МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

____________Бобилєв Д. Є. Реєстраційний №_________

«___»____________2023 р. «____»___________2023 р.

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ В ЛІЦЕЯХ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-22
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Левенко Марини Вячеславівни

Керівник: канд. пед. наук
Польгун К. В.

Оцінка:
Національна шкала ___________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК __________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК __________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Левенко Марина Вячеславівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасний світ не є статичним. Суспільство постійно змінюється – політично, соціально, економічно. Тому надважливою сьогодні є здатність бути мобільним та адаптивним, вміти ідентифікувати проблеми, мати чіткий і комплексний підхід до їх розв’язання, знати, як знаходити потрібну інформацію та використовувати її. Внаслідок суспільних змін відбуваються зміни і в освіті, зокрема її модернізація.

Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти основною метою математичної освіти є оволодіння учнями системою математичних знань, умінь і навичок, необхідних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності. Важливим є формування наукового світогляду щодо математичних ідей і методів, їхньої ролі в житті та інтелектуальному розвитку людини.

Посилення практичної спрямованості математики має велике значення для розвитку математичної освіти в школі. Зокрема, на необхідності її реалізації наголошується в Навчальній програмі з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [28]. Про важливість прикладної спрямованості математичної освіти свідчать результати міжнародного порівняльного моніторингового дослідження якості природничо-математичної освіти Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). TIMSS вивчає тенденції в успішності учнів і надає комплексний огляд якості математичної освіти в школах, здійснює моніторинг виконання навчальних програм і визначає найбільш перспективні методи викладання в усьому світі.

Проблемою реалізації практичної спрямованості завжди цікавилися науковці, методисти, автори підручників. Александров О., Астряб О., Бевз Г. [5], Дубінчук О., Красницький М. [20], Слєпкань З. [38], Тесленко І. [40], Терех О. [41] та інші у своїх роботах висвітлюють теоретичне обґрунтування та способи реалізації прикладної спрямованості. Так, Фірсов В. [41] формулює загальні принципи, на основі яких базується впровадження прикладної спрямованості математики; Бевз Г. [5], Дубинчук О. [20], Слєпкань З. [38], Тесленко І. [40] розробляють варіанти розв’язання завдань, що застосовуються на практиці; Красницький М. [20] окреслює умови, необхідні для реалізації прикладної спрямованості математики в закладі середньої освіти.

Прикладну спрямованість можна розглядати як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності здобувачів освіти (Ігнатенко М., Красницький М. [20]), як одну з функцій навчання (Адигозалов А.). Трепліна О. наголошує на наявності міцного взаємозв’язку між прикладною спрямованістю предмета і мотивацією до його вивчення. Питання формування у здобувачів освіти умінь і навичок, пов’язаних із застосуванням математичних знань, порушується в дослідженнях таких науковців, як Бондар С. [10], Дутка Г., Крутихіна М., Морозов Г.. Методичні особливості реалізації прикладної спрямованості, зокрема алгебри і початків аналізу, висвітлюються в працях Дубинчук О. [20], Соколенко Л. Поміж засобів прикладної спрямованості виокремлюють прикладні задачі та інформацію про походження математичних об’єктів, практичні й лабораторні роботи, встановлення міжпредметних зв’язків (Бондар С. [10], Бурда М. [12] та ін.).

Полонський В., Прус А. [33], Крилова Т., Павлов О., Сліпенко А., Тарасенкова Н.[12], Терешин М. та ін. наголошують на важливості формування методів практичної діяльності учнів. Вітюк О., ХорошкоЮ., Морзе М., Раков С. та інші дослідники підкреслюють значення застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процесі, формування геометричного світогляду.

Водночас спостереження та аналіз успішності учнів на ЗНО та НМТ [25] показали, що значна кількість учнів не змогла виконати стереометричні завдання або припустилася серйозних помилок у процесі їх розв’язування. Це свідчить про необхідність розроблення нових або вдосконалення старих методів реалізації прикладної спрямованості стереометрії.

Об’єкт дослідження – процес навчання стереометрії учнів ліцеїв.

Предмет дослідження – прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії.

Мета дослідження – розробити методику реалізації прикладної спрямованості шкільного курс у стереометрії.

Мета дослідження конкретизується в таких **завданнях**:

1. З’ясувати мету й завдання вивчення стереометрії, її роль і місце в розвитку просторового мислення.

2. Охарактеризувати поняття прикладної спрямованості стереометрії.

3. Здійснити змістовий аналіз курсу стереометрії на рівні стандарту та на профільному рівні підготовки.

4. Розробити систему прикладних стереометричних задач на обчислення, побудову, доведення, дослідження.

5. Визначити особливості побудови стереометричних зображень.

Для розв’язування поставлених завдань застосовувалися такі **методи** науково-педагогічного **дослідження**: теоретичні – аналіз наукової, психолого-педагогічної, науково-методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження; аналіз нормативних та директивних матеріалів про освіту та заклади середньої освіти; вивчення та узагальнення передового педагогічного досвіду.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що складено систему прикладних стереометричних задач, які можуть бути корисними вчителям під час проведення уроків геометрії з учнями ліцеїв, а також викладачам закладів вищої та фахової передвищої освіти під час викладання математичних дисциплін.

Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

1.1. Мета й завдання вивчення стереометрії

Реалізація прикладної спрямованості шкільних уроків математики направлене на підвищення якості математичної освіти учнів, забезпечення належних можливостей для інтелектуального розвитку та застосування математичних знань для розв'язання проблем у повсякденному житті та подальшій професійній діяльності.

Формуючий вплив математики на логічне мислення, просторове уявлення та уяву, алгоритми та інформаційну культуру, розвиток уваги та пам’яті є дуже важливим для шкільної системи.

Вивчення геометрії в школі – це не тільки засвоєння наукових фактів, а й формування розуміння навколишнього світу. Основними завданнями навчання геометрії в середній школі є

1) Розвиток уяви, особливо просторового та логічного мислення;

2) розуміння взаємозв'язку між геометричними об’єктами та об’єктами реального світу;

3) вміння застосовувати геометрію для вирішення практичних завдань.

Водночас реалізація цих завдань на практиці пов’язана зі значними труднощами. Більшість цих труднощів мають об'єктивний характер. Тобто, складність предмету та складність видів діяльності, якими потрібно оволодіти учням.

Навчальна програма з математики для **5-9 класів** показує, що матеріал з геометрії включає базові знання про плоскі фігури (відрізки, промені, прямі, кути, трикутники, прямокутники, квадрати і кола) та об’ємні фігури (прямокутники, куби і піраміди) [24]. Вивчення математики у 5-9 класах є хорошою підготовкою до вивчення математики у 10-11 класах. Цей курс є підготовкою до вивчення геометрії в 11 класі. Його основна мета – повторити, систематизувати та розширити знання про геометричні фігури в просторі, щоб учні могли обчислювати площу поверхні та об’єм об’єктів, які їх цікавлять.

Однією з основних ідей розвитку математичної освіти, представлених у Концепції шкільної математичної освіти, є ідея гармонійного розвитку особистості та розвитку творчих здібностей для розв'язання найважливіших життєвих проблем. При цьому на геометрію покладається важливе завдання, оскільки вона є важливою складовою людської культури з точки зору формування мислення, розвитку уяви, просторових уявлень та практичних навичок і вмінь.

Тому нові програми з математики в основній і професійній школі ґрунтуються на вимогах Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [26; 28], які передбачають, що математика має вивчатися в кількох взаємопов’язаних розділах. Елементи стереометрії переплітаються з відповідним площинним матеріалом. Це дає змогу сформувати цілісні та міцні знання, які добре запам’ятовуються і сприяють розвитку просторових уявлень та уяви. Часті переходи від двовимірних площин до тривимірного простору сприяють розвитку інтуїції учнів.

Такі питання, як визначення змісту та обсягу тривимірного матеріалу на уроках математики в початковій школі, його місця в навчальній програмі та освітніх потреб учнів в умовах диференційованого навчання, ще не отримали належного вирішення. Методологія дослідження також є недосконалою, не розроблено систему завдань, яка б дозволила провести це дослідження.

Іншими словами, матеріал зі стереометрії органічно поєднується з поняттями і явищами, пов’язаними з планіметрією, без суттєвих змін у внутрішній логічній структурі самого курсу. При цьому планіметрія вивчатиметься на систематичному рівні в рамках існуючих державних програм, з відповідним обґрунтуванням і доведенням фактів, що розглядаються [16], а стереометрія – на рівні ознайомчої роботи.

Матеріал стереометрії, що вивчається у **7-9 класах**, дещо схожий за назвою на той, що вивчається у 5-6 класах, але понятійний зміст поступово наповнюється новими логіко-математичними ознаками, а сформовані образи перетворюються на математичні поняття і отримують чіткі означення.

Серед основних завдань стереометрії: сформувати поняття многогранників і обертання та вивчити їх властивості; сформувати вміння застосовувати формули площ поверхонь і об’ємів для розв’язування прикладних задач; розвивати конструктивні навички учнів і графічну освіту.

Вивчення стереометрії має відбуватися рівномірно з 7 по 9 клас, забезпечуючи таким чином безперервність навчання. Моделі, таблиці та малюнки слід використовувати якомога ширше, щоб забезпечити міцне та усвідомлене вивчення стереометричних понять.

10-11-ті класи – систематичний курс стереометрії розкриває складність систематичного вивчення стереометричного матеріалу, при цьому повністю обґрунтовуючи твердження [14], доведені на більш глибокому теоретичному рівні.

У старшій школі, як і в початковій, геометрія має навчити учнів правильно сприймати навколишній світ. Однак стереометрія пропонує для цього більше можливостей. Йдеться про формування просторової уяви, розвиток логічного мислення та вироблення навичок застосування геометрії для розв'язування практичних задач. Розв'язання цих завдань починається з теми «Паралельність прямих і площин у просторі» [14]. Ця тема є основою для вивчення стереометрії – просторової геометрії. Особливу увагу слід приділити проведенню прикладних орієнтація з цієї теми. Основний внесок полягає у формуванні чіткого уявлення про взаємозв’язки між геометричними об’єктами (прямими, площинами) і про те, як вони співвідносяться з об'єктами навколишнього світу. Вивчаючи цю тему, учні вчаться зображати просторові фігури на площині та використовувати ці зображення для розв’язування задач.

У 10 класі геометрія завершується темою «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» [12]. Велика увага приділяється формуванню базових понять, таких як загальне поняття відстані, поняття кута як міри розташування прямих і площин, двогранні кути як геометричні фігури. Введення перпендикулярності прямих і площин (математична модель поняття перпендикулярності), перпендикулярності площин та взаємозв'язку між відстанями і кутами значно покращує моделюючі можливості курсів стереометрії.

Тема «Координати і вектори» дозволяє застосувати нові підходи до вивчення прямих і площин у просторі. Іншим завданням вивчення теми «Координати і вектори» є узагальнення методів векторів і координат у просторі.

В 11 класі в темах «Многогранники» та «Тіла обертання» [15; 16; 17] розглядаються основні види та властивості геометричних тіл. Під час вивчення цієї теми дуже важливо використовувати підхід, який розвиває навички розпізнавання та класифікації об'єктів та їхніх поверхонь. Такий підхід повинен використовувати визначення композиції, які дозволяють встановити спільні риси між призмами і циліндрами, а також між пірамідами і конусами. Корисно розглядати ці групи об'єктів паралельно при аналізі їхніх властивостей.

У процесі вивчення теми «Об'єм і площа поверхні геометричних тіл» [15; 16; 17] слід розглянути різні способи обчислення об'єму та площі поверхні. Особливу увагу слід звернути на спосіб ділення, який має практичне значення. Використання аналогії між вимірюванням площі плоскої фігури та вимірюванням її об'єму допоможе учням зрозуміти матеріал. При вивченні площі поверхні об'єктів слід широко використовувати природну і практично важливу ідею розгортки.

Навчальна програма передбачає впровадження діяльнісного підходу до навчання математики як ключової умови його ефективності [26; 28].

1.2. Роль і місце елементів стереометрії в розвитку просторового мислення учнів ліцею

Навчання – це складний і багатогранний процес. Його основна мета –

спробувати розвинути (або набути) цілісне уявлення про матеріальний світ, що нас оточує. Для досягнення цієї мети необхідно враховувати фізіологічні, психологічні та педагогічні особливості цього процесу.

Як відомо, просторове мислення є складовою частиною чуттєво-образного мислення і не є ані апріорно визначеним, ані вроджено запрограмованим. Воно формується в процесі розвитку особистості. Для його правильного формування ми повинні спиратися насамперед на досягнення в галузі фізіології та психології, зокрема на відкриття асиметричних явищ у півкулях головного мозку. Донедавна існувала думка, що півкулі головного мозку є еквівалентними у виконанні деяких функцій. Однак роботи Сперрі Р. та його послідовників, а також результати вітчизняної науки переконливо демонструють функціональні відмінності між півкулями головного мозку у сприйнятті образів реального світу та формуванні думок.

Просторове мислення посідає особливе місце в структурі загального психологічного розвитку людини. Просторове мислення гарантує формування загального і динамічного способу мислення про навколишній світ, його соціальні цінності, емоційне ставлення до реальних подій та їх етичну і естетичну оцінку. Учні розвивають свої знання про простір і просторову орієнтацію під час різних видів діяльності. Цей розвиток проявляється в іграх, спостереженнях, трудових процесах, малюнках, конструюванні та моделюванні. Важливу роль у формуванні просторового мислення відіграє математика як основа людського мислення. На уроках математики вивчається наступне: форма (прямокутник, квадрат, коло, овал, трикутник, прямокутник, круглий, вигнутий, загострений, крива), розмір (великий, маленький, більше, менше, рівний, більше, менше, половина), довжина (довгий, короткий, широкий, вузький, високий, лівий, правий, горизонтальний, прямий, похилий), положення в просторі та просторові відношення (в центрі, над центром, під центром, праворуч, ліворуч, збоку, близько, далеко, спереду, ззаду, попереду).

За визначенням А. Савіна, математика – це наука про кількісні відношення і просторові форми в реальному світі [35, с.80]. Як можна зрозуміти з цього визначення, одним з основних предметів математики є форма і простір. Це свідчить про те, що математичні знання можуть бути використані у формуванні просторового мислення і про великий потенціал математики в цьому процесі. Це відзначали провідні психологи, методисти та педагоги (Гальперін П., Фрідман Л., Давидов В.) [42].

Знання про простір, набуті в курсах математики, сприяють успішному навчанню з усіх предметів. Проблемі формування просторового мислення присвячено багато досліджень філософів, психологів, фізіологів, педагогів і методистів. Стереометрія сприяє розвитку мислення, пам'яті, уваги, творчої уяви та спостережливості учнів і є реальною передумовою для формування та розвитку просторового мислення в учнів. Уроки стереометрії характеризуються поєднанням високого рівня абстракції та геометричної наочності. Лише невеликий відсоток учнів здатен розв'язувати геометричні задачі на абстрактному рівні – висновок, до якого з часом дійшли вчителі математики. За даними пост-тестів, лише 28% учнів давали правильні відповіді при розв'язуванні тривимірних задач, а на іспитах з математики випускники шкіл розв'язують лише плоскі задачі або взагалі не розв'язують геометричних задач [39, 40].

Основною причиною ситуації, що склалася, є недостатньо розвинене просторове мислення учнів та обмежений досвід геометричної діяльності. Наприклад, розгляд властивостей фігур і формування початкових геометричних понять в основному спрямовані на набуття практичних навичок, пов'язаних з розв'язуванням практичних задач. У навчанні математики одним з найважливіших етапів у процесі розв'язування геометричних задач є створення правильних наочних малюнків (ескізів) відповідно до умови задачі. Однак у процесі вивчення геометрії малюнки не мають доказової сили, навіть якщо вони ідеально виконані. Однак, якщо побудова фігури за умовою задачі ґрунтується на логічній строгості та аргументах, що випливають з характеру паралельних проекцій на зображенні фігури, то точний, чіткий і якісно виконаний рисунок є певною підмогою у розв’язанні задачі.

Тому необхідно допомогти учням зрозуміти, що логічне пояснення кроків, з яких складається зображення фігури, є своєрідним аналізом розв'язання тривимірної задачі і відкриттям її шляху.

Як показує практика, багато учнів, які тільки починають вивчати стереометрію, мають труднощі зі сприйняттям та ідентифікацією об’єктів у просторі. Подальші проблеми виникають тоді, коли до виконаних креслень потрібні додаткові малюнки. Особливо це стосується проблеми побудови перерізів многогранників різними способами. Побудова перерізів многогранників є однією з основних частин вивчення стереометрії, вона робить предмет наочним, зрозумілим і цікавим та створює в учнів конструктивне просторове уявлення [41].

Сучасні дослідження показують, що комп’ютерні засоби для вивчення геометрії зацікавлюють учнів, розвивають концептуальне розуміння, забезпечують візуальне представлення основних геометричних понять, стимулюють творче мислення та підвищують зацікавленість учнів у дослідницькій діяльності. Використання сучасних інформаційних технологій у процесі вивчення математики дає можливість поєднати обчислювальні навички при дослідженні різних об’єктів з візуалізацією результатів на всіх етапах розв’язування задач. Використання комп’ютера як інструменту моделювання дозволяє учням отримувати графічні образи, які сприяють розумінню змісту нових понять, розвитку творчого мислення та побудові просторових уявлень. [7, с. 290].

Цей досвід формується в процесі активного перетворення реальних об’єктів та їх різноманітних геометричних форм, а також досвід взаємодії у дво- та тривимірному просторі.

Сучасна програма з геометрії, незважаючи на різні освітні цілі, покликана вирішувати три завдання.

1. Створення умов для подолання великого розриву між вивченням плоскої та просторової геометрії.

2. Створення в уяві учнів гнучких, багатовимірних просторових образів з топологічними, проективними та метричними властивостями об'єкта вивчення

3. Поєднання інваріантного та варіативного навчального матеріалу, здатного враховувати пізнавальні можливості учнів та їх індивідуальний вибір щодо виду і форми пропонованих завдань і вправ [22, с.10].

Розробляючи навчальну програму, автори, перш за все, намагаються створити умови для узагальнення накопиченого учнями досвіду орієнтування в реальному просторі. Надалі цей досвід може бути використаний для набуття математичних (тривимірних) знань, буде забезпечено плавний перехід від візуальних уявлень до теоретичних побудов, а вміння будувати математичні операції (симетрія, обертання) допоможе учням швидше і легше розраховувати в старших класах.

Розвиток просторового мислення на високому рівні є передумовою успішного засвоєння різних загальноосвітніх і спеціальних технічних дисциплін на всіх етапах навчання. Просторове мислення є важливим компонентом підготовки до практичної роботи в багатьох спеціальностях.

Також при належному навчанні діти легко справляються із завданнями, пов'язаними з трансформацією елементів зображення, добре описують геометричні фігури і при необхідності здійснюють тривимірне сканування об'єктів на основі візуальних уявлень.

Одна з найважливіших умов розвитку просторової уяви – практична діяльність. Учитель, який викладає математику в старших класах, усвідомлює певні труднощі, які виникають у процесі навчання стереометрії з перших його уроків. При ознайомленні з аксіомами стереометрії в учнів слабко розвинені просторові уявлення. Початкові відомості зі стереометрії мають абстрактний характер, засвоєння матеріалу відбувається на основі запам'ятовування, тому в знаннях учнів спостерігається певний формалізм. Вони втрачають інтерес до предмета, більшість з них вважають стереометрію важким шкільним предметом.

Більшість з цих завдань можна вирішити, якщо теоретичний матеріал подається на ранньому етапі навчання, на основі або в результаті виконання завдань, що вимагають побудови просторових фігур або створення зображень цих фігур.

Використання структурованих завдань створює важливі моменти у навчанні стереометрії, які не тільки формують просторові уявлення учнів, але й дозволяють візуалізувати предмет стереометрії, зробити його знайомим і цікавим для них, систематизувати знання зі стереометрії та підвищити рівень засвоєння знань. Урізноманітнити та підвищити ефективність методів навчання.

Композиційні завдання складають основу роботи, що сприяє розвитку навичок створення форм, читання та розуміння креслень, встановлення зв'язків між частинами. Найкращі результати в розвитку просторового мислення учнів досягаються завдяки використанню композиційних завдань. Час, витрачений на вирішення цих завдань, добре винагороджується. Адже під час розв'язання цих завдань теоретичний матеріал конкретизується і, як наслідок, просторові уявлення учнів формуються більш ефективно.

1.3. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії

Практична спрямованість стереоскопічних уроків у школах є однією з цілей математичної освіти і формує основу для більш ефективного засвоєння учнями математичних знань, умінь і навичок та вміння їх використовувати. Практична спрямованість сприяє формуванню стійкої мотивації до навчання в цілому і до вивчення математики зокрема. У сучасних нових суспільних умовах і запитах все більшого значення набувають шляхи і засоби реалізації прикладної спрямованості в контексті модернізації якості і характеру математичної освіти [32].

Прикладна спрямованість стереометрії в шкільній програмі означає, що цілі, зміст і засоби навчання стереометрії спрямовані на те, щоб у процесі математичного моделювання допомогти учням набути знань, умінь і навичок, які використовуються в різних сферах життєдіяльності.

Прикладна спрямованість навчальних цілей забезпечує представлення стереометрії (її окремих розділів, тем) як необхідного і важливого предмета і дозволяє викликати і підтримувати інтерес і зацікавленість до її вивчення [33].

Комплексне використання методів математичного моделювання є ефективним способом практичної спрямованості і як спосіб навчання на уроках стереометрії, і як основа для формування вмінь і навичок розв'язування прикладних задач. Використання дидактичного матеріалу при вивченні стереометрії з прикладним спрямуванням, систематичне розв'язування та створення учнями власних прикладних задач, візуалізація тривимірних об'єктів за допомогою моделювання, зокрема техніки орігамі, доречне та систематичне використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (програмного забезпечення GRAN-3D та створених компєютерних програм «Stereometry for us»).

На основі впровадження методу математичного моделювання, як системи математичних моделей, створених на основі реальних об’єктів та з урахуванням їх форми і розмірів, полегшується засвоєння уроків стереометрії та формується вміння бачити світ геометрично та науковий світогляд учня. Розроблена система математичних моделей дозволяє учням планувати, організовувати та контролювати свою навчальну діяльність. Вивчення абстрактного стереометричного матеріалу та розв’язування абстрактних стереометричних задач підвищує мотивацію студентів до набуття знань та навичок з вивчення математичних моделей. Знання, отримані учнями, мають передумови для набуття таких якостей, як системність і послідовність [36].

Усі методи та засоби навчання, що використовуються вчителями на уроках, мають бути зорієнтовані на те, щоб всіляко реалізувати практичний аспект навчання. Як можна частіше вчителі повинні акцентувати увагу учнів на універсальності математичного методу та ілюструвати його практичний характер на конкретних прикладах.

Як показує життя, математичний підхід до розуміння явищ об'єктивного світу дозволяє проникнути в суть предметів і явищ, відкрити раніше приховані закономірності. Це пов'язано з тим, що математика здатна відобразити явища і процеси матеріального світу більш детально, повніше і глибше, ніж це можливо тільки за допомогою безпосереднього спостереження, експерименту і якісного осмислення отриманих результатів.

Наявність знань є активним запасом учнів, але це не означає, що учні вміють застосовувати ці знання в конкретних ситуаціях. Ця здатність не виникає спонтанно. Вона формується під час відповідних освітніх впливів і забезпечує учнів знаннями, на які вони можуть широко спиратися у своїй роботі та соціальній діяльності. Подібний рівень математичної освіти досягається в процесі навчання, який зосереджується на широкому поясненні зв'язків математики з навколишнім світом і сучасним виробництвом.

Такі зв'язки можуть бути встановлені завдяки наступним фактам

а) велика кількість математичних закономірностей, що вивчаються в школі, широко використовується в організації сучасної технології виробництва та в конкретних виробничих процесах

б) математичні навички та компетенції, передбачені шкільною програмою, безпосередньо застосовуються у виробничій діяльності

в) процес бізнес-освіти та професійної підготовки учнів у сучасних умовах неможливий без звернення до математичних знань.

Зв’язок вивчення математики з виробництвом є ефективним способом реалізації на практиці найважливішого принципу сучасної педагогіки - інтеграції теорії і практики. Це дає можливість учням «конкретизувати» свої знання. Все це допомагає учням усвідомити важливість знань, які викладаються в школі [36, 37].

Важливість проблеми та необхідність її розв'язання зумовили створення комплексу практичних завдань, які можуть бути використані в процесі вивчення геометрії в курсах математики рівня стандарту та профільного рівня.

Таким чином, робота над комплексними системами прикладних стереоскопічних задач є ефективним способом активізації пізнавальної діяльності старшокласників. Це пов'язано з підвищеним пізнавальним інтересом, який досягається завдяки акцентуванню уваги на реальній життєвій значущості стереометричних знань з геометрії.

Висновки до розділу 1

Пріоритетність прикладної спрямованості у шкільній програмі сприяє формуванню стійкої мотивації до вивчення математики та навчання загалом. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії - це орієнтація цілей, змісту та засобів навчання стереометрії, набуття учнями знань у процесі математичного моделювання, а також умінь і навичок, які використовуються в різних сферах життя.

Практичні задачі мають бути частиною практики викладання стереометрії вчителем. Адже прикладні задачі допомагають старшокласникам зрозуміти, що, вивчаючи цей курс, вони пізнають реальний світ, а розв’язуючи прикладні задачі, вчаться правильно і раціонально розв’язувати проблеми, які виникають у житті.

Викладання стереометрії в школі повинно бути орієнтоване на реальне життя, тобто уроки стереометрії повинні бути орієнтовані на практику. Сьогодні ми можемо говорити лише про наявність певних практичних елементів у школах. Разом з тим, аналіз літератури з питань практичної спрямованості навчання стереометрії, визначення сутності та складових цього поняття, деякі узагальнення та висновки з цього питання окреслюють шляхи реалізації, які необхідно розробити в майбутньому.

На сучасному етапі розвитку ІКТ з’являються нові можливості у вивченні стереометрії:

– підвищення інтересу учнів до стереоскопічного навчання;

– активізація діяльності учнів на уроці;

– диференціація навчання за ступенем складності;

– забезпечення вирішення практичних завдань для розвитку логічного мислення, уяви та просторового уявлення;

– подолання труднощів у використанні ІКТ при створенні стереометричних зображень;

– підвищення пізнавальної ефективності навчальних матеріалів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1. Аналіз змісту курсу стереометрії на рівні стандарту та на профільному рівні підготовки

Вивчення математики в старшій школі поділяється за чотирма критеріями: рівнем стандарту, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов'язану з математикою або її застосуваннями.

Програма поглибленого вивчення математики розрахована на поглиблене вивчення математики у 8-11 класах [26].

Розподіл годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Розподіл годин на вивчення математики за різними рівнями змісту освіти

<table>
<tr><th rowspan="3">Навчальні предмети</th><th colspan="6">Кількість годин на тиждень у класах</th></tr>
<tr><th colspan="2">Рівень стандарту</th><th colspan="2">Профільний рівень</th><th colspan="2">Рівень поглибленого вивчення</th></tr>
<tr><th>10</th><th>11</th><th>10</th><th>11</th><th>10</th><th>11</th></tr>
<tr><td>Математика</td><td>3</td><td>3</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Алгебра та початки аналізу</td><td>-</td><td>-</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Геометрія</td><td>-</td><td>-</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

У нашому дослідженні акцентуємо увагу на двох основних рівнях (рівень стандарту та профільний рівень), а також розглянемо особливості навчальної програми для учнів 10-11 класів ліцеїв.

Рівень стандарту. Метою навчання математики на рівні стандарту є насамперед формування загальної математичної освіти та розвиток математичного мислення, тобто здатності класифікувати об'єкти, утворювати закономірності, виявляти зв'язки між різними явищами та висловлювати судження. Розвиток практичних навичок з математики є однією з основних цілей математичної освіти. Ефективним способом реалізації практичної спрямованості шкільних уроків математики є комплексне і систематичне використання математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між поняттями, характеру прикладів, доведень, систем вправ і, нарешті, систем контролю. Іншими словами, математику слід викладати таким чином, щоб учні могли її застосовувати.

Програма передбачає, що геометрія та алгебра, а також основи аналізу вивчаються разом або окремо. Порівняно з поділом курсу математики на два предмети («Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія»), перший підхід має певні переваги з точки зору вивчення предмета на стандартизованому рівні. Він дозволяє забезпечити єдність математичної освіти, концентрацію навчальної діяльності навколо невеликої кількості понять і фактів за певний проміжок часу, оптимальний розподіл часу на вивчення окремих тем з урахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечення природних зв'язків всередині тем і між темами. Такий підхід особливо важливий для загальнокультурної спрямованості математичної освіти. [27].

За навчальною програмою рівня стандарту на вивчення математики у 10 класах відводиться 105 годин.

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт у разі сумісного вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії у 10-му класі подано в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем з математики, рівень стандарту у 10-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Вступ	2	Діагностична
II	Функції, їхні властивості і графіки	22	1
III	Паралельність прямих і площин у просторі	22	1
IV	Тригонометричні функції	26	1
V	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	22	1
VI	Резерв часу і повторення	9	1

У разі роздільного вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії у 10-му класі доцільно розглядати теми у тому самому обсязі.

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія» може бути таким, як подано у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», рівень стандарту (51 год. I семестр – 32 год, 2 год на тиждень, II семестр – 19 год, 1 год на тиждень, резервний час – 6 год) у 10-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Вступ	1	
II	Паралельність прямих і площин у просторі	22	1
III	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	22	1
IV	Резерв часу і повторення	6	1

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт у разі сумісного вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії у 11-му класі подано в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Розподіл навчального часу на вивчення окремих тем з математики, рівень стандарту в 11-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Повторення курсу математики 10 класу	2	Діагностична
II	Показникова та логарифмічна функції	12	1
III	Координати і вектори	10	1
IV	Похідна та її застосування	14	1
V	Інтеграл та його застосування	10	1
VI	Геометричні тіла. Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл.	37	2
VII	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики	10	1
VIII	Резервний час і повторення	10	1
	Разом	105	

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія» може бути таким, як подано у таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», рівень стандарту (51 год. I семестр – 32 год, 2 год на тиждень, II семестр – 19 год, 1 год на тиждень, резервний час – 6 год) в 11-му класі

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Вступ	1	
II	Координати і вектор	10	1
III	Геометричні тіла.Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл	37	2
IV	Резервний час і повторення	3	
	Разом	51	

Профільний рівень підготовки. Мета навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості в динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, і достатньої для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу, предметів природничого спрямування, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, або безпосередньо пов’язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів [28].

Орієнтовний розподіл навчального часу на вивчення окремих тем та орієнтовна кількість контрольних робіт за програмами профільного рівня можуть бути такими, як в таблиці 2.6., 2.7.

Таблиця 2.6

Орієнтовний розподіл навчального часу з предмету «Геометрія 10-й клас», профільний рівень підготовки (4 години на тиждень, всього 140 годин)

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії	20	2
II	Вступ до стереометрії	10	1
III	Паралельність прямих і площин у просторі	30	2
IV	Перпендикулярність прямих і площин у просторі	35	2
	Систематизація та узагальнення навчального матеріалу, резервний час	10	1

Таблиця 2.7

Орієнтовний розподіл навчального часу «Геометрія 11-й клас» профільний рівень (105 год, 3 год на тиждень, Резерв – 28 годин)

№ теми	Назва теми	Кількість годин	Орієнтовна кількість контрольних робіт
I	Многогранники	24	3
II	Тіла обертання	21	2
III	Об’єми многогранників	16	2
IV	Об’єми та площі поверхонь обертання	16	2
	Систематизація та узагальнення навчального матеріалу, резервний час	–	–

2.2. Розв’язування прикладних стереометричних задач на обчислення, побудову, доведення, дослідження

Розв'язування стереометричних задач є моделлю для вивчення самої стереометрії. Тому розв’язування стереометричних задач повинно відображати всю діалектику зв’язку стереометрії з реальним світом. На практиці це означає постановку задачі, побудову абстрактної теорії, яка відповідає всім вимогам математичної формалізації, інтерпретацію отриманих результатів і розуміння їх практичного застосування. Необхідно не тільки розв’язувати «готові» задачі, а й показувати учням процес їх створення. Вони повинні порівнювати проблеми, які потрібно розв'язати, шукати більш загальні шляхи їх розв’язання та аналізувати, які практичні ситуації вони можуть охоплювати. Таким чином створюється другий рівень запитань. Метою є аналіз тривимірних задач (у традиційному розумінні).

Розв’язуючи ці задачі, учні засвоюють найважливіші геометричні поняття, опановують математичну символіку та вчаться користуватися доведеннями.

Одним із способів забезпечення практичної спрямованості викладання стереометрії в школі є практичні задачі. Тема «Аксіоми стереометрії та їх найпростіші наслідки» має кілька практичних задач і є темою, з якої починається вивчення стереометрії. Дещо краща ситуація при вивченні тем «Паралельність прямих і площин» та «Перпендикулярність прямих і площин». Більшість цих задач є словесними, але є й більш складні. Наприклад, площа похилого даху визначається за допомогою площі ортогональної проекції многокутника.

Варто обирати роботу з сучасним змістом. Наприклад, визначення кількості утеплювача для стін і даху будинку певної форми, розрахунок ціни утеплювача та можливої економії палива, визначення, як скоро цей утеплювач буде придбано.

Тому рекомендації щодо використання запитань практичного змісту в 10-11 класах такі:

1. звертати увагу на реальне практичне застосування отриманих результатів

2. для кращих учнів можна давати завдання з елементом наукового дослідження

3. умови завдання повинні бути максимально наближені до реальних поточних ситуацій і потреб

4. по можливості розв’язувати задачу більш ніж одним способом.

Стереометричні задачі – це задачі, пов’язані з геометрією у тривимірному просторі. Залежно від умови стереометричної задачі розрізняють задачі на обчислення, побудову, доведення та дослідження.

Задачі на обчислення. Знаходження довжин, величин кутів, перерізів, поверхонь та об'ємів частин простих многогранників при розв’язуванні задач на обчислення. Для того, щоб за відведений навчальною програмою час розв'язати більшу кількість задач, рекомендується майже на кожному уроці усно розв'язувати 5-10 задач. Особливу увагу слід приділяти розвитку вміння розв'язувати найпростіші задачі. Адже без цього неможливо навчити учнів розв'язувати задачі середньої складності.

Для того, щоб вміти розв'язувати задачі усно, корисно подавати об’ємні задачі, пов’язані з однією і тією ж фігурою. Наприклад, накресливши на дошці правильну квадратну призму з діагоналями, вчитель може запропонувати учням послідовно розв'язати кілька задач

1) Яка мінімальна кількість граней у призми?

Накресліть на дошці різні види правильних призм, побудованих на основі правильних многокутників. Багатокутники в основі цих призм допомагають учням зорієнтуватися і дати правильну відповідь (рис. 2.1 і 2.2):

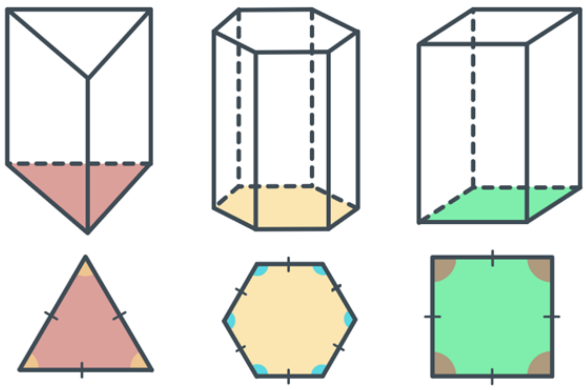

Рис. 2.1. Види правильної призми

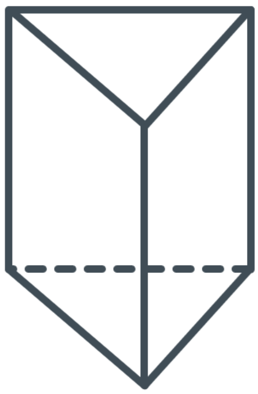

Рис. 2.2. Трикутна призма

Розв'язання

Це трикутна призма. Вона має 5 граней, 6 вершин, 9 ребер.

Відповідь: 5.

1. Діагональ правильної чотирикутної призми d нахилена до площини основи під кутом α.

Визначте:

а) висоту призми;

б) діагональ основи призми;

в) площу основи приз ми;

г) площу діагонального перерізу призми;

д) об'єм призми;

є) кут між діагоналлю призми і бічним ребром.

2. Діагональ правильної чотирикутної призми d утворює з бічним ребром кут φ. Визначте:

а) висоту призми;

б) діагональ основи призми і т. д.

3. Бічне ребро h правильної чотирикутної призми з її діагоналлю утворює кут φ. Визначте:

а) діагональ призми;

б) діагональ основи призми і т. д.

Найкраще запам'ятовується те, що легко уявити. Саме для цього і створені задачі прикладного характеру, які чітко відображують життєві ситуації. Так при вивченні многогранних кутів корисно розв'язати декілька задач на знаходження елементів покрівель будинків.

Задача 1. Завіси даху утворюють прямокутник $ABCD$. AB = 12 м; BC = 30 м; кут нахилу скатів – 30^0. Довести, що нахили скатів рівні. Знайти площу поверхні покрівлі (рис. 2.3)

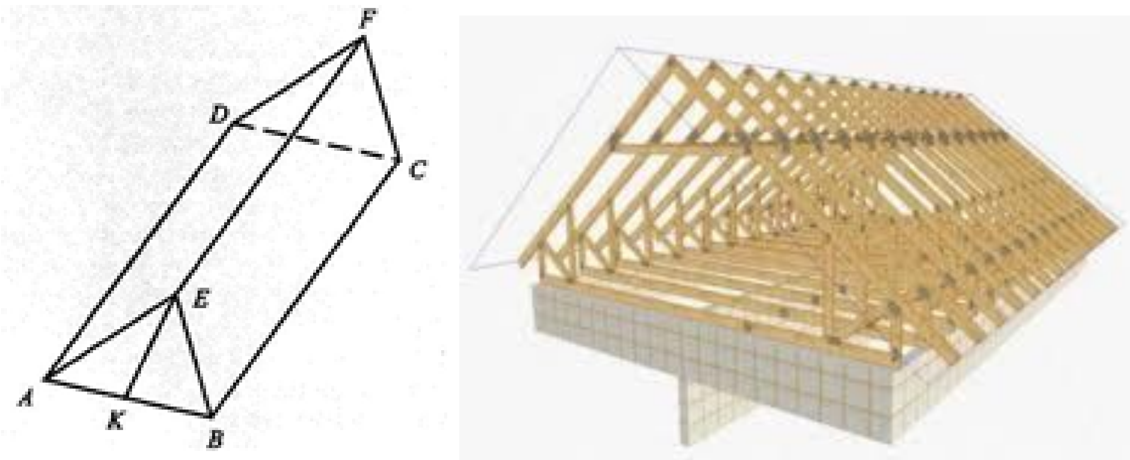

Рис. 2.3. Трикутна призма

Розв'язання

1. Скати даху представляють собою рівні прямокутники $BCFE$ і $ADFE$.
2. Прямокутник $ABCD$ розташований горизонтально.
3. Площина трикутника ABE і CDF перпендикулярні до площини $ABCD$.

4. Так як скати даху – прямокутники, то *EF* паралельна *AD*. Отже, за ознакою паралельності прямої і площини *EF* паралельна площині *ABCD*.

5. Скат *BCFE* утворює двогранний кут, ребро якого – *BC*. Побудуємо лінійний кут двогранного кута. Проведемо *EK* перпендикулярно *AB*, оскільки Δ *ABE* перпендикулярний *ABCD*, то *EK* перпендикулярно *ABCD*. Похила *BE* перпендикулярна *BC*, її проекція *BK* перпендикулярна *BC*. Отже, кут *ABE* = β – лінійний кут двогранного кута, який утворений скатом *BCFE* і площиною *ABCD*.

Аналогічно можна довести, що кут *EAB* – лінійний кут двогранного кута, який утворений скатом *AEDF* і площиною *ABCD*.

6. Розглянемо трикутник *ABE*, він рівнобедрений, отже, кут *EAB* дорівнює куту *BAE*, тому вони – рівні і є двогранними кутами. Отже, скати даху нахилені до горизонталі однаково.

7. $S_{покр.} = 2 \cdot BE \cdot BC$;

$$BE = \frac{BK}{\cos\beta} = \frac{6}{\cos 30^0} = \frac{6}{0{,}866} = 6{,}93(м).$$

$S_{покр.} = 2 \cdot 30 \cdot 6{,}93 = 415{,}81$ (м^2).

Відповідь: $S_{покр.} = 415{,}81$ (м^2).

Так за одним малюнком на уроці можна усно розв’язати з учнями 10–15 задач.

Під час вивчення об’єму похилої призми корисно запропонувати учням, наприклад, такі задачі.

1. Знайдіть об’єм похилої призми, висота якої *h*, а в основі лежить:
   а) квадрат з стороною *a*;
   б) квадрат з діагоналлю *d*;
   в) прямокутник з сторонами *a* і *b*;
   г) рівносторонній трикутник з стороною *a*;
   д) ромб з стороною *a* й кутом α;
   є) паралелограм з сторонами *a* і *b* та кутом α;

є) ромб з діагоналями d і d_1;

ж) правильний шестикутник з стороною a.

2. Знайдіть об'єм похилої призми з площею основи S, якщо:

а) бічне ребро с нахилене до площини основи під кутом α;

б) бічне ребро c нахилене до площини основи піди кутом 60°;

в) середина бічного ребра віддалена від площини основи на m;

г) бічне ребро і його проекція на площину основи відповідно дорівнюють b і c.

Вважаємо, що для усного розв'язування слід пропонувати учням не менше задач, ніж для письмового.

Після усних вправ, краще пропонувати учням, наприклад, задачі 2–5.

Задача 2. Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.4.) (ширина кімнати – 4 м, довжина – 5 м, висота – 2,5 м). Площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібно для того, щоб повністю пофарбувати стіни і стелю цієї кімнати, якщо на 1 м^2 витрачається 0,25 кг фарби?

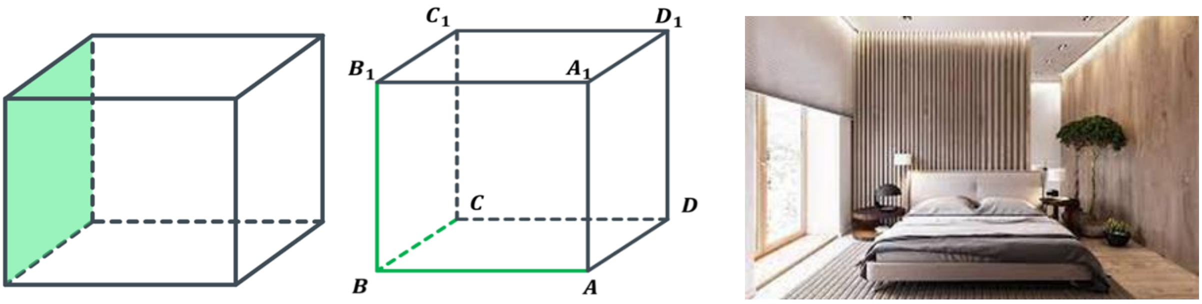

Рис. 2.4. Паралелепіпед

Розв'язання

Знайдемо площу бічної поверхні, для цього використаємо формулу:

$$S_б = P_{осн} \cdot b$$

$$S_б = 2(4 + 5) \cdot 2{,}5 = 45\ (м^2)$$

Так як площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні, то площа стін:

$$0{,}8 \cdot 45 = 36\ м^2$$

Знайдемо площу стелі, так як кімната має форму прямокутного паралелепіпеда, то:

$4 \cdot 5 = 20$ м^2

Отже, загальна площа для фарбування:

$36 + 20 = 56$ м^2

Для того, щоб пофарбувати 56 м^2 необхідно витратити фарби:

$56 \cdot 0{,}25 = 14$ кг

Відповідь: 14 кг

Задача 3. Дерев’яний брусок має форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.5.) з вимірами 10 см, 20 см, 80 см. Скільки лаку потрібно для того, щоб один раз покрити ним усю поверхню цього бруска, якщо на 1 м^2 витрачається 100 г лаку?

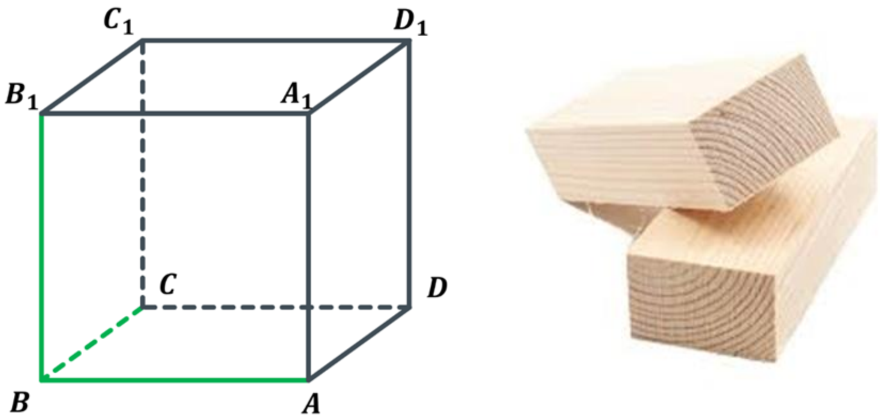

Рис 2.5. Паралелепіпед

Розв’язання

Площу повної поверхні знайдемо за формулою:

$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}}$

Так як усі грані прямокутного паралелепіпеда прямокутники, то площу бічної поверхні знайдемо за формулою:

$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot h$

$S_{\text{б}} = 2(0{,}1 + 0{,}2) \cdot 0{,}8 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ м^2

Знайдемо площу основи:

$S_{\text{осн}} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$ м^2

Знайдемо площу повної поверхні:

$S_п = 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}52$ м^2

За умовою на 1 м^2 витрачається 100 г лаку, отже:

$0{,}52 \cdot 100 = 52$ г

Відповідь: 52 г.

Задача 4. Знайдіть масу десятиметрової труби (рис. 2.6.) діаметром 1420 мм, яку зроблено зі стального листа завтовшки 22 мм. Маса 1 м^3 сталі 7600 кг.

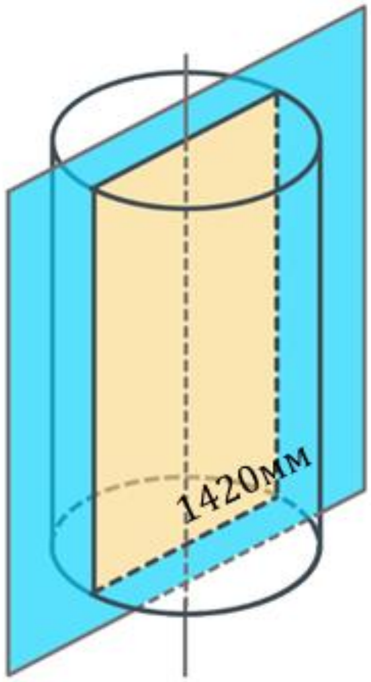

Рис. 2.6. Циліндр

Розв'язання

R_1 – радіус зовнішнього циліндра;

R_2 – радіус внутрішнього циліндра.

1) $V_1 = \pi R_1^2 H$,

$R_1 = \frac{1420}{2} = 710(мм) = 0{,}71(м)$

$V_2 = \pi R_2^2 H$,

$R_2 = 0{,}71 – 0{,}022 = 0{,}688$ (м).

Тоді об'єм труби дорівнює:

$V = V_1 – V_2$,

$V = \pi R_1^2 H - \pi R_2^2 H = \pi H(R_1^2 - R_2^2) = \pi H(R_1 - R_2)(R_1 + R_2)$,

$V = 3{,}14 \times 10 \times 0{,}022 \times 1{,}442 \approx 1(\text{м}^3)$

2) $\quad \text{М} = 7600 \times 1 = 7600 = 7{,}6(\text{т})$.

Відповідь: 7,6 т.

Задача 5. Скільки потрібно солдат для того, щоб викопати за 8 год. траншею довжиною 25 м хід сповіщання такої самої довжини, враховуючи, що кожний солдат за годину має викопати 0,75м^3? Профіль траншеї і ходу сповіщання і розміри в метрах дані на рисунках (рис. 2.7.)

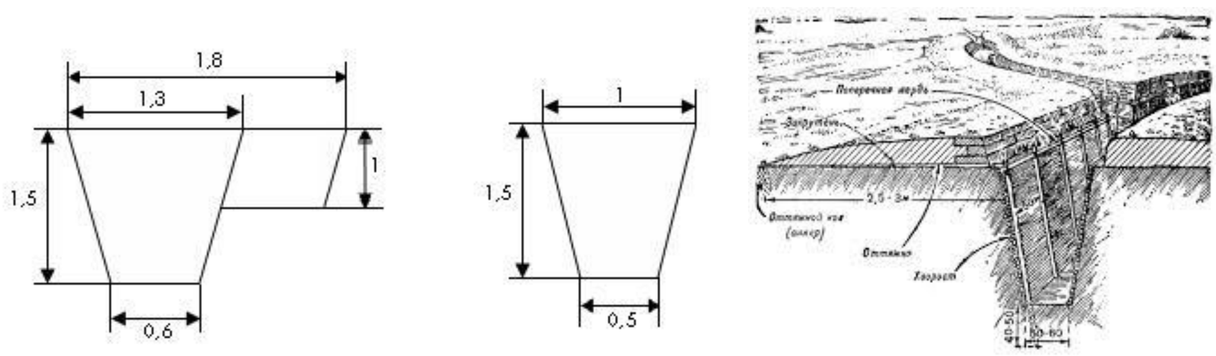

Рис. 2.7. Зрізаний конус

Розв'язання

1. Одна частина траншеї має вигляд призми, основою якої є трапеція:

$V_1 = S_{\text{ТР.}} \cdot H$,

$V_1 = ((1{,}3 + 0{,}6) / 2) \cdot 1{,}5 = 1{,}425$ (м^3),

$V = 1{,}425 \cdot 25 = 35{,}625$ (м^3).

2. Друга частина траншеї має вигляд призми, основою якої є паралелограм:

$V_2 = S_{\text{ПАР.}} \cdot H$,

$S_{\text{ПАР.}} = (1{,}8 - 1{,}3) \cdot 1 = 0{,}5$ (м^3),

$V_2 = 0{,}5 \cdot 25 = 12{,}5$ (м^3).

3. Хід сповіщання має вигляд призми, в основі якої лежить трапеція:

$V_3 = S\text{тр.} \cdot H$,

$S_{\text{ТР.}}$ = ((1 + 0,5) / 2) · 1,5 = 1,125 (м^3),

V_3 = 1,125 · 25 = 28,125 (м^3).

4. $V = V_1 + V_2 + V_3$,

V = 36,625 + 12,5 + 28,125 = 76,25 (м^3).

5.За 8 годин: 8 · 0.75 м^3 = 6м^3, тоді 76,25 / 6 =13 (солдат).

Відповідь: потрібно 13 солдат.

Задачі на побудову. До стереометричних задач на побудову належать задачі, в яких вимагається в тривимірному просторі побудувати фігуру з певними властивостями.

Переважна більшість задач на побудову, які розв'язують під час вивчення розділу, це задачі на побудову перерізів многогранників площинами. Їх ефективно розв'язують на проекційних малюнках. Основні способи таких побудов – спосіб слідів і спосіб відповідності.

Задача 6. Дві бічні грані чотирикутної призми паралельні (рис. 2.8.). Побудуйте переріз цієї призми площиною, яка проходить через три дані на бічних ребрах точки.

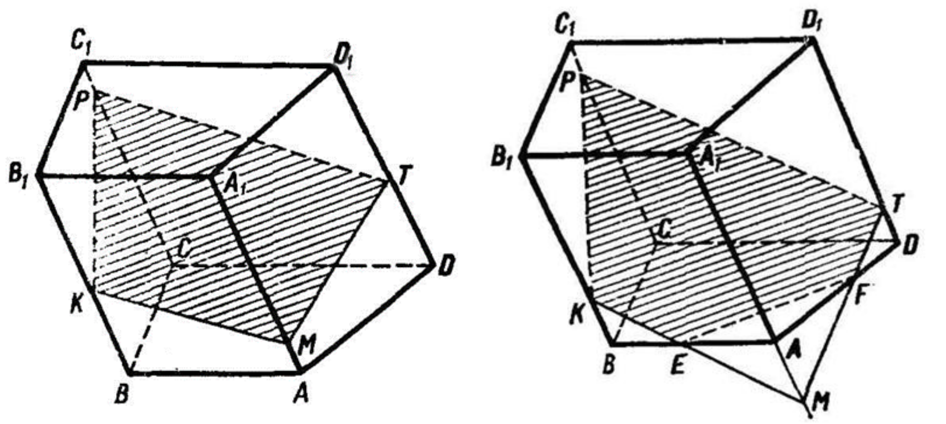

Рис. 2.8. Чотирикутна призма

Конкретизуємо задачу. Нехай дано чотирикутну призму $ABCDA_lB_1C_lD_1$ з паралельними гранями ABB_1A_1 і CC_1D_1D, і точки K, P, T які лежать на її бічних ребрах. Треба побудувати переріз призми площиною, що проходить через точки K, P, T.

У перерізі має бути якийсь многокутник, у цьому випадку – чотирикутник з вершинами на бічних ребрах призми. Три вершини чотирикутника відомі, треба знайти четверту. В якій точці січна площина перетне бічне ребро AA_1?

Приблизно так можна ввести учнів у задачу. Якщо вони запропонують правильний спосіб розв'язання, то можна приступити до його реалізації. Якщо таких пропозицій не буде, то вчитель повинен допомогти, звернувши увагу на те, що дві бічні грані даної призми паралельні. Розв'язання в зошиті можна оформити так.

Розв'язання

Перший спосіб. Проведемо через точку K пряму, паралельну PT. Якщо ця пряма перетне ребро AA_1 в точці M, то чотирикутник $KPTM$ – шуканий переріз. Якщо пряма KM перетне продовження ребра AA_1 визначаємо точки E і F перетину прямих KM і MT з ребрами AB і AD. У цьому випадку перерізом буде п'ятикутник $KPTFE$ (рис. 2.9.).

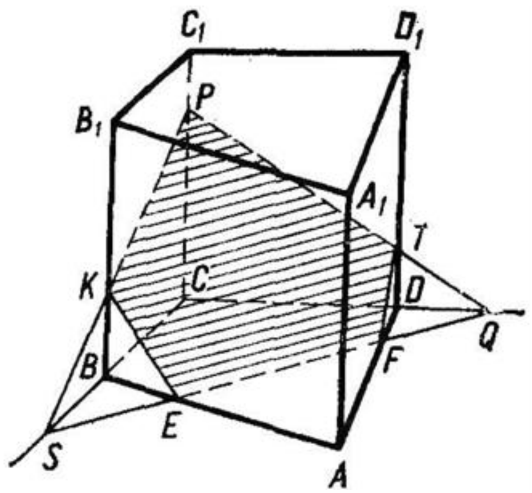

Рис. 2.9

Описувати розв'язання таких задач за схемою «аналіз – побудова – доведення – дослідження» не радимо. Не треба пояснювати побудову за заздалегідь виконаним малюнком, лінії і точки на нього треба наносити поступово, одночасно з відповідним поясненням.

Далі задачу узагальнюють:

– Як виконати побудову, якщо серед бічних граней призми немає паралельних? Зробити це можна так (рис. 2.10.).

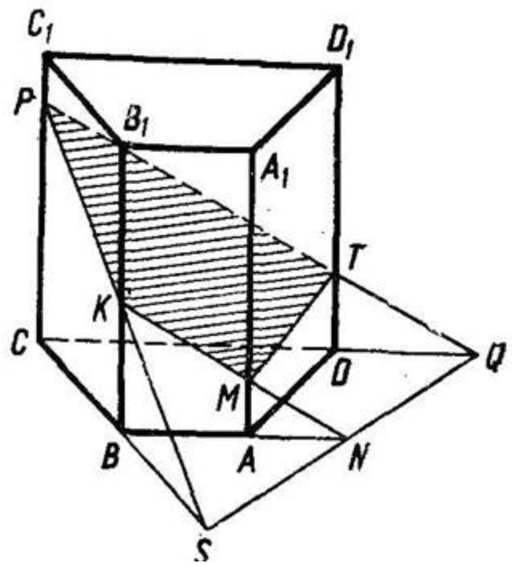

Рис. 2.10

Прямі *PK* і *PT* належать січній площині, тому й точка S, в якій перетинаються прямі *BC* і *PK,* і точка *Q,* в якій перетинаються прямі *PT* і *CD,* належать січній площині. Крім того, точки *S* і *Q* належать площині основи даної призми. Кожна точка прямої *SQ* належить січній площині. Тому якщо пряма *SQ* перетинає ребра *AB* і *AD* у точках *E* і *F,* то п'ятикутник *KPTFE* – шуканий переріз. Якщо пряма *SQ* не перетинає основи призми, знаходимо точку *N* перетину прямих *BA* і *SQ,* а потім точку *M,* в якій перетинаються прямі *NK* і AA_1. У цьому випадку перерізом призми буде чотирикутник *KPTM.*

Можливі й інші випадки. Якщо, наприклад, пряма *PT* буде паралельна *CD,* то описаним способом визначити точку *Q* не можна. У цьому разі проводять *SQ* паралельно *CD.* Якщо точки *K, P, T* задані так, що $PT \parallel CD$ і $KP \parallel CB$, то це означає, що січна площина паралельна основам призми. У цьому випадку на ребрі AA_1 знаходимо точку *M* так, щоб $AM = CP$, тоді чотирикутник *KPTM* – шуканий переріз.

Можна звернути увагу учнів, що пряма *SQ,* по якій перетинається січна площина з площиною основи, називається слідом січної площини на площині основи, а пряма PQ – слідом січної площини на площині C_1CD і т. д. Тому описаний спосіб розв'язання задачі називають *способом слідів.*

Другий спосіб. Проаналізуємо рис. 2.10. Нехай $KPTM$ – переріз, який треба побудувати. Одну з його діагоналей KT можна побудувати, бо дано точки K і T. Задача зводиться до побудови другої діагоналі.

Проекції обох цих діагоналей побудувати неважко, бо вони є діагоналями основи призми. Встановимо відповідність: діагоналі перерізу

KT відповідає проекція BD; діагоналі перерізу PM – проекція CA; перетину діагоналей перерізу O_1 – точка O.

З описаного аналізу випливає такий спосіб розв'язання задачі:

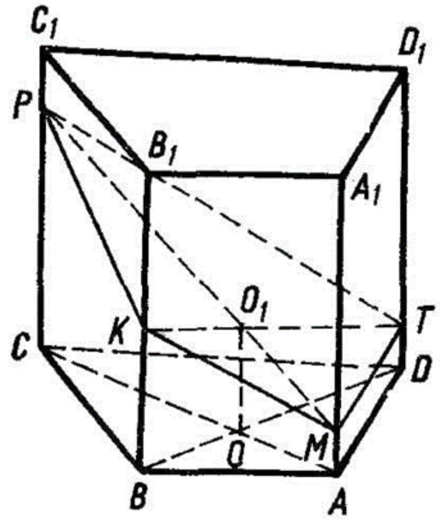

Рис. 2.11

1) проводимо діагоналі основи призми (рис. 2.11.) AC, BD і позначаємо точку O їх перетину;

2) проводимо діагональ перерізу KT, яку можна провести;

3) через точку O проводимо пряму, паралельну AA_1 до перетину з діагоналлю KT в точці O_1,

4) проводимо пряму PO_1. до перетину з AA_1 у точці M.

Залежно від того, як розміщені дані точки K, P і T, у перерізі може бути чотирикутник $KPTM$ (рис. 2.11) або п'ятикутник $KPTFE$ (рис. 2.12).

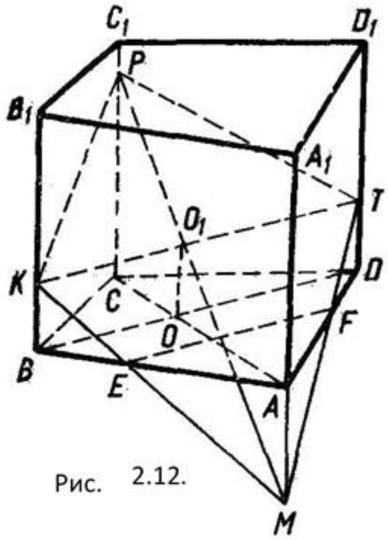

Рис. 2.12.

Цей спосіб розв'язання задачі називають *способом відповідності.*

Не менш загальним і доступним для учнів є *спосіб паралельних площин.* Проілюструємо його на прикладі тієї самої задачі.

Щоб побудувати переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через дані на її бічних ребрах точки *K, P, T* (рис. 2.13.), треба:

1) провести *BL* || *CD,* позначити точку *L*, в якій перетинаються прямі *BL* і *AD;*

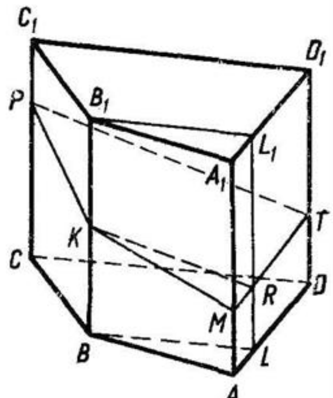

Рис. 2.13.

2) провести LL_1 || AA_1,

3) провести *KR* II *PT,* позначити точку *R,* в перетинаються прямі *KR* і LL_1,

4) провести пряму *TR* до перетину з AA_1 у точці *M*.

Чотирикутник *KPTM* – шуканий переріз.

Якщо пряма *TR* перетинає не ребро AA_1, а його продовження, то в перерізі буде п'ятикутник.

Користуючись згаданими трьома способами, можна будувати перерізи не тільки призм, а й інших многогранників. Правда, будуючи переріз піраміди способом відповідності, треба розглядати не паралельні проекції, а центральні. На рис. 2.14. і 2.15. показано, як побудувати переріз піраміди *SABCD* площиною, що проходить через дані точки *К, Р, Т.* Спосіб паралельних площин для побудови перерізів пірамід менш раціональний, тому з ним учнів можна не ознайомлювати. Можна не розглядати й способу відповідності, але з способом слідів бажано ознайомити учнів.

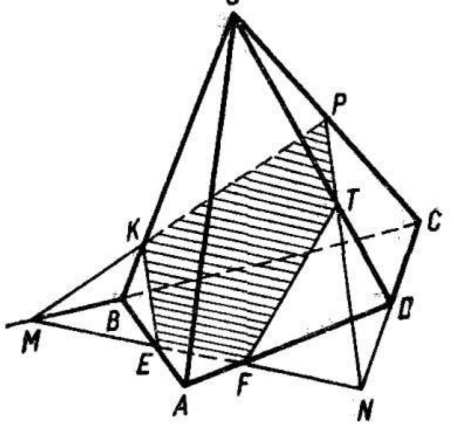

Рис. 2.14.

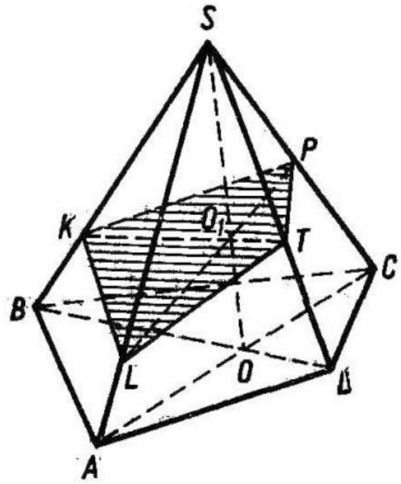

Рис. 2.15.

Найважча для учнів задача на побудову перерізу многогранника площиною, що проходить через точки, задані на попарно мимобіжних ребрах. Розв'яжемо задачу 7.

Задача 7. На трьох попарно мимобіжних ребрах паралелепіпеда взято три точки. Побудуйте переріз, що проходить через ці три точки.

Розв'язання

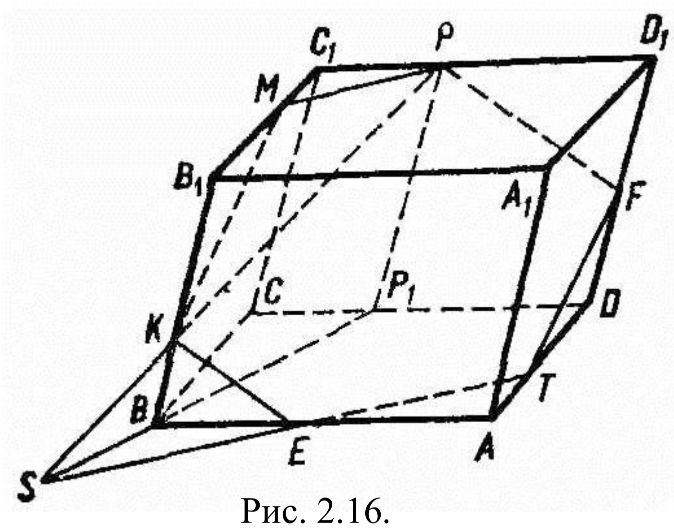

Рис. 2.16.

Щоб побудувати переріз паралелепіпеда, зображеного на (рис.2.16), який проходив би через точки *К, Р Т,* позначимо проекцію (паралельну бічному ребру) точки *Р* буквою P_1. Якщо прямі *РК* і P_1B перетинаються в точці *S,* знаходимо точку *E,* в якій пряма *ST* перетинає ребро *AB.* Далі у верхній основі паралелепіпеда проводимо відрізок *PM,* паралельний *TE.* а в грані C_1CD – відрізок *PF,* паралельний *KE.* Шестикутник *KMPFTE* – переріз, який треба було побудувати.

Коли б даний шестигранник не мав паралельних граней, закінчувати побудову треба було б інакше: $ST \cap CD = Q$, $QP \cap DD_1 = F$, $QP \cap CC_1 = R$, $RK \cap B_1C_1 = M$.

Задача 8. Чотири вершини куба розміщені в точках *0* (0; 0; 0), *A* (2; 0; 0), *C* (0; 2; 0), O_1 (0; 0; 2). Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки *К* (5; 0; 0), *Р* (0; 5; 0) і *Т* (0; 0; 5).

Побудувавши в прямокутній системі координат за даними координатами куб і площину *КРТ* (рис. 2.17), майже усі учні стверджують, що куб лежить поза площиною і, отже, ніякого перерізу не існує. Насправді це не так.

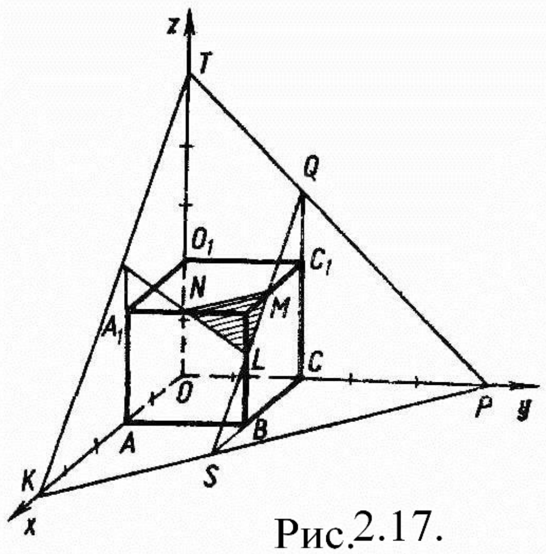

Рис.2.17.

Розв'язання

Якщо прямі *CB* і *KP* перетинаються в точці *S*, а прямі CC_1 і *PT* – в точці *Q*, то пряма *SQ* перетинає ребра куба BB_1 і B_1C_1 у точках *L* і *M*. Аналогічно знаходимо точку *N*. Рівносторонній трикутник *LMN* – шуканий переріз.

Задачі, подібні до двох останніх, краще розглядати на факультативних заняттях.

Досі йшлося про перерізи многогранників площинами, заданими трьома точками. Зрозуміло, що їх можна задавати й інакше.

1. Побудуйте переріз правильного тетраедра площиною, яка перпендикулярна до ребра тетраедра і проходить через його середину.

2. Дано правильну шестикутну призму. Побудуйте її переріз площиною, що проходить через одну з сторін нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи.

І не тільки до проведення перерізів повинні зводитись задачі на побудову. Треба пропонувати учням також задачі на побудову відрізків, многогранників, окремих точок тощо. І не слід відмовлятись від найпростіших задач, наприклад, таких.

1. Побудуйте відрізок, який сполучає середини двох протилежних ребер правильної трикутної піраміди.

2. Побудуйте відрізок, який сполучає центри двох граней правильного тетраедра.

Радимо пропонувати учням також вправи на побудову многогранників, особливо їх комбінацій. Маємо на увазі, наприклад, такі вправи.

1. Побудуйте піраміду, в основі якої — трапеція. Всі бічні ребра піраміди нахилені до основи під однаковими кутами.

2. Побудуйте куб, вписаний у правильну чотирикутну піраміду так, щоб чотири його вершини лежали на апофемах піраміди, а чотири – на ЇЇ основі.

Розглянемо розв’язання останньої задачі.

Спочатку, зрозуміло, треба побудувати правильну чотирикутну піраміду, провести її висоту і всі чотири апофеми (рис. 2.18).

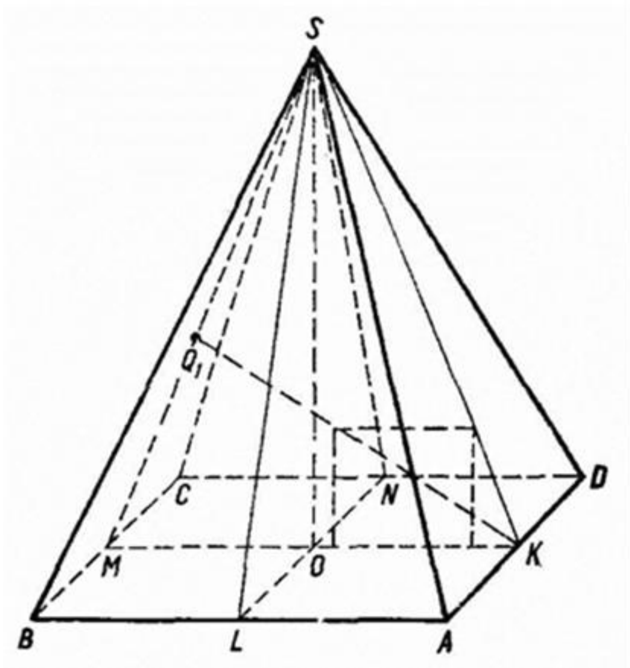

Рис. 2.18

Потім можна запропонувати учням розмістити вершини вписаного куба «на око». В результаті в учнівських зошитах «куби» будуть або високі, або низькі. Не біда: на помилках навчаються. Тепер учні уважніше слухатимуть пояснення учителя.

Діагональний переріз куба повинен бути вписаний у рівнобедрений трикутник *SKM*. Сторони діагонального перерізу куба відносяться які : 2.

Намалюємо довільний прямокутник з таким відношенням сторін, як показано на рис. 2.19, а потім скористаємось методом подібності. Дістанемо одну з вершин вписаного куба Q. Тепер уже неважко знайти інші вершини: Q, P_1, P, R_1, R, T_1, T. Усі ребра куба можна зображати штриховими лініями, але можна й так, як показано на рис. 2.19.

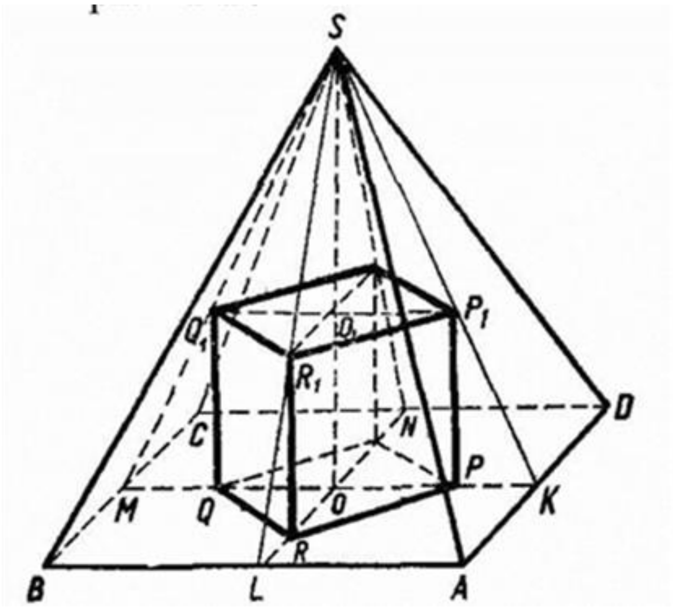

Рис. 2.19

Задачі на доведення. Розв’язувати задачі на доведення можна під час вивчення кожної теми цього розділу. Починати краще з найпростіших, які можна розв’язувати й усно. Щоб не витрачати багато часу, корисно пов’язувати їх з якимось одним малюнком.

Задача 9. Середня лінія трапеції лежить в площині α. Чи перетинають площину α прямі, що містять основи трапеції (рис. 2.20)? Відповідь доведіть.

Ми знаємо, що середня лінія трапеції паралельна її основам. Оскільки середня лінія трапеції лежить в площині α, то її основи не можуть перетинати площину α. Доведемо, що прямі, які містять основи трапеції, не перетинають площину α.

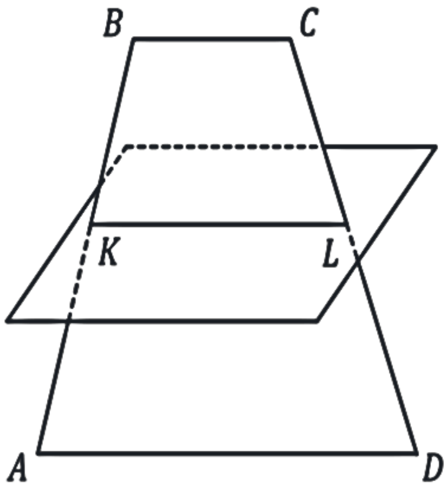

Рис 2.20. Трапеція

Дано:

$ABCD$ – трапеція;

KL – середня лінія;

$KL \in \alpha$;

Довести:

BC і AD не перетинають площину α

Доведення

KL – середня лінія трапеції $ABCD$ $\rightarrow KL \parallel BC$ і $KL \parallel AD$.

Припустимо, що $BC \cap \alpha$, тоді:

$$\left.\begin{matrix} BC \cap \alpha \\ BC \parallel KL \end{matrix}\right| \xrightarrow{\text{За Т4}} KL \cap \alpha$$

Отримали суперечність, бо $KL \in \alpha$, тому припущення хибне і BC не перетинає площину α.

Припустимо, що $AD \cap \alpha$, тоді:

$$\left.\begin{matrix} AD \cap \alpha \\ AD \parallel KL \end{matrix}\right| \xrightarrow{\text{За Т4}} KL \cap \alpha$$

Отримали суперечність, бо $KL \in \alpha$, тому припущення хибне і BC не перетинає площину α.

Доведено.

Задача 10. $ABCD$ – паралелограм (рис. 2.21). Сторони AB і CD перетинають площину α. Доведіть, що AD і DC також перетинають площину α.

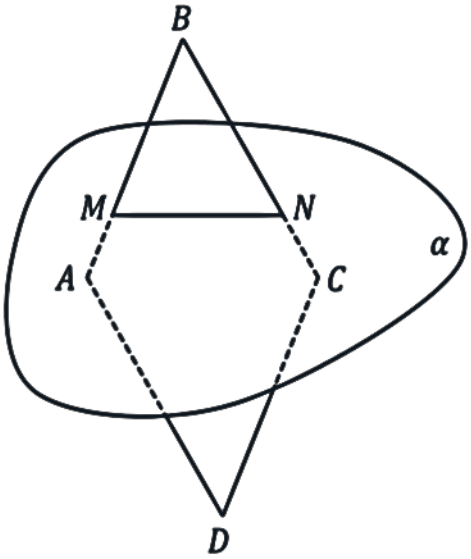

Рис. 2.21

Дано:

$ABCD$ – паралелограм;

$AB \cap \alpha = M$;

$BC \cap \alpha = N$;

Довести:

$AD \cap \alpha$

$DC \cap \alpha$

Доведення

$$\left.\begin{matrix} AB \cap \alpha \\ AB \parallel DC \end{matrix}\right| \xrightarrow{\text{За Т4}} DC \cap \alpha$$

$$\left.\begin{matrix} BC \cap \alpha \\ BC \parallel AD \end{matrix}\right| \xrightarrow{\text{За Т4}} AD \cap \alpha$$

Доведено.

Задача 11. Доведіть, що відрізки, які з’єднують середини протилежних ребер тетраедра (рис. 2.22), мають спільну точку і в цій точці діляться навпіл.

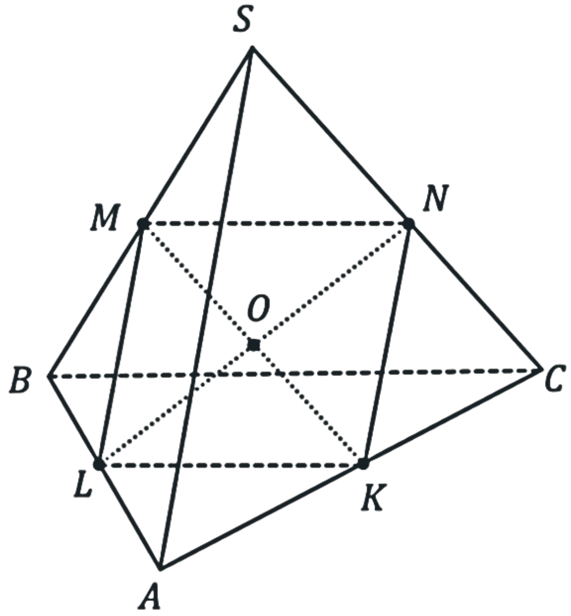

Рис. 2.22

Довести:

$MK \cap NL$;

$MO = OK$;

$OL = ON$;

Доведення

З’єднаємо середини ребер, що лежать в одній грані. LM, MN, NK, LK – середні лінії трикутників ABS, BSC, SCA, CAB відповідно, тому:

$$\left.\begin{array}{c} MN \parallel BC \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \\ LK \parallel BC \\ LK = \dfrac{1}{2}BC \end{array}\right| \xrightarrow{\text{За теоремою 5}} \begin{array}{c} MN \parallel LK \\ MN = LK \end{array}$$

Розглянемо чотирикутник $MNKL$:

$$\left.\begin{array}{c} MN \parallel LK \\ MN = LK \end{array}\right| \xrightarrow{\text{За ознакою паралелограма}} MNKL - \text{паралелограм}$$

Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то:

$$\left.\begin{matrix} MK \cap LN = O \\ MO = OK \\ OL = ON \end{matrix}\right| \text{За властивістю паралелограма}$$

Аналогічно можна довести, що PQ і LN (PQ і MK) також перетинаються і точкою перетину діляться навпіл (рис. 2.23)

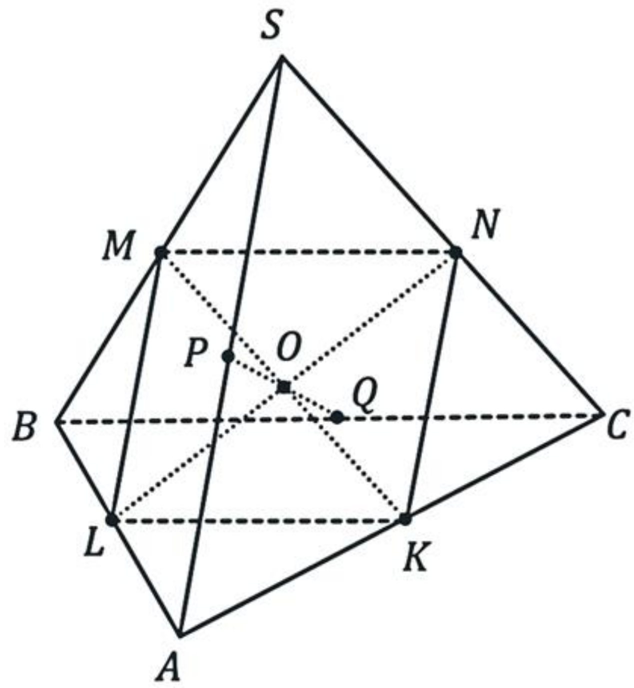

Рис. 2.23

Не обов'язково підряд розв'язувати тільки задачі на доведення, краще різні види задач (навіть пов'язаних з одним малюнком) пропонувати учням по черзі. З часом задачі ускладнюють. можна використовувати при розв'язуванні інших задач.

Задача 12. $ABCA_1B_1C_1$ – трикутна призма (рис. 2. 24). ABB_1A_1, ACC_1A_1 – квадрати з ребрами довжиною 1 м, діагоналі яких перетинаються в точках K і L відповідно. В основі даної призми правильний трикутник ABC. Доведіть, що $KL \parallel BC$ і знайдіть P_{BKLC}.

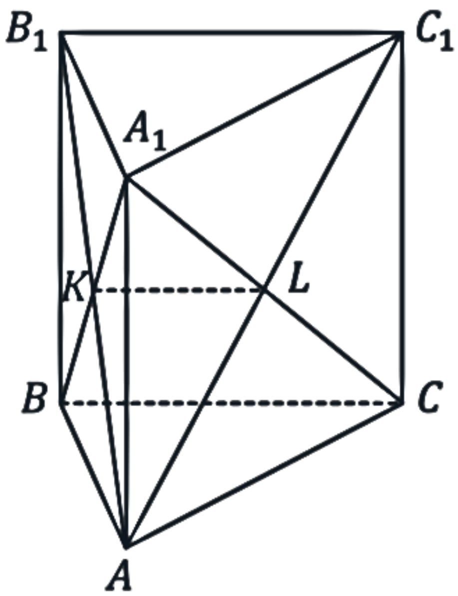

Рис. 2.24

Доведення

ACC_1A_1 – квадрат з ребром 1 м → $AC = 1$ м

ABC – правильний трикутник → $AC = AB = BC = 1$ м

ABB_1A_1 і ACC_1A_1 – рівні квадрати, тому $A_1B = A_1C$. Оскільки діагоналі квадратів точкою перетину діляться навпіл, то:

$$A_1L = LC = A_1K = KB = \frac{1}{2}A_1C$$

Розглянемо ΔBA_1C:

KL – середня лінія → $\left| \begin{array}{c} KL \parallel BC \\ KL = \frac{1}{2}BC = 0{,}5 \text{ м} \end{array} \right.$

Доведено.

1. Доведіть, якщо в піраміді одна із граней перпендикулярна площині основи, то висота піраміди співпадає з висотою трикутника, що обмежує цю грань.

2. Доведіть, якщо у піраміди дві грані перпендикулярні до площини основи, то висота піраміди співпадає з ребром спільним для цих двох граней.

3. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди рівні, то всі вони нахилені до площини основи під однаковими кутами і висота цієї піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

4. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковими кутами, то всі вони рівні.

5. Доведіть, що коли всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то висота такої піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу.

6. Доведіть, що коли висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу, то всі двогранні кути при основі такої піраміди рівні Вище названі задачі розв'язано у пункті 2.3.

У другому розділі розглянуто ще декілька задач на доведення, які можна використовувати на уроках і факультативних заняттях.

Задачі на дослідження. Задач на дослідження властивостей многогранників багато. Серед них – задачі на дослідження існування многогранників із заданими властивостями, на порівняння, на встановлення умов і залежностей, на підтвердження або спростування тверджень тощо.

Задача 13. Чи може бути гранню п'ятигранника п'ятикутник?

Розв'язання

Якщо одна з граней многогранника — п'ятикутник, то крім неї, цей многогранник має ще принаймні п'ять граней (тих, що прилягають до кожної з п'яти сторін даного п'ятикутника). Отже, найменше число граней многогранника, одна з граней якого п'ятикутник,— шість.

Відповідь: не може бути.

Задача 14. Чи існує призма, яка має рівно 500 ребер?

Розв'язання

Припустимо, що така n-кутна призма існує. При кожній з основ її є по n ребер, крім них, вона має ще n бічних ребер. Всього така призма має $3n$ ребер. Рівняння $3n = 500$ не має розв'язків у натуральних числах.

Відповідь: не існує.

Зрозуміло, що й такі задачі можна ілюструвати відповідними малюнками. Але вони не обов'язкові

Задача 15. Чи існує чотирикутна піраміда (рис. 2.25), дві протилежні бічні грані якої перпендикулярні до площини основи?

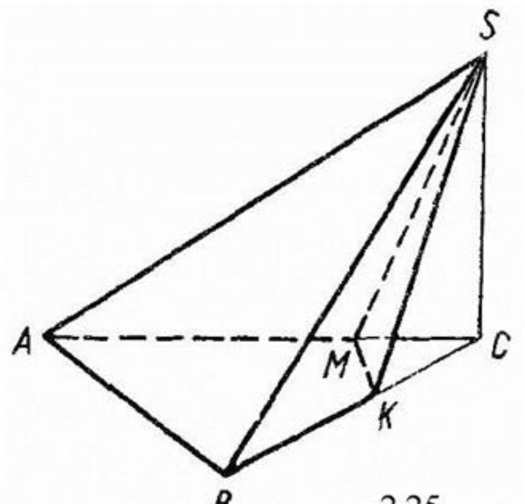

рис. 2.25.

Щоб правильно відповісти на поставлене запитання, досить навести один вдалий приклад, або показати, як можна побудувати піраміду з заданими властивостями.

Розв'язання

Розглянемо трикутну піраміду *SABC, в* якої бічне ребро *SC* перпендикулярне до площини основи.

Візьмемо на ребрах *AC* і *BC* точки *M* *і* *K* (рис. 2.25) і перетнемо піраміду *SABC* площиною *SKM.* Утворена при цьому піраміда *SABKM* задовольняє умову задачі: вона чотирикутна, протилежні бічні грані її *SAM* і *SBK* перпендикулярні до площини основи.

Відповідь: існує.

Задача 16. Чи може правильна піраміда бути правильним многогранником?

На це запитання багато учнів відповідають неправильно. Окремі міркують навіть так: кожна піраміда є многогранником, тому кожна правильна піраміда є правильним многогранником.

Учитель повинен підкреслити, що далеко не кожна правильна піраміда чи правильна призма є правильним многогранником. Згідно з означенням у правильному многограннику всі грані – рівні правильні многокутники. А наприклад, у правильній чотирикутній піраміді бічні грані – трикутники, не обов'язково правильні, а основа – квадрат.

Розв'язання

У правильному многограннику всі грані повинні бути рівними правильними многокутниками. У кожній піраміді бічні грані – трикутники Отже, з усіх пірамід тільки трикутні можуть бути правильними многогранниками. І то тільки ті, в яких усі чотири грані рівні рівносторонні трикутники. Це – трикутна піраміда, всі шість ребер якої рівні.

Відповідь: може бути.

Задача 17. Чи існує многогранник, зображений на рис. 2.26?

На рис.2.26 відрізки *AB* і *CD* паралельні. Вони не можуть зображати мимобіжні ребра, бо належать одній грані *ABCD,* тому *AB* || *CD* і площини *ABMK* і *DCMK* повинні перетинатись по прямій *MK,* паралельній *AB.* А відрізок *MK* не паралельний *AB.* Отже, малюнок не відповідає многограннику.

Відповідь: не існує.

Розв'язання

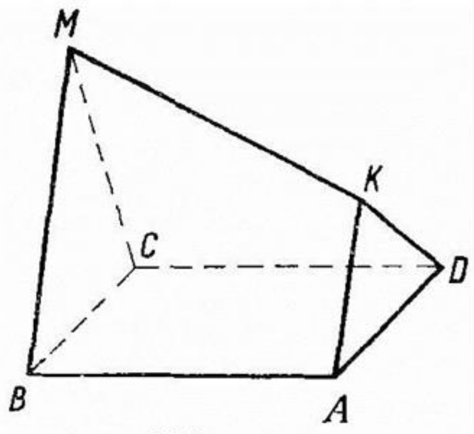

рис. 2.26.

Нерідко учні не вірять такому розв'язанню: адже намальовано многогранник! Ми бачимо всі його ребра і всі грані. У нього дві грані – трикутники, а три – чотирикутники.

Спростувати такі заперечення найкраще за допомогою моделі. Досить показати, що принаймні один з чотирикутників *ABMK* чи *DCMK* не плоский. Якщо на малюнку додатково провести один з відрізків – *BK, CK, AM* або *DM,* то дістанемо зображення многогранника.

Задача 18. У якої правильної піраміди всі діагональні перерізи рівні?

Розв'язання

Трикутна піраміда діагональних перерізів не має. Діагональні перерізи правильної чотирикутної піраміди рівні, бо діагоналі квадрата рівні.

Усі п'ять діагоналей правильного п'ятикутника також рівні, тому й діагональні перерізи правильної п'ятикутної піраміди рівні рівнобедрені трикутники; їх бічні сторони – рівні бічні ребра правильної піраміди.

Діагоналі правильного n-кутника при $n = 6$ не всі рівні. Тому в n-кутної піраміди при $n = 6$ не всі діагональні перерізи рівні.

Відповідь. У чотирикутної і п'ятикутної правильної піраміди.

Задача 19. Чи існують неправильні піраміди, всі діагональні перерізи яких рівні?

Розв'язання

Розглянемо піраміду, в основі якої лежить рівнобедрена трапеція, а висота проектується в точку перетину діагоналей цієї трапеції.

Обидва її діагональні перерізи – рівні трикутники.

Відповідь: існують.

Для відповіді на поставлене запитання досить навести один приклад. Але не треба думати, що тільки згадана в розв'язанні піраміда має рівні діагональні перерізи. Наприклад, рівні діагональні перерізи має кожна піраміда, в основі якої лежить прямокутник, і висота якої проектується на вісь симетрії цього прямокутника.

Відповідь. Ні.

Задача 20. Чи існує тетраедр, розгорткою якого є правильний п'ятикутник?

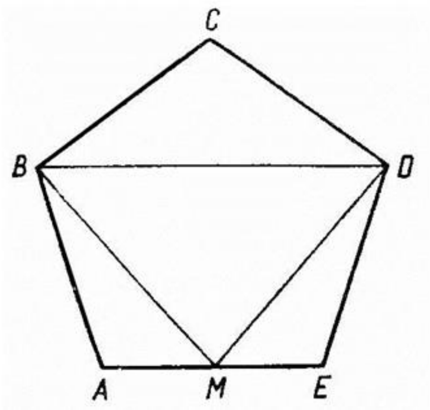

Рис. 2.27

Розв'язання

Нехай *ABCDE* – правильний п'ятикутник, а *M* – середина його сторони *AE* (рис. 2.27). Перегнемо цей п'ятикутник по відрізках *BD, DM* і *MB* так, щоб його вершини *A, C* і *E* збіглися в одній точці S, розміщеній над площиною *BDM.* В результаті дістанемо тетраедр *SBDM,* розгорткою якого є правильний п'ятикутник.

Відповідь. Існує.

Задача 21. *SABCD* — правильна чотирикутна піраміда (рис. 2.28.). У яких межах може змінюватись:

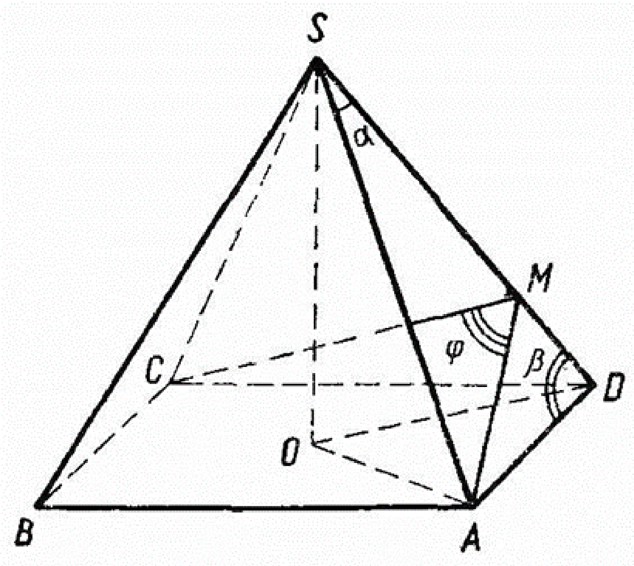

Рис. 2.28

1) кут α при її вершині;
2) кут β між бічним ребром і стороною основи;
3) двогранний кут φ при бічному ребрі?

Задачу можна розв'язати, порівнявши відношення відповідних відрізків. Але швидше і природніше можна дати відповідь, якщо розглянути зміну зазначених кутів від зміни висоти піраміди.

Розв'язання

1) Якщо висота *SO* піраміди зменшується до 0, то кут *ASD* прямує до кута *AOD,* а якщо вона збільшується, то величина кута α прямує до 0. Отже, $0° < \alpha < 90°$.

2) Якщо висота *SO* піраміди зменшується, то кут *SDA* прямує до кута *ODA,* а якщо вона необмежено збільшується, то ребро *SD* наближається до перпендикуляра, проведеного до основи піраміди через її вершину *D*.

Отже, $45° < \beta < 90°$.

3) Із зменшенням висоти піраміди *SO* кут *AMC* прямує до кута *AOC,* а із збільшенням – до кута *ADC*. Отже, $90° < \varphi < 180°$.

Відповідь. $0° < \alpha < 90°$, $45° < \beta < 90°$, $90° < \varphi < 180°$.

Отже, для того щоб навчитися розв’язувати стереометричні задачі, потрібно навчитися правильно зображувати просторові фігури на площині, володіти двома методами – паралельним проектуванням і центральним проектуванням (перспективою). При паралельному проектуванні, потрібно враховувати властивості фігур, що проектуються, перш за все ті, які залишаються незмінними (інваріантними) при паралельному проектуванні, хоча докладний розгляд питань зображення просторових фігур в паралельній проекції виходить далеко за межі шкільної програми.

Розв'язуючи задачі на обчислення, ви визначаєте довжини, значення кутів, площі перерізів, поверхні та об'єми відрізків простого многогранника. Кожне розв'язання підпорядковується закону послідовності від найпростішого до найскладнішого. Це пов'язано з тим, що неможливо навчити учнів успішно розв'язувати задачі середньої складності без розвитку навичок розв'язування найпростіших задач. Необхідно також дотримуватися обережності при розв'язуванні усних задач і при послідовному розв'язуванні декількох задач на основі одного малюнка.

При розв'язуванні задач на побудову перерізів многогранників площинами ефективним є використання проекційних схем. Основними методами такого креслення є методи трасування та відповідності. Також поширеними і доступними для учнів є методи побудови паралельних площин.

Ці три методи можна використовувати для побудови перерізів усіх многогранників.

Задачі на доведення можна розв'язувати під час вивчення кожної теми цього розділу і рекомендується пов'язувати їх з одним рисунком. При розв'язуванні задач на доведення з геометрії твердого тіла корисно звернути увагу учнів на аналогічні задачі з геометрії площини, особливо якщо вони мають схожі розв'язки.

Особливу увагу слід також приділяти розв'язуванню задач, пов'язаних з дослідженням властивостей многогранників, таких як існування многогранників із заданими властивостями, порівняння, встановлення умов і залежностей, перевірка і спростування тверджень тощо.

2.3. Побудова стереометричних зображень

Поняття про многогранники формується за допомогою низки наочних посібників та заздалегідь намальованих малюнків на дошці чи папері. Це призми з різними основами і висотами, зрізані призми, правильні многогранники різних видів і розмірів, повні і зрізані піраміди, прямокутні і похилі многогранники різних розмірів, правильні і неправильні многогранники, опуклі і ввігнуті многогранники. Ці моделі повинні бути різних розмірів, щоб учні могли розрізняти форми та розміри. Одних лише моделей недостатньо для формування поняття многогранників, необхідно намалювати малюнки.

У всьому світі сучасна освіта розглядається як важливий фактор становлення і розвитку особистості, як невід'ємна частина формування соціокультурного середовища. Зміни в науці, техніці та виробництві, зумовлені зростанням ролі математики в усіх сферах людського життя та актуальністю одного з ключових завдань шкільної геометричної освіти - розвитку просторової уяви та формування в учнів просторових уявлень, умінь і навичок виконання операцій з просторовими об'єктами - математичної підготовки компетентних і конкурентоспроможних випускників зумовлює нові вимоги до змісту навчання математики в сучасній школі.

Цей виклик перед сучасною школою актуалізує проблему формування конструктивних геометричних умінь учнів, що є важливим чинником, який впливає на загальнокультурний розвиток особистості, її безперервну освіту та підготовку до професійної діяльності в усіх галузях техніки та інших сферах людської діяльності.

Один із способів здійснення навчально-пізнавальної діяльності, що забезпечується такими діями, як розпізнавання, переміщення, трансформація та реконструкція зображень за підтримки власної активності учнів, стимулює розвиток геометричного мислення, особливо його складових, просторових та інтуїтивних елементів, з метою розуміння кінцевого образу фігури, еталонного образу 3D-фігури. Це покрокова візуалізація низки дій під час навчання конструюванню. Цей метод може бути реалізований у вигляді педагогічної підтримки з використанням ІКТ.

Нижче наведено перелік пакетів динамічної геометрії, які можна використовувати для геометричного конструювання: SketchPad (США); Cabri (Франція); Cinderella (Німеччина); GEONExT (Німеччина); Gran-2D (Україна, Національний педагогічний Драгоманова); Gran-3D (Україна, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова); DG (Україна, Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди). Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди). Електронні підручники Геометрія 10 клас (Геометрія 10 клас) та Геометрія 11 клас (Геометрія 11 клас).

Електронні підручники (Gran-2D, Gran-3D, DG, Геометрія 10 клас та Геометрія 11 клас), призначені для підтримки викладання геометрії, особливо тривимірної геометрії, що використовуються в школах країни, були оглянуті та проаналізовані з точки зору візуалізації для навчання геометричних структур. Було зроблено висновок, що ці матеріали лише частково вирішують завдання формування в учнів конструктивних геометричних навичок і не можуть бути використані на всіх етапах навчання при вивченні матеріалу з тривимірної геометрії. Наприклад, при доведенні теорем, розв'язуванні конкретних задач, або коли учням потрібно подумати над образом фігури та порядком розташування її елементів. Існуючі ППЗ можна використовувати, коли учні знайомі з технікою геометричних побудов.

Існуючі навчальні програми можна використовувати, коли учні добре володіють технікою геометричної композиції.

На нашу думку, однією з найбільш вдалих таких програм є GeoGebra. Це безкоштовна програма, призначена для моделювання як плоских, так і об’ємних фігур та дослідження їх властивостей при зміні параметрів.

Далі вводиться означення многогранника. У деяких підручниках поняття «тіло» і «площина» не визначені, і через них визначається поняття многогранника. Передбачається, що ці поняття учні розпізнають наочно і в повсякденному розумінні.

Сформулювавши загальне поняття многогранників, можна перейти до розгляду окремих видів многогранників, а саме опуклих та ввігнутих (неопуклих) поверхонь. Тут, перш за все, необхідно відзначити відмінності між різними типами многогранників.

Перед введенням означення опуклого многогранника необхідно повторити означення опуклого многокутника, плоского многокутника. Це пояснюється тим, що їх використання та аналогія в означенні з опуклими многогранниками сприяє кращому засвоєнню нових понять [36, с. 463].

Далі підкреслюється, що в подальшому вивчення многогранників буде обмежено вивченням опуклих многогранників.

Іншими словами, необхідно вивчати грані, ребра і кути опуклих многогранників (площин, многогранників, многогранників і діагоналей), діагоналі, а також поняття основи і бічної сторони в різних многогранниках.

Потім вивчаються загальні властивості опуклих многогранників.

Правильні многогранники та їх властивості. У давнину правильні многогранники привертали до себе велику уваги. Наприклад, піфагорійська школа вчила, що стихії вогонь, вода, повітря і земля мають форму чотирьох правильних многогранників, а п'ятий правильний многогранник (додекаедр) представляє собою Всесвіт. Платон також звертав увагу на правильні многогранники. Недарма правильні многогранники називають платонівськими тілами.

Це пов'язано з тим, що вивчення форми правильного многогранника, роздуми про те, як зробити правильний многогранник і розв'язування тривимірних задач з використанням правильних многогранників дуже позитивно впливає на розвиток просторового уявлення учнів.

Означення. Опуклий многогранник називається правильним, якщо його грані є правильними многокутниками з однією й тією ж кількістю сторін, а в кожній вершині многогранника сходиться одна й та ж кількість ребер [32, с. 74].

Існує лише п’ять типів правильних опуклих многогранників: правильний тетраедр, куб (гексаедр), октаедр, додекаедр та ікосаедр (рис. 2.29).

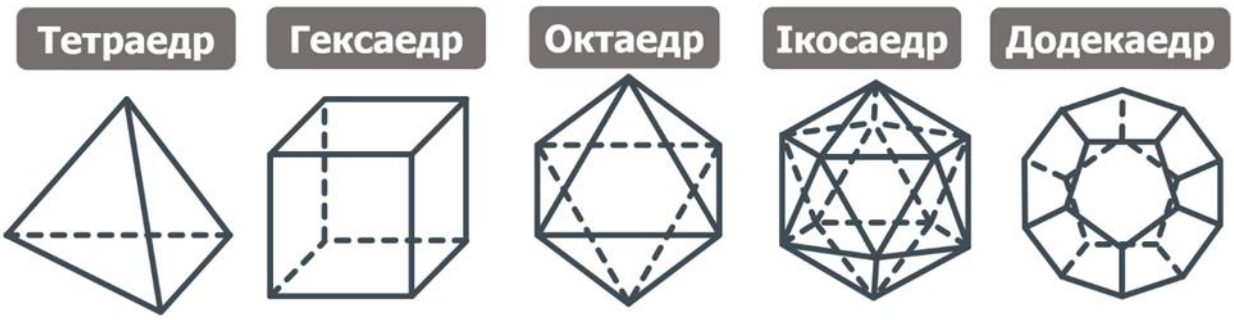

Рис. 2.29

У правильного тетраедра грані – правильні трикутники; у кожній вершині сходиться по три ребра. Тетраедр – трикутна піраміда, всі ребра якої рівні.

У куба всі грані – квадрати; у кожній вершині сходиться по три ребра.

Куб – прямокутний паралелепіпед з однаковими ребрами.

У октаедра грані – правильні трикутники, але на відміну від тетраедра у кожній його вершині сходиться по чотири ребра.

У додекаедра грані – правильні п’ятикутники. У кожній вершині його сходиться по три ребра.

У ікосаедра грані – правильні трикутники, але на відміну від тетраедра і октаедра у кожній вершині сходиться по п’ять ребер.

Слід зазначити, що програма на рівні обов’язкових результатів навчання передбачає лише введення поняття про правильні многогранники. Тому недоцільно на уроці розглядати задачі, що доводять їх властивості, які не ввійшли до означення [36, с. 465].

Разом з тим доцільно з’ясувати з учнями, чому існує лише п’ять типів правильних многогранників. Для цього досить згадати про те, що сума градусних мір плоских кутів опуклого многогранного кута менше за 360°. Многогранний кут може складатись щонайменше з трьох плоских кутів. Оскільки

$\alpha_3 = 60^\circ$, $\alpha_4 = 90^\circ$, $\alpha_5 = 108^\circ$, $\alpha_6 = 120^\circ$, … , $\alpha_n = \dfrac{180^0(\,n-2)}{\quad}$ і n

$\alpha_3 \cdot 3 = 60^\circ \cdot 3 = 180^\circ < 360^\circ$, $\alpha_4 \cdot 3 = 90^\circ \cdot 3 = 270^\circ < 360^\circ$, $\alpha_5 \cdot 3 = 108^\circ \cdot 3 = 324^\circ < 360^\circ$, $\alpha_6 \cdot 3 = 120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$,

то гранями тригранних кутів правильного многогранника можуть бути правильний трикутник, квадрат і правильний п’ятикутник. Одержуємо відповідно правильний тетраедр, куб і додекаедр. Аналогічно для чотиригранного кута правильного многогранника знаходимо, що він може складатися лише з плоских кутів правильних трикутників. Дістаємо відповідно октаедр. Нарешті, гранями п’ятигранного кута можуть бути лише правильні трикутники , бо $\alpha_3 \cdot 5 = 60^\circ \cdot 5 = 300^\circ < 360^\circ$. Дістаємо ікосаедр. Жодних інших можливостей щодо утворення правильних многогранників немає.

Цей метод однозначно заслуговує на увагу. Він дуже конкретно пояснює учням як наочний спосіб утворення правильних многогранників, так і принцип класифікації цих платонівських многогранників. Теорема Ейлера вирішує цю проблему просто і науково, дозволяючи учням обчислити не тільки кількість граней правильного многогранника, а й кількість ребер і вершин.

Отже, поняття многогранників слід формувати за допомогою низки наочних посібників та заздалегідь намальованих малюнків на дошках і папері, але в сучасному світі найбільшу допомогу надають можливості ІКТ.

Після того, як поняття многогранників сформовано, слід перейти до розгляду конкретних видів многогранників: опуклих та ввігнутих многогранників (неопуклі многогранники). Наголошується, що надалі вивчення многогранників буде обмежено опуклими многогранниками та їх властивостями.

Добре розуміння поняття паралельних перетворень та їх властивостей необхідне для того, щоб повною мірою усвідомити взаємне розташування призматичних фігур і граней.

Після означення призми та вивчення різних типів призм, основна увага приділяється окремим елементам призми (вершинам, ребрам, граням та кутам). Важливо починати вивчення многогранників з детального вивчення взаємного розташування різних ліній і граней, оскільки це допоможе учням розвинути своє просторове уявлення.

Модель є лише допоміжним засобом, головне завдання - навчити учнів орієнтуватися у формі тіла на кресленні.

Ознайомлюючи учнів з елементами піраміди (грані, основа, висота тощо), слід звернути увагу на можливість різних висотних положень: в центрі піраміди, або в площині однієї (чи двох) граней, яка може проходити за межами піраміди.

При визначенні об'єму піраміди рекомендується вивести формулу об'єму будь-якої піраміди, розглянувши спочатку трикутну піраміду, потім будь-яку піраміду, розбивши будь-яку піраміду на трикутні піраміди і довівши, що висоти отриманих пірамід однакові.

Розглядаючи об'єм розрізаної піраміди, слід звернути увагу дітей на те, що будь-яку розрізану піраміду можна добудувати до повної піраміди. Іншими словами, об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці між об'ємом повної піраміди та об'ємом готової піраміди.

При вивченні правильних многогранників необхідно використовувати моделі (тіла Платона), а також доцільно дослідити з учнями, чому існує лише п'ять видів правильних многогранників. Теорема Ейлера дає можливість учням поглиблено вивчати форму правильних многогранників, знаючи не тільки кількість правильних многогранників, а й кількість граней, ребер і вершин кожного правильного многогранника.

Зображення многогранників в паралельній проекції. Розв'язуючи задачі або доводячи теореми на уроках стереометрії, ми зазвичай використовуємо зображення на площині, схематичну модель, а не просторову модель відповідної фігури. Той, хто хоче навчитися розв'язувати задачі зі стереометрії, повинен спочатку навчитися правильно зображати просторові фігури на площині, на папері або на дошці.

Для отримання таких зображень найчастіше використовують два способи: паралельне проектування та центральне проектування (перспективне проектування). Два методи - паралельне проектування і центральне проектування (перспективне проектування). Другий з цих методів ближчий до зорової системи людини, але є дуже складним і тому не підходить для навчання в школах. Малюнок повинен бути точним до оригіналу, чітким, простим і швидким у виконанні. Паралельне проектування добре задовольняє ці вимоги.

У гарний сонячний день ми бачимо тіні чітко окреслених предметів на асфальті або гладкій поверхні стіни. Це сонячні промені проектують ці об'єкти на асфальт або стіну. Адже сонячне світло не виходить з одного точкового джерела. Воно випромінюється з усієї величезної світної поверхні сонця, а оскільки відстань від сонця до землі також велика, сонячні промені можна вважати майже паралельними. Ідея паралельного проектування, швидше за все, була підказана математикам механізмом утворення сонячної тіні.

Для того, щоб вільно користуватися паралельним проектуванням, необхідно з'ясувати його властивості, а для початку необхідно дослідити, які властивості проектованої фігури залишаються незмінними (інваріантними) при паралельному проектуванні. При цьому передбачається, що пряма або відрізок, які проектуються, не паралельні напряму проектування.

Властивості паралельного проектування.

1. Проекцією прямої, яка не паралельна напряму проекціювання, є пряма

2. Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції заданої прямої.

3. Проекція непаралельної прямої є паралельною.

4. Відношення відрізків однієї або паралельних прямих дорівнює відношенню їх проекцій (тобто зберігається при паралельному проектуванні).

5. Паралельною проекцією кола є еліпс (або відрізок, якщо коло лежить у площині проекцій).

Зображення при паралельному проектуванні фігури залежить не тільки від самої фігури, але й від площини зображення, лінії проекціювання та взаємного розташування проектованої фігури. Вибір напрямку проекціювання в загальному випадку обмежується лише умовою, щоб прямі проекцій і площина проекцій не були паралельними. Для отримання чіткого зображення фігури і забезпечення максимально можливої простоти зображення бажано використовувати довільні паралельні проекції, тобто не слід заздалегідь визначати конкретний напрямок проекціювання. Крім того, при зображенні просторових фігур не слід брати до уваги значення довжин і кутів між відрізками, наведені в умові задачі, якщо ці дані не впливають на геометричний зміст задачі або геометричний метод її розв'язування (наприклад, не можна ігнорувати відношення довжин між відрізками однієї прямої або паралельної прямої, перпендикулярність прямої тощо). .

Проілюструємо це на прикладі створення зображення при розв'язуванні конкретної задачі.

Задача 22. В основі піраміди *S'A'B'C'* лежить рівнобедрений трикутник (рис. 2.30) *A'B'C'* (*A'B'* = *B'C'*) з кутом α = 50° при основі *A'C'.* Висота трикутника, опущена на його бічну сторону, *A'D'* = 3 см. Бічна грань піраміди, що проходить через *A'C',* перпендикулярна до площини основи; бічні ребра *S'A'* і *S'C'* рівні; висота піраміди *S'O'* = 4 см. Знайти об’єм піраміди.

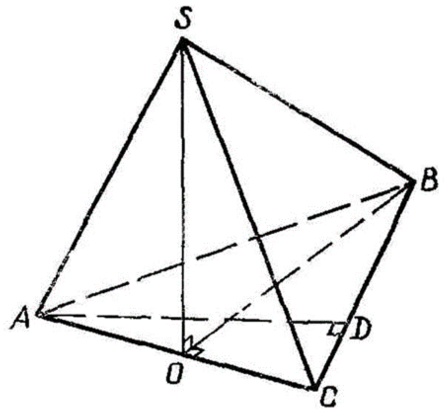

Рис. 2.30

При зображенні даної піраміди враховуємо: рівнобедреність трикутника *A'B'C',* перпендикулярність бічної грані *A'S'C'* до площини основи, рівність бічних ребер *S'A'* і *S'C'*, умова 45° < α < 90° (трикутник *ABC* – гострокутний), оскільки ці умови визначають геометричні властивості фігури і геометричний розв’язок задачі. Числові дані при зображенні фігури не враховуємо, тобто вважаємо, що 45° < α < 90°, а відрізки *S'O'* і *A'D'* – довільної довжини. Це спрощує побудову зображення фігури і в той же час ніскільки не позначається на наочності зображення, не ускладнює розв’язок даної задачі з конкретними числовими даними.

Основу піраміди зображуємо довільним трикутником *ABC.* Медіана *B'O'* трикутника-оригіналу зображується медіаною *BO* трикутника *ABC (*властивість 4 паралельних проекцій). З умови виходить, що висота *S'O'* піраміди лежить в грані *A'S'C' і* проходить через середину *O'* сторо- ни *A'C'* основи.

Висота піраміди є вертикальним відрізком довільної довжини, причому основа висоти є середина *O* сторони *AC* трикутника *ABC.* Точку *S* сполучаємо з *A, B* і *C.* Отримане зображення даної піраміди вірне. Воно враховує всі її геометричні властивості, не враховує лише конкретних розмірів відрізків і кута α (у вказаних межах 45° < α < 90°). Залишається зобразити висоту *A'D'* основи піраміди.

Зображення піраміди або призми зводиться до зображення основи і бічних ребер многогранника. Зображення многогранника звичайно починаємо із зображення його основи – багатокутника. Після цього добудувати зображення тіла звичайно не викликає особливих ускладнень.

Розглянемо спочатку зображення багатокутників.

1. Зображення трикутника. Як зазначалось вище, будь-який трикутник *ABC* можна (з точністю до подібності) розглядати як зображення довільного трикутника *A'B'C'*. При цьому медіани трикутника *A'B'C'* зображаються медіанами трикутника *ABC*.

Вибір трикутника *ABC* для зображення даного трикутника-оригіналу *A'B'C'* визначає напрям проектування. Але ж при цьому трикутник *ABC* буде зображенням самих різних за формою трикутників. Звичайно доводиться проводити в трикутнику-оригіналі висоти, бісектриси, будувати інші відрізки і точки. Природно, при їх зображенні необхідно враховувати конкретні властивості даного трикутника-оригіналу і властивості паралельного проектування.

Зображення називається метрично визначеним, якщо воно визначає оригінал з точністю до подібного перетворення, інакше кажучи, якщо по зображенню можна відновити істинний вид фігури, подібній фігурі-оригіналу.

Зображення *ABC* трикутника (рис. 2.31) загального вигляду *A'B'C'* стає метрично визначеним, якщо на ньому довільно вибрати зображення або двох висот, або двох бісектрис, або серединних перпендикулярів до двох сторін трикутника *A'B'C'* (третя висота, бісектриса, серединний перпендикуляр до третьої сторони проходять через відповідні точки перетину перших двох).

Ця умова рівносильна довільному вибору на зображенні *ABC* трикутника *A'B'C'* точки, яка є зображенням або ортоцентра (точки перетину висот), або центру вписаного кола (точки перетину бісектрис), або центра кола (точки перетину серединних перпендикулярів до сторін), описаного навколо трикутника *A'B'C'*.

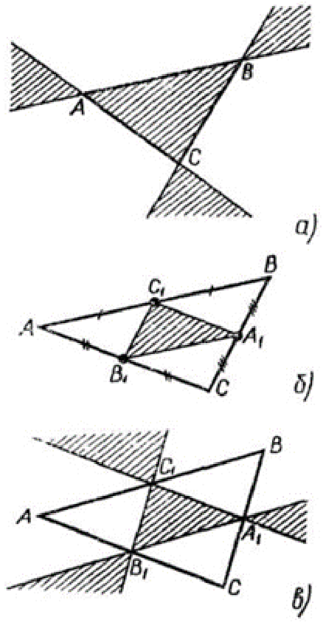

Рис. 2.31

На рис. 2.31, *а* заштрихована область існування зображень ортоцентра трикутника $A'B'C'$ (трикутник ABC – проекція трикутника-оригіналу $A'B'C'$, точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін трикутника ABC). На рис. 2.31, *б* заштрихована область існування зображень центру вписаного в трикутник $A'B'C'$ кола (тільки внутрішні точки трикутника $A_1B_1C_1$). На рис. 2.31, *в* заштрихована область існування зображень центра кола, описаного навколо трикутника $A'B'C'$ (включаючи точки A_1, B_1, C_1).

Прямокутний трикутник $A'B'C'$ також можна зобразити будь-яким трикутником ABC. Але при цьому треба мати на увазі, що зображення напрямів двох його висот (катетів) вже задане. Довільно можна зобразити лише висоту, опущену на гіпотенузу. Якщо даний прямокутний трикутник за умовою не рівнобедрений, висоту, опущену на гіпотенузу (як і бісектрису прямого кута), не можна зображати медіаною трикутника ABC, проведеної до проекції гіпотенузи даного трикутника.

Якщо *рівнобедрений трикутник* $A'B'C'$ ($A'B' = B'C'$) зображений довільним трикутником ABC, то висота, бісектриса і медіана $B'D'$ зображуються медіаною

BD трикутника *ABC*. Отже, довільність у виборі зображення ортоцентра, центра описаної або центра вписаного кола обмежено такою умовою: вони повинні належати не тільки відповідній області існування, але і прямій *BD*.

Правильний трикутник *A'B'C'* можна також зобразити будь-яким трикутником *ABC*, але при цьому зображення буде метрично визначеним, оскільки центри описаного і вписаного кіл, а також ортоцентр трикутника *A'B'C'* співпадають і зображаються точкою перетину медіан трикутника *ABC*. Тому всі подальші побудови на цьому трикутнику не можуть бути довільними.

2. Зображення паралелограма. Будь-який заданий паралелограм *A'B'C'D'* (в тому числі прямокутник, квадрат, ромб) може бути зображений довільним паралелограмом *ABCD*.

Нехай у заданого паралелограма кут *B'A'D'* гострий. Відповідний кут *BAD* паралелограма-зображення може бути як гострим, так і тупим. Для більшої наочності і щоб уникнути зорових ілюзій звичайно (якщо дозволяють умови задачі) приймають гострий кут паралелограма *ABCD* за зображення відповідного гострого кута оригіналу.

На зображенні паралелограма загального виду зображення двох його висот, опущених з однієї вершини (як і перпендикулярів, проведених з будь-якої точки в площині паралелограма до його сторін), можна побудувати довільно, після чого зображення стає метрично визначеним. Слід врахувати, що висоти, опущені з вершини гострого кута паралелограма-оригіналу, лежать поза паралелограмом, а висоти, опущені з вершини тупого кута, – усередині нього.

Квадрат *A'B'C'D'* може бути зображений довільним паралелограмом *ABCD*. При цьому зображення буде метрично визначеним, всі подальші метричні побудови (наприклад, зображення перпендикулярів до сторін квадрата, бісектрис кутів) вже не можна будувати довільно.

3. Зображення трапеції. Будь-яка трапеція *A'B'C'D'* (зокрема рівнобічна, прямокутна) може бути зображена довільною трапецією *ABCD*.

Якщо трапеція *A'B'C'D'* – загального вигляду, то зображення її висоти на кресленні можна побудувати довільно. У випадку, якщо *A'B'C'D'* прямокутна трапеція, зображення її висоти на малюнку вже задане. Аналогічно положення при зображенні рівнобічної трапеції. Тут роль висоти відіграє відрізок, що сполучає середини основ трапеції (рис. 2.32).

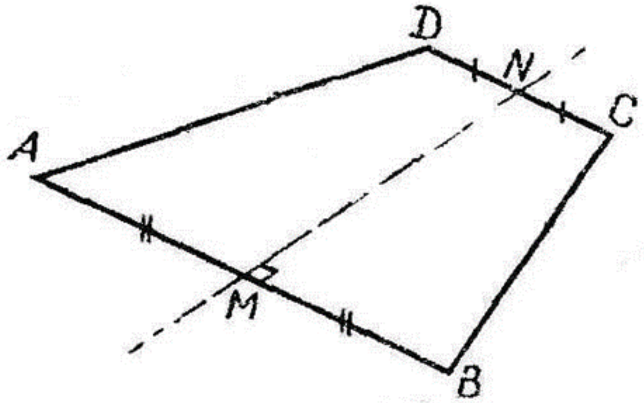

Рис. 2.32

4. Зображення правильного шестикутника. Нехай *A'B'C'D'E'F'* – правильний шестикутник рис. 2.33. Тоді *B'C'E'F'* – прямокутник, *A'D'* ∥ *B'C* ∥ *E'F'*, причому *B'M'* = *M'F'*. Крім того, *A'M'* = *M'O'* = *O'N'* = *N'D'*.

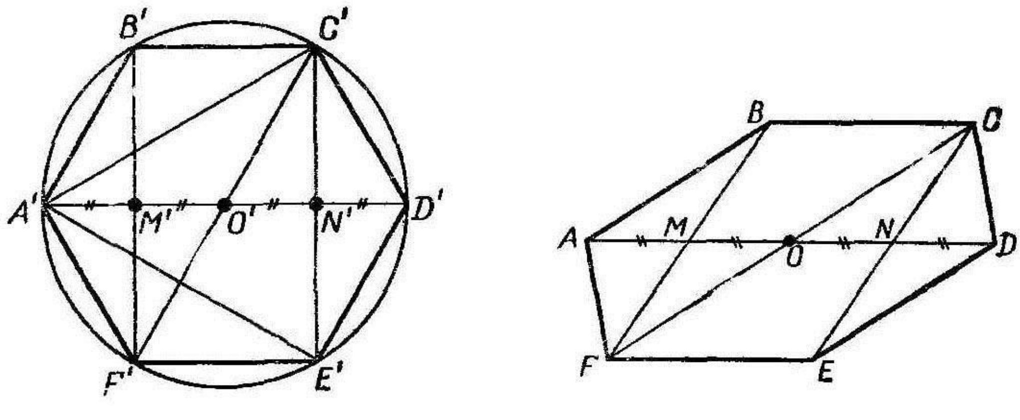

Рис. 2.33

Побудувавши довільний паралелограм *BCEF*, який може розглядатися як зображення прямокутника *B'C'E'F'*, ми одержуємо зображення чотирьох вершин правильного шестикутника. Через середини *M* і *N* його сторін *BF* і *CE* проведемо пряму *MN.* Діагональ *CF* паралелограма *BCEF* розділить відрізок *MN* пополам. Відкладаємо на прямій *MN* зовні паралелограма відрізки *MA* = *ND* = *OM.* Побудовані таким чином точки *A* і *D* – зображення решти двох вершин даного правильного шестикутника

5. Зображення многогранників. Для наочності нагадаємо, що ми домовилися представляти висоту піраміди, бічні ребра прямої призми і висоту похилої призми як "вертикальні" відрізки. Ми також домовилися не брати до уваги числові дані про довжини відрізків і значення кутів, якщо вони не впливають на геометричний зміст задачі або геометричний метод її розв'язання. Це дає значний ступінь свободи при малюванні елементів фігури.

Приступаючи до малювання многогранника, спочатку необхідно проаналізувати його форму і властивості. Наприклад, висота піраміди може збігатися з одним з її бічних ребер або знаходитися на одній з її граней. У таких випадках, звичайно, висота не може бути намальована довільно. Те ж саме стосується і висоти, проведеної з ребра бічної сторони похилої квадратної колони. Якщо задано многогранник загального вигляду, тобто многогранник без будь-якої спеціальної геометричної властивості, яка однозначно визначає положення його висоти, то в зображенні основи многогранника можна довільно вибирати основу його зображення..

1. Зображення правильної трикутної піраміди.

Малюємо довільний трикутник *ABC,* який приймаємо за зображення правильного трикутника. Через точку *O* перетину медіан трикутника *ABC,* яка зображає центр правильного трикутника, проводимо «вертикальний» відрізок *OS* довільної довжини, що зображає висоту піраміди. Точку *S* сполучаємо відрізками з вершинами трикутника *ABC* . Аналогічно будуємо зображення інших правильних пірамід (чотирикутної, шестикутної і т. д.).

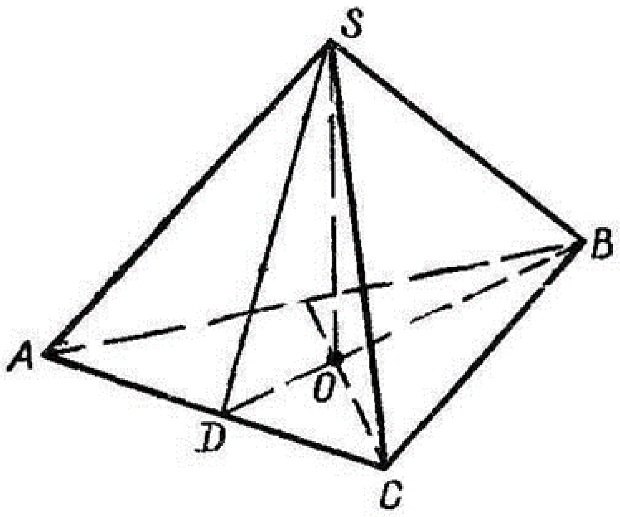

Рис. 2.34

2. Зображення зрізаної піраміди. Часто учні при зображенні зрізаної піраміди роблять так: малюють два багатокутники різних розмірів з відповідно паралельними сторонами і сполучають відрізками їх відповідні вершини (рис. 2.35). Навіть незначні неточності при зображенні паралельних сторін основ зрізаної піраміди ведуть до того, що вказані багатокутники виявляються негомотетичними, тобто продовження бічних ребер на зображенні зрізаної піраміди не сходяться в одній точці.

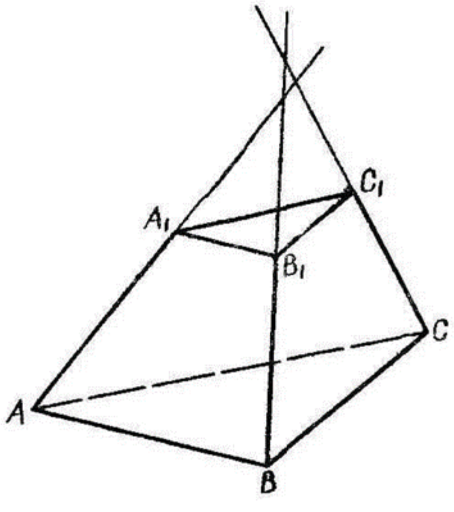

Рис. 2.35

Згідно з визначенням, зрізаною пірамідою називається многогранник, вершинами якого служать вершини основи піраміди і вершини її перетину площиною, паралельною основі. У повній відповідності з цим визначенням і треба будувати зображення зрізаної піраміди, починаючи із зображенням повної піраміди і зобразивши потім перетин її площиною, паралельною основі. Січна площина перетинає площини бічних граней піраміди по прямих, паралельних відповідних сторонах основи, а площини діагональних перерізів – по прямих, паралельних діагоналям основи. Цю останню властивість зручно використовувати для побудови вершин верхньої основи правильної чотирикутної або шестикутної зрізаної піраміди.

3. Зображення призми. Зображуємо багатокутник (для правильної призми – правильний), що лежить в основі призми. Від його вершин проводимо відрізки рівної довжини (для прямої призми – вертикальні, для похилої – під довільним кутом до вертикалі), кінці їх послідовно сполучаємо відрізками.

Докладний розгляд питань зображення просторових фігур в паралельній проекції виходить далеко за межі шкільної програми. Тому можна обмежитися приведеними вище вказівками – їх цілком достатньо, щоб навчити правильному зображенню многогранників, що зустрічаються в шкільних задачах, включаючи побудову окремих їх елементів.

Більше задач прикладного характеру розглянуто в додатку Б.

Висновки до розділу 2

Реалізація прикладної спрямованості стереометрії дає змогу сформувати такі якості, як здатність приймати рішення в нестандартних ситуаціях та використовувати нові інформаційні технології, що є необхідним для розвитку мислення загалом та математичного мислення зокрема. Прикладна спрямованість сприяє формуванню стійких системних знань.

Розв’язування учнями прикладних задач має велике значення для реалізації міжпредметних зв’язків на практиці. Відбувається демонстрація прямого зв’язку математики з іншими науками, що допомагає зацікавити учнів у вивченні предмета. Прикладні задачі дають можливість проілюструвати застосування різних математичних понять. Однак при їх доборі та розв'язуванні завжди слід пам'ятати про методичні вимоги, згадані вище. Реалізація міжпредметних зв'язків, безсумнівно, виконує ряд важливих функцій у навчанні як математики, так і інших дисциплін. Вони впливають на вибір і організацію навчальних матеріалів, активізують різні методи навчання. Викладачі зосереджують свою роботу на створенні інтегрованих форм і умов навчання, які сприяють уніфікації навчального процесу і гарантують цілісність знань студентів.

Для того, щоб полегшити вивчення учнями тривимірного матеріалу, рекомендується систематично впроваджувати ІКТ, які можуть значною мірою допомогти вчителям розширити уяву учнів.

Використання програмних засобів на різних етапах навчання може допомогти пояснювати новий матеріал; розвивати вміння учнів розв'язувати різноманітні задачі; перевіряти рівень математичної компетентності учнів; забезпечувати зворотний зв'язок та організовувати комунікацію; сприяти творчій навчальній діяльності учнів.

ВИСНОВКИ

Сьогодні все більше уваги приділяють формуванню саме практичних компетентностей учня. Так, кожен випускник закладу середньої освіти повинен володіти конкретними прийомами й методами математичної діяльності, які будуть корисні при розв’язуванні задач прикладного змісту. З метою розроблення методики реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії у кваліфікаційній роботі було розв’язано низку завдань.

1. З’ясовано мету й завдання вивчення стереометрії, її роль і місце в розвитку просторового мислення учнів. Реалізація прикладної спрямованості шкільних уроків математики спрямована на підвищення якості математичної освіти учнів, забезпечення належних можливостей для інтелектуального розвитку та застосування математичних знань для розв’язання проблем у повсякденному житті та подальшій професійній діяльності здобувачів освіти.

2. Охарактеризовано поняття прикладної спрямованості стереометрії. Так, прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії – це орієнтація цілей, змісту та засобів навчання стереометрії на набуття учнями знань, умінь і навичок, які безпосередньо використовуються в різних сферах життя людини. Пріоритетність прикладної спрямованості у шкільній програмі сприяє формуванню стійкої мотивації учнів до вивчення математики та навчання загалом.

Викладання стереометрії в школі повинно бути орієнтоване на реальне життя та практичну діяльність. Аналіз літератури з питань прикладної спрямованості стереометрії, визначення сутності цього поняття та його складників, зроблені узагальнення та висновки окреслили шляхи реалізації прикладної спрямованості стереометрії під час навчання учнів ліцеїв.

3. Здійснено змістовний аналіз курсу стереометрії на рівні стандарту та на профільному рівні підготовки. Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається,

що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність. Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов'язану з математикою або її застосуванням.

4. Розроблено систему прикладних стереометричних задач на обчислення, побудову, доведення, дослідження. Задачі прикладного змісту мають бути обов'язковою частиною викладання стереометрії. Адже практичні задачі допомагають старшокласникам зрозуміти, що, вивчаючи цей курс, вони пізнають реальний світ, а розв'язуючи прикладні задачі, навчаються правильно і раціонально розв'язувати проблеми, які виникають у житті.

Розв'язування прикладних задач також допомагає ознайомити учнів з роботою підприємств і галузей промисловості, що є передумовою зацікавленості в тій чи іншій професії. Прикладні задачі можна використовувати для створення проблемних ситуацій на уроках. Такі задачі спонукають учнів до отримання нових знань, збагачують здобувачів освіти теоретичними та практичними знаннями в галузі освіти, науки й техніки.

Робота з розробленою нами системою прикладних задач є ефективним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів. Це відбувається завдяки підвищенню пізнавального інтересу, досягається зосередженням уваги на значенні математичних знань у реальному житті.

5. Визначено особливості побудови стереометричних зображень. Виконання побудов зображень стереометричних фігур на площині є необхідною умовою роботи фахівців у багатьох сферах діяльності. Уміння будувати зображення просторових фігур та їх перерізів мають бути структуровані на елементарні вміння, з яких формуються більш складні, поки не сформуються узагальнені вміння, яких повинні набути учні на кінець вивчення курсу стереометрії. Моделі просторових фігур, наочні посібники та ІКТ дають можливість вчителю більш якісно пояснювати матеріал, тим самим краще формувати та розвивати математичну компетентність та просторову уяву суб'єкта навчання.

Отже, якщо сучасні вчителі математики акцентуватимуть увагу учнів на прикладних задачах стереометрії та цілеспрямовано висвітлюватимуть зв’язок геометрчиних знань з життям, вони можуть стимулювати інтерес здобувачів освіти до навчання і сприяти вихованню в них систематичності в роботі, наполегливості, уважності, критичного та просторового мислення, кмітливості тощо.

Можна зробити висновок, що всі поставлені в кваліфікаційній роботі завдання виконано, мети досягнуто. Розроблені матеріали можуть бути використані учителями під час проведення уроків геометрії з учнями ліцеїв, а також викладачами закладів вищої та фахової передвищої освіти під час викладання математичних дисциплін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко М. І. Розв’язування геометричних задач: Книжка для вчителя. Київ : Рад. шк., 1991. 128 с.

2. Апостолова Г. В. Стереометрія в опорних схемах. Київ : Факт, 2000. 68 с.

3. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Математика. 11 клас. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. Тернопіль : Навчальна книга Богдан, 2011. 480 с.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Підручник для учнів 10–11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх загальноосвітніх закладах. Київ: Освіта, 2000. 239 с.

5. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища школа, 1989. 367 с.

6. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Вивчення елементів стереометрії в основній школі. Математика. 2002. № 13. С. 7.

7. Бевз Г. П. Математика: проб. підруч. для 11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 1995. 191 с.

8. Бевз Г. П. Методика розв’язування стереометричних задач : посібник для вчителя. Київ : Рад. шк., 1988. 192 с.

9. Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А. Методика викладання математики в початкових класах. Навч. Посібник. Київ : Навчальна книга Богдан, 2006. 336 с.

10. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184–189.

11. Бурда М. І., Дубинчук О. С., Мальований Ю. І. Математика 10–11: проб. навч. посібник для шк., ліцеїв та гімназій гуманітар. профілю. Київ : Освіта, 1997. 224 с.

12. Бурда М. І., Мальований Ю. І., Колесник Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч.

Для 10 класу закладів загальної середньої освіти К: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.: іл. Київ: Освіта, 1997. 224 с.

13. Генденштейн Л. Е., Єршова А. П. Наочний довідник з геометрії. Харків. Тернопіль : Гімназія Підручники і посібники, 1997. 96 с.

14. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2018. 240 с. : іл.

15. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти/ Олександр Істер, Оксана Єргіна. Київ : Генеза, 2019. 288 с.

16. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б.та ін. Хврків : Гімназія, 2019. 240 с.

17. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти Нелін Є. П., Долгова О. Є. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.

18. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах: Для ст. шк. віку. Київ : Рад. шк., 1991. 208 с.

19. Коломієць О. М., Сільченко А. М. Застосування програми GeoGebra у навчанні учнів геометрії. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 219-221.

20. Красницький М. П. Просторова уява та уявлення особистості й асоціативне мислення. Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : матер. міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 11-13 травня 2017 р. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 59-61.

21. Лов'янова І.В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: Теоретичний аспект: Монографія/ І. В. Лов'янова Черкаси: видавець Чабаненко Ю.А.; 2014. 354 с.

22. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 304 с.

23. Межейнікова Л. С. Про визначення активізація пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 30. Вид-во ДонНУ, 2008, с. 248.

24. Мізенко Г. Задачі з геометрії для розвитку математичних здібностей дітей. Математика. 2001. № 1. С. 23-27.

25. Національний мультипредметний тест ЗНО онлайн 2022 року [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zno.osvita.ua/multitest/507/

26. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

27. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

28. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

29. Орач Б. Побудова перерізів многогранників. Математика. 2004. 27-28. С. 18-22.

30. Пазушко Ж. І. Розвиваюча геометрія в початковій школі. 2005, 167 с.

31. Прокопенко Н. С., Щекань Н. П. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. Математика. Київ: Навчальна книга, 2003. 302 с.

32. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10–11 кл. серед. шк. 6-те вид. Київ : Освіта, 2001. 128 с.

33. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: 13.00.02 «Теорія і методика навчання математики». Київ, 2007. 23 с.

34. Роганін О. М. Геометрія. 11 клас: Плани-конспекти уроків. Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2003. 256 с.

35. Семенухіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв’язування задач стереометрії. Інформаційні технології і засоби навчання. № 6. 2014. С. 124-133.

36. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

37. Слєпкань З. І. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика : навч. посіб. для студ. спец. «Педагогіка і методика середньої освіти. Математика» за ред. З. І. Слєпкань. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. 292 с.

38. Слєпкань З. І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи. Математика в школі. 2003. № 9. С. 3-4.

39. Танабаш Л. Ю. Креативність, або творчі здібності. Математика в школах України. 2004. № 11. С. 8-10

40. Тесленко І. Ф. Питання методики геометрії (в IX-XI класах): посібник для вчителів І.Ф. Тесленко. Київ : Рад. шк., 1962. 151 с.

41. Терех О. Я. Навчальні задачі на уроках геометрії. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.-метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 88-90.

42. Чернега Н. С. Розвиток логічного мислення учнів. Наукові записки. 2002. № 45. С.158-160.

43. Чеберніна Г. М., Сліпович Н. М. Математика в житті людини. Збірка задач., 2011.

44. Швець В.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. Математика в школі 2009. № 4. с. 17-24.

45. Швець В. О. Теорія та практика спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. В. О. Швець, А. В. Прус. Житомир : Видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2007. 156 с.

46. Ярославська Г. М. Многогранники? Еврика! Урок-гра в 11 класі. Математика в школах України. 2005. № 30. С. 45-90.

ДОДАТКИ

Додаток А

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», рівень стандарту

Таблиця 1

Геометрія, 10 клас
(51 год. І семестр — 32 год, 2 год на тиждень,
ІІ семестр — 19 год, 1 год на тиждень, резерв – 7 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 17 годин	
Учень/учениця: **називає** основні поняття стереометрії; **розрізняє** означувані та не означувані поняття, аксіоми та теореми; **формулює** аксіоми стереометрії та наслідки з них; **застосовує** аксіоми стереометрії та наслідки з них до розв’язання нескладних задач; **класифікує** за певними ознаками взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі за кількістю їх спільних точок; **встановлює** паралельність прямих, прямої та площини, двох площин; **з’ясовує**, чи є дві прямі мимобіжними; **зображає** фігури у просторі; **застосовує** відношення паралельності між прямими і площинами у просторі до опису відношень між об’єктами навколишнього світу.	Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них. Взаємне розміщення прямих у просторі. Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин.
Тема 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 17 годин	
Учень/учениця: **встановлює та обґрунтовує** перпендикулярність прямих, прямої та площини, двох площин; **формулює** означення кута між прямими, прямою та площиною, площинами; теорему про три перпендикуляри; **застосовує** відношення між прямими і площинами у просторі, відстані і кути у просторі до опису об’єктів навколишнього світу; **розв’язує** задачі на знаходження відстаней та кутів в просторі, зокрема практичного місту.	Перпендикулярність прямих. Перпендикулярність прямої і площини. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин. Двогранний кут. Вимірювання відстаней у просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між площинами. Вимірювання кутів у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами.
Тема 3. **КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ 10 годин**	
Учень/учениця: **користується** аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі; **усвідомлює** важливість векторно-координатного методу в математиці;	Прямокутні координати в просторі. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками. Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для

виконує операції над векторами; **застосовує** вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; **знаходить** відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин; **використовує** координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів;	обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин

Таблиця 2

Геометрія, 11 клас
(51 год. I семестр — 32 год, 2 год на тиждень,
II семестр — 19 год, 1 год на тиждень, Резерв – 14 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ 14 годин	
Учень/учениця: **розпізнає** основні види многогранників та їх елементи; **зображує** основні види многогранників та їх елементи; **має уявлення** про перерізи многогранника площиною; **формулює** означення вказаних у змісті многогранників; **записує** формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди **обчислює** величини основних елементів многогранників; **застосовує** вивчені формули і властивості до розв’язування задач, зокрема прикладного змісту.	Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 12 годин	
Учень/учениця: **обчислює** величини основних елементів тіл обертання; **застосовує** властивості тіл обертання до розв’язування задач; **розпізнає** види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об’єктах навколишнього світу.	Циліндр, конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі. Куля і сфера. Переріз кулі площиною.

Тема 3. ОБ’ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ 11 годин	
Учень/учениця: **записує** формули для обчислення об’ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, площі сфери; **має уявлення** про об’єм тіла та його основні властивості; **розв’язує** задачі на обчислення об’ємів і площ поверхонь геометричних тіл, зокрема прикладного змісту.	Поняття про об’єм тіла. Основні властивості об’ємів. Об’єми призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі. Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса. Площа сфери.

Орієнтовний тематичний план вивчення предмету «Геометрія», профільний рівень.

Таблиця 3

Геометрія, 10 клас
(105 год, 3 год на тиждень, Резерв – 18 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ 15 годин	
Учень/учениця **наводить приклади** точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур; **пояснює що таке** плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною; **формулює** основні поняття, аксіоми, наслідки з них; **виокремлює серед многогранників**: піраміду та призму; **розрізняє** означувані та неозначувані поняття; аксіома та наслідок; видимі і невидимі елементи многогранника; **ілюструє** текстовий зміст аксіоми, теореми, задачі за допомогою рисунка; **зображає** піраміди та призми, перерізи пірамід та прямокутних паралелепіпедів; **пояснює та записує:** належність точок та прямих площині; позначення многогранників, їх елементів та поверхні; скорочений запис умови задачі; **характеризує** форму просторової геометричної фігури; сліди площини перерізу; розміщення двох точок двох площин, якими визначається лінія їх перетину;	Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки. Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники. Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та прямокутного паралелепіпеду методом слідів.

розв’язує вправи, що передбачають: використання аксіом стереометрії та наслідків з них; доведення та дослідження висновків задач, виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах.	
Тема 2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 24 години	
Учень/учениця **демонструє на прикладах** моделей стереометричних фігур (об’єктах навколишнього середовища): розміщення паралельних прямих (відрізків); мимобіжних прямих; паралельність прямої (відрізка) до площини; паралельність двох площин; **формулює** означення, ознаки, теореми з тем, зазначених у змісті навчального матеріалу; **розрізняє** ситуації можливості точок і прямих належати одній площині; на зображених рисунках, моделях: площини граней многокутників; паралельні та мимобіжні прямі; проекціювання відрізків у певному відношенні; **пояснює та записує** ознаки: мимобіжних прямих; паралельності прямої та площини; паралельності площин; **класифікує** взаємне розміщення: двох прямих; прямої та площини; двох площин; зображення просторових фігур на площині за видом і формою; **зображає** плоскі та просторові фігури на площині; паралельне проекціювання многокутника на площину; переріз січної площини і многогранника; **обґрунтовує** методи слідів і проекцій під час побудови перерізів січної площини і многогранника; **ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; **характеризує** властивості паралельних площин та паралельного проеціювання; **розв’язує вправи, що передбачають:** встановлення взаємного розміщення двох прямих; прямої та площини; двох площин; застосування ознак паралельності прямих, прямої і площини, площин в доведеннях практичних задач; застосування методу слідів та властивостей проекціювання; виконання побудови перерізів многогранників; моделювання життєвих ситуацій паралельності та проекціювання в задачах практичного та прикладного змісту.	Взаємне розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються; паралельні прямі; мимобіжні прямі. Ознака мимобіжних прямих.. Взаємне розміщення прямої та площини у просторі: пряма і площина, що перетинаються; паралельні пряма і площина. Ознака паралельності прямої та площини. Взаємне розміщення двох площин у просторі: площини, що перетинаються, паралельні площини. Ознака паралельності площин. Властивості паралельних площин. Паралельне проекціювання, його властивості. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів.
Тема 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ 26 годин	

Учень/учениця **демонструє на прикладах** моделей стереометричних фігур (об’єктах навколишнього середовища) перпендикулярність прямих у просторі, прямої та площини, двох площин; **формулює** означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу; **розрізняє** перпендикуляр і похилу, перпендикуляр і проекцію похилої; кут між двома прямими простору, кут між прямою і площиною, кут між площинами; **пояснює та записує** зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими. **пояснює** що таке двогранний кут, лінійний кут двогранного кута. **класифікує** взаємне розміщення: двох прямих простору; прямої та площини; двох площин; **зображає** рисунком перетин двох прямих простору. прямої і площини під прямим кутом; перетин двох (трьох) площин під прямим кутом; кути у просторі: між двома прямими простору, прямою і площиною, двома площинами; ортогональне проеціювання многокутника на площину; **знаходить на рисунку та зображає** відрізок, яким позначається (визначається) відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; між паралельними площинами; між мимобіжними прямими; **аналізує та досліджує** перпендикулярність деякої прямої до похилої чи її проекції за теоремою про три перпендикуляри; **обґрунтовує** перпендикулярність прямих, прямої і площини, площин; **ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; **характеризує** властивості перпендикулярних прямих простору на прикладах; прямокутні трикутники, кути яких утворені трьома попарно перпендикулярними прямими (площинами); форму ортогональної проекції многокутника; кут між многокутником та його проекцією; **розв’язує вправи, що передбачають:** встановлення взаємного розміщення двох прямих простору; прямої та	Перпендикулярність прямих у просторі. Перпендикулярність прямої та площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин. Ознака перпендикулярності площин. Зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин. Кути у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Відстані у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя, від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими. Ортогональне проекціювання. Зображення кола. Площа ортогональної проекції многокутника. Практичне застосування властивостей паралельності та перпендикулярності прямих і площин.

площини; двох площин; застосування ознак перпендикулярності прямої і площини; двох площин; властивостей перпендикулярності прямих прямих простору; перпендикуляра і похилих; виконання побудови ортогональної проекції многокутника; знаходження лінійних вимірів досліджуваних фігур; площ многокутника та його ортогональної проекції, кута між многокутником та його ортогональною проекцією; моделювання життєвих ситуацій застосування перпендикулярності прямих і площин; ортогонального проекціювання в задачах навчально-практичного та прикладного змісту.	
Тема 4. КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ 22 години	
Учень/учениця **наводить приклади** моделей симетрії відносно точки та прямої із об'єктів навколишнього середовища; **формулює** означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу; **розрізняє** векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори; **пояснює та записує** зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими. **класифікує** взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі; **зображає на** рисунку правила додавання векторів (трикутника та паралелограма); суму/різницю векторів, добуток вектора на число; **знаходить на рисунку та зображає** напрямлений відрізок як вектор, що дорівнює сумі, різниці векторів, добутку вектора на число; симетрію відносно точки; симетрію відносно площини; **аналізує та досліджує** координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення; **обґрунтовує** перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток	Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками. Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні. Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач. Найпростіші геометричні місця точок простору. Рівняння площини, сфери.

векторів; **ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка; **характеризує** найпростіші геометричні місця точок простору; координатний і векторний методи розв'язування задач; **застосовує** формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач; **розв'язує вправи, що передбачають:** знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів; доведення виду чотирикутника/трикутника за відомими координатами точок та відомими властивостями їх різновидів; знаходження розв'язків задач координатним і векторним методами; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту.	Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини, паралельне перенесення.

Таблиця 4

Геометрія, 11 клас
(105 год, 3 год на тиждень, резерв – 28 годин)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ 24 години	
Учень/учениця **наводить приклади:** геометричних фігур; многогранників і їх видів; **пояснює що таке:** многранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; **формулює** означення основних понять та властивостей для многогранників, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; **класифікує многогранники** за характеристиками їх елементів: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і	Многогранні кути. Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди,

розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; **розрізняє** елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; видимі і невидимі елементи призми/піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; **зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проекціювання: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданого многогранника – висота, твірна, апофема; перерізи площинами (осьові, діагональні, паралельні до площини основи тощо); **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю призми та площиною основи, між апофемою піраміди та площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи, кут між бічною гранню та площиною основи); розміщення проекції вершини піраміди в площині основи (відома рівність усіх бічних ребер, рівність усіх кутів, утворених бічними ребрами/гранями та площиною основи); **обґрунтовує** розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв’язування прямокутного трикутника; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; **вимірює та обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до	зрізаної піраміди. Правильні многогранники.

розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.	
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 21 година	
Учень/учениця **наводить приклади:** тіл обертання; **пояснює що таке:** циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс; **формулює** означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною; **класифікує** геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс; **розрізняє** елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; видимі і невидимі елементи; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса; **зображає** рисунком, відповідно до властивостей ортогонального проекціювання: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданих фігур – висота, твірна, радіус, хорда; площину, дотичну до сфери та переріз кулі площиною; осьові перерізи циліндра та конуса; комбінації просторових фігур; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; перетин кулі площиною; **аналізує та досліджує** кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур; **обґрунтовує** властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв’язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного	Тіло обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі; перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину. Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Частини кулі: сегмент, сектор, пояс. Площина, дотична до сфери. Комбінації геометричних тіл.

кола; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; елементи комбінації просторових фігур; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.	
Тема 3. ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ 16 годин	
Учень/учениця **пояснює що таке:** об'єм многогранника; об'єм паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди; **формулює** основні властивості об'ємів многогранника; **формулює і доводить** теореми про: об'єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; об'єм призми; об'єм піраміди; **зображує** рисунком, відповідно до властивостей паралельного проеціювання: призму, паралелепіпед, піраміду, зрізану піраміду; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об'єму; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об'єму прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди; **аналізує та досліджує** лінійні виміри та величини для обчислення об'єму; **обґрунтовує** розміщення основи висоти піраміди, призми, паралелепіпеда; покрокові висновки під час розв'язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; **вимірює та обчислює** об'єм прямокутного і похилого паралелепіпеда; призми; піраміди; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення об'єму прямокутного і похилого	Об'єм многогранника та властивості об'єму. Об'єм многогранників: паралелепіпеда, призми, піраміди, зрізаної піраміди.

паралелепіпеда; призми; піраміди.	
Тема 4. ОБ’ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ 16 годин	
Учень/учениця **наводить приклади:** тіл обертання; **пояснює що таке:** об’єм циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єм кулі та її частин; площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса; площа сфери; **формулює і доводить** теореми про об’єм: циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єм кулі та її частин; **розрізняє** розгортки поверхні циліндра і конуса; **зображує** рисунком, відповідно до властивостей паралельного проеціювання: циліндра, конус, зрізаний конус; кулю та її частини; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об’єму; **пояснює та записує** відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об’єму циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єму кулі та її частин; **вимірює та обчислює** площі бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; **аналізує та досліджує** лінійні виміри та величини для обчислення об’єму; **обґрунтовує** розміщення основи висоти циліндра, конуса, зрізаного конуса; центр кулі; покрокові висновки під час розв’язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження; **характеризує** покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв’язання; **вимірює та обчислює** об’єм та площі поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса; об’єм кулі та її частин; площу сфери; **розв’язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення об’єму циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі; площ бічної та повної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, площу сфери. знаходження площ поверхонь комбінації просторових фігур.	Об’єм тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі та її частин. Площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса. Площа сфери.

Додаток Б

Задача 1.

Конусоподібну палатку висотою 3,5 м і діаметром основи 4 м вкрито тканиною (рис.1). Скільки квадратних метрів пішло на палатку?

Рис. 1

Розв'язання

Бічна поверхня конуса обчислюється за формулою $S = \pi R l = \frac{\pi D l}{2}$.

Твірну l=MN знайдемо із MON△

$l = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{12{,}25 + 4} = \sqrt{16{,}25} \approx$ 4,03 (м).

Обчислимо бічну поверхню: S=3,14*4*4,03≈25,3 (м^2)

Відповідь: ≈25,3м^2.

Задача 2.

Циліндрична труба (рис. 10) діаметром 65 см має висоту 18 м. Скільки жерсті треба для її виготовлення, якщо на заклепку іде 10% матеріалу?

Рис. 2

Розв'язання.

Бічна поверхня циліндра дорівнює: S= *ПDh,*

$S=3,14*0,65*18\approx 36,74$ (м^2).

На заклепу витрачається 10% матеріалу тобто S_1= 3?674 (м2). Тоді на виготовлення труби необхідно така кількість жерсті:

$S_0=S+S_1\approx 36,74+3,674\approx 40,4$ (м^2)

Відповідь: $\approx$ 40,4 м^2.

Задача 3.

Пастила мала форму куба із стороною 4 дм. Її нарізали однаковими прямокутними призмами із сторонами 10х4х2 см (рис. 4). Скільки таких брусочків утворилось?

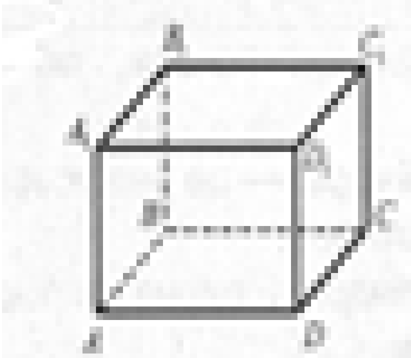

Рис. 3

Задача 4.

Упаковка для какао, виготовлена у формі прямокутного паралелепіпеда має розміри 11х7х5 см. Визначити площу її бічної поверхні (рис. 5)

Рис. 4

Задача 5.

До Дня народження Варвари замовили торт, який складається з двох циліндричних бісквітних коржів (рис. 6). Перший – R_1 = 15 см, H_1 = 10 см; другий - R_2 = 9 см, H_2 = 8 см. Обчислити об’єм бісквіту.

Рис. 5

Задача 6.

На пекарському турнірі студенти виготовили крокембуш у формі конуса об'єм якого 144 см^3, а довжина кола основи $8\sqrt{\pi}$ см (рис. 7). Знайдіть висоту крокембуша.

Рис. 6

Задача 7.

Обчислити діаметр основи баночки згущеного молока, якщо площа її бічної поверхні – $72\,\pi$ см^2, а об'єм – $144\,\pi$ см^3 (рис. 8)

Рис. 7

Задача 8.

Шматок ковбаси, що має форму циліндра, висота якого 12 см, а діаметр основи 5 см, розрізали на 25 порцій (рис. 9) Який об'єм однієї порції?

Рис. 8

Задача 9.

Цинкове відро має форму зрізаного конуса з діаметрами основ 38 см і 22 см та твірною 27 см (рис. 10). Скільки матеріалів пішло на його виготовлення, якщо на шви та відходи йде 12%?

Рис. 9

Задача 10.

Студент купив в магазині гарну чашку у формі півкулі і хоче дізнатися, який її вміст (рис. 11). Він виміряв діаметр чашки і висоту, які дорівнюють відповідно 15 см і 7,5 см. Знайти об’єм чашки. Які виміри зайві?

Рис. 10

Задача 11.

Сирну паску виготовили в формі півкулі, у якої діаметр основи 18 см. Знайти площу її бічної поверхні (рис. 12).

Рис. 11

Задача 12.

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого 54 см^2 (рис. 13). Знайти об’єм циліндра, якщо його висота – 9 см.

Рис. 12

Задача 13.

Просіювач борошна – бурат має циліндричне сито, діаметр його основи дорівнює 4м, площа повної поверхні 37,68 м^2. Під час роботи сито пошкодилось (рис. 14). Вирахувати площу пошкодженої частини сита (це площа бічної поверхні циліндра).

Рис. 13

Задача 14.

Просіювач борошна – бурат має призматичне сито, площа його основи дорівнює 20 м^2, площа повної поверхні 730 м^2. Під час роботи воно пошкодилось (рис. 15). Вирахувати площу пошкодженої частини сита за умови, що призма правильна шестикутна, а пошкодилось дві грані.

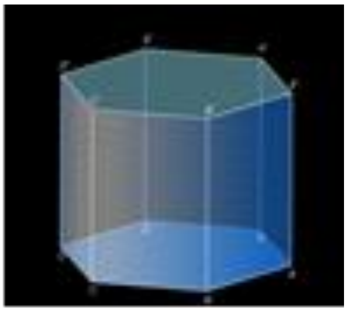

Рис. 14