, О. В., & Друшляк, М. Г. (2015) Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і GeoGebra: порівняльний аналіз. *Фізико-математична освіта*, 1 (4), 21-30. http://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/6169
11. Хоминська, О., Друшляк, М., & Удовиченко, О. (2022). Підтримка вивчення стохастичної лінії в школі засобами динамічної математики. *Освіта. Інноватика. Практика,* 10(3), 59–68. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i3-007

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Balyk, N., Barna, O., Shmyger, G., & Vasyl, O. (2018). Model of Professional Retraining of Teachers Based on the Development of STEM Competencies. *ICT in Education, Research and Industrial Applications. Proc. 14th Int. Conf. ICTERI 2018*, 2. 318–331 https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_157.pdf
2. Proskurin, Dm., Gnatyuk, S., & Okhrimenko, T. (2023). Predicting Pseudo-Random and Quantum Random Number Sequences using Hybrid Deep Learning Models. *Proceedings of the Modern Machine Learning Technologies and Data Science Workshop Lviv, Ukraine, June 3, 2023. 3426* (77-88). https://ceur-ws.org/Vol-3426/paper7.pdf
3. Vlasenko, K, Lovianova, I, Armash, T, Sitak, I, & Kovalenko, D. (2021). A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school. *Journal of Physics*. 1946. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012003
4. Vlasenko, K., Sitak, I., Chumak, O., & Kondratyeva, O. (2019). Review of the Experience with the Implementation of STEM-education Technologies. *Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education*. SCASPEE. 97–110. https://drive.google.com/file/d/0B0mGM6lS_wnKZVpKWFk1LWlKRTdaVndEdFVvLU5SeFRpRWN3/view
5. Wolfram Demonstrations Project. (2023). https://demonstrations.wolfram.com/
6. Zhaldak, M. I., Kuzmina, N. M., & Mykhalin, H. O. (2009). *Teoriia ymovirnostei i matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]* (2nd ed.). Dovkillia. (in Ukrainian).
7. Kramarenko, T. G. (2016). Osoblyvosti vyvchennia metodu Monte-Karlo v teorii ymovirnostei ta matematychnii statystytsi [Peculiarities of studying the Monte Carlo method in probability theory and mathematical statistics]. *Novitni kompiuterni tekhnolohii – The latest computer technologies*. (s. 28-29). Vydavnychyi tsentr DVNZ «Kryvorizkyi natsionalnyi universytet»
8. Pikalova, V. V. (2021). *Vykorystannia paketu GeoGebra yak instrumenta realizatsii kontseptsii STEM-osvity u protsesi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky* [*Using the GeoGebra Package as a Tool for Implementing the Concept of STEM Education in the Process of Training*

Future Mathematics Teachers] Extended abstract of candidate's thesis. Luhansk Taras Shevchenko National University. http://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7747 (in Ukrainian)

9. Semenikhina, O. V. (2008). Rozviazuvannia zadach metodom Monte-Karlo u spetsializovanomu paketi MAPLE [Solving problems by the Monte Carlo method in a specialized package MAPLE]. *Pedahohichni nauky – Pedagogical sciences*, (3), 406-412. https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/7855/1/Semenikhina_O_V.pdf (in Ukrainian)
10. Semenikhina, O. V., & Drushliak, M. H. (2015) Rozviazuvannia zadach shkilnoho kursu statystyky u seredovyshchakh Gran1 i GeoGebra: porivnialnyi analiz [Solving problems of the school statistics course in Gran1 and GeoGebra environments: a comparative analysis]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, 1 (4), 21-30. http://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/6169 (in Ukrainian)
11. Khomynska, O., Drushliak, M., & Udovychenko, O. (2022). Pidtrymka vyvchennia stokhastychnoi linii v shkoli zasobamy dynamichnoi matematyky [Supporting the study of stochastic line at school by means of dynamic mathematics]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 10(3), 59–68. https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i3-007 (in Ukrainian).