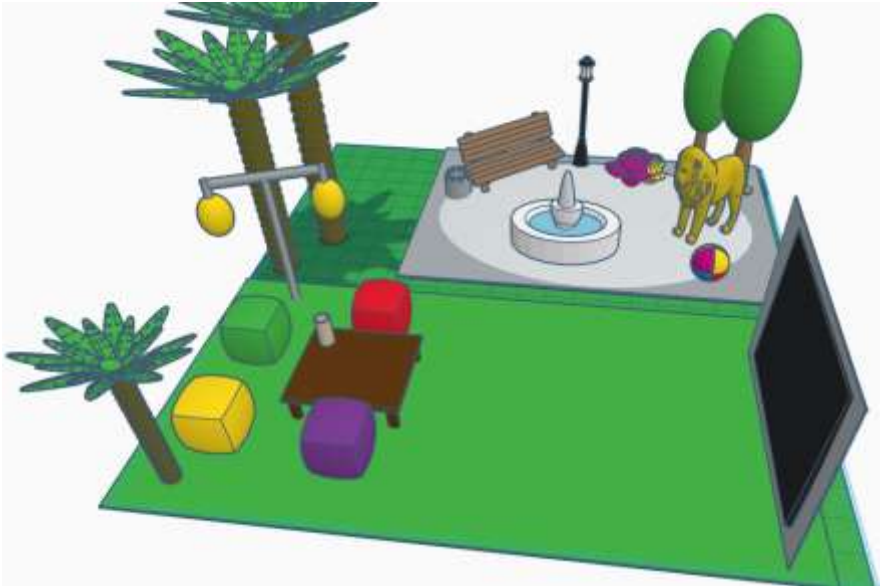


Т. Г. Крамаренко, О. С. Пилипенко

# МАТЕМАТИКА В STEMі



Кривий Пір, 2023

Т. Г. Крамаренко, О. С. Пилипенко

# **МАТЕМАТИКА в STEMі**

*Навчально-методичний посібник*

Кривий Ріг  
2023

УДК [373.5.016:51]:004(075.8)

К 78

*Схвалено рішенням Вченої ради Криворізького державного педагогічного університету (протокол №13 від 29 червня 2023 року)*

Рецензенти: **Власенко К. В.**, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри математики, Національний університет «Києво-Могилянська Академія»

**Горбенко С. Л.**, кандидат психологічних наук, доцент, начальник відділу STEM-освіти ДНУ «Інститут модернізації змісту освіти»

**Семеріков С. О.**, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри інформатики та прикладної математики, Криворізький державний педагогічний університет

**Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Математика в STEMi:** навч.-метод. посіб. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2023. 274 с.

У посібнику подаються методичні рекомендації щодо використання у навчанні математики STEM-підходів, дібрано зміст навчального матеріалу, комп'ютерно-орієнтовані методи і форми навчання. Значну увагу приділено впровадженню проєктних технологій навчання, реалізації міжпредметних зв'язків у навчанні математики.

Посібник призначений для студентів закладів вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Математика, Інформатика), вчителів математики закладів середньої освіти, викладачів закладів фахової передвищої освіти та професійних навчально-виховних закладів.

Представлені у посібнику матеріали, зокрема другого та третього розділів, доступні учням профільної школи, студентам закладів фахової передвищої освіти, широкому колу педагогічної громадськості, що цікавиться досвідом STEM-навчання.

© Т. Г. Крамаренко, О.С. Пилипенко, 2023

## ЗМІСТ

<b>ЗМІСТ .....</b>	<b>3</b>
<b>ПЕРЕДМОВА .....</b>	<b>6</b>
<b>РОЗДІЛ 1. STEM-НАВЧАННЯ: ВІД ТЕОРІЇ ДО ПРАКТИКИ</b>	
<b>ВПРОВАДЖЕННЯ .....</b>	<b>8</b>
1.1. Що розуміємо під сучасним трендом «STEM-освіта» .....	8
1.2. Нормативне забезпечення STEM-освіти в Україні.....	9
1.3. Дослідження науковцями проблем STEM-освіти.....	11
1.4. Методична система STEM-навчання .....	13
1.4.1. Цілі STEM-навчання .....	13
1.4.2. Зміст STEM-навчання .....	15
1.4.3. Засоби STEM-навчання.....	16
1.4.4. Методи STEM-навчання .....	17
1.4.5. Форми STEM-навчання .....	18
1.4.6. Навчальні проєкти як основа впровадження STEM- навчання .....	22
1.4.7. Психолого-педагогічні умови впровадження STEM- освіти .....	26
1.5. Підвищення професійної майстерності педагогів .....	27
<b>РОЗДІЛ 2. ЗАСОБИ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У STEM- НАВЧАННІ .....</b>	<b>32</b>
2.1. Система динамічної математики GeoGebra.....	32
2.1.1. Модуль Геометрія. Основні інструменти, приклади побудов. ....	32
2.1.2. Модуль Графіки. Дослідження функцій, побудова графіків .....	42
2.1.3. Модуль 3D Геометрія GeoGebra .....	49
2.2. Програмно-методичний комплекс GRAN .....	54
2.3. Використання блогів у дослідженнях учнів та у професійній діяльності вчителя математики та інформатики.....	58
<b>РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ STEM- КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ .....</b>	<b>63</b>
3.1. Мистецтво орнаменту .....	63
3.2. Геометрія паркетів.....	73
3.3. Геометрія писанки .....	77
3.4. Симетрія навколо нас. Фрактали.....	82
3.5. «Золотий переріз» та «золота пропорція» у мистецтві, побуті та архітектурі .....	84
3.6. Геометричні форми в архітектурі.....	86
3.7. Кругоманія.....	87

3.8. Конструктивна геометрія .....	88
3.8.1. Клас 7-8-9. Приклади завдань. ....	88
3.8.2 Клас 10-11. Приклади побудов до задач. ....	91
3.9. Вимірювання на місцевості з додатком Multi Measures.....	95
3.9.1. Клас 7. Ознаки рівності трикутників, рівнобедрений трикутник. ....	96
3.9.2. Клас 8 -9. Подібність трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику. Теорема косинусів та синусів. ....	101
3.10. Економна економіка .....	108
3.10.1. Алгоритм розв'язування прикладних задач, задач практичного змісту.....	108
3.10.2. Нерівність трикутника; Властивість точок, розташованих на серединному перпендикулярі відрізка; бісектриси кута .....	111
3.10.3. Система динамічної математики (7-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів).....	112
3.10.4. Дослідження функції з використанням похідної (10-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів) .....	113
3.10.5. Нерівність Коші; Властивості квадратичної функції (9- 11 клас, 1-2 курси фахових коледжів) .....	121
3.10.6. Стереометричні задачі практичного змісту (10-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів).....	124
3.11. Похідна у задачах фізики та економіки .....	127
3.12. Малюємо графіками .....	131
3.13. Параболи і параболоїди навколо нас .....	137
3.14. Визначені інтеграли (математика + фізика і механіка).....	139
3.15. Визначені інтеграли (математика + економіка). ....	146
3.16. Побудова графіків тригонометричних функцій.....	151
3.17. Фінансова математика.....	157
3.18. Перерізи многогранників .....	160
3.19. Голограма і многогранники .....	166
3.20. Доповнена реальність і STEM: AR-додаток GeoGebra .....	168
3.21. Програма TinkerCAD у навчанні стереометрії.....	175
3.22. У світі фракталів .....	182
3.23. Математика та робототехніка .....	185
3.24. Описова статистика .....	202
3.25. STEM-урок з математичної статистики.....	209
3.26. Лінійне програмування і задачі оптимізації.....	212
3.27. Пошук функціональних залежностей .....	220
3.28. Метод Монте-Карло .....	228
3.28.1. Підкидання двох кубиків, визначення суми чисел на верхніх	

гранях .....	228
3.28.2. «Лінгвісти» проводять експеримент з написанням слів..	232
3.28.3. Задача Бюффона. Оцінка числа $\pi$ .....	233
3.28.4. Оцінка $\pi$ через генерацію точок у квадраті.....	235
3.28.5. Обчислення визначених інтегралів методом Монте-Карло.....	237
<b>РОЗДІЛ 4. ПРОГРАМА ВИБІРКОВОЇ ДИСЦИПЛІНИ, ДІАГНОСТИКА STEM-КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ.....</b>	<b>240</b>
4.1. Програма вибіркової дисципліни «Математика в STEM-навчанні».....	240
4.2. Діагностика STEM-компетентностей здобувачів освіти.....	246
4.2.1. Анкета 1. Визначення стану впровадження STEM-освіти у навчальний процес .....	246
4.2.2. Анкета 2. Визначення обізнаності здобувачів освіти з поняттям та змістом STEM-освіти .....	252
4.2.3. Тестування учнів 10-11 класів та студентів 1-2 курсів фахових коледжів для визначення рівня сформованості STEM-компетентностей у процесі навчання математики ....	255
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ / РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>260</b>
Нормативні документи про освіту, зокрема STEM-освіту .....	260
Наукові праці: дисертації, монографії, статті .....	261
Підручники, навчальні посібники з математики, навчально-методичні посібники з методики навчання математики.....	267
Програмні засоби, настанови користувачам та інші ресурси з проблем використання цифрових технологій .....	269
<b>ПРО АВТОРІВ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ПОСІБНИКА .....</b>	<b>273</b>

## ПЕРЕДМОВА

Сучасний ринок праці потребує конкурентоспроможних фахівців, які володіють STEM-компетентностями. Акронім STEM вживається для позначення популярного напрямку в освіті, що охоплює природничі науки (Science), технології (Technology), інженерію (Engineering) та математику (Mathematics). STEM-навчання є напрямом інноваційного розвитку природничо-математичних дисциплін, який дає змогу здобувачам освіти бачити цілісну картину світу. Основною ідеєю такого підходу є прикладне, міждисциплінарне і трансдисциплінарне навчання. Використовуючи інформаційно-комунікаційні технології та математику, можна забезпечити інтеграцію різних навчальних предметів в єдину систему.

У першому розділі «STEM-навчання: від теорії до практики впровадження» подано відомості про структуру методичної системи STEM-навчання, сутність STEM-компетентностей. Однією з важливих умов успішного впровадження STEM-підходів у навчанні є підготовка фахівців з питань STEM-освіти, підвищення кваліфікації працюючих учителів, у тому числі учителів математики.

Застосування STEM-підходів у навчанні математики ґрунтується на ідеї комплексного використання інноваційних педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій. Забезпечити формування високого рівня STEM-компетентностей здобувачів освіти можна через впровадження методу навчальних проєктів, навчання у співпраці, навчання як дослідження, технології успіху. У STEM-навчанні можуть бути успішно використані імерсивні технології, зокрема технології доповненої та віртуальної реальності.

У другому розділі посібника подано відомості про окремі засоби цифрових технологій, які можуть використовуватися у STEM-навчанні математики. Зокрема, представлено системи динамічної математики GRAN та GeoGebra, подано основні інструменти, приклади побудов; використання модулів GeoGebra «Геометрія», «3D-Геометрія», «Графічний калькулятор». Подано відомості про створення і використання блогів у дослідженнях учнів та у професійній діяльності вчителя математики та інформатики.

У третьому розділі навчально-методичного посібника «Математика в STEMі» подаються методичні рекомендації щодо використання у навчанні математики STEM-підходів, дібрано зміст навчального матеріалу, комп'ютерно-орієнтовані методи і форми навчання. Значну увагу приділено впровадженню проєктних технологій навчання, реалізації міжпредметних зв'язків у навчанні математики. Представлено методичні розробки STEM-заходів – приклади проєктів та інтегрованих уроків. До кожного з запропонованих заходів, які можна зреалізувати при вивченні

зазначеної теми з математики, подано орієнтовну назву проєкту, зазначено вікову категорію, клас навчання в закладі середньої освіти чи курс навчання у закладі фахової передвищої освіти, окреслено перелік навчальних предметів, які можуть інтегруватися. Для кожного заходу описано мету застосування та обґрунтовано актуальність впровадження, запропоновано доцільне обладнання. У ході реалізації заходу здобувачі освіти працюють в групах чи індивідуально. У кожному заході акцентується увага на можливому прогнозованому практичному результаті; подано опис алгоритму дій та рекомендації щодо ходу впровадження.

Впровадження STEM-проєктів сприятиме розвитку у здобувачів освіти навичок співпраці; умінь розв'язувати складні проблеми (complex problem solving skills); дослідницьких навичок; критичного та креативного мислення.

У четвертому розділі посібника подано програму вибіркової дисципліни «Математика в STEM-навчанні» для підготовки майбутніх учителів математики на рівні бакалаврату, анкети для діагностування рівня STEM-компетентностей здобувачів освіти. Застосування STEM-підходів у навчанні математики здобувачів освіти сприятиме розвитку в них STEM-компетентностей, в тому числі критичного мислення, дослідницьких навичок, вміння працювати у команді.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є математика в STEM-навчанні, сучасні технології навчання математики, включаючи комп'ютерно-орієнтовані засоби, методи і форми навчання, прикладну спрямованість навчання. Навчальна дисципліна доповнює професійну математичну і методичну підготовку учителя розглядом основних аспектів теорії та практики STEM-навчання. В опануванні навчальної дисципліни опора здійснюється на компетентності здобувачів освіти, набуті при вивченні методики навчання математики, інформаційно-комунікаційних технологій в освіті, елементарної математики та педагогіки.

Посібник призначений для студентів закладів вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Математика, Інформатика), вчителів математики закладів середньої освіти, викладачів закладів фахової передвищої освіти та професійних навчально-виховних закладів.

Представлені у посібнику матеріали, зокрема другого та третього розділів, доступні учням профільної школи, студентам закладів фахової передвищої освіти, широкому колу педагогічної громадськості, що цікавиться досвідом STEM-навчання.



## РОЗДІЛ 1. STEM-НАВЧАННЯ: ВІД ТЕОРІЇ ДО ПРАКТИКИ ВПРОВАДЖЕННЯ

### 1.1. Що розуміємо під сучасним трендом «STEM-освіта»

Сьогодення ознаменоване швидким економічним та інформаційно-технологічним зростанням, що вимагає підготовки вчителя, який користується інноваційними технологіями, новітніми методиками, практичним досвідом особистості. Сучасний тренд «STEM-освіта» – концепція інтегрованого навчання учнів за чотирма профільними дисциплінами в міждисциплінарному та прикладному контексті – є надзвичайно актуальним феноменом щодо отримання молоддю конкурентних переваг у різних сферах людської діяльності. Важливо розуміти, на які професії буде запит у майбутньому. Саме STEM-освіта сприяє підготовці компетентних фахівців для високотехнологічних виробництв і забезпечує високий науковий потенціал держави.

Акронім STEM вживається для позначення популярного напрямку в освіті, що охоплює природничі науки (Science), технології (Technology), інженерію (Engineering) та математику (Mathematics). STEM визначає характерні риси відповідної дидактики, сутність якої виявляється у поєднанні міждисциплінарних практик орієнтованих підходів до вивчення природничо-математичних дисциплін. Водночас, у STEM активно включається сукупність творчих, мистецьких дисциплін, що об'єднані загальним терміном Arts (позначення відповідного підходу – STEM and Arts). Актуальними напрямками STEM and Arts є промисловий дизайн, архітектура, індустриальна естетика.

У європейському науковому дискурсі наголошується на важливості всіх дисциплін [1; 50], використанні міждисциплінарних підходів STEAM (літера A – All - всі) і поєднанні природничо-наукових з іншими навчальними дисциплінами, які вивчаються у школі. STEM-освіта – це категорія, яка визначає відповідний педагогічний процес (технологію) формування і розвитку розумово-пізнавальних і творчих якостей молоді, рівень яких визначає конкурентну спроможність на сучасному ринку праці: здатність і готовність до розв'язання комплексних задач (проблем), критичного мислення, творчості, когнітивної гнучкості, співпраці, управління, здійснення інноваційної діяльності.

Аналізуючи стан сучасного ринку праці й враховуючи його динаміку, можемо говорити про те, що в основі професій майбутнього будуть технології, які пов'язані зі STEM-освітою. STEM-освіта суттєво впливає на траєкторію вибору професії, визначає її прогностичність, перспективність, сприяє розвитку і саморозвитку креативності, творчості, нестандартності. Вирішення цих завдань можливе за умови удосконалення системи освіти, і пов'язане з мотивацією діяльності, процесами навчання і виховання в цілому, головна роль у яких відводиться розвитку творчої

особистості. STEM-орієнтований підхід до навчання є актуальним напрямом модернізації та інноваційного розвитку природничо-математичного й гуманітарного профілів освіти, а STEM-грамотність – міждисциплінарною областю дослідження, яка поєднує науку, технології, інженерію та математику.

Основні ключові компетентності концепції «Нової української школи», а саме: спілкування державною та іноземними мовами, математична грамотність, компетентності в природничих науках і технологіях, інформаційно-цифрова грамотність, вміння навчатися впродовж життя, соціальні й громадянські компетентності, підприємливість, загальнокультурна, екологічна грамотність і здорове життя, гармонійно входять в систему STEM-освіти, створюючи основу для успішної самореалізації особистості і як фахівця, і як громадянина [5].

Запорукою запровадження STEM-освіти можуть стати креативні педагози, які здатні своїми знаннями та вміннями зробити привабливими STEM-програми і методи навчання, спроможні генерувати ідеї, застосовувати фундаментальні знання для вирішення складних завдань у майбутній професійній діяльності своїх вихованців.

Для просування сучасних підходів в галузі STEM-освіти в Україні провідну роль відіграє Інститут модернізації змісту освіти. Ініціативу Інституту підтримують провідні компанії, що працюють на території України. Відділ STEM-освіти ДНУ «Інститут модернізації змісту освіти» спільно з багатьма іншими партнерами провели кілька сесій Web-STEM-школи: «Web-STEM-школа-2017», зимова «Web-STEM-школа – 2018», літня «Web-STEM-школа – 2018» та інші. Web-STEM-школа – це унікальний простір нового формату, де збираються фахівці, які хочуть розвиватися та обмінятися досвідом, де шукають нові ідеї і знання, прагнуть об'єднати зусилля щодо освітніх ініціатив і обговорити проблеми запровадження проектно-дослідної діяльності та STEM-освіти в цілому [62; 63; 155; 181].

## **1.2. Нормативне забезпечення STEM-освіти в Україні**

Нормативно-правове забезпечення STEM-освіти в Україні базується на Законах України «Про освіту», «Про дошкільну освіту», «Про повну загальну середню освіту», «Про позашкільну освіту», «Про професійну (професійно-технічну) освіту», «Про фахову передвищу освіту», «Про вищу освіту», «Про наукову та науково-технічну діяльність», «Про інноваційну діяльність», «Про культуру» та ін. [2; 3; 5; 8; 9; 12; 13; 14; 15; 16]. Наразі одним із найважливіших нормативних документів, які окреслюють перспективи розвитку STEM-освіти в Україні, є Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти на період до 2029 року «Нова українська школа», затверджена розпорядженням Кабінету Міністрів України від 14 грудня 2016 року № 988-р. Набула чинності Концепція розвитку природничо-математичної освіти до

2027 року (STEM-освіти), затвердженої розпорядженням Кабінету Міністрів України від 05 серпня 2020 року № 960-р. [4].

У Концепції [4] терміни вживаються у такому значенні:

*природничо-математична освіта (STEM-освіта)* - цілісна система природничої і математичної освітніх галузей, метою якої є розвиток особистості через формування компетентностей, природничо-наукової картини світу, світоглядних позицій і життєвих цінностей з використанням трансдисциплінарного підходу до навчання, що базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань для розв'язання практичних проблем для подальшого використання цих знань і вмінь у професійній діяльності;

*STEM-лабораторія* - навчальний кабінет або приміщення закладу освіти, оснащене сучасними засобами навчання та обладнанням для залучення здобувачів освіти до навчально-дослідницької, дослідницько-експериментальної, конструкторської, винахідницької та пошукової діяльності відповідно до стандартів освіти, освітніх та навчальних програм з використанням проектних технологій в освітньому процесі;

*STEM-центр* - структурний підрозділ закладу освіти, утворений з метою забезпечення природничо-математичної освіти (STEM-освіти), організації та взаємодії заінтересованих осіб.

*Напрями діяльності STEM-центрів* відповідають напрямам природничо-математичної освіти (STEM-освіти), зокрема програмування, штучний інтелект, мехатроніка, біоніка, адитивні технології, числове програмне керування, комп'ютерне моделювання, фрезерні та лазерні технології, кліматичні, астрономічні, біологічні спостереження та опрацювання їх результатів, робототехніка, інженерія, ракетомоделювання, аерокосмічні технології, радіоелектроніка, авто-, авіа-, судномоделювання, тривимірне моделювання, хіміко-біологічні та агроекологічні технології, конструювання, веб-дизайн, основи відеотехнологій, цифрове мистецтво.

Як наголошується у прийнятій Концепції розвитку, STEM-освіта може реалізуватися через усі види освіти – формальну, неформальну, інформальну. Крім того, значну увагу приділено розвитку закладів спеціалізованої освіти наукового спрямування та підготовці фахівців для STEM-освіти. Саме через забезпечення наступності змісту освіти та запровадження курсової (адаптаційної, ознайомчої) підготовки вчителів відповідних спеціальностей. STEM-освіта спрямовується, зокрема, на формування у майбутніх учителів 4К-навичок XXI століття (критичне мислення, креативність, комунікація, командна робота). Набуття таких навичок сприяє залучення студентів до розв'язування предметних і міжпредметних проблемних і дослідницьких завдань у рамках як індивідуальної, так і різних форм групової роботи, у процесі проектної діяльності.

Очікуваними результатами має стати трансфер знань, який забезпечує впровадження досягнень наукової сфери в освітній процес. Методологіч-

ною основою формування змісту природничо-математичної освіти (STEM-освіти) є трансдисциплінарний підхід [4].

### 1.3. Дослідження науковцями проблем STEM-освіти.

Аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури свідчить про те, що концептуальні підходи та практичні напрями реалізації STEM-освіти досліджують багатьох науковців, методистів, зокрема Н. Балик [17; 43; 45; 44], О. Барна [18; 46; 154], Ю. Ботузова [47; 48; 49], Н. Валько [50], І. Василяшко [5; 6; 7; 40; 51; 52; 62; 63], Д. Васильєва [53; 117; 155], С. Горбенко [5; 40; 42; 52], О. Гриб'юк [57; 58], І. Закарлюка [61], О. Кузьменко [69], Ф. Левченко [72; 71] Н. Морзе [32; 23; 165; 167], І. Овчар [75], В. Олексюк [20], О. Патракеєва [5; 6; 7; 40; 62; 63], В. Пікалова [87; 88; 170], В. Ракута [90; 91], Л. Рождественська [178], О. Семеніхіна [37; 93; 94], С. Семеріков [19]; Є. Смирнова-Трибульська [23; 180], Н. Сороко [98], О. Стрижак [99], О. Струтинська [39], Н. Хараджян [103; 102] та ін.

Про необхідність посилення практичної спрямованості навчання математики зазначають К. В. Власенко [17; 35; 41], І. В. Лов'янова [17; 41; 73], Л. Панченко [78] та ін. У роботах дослідників підкреслено, що майбутнє за технологіями, а майбутнє технологій – це креативні педагогіки нового формату, які здатні своїми знаннями, вмінням зробити привабливими STEM-програми і методи навчання, завдяки яким можна розвивати креативних особистостей, спроможних генерувати ідеї, застосовувати фундаментальні знання і навички під час вирішення складних завдань у майбутній професійній діяльності.

Проблеми підготовки, підвищення кваліфікації учителів математики в контексті використання інноваційних технологій навчання, розвитку навчальних компетентностей здобувачів освіти, творчих здібностей особистості знайшли відображення в дослідженнях К. Власенко, І. Лов'янова, Т. Армаш, І. Сітак, О. Чумак [17; 41], Д. Бобилев, О. Віхрова [21], І. Акуленко, З. Сердюк, Н. Тарасенкова [76], О. Матяш [74], О. Чашечнікова [104], С. Сисоєва [96] та ін. Проблеми використання ІКТ у навчанні математики, підготовці учителів висвітлювали такі науковці як М. Жалдак [60; 105; 121; 123; 122], Ю. Горошко [105], Є. Вінниченко [55; 54; 105], Н. Морзе [165; 167], М. Мар'єнко [29; 32], І. Мінтій [31], С. Раков [89], Ю. Рамський [92], С. Семеріков [19; 95], Ю. Триус [101], М. Шишкіна [29; 32] та ін.

Автори посібника Т. Крамаренко і О. Пилипенко висвітлювали STEM-підходи у навчанні математики у публікаціях [26; 25; 27; 34; 64; 65; 66; 67; 68; 80; 81; 82; 83; 84; 85; 86; 125; 161; 162].

По суті, STEM-підхід у навчанні стохастики розглядається в наукових працях М. І. Жалдака та Г. О. Михаліна [123; 122], О. Семеніхіної та

М. Друшляк [93; 94], Т. П. Кобильника та ін. Автори пропонують застосувати вільне програмне забезпечення Gran1, GeoGebra, R для підготовки учителів математики та інформатики, а також подальшого використання його у навчанні школярів.

Доцільними є приклади, які пропонує Д. В. Васильєва [155] учителям математики: можна запропонувати учням вдома переглянути відеофільм про ланцюги живлення, екологічну піраміду, а в класі проаналізувати набуті самостійно знання і розв'язати класичну екологічну задачу засобами математики.

В. Пікалова в дисертаційній роботі [88, с. 119] обґрунтовує *комплекс педагогічних умов використання GeoGebra як інструмента реалізації STEM-освіти* в процесі підготовки майбутніх учителів математики.

Ю. Завалевський, С. Горбенко, О. Лозова [42] досліджують оптимальні *психолого-педагогічні умови впровадження STEM-освіти*.

Ми вивчали педагогічний досвід О. В. Євтушенко, Я. Черненко та ін. щодо запровадження елементів STEM-навчання математики в закладах професійної освіти. Автори подають приклади інтегрованих занять, під час яких пропонують практично застосувати математичні знання для розв'язування професійно спрямованих завдань.

Наприклад, Л. В. Рождественська [178] пропонує впроваджувати STEM-проект, в якому учні можуть моделювати кімнату з підручних засобів чи будувати 3D-макет за допомогою геометричних фігур в просторі (площин, призм, пірамід, сфер, конусів, циліндрів тощо) з використанням системи динамічної математики GeoGebra.

На сьогодні методика застосування STEM-підходів в умовах класно-урочної системи навчання є недостатньою розробленою і усталеною, тому тема дослідження і матеріали даного посібника є актуальними. Доцільна ґрунтовна підготовка учителів до впровадження STEM-освіти.

У даному посібнику висвітлено переваги запровадження STEM-освіти, методичних особливостей навчання математики з використанням STEM-підходів, науково-методичних рекомендацій вчителям математики в середній школі та викладачам математики у фахових коледжах.

Предметом нашого дослідження стала методика впровадження елементів STEM-навчання математики учнів у закладах середньої освіти та студентів 1-2 курсів фахових коледжів. Для цього проаналізували стан дослідженості проблеми STEM-навчання у психолого-педагогічній, методичній та навчальній літературі; визначили психолого-педагогічні та методичні основи запровадження STEM-освіти; розробили систему заходів запровадження STEM-навчання у вивченні математики; науково-методичні рекомендації вчителям математики. Оскільки основною ідеєю STEM-освіти є навчання за профільними напрямками у міждисциплінарному та прикладному спрямуванні, то це сприятиме підготовці компетентних фахівців для високотехнологічних виробництв і забезпечуватиме високий науковий потенціал суспільства.

#### 1.4. Методична система STEM-навчання

Структура методичної системи навчання визначається трьома основними питаннями: «навіщо навчати?» (цілі), «чого навчати?» (зміст) і «як навчати?» (методи, засоби, форми навчання). Згідно з системним підходом на рівні методики навчання, всі компоненти навчального процесу – *цілі, зміст, методи і прийоми, засоби, організаційні форми навчання* – утворюють єдине ціле із визначеними внутрішніми зв'язками. Сукупність компонентів МСН (методична система навчання), що відповідають на питання «як навчати?», розглядають як певну підсистему – *технології навчання* у вузькому смислі. Структуру з підсистемою «технологія навчання» можна подати як триєдине ціле, що містить *цільовий, змістовий, технологічний* компоненти МСН. Визначальними є цільовий та змістовий компоненти. На думку Н. В. Морзе, модель МСН, враховуючи темпи розвитку засобів інформатизації, слід доповнити включенням очікуваних результатів навчання; технології добору змісту, методів, форм і засобів навчання; технології встановлення зв'язків між елементами методичної системи (рис. 1.1).

##### 1.4.1. Цілі STEM-навчання

Здійснення переходу до компетентнісної моделі навчання та впровадження нових методичних підходів передбачає принципово нове *цільопокладання у педагогічному процесі*, зміщення акцентів у навчальній діяльності з вузькопредметних на загальнодидактичні.

У Концепції [4] зазначається, що впровадження природничо-математичної освіти (STEM-освіти) здійснюється з урахуванням таких *принципів* як особистісний підхід, спрямований на врахування вікових, індивідуальних особливостей здобувачів освіти, їх інтересів та здібностей,



Рис. 1.1. Модель методичної системи навчання за Н.В. Морзе

особливих освітніх потреб; наступність – формування необхідних компетентностей на всіх складниках та рівнях освіти; використання технологій розвивального та проблемного навчання; продуктивна мотивація здобувачів освіти до провадження науково-дослідницької та проєктної діяльності, винахідництва; патріотизм і громадянська спрямованість; спонукання до формування та розвиток “гнучких навичок” у здобувачів освіти (навичок презентації, роботи в групі, комунікації). Одним з найважливіших принципів, що дозволяють забезпечити розвиваюче навчання, є профільна та рівнева диференціація, індивідуалізація навчання.

Важливим для учителя/викладача є підготовка до визначення та оцінювання *результатів навчання через ключові та предметні компетентності*. STEM-навчання реалізується шляхом набуття відповідних *STEM-компетентностей*, які значною мірою пов’язані з ключовими (надпредметними) компетентностями. Під «компетентністю» розуміємо сукупність особистісних якостей (ціннісно-смыслових орієнтацій, знань, умінь, навичок, здібностей), обумовлених досвідом його діяльності в певній соціально і особистіснозначущій сфері. Як *STEM-компетентності* можна розглядати здатність до інноваційної діяльності, що включає готовність до розв’язання комплексних задач, критичне мислення, креативність, уміння працювати в команді, організаційні здібності, емоційний інтелект, оцінювання і прийняття рішень, здатність до ефективної взаємодії, уміння домовлятися, когнітивна гнучкість.

Залучення учнів у STEM може впливати на розвиток наступних *навичок*: співробітництво (для досягнення інноваційних результатів і розв’язування складних завдань, в команді повинні працювати особистості з різним науковим і технічним бекграундом); комунікативність (навчання в області STEM надає широкі можливості для спілкування “один на один” і “один-до-багатьох”); творчість (з використанням креативних вмінь можна покращити науковий і технологічний проєкт, показати його нерозкриті можливості; критичне мислення (здатність осмислити, вдумливо й обґрунтовано проаналізувати і застосовувати знання); ефективне застосування ІКТ.

Важливо, щоб методологія STEM-навчання сприяла переходу від передавання системи знань від учителя/викладача до здобувача освіти для самостійного конструювання ним особистої системи знань у навчальному процесі на основі дослідницьких підходів у навчанні. Створюючи ситуацію успіху, вчитель/викладач має відігравати роль менеджера у процесі пошуку здобувачами освіти нових знань. На стадії навчання в основній школі запровадження STEM-підходів має закріпити стійку цікавість учнів до вивчення природничо-математичних наук; у старшій профільній школі – сприяти вибору STEM-професії, STEM-профілю вищої освіти; у фахових коледжах – ствердитися у вибраній професії. STEM-орієнтований підхід до навчання сприятиме популяризації інженерно-технологічних професій серед молоді.

#### 1.4.2. Зміст STEM-навчання

Впровадження *наскрізного STEM-навчання* потребує оновлення структури та змісту навчальних предметів, спецкурсів; компетентнісно-орієнтованих форм і методів навчання.

Значна увага має бути приділена проблемі постійного оновлення *змісту освіти* з урахуванням досягнень науки, розвитку технологій та вимог ринку праці. У Концепції відзначається істотна роль математики в інтегративному підході реалізації природничо-математичної освіти (STEM-освіти), послідовне, ґрунтовне, якісне її викладання [4]. У навчанні звичною була послідовність: спочатку теорія, а потім практика. STEM-освіта користується зворотнім шляхом «від практики до теорії». Спочатку придумують та досліджують, а вже потім, у процесі цієї діяльності, опановують теорію, отримують нові знання та узагальнюють їх. Цей підхід досить часто використовується викладачами математики.

При проведенні STEM-занять доцільно дотримуватися наступних *рекомендацій*: ставити практичну задачу, що тісно пов'язана зі світом, що оточує здобувача освіти; кожне заняття має в собі містити етап конструювання, що стимулює учасників експериментувати та вирішувати практичні задачі; комунікація – учасники під час заняття можуть спілкуватись про здобуті знання, ділитись враженнями та отриманим досвідом один з одним; вдосконалення – кожне заняття є продовженням попереднього, кожне завдання закінчується постановкою нового завдання, яке використовує набуті компетентності здобувачів освіти.

Якщо застосовується для дослідження програмне забезпечення, то важливо, щоб здобувачі освіти могли мислено увияти весь логічний ланцюг творчого процесу його застосування на практиці: *явище* → *розробка моделі* → *розв'язування засобами програмного забезпечення* → *інтерпретація отриманих результатів* → *застосування на практиці*.

Науковці [42] сформулювали найважливіші вимоги до змісту навчання учнів, які успішно реалізуються в педагогічних підходах і методах STEM-освіти:

- міждисциплінарний підхід до вивчення змісту, що відповідає всебічній допитливості учнів, їхнім творчим можливостям, світоглядним задачам (STEM-предмети можуть поєднуватися з соціально-гуманітарними та мистецькими галузями знань);
- інтеграція тем і проблем для вивчення в межах одного або декількох предметів через встановлення внутрішніх зв'язків змісту;
- високий рівень проблемності навчального матеріалу, що побудований на задачах відкритого типу;
- об'єднання в змістові модулі, широкий (глобальний) характер тем і проблем для вивчення, які є стрижнем для формування різноманітного навчального матеріалу, мають вікову й часову незалежність;
- гнучкість, яка забезпечує можливість насичення та трансформації змісту.



#### 1.4.3. Засоби STEM-навчання

Використання *засобів навчання* залежить від цілей і завдань уроку, змісту і логіки подачі навчального матеріалу, майстерності вчителя.

*Засоби навчання* ділять на три групи: засоби зорової (візуальної) наочності; б) засоби слухової наочності; в) наочно-слухові [101].

До традиційних засобів навчання відносять наочні та технічні засоби навчання, підручники й посібники, дидактичні матеріали, довідкову та іншу навчально-методичну предметну літературу. Схвальні відгуки педагогів отримали посібники [105; 121; 125], які демонструють шляхи впровадження в навчальний процес програмного забезпечення, інтеграцію навчальних дисциплін та посилення міжпредметних зв'язків.

Серед *комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання математики* розрізняють апаратне забезпечення та програмне забезпечення (операційні системи; текстові й графічні редактори; табличні процесори; експертні системи; педагогічні програмні засоби; проблемно-орієнтовані програми; електронні підручники, електронні бібліотеки, методичні та консультаційні каталоги, навчальні телекомунікаційні проєкти та ін.). Серед програмних засобів комп'ютерної математики виділяють системи для чисельних розрахунків, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних обчислень, спеціалізовані програми і пакети, системи комп'ютерної алгебри і геометрії, універсальні математичні системи [101].

Різноманітні гаджети, зокрема відповідні додатки для мобільних телефонів, мають стати дієвими інструментами завдяки STEM-освіті для засвоєння математики і набуття навичок розв'язування математичних задач через математичні практикуми з завданнями дослідницького характеру; демонстрацію експериментів з їх аналізом, що систематизує отримані знання; участь у навчальних проєктах. До *засобів STEM-навчання* належать прилади для 3-Д моделювання, верстати та обладнання для шиття, програмовані електронні модулі, фото-відео студія, мехатронні системи/станції з відповідними витратними матеріалами, комплекти для моделювання/набори для конструювання, тренувальні поля для навчальних занять з робототехніки, мультимедійне обладнання та пристосування для STEM-лабораторій, набори для дослідів та ін. [5].

З найбільш *поширених засобів навчання* для здійснення STEM-навчання є конструктори, робото-технічні системи, моделі, вимірювальні комплекси та датчики, лабораторні прилади, електронні пристрої (3Dпринтери, комп'ютери, цифрові проєктори, проєкційні екрани різноманітних моделей, оверхед-проєктори, копії-дошки, інтерактивні дошки, документкамери, проєкційні столики тощо). Їх використання надає учням змогу здійснювати проєктну та дослідницьку діяльність, реалізувати завдання моделювання різноманітних процесів і явищ та усвідомлено формувати якісно нові трансдисциплінарні знання [5].

Як один з важливих Engineering-інструментів пропонується викори-

стання *системи динамічної математики Gran* [127]. Ми обґрунтували доцільність використання у навчанні математики *системи динамічної математики GeoGebra*, актуальність застосування Е-інструментів [125]. Використання зазначених засобів допоможе забезпечити чіткість графіки, візуалізацію досліджуваних математичних об'єктів, виразів, ілюстрацію методів побудови. Через розробку «інтерактивних» динамічних креслень, моделювання математичних об'єктів та спостереження за їх динамічними змінами, можна формувати у тих, хто навчається, вміння виділяти характерні ознаки, встановлювати закономірності, висувати гіпотези, узагальнювати. Наприклад, під час виконання STEM- проєкту можуть виникати моменти, коли доцільно дібрати певне фото, завантажити його на полотно побудови, виділити графіки, дібрати формули для опису яких можна засобами GeoGebra.

#### 1.4.4. Методи STEM-навчання

Результативність навчання з використанням ІКТ багато в чому визначається тим, якими *методами навчання* оперує вчитель у вирішенні дидактичних завдань (табл. 1.1.). Метод навчання – упорядкований спосіб взаємозалежної діяльності вчителя і учнів, спрямований на вирішення завдань освіти, виховання і розвитку у процесі навчання.

Таблиця 1.1

#### Методи навчання (за джерелом здобуття знань)

<i>Традиційні</i>	<i>Комп'ютерно-орієнтовані</i>
<i>Словесні (вербальні) методи навчання</i>	
Розповідь, пояснення, бесіда, навчальна дискусія, лекція, робота з підручником, довідковою, науково-популярною та навчальною літературою	Робота з електронними підручниками, довідковим матеріалом комп'ютерних програм; опрацювання відомостей, що отримуються через глобальну мережу Інтернет
<i>Наочні методи навчання</i>	
Ілюстрування статистичної наочності, плакатів, карт; демонстрування приладів, дослідів, установок, фільмів; самостійне спостереження	Робота з навчаючими та навчально-контролюючими програмами Відеометод
<i>Практичні методи навчання</i>	
Виконання вправ, лабораторних робіт; практикумів; розв'язування доцільно дібраних задач; графічні роботи	Дослідницька робота у комп'ютерних лабораторіях; обчислювальні експерименти; телекомунікаційні проєкти

Дослідницька навчальна діяльність учня / студента стимулює у нього розвиток STEM-компетентностей, тому вчитель /викладач математики має не просто подати певний об'єм знань, а готувати учасників навчального процесу самостійно оволодівати знаннями, на основі міцних базових знань

розвивати мислення, інтуїцію, уяву. STEM-навчання повинне готувати до «відкриття», розвивати паростки винахідливості.

Під *пошуково-дослідницькою діяльністю* учнів / студентів розглядаємо таку навчально-пізнавальну діяльність, яка спрямована на самостійне набуття суб'єктивно нових математичних знань на основі аналізу наявних даних, висунування гіпотез та їх обґрунтування. У ході дослідницької діяльності удосконалюються дослідницькі вміння учасників навчального процесу. Під такими розумітимемо вміння прогнозувати кінцевий результат роботи, знаходити певні закономірності, досліджувати їх на основі висунутих гіпотез, перевіряти гіпотези, шукати шляхи обґрунтування чи спростування, використовувати для дослідження програмні засоби.

Метою дослідницької діяльності є пробудження активних дослідницьких інтересів. Особливу увагу слід звернути на *створення проблемної ситуації, стимулювання здогадки, висунування гіпотези*. Активність та глибока зацікавленість творчим процесом сприятимуть розширенню знань тих, хто навчається, їх інтересів та форм пізнання, заохочуватимуть до пошуку нових фактів, нових відомостей. Вчитель стимулює самостійність роздумів і суджень учасників навчального процесу, заздалегідь готуючи систему запитань.

#### 1.4.5. *Форми STEM-навчання*

*Форма організації навчання* – це встановлений зразок організації навчальної діяльності, що передбачає характер зв'язків між викладачем і учнями, групування учнів для занять, характер їхньої діяльності, місце занять та їх проведення. Позашкільну STEM-освіту доцільно здійснювати через різноманітні гуртки, конкурси, заходи, олімпіади, хакатони тощо, які мають за мету заохотити учнів та поглибити їх знання.

Залучення здобувачів освіти до дослідницько-експериментальної, конструкторської діяльності потребує впровадження нових форм та методів організації освітнього процесу таких як STEM-проекти, хакатони, квести, STEM-екскурсії, музеї наук тощо [40].

*STEM-квест* [40] – перспективна педагогічна технологія, що містить набір проблемних завдань з елементами рольової гри. Це одночасно мініпроект, інтелектуальне змагання, ділова гра, групова робота. У ході проведення квесту учасники використовують та розвивають цілу низку знань та навичок. Методика проведення STEM-квесту допомагає навчити розробляти план або проєкт на основі заданих умов, знаходити, аналізувати і використовувати матеріали з різних джерел інформації, проводити наукові дослідження, робити самостійні висновки, обґрунтовувати і відстоювати свою точку зору, працювати індивідуально і в команді.

*Освітній хакатон* [40] – це форма проведення навчального заняття/заходу, під час якого команди розв'язують певну тематичну, соціаль-

ну проблему в обмежений проміжок часу. У ході хакатону команди працюють над створенням, проєктуванням чи виробленням плану/рішення й в кінці представляють свій результат перед журі. Як зазначають автори статті [40], під час хакатону можна розробити стратегію впровадження онлайн-курсів дистанційного навчання, новітню методологію проф-орієнтації, будь-яку корисну ідею, яка має освітню цінність.

Використання *навчальних STEM-проєктів* має забезпечувати сукупність дослідницьких, пошукових, проблемних, творчих підходів. Залучення до дослідництва та винахідництва, проведення тематичних тижнів, наукових «пікніків», навчальних практик, реалізація міждисциплінарних проєктів, участь у спеціалізованих гуртках, конкурсах, фестивалях також можуть бути прикладами актуальних форм STEM-навчання.

*Метод проєктів* – це не алгоритм, що складається із чітких етапів, а модель творчого мислення й прийняття рішень. Основна теза сучасного розуміння методу проєктів: «Все, що я пізнаю, я знаю, для чого це мені треба, де і як я можу ці знання застосувати».

*STEM-проєкт* – це спосіб досягнення цілі шляхом детального розгляду проблеми, що завершується реальним практичним результатом. Педагог здійснює супровід проєкту і спонукає до пошукової діяльності здобувачів освіти, допомагає у визначенні мети, завдань проєкту, орієнтовних методів/приймів дослідницької діяльності та пошуку інформації для розв’язання окремих навчально-пізнавальних завдань. Учні самостійно або разом з вчителем обирають форму презентації, захисту отриманих результатів. Оцінювання проєктної діяльності здійснюється індивідуально, за довільною системою [40].

У табл. 1.2 наведено перелік основних традиційних і комп’ютерно-орієнтованих форм організації навчання [101].

Таблиця 1.2

### Форми організації навчання

<i>Традиційні</i>	<i>Комп’ютерно-орієнтовані</i>
Урок, лекція, практичні заняття, семінари, лабораторні роботи, навчальні дискусії, екскурсії, самостійна позакласна робота, індивідуальна або групова науково-дослідна робота, поточні та підсумкові форми контролю.	Комп’ютерно-орієнтовані урок, лекція, семінари, практичні і лабораторні заняття, контрольні роботи тощо; науково-дослідна робота; екзамени, тестування; дистанційні форми: - трансляція; чат (текстовий, графічний); - відео- і телеконференції, - інтерактивні форми проведення лекцій, семінарів, практичних й лабораторних занять, навчальних дискусій та ін.

Особливою формою наскрізного STEM-навчання є *інтегровані уроки/заняття*, які спрямовані на встановлення міжпредметних зв’язків, що

сприяють формуванню в учнів цілісного, системного світогляду, актуалізації особистісного ставлення до питань, що розглядаються на уроці. *Інтегровані заняття* можуть проводитись як через об'єднання схожої тематики кількох навчальних предметів, так і через формування інтегрованих курсів або окремих спецкурсів шляхом об'єднання навчальних програм таких курсів/предметів [5]. Проведення інтегрованих уроків математики з іншими навчальними дисциплінами – це один із шляхів до цілісного сприйняття учнями навколишнього світу, розвитку у них загальнонаукових знань, умінь та навичок. Завдяки проведенню інтегрованих уроків математики можна забезпечувати комплексне вивчення навчальної дисципліни, різнобічний та повний розгляд об'єктів, розв'язування перспективних завдань. Отримання інтегрованих знань є одним із засобів мотивації навчання. Важливо при цьому створювати творчу атмосферу в учнівському колективі. Збільшуючи інформативну наповнюваність інтегрованого уроку, активізуючи мисленнєву діяльність учнів, разом з тим слід запобігати їх перевантаженню.

*STEM-урок* має задовольняти такі *дидактичні вимоги*: а) чітке визначення дидактичної, виховної, розвивальної мети уроку, включаючи мету застосування того чи іншого педагогічного програмного засобу, та завдань уроку; б) правильний добір навчального матеріалу, зокрема й такого, який найкраще буде поданий за допомогою обраного програмного засобу; в) вибір оптимальних методичних прийомів і засобів навчання; г) поєднання на уроці колективної, групової, індивідуальної роботи; д) реалізація на уроці принципів і умов успішного навчання.

Під час виробничої практики майбутніх учителів математики побували на *STEM* -уроці за темою «Правильні многогранники» у Криворізькій гімназії №91 (вчитель Н. Федотова). Учні презентували проєкт про використання правильних многогранників у архітектурі, побуті тощо.

При вивченні тем «Многогранники», «Тіла обертання» доцільно пропонувати учням створювати з паперу чи інших матеріалів, наприклад, макети меблів у кімнаті, виготовляти макети будинків, певних локацій на природі. Адже мейкерство є одним із STEM-підходів у навчанні. На STEM-уроці математики у Криворізькій Вальдорфській школі учитель математики Тетяна Грицишина запропонувала учням вирізати, користуючись шаблонами, розгортки, а потім склеїти правильні многогранники. А вже за виготовленими многогранниками учні встановлювали зв'язок між кількістю ребер, граней та вершин. Взагалі навчання за вальдорфською педагогікою базується на навчанні як дослідженні, використанні суб'єктного досвіду учня, впровадженні проєктних технологій, STEM-підходів тощо. Зокрема, у навчанні математики.

У структурі *лабораторної роботи*, що передбачає використання програмного забезпечення, можна виділити три основні блоки. Перший

з них є мотиваційним, що включає вступне слово вчителя/викладача, актуалізацію знань та умінь учасників навчального процесу, постановку завдання, мотивацію навчальної діяльності. У ввідній частині доцільно обговорити з учасниками навчального процесу мету заняття і дослідницької роботи та план їхньої реалізації. Другий блок є практичною частиною заняття, що передбачає роботу з програмним забезпеченням і виконання різних типів завдань: розв'язування задач наближеними методами, експериментальна перевірка істинності тверджень, проведення досліджень з метою висунення гіпотези. В ході практичної частини передбачити виконання творчих завдань прикладного характеру.

Обговорення результатів дослідження, узагальнення та систематизацію способів діяльності, яких набули учасники навчального процесу в ході роботи з програмним засобом, прийомів та методів розв'язування завдань, краще здійснювати в кінці або ж по ходу заняття, якщо передбачено виконання кількох дослідницьких вправ. Питання до учасників навчального процесу, подані в письмовій чи в усній формі, мають спонукати їх до здійснення різних розумових дій. Важливо, щоб перед початком обговорення вони записали власний висновок (звіт), який після обговорення може дещо змінитися, уточнитися. Фіксація думки дослідника надзвичайно важлива для розвитку його пізнавальних якостей.

Заключний блок лабораторної STEM-роботи може включати як обґрунтування висунутих гіпотез, розгляд різних способів розв'язування задачі, так і фіксацію основних рекомендацій для обґрунтування. Показником системності засвоєння знань є вміння учнів / студентів розповісти про спостережені процеси, засвоєні теореми тощо. В той же час, зробити висновки або заповнити таблицю іноді доцільно запропонувати їм як домашнє завдання, якщо на занятті бракує часу. Відстрочка виконання завдання (аргументації) може бути прийомом розвитку особистості тих, хто навчається, якщо інкубація (визрівання ідей) ще не відбулася. Створення для себе посібник у таблицях посилить мотивацію учіння.

Описуючи графіки за допомогою відповідних інструментів, зокрема GeoGebra, можна найкраще дібрати потрібні функції. *Математичне моделювання* з використанням систем динамічної математики сприятиме глибшому розумінню тем, що вивчаються. Перед поясненням нового матеріалу з теми «Побудова графіків функцій  $y = kf(x)$  та  $y = f(kx)$ » можна зробити заготовки графіків функцій  $y = k\sqrt{x}$  та  $y = \sqrt{kx}$  в програмному засобі GeoGebra. Тоді, використовуючи інструмент «Бігунок», замість значення  $k$  будуть підставлені певні числа. Аналізуючи перетворення графіків при  $0 < k < 1$  та  $k > 1$ , можна здійснити узагальнення для побудови графіків за перетвореннями  $f(kx)$  та  $kf(x)$ .

#### 1.4.6. Навчальні проекти як основа впровадження STEM-навчання.

Проектні технології навчання висвітлювалися в навчально-методичних посібниках [59; 62; 63; 77; 116; 118; 125; 165; 167; 180].

До початку роботи над проектом керівнику доцільно разом з учасниками переглянути буклет про те, що основними складовими проектної діяльності є п'ять «П»: постановка проблеми; проектування / планування діяльності; пошук відомостей, варіантів розв'язування проблеми; спрямованість на отримання певного продукту діяльності; презентація / представлення результату (рис. 1.2).



Рис. 1.2. Приклад буклету про метод навчальних проектів.

*Дослідницькі проекти* – тип проектів, які потребують добре обміркованої структури, визначеної мети, актуальності предмета дослідження для всіх учасників, соціальної значущості, продуманості методів, у тому числі експериментальних методів опрацювання результатів. *Практико-орієнтовані проекти* – результат діяльності учасників чітко визначено з самого початку, він орієнтований на соціальні інтереси учасників (документ, програма, рекомендації, проект закону, словник тощо).

*Метод проектів* прагматично спрямований на *результат*, який можна отримати при розв'язуванні тієї чи іншої практичної чи теоретично значимої проблеми. Цей *результат* (*продукт*) можна побачити, усвідомити, застосувати у реальній практичній діяльності, а значить результат повинен бути матеріальним, тобто відповідно оформленим – відеофільм, альбом, боржурнал, комп'ютерна газета, альманах тощо. *Формами продуктів проектної діяльності можуть бути*: web-сайт, аналіз даних со-

ціологічного опитування, порівняльний аналіз, атлас, карта, навчальний посібник, відеофільм, виставка, газета, журнал, довідник, костюм, модель, колекція, гра, мультимедійний продукт, музичний або художній твір, постановка, свято, екскурсія, похід.

Для досягнення такого результату треба навчити учнів самостійно мислити, відкривати та розв'язувати проблеми, залучаючи знання з інших областей, уміння прогнозувати результати і можливі наслідки різних варіантів розв'язання, уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки.

*Види презентацій проєктів:* ділова гра; демонстрація продукту, виконаного на основі інформаційних технологій, сценка-діалог літературних або історичних персонажів; гра із залом, наукова конференція, доповідь, прес-конференція; подорож, екскурсія, реклама; рольова гра; вистава; змагання, телепередача тощо.

Учителю / викладачеві потрібно ґрунтовно продумувати способи інтеграції теми, виокремивши певні тематичні дні чи блоки навчальної програми, спонукати здобувачів освіти до обрання тем, які мають практичний зміст. Відштовхнутися можна від прикладів, яких зараз є чимало у мережі Інтернет, а у подальшому їх удосконалити, наприклад, розширюючи напрямки дослідження. Для прикладу, при розробці *проєкту за ключовим словом* «Вода», учні-математики можуть визначати втрати води, якщо не відремонтований кран, а також кошти, які необхідні на повторну її очистку.

Вивчаючи тему «*Відсотки*» у 5-6 класах, важливо акцентувати увагу учнів на тому, як знання математики допоможе їм у повсякденному житті. Для цього пропонуємо школярам взяти участь у проєкті «Казкові відсотки» та з'ясувати, як Червона шапочка з однойменної казки зможе краще допомогти бабусі поратися по господарству? Наприклад, де вигідніше купувати речі при відповідних скидках у магазинах, як скомпонувати продукти під час приготування обідів та сніданків, раціональніше розподілити власні кишенькові гроші чи бабусину пенсію тощо? Впроваджуючи зазначений навчальний проєкт, не лише можемо досягати поставлених навчальних цілей, але й здійснювати економічне, моральне виховання наших учнів, розвивати у них позитивні якості особистості.

Упродовж вивчення змістової лінії «*Функції*» радимо учителям залучати учнів до виконання *проєкту «Жива картина»*. Спочатку варто зобразити малюнок на аркуші, далі подати його в системі динамічної математики за допомогою побудови графіків. При цьому до координат окремих точок, формул, якими задано функції, доцільно вводити параметри, щоб у подальшому, змінюючи їх, отримувати динамічні графіки.

Вивчаючи тему «*Геометричні перетворення на площині*», радимо учителям математики реалізувати STEAM- проєкт «Писанка». Спочатку необхідно намалювати «писанку» на папері кольоровими олівцями, а тоді створити її засобами GeoGebra, будуючи графіки функцій, рівнянь



та різноманітних геометричних фігур. Під час побудови користуються симетрією відносно точки і прямої, поворотом навколо точки, паралельним перенесенням. За допомогою інструмента «Бігунок» та інших можна створити динамічні комп'ютерні моделі, що зацікавлює до предмету, підвищує розумову активність та розвиває творче мислення. Під час побудови такої «писанки» у молоді будуть задіяні новаторські здібності, винахідництво, розвиватиметься логічне мислення. В системах динамічної математики є можливість побудови геометричних фігур симетричних відносно координатних осей; побудови фігур, що мають симетрію обертання, паралельне перенесення об'єктів, застосування гомотетії, динамічна побудова графічних об'єктів та створення анімацій, що значно спростить розуміння цих тем і ще більше візуалізує STEM- проєкт.

*Найдетальніше у даному посібнику описано навчальні проєкти в пунктах 3.1, 3.27.*

Головним документом, який має продумати і підготувати керівник проєкту, є план вивчення певної теми чи план навчального проєкту. Подаємо за QR-кодом [шаблон вивчення теми](#), рекомендований в посібниках [165], [167].



Учитель / викладач повинен обдумати навчальну тему та можливий сценарій її вивчення з врахуванням того, що здобувачі освіти працюватимуть над проєктом. Доцільно розглянути різні варіанти творчої назви проєкту. Далі коротко описати навчальний проєкт, вказавши вік учасників проєкту, назву теми з програми, термін виконання, основні види діяльності здобувачів освіти, можливі їх ролі, які передбачаються у сценарії проєкту та продукти діяльності в проєкті. Якщо впровадження навчального проєкту відбувається в умовах формальної освіти, варто вказати основні навчальні предмети. Необхідно *визначити основні вимоги навчальних програм та Державних стандартів* щодо компетентностей здобувачів освіти до обраної навчальної теми, сформулювати пріоритетні, головні навчальні цілі, яких здобувачі освіти мають досягти, та які вчитель/викладач має і може оцінити наприкінці вивчення цієї теми. Якщо тема стосується декількох навчальних предметів, необхідно виписати основні вимоги до кожного з них. Для кращого розуміння цілей, які мають бути досягнені при виконанні проєкту, створюють *основні питання*:

- *ключове* – широке, об'єднує запитання, яке може встановити зв'язки між декількома навчальними предметами чи темами:

- *тематичні* – провідні запитання для навчальних проєктів, що спрямовують дослідження;

- *змістові* – фактичні запитання з теми.

Керівник проєкту має скласти *план оцінювання*, включаючи методи

та інструменти оцінювання навчальних потреб здобувачів освіти, надати їм відповідні форми для оцінювання, для самоспрямування у навчанні.

*На початку проєкту* скористатися методами оцінювання, які допомагають визначити попередні знання, уміння, навички та ставлення, можливі неправильні уявлення здобувачів освіти щодо теми. *Впродовж роботи над проєктом* необхідно відслідковувати прогрес здобувачів освіти у навчанні, перевіряти розуміння теми, а також заохотити їх до пізнання особливостей власного мислення, самокерування у навчанні та співпраці.

*Наприкінці роботи над проєктом* застосувати методи оцінювання, які допомагають визначити рівень розуміння вивченого, навички здобувачів освіти, які вони отримали в результаті роботи над проєктом; а також заохотити їх до подальшого пізнання особливостей власного мислення, визначити подальші навчальні потреби та спонукати їх до подальшого навчання. Інструментарій оцінювання може включати різноманітні графічні схеми та карти знань, нотатки у щоденнику, контрольні списки, списки запитань для самоконтролю, опитувальники, форми оцінювання, тести та контрольні роботи. Також доцільно описати, які виконані роботи здобувачів освіти будуть оцінюватися: газети, твори, інші письмові роботи, презентації, виступи тощо. При цьому зазначити, які інструменти оцінювання будуть використовуватися в кожному випадку. Передбачити, як може здійснюватися взаємооцінювання, самооцінювання, оцінювання вчителем, батьками.

У розділі *«Діяльність здобувачів освіти та вчителя/викладача»* записати, які дослідження виконують здобувачі освіти при вивченні теми; як вони можуть використати представлені зразки робіт, інструкції, вказівки, списки друкованих та електронних джерел для розробки власних робіт. Чіткий послідовний опис діяльності здобувачів освіти в ході вивчення теми та реалізації проєктів забезпечить успіх у навчанні.

У ході проєктної діяльності необхідно забезпечувати *диференціацію навчання*, обирати стратегії як для тих здобувачів освіти, що мають проблеми у навчанні, так і для обдарованих. Наприклад, може бути наданий додатковий час для виконання окремих завдань, змінені та уточнені цілі навчання, модифіковані завдання, здійснено об'єднання в групи за особливими критеріями, створено календарі із термінами на виконання завдань, адаптовані до їх потреб, спеціальні методи чи технології, а також підтримка спеціалістів, консультантів. Для обдарованих передбачити додаткові завдання над проєктами, включаючи самостійні дослідження, незалежне самостійне вивчення, різноманітні варіанти, за допомогою яких вони можуть продемонструвати засвоєні знання. Наприклад, складніші завдання, що потребують поглибленого вивчення, продовження дослідження споріднених тем, завдання на аналіз та синтез.

Необхідно продумати, як буде проходити захист проєктів. Можливо запросити експертів, наставників, учнів інших класів, членів громади, батьків; організувати поїздки та екскурсії тощо.

#### 1.4.7. Психолого-педагогічні умови впровадження STEM-освіти

Ю. Завалевський, С. Горбенко, О. Лозова [42] досліджують оптимальні психолого-педагогічні умови впровадження STEM-освіти, які трактують як наявність певних сприятливих педагогічних та психологічних чинників, що забезпечують ефективний педагогічний процес, спрямований на навчання, виховання і розвиток особистості.

Виокремлено наступні важливі психолого-педагогічні умови:

- цілеспрямована організація освітнього STEM-середовища у закладі освіти; зокрема, STEM-центрів закладів;
- наявність розробленого навчально-методичного забезпечення закладів освіти: методичних рекомендацій щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти [5; 6; 7], навчальних програм, методик STEM-освіти для викладання курсів, факультативів, організації роботи гуртків науково-технічних, з робототехніки, інженерії, природничих та аграрних дисциплін, сучасних наукових напрямів, новітніх технологій з урахуванням кращого національного та міжнародного досвіду;
- підвищення майстерності науково-педагогічних працівників через активне використання новітніх педагогічних підходів до викладання й оцінювання, інноваційних практик міжпредметного навчання, методів та засобів навчання з акцентом на розвиток дослідницьких та винахідницьких компетентностей;
- мотивація учнів до науково-дослідної, конструкторської, винахідницької діяльності через залучення здобувачів освіти до спільної діяльності та комунікативного процесу, що в результаті стане їх професійним самовизначенням;
- співпраця представників закладів освіти та академічних наукових установ, науково-дослідних лабораторій, наукових музеїв, природничих центрів, підприємств, громадських та інших організацій, у тому числі із залученням їх до створення освітнього середовища закладів освіти.

В. Пікалова в дисертаційній роботі [88, с. 119] обґрунтовує комплекс педагогічних умов використання *GeoGebra* як інструмента реалізації STEM-освіти в процесі підготовки майбутніх учителів математики.

До таких умов вона відносить:

- створення хмаро орієнтованого освітнього середовища, яке містить програмні, інформаційні, дидактико-методичні ресурси для організації, підтримки й супроводу різних видів навчальної діяльності студентів із використанням пакету *GeoGebra*;
- навчально-пізнавальної, навчально-дослідницької, науково-дослідницької, проєктної;
- уведення в освітній процес підготовки майбутніх учителів математики практикуму з проведення комп'ютерних STEM-орієнтованих

досліджень у пакеті GeoGebra, який побудований на засадах технологічного підходу, передбачає поетапне залучення студентів до дослідження математичних об'єктів, об'єктів з інших дисциплін, об'єктів навколишнього світу й водночас до поступового оволодіння дослідницьким інструментарієм пакету GeoGebra;

- застосування комплексу засобів стимулювання студентів до STEM-орієнтованого GeoGebra-моделювання на основі організації їхньої позааудиторної роботи, залучення до діяльності GeoGebra-спільноти та використання індивідуального й групового коучингу.

### **1.5. Підвищення професійної майстерності педагогів**

Як зазначається в [5], якість впровадження STEM-освіти багато в чому визначається компетентністю та рівнем професійної діяльності науково-педагогічних працівників, наскільки вони активно використовують новітні педагогічні підходи до викладання й оцінювання, інноваційні практики міждисциплінарного навчання, методи та засоби навчання з акцентом на розвиток дослідницьких компетенцій. У зв'язку з цим, останнім часом посилена увага приділяється здійсненню якісної підготовки педагогів, реалізації довгострокових ініціатив щодо їх професійного розвитку на курсах підвищення кваліфікації.

Розвитку професійної компетентності педагогічних працівників буде сприяти участь у різнопланових заходах регіонального, всеукраїнського, міжнародного рівнів: науково-практичні конференції, семінари, вебінари, STEM-фестивалі, конкурси, заняття у web-STEM-школі «STEM-освіта вчителя» тощо [42; 181].

Під час курсів підвищення кваліфікації доцільно учителям математики пропонувати лекції щодо запровадження STEM-освіти, брати участь у роботі семінарів, у тому числі веб-семінарів, з можливістю презентації власного досвіду із зазначеного питання і обговорення досвіду колег. Зокрема, такі семінари сумісно з викладачами інформатики ми проводили для викладачів математики в системі професійної освіти.

Важливо, щоб учитель набув досвіду запровадження таких актуальних форм навчання як «перевернутий» клас (Flipped Classroom), коли опанування теоретичним матеріалом виноситься на самостійне опрацювання, а під час аудиторних занять розглядаються питання їх практичного застосування. Доцільно здійснювати так зване «занурення» в тему, парні та групові форми роботи; лабораторні та проєктні роботи. Акцентуємо увагу на використанні STEM-проєктів, що сприятиме творчому розвитку учнів, готуватиме їх до вирішення проблемних ситуацій в повсякденному житті.

Для набуття майбутніми учителями математики та інформатики компетентностей із запровадження STEM-освіти доцільно не лише під час навчальних та виробничих практик залучати студентів до розробки і впровадження STEM-проєктів, але й дедалі ширше використовувати

STEM-підходи у викладанні математичних дисциплін. Зокрема цим ми активно послуговуємося у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики. Досвід роботи показує, що доцільно для набуття навичок STEM-навчання виокремлювати частину лабораторних занять з методики навчання математики для оволодіння майбутніми учителями програмними засобами навчання математики.

Рамка цифрової компетентності вчителя Dig Comp Edu, встановлює шість основних областей в яких виражається компетентність учителя, і двадцять дві складових цих областей. Серед них професійна співпраця, цифрове підвищення кваліфікації, навчання у співпраці, зворотний зв'язок та планування, диференціація та персоналізація, активне залучення учнів, інформаційна грамотність, комунікація, створення контенту, відповідальне користування, розв'язання проблем [1].

Проаналізуємо, які проблеми можуть виникати при підготовці учителів математики та інформатики до використання сучасних технологій навчання, зокрема, впровадження елементів STEM-навчання. Через реалізацію міжпредметних зв'язків здобувачі освіти практично застосовують знання теорії, краще розуміють математичні поняття, отримують можливість застосувати знання з математики на практиці. Як вищу сходинку у STEM-навчанні можна розглядати розробку і впровадження інтегрованих навчальних дисциплін. При цьому відкритою залишається проблема створення навчальних програм, які інтегрують STEM-предмети. Методика такого навчання розроблена недостатньо. Тут дається ознака недостатнє фінансування облаштування у навчальних закладах STEM-центрів.

Розглядаючи питання STEM-освіти в сучасній школі, доцільно привертати увагу до того, що учитель має готувати учнів до комплексного вивчення світу, а не сприйняття його у вигляді ізольованих частин. Досягати цього можна, насамперед, через використання у навчанні міжпредметних зв'язків, впровадження міжпредметних проєктів, розв'язування прикладних задач, проведення інтегрованих уроків. Здобувачів освіти слід дедалі ширше залучати до постановки проблеми, пошуку шляхів її розв'язування. Актуальною є проблема залучення тих, хто навчається, до самостійної дослідницької діяльності. За доцільного застосування набуває значної ваги метод навчання як дослідження.

Одним із напрямів розвитку STEM-освіти є *робототехніка*. Робототехніка – галузь техніки, пов'язана з розробленням і застосуванням роботів, а також комп'ютерних систем для управління ними, сенсорного зворотного зв'язку та коректного опрацювання даних. Як зазначають Н. В. Морзе, О. В. Струтинська, О. О. Гриб'юк, Н. А. Хараджян та ін. введення елементів робототехніки в шкільні предмети сприяє підвищенню мотивації та інтересу учнів, урізноманітнює навчальну діяльність, в тому числі із використанням активних групових методів навчання, допомагає вирішувати завдання практичної спрямованості. Робототехніка

в освіті – це міждисциплінарні заняття, що інтегрують у собі науку, технологію, інженерну справу, математику, засновані на активному навчанні. Навички та здібності, що розвиваються: дрібна моторика; знання основ механіки, математики та програмування; вміння працювати в команді; розвиток логічного та технічного мислення; розвиток аналітичних здібностей; розуміння точних наук; моделювання, конструювання, програмування прототипів роботів, що можуть знайти своє застосування в таких сферах як логістика, автомобілебудування, будівництво тощо; вміння аналізувати отримані дані та приймати рішення.

Практика показує, що учителі математики не готові до проведення уроків робототехніки. Готувати їх для цього варто не лише під час вивчення дисциплін інформатики, але й розглядаючи відповідні теми з методики навчання математики. Наприклад, можна запропонувати майбутнім учителям математики такі завдання: розрахувати число обертів колеса, необхідне для переміщення робота вперед на певну кількість сантиметрів. Для розв'язування даного завдання спочатку потрібно розрахувати, скільки проїде робот за один оберт колеса, скориставшись формулою довжини кола. Вимірявши діаметр колеса, отримуємо шлях, який проходить колесо за один оберт. А тоді вже знайти кількість обертів для подолання роботом заданої відстані [67].

Уроки робототехніки допомагають вирішенню прикладних завдань, надихають молодь до новаторства в сфері науки, технології, математики, заохочують учнів думати творчо, аналізувати ситуацію, критично мислити, застосовувати свої навички для вирішення проблем реального світу.

Недостатня увага приділяється в STEM-навчанні застосуванню стохастички. Наведемо приклади дослідницьких завдань при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики, у тому числі для використання системи динамічної математики і розуміння закону великих чисел. Проведення стохастичних експериментів, подальше опрацювання їх результатів, зокрема, з використанням систем динамічної математики, теоретичне узагальнення отриманих емпіричних результатів є STEM-підходом під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики. Найпоширенішими моделями для проведення стохастичних експериментів є монети, гральні кубики, колода гральних карт. Практична робота урізноманітнить заняття та підвищить інтерес до вивчення теми. До теми «Частота та ймовірність випадкової події» доцільно запропонувати виконати практичне завдання: провести серію експериментів, у яких підкидають монету чи кришечку. Далі необхідно знайти частоту події «кришка впала емблемою вниз» та оцінити ймовірність протилежної події. Детальніше про такі STEM-проекти в пп. 3.24-3.27.

Вивчаючи тему «Статистичний аналіз даних», можна запропонувати скласти таблицю середніх температур повітря в даному місяці в 15 століттях світу, а потім обчислити розмах, середнє значення, медіану і моду даної вибірки. Дана практична робота висвітлює міжпредметні зв'язки

математики з географією та інформатикою, а також зацікавить учнів та покаже практичне застосування теми. Для опрацювання цих чи інших статистичних даних доцільно, крім традиційного підходу – вручну, використовувати STEM-підхід – з використанням одного з програмних засобів: Gran1, GeoGebra, Microsoft Excel, таблиці Google. Метою подібних завдань є залучення до дослідницької діяльності, висування гіпотез, експериментальна їх перевірка та опрацювання результатів експерименту.

Надзвичайно важливими для розвитку творчого потенціалу школяра / студента є *дидактичні ігри з комп'ютерною підтримкою*. У посібниках [105; 121; 125; 127] наведено приклади завдань планіметрії, виконуючи дослідження до яких за допомогою ПЗ, можна висувати гіпотези, формувати твердження, експериментально їх перевіряти та шукати способи обґрунтування. Подання нового матеріалу через аналіз результатів графічного експерименту зручно поєднувати з методом доцільних задач. Модель навчання через відкриття передбачає формулювання проблеми, з'ясування плану діяльності, створення динамічних креслень, проведення обчислювального експерименту, формулювання гіпотези.

Підбиваючи підсумки, на основі аналізу наукової та навчально-методичної літератури можемо зробити висновки, що STEM-освіта як програма навчання у міждисциплінарному та прикладному спрямуванні передбачає формування критичного мислення та навичок дослідницької діяльності, готує здобувачів освіти до здійснення навчання впродовж життя, до успішного працевлаштування, сприяє розвитку технічно складних навичок із застосуванням математичних знань. Здобувачі освіти краще розуміють навчальний матеріал, коли вони самостійно створюють або винаходять. Це використовується із врахуванням перспектив подальшого розвитку.

Залучення здобувачів освіти до виконання завдань з використанням систем динамічної математики Gran та GeoGebra сприяє розширенню кола навчальних завдань, включаючи до нього нестандартні завдання дослідницького та прикладного характеру. Це створює умови для досягнення високої мотивації навчання, забезпечення індивідуалізації процесу навчання. Навчання робототехніки в технологічному 21 столітті сприяє розвитку комунікативних здібностей молоді, розвиває навички взаємодії, самостійності при прийнятті рішень, розкриває у них творчий потенціал. Програмування роботів, підготовка та проведення уроків робототехніки допомагає візуалізувати закони математики у навколишньому світі. Математика суттєво використовується у навчанні робототехніки, у розробці та впровадженні STEM-освіти, при цьому часто потрібні математичні розрахунки, які можуть виходити за межі шкільної програми.

Розглянувши низку форм та методів, апробувавши окремі з них, дійшли висновку, що метою кожного вчителя, який веде STEM-предмет, має стати мотивування та зацікавлення учнів. Чим різноманітнішими і цікавішими будуть уроки, тим більше учнів захопляться даним предме-

том. Впровадження елементів STEM-освіти в навчанні математики та інформатики дає можливість підвищити якість науково-технологічної підготовки учнів, що в подальшому сприятиме підвищенню їх життєвих компетентностей.

Для професійного зростання вчителя, обміну досвідом та пошуку нових ідей доцільно організовувати семінари, включаючи дистанційні. При підготовці майбутніх учителів математики доцільно ширше використовувати STEM-підхід у навчанні математичних дисциплін, методики навчання математики, зокрема, здійснювати навчання з використанням систем динамічної математики.

Результати дослідження цих та інших авторів переконливо свідчать, що впровадження STEM-навчання створює передумови поглиблення змісту, зокрема математичної освіти, сприяє інтенсифікації процесу навчання, розвиває особистість, стимулюючи пізнавальну активність, сприяє підготовці спеціалістів, здатних працювати в умовах інформаційного суспільства та ефективно використовувати математичні знання на практиці. Впровадження STEM-навчання сприяє підвищенню практичної спрямованості навчання математики, набуттю учнями і студентами життєво необхідних навичок, збагачує їх досвідом експериментальної та дослідницької роботи. Тому якщо раніше основною функцією математичної освіти була власне математична освіта, то на сучасному етапі на перше місце виходить інша не менш важлива функція – освіта за допомогою математики.

### ***Контрольні питання і завдання***

1. Що таке STEM, STEAM, STREAM?
2. Порівняти компоненти традиційної методичної системи навчання і методичної системи STEM-навчання. Визначити цілі, описати методи та форми організації STEM-навчання.
3. У чому полягає актуальність запровадження підходів STEM-освіти?
4. Для впровадження STEM-проєкту під час вивчення однієї з тем шкільного курсу математики самостійно дібрати доцільні STEM-засоби, STEM-орієнтовані методи і форми навчання. Оцінити їх переваги у навчанні перед традиційними засобами.
5. Охарактеризувати параметри за допомогою яких можна оцінювати якість STEM-засобу навчального призначення.
6. Які технології навчання сприяють розвитку навичок необхідних для успішної соціалізації молоді, вибору професій у сфері STEM?
7. Проаналізувати особливості використання вчителями математики ІКТ у професійній діяльності. Як учитель / викладач математики може підвищувати рівень компетентностей в питаннях STEM-навчання?
8. Як змінюється роль учителя / викладача в контексті розвитку STEM-технологій в освітньому процесі?



## РОЗДІЛ 2. ЗАСОБИ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У STEM-НАВЧАННІ

### 2.1. Система динамічної математики [GeoGebra](https://www.geogebra.org/)

#### 2.1.1. Модуль Геометрія. Основні інструменти, приклади побудов.

[GeoGebra](https://www.geogebra.org/)<sup>1</sup> – це вільне програмне забезпечення, система динамічної математики для всіх рівнів освіти, що включає в себе окрім розділів геометрії, алгебри, таблиць, графіків, математичного аналізу, також блоки теорії ймовірностей і статистики в одному зручному для використання пакеті. Тому засіб може успішно використовуватися як у навчанні математики у середній школі, так і при вивченні вищої математики, аналітичної геометрії, математичного аналізу, елементарної математики, методики навчання математики у фахових коледжах, інших закладах вищої освіти.

[GeoGebra](https://www.geogebra.org/) завоювала кілька освітніх нагород в Європі і США. Засіб доступний на багатьох мовах для мільйонів користувачів по всьому світу ( URL :<http://geogebra.org>), у тому числі локалізований українською мовою. [GeoGebra](https://www.geogebra.org/) має легкий у використанні інтерфейс і потужні можливості здійснення обчислень і візуалізації абстракцій. Використовуючи засіб, викладач/вчитель може створити «інтерактивний» навчальний матеріал. Команди в системі динамічної математики згруповані за призначенням (областю застосування або навчальною дисципліною): *Математичні функції, GeoGebra, Алгебра, Вектори та Матриці, Геометрія, Дискретна математика, Ймовірність, Команди оптимізації, Логіка, Список, Статистика, Таблиці, Функції*.

На офіційному сайті [GeoGebra](https://www.geogebra.org/) подано основні відомості про продукт, розміщений інсталяційний файл для найновіших версій [GeoGebra](https://www.geogebra.org/): для використання на ПК з ОС Windows, Mac OS X, Linux. З'явилися додатки для мобільних телефонів [Геометрія](https://www.geogebra.org/), [Графічний калькулятор](https://www.geogebra.org/), [3D-Графіка](https://www.geogebra.org/), [Науковий калькулятор](https://www.geogebra.org/) (рис. 2.1). [GeoGebra](https://www.geogebra.org/) може використовуватись у вікні веб-браузера, без інсталяції на ПК, на мобільних телефонах.

**Більше про [GeoGebra](https://www.geogebra.org/) за наступними покликаннями**

Learn GeoGebra Classic  
<https://www.geogebra.org/m/XUv5mXTm>

Learn GeoGebra Calculator  
<https://www.geogebra.org/m/aWhYSpyy>

Learn GeoGebra Geometry  
<https://www.geogebra.org/m/DmVNbn2V>

Learn GeoGebra Graphing Calculator  
<https://www.geogebra.org/m/vd6UC685>



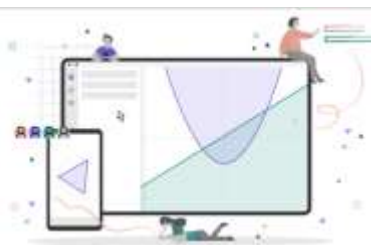
<sup>1</sup> Офіційний сайт розробників системи динамічної математики [GeoGebra](https://www.geogebra.org/). Dynamic MathematicsforEveryone. URL: <https://www.geogebra.org/>.

## Математичні Додатки GeoGebra

Отримайте ніші безкоштовні математичні інструменти для побудови графіків, геометрії, 3D та багато чого іншого!

СТАРТ КАЛЬКУЛЯТОР

РЕСУРСИ КЛАСУ



### Потужні Математичні Додатки

Калькулятор Сторін

3D Калькулятор

СКА Калькулятор

Геометрія

### Готові до Використання

Графічний Калькулятор

Науковий Калькулятор

GeoGebra Класична

Тестування

### Більше Чудових Додатків

Нотатки

App Store

Google Play

Завантаження Додатків

Рис. 2.1. Копія веб-сторінки на офіційному сайті *GeoGebra*.

Ще одна з переваг *GeoGebra* та, що у вкладці [Ресурси](#) розміщено низку навчально-методичних матеріалів: підручники, статті, готові конструкції та наочності. На сайті подається короткий опис команд та інструментів *GeoGebra*, приклади їх використання [139-140], [145-147]. При цьому зареєстрований користувач може ділитися своїми навчальними матеріалами на сторінці офіційного сайту – *GeoGebraTube*. Це своєрідний файлообмінник, особливість якого полягає в тому, що створені динамічні «інтерактивні» конструкції немає необхідності завантажувати на ПК, якщо вони будуть використовуватися саме у запропонованій формі без змін. Для використання достатньо відкрити *Переглянути аркуш* у вікні браузера як веб-сторінку, можна динамічно рухати модель, змінювати вхідні данні. Користувач може залишати коментарі до матеріалів *GeoGebraTube*. Є можливість створити власну *GeoGebraBook* – папку, у яку можна додавати обрані матеріали, створювати підпапки. [Користувач може опублікувати](#) для загального користування гру, колекцію наочностей (розробок), практику, розробку уроку, до якої можна включати текстові повідомлення, об'єкти *GeoGebra*, веб-сторінки, питання, відео, зображення та pdf-файли, навчальний посібник.

Проблемам використання *GeoGebra* присвячено низку досліджень В. М. Ракути [90-91], В. А. Сидорука [178], О. В. Семеніхіної та М. Г. Друшляк [93; 94], В. Пікалової [88], М. Й. Риковського [177] та ін. [З нашими наробками можна ознайомитися](#) за публікаціями [26; 17; 27; 64; 66; 67; 80; 81; 125; 126], добіркою матеріалів [електронного навчального курсу](#) [163], на сайті *GeoGebra* представлено *GeoGebra-book* [161].

Матеріалами з *GeoGebraTube* можна ділитися через соціальні мережі: Facebook, Twitter та відправляти на електронну адресу, завантажувати на *GoogleDrive*. Це створює умови для високої взаємодії між педагогом та учнями/студентами у неформальній обстановці, сприяє розвитку

інформаційної культури, яка є невід’ємною складовою сучасного суспільства.

Перейдемо до розгляду інструментів [класичної GeoGebra](#) (рис. 2.2). Більшість з них застосовна і для мобільного додатку [Геометрія](#).

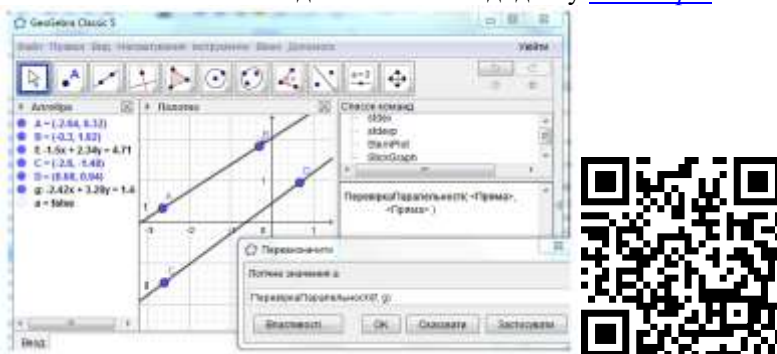


Рис. 2.2. Вікно засобу GeoGebra Classic, [QR-код посібника](#)

До першої групи інструментів GeoGebra належать *Переміщення*, *Поворот навколо точки* та *Записати у таблицю*. Для побудови точок використовують інструменти *Нова*, *На об’єкті*, *Приєднати/від’єднати точку*, *Перетин двох об’єктів*, *Середня точка або центр*, *Комплексне число* (Рис. 2.3).



Рис. 2.3. Точки.

При побудові ліній використовують наступні інструменти: *Пряма через дві точки*, *Відрізок із заданими кінцями*, *Відрізок з фіксованою довжиною*, *Промінь за початком променя і точкою на промені*, *Ламана з вершинами у заданих точках*, *Вектор за двома точками* – початком і кінцем; *Відкладання від точки вектора*, рівного даному) (Рис. 2.4).

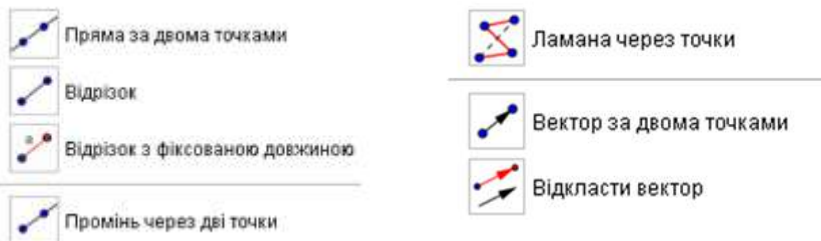


Рис. 2.4. Лінія.

У системі динамічної математики *GeoGebra* розглядають такі прямі: *Перпендикулярна пряма*, яка проходить через задану точку і перпендикулярна до заданої прямої; *Паралельна пряма*, яка проходить через задану точку і паралельна до заданої прямої; *Серединний перпендикуляр* заданого відрізка; *Бісектриса кута*; *Дотична до кола*; *Полярна*, діаметр кола; *Апроксимація лінійною функцією*; *Локус* (Рис. 2.5).



Рис. 2.6. Пряма.

Можна побудувати довільний *Многокутник*, послідовно вказавши його вершини; *Правильний многокутник*, вказавши дві сусідні вершини і кількість сторін; *Жорсткий многокутник*, вказавши його вершини (навколо першої вершини можна повертати, за другу вершину переміщувати); *Векторний многокутник* для якого точки, відмінні від першої отримують переміщення на вектор (Рис. 2.7).



Рис. 2.7. Многокутник.

У середовищі *GeoGebra* можна побудувати *Коло за центром і точкою на колі*, *Коло за центром та радіусом*, при цьому радіус задають величиною (Рис. 2.8). Обравши *Циркуль*, вказують кінці відрізка, що задають радіус і центр кола. Будують *Коло за трьома точками*, що не лежать на одній прямій, а також дуги і сектор.

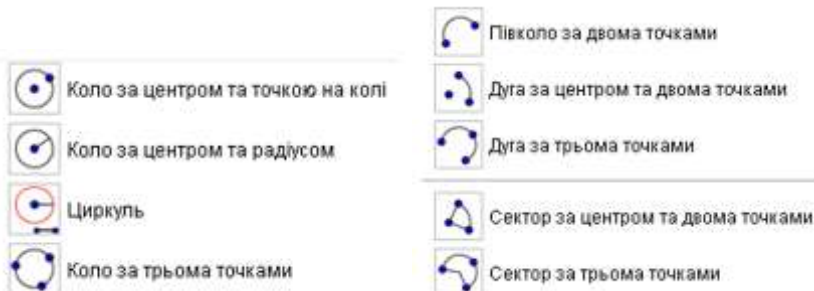


Рис. 2.8. Коло, дуга, сектор.

У *GeoGebra* будують криві другого порядку (Рис. 2.9): *Еліпс* за фокусами і точкою на еліпсі, *Гіперболу* за фокусами і точкою на гіперболі, *Параболу* за фокусом і прямою, *Коніку* за п'ятьма точками.



Рис. 2.9. Криві другого порядку.

У системі динамічної математики можна здійснити низку обчислень, пов'язаних з властивостями побудованих об'єктів. Зокрема, можна обчислити величину побудованого кута, обравши інструмент *Кут* і послідовно вказавши точку на стороні кута, вершину кута, точку на іншій стороні кута. Вказавши напрям і величину кута, можна побудувати *Кут заданої величини*. Можемо обчислити довжину заданого відрізка чи площу побудованої плоскої фігури, кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої тощо (Рис. 2.10).



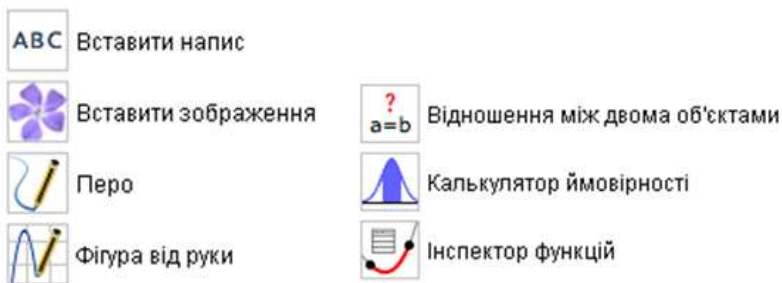
Рис. 2.10. Інструменти обчислення.

З використанням *GeoGebra* можна здійснити низку геометричних перетворень побудованих на полотні об'єктів. Серед пропонуваніх інструментів наступні: *Симетрія відносно прямої*, *Симетрія відносно точки*, *Інверсія*, *Поворот навколо точки*, *паралельне перенесення*, *Гомотетія відносно точки* (Рис. 2.11). Інтерфейс програмного засобу дуже простий, використання кожного з інструментів забезпечене контекстною підказкою, тому нема потреби деталізувати опис інструментів. У другому розділі цього посібника буде наведена низка наочностей на застосування цих інструментів.



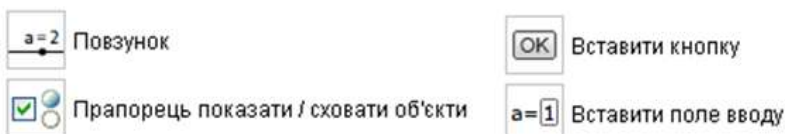
Рис. 2.11. Інструменти для геометричного перетворення фігур.

Вигідно вирізняють динамічну математику *GeoGebra* надані користувачу можливості додавати на полотно зображення, писати на полотні від руки чи додавати геометричні фігури (Рис. 2.12). Ці інструменти надзвичайно зручно використовувати вчителю/викладачу, який має можливість використовувати у навчанні мультимедійну дошку. Для побудови геометричних фігур учні чи студенти можуть використовувати не лише вбудовані електронні циркуль та лінійку, але й звичайні.



**Рис. 2.12.** Інструменти додавання написів, зображень, фігур.

Для розробки робочих листів з «інтерактивом», зручно використовувати наступні інструменти: *Повзунок* для введення до використання низки параметрів; *Прапорець*, за допомогою якого можна тимчасово приховувати об'єкти, підказки, які розглядаються. Передбачено також можливість додавання інструменту *Кнопка* та *Поля вводу* (Рис. 2.13).



**Рис. 2.13.** Інструменти для створення «інтерактивних» плакатів.

На завершення огляду інструментів блоку «Геометрія» доцільно нагадати користувачу про можливість у ході роботи здійснювати переміщення полотна, зміну масштабу, показувати чи приховувати об'єкти і позначення, змінювати і вилучати об'єкти. Технологія середовища дозволяє вчителям/викладачам ефективніше адаптувати інструкції та методи навчання до потреб учнів чи студентів.

1. Розглянемо [побудову кола, описаного навколо трикутника](#) (табл. 2.1). Детальніше про розв'язування задач на побудову див. у п. 3.8.

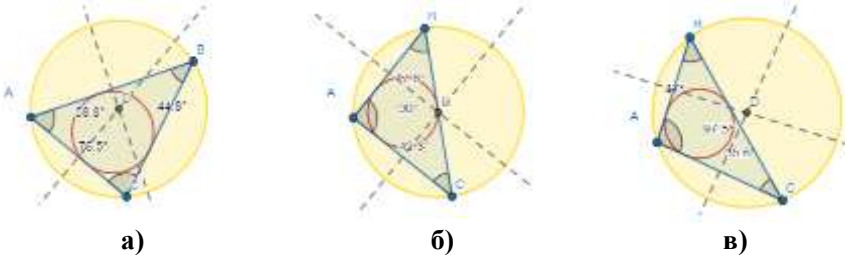


**Додаток Геометрія. Кроки побудови кола, описаного навколо трикутника**

**№ Опис кроку побудови**

**Пікто-  
грама**

1. Обрати інструмент «*Многокутник*» і побудувати трикутник як замкнену ламану, обираючи на площині три точки, які не лежать на одній прямій (рис. 2.14).
2. Обрати інструмент «*Серединний перпендикуляр*» і побудувати два серединні перпендикуляри, вказуючи на сторону трикутника.
3. Побудувати *Точку перетину* серединних перпендикулярів – центр описаного кола. Можна вказати на кожен з серединних перпендикулярів або на точку їх перетину безпосередньо.
4. Обрати інструмент «*Коло за центром і точкою на колі*» і послідовно вказати центр кола і одну з вершин трикутника.
5. Дослідити положення центра описаного кола. Як пов'язане положення центра описаного кола з видом трикутника? Для цього обрати інструмент «*Вимірювання кутів*», послідовно вказати, рухаючись проти часової стрілки, точку на стороні кута, вершину кута, точку на суміжній стороні трикутника.



**Рис. 2.14. Дослідження положення центра описаного навколо трикутника кола: а) гострокутний трикутник, б) прямокутний, в) тупокутний.**

2. Розглянемо **побудову кола, вписаного у трикутник** (табл. 2.2). Переглянути кінцевий результат побудови можна за наступним посиланням <https://www.geogebra.org/m/kjwvvtmm>. Дану побудову зручно здійснювати як на полотні класичної версії GeoGebra, так і з використанням мобільного додатку.

4. Наведемо приклад побудови центральносиметричної фігури з використанням властивостей об'єктів Точка (Залишити слід) (Рис. 2.15 а)). Послідовність виконання побудови центральносиметричної фігури (табл. 2.3). Приклад побудови фігури, що має також осі симетрії (рис. 2.15. б). Доцільно переглянути наочність, де продемонстровано дві замкнені ламані, отримані у результаті перетворення осьова симетрія. На



рис. 2.15 в) подано скріншот екрану смартфоні з побудовою ламаних (спочатку побудовано центр симетрії, далі створено замкнену ламану, наступним кроком до ламаної застосовано геометричне перетворення Симетрія відносно точки; відповідні точки з'єднано відрізками).

Таблиця 2.2.

**Додаток Геометрія. Кроки побудови кола, вписаного у трикутник**

**№ Опис кроку побудови**



**Піктограма**

1. Обрати інструмент «*Многокутник*» і побудувати трикутник як замкнену ламану, обираючи на площині три точки, які не лежать на одній прямій.
2. Обрати інструмент «*Бісектриса кута*» і побудувати бісектриси двох кутів, вказуючи послідовно точку на стороні кута, вершину кута, точку на суміжній стороні трикутника.
3. Обрати інструмент *Точка*. Побудувати точку перетину бісектрис – центр вписаного кола. Можна вказати на кожну з бісектрис або на точку їх перетину безпосередньо.
4. Побудувати точку дотику вписаного кола до сторони трикутника. Для цього обирають інструмент «*Перпендикулярна пряма*», послідовно вказують точку перетину бісектрис і одну з сторін трикутника.
5. Обирають інструмент «*Точка*» і вказують точку перетину перпендикуляра з стороною трикутника.
6. Обрати інструмент «*Коло за центром і точкою на колі*», послідовно вказати центр кола і побудовану точку дотику кола до сторони трикутника.
7. Поділитися [розробленою наочністю](#) / зберегти / надіслати на Google-диск.

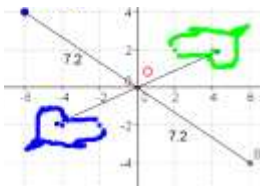


Таблиця 2.3.

**Кроки та інструменти побудови фігури, що має центр симетрії**

№	Піктограма	Кроки побудови
		Побудувати точку А – центр симетрії, обравши інструмент « <i>Точка</i> ». Побудувати довільну Точку В. Для побудови центральносиметричних фігур у власливостях точки зазначити « <i>Залишити слід</i> »
2.		Створити точку, симетричну точці В відносно точки А (спочатку вказати точку В, потім точку А). Для побудови центральносиметричних фігур у власливостях доцільно зазначити « <i>залишити слід</i> ».





а)



б)



в)



Колекція  
GeoGebra



Розробка  
GeoGebra

Рис. 2.15. Приклади геометричних перетворень фігур.

Як зазначалося вище, для розробки робочих листів з «інтерактивом», зручно використовувати інструменти *Повзунок* для введення до використання низки параметрів; *Прапорець*, за допомогою якого можна тимчасово приховувати об'єкти, підказки, які розглядаються. Передбачено також можливість додавання інструменту *Кнопка* та *Поля вводу*. Використовувати ці інструменти можемо в класичній версії GeoGebra, а переглядати завантажені на сайт наочності можна також з використанням мобільних телефонів. Приклади використання таких інструментів радимо переглянути у [дослідницькому завданні до теми «Перпендикуляр і похила»](#) (за допомогою *Прапорців* приховані написи) (рис. 2.16). У [наочності «Подібність фігур»](#) інструмент *Прапорець* використано для послідовного відкривання кроків побудови, вимірювань тощо.

У розділі 3 цього навчального посібника розкрито застосування модуля *Геометрія GeoGebra* до виконання малюнків до задач стереометрії, розв'язування дослідницьких задач, вивчення властивостей геометричних перетворень тощо.

### Контрольні питання і завдання

1. Дослідити, як використовуючи засоби динамічної геометрії, можна розвивати в учнів / студентів здібності до висування гіпотез, уміння узагальнювати та інші позитивні особистісні якості?

2. Дібрати завдання з планіметрії на доведення, переформулювати його як завдання на дослідження і обґрунтування, створити відпові-



дний динамічний опорний конспект заняття, який міститиме креслен

Завдання на дослідження до теми "Перпендикуляр і похила"

Автор: Кравченко Тетяна / Учитель  
Тема: Геометрія

Дослідницьке завдання до уроку "Перпендикуляр і похила"

Продовжіть речення, використовуючи малюнок:

Рівні похилі мають ...  
Якщо проєкції похилих рівні, то ...  
Із двох похилих більшою є та, у якій ...  
Більшій похилій відповідає ...

Відрізок, що сполучає кінець перпендикуляра і похилої до прямої, проведених з однієї точки, називається проєкцією похилої на пряму.  
На малюнку проєкціями похилих є  $DB = 9.59$  та  $BC = 16$

Що таке похила?  
 Що таке проєкція похилої?  
 Що таке перпендикуляр?

OD = 14.52
DB = 9.59
OC = 19.36
OB = 10.9
BC = 16

Кравченко Тетяна

Рис. 2.16. Скрін [дослідницького завдання](#) з інструментом *Прапорець*

ня, динамічні вирази, підказки.

3. Доцільно скласти конспект заняття за вибраною темою, підготувати наочності за допомогою системи динамічної математики, «Бібліотека наочностей *Геометрія, 7-9 клас*». Зазначити мету використання кожного засобу та місце в ході заняття.

4. Які наочності можна назвати динамічними опорними конспектами?

5. Оцінити, у чому може проявитися у процесі навчання математики позитивність властивості інтегрованості наочностей? Яких негативних впливів при цьому слід уникати? Для яких типів занять найкраще використовувати інтегровані наочності?

6. Для студентів яких спеціальностей фахових коледжів найдоцільніше запропонувати поданий вище модуль? Які особливості, пов'язані зі спеціальністю, яка набувається, може мати його використання?



### 2.1.2. Модуль Графіки. Дослідження функцій, побудова графіків

Для розгляду функціональних залежностей використовують список команд (піктограма 1) і рядок введення виразів (піктограма 2) (рис. 2.17).



Рис. 2.17. Вікно GeoGebra з Рядком введення, [QR-код колекції](#)

Для введення функцій розглядатимемо вкладку *Функції та Обчислення*, виділену на рис. 2.18 червоним кольором. Перелік команд для цієї вкладки подано українською на рис. 2.19 та англійською (*Functions & Calculus*) на рис. 2.20. Опис окремих використовуваних команд будемо здійснювати безпосередньо під час розв'язування задач.

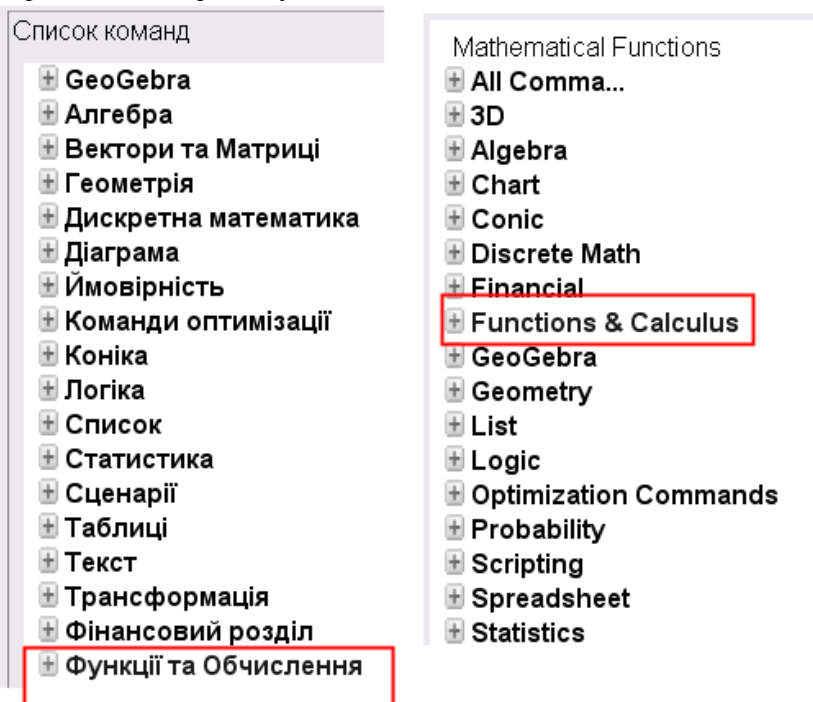


Рис. 2.18. Перелік команд GeoGebra українською та англійською

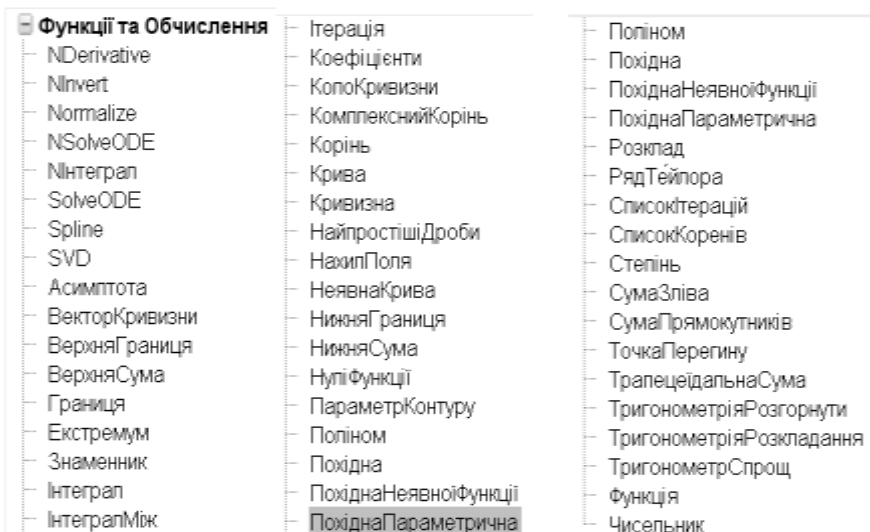


Рис. 2.19. Перелік команд вкладки Функції та Обчислення



Рис. 2.20. Перелік англійською команд вкладки Functions&Calculus

При створенні функціональних залежностей у виразах можна виконувати арифметичні дії  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ ,  $^$  (піднесення до степеня) та логічні дії. Можна використовувати математичні функції (подані для україномовної версії):  $\sin$  – синус;  $\cos$  – косинус;  $tg$  – тангенс;  $ctg$  – котангенс;  $arctg$  – арктангенс;  $arcsin$  – арксинус;  $arccos$  – арккосинус;  $abs$  – модуль;  $\sqrt{\phantom{x}}$  – квадратний корінь;  $\ln$  – натуральний логарифм;  $\lg$  – десятковий логарифм;  $\log(b,x)$  – логарифм за основою  $b$ ;  $exp$  – експоненту; гіперболічний синус –  $\sinh$ ;  $ch$  – гіперболічний косинус;  $th$  – гіперболічний тангенс;  $arcsh$  – гіперболічний арксинус;  $arcch$  – гіперболічний арктангенс;  $random$  – генератор випадкових чисел,  $0 \leq random < 1$  та інші.

Можна використовувати функції у виразах. Наприклад,  $tg(x+2)$ ;  $ln(ln(1/x))$ ;  $cos((x)^3)$ .

При записі виразів враховують пріоритет дій і функцій: 1) Функції, 2)  $^$ , 3)  $*$ , /; 4)  $+$ ,  $-$ ; 5)  $>$ ,  $=$ ,  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ; 6) заперечення; 7) і, або.

Якщо виділити одну з математичних функцій, а потім обрати *Вставити*, то на полотні автоматично будується графік обраної функції. При побудові графіків тригонометричних функцій варто змінити налаштування полотна вздовж осі абсцис (рис. 2.21).

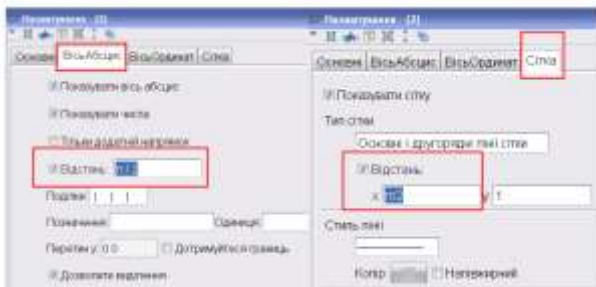


Рис. 2.21. Скріни налаштування полотна.

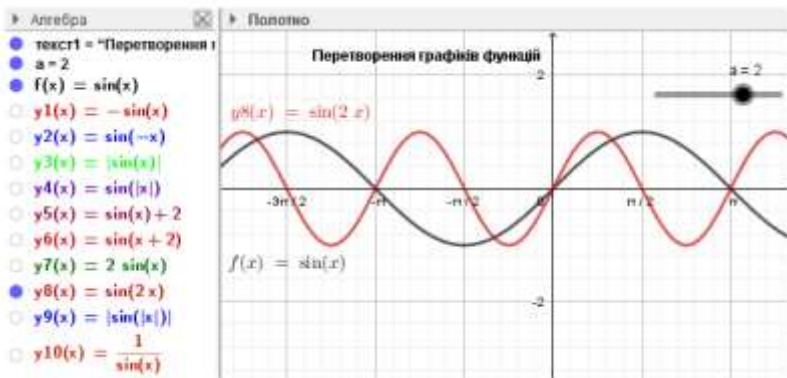


Рис. 2.22. Побудовано графік функції  $f(x) = \sin(x)$

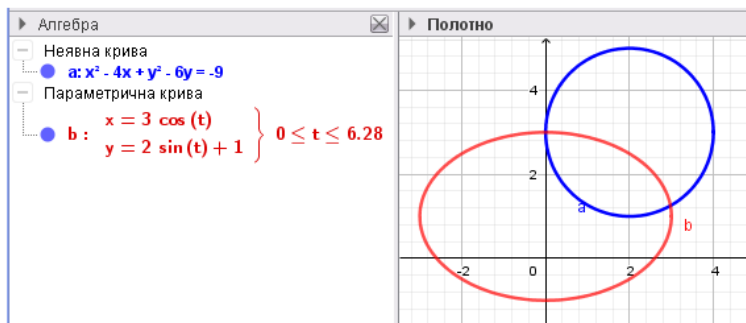
1. **Послідовність дій для введення функції.** Щоб ввести до розгляду функцію явного виду, необхідно обрати команду *Функція (Function)*, далі *Вставити* і у *Рядку введення* з'явиться запис *Функція[]*. Далі обираємо *Функція( <Вираз>, <Початкове значення x>, <Кінцеве значення x> )* для явно заданої функції однієї змінної чи *Функція( <Вираз>, <Змінна 1>, <Початкове значення>, <Кінцеве значення>, <Змінна 2>, <Початкове значення>, <Кінцеве значення> )* для функції від двох змінних з подальшою побудовою поверхні.

Наприклад, вираз [Функція\[x^2-x-2,-2,1.7\]](#) задає квадратичну функцію  $x^2 - x - 2$ , яка визначена на відрізку  $[-2; 1,7]$ .

2. Щоб ввести до розгляду функцію неявного виду, необхідно обра-

ти команду *НеявнаКрива* (*ImplicitCurve*). Наприклад, щоб задати коло з центром у точці (2; 3) і радіусом 2 як графік неявно заданої функції у рядку введення записуємо вираз [НеявнаКрива\[\(x-2\)^2+\(y-3\)^2-4\]](#). Якщо інтерфейс англomовний, то вираз [ImplicitCurve\[x^2/9+\(y-1\)^2/4-1\]](#) задає еліпс з центром у точці (0; 1) та півосями 3 і 2.

3. Щоб ввести до розгляду функцію, яка задана параметрично, використовують команду *Крива*( <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value> ) для побудови графіка плоскої фігури і команду *Крива*( <Expression>, <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value> ) для побудови графіка просторової кривої. В англomовному інтерфейсі це команда *Curve*. В якості параметрів подають вирази, які містять параметр, далі вказують, якою змінною подано параметр, насамкінець вказують початкове та кінцеве значення параметра. Наприклад, команда [Крива\[3\\*cos\(t\),2\\*sin\(t\)+1,t,0,2\\*pi\]](#) задає еліпс з центром у точці (0; 1) та півосями 3 і 2 (Рис.2.23).



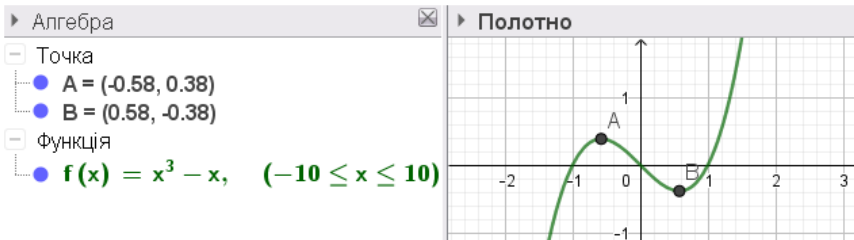
**Рис. 2.23.** Графіки функцій: заданої неявно – коло, параметрично – еліпс

4. Розглянемо, як використовуючи *GeoGebra*, обчислити точки екстремумів та екстремуми функцій. Якщо у рядку введення записати команди *Екстремум*( <Поліном> ) чи *Екстремум*( <Функція>, <Початкове значення x>, <Кінцеве значення x> ), то після їх виконання у переліку об'єктів з'являться координати екстремумів, а на полотні побудови – їх зображення.

Щоб при цьому був побудований графік, потрібно додатково виконати команду *Функція*. У [результаті виконання команди Екстремум\[x^3-x\]](#) отримаємо пару точок: (-0,58; 0,38), (0,58; -0,38). Абсциси цих точок – наближені значення точок екстремумів функції, а ординати – екстремуми функції. Щоб побудувати графік, скористалися командою *Функція* (Рис. 2.24).

Щоб визначити точки перегину графіка функції, використовують команду *ТочкаПерегину*( <Поліном> ). При цьому у переліку об'єктів

і на полотні з'являється точка при переході через яку у графіка функції змінюється напрям опуклості. Наприклад, виконавши команду *ТочкаПерегину*[ $x^3-x$ ], отримаємо точку з координатами (0;0), тобто для графіка функції  $y = x^3 - x$  напрям опуклості змінюється в точці  $x = 0$ .



**Рис. 2.24.** Представлено результати визначення екстремумів функції

5. Розглянемо застосування команди *Інтеграл*, яку можна використувати у кількох форматах. Для обчислення первісної послуговуються командою *Інтеграл*(<Функція>), зазначивши у дужках, якої саме явно заданої функції стосується ця команда. Можна обчислити невизначений інтеграл для функції, до запису формули якої входить параметр: *Інтеграл*(<Функція>, <Змінна>).

Для функції  $y = (10+t) \cdot e^{-0,08 \cdot t}$  вручну первісну можна обчислити, інтегруючи частинами. Спробувавши [визначити первісну за допомогою GeoGebra](#), отримаємо вираз і можливість змінювати параметр константи (Рис. 2.25).

6. Обчислювати визначений інтеграл можна за допомогою команди *Інтеграл*(<Функція>, <Початкове значення x>, <Кінцеве значення x>). У зазначеній вище задачі обчислюють визначений інтеграл від функції  $y = (10+t) \cdot e^{-0,08 \cdot t}$  з межами 0 і 3. Щоб здійснити обчислення за допомогою GeoGebra, спочатку вводять до розгляду функцію за командою [Функція](#)[ $(10+x) \cdot \exp(-0.08 \cdot x)$ , -2,5], вказавши межі побудови графіка. Після цього з використанням команди *Інтеграл*[ $f$ , 0, 3] обчислюють визначений інтеграл. При цьому на полотні маємо побудований графік підінтегральної функції та виділену кольором криволінійну трапецію, площу якої обчислено (Рис. 2.25).

7. Щоб обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена низу і зверху графіками двох функцій, використовують команду *ІнтегралМіж*(<Функція>, <Функція>, <Початкове значення x>, <Кінцеве значення x>).

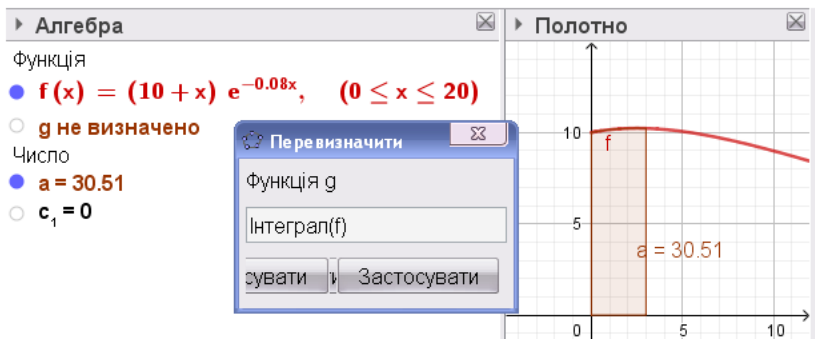


Рис. 2.25. Скріншот з **обчисленням визначеного інтеграла** в GeoGebra

*Приклад.* Нехай потрібно обчислити площу фігури, обмеженої графіками кривих  $y = \sqrt{6x-5}$ ,  $y = (x-2)^2$ . Для цього створюють два об'єкти функція за допомогою виконання команд *Функція*[ $\sqrt{6*x-5}$ , -2,5] та *Функція*[( $x-2$ )^2,-2,5]. Останні два параметри, подані у дужках, визначають межі побудов графіків на полотні. Після цього застосовують команду *Перетин*, зазначивши у дужках позначення для обох введених функцій. На заключному етапі у рядку введення записують команду *ІнтегралМіж*[ $f,g,x(A),x(B)$ ], де  $x(A)$  та  $x(B)$  – абсиси точок  $A$  і  $B$  перетину графіків функцій. При цьому на полотні з'являється виділення кольором фігури, площу якої потрібно було знайти, а також числове значення площі (Рис. 2.26).

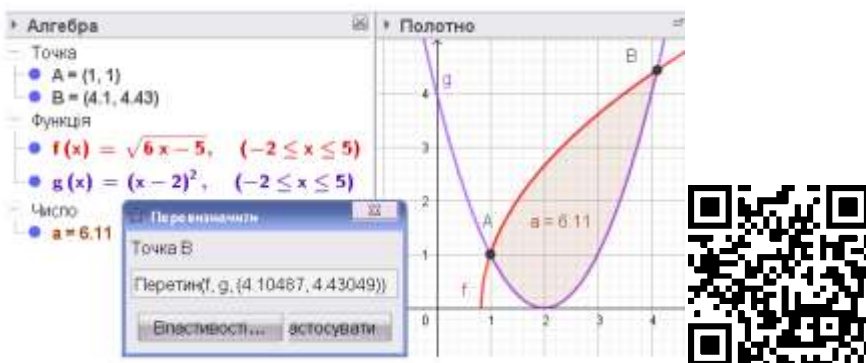


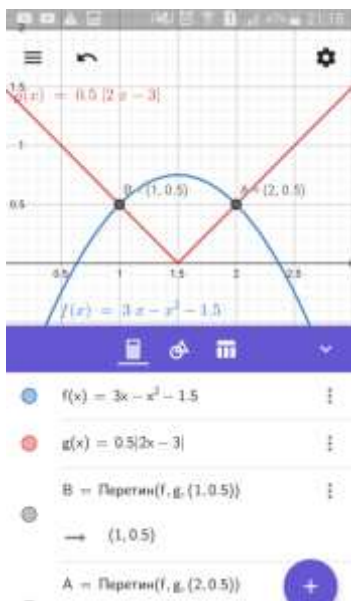
Рис. 2.26. Скріншот з результатом виконання **команди ІнтегралМіж**

8. Розглянемо приклади використання додатку для мобільного телефону «Графічний калькулятор» (більше про цей модуль Learn GeoGebra Graphing Calculator <https://www.geogebra.org/m/vd6UC685>).



Розв'язати графічно систему нелінійних рівнянь (рис.2.27):

$$\begin{cases} y = 0,5|2x - 3|; \\ y = 3x - x^2 - 1,5. \end{cases}$$



*Послідовність виконання завдання:*

1. Додати вираз (+  $f_x$ )  $0.5 \cdot \text{abs}(2 \cdot x - 3)$ .



2. Додати вираз (+  $f_x$ )  $3 \cdot x - x \cdot x - 1.5$



3. Обираємо інструмент *Точка перетину*, послідовно вказуємо обидва графіки функції чи точку перетину.



4. Щоб зазначити на графіку координати точок перетину графіків, обирають об'єкт A і B, зазначають у *Заголовку* показувати *Ім'я* та *Значення*.

**Рис. 2.27.** Скріншот побудови і послідовність кроків побудови.

9. Розглянемо, як **побудувати графік функції з параметрами**, користуючись додатком «Графічний калькулятор» (табл. 2.4).:

а)  $y = x^4 + a x^2 + b$ ; б)  $y = a \cdot (X - b)^2 + c$ .

*Таблиця 2.4.*

### Кроки для створення об'єкту-функції

1. Для цього обирають піктограму *Інструменти*, далі *Повзунок*. Створити три *Повзунки*, які визначатимуть коефіцієнти a, b, c, позначаючи їх розташування і діапазон значень.



2. Створюють об'єкт-функцію явного виду. Обирають піктограму для введення виразу (+  $f_x$ ), вводять вираз для першої функції  $x^4 + a x^2 + b$ . Аналогічно виконують для другої функції:  $a \cdot (X - b)^2 + c$ .



### 2.1.3. Модуль 3D Геометрія GeoGebra

За допомогою [3D Геометрія GeoGebra](#) можна імітувати зовнішні дії з геометричними тілами, необхідними для того, щоб користувач міг провести з ними мисленнєві внутрішні дії і розвинути просторове мислення.

Більше про Додаток 3D Геометрія читати [тут](#) (Learn GeoGebra 3D Calculator <https://www.geogebra.org/m/aWhYSpvy>).

На рис. 2.28 подано головне вікно засобу GeoGebra Classic з побудовою піраміди на 3D-полотні.

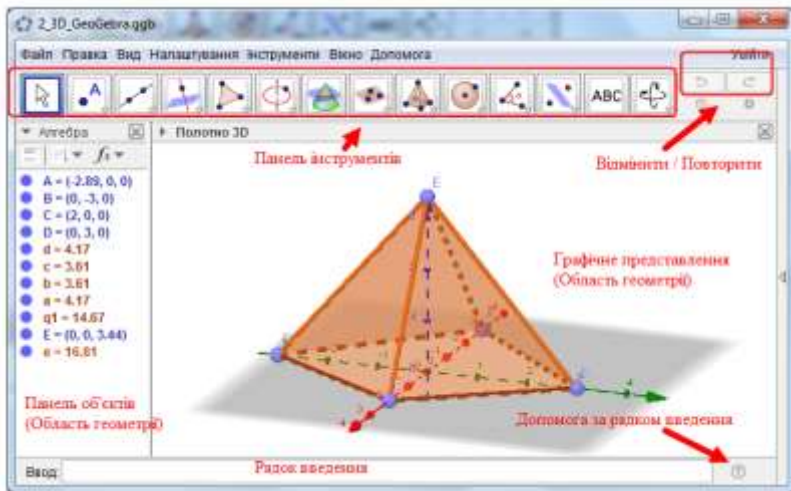


Рис. 2.28. Головне вікно засобу GeoGebra Classic ([колекція розробок](#)).

Розглянемо кілька завдань на побудову перерізів многогранників площиною, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій; через пряму і точку, яка їй не належить; побудову лінійних кутів двогранних кутів та їх вимірювання; кута між прямою і площиною.

**1. Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через три точки, які лежать на ребрах куба** (табл. 2.5, додаток для мобільного).

Таблиця 2.5.

#### Кроки побудови перерізу куба площиною ([3D Графіка](#))

##### № Кроки побудови

##### Піктограми

1. Обирають піктограму «Куб», вказують дві вершини у площині основи куба і будують куб.



Для відміни багаторазової дії інструмента обирають піктограму «Переміщення». Для відміни попередньої дії обирають піктограму «Повернення до попереднього».



2. У *Налаштуваннях* можна обрати опцію «*Не показувати осі*».
3. Обирають піктограму «*Точка*» і вказують три точки на різних ребрах куба.
4. Проводять площину через обрані три точки (після обрання піктограми «*Площина через 3 точки*», послідовно вказати точки.
5. Обирають піктограму «*Перетин двох поверхонь*», вказують на видиму лінію перетину куба і площини, будують переріз куба площиною.
6. Зберегти зображення (за наявності WiFi, вказати назву латинськими літерами) або поділитися кресленням, зображенням, надіславши його на Google-диск чи на вказану адресу; експортувати зображення.
7. Дослідити, як змінюється многокутник, отриманий у перерізі, залежно від розташування точок на ребрах куба; повернути куб.
8. Додатково можна визначити площу перерізу куба, попередньо знявши відмітки відображення куба і січної площини.




Точка



Площина  
через 3 точки




Перетин двох  
поверхонь



Зберегти



Експортувати Зобр.







Поділитися

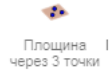


## 2. Побудувати правильну 6-кутну призму і переріз призми площиною.

Таблиця 2.6.

№	Що зробити	Піктограми
1	Обирають піктограму « <i>Правильний многокутник</i> », вказують у площині основи призми дві вершини, які визначають сторону основи правильної призми і вписують число кутів многокутника в основі 6. Для <b>відміни багаторазової дії</b> інструмента обирають піктограму « <i>Переміщення</i> ». Для відміни попередньої дії обирають піктограму « <i>Повернення до попереднього</i> ».	  
2	Обирають піктограму « <i>Паралельна пряма</i> », вказують на одну з вершин побудованого многокутника, потім на вісь, перпендикулярну до площини основи многокутника.	 <p>Паралельна пряма</p>

- 3 Обирають піктограму «*Призма*», вказують на побудований правильний 6-кутник, далі на довільну точку на побудованій прямій. Правильну 6-кутну призму побудовано.  
У налаштуваннях можна обрати опцію «*Не показувати осі*».
- 4 Обирають піктограму «*Точка*» і вказують три точки на різних ребрах призми чи в її гранях.
- 5 Проводять площину через обрані три точки (після обрання піктограми «*Площина через 3 точки*», послідовно вказати точки).
- 6 Обирають піктограму «*Перетин двох поверхонь*», вказують на видиму лінію перетину призми і площини, будують переріз призми площиною. Можна також послідовно будувати лінію перетину кожної грані з площиною перерізу. для цього вказують на грань і на площину перерізу.
- 7 Зберегти зображення (WiFi, вказати назву латинськими літерами), [поділитися кресленням](#), зображенням, надіславши його на Google-диск чи на адресу; експортувати зображення.



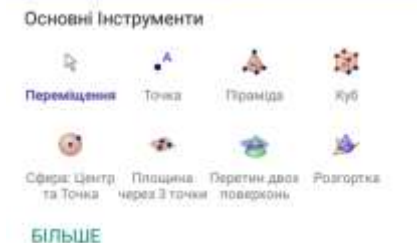
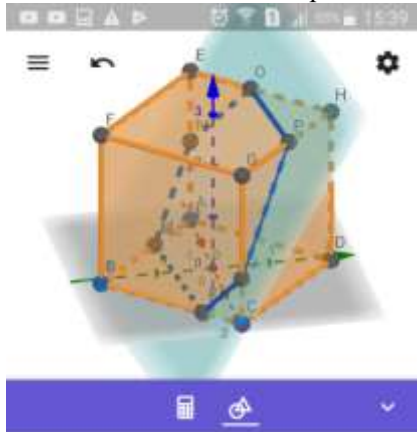
[Дослідити, як змінюється многокутник, отриманий у перерізі](#), залежно від розташування точок на ребрах призми; повернути призму. Можна [визначити площу перерізу призми](#), попередньо знявши відмітки відображення призми і січної площини (у властивостях об'єкта зняти відмітку «не показувати»).

Підсумовуючи, варто зазначити, що побудови перерізів многогранників у середовищі GeoGebra можна здійснювати двома способами: з використанням інструмента «*Перетин поверхонь*», а також методом слідів чи внутрішнього проєктування, здійснюючи покроково побудови.

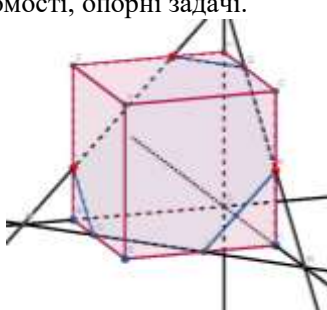
У навчанні стереометрії заслуговують на увагу розробки завдань Володимира Сидорука на побудову перерізів методом слідів, внутрішнього проєктування та комбінованим методом [178]. До кожного із завдань передбачено можливість покрокового відтворення побудов. Це дає змогу тим, хто навчається, розвивати як математичну компетентність, так і уміння самостійно навчатися. До окремих задач запропоновано побудови, створені на полотні 3D.

[Сидорук В. А.](#) [178] пропонує книгу наочностей з перерізами многогранників, креслення до яких виконано різними методами (рис. 2.29 в) (<https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs>): метод слідів, метод внутрішнього проєктування та інші. У запропонованому ним методичному посібнику

подано також основні теоретичні відомості, опорні задачі.



а) скріншот побудови перерізу куба з використанням мобільного додатку [3D Графіка](#);



б) [переріз куба площиною методом слідів](#);

## Побудова перерізів м

Автор: Сидорук В.А.



в) [книга «Перерізи многогранників»](#)

**Рис. 2.29. Побудови перерізів многогранників площиною**

Низку наочностей до задач стереометрії пропонує [Михайло Йосипович Риковський](#) [177]. Ці моделі розроблені як побудови тіл на площині з використанням властивостей паралельного проєктування. Зокрема пропонується книга / добірка наочностей до теми «[Призма](#)». Є низка наочностей, у яких представлено комбінації стереометричних тіл: сфера і піраміда, сфера і призма, сфера і циліндр тощо. Розглянемо наочність [«Вписаний у кулю конус. Правильна трикутна піраміда вписана в конус. Піраміда вписана в сферу»](#) (рис.2.30). Однак, моделі складно відтворити користувачеві, оскільки хід побудови і деталі побудов йому недостатні.

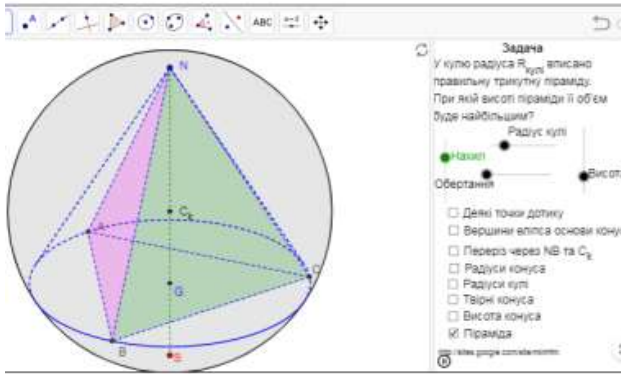
Уже з назви слідує, що наочності властива інтегрованість. Вона може бути використана при проведенні занять з стереометрії за різними темами у школі чи фаховому коледжі, занять з методики навчання математики у вищій педагогічній школі. За наочністю користувачі можуть вивчати властивості вписаних у сферу тіл, дослідити зв'язок між радіусами кулі, конуса, висотою конуса та його твірною.

## Круглі тіла

Автор: [Михайло Васильович Ревельський](#)

Тема: Геометрія

Конус вписаний у кулю. Правильна трикутна піраміда вписана у конус. Піраміда вписана у кулю.



Вивчити властивості тіл вписаних у кулю. Додати до веб-сторінки радіуси кулі, конуса, висоту конуса та його твірних.

1. Який конус називається вписаним у кулю?
2. Якою властивістю конуса навівають центр кулі?

Задача

У кулю радіуса  $R_0$  вписано правильну трикутну піраміду. При якій висоті піраміди її об'єм буде найбільшим?

Радіус кулі

Налик

Висота

Обертання

- Діагоналі дотичну
- Вершини еліпса основи конуса
- Переріз через  $NB$  та  $C_2$
- Радіуси конуса
- Радіуси кулі
- Твірні конуса
- Висота конуса
- Піраміда

Міка розроблено за допомогою



Рис. 2.30. [Конус, вписаний у кулю](#)

Користуючись інструментом *Прапорець*, яким оснащені ці наочності, користувач має змогу здійснити повторення. Який конус називається вписаним у кулю? Якому елементу конуса належить центр кулі? Яка піраміда називається вписаною у конус? Яка піраміда називається вписаною у сферу? Яким буде осьовий переріз конуса? Який круг кулі називається великим кругом? Сформулювати властивості діаметра кулі, перпендикулярного до його великого круга.

### Контрольні питання і завдання

1. Перегляньте [навчально-методичний посібник](#) «Вибрані питання елементарної математики з GeoGebra». Створіть власну колекцію наочностей та веб-розробку заняття за обраною темою за допомогою GeoGebra, додаючи до неї відповідні текстові повідомлення, відповідні побудови. Додатково до розробки можна додавати зображення, відео, питання чи pdf-файли.



2. У трапеції  $SABCD$   $BC \parallel AD$ . Відрізок  $SB$  перпендикулярний  $ABC$  і вдвічі більший середньої лінії трапеції. Як виразити відстань від середини  $SD$  до площини  $SBC$  через довжину одного з елементів трапеції? Розробіть наочності до задачі у Полотні GeoGebra [з використанням властивостей паралельного проєктування](#) та на 3D-полотні. Оцініть можливість їх сприйняття майбутніми користувачами.

## 2.2. Програмно-методичний комплекс GRAN

Програмно-методичний комплекс GRAN може успішно використовуватися не лише у навчанні математики у середній школі та фахових коледжах, але й при вивченні вищої математики, математичного аналізу, елементарної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, методики навчання математики у закладах вищої освіти. Комплекс створений авторським колективом під керівництвом М. І. Жалдака, академіка АПН України, доктора педагогічних наук, професора [60; 105; 121; 123; 122]. Значний вклад в розробку нових версій програм внесли Ю.В. Горошко [60; 105;], О.В. Вітюк [121], Є.Ф. Вінниченко [54; 56;105;], А.О. Костюченко. У посібниках «Уроки математики з комп'ютером» [127] та «Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики» [125] подаються детальні описи інструментарію та добірки завдань для оновленої версії програмно-методичного комплексу GRAN [141; 142; 143; 144].

### GRAN1.

За допомогою [GRAN1](#)<sup>1</sup> можна будувати та аналізувати функціональні залежності явного та неявного видів, які задані в декартових чи в полярних координатах, параметрично, таблично; графічно розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи з однією чи двома змінними; наближено визначати корені многочленів; досліджувати границі числових послідовностей та функцій; опрацьовувати статистичні дані (побудова полігону частот, гістограм, обчислення відносних частот різних подій; визначення центра розсіювання відносних частот та величини розсіювання (дисперсії); будувати графіки функції розподілу; обчислювати визначені інтеграли; площі криволінійних трапецій; площі поверхонь та об'єми тіл обертання тощо.

На особистісних аспектах застосування засобу зазначається у наукових працях М. І. Жалдака. Мова йде насамперед про можливість здійснювати диференційований підхід у навчанні. Учням / студентам, схильним до глибокого вивчення математики, відкриваються широкі можливості не лише досліджувати готові математичні моделі, але й вивільнити час для самої постановки завдання, з'ясування сутності досліджуваних процесів і явищ, інтерпретації отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Здобувачам освіти наявні ІКТ-навички сприятимуть тому, що вони не почуватимуть себе у складному становищі, зможуть подолати психологічні бар'єри при вивченні математики [60].

### *Динамічна геометрія GRAN-2D і DG.*

В навчальній та методичній літературі помітними є видання, в яких висвітлюється методика організації досліджень засобами динамічної

---

<sup>1</sup> Жалдак М.І., Горошко Ю. В. Програмний засіб GRAN1, версія 1.1. Київ, 2012. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/index.php/uk/zavantazhyty/category/1-gran1> (дата звернення: 30.06.2022).



геометрії DG [89], [138], [GRAN-2D](#)<sup>1</sup>. С.А. Раков характеризує програмні засоби як інтерактивні системи досить високого класу [89], що моделюють геометрію Евкліда на площині. Засіб призначений для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки і походить назва (GRaphic Analysis 2-Dimension). За допомогою [GRAN-2D](#) та DG зручно розв'язувати задачі на побудову на площині, спростовувати окремі припущення. Створивши динамічні моделі та аналізуючи динамічні вирази, можна проводити дослідження ГМТ (геометричне місце точок), встановлювати екстремальні значення певних величин; шукати закономірності, послідовність яких може привести до доведення теорем. Доцільно проводити спеціалізовані лабораторні роботи, у ході яких здобувачі освіти індивідуально або у складі групи розв'язують математичні задачі дослідницького типу у комп'ютерному класі. Завдання для таких робіт в програмно-методичному комплексі DG пропонуються у спеціальних електронних зошитах [138].

В табл. 2.7 подано зміст завдань для ознайомлення з особливостями використання засобу *Динамічна геометрія*. Детальніше зупинимося на першому завданні – створенні [експертної системи «Трикутник»](#) (рис. 2.31). *Інтегрованість* наочності полягає в тому, що її можна використовувати з різним цільовим призначенням. Наприклад, для побудови кола, вписаного в трикутник чи описаного навколо трикутника, для вироблення умінь виконувати основні побудови, для самостійного «відкриття» учнями теореми синусів, перевірки істинності формули для визначення радіуса кола, вписаного в трикутник чи описаного навколо нього. Наочність можна використати під час вивчення теми «Декартова система координат» для складання рівняння прямої.

Трикутник заданий координатами вершин  $A(-2; 2)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(11; 0)$ .

- Користуючись наочною [експертною системою «Трикутник»](#), записати рівняння сторін трикутника, висоти, медіани, бісектриси, проведених з вершини В; лінії, що з'єднує середини сторін АВ і АС; знайти координати центрів вписаного і описаного кіл.
- Обчислити довжину висоти, медіани, бісектриси, проведених з вершини В; величин кутів трикутника; радіус і довжину вписаного кола, кола, описаного навколо трикутника, площі кругів, площу трикутника.
- Дослідити і обґрунтувати взаємне розташування висоти, медіани і бісектриси, проведених з однієї вершини трикутника, положення центра кола, описаного навколо трикутника, залежно від кутів трикутника.
- Побудувати експертну систему *Трикутник*, створити динамічні вирази для обчислення радіуса вписаного кола, описаного кола.

Створити макроконструкції «Побудова кола, вписаного в трикутник», «Побудова кола, описаного навколо трикутника». Щоб переглянути і проаналізувати кожен крок виконаної побудови слід

---

<sup>1</sup> Програмний засіб GRAN-2D, версія 1.1. [Електронний ресурс]. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-2d> (дата звернення: 30.06.2019)



Таблиця 2. 7

## Зміст завдань для заняття на тему «Динамічна геометрія»

№	Завдання	Форма роботи
1	Ознайомлення з планом роботи. Мотивація діяльності. Очікувані результати.	
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ознайомлення з можливостями, які забезпечує використання GRAN-2D.</li> <li>▪ Покроковий перегляд побудови трикутника, кола, вписаного в трикутник, кола, описаного навколо трикутника; медіани, бісектриси та висоти, проведених з однієї вершини (<a href="#">експертна система «Трикутник»</a>).</li> <li>▪ Обчислення довжин відрізків, кутів з використанням послуги «Обчислення». Дослідження положення центра описаного кола залежно від виду трикутника.</li> <li>▪ Аналіз створених динамічних виразів для обчислення радіусів вписаного і описаного кіл.</li> <li>▪ Створення макроконструкції «Вписане (описане) коло»</li> </ul>	індивідуальна  в парах, взаємоконсультування <sup>1</sup>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Поняття про дидактичну гру з комп'ютерною підтримкою.</li> <li>▪ Демонстрація динамічних моделей для відкриття теореми про хорди, теореми про дотичну і січну, моделі до практичної задачі на екстремум (п. 2.2, п.2.5 посібника).</li> </ul>	Демонстрація
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ознайомлення із завданнями на створення динамічних моделей: <a href="#">теорема Птолемея</a>; <a href="#">вписаний кут</a>, <a href="#">вписаний чотирикутник</a>; <a href="#">властивість медіан трикутника</a>; <a href="#">задача на побудову жолоба з найбільшим перерізом</a>.</li> </ul>	Групи (№№ 1, 2, 3, 4)
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Обговорення в групі плану побудови моделі, потреби в створенні динамічних виразів.</li> <li>▪ Постановка завдання дослідження для учня.</li> </ul>	Обговорення в групі
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Коротке обговорення планів створення моделей та організації дослідження в загальному колі (заслуховування представника кожної з груп).</li> <li>▪ Пропозиції щодо вдосконалення моделей до завдання.</li> </ul>	Обговорення в колі
7	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Створення моделей до завдання.</li> <li>▪ Прописування завдання на дослідження для учня.</li> </ul>	Робота в групах.
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ «Захист» моделі в групі представників 1-2-3-4.</li> <li>▪ Рецензування виконаної роботи</li> </ul>	«Мозаїка»
9	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Удосконалення динамічного опорного конспекту</li> </ul>	Групи
10	Д/з. Підготувати задачу на доведення з дослідженням. Розробити для задачі ланцюжок евристичних підказок.	
11	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Рефлексія: що виконали в завданні, чого навчилися.</li> </ul>	«Мікрофон»

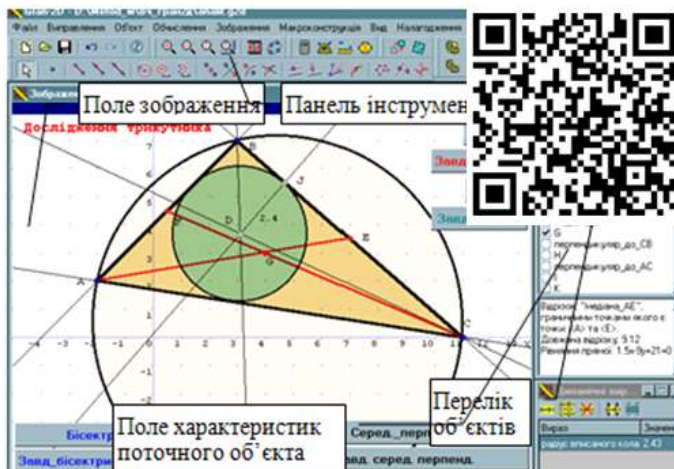


Рис. 2.31. Дослідження трикутника. Вписане і описане коло

обрати пункт меню *Зображення \ Покрокове відтворення*.

У процесі відтворення побудови потрібно з'ясувати, які саме величини для кожного з об'єктів можна обчислити за допомогою GRAN-2D? Якого виду рівняння складено для прямої, для кола? Переконайтеся, що для кола обчислено довжину, знайдено площу круга; для замкненої ланаманої обчислено периметр багатокутника та його площу.

Засіб [GRAN-3D](#) призначено для графічного аналізу тривимірних об'єктів (GRaphic ANalysis 3-Dimension), виконання обчислювальних операцій та побудов. Дослідження за допомогою [GRAN-3D](#)<sup>1</sup> проводяться як з базовими об'єктами, так і з самостійно сконструйованими.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Навести приклади тем при вивченні яких зручно застосовувати GRAN1, GRAN-2D чи DG. Дібрати завдання для одного з занять. Визначити мету застосування програмного засобу, роль і місце. Визначити переваги застосування на даному занятті програмного засобу навчання математики у порівнянні з традиційними засобами?

2. Які можливості для «відкриття» теорем, відшукування певних геометричних місць точок надає застосування GRAN-2D, DG?

3. Описати види завдань, для розв'язування яких можна використовувати педагогічний програмний засіб GRAN1.

4. Проаналізувати, які з STEM-компетентностей здобувачів освіти можна розвивати у процесі розв'язування поданих вище завдань?

<sup>1</sup> Програмний засіб GRAN-3D, версія 1.1. Київ, 2012. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-3d> (дата звернення: 30.06.2022).

### 2.3. Використання блогів у дослідженнях учнів та у професійній діяльності вчителя математики та інформатики.

Блог (англ. blog, від web log, «мережевий журнал чи щоденник подій») – це веб-сайт, головний зміст якого – записи, зображення чи мультимедіа, що регулярно додаються. Для блогів характерні короткі записи тимчасової значущості. *Блоги* використовують для здійснення рефлексії (написання особистих думок та вражень від процесу навчання) – одноосібно чи у групі. Сучасні блоги можуть успішно використовувати філологи для представлення творів для публічного обговорення, власних есе як певного підсумку вивчення теми. За допомогою коментарів до блогу можна забезпечувати зворотний зв'язок «викладач-студент», «студент-студент», «вчитель-учень». Наведемо приклади блогів [159; 160], [168]. Перевага використання блогів у тому, що вони доступні для читання і написання у довільному місці при наявності мережі Інтернет, зокрема через мобільні телефони. Блоги можна розгортати як повноцінні сайти.

Блог – це те віртуальне середовище, де вчитель може якісно презентувати свою педагогічну діяльність або свої уподобання, швидко публікувати власні думки, отримувати коментарі на них, спілкуватися з колегами та ін. [Наведемо приклади](#), з якою метою педагоги можуть використовувати блоги та сайти. Для студента блог можна використовувати у якості щоденника індивідуальних спостережень під час літньої практики в оздоровчих таборах, під час виробничої практики у школі. Адміністрація школи через блоги і сайти може ознайомлювати педагогічний колектив та батьків з нормативними документами, наказами по школі, робити об'яви, привітання тощо. Класний керівник у своєму блозі може висвітлювати організаційну роботу, спілкуватися з учнями класу та батьками. Тут зручно подавати новини, світлини, відомості про конкурси, термінові заходи та умови участі тощо. Може бути блог певного гурту чи навчальної дисципліни, STEM-проєкту, виховного заходу тощо.

Детальніше зупинимось на призначенні *блогу вчителя-предметника*. Вчитель може у блог розміщувати навчальні матеріали, новини науки, математичні цікавинки, розповідати про типові помилки при виконанні учнями математичних завдань, подавати складні завдання, відеоматеріали, рекомендувати підручники, матеріали для підготовки до ЗНО, робити різного роду оголошення, повідомляти домашні завдання, надавати на перегляд кращі роботи учнів тощо.

Перед початком створення блогу рекомендуємо переглянути відеоурок з оглядом кращих блогів учителів математики та відеоурок створення і наповнення блогу учителя математики з використанням інструменту Blogger сервісів Google. За поданими QR-кодами доступні уроки електронного курсу на платформі MOODLE, добірки блогів учителів

математики, зокрема [https://www.youtube.com/@user-ku1wk7bb8b], [160], [168], поради розробнику.



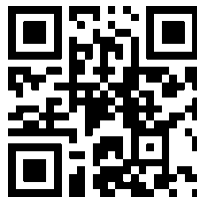
[Огляд блогів](#)



[Добірка кращих блогів](#)



[Дистанційний урок](#)



[Відеоурок створення блогу](#)

Для ведення блогу доцільно на мобільний телефон завантажити додаток *Blogger* чи відкрити Blogger через Google-акаунт на комп'ютері (рис.2.32). Далі обираємо [вкладку Створити блог](#), записуємо назву блогу (рис.2.33), адресу (наприклад, [vasilenkookksana.blogspot.com](http://vasilenkookksana.blogspot.com)), вибираємо тему, яку пізніше можна змінити. Адреса блогу вводиться латиницею. Цей запис буде відображатися в адресному рядку блогу. Доцільно скласти адресу з транслітерованого англійською мовою прізвища та імені автора. На завершення створення блогу обирають «*Створити блог*».

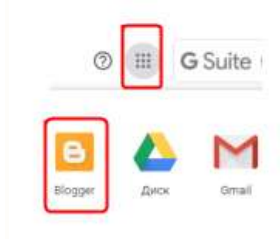


Рис. 2.32. Вхід у Blogger через Google-акаунт

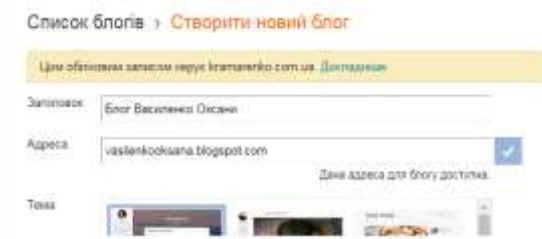


Рис. 2.33. Створення заголовку блогу, запис адреси блогу, вибір теми оформлення.

1. В основному блоці доцільно розмістити **сторінки**, які міститимуть важливі для вчителя матеріали. Наприклад, посилання на *методичні і нормативні матеріали*, рубрики «*Математика, 5-6 клас*», «*Геометрія, 7-9 клас*», «*Алгебра, 7-9 клас*», «*Корисні посилання*», «*Засоби навчання математики*», «*Підготовка до ЗНО*» тощо. Подаємо ланцюжок використання інструментів для створення і налаштування сторінок: *Відкрити блог за допомогою Blogger* → **Сторінки** (рис. 2.34) → *Нова сторінка* → *Ввести заголовок сторінки, додати текст* – *Створити*. У подальшому для редагування сторінки потрібно *Відкрити блог за допомогою Blogger* → *обрати Сторінки-Редагувати* → *Оновити*.

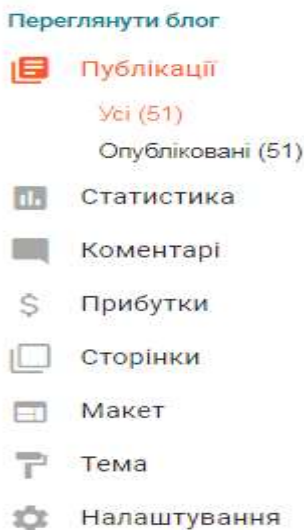


Рис. 2.34.

2. Для того, щоб [додати до блогу гаджет «Сторінки»](#), потрібно відкрити блог за допомогою *Blogger*, обрати *Макет/Дизайн* (рис. 2.34). Потім у верхній чи бічній колонці **додати гаджет «Список сторінок»** (рис. 2.35). Далі біля тих сторінок, які будуть включені у список, проставити відмітки. Нижче налаштувати порядок розташування сторінок шляхом перетягування відповідних піктограм. У подальшому при додаванні нової сторінки потрібно редагувати список. Для цього *Відкрити блог за допомогою Blogger* → *обрати Макет/Дизайн* → *знайти доданий гаджет Список сторінок* → *редагувати список* (рис. 2.36).

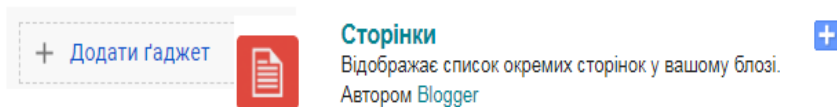


Рис. 2.35. Додати гаджет **Сторінки**.

3. Для створення нового допису (публікації, повідомлення) блогу необхідно обрати *Публікації* → *Новий допис*. Створення публікації передбачає формулювання її назви, яка записується у відповідному полі зверху, введенні й редагуванні основного тексту, який подається на сторінці документа (рис. 2.37). Опишемо детальніше панель інструментів, яка розташована нижче поля для введення назви. Ця панель містить інструменти для форматування тексту (стиль, розмір, колір), додавання різноманітних елементів публікації (зображення, відео, спеціальних символів), створення гіперпосилань (прив'язати), формування списків, перевірки орфографії тощо (рис. 2.37).

4. При додаванні повідомлень потрібно дотримуватися академічної доброчесності, не порушувати авторських прав. Одне з повідомлень може бути про те, як створювати блог і використовувати його у навчанні. До цього повідомлення варто додати доцільний текст з посиланням на джерела відомостей (*Посилання / Прив'язати*). Можна додати відповідні малюнки, завантаживши їх з мережі за URL, з власного комп'ютера чи телефона, відео з YouTube про створення чи редагування блогу.

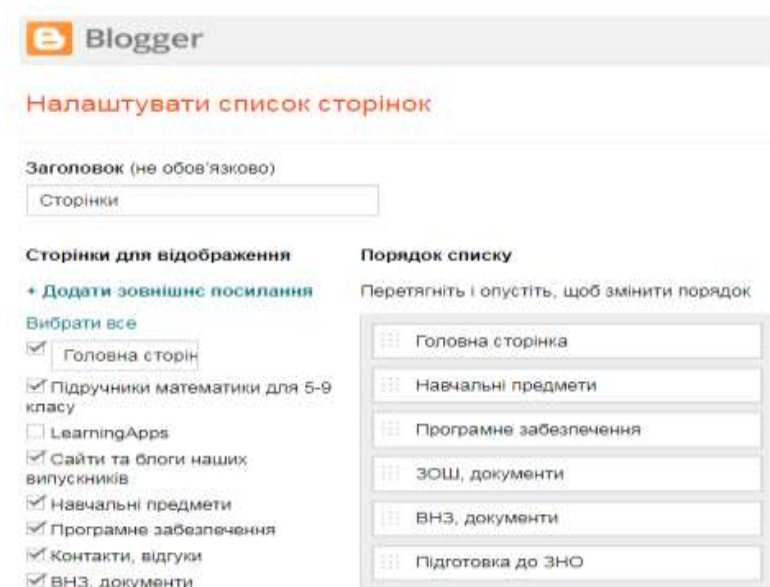


Рис. 2.36. Налаштування списку сторінок.

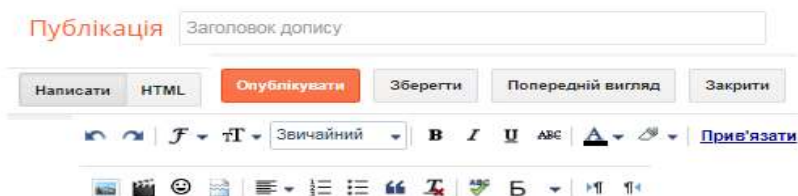


Рис. 2.37. Панель інструментів для створення публікації.

Для компактного розміщення і подання матеріалів читачу доцільно використовувати *Розрив переходу*. Не завадить створити власне повідомлення про використання хмарних сервісів Google. Наприклад, про використання текстового редактора, таблиць чи форм Google з додаванням відео, малюнків, гіперпосилань на джерела. Можна поділитися повідомленням про важливість запровадження STEM-освіти, скориставшись посиланням <http://yakistosviti.com.ua/uk/22-sichnia>.

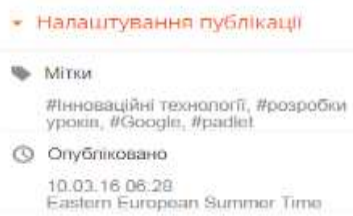
Щоб додати необхідне відео, потрібно його відкрити на YouTube, скопіювати адресу, тоді адресу додати у рядку про автора.

5. Щоб до повідомлень додати презентацію, текстовий документ чи таблицю, доцільно спочатку переглянути [відповідний відеоурок](#). Потрібно створити презентацію чи завантажити і відкрити її засобами Google. Далі *обрати Файл* → *Опублікувати в Інтернеті* → *Вбудувати*

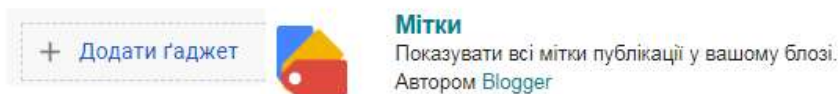
→ *Налаштувати параметри презентації* → *Скопіювати запропонований код*. Отриманий для презентації код *вписують до повідомлень блогу у режимі HTML*, а переглядають у режимі *Читання* (рис. 2.37).

6. *Гаджети* – невеликі інформаційні блоки, які можуть містити опитування, архів повідомлень, профіль адміністратора блогу, список постійних читачів блогу, посилання на Інтернет-сайти, вибрані публікації тощо. Блогосфера Blogger пропонує сотні готових гаджетів, які можна використати в блозі. Гаджети можуть збагачувати зовнішній вигляд блогу, підвищувати його «інтерактивність», полегшувати користування інформаційними ресурсами.

7. Доцільно до публікацій додавати ключові слова для прискорення пошуку – *Мітки* (рис. 2.38). Потім до блоку з гаджетами чи до основного блоку потрібно додати гаджет *Мітки* (рис. 2.39). Для цього обирають *Макет / Дизайн* → *Додати гаджет Мітки* → *Зберегти компонування*.



**Рис. 2.38.** Налаштування міток



**Рис. 2.39.** Додавання гаджета *Мітки*.

8. Учителю надзвичайно зручно використовувати у роботі вбудовані у блог календарі подій, добірки цитат відомих людей тощо. Наприклад, на сайті українського ділового мовлення (URL : <https://www.dilovamova.com/index.php?page=10>) пропонують скористатися кодами для календарних інформерів. Для цього додають гаджет → *обирають HTML / JavaScript* (рис. 2.40) → *вписують код* `<A href="https://www.dilovamova.com/"><IMG width=150 height=250 border=0 alt="Календарні події. Українське ділове мовлення" title="Календарні події. Українське ділове мовлення" src="https://www.dilovamova.com/images/wpi.cache/informer/informer.png"></A>` → *зберігають компонування*.



**Рис. 2.40.** Додавання гаджета *HTML / JavaScript*.



### РОЗДІЛ 3.

## МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ STEM-КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

У даному розділі посібника розкриваються можливі STEM-підходи, які доцільно використовувати у навчанні математики. Подані методичні розробки STEM-заходів – це приклади проєктів, інтегрованих уроків. Значну увагу у посібнику приділено впровадженню проєктних технологій навчання, реалізації міжпредметних зв'язків у навчанні математики. Дібрано зміст навчального матеріалу, комп'ютерно-орієнтовані методи і форми навчання. *Системи динамічної математики GeoGebra* [139-140], [145-147], *Gran* [127] розглядаються в пропонованих розробках як важливі Engineering-інструменти STEM-навчання.

До кожного з пропонованих заходів, які можна зреалізувати при вивченні зазначеної теми з математики, подано орієнтовну назву проєкту, зазначено вікову категорію здобувачів освіти, клас навчання в закладі середньої освіти чи курс навчання у закладі фахової передвищої освіти, окреслено перелік навчальних предметів, які можуть інтегруватися. Описано мету його проведення та обґрунтовано актуальність впровадження, запропоновано доцільне обладнання. Реалізуючи той чи інший захід, здобувачі освіти працюють в команді чи індивідуально. Здебільшого в розробках подано детальний опис алгоритму дій та рекомендації для впровадження, пропонуються варіанти *можливого практичного результату*, наведено приклади експериментів, які можна провести.

Представлені нижче розробки заходів можуть слугувати основою, базою при вивченні тієї чи іншої теми та проведенні STEM-заходів. Їх варто розглядати як *приклади / зразки* виконаних проєктів /досліджень для здобувачів освіти, щоб у них з'явилися нові власні ідеї, проєкти та продукти творчої та дослідницької діяльності. Доцільно видозмінювати, доповнювати пропоновані розробки саме в частині постановки проблеми, *плануванні власної діяльності* здобувачів освіти для отримання певного *продукту/результату та його презентації*. Детальніше про види практичних результатів, способи їх презентації описано нами в п. 1.4.6.

### 3.1. Мистецтво орнаменту

**Назва STEAM-проєкту:** Геометрія орнаменту.

**Назва теми (геометрія):** Геометричні перетворення.

**Вікова категорія:** 14-18 років; 9-10 клас; студенти 1-2 курсів фахових коледжів. **Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість), мистецтво, мова і література, історія України.

**Актуальність та мета:** основним математичним змістом є практи-



чне застосування рухів (симетрії, паралельного перенесення, повороту) для виконання українського орнаменту; дослідження особливостей орнаментів і виявлення видів геометричних перетворень; створення колекцій орнаментів, власних зразків, у тому числі з використанням системи динамічної математики, створення вишивок; різьблення дощочок та ін.; виховання дизайнерських знань та умінь; естетичне виховання.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, креслярські інструменти, матеріали для вишивання, вирізання на дереві та інше.

**Термін виконання:** 2-5 тижні. **Умови проведення** учасники<sup>1</sup> працюють в групах, досліджують та розробляють зразки орнаментів.

**Практичним результатом** втілення проєкту може стати колекція створених орнаментів, зроблена вишивка, виготовлені сумка для покупок – шопер; дощечки з нанесеним рисунком, друківана реклама тощо.

#### **Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

Створення орнаментів тісно пов'язане з використанням симетричних фігур, потребує виконання геометричних перетворень. А.С. Гурська цитує німецького математика і філософа Германа Вейля: *«Мистецтво орнаменту містить у неясному вигляді найдавнішу частину відомої нам вищої математики»*<sup>2</sup> (с. 49). Автор подає матеріал, який можна використати у роботі над проєктом «Геометрія українського орнаменту» ([http://wiki.iteach.com.ua/Користувач:Крамаренко\\_Тетяна\\_Григорівна](http://wiki.iteach.com.ua/Користувач:Крамаренко_Тетяна_Григорівна)).

Розглянемо приклад навчального проєкту, розробленого нами за програмою «Intel<sup>®</sup> Навчання для майбутнього» до навчальної теми «Геометричні перетворення на площині. Рухи». При розробці проєкту використовуються матеріали окремих тем трудового навчання, інформатики, мови та літератури.

Автори підручників Г.П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова пропонують цікаві напрями можливих досліджень за цією темою: що таке орнамент, де і коли з'явилися перші орнаменти, види орнаментів; характерні риси орнаментів у різних народів; орнаменти трипільської культури; орнаменти і вишивки мого краю; види геометричних перетворень на українських вишивках, види геометричних перетворень в орнаментах на різьбленні по дереву; технологія створення орнаментів; створення орнаментів на основі окремих видів рухів (паралельного перенесення, центральної чи осьової симетрії, повороту, на основі подібності); на основі композицій поворотів; улюблені орнаменти моєї родини; комп'ютерне створення орнаментів тощо.

Учасники мають набути навичок створення математичних моделей

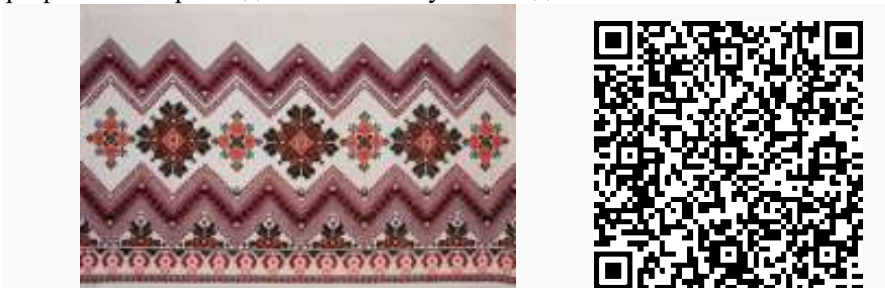
---

<sup>1</sup> У представлених далі проєктах будемо трактувати «учні» чи «студенти» як «учасники проєкту», «учитель» чи «викладач» – «керівник проєкту».

<sup>2</sup> Гурська А. С. Мова та граматики українського орнаменту : навч.-метод. посіб. Київ: Альтернативи, 2003. 144 с.

реально існуючих об'єктів та застосування математичного апарату для розв'язання прикладної задачі. Учасники ознайомляться з різними видами українських орнаментів, які притаманні різним регіонам України. Також вони навчатися виконувати вимірювання кутів повороту на малюнку і його симетричне відображення для отримання неповторного українського орнаменту (рис.3.1).

Наведені у [проєкті](#) малюнки, ілюстровані приклади містять диференціацію навчального матеріалу для тих, хто цікавиться математикою поглиблено. Учасники досліджують символіку «Рушника національної єдності» і розробляють проєкт для власного «Рушника єдності».



**Рис. 3.1. Фрагмент рушника з українським орнаментом**

Учасники будуть розробляти інформаційний бюлетень та веб-сторінки з фотографіями, малюнками та статтями для веб-сайту, створюватимуть та демонструватимуть власні мультимедійні презентації, набудуть навичок роботи у команді.

Можна переглянути [План вивчення теми "Геометричні перетворення. Рухи"](#) та [План впровадження проєкту](#).

Розглянемо, які навчальні цілі можуть бути досягнуті у процесі роботи над проєктом. Учасник / учасниця:

- наводить приклади фігур та їх образів при геометричних перетвореннях (перетворення руху), указаних у змісті; фігур, які мають центр симетрії, вісь симетрії; рівних фігур; пояснює, що таке переміщення (рух); образ фігури при геометричному переміщенні; фігура, симетрична даній відносно точки (прямої); симетрія відносно точки (прямої, площини); паралельне перенесення; поворот; рівність фігур; формулює означення рівних фігур; властивості переміщення; симетрії відносно точки (прямої, площини); паралельного перенесення; повороту;

- зображує і знаходить на малюнках фігури, в які переходять дані фігури при різних видах переміщень; обґрунтовує симетричність двох фігур відносно точки (прямої, площини); наявність у фігури центра (осі) симетрії; рівність фігур із застосуванням переміщень; доводить властивості симетрії відносно точки (прямої, площини); паралельного перенесення; повороту; застосовує вивчені властивості до розв'язування задач.

### **Після закінчення роботи над проєктом учасники зможуть знати**

- означення симетрії відносно точки, прямої / площини; повороту; паралельного перенесення; здійснювати проєктну діяльність за заданими умовами; графічно відображати творчий задум;
- давати творчу оцінку досконалості результатів проєктної діяльності;
- застосовувати принципи конструювання та моделювання у творчій діяльності; здійснювати конструювання та моделювання за графічним зображенням, за технічними умовами чи власним задумом.

### **Учасники проєкту повинні вміти**

- описувати перетворення руху на площині;
- будувати фігури, в які переходять дані фігури при перетвореннях руху;
- наводити приклади предметів навколишнього світу, які мають центр та вісь симетрії; розкладати та створювати об'єкти за допомогою композиції перетворень; знаходити приклади рухів в орнаментах; в природі; побуті; мистецтві; архітектурі; літературі;
- швидко та ефективно шукати відомості; використовувати комп'ютерні технології як інструмент для спілкування;
- критично та компетентно оцінювати відомості; здійснювати само-спрямування у власній роботі; працювати в команді;
- презентувати власні досягнення; швидко та ефективно шукати відомості, критично та компетентно оцінювати їх, уміти правильно та творчо використовувати дані для вирішення проблем;

### **Учасники проєкту мають сформувані навички**

- роботи над творчими ідеями для внесення вагомого та корисного вкладу у царину, в яку впроваджується інновація;
- здійснювати вибір та приймати комплексні рішення;
- визначати та ставити суттєві запитання для прояснення різноманітних позицій з питання «Рухів»;
- оформляти, аналізувати та синтезувати відомості для вирішення проблем та відповідей на запитання;
- ефективного спілкування: усного, письмового та за допомогою мультимедіа-засобів в різноманітних формах та в різних умовах;
- базового розуміння етичних/правових питань, пов'язаних з доступом до відомостей та їх використанням;
- використовувати цифрові технології комунікаційних мереж для доступу, управління, інтегрування, оцінювання та створення інформаційних даних для успішного функціонування в суспільстві математичних знань; використання комп'ютерних технологій як інструменту для спілкування, досліджень, організації, оцінювання відомостей, володіння базовим розумінням етичних/правових питань, пов'язаних з доступом.

У поданій нижче таблиці представлено основні етапи проекту, методи та інструменти оцінювання (табл. 3.1).

Таблиця 3.1.

**Етапи проекту, методи та інструменти оцінювання**

Методи оцінювання	Інструменти оцінювання
<b>На початку проекту</b>	
<p>Використовуються такі <b>методи оцінювання</b> як опитування; перегляд та обговорення презентації вчителя; робота з таблицями. Визначення попередніх знань учасників щодо теми та того, що саме вони знають, відбувається при заповненні <a href="#">ними Опитувальника у формі діаграми</a> (текстовий документ з схематичною діаграмою ) та таблиці 3-Х-Д (Знаю, Хочу дізнатися, Дізнався). Учні/студенти знайомляться з нотатками вчителя/викладача, з <b>Презентацією основних питань</b>, де визначають основні запитання, над якими потрібно буде працювати під час вивчення теми. Керівник знайомить учасників з <b>переліком навичок 21 століття</b> та спрямовує їх на набуття цих навичок та їх самооцінку.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Таблиця «3 Х Д»;</li> <li>● Опитувальник за темою проекту;</li> <li>● <b>Презентація основних питань</b></li> <li>● Опитування на знання основних понять до теми</li> <li>● Опитувальник "Що знаю і вмію?"</li> </ul>
<b>Впродовж роботи над проектом</b>	
<p>Використовують для оцінювання тих, хто навчається, наступні <b>методи</b>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● консультації (on-line);</li> <li>● продовження роботи з таблицями 3-Х-Д;</li> <li>● самостійну роботу учасників з листами оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту (само- і взаємооцінювання);</li> <li>● робота з опитувальниками до теми.</li> </ul> <p>Учасники також використовують Форму оцінювання самоспрямування власного навчання та навчання у групі; листи оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту (само- і взаємооцінювання). Результати роботи подають в онлайн-таблиці для контролю роботи над проектом.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Таблиця «3 Х Д»;</li> <li>● Листи оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту;</li> <li>● Форма самоспрямування роботи у групі;</li> <li>● Форма самоспрямування власного навчання</li> <li>● Форма оцінювання веб-ресурсів</li> <li>● Онлайн-таблиця для контролю;</li> <li>● <a href="#">Опитувальник до теми</a></li> <li>● Опитувальник (локальна v)</li> </ul>
<b>Наприкінці роботи над проектом</b>	
<p>Використовують такі <b>методи оцінювання</b> як демонстрація (захист проекту); робота з таблицями; анкетування; аналіз онлайн-таблиці та листів оцінювання. Періодичний перегляд та читання записів та коментарів учасників на сайті чи в групі проекту.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Таблиця «3 Х Д»;</li> <li>● <b>Презентація основних питань</b></li> <li>● Лист</li> </ul>

<p>дозволяє оцінити розуміння учасників і скерувувати їх навчання в потрібному напрямку.</p> <p>Учасники разом з керівником переглядають таблицю З-Х-Д оцінюють та самооцінюють, наскільки записи у колонках 2 і 3 можна співставити. Заповнюються листи оцінювання проекту, проводиться анкетування; результати висвітлюють у google-таблиці. Під час виступу з презентацією використовують форму оцінювання презентації. Контрольний список для оцінювання однолітками математичної презентації призначений для учасників, які дають зворотній зв'язок на виступ однолітків з демонстрацією їх проектної групової роботи з математики. Використовують Форму оцінювання проекту з балами для підсумкового оцінювання та лист-контроль Оцінювання навичок спільної діяльності роботи в групі та вклад, який зробив кожен учасник в роботу групи і наскільки його вклад був цінним. Учасники здійснюють рефлексію щодо формування навичок 21 століття.</p>	<p>оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Форма оцінювання презентації;</li> <li>• Форма оцінювання блогу;</li> <li>• Форма оцінювання сайту</li> <li>• Лист-контроль Оцінювання навичок спільної діяльності;</li> <li>• Онлайн-таблиця для контролю;</li> <li>• Опитувальники з матеріалами до теми;</li> <li>• Тексти письмової роботи.</li> </ul>
---	--

### Діяльність учасників проекту. І етап – Підготовчий.

#### До початку роботи над проектом вчитель/викладач/керівник

- створює сайт проекту, де висвітлюються покликання на корисні джерела відомостей та інтернет-ресурси, закладки на сайти, які будуть використовуватися в проєкті; передбачає різні варіанти для online консультацій учасників; разом з учасниками переглянути буклет про формування навичок мислення високого рівня (файл може бути створений за допомогою Publisher), завантажити перелік навичок 21 століття;
  - розглянути основні терміни та поняття до теми, що вивчається;
  - пересвідчитися, що учасники знають, як користуватися програмними засобами GeoGebra і Gran-2D, якщо передбачається їх використання; перевірити, чи учасники знають, як шукати відомості в мережі Інтернет, зберігати їх та документувати; здійснити роботу з учасниками щодо пошуку та оцінювання ними веб-ресурсів та дотримання законів про авторське право;
  - переконатися, що учасники попередньо мають відповідні навички роботи з MS Word, MS PowerPoint, MS Publisher чи хмарними сервісами Google, пошуковими серверами, відомостями в мережі Інтернет (збереження, пошук, перегляд), мають навички створювати блоги, сайти та забезпечити можливості навчання тих, хто таких навичок не має. При потребі можна використати опитувальник "Що знаю і вмію для роботи над проєктами?".

## II етап – Мотиваційний етап. Перший тиждень

- Перед учасниками ставиться ключове питання: що нас об'єднує? Під час проведення мозкового штурму відбувається його обговорення.

- Визначаються можливі напрями, які могли б дати відповідні набори даних. Обговорюються та оцінюються ідеї учасників, які вони пропонують.

- Керівник пропонує учасникам презентацію основних питань. Тематичні та змістові питання допоможуть учасникам зрозуміти тему та мету даного проєкту. Керівник обговорює з учасниками, наскільки є доцільним для запропонованої теми знання про геометричні перетворення.

- Щоб перевірити рівень володіння учнями/студентами записами основних математичних понять, а ті усвідомили і оцінили власні попередні знання та з'ясували, що саме вони знають з теми проєкту «Геометрія орнаменту», заповнюють дві перші колонки таблиці 3-Х-Д (знаю – хочу дізнатися).

- Щоб оцінити попередні знання учасників для виконання проєкту виконується завдання по заповненню графічних схем.

- Учасники формують 4 групи, обирають одну з тем для дослідження; обирають спосіб представлення результату своєї роботи.

- Використовуючи буклет про метод навчальних проєктів, учасники пригадують основні етапи здійснення навчального дослідження про відмінності орнаментів у різних регіонах України.

- Вчитель/викладач повідомляє, наприклад, що на сайті проєкту створено сторінку для рефлексії на кожному кроці роботи над проєктом. Цю ж сторінку можна використовувати для проведення консультацій online. Консультації можна отримувати, якщо використовувати і сервіс Google Групи, інструмент Форум (MOODLE), спілкування у групі з використанням Viber чи Messenger.

- Вчитель/викладач повідомляє, що використовує доступну онлайн-таблицю для контролю, в якій відображається результат просування кожної групи над дослідженням.

- Оскільки для дослідження учасники будуть використовувати Інтернет, то кожній групі доцільно ознайомитися з критеріями оцінювання інтернет-ресурсів; презентацією «Пошук відомостей у мережі Інтернет»

- Варто провести міні-лекцію «Авторські права в мережі Інтернет».

- Для оцінювання роботи в групі та вкладу, який вніс кожен учасник в роботу групи, і наскільки його внесок був цінним, керівники груп отримують лист-контроль «Оцінювання навичок спільної діяльності».

- Для забезпечення диференціації навчання вчитель/викладач рекомендує використовувати форму оцінювання самоспрямування роботи у групі, а також форму оцінювання самоспрямування власного навчання.

Учитель/викладач пропонує форму оцінювання проєкту та кінцево-

го продукту проєкту і проводить її обговорення. Ця форма містить огляд очікувань від створеного учасниками проєкту. Учитель/викладач просить учасників використовувати Форму, щоб допомогти їм відслідковувати прогрес у просуванні до завершення проєкту і те, як відбувається їх навчання.

### III етап – Конструктивний етап.

Вчитель/викладач пропонує учасникам використати документ *Контрольний список [Оцінювання веб-сайту](#), [Оцінювання публікації](#), [Оцінювання презентації](#)* (Форма1, Форма 2), щоб допомогти їм планувати та стежити за своїм прогресом. Попередньо відбувається обговорення цих форм з керівниками груп, щоб переконатися, що вони розуміють критерії оцінювання перед початком роботи. Рефлексія та консультації, взаємооцінювання відбувається протягом всієї роботи.

Одним із документів фасилітації є *Презентація основних питань*. Наставник у роботі має дотримуватися стратегій фасилітації. Для забезпечення диференційованого підходу у навчанні він використовує у роботі доцільні стратегії навчання і оцінювання обдарованих осіб та людей [з обмеженими можливостями](#).

**Другий тиждень.** Учасники, ознайомившись зі своїми тематичними питаннями, протягом першого тижня займаються пошуком відомостей, складають план діяльності для впровадження своїх планів, визначаються зі способом представлення результату роботи та використовують *Форми оцінювання самоспрямування* у навчанні ([Форма1]; [Форма2]). Учителю/викладачу доцільно провести рефлексію з тими, хто навчається, та індивідуальні консультації з кожною групою, скоригувати їх діяльність, надати певні рекомендації та спрямувати роботу над питаннями.

**Третій-четвертий тиждень.** Учасники в позаурочний час працюють над створенням презентації, публікації чи веб-сторінок.

- **I група, «Історики».** Можуть знайти історичні факти про походження українських орнаментів; дослідити семантику орнаментів; знайти цікаві відомості про вишивання рушників у різних регіонах України; проаналізувати, які геометричні перетворення зустрічаються в цих орнаментах. За результатами дослідження учасники можуть підготувати публікацію на сайті чи в блозі (наводимо приклад публікації, створеної за допомогою Publisher, яку можна завантажити і переглянути, рис.3.3). Учасники користуються критеріями *оцінювання публікації*.

- **II група, «Математики»** досліджують властивості різних видів рухів, готують повідомлення, з якими виступають на заняттях протягом другого і третього тижнів вивчення теми. Для успішних виступів учасники готують презентацію (приклад презентації). При цьому керуються формою з критеріями оцінювання. Крім того добирають відеофрагменти про вишивання, про поєднання кольорів тощо.

- **III група, «Дизайнери»** досліджують, як виконують геометрич-



ні перетворення за допомогою системи динамічної геометрії *Gran-2D* або *GeoGebra* і виступають з повідомленнями на заняттях, допомагають іншим виконувати ці перетворення за допомогою засобів. А також «дизайнери» добирають колекцію фотографій, малюнків з вишиваним одягом із різних регіонів України, аналізують, які перетворення використовують не лише в орнаменті, але й взагалі у конструкції. Вони, приміром, можуть розробити сторінку на сайті.



Рис. 3.3. Газета до проєкту «Геометрія українського орнаменту»

- **IV група, «Вишивальниці»** шукають відомості про «**Рушник національної єдності**», про що створюють сторінку на сайті проєкту, а також організують всіх вишивати власний «**Рушничок єдності**», використовуючи елементи українського орнаменту.

Учасники усіх груп розглядають застосування перетворення симетрії, повороту, паралельного перенесення до розв'язування задач.

**П'ятий тиждень.** Перед завершенням роботи учні/студенти, використовуючи *Критерії оцінювання підсумкової роботи*, перевіряють свою роботу та коригують навчальні потреби.

- Кожна група подає лист-контроль **оцінювання самоспрямування роботи у групі**; оцінювання навичок спільної діяльності.

- Перед захистом всі групи можуть обмінятися контрольними списками (Презентація ходу та результатів проєкту, Публікація чи Сайт тощо) та по ходу захисту оцінюють своїх товаришів. Наразі це зручно робити, якщо до створеного і розміщеного, наприклад, на Google-диску документа надати учасникам доступ з правом його редагування.

У призначений керівником день захисту проєкту під час виступу з презентацією використовують **форму оцінювання презентації**. **Контрольний список для оцінювання презентації** призначений для учасників, які дають зворотній зв'язок на виступ інших з демонстрацією їх проєктної групової роботи. **Подаємо приклади окремих робіт: веб-сайт, на**



сторінках якого представлено матеріали кожної з груп проєкту; презентація - звіт про роботу над проєктом (рис.3.3.); публікація (необхідно файл завантажити і переглянути за допомогою Publisher)

**IV етап – захист проєкту** Щоб перевірити рівень володіння учасниками навчальним матеріалом, відбувається підсумкове оцінювання вмінь і навичок та заповнюється і обговорюється третя колонка таблиці З-Х-Д. Учні/студенти разом з учителем/викладачем переглядають таблицю З Х Д оцінюють та самооцінюють, наскільки записи у колонках 2 і 3 можна співставити.

- **Учні/студенти можуть писати підсумкову письмову роботу**
- Підбиваються підсумки і виставляються учасникам проєкту оцінки.
- Після представлення всіх результатів відбувається узагальнююче обговорення ключового питання. Доцільно для подальшої участі у навчальних проєктах тим, хто навчається, здійснити рефлексію.

Відзначимо, які з **ключових компетентностей**, перерахованих в ст.12 Закону України «Про освіту» [3], і необхідних сучасній людині для успішної життєдіяльності, можуть набуватися у роботі над наведеним вище навчальним проєктом. Це вільне володіння державною мовою; математична компетентність; компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій; інноваційність; інформаційно-комунікаційна компетентність; навчання впродовж життя; культурна компетентність.

Спільними для всіх ключових компетентностей є такі вміння: читання з розумінням, уміння висловлювати власну думку усно і письмово, критичне та системне мислення, здатність логічно обґрунтовувати позицію, творчість, ініціативність, вміння конструктивно керувати емоціями, оцінювати ризики, приймати рішення, розв'язувати проблеми, здатність співпрацювати з іншими людьми.

При цьому учні / студенти **набуватимуть і предметної математичної компетентності**, розвиваючи її мотиваційний, когнітивний, операційно-процесуальний складники. Саме завдяки STEM-освіті («наука» + «технології» + «інжиніринг» + «математика») з використанням мобільних технологій вдається реалізувати усі дієві засоби засвоєння математики: математичні практикуми з завданнями дослідницького характеру; навчальні проєкти; демонстрація експериментів з їх аналізом, що систематизує отримані знання; навички розв'язування математичних задач.

#### **Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати учні/студенти, беручи участь у проєкті «Культурні коди математики»?

2. Які напрями досліджень доцільно окреслити в проєкті при вивченні геометричних перетворень фігур на площині та в просторі.

4. Для студентів яких спеціальностей фахових коледжів найдоцільніше запропонувати поданий вище проєкт? Які особливості, пов'язані зі спеціальністю, яка набувається, може мати подібний проєкт?

## 3.2. Геометрія паркетів

**Назва теми (геометрія):** Правильні многокутники, многогранники.

**Вікова категорія:** 15-17 років, учні 9-10 класів; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість), мистецтво, мова і література.

**Актуальність та мета:** вивчення теми «Многокутники» / «Многогранники», розуміння застосування математичних знань з теми, створення паркетів з правильних многокутників у комбінації з вписаними чи описаними колами, кругами, інших многокутників для заощення підлоги; виховання в учасників дизайнерських знань та умінь; естетичне виховання; фінансової грамотності.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, креслярські інструменти, матеріал для вирізання зразків паркету, клей тощо.

**Термін виконання:** 3-4 тижні.

**Умови проведення:** учасники працюють в групах чи індивідуально, розробляють зразки паркетів з правильних многокутників, виготовляють їх з матеріалів, розраховують вартість.

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проєкту може стати колекція створених макетів паркетів для застелення підлоги чи сюжетних мозаїк, складений кошторис проведення робіт.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

У даному STEAM-проєкті пропонуємо учасникам поміркувати про те, в чому виявляється краса математики? Як, знаючи математику, можна створювати красиве? Версії учасників будуть різними – краса ліній, малюнків і навіть задач чи методу розв'язування тощо. Важливо не пропустити жодної думки, дати можливість кожному висловитися. Можливо, таке спілкування допоможе учасникові по-новому поглянути на роль математики у власному житті, а тому пробудить інтерес до її вивчення.

Автори підручника «Геометрія, 9 клас» Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова пропонують низку тем проєктів, пов'язаних із заощенням площини: паркети і смуги; заощення площини правильними та напівправильними многокутниками, кольоровими многокутниками; паркети з поліміно, сюжетні мозаїки.

Щоб урізноманітнити паркети, зробити їх привабливішими, а найголовніше, щоб ще більше охопити і втілити у проєкті той матеріал, який вивчається відповідно до програми, доцільно розширити набір фігур для побудови і додати до них вписані у многокутники кола, шести-, трипелюсткові квіти чи інші фігури, що мають симетрію порядку  $n$ .

Проєкт відповідає державним освітнім стандартам та навчальній програмі з освітньої галузі «Математика». Всі навчальні здобутки учасників, їх навчальні продукти можуть перевищувати вимоги стандарту. В

ході реалізації проєкту учасники мають відповісти на питання: чи можна вважати геометричні паркети витворами мистецтва, для чого на практиці можуть бути потрібні правильні многокутники, як знання геометрії може вплинути на вибір їхньої професії чи удосконалення у професії? Питання спонукатимуть учасників до здійснення рефлексії, переосмислення власної діяльності, переоцінки власних здобутків.

Важливо здійснювати особистісний підхід у навчанні математики. Групі «Дизайнери» варто запропонувати обстежити паркети музеїв, картинних галерей, орнаменти лінолеумів в магазинах будівельних матеріалів. Тут правильні многокутники можуть перекриватися. Доцільно представити у вигляді діаграми результати дослідження: які види правильних многокутників використовуються у створенні паркетів. «Дизайнери» можуть проводити опитування з питання взаємозв'язків математики, краси і творчості, випускати газету тощо. Групи «математиків», «технологів» більше уваги приділяють пошуку алгоритмів побудови.

На стадії планування роботи керівник проєкту може запропонувати учасникам вибрати заняття відповідно до їхніх здібностей. Такий підхід сприятиме тому, що в учасників розвиватимуться пізнавальні інтереси, з'явиться бажання до пошуку нових фактів, що посилять внутрішню мотивацію. У зв'язку з можливістю вибору завдань і необхідністю досягнення певного рівня навчальних досягнень, потрібно навчати учасників *цілепокладанню*. Найпростіший рівень – вибрати мету з переліку запропонованих. Високий рівень – постійний вияв уміння прогнозувати кінцевий результат, прагнення до досягнення мети, наявність проміжних цілей. Здійснення рефлексії у навчанні (можливо, разом з керівником проєкту) допоможе учасникам скоригувати мету подальшої роботи, визначити власний навчальний шлях.

Визначимо етапи реалізації проєкту відповідно до загальної схеми проєктного навчання. *Підготовчий етап* пов'язаний з визначенням теми і мети проєкту, постановкою завдання. Керівник проєкту обговорює разом з учасниками план проєкту, уточнює завдання для кожної з груп, ознайомлює з критеріями оцінювання різних форм звітності. Учасникам пропонується опрацювати окремі джерела відомостей як друковані, так і електронні через мережу Internet.

*Другий етап* включає в себе пошук та аналіз відомостей. Учасникам потрібно дізнатися, що таке геометричні паркети, чим однорідні паркети відрізняються від неоднорідних, розглянути різні зразки<sup>1</sup>. Паркети, складені з правильних многокутників без перекривання, можуть бути двох видів – однорідними та неоднорідними. Однорідні паркети складаються з кількох видів правильних плиток, а у кожному вузлі сходиться однакова кількість плиток одного і того ж виду. У неоднорідних паркетів у вузлах сходиться різна кількість правильних многокутників.

---

<sup>1</sup> Бевз Г. П. Геометрія паркетів. Київ : Вежа, 2007. 88 с.

Багато, щоб дослідники обґрунтували, чому однорідних паркетів можна скласти лише одинадцять, в той час як кількість неоднорідних необмежена. Покажемо, як можна обґрунтовувати. Оскільки кут правильного  $n$ -кутника складає  $1/2 - 1/n$  частин повного кута, то будь-якому однорідному паркету відповідає певний набір натуральних чисел  $n, p, e, i, \dots$ , які задовольняють рівняння

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{i} + \dots = 1. \quad \text{В}$$

цілих числах рівняння має 17 розв'язків, але тільки 11 з них можна реалізувати у вигляді паркетів, плитки яких заповнюють всю площину і не перекриваються. Пошук розв'язків рівняння в цілих числах та їх перевірка є нестандартним завданням високого рівня. Наведемо приклади наборів для однорідних паркетів: 1) шість трикутників; 2) чотири квадрати; 3) три шестикутники; 4) квадрат і два восьмикутники; 5) трикутник і два 12-кутники; 6) 12-кутник, 6-кутник, квадрат; 7) трикутник, 2 квадрати, 6-кутник; 8) два квадрати і три трикутники. Неоднорідних паркетів (сходиться різне число правильних багатокутників) можна побудувати нескінченно багато. Наприклад, поділити один з шестикутників на трикутники. Відшукуючи потрібні відомості, учасники навчаються аналізувати матеріал, оцінювати його з позиції отримати новий продукт, усвідомлюють цей матеріал, розбирають обґрунтування певних фактів.

*Третій етап.* На занятті у формі проміжного звіту доцільно уточнити завдання, вимоги. Домашнє завдання, крім традиційних завдань, має передбачати добровільне творче – розробку і виконання ескізу паркету.

*Четвертий.* На одному з наступних уроків варто заслухати звіт «математиків-істориків». Вони ознайомлюють решту учасників з правилами побудови правильних багатокутників за допомогою циркуля та лінійки, розповідають, як це робили древні греки. Учасники готують відомості про внесок математика Гауса у розв'язання проблеми побудови правильних багатокутників, з'ясовують, які з правильних багатокутників можуть бути гранями правильних многогранників та який філософський зміст древні греки вкладали у Платонові тіла?

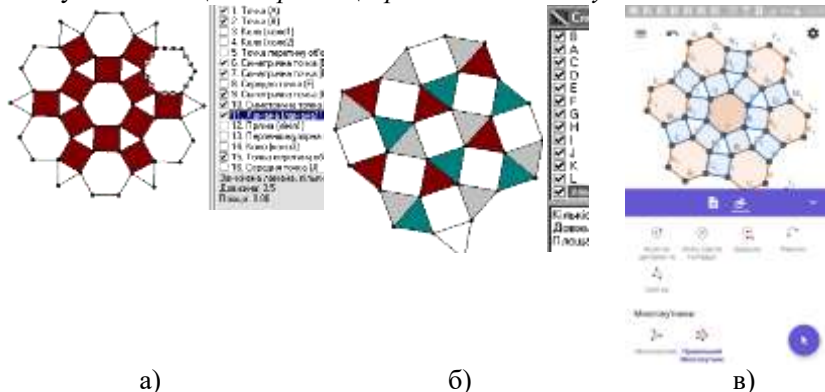
Інша група може звітувати про особливості побудови багатокутників за допомогою ПЗ GRAN-2D, DG, GeoGebra. Слід розглянути питання створення макроконструкцій для побудови правильних багатокутників за відомою стороною, квітів для оздоблення паркетів. Завдяки створенню та встановленню макроконструкцій вдається уникнути рутинності численних побудов, а це зробить процес розробки паркетів дійсно творчим.

Оскільки не кожний з багатокутників можна побудувати вручну за допомогою циркуля та лінійки, то корисно запропонувати учасникам розробити макроконструкції для наближеної побудови  $n$ -кутників з використанням програмного засобу. Для цього на колі, в яке має бути вписаний  $n$ -кутник, вибирають довільну точку і створюють об'єкт *Коло за радіусом*. Точку перетину двох кіл беруть за центр наступного кола. Операцію вико-

нують  $n$  разів. Тоді змінюють радіус малого кола так, щоб перша і остання точки співпадали. Центри малих кіл будуть вершинами правильного многокутника.

У ході реалізації проекту здобувачі освіти добирають дані і опрацьовують їх у групах. Для кращої організації спільної роботи бажано обрати керівника групи, надавати учасникам диференційовану допомогу, щоб уможливити їх навчання у «зоні найближчого розвитку». Завдання наставника – вчасно почути, помітити, підтримати кожного, організувати співпрацю. Його завдання *не лише передати певну суму знань, але й навчати учасників проекту самостійно їх здобувати і застосовувати*. Робота над навчальним проектом сприяє тому, що у здобувачів освіти розвиваються здібності до втілювання здобутих знань у духовні та матеріальні форми. Навчання у співпраці формує в них уміння розподіляти обов'язки між членами групи, стимулює розвиток здатності до міжособистісного спілкування, добросовісності, почуття обов'язку.

*П'ятий етап.* Одне з занять доцільно провести у комп'ютерному класі, де учасники проекту виконають побудови паркетів за допомогою системи динамічної математики GRAN-2D чи DG, з використанням GeoGebra на мобільних телефонах (рис.3.2.в). Паркети на рис. 3.2 а створено за допомогою макроконструкцій, тому в переліку об'єктів є кола, симетричні точки, точки перетину, середини відрізків. На рис. 3.2 б зображено паркет, який створено за допомогою GRAN-2D з використанням послуги *Об'єкт \ Створення \ Правильний многокутник*.



**Рис. 3.2.** Однорідні паркети а), б) виконано за допомогою GRAN-2D; в) скріншот побудови з використанням додатка GeoGebra для мобільного.

Для побудови вказуються дві сусідні вершини многокутника і кількість його сторін. Многокутник розташовується справа від побудованої сторони. Незважаючи на те, що будувати паркети за допомогою ПЗ швидше і приємніше, переконані, що спочатку необхідно сформувати в здобувачів освіти уміння виконувати побудови многокутників вручну, оскільки хід побудови цілком співпадає з ходом створення *Макроконструкції*.

*Шостий етап.* Під час заняття виводяться формули для радіусів вписаного та описаного кіл, для площі многокутника, площі кільця, сектора, сегмента. Одночасно з обчисленнями за формулами, слід продемонструвати, як здійснюються обчислення вказаних величин за допомогою ПЗ.

*Сьомий етап.* Учасники виконують розрахунки вартості паркету, враховуючи розміри кімнати, як вручну, так і за допомогою запропонованих ПЗ. Можна скористатися послугами обчислення площ многокутників, периметрів многокутників, довжин кіл, площ кругів. Для обчислення вартості викладання паркету можна скласти динамічні вирази.

*Заключний етап.* Оформлення результатів, презентація розробок, підведення підсумків. Учасники проєкту створюють його паспорт, зазначаючи, скільки і яких матеріалів потрібно придбати, яка їх вартість, загальна вартість проєкту. Публікації, презентації відображають хід дослідження. На сайті подають оголошення про конкурс, його результати, зберігають колекцію створених малюнків. Створюючи презентацію, здобувачі освіти навчаються виступати перед аудиторією, структурувати доповідь, удосконалюють уміння добирати переконливі факти для демонстрації думок, ідей.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у проєкті «Геометрія паркетів»?
2. Як можна розвивати фінансову грамотність здобувачі освіти?
3. Запропонуйте інші міжпредметні проєкти, які можна реалізувати при вивченні теми «Правильні многокутники»?
4. Для студентів яких спеціальностей фахових коледжів найдоцільніше запропонувати поданий вище проєкт? Які особливості, пов'язані зі спеціальністю, яка набувається студентами, може мати подібний проєкт?

### **3.3. Геометрія писанки**

**Назва теми (геометрія):** Геометричні перетворення.

**Вікова категорія:** 15-17 років; 9-10 клас; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість), мистецтво, мова і література, історія України, фізика.

**Актуальність та мета:** мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити здобувачів освіти з різними видами рухів, подібністю і гомотетією, їх властивостями; ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, креслярські інструменти, матеріали для виготовлення писанки, зокрема віск, парафін, шкарлупки яєць, прилади для нанесення воску чи парафіну.

**Умови проведення:** учасники працюють в групах чи індивідуаль-

но, досліджують історію виникнення писанкарства, трактування орнаментів для писанок, розробляють власні зразки орнаментів, у тому числі з використанням програмних засобів; виготовляють власну писанку.

**Практичним результатом STEAM-проєкту** може стати як виготовлена традиційна писанка, так і створена колекція писанок в системі динамічної математики; здійснені розрахунки можливих прибутків від продажу сувенірів.

#### **Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

При вивченні перетворень з використанням GRAN-2D чи DG заняття доцільно провести у комп'ютерному класі. Якщо ж планується використання *GeoGebra*, доцільно учасникам навчального процесу попередньо завантажити на мобільні телефони додаток *Геометрія*. Тоді можна буде працювати у звичайній аудиторії. Добре, якщо у менеджера буде можливість демонструвати [надіслані учасниками наочності](#) через проєктор.

У процесі використання динамічної математики на етапі формування понять, дослідження властивостей переміщення, перетворення подібності особливу увагу звертатимемо на розвиток мотиваційно-творчої спрямованості особистості, творчого інтересу, потягу до пошуку нових даних, пізнавальної самостійності ([добірка наочностей GeoGebra](#), [урок з методичними рекомендаціями вивчення теми](#)).



Доцільно побудувати фігури, які є центральносиметричними; мають вісь симетрії чи симетрію обертання порядку  $n$  (фігура, яка внаслідок повороту навколо деякої точки фігури на кут  $360^\circ/n$  переходить в себе). [На рис. 3.4 і 3.5 наведено приклад фігури, яка має симетрію  \$n\$ -го порядку](#), і зроблено пояснення, як потрібно такі фігури будувати.

Щоб отримати калейдоскоп, зазначають прив'язку результуючих об'єктів до початкового. У цьому разі будь-яка зміна в розташуванні вершин ламаної, що повертається, відобразиться на решті ламаних, створених в результаті повороту.



**Рис.3.4. [GeoGebra](#)**



**Рис. 3.5. Фігури, що мають симетрію  $n$ -го порядку (файл [GRAN-2D](#))**







Подібна можливість може бути здійснена і для класичної *GeoGebra*. Якщо застосовують додатки для мобільних телефонів, то поки що на мо-

жемо прописати назву кута, а не його величину у градусах. Для зручності представимо перелік кроків побудови фігури, яка має симетрію обер-тання за допомогою мобільних додатків *Геометрія* у вигляді табл. 3.2.

Таблиця 3.2.

**Послідовність виконання побудови фігури з симетрією повороту**

1		Створити довільну точку O – центр повороту.
2		Створити ламану, послідовно вказавши її вершини. Оскільки планується побудувати фігуру, що має симетрію 6-го порядку, по визначають кут повороту $360^\circ/6=60^\circ$ .
3		Повернути початкову ламану на кут $60^\circ$ . Для цього спочатку вказують вихідний об'єкт (замкнену ламану), центр повороту O, кут повороту $60^\circ$ . При цьому будуть створені точки – вершини другої ламаної
4		Потім повертають на кут $60^\circ$ другу ламану, далі третю, четверту і п'яту (рис.3.4).

Група «Писанкарі» може готувати матеріал про орнаменти у писанкарстві, а також колекцію картинок з писанками і власних писанок, яку демонструють під час захисту проєкту. Результати роботи представляють на сторінках сайту. Розробляючи сторінки сайту, учасники використовують критерії оцінювання веб-сайту (рис. 3.6).

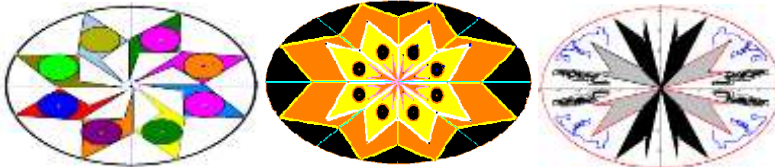


Рис. 3.6. Візерунки для писанок

Для перевірки результатів роботи над проєктом, крім письмових контрольних робіт, доцільно використовувати вправи, розроблені з використанням хмарного сервісу LearningApps (Знайти слова (тема "Геометричні перетворення на площині")). Скріншот запропонованої вправи представлено на рисунку 3.7.

**Контрольні питання і завдання**

1. Наведіть приклади завдань, які можна виконувати з використанням засобів динамічної геометрії.

2. Доповніть перелік завдань, які можуть виконувати здобувачі освіти, працюючи над проєктом за темою «Геометричні перетворення фігур»: дібрати колекції, що демонструють геометричні перетворення в архітектурі, техніці, живій природі; дослідити перетворення в українському орнаменті; створити власний орнамент; представити розробку узору писанки (світлини писанок на рис. 3.8), виготовити власну писанку.





Вправа у режимі перегляду

### Фонове зображення

Можете обрати фонове зображення для кросворду

  Пошук зображення  Розмір: 174 x 114  редагувати зображення

### Слова

Запишіть слова для пошуку тут:

Слово:

Підказка:

Слово:

Підказка:

Слово:

Підказка:

Слово:

Підказка:

**Рис. 3.7.** Вправа на відшукування термінів в режимах перегляду та редагування.



Рис. 3.8. Виставка писанок у Києві на Михайлівській площі (травень, 2017 р.)

### 3.4. Симетрія навколо нас. Фрактали.

**Назва теми (геометрія):** Перетворення фігур.

**Вікова категорія:** 15-16 років. 9-10 клас; студенти 1-2 курсів фахових коледжів. **Навчальні предмети:** геометрія, технології, мистецтво, фізика, хімія, біологія.

**Актуальність та мета:** здобувачі освіти мають сформувати уміння та навички роботи над творчими ідеями для внесення вагомого та корисного вкладу у царину, в яку впроваджується інновація. Здійснювати пошук симетрії у оточуючому світі: у побуті, архітектурі, мистецтві, живій природі тощо. Учасники навчального процесу повинні вміти наводити приклади предметів навколишнього світу, які мають центр та вісь симетрії; розкладати та створювати об'єкти за допомогою композиції перетворень; швидко та ефективно шукати відомості; використовувати комп'ютерні технології як інструмент для спілкування; критично та компетентно оцінювати відомості; здійснювати самоспрямування у власній роботі; працювати в команді.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, креслярські інструменти, фотокамери, 3D-принтер та ін.

**Умови проведення:** учасники формуються у малі групи по 2-3 особи. За бажанням можна здійснювати індивідуальну проєктну діяльність. Кожна група обирає для проєктної діяльності одну із тем (табл. 3.3).

**Практичним результатом** втілення проєкту можуть стати колекції симетричних фігур, власні зарисовки / вироби, що містять симетрію (рис. 3.9), добірки зображень фракталів, виготовлення емблем тощо.

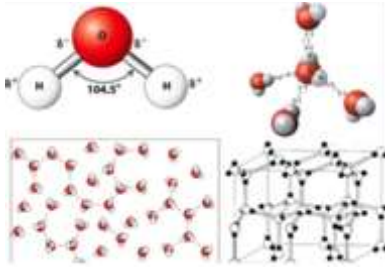
**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, інженерії, архітектурі та мистецтві отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях (переглянути [приклад кейс-уроку](#), проєкту [Правильні многокутники](#)).

Пропонуємо переглянути [добірку наочностей GeoGebra](#) для побудови центральносиметричних фігур та фігур, що мають вісь симетрії.

Таблиця 3.3.

**Перелік навчальних предметів та питань**

Математика	Поняття симетрії, види симетрії
Кристалографія	Симетрія многогранників в структурі мінералів
Біологія	Симетричність – найважливіша характеристика будови тіла тварин та людини, багатьох рослин
Хімія	Симетрія в геометричній конфігурації молекул
Фізика	Аналіз фізичної системи на основі наявних даних про симетрії, якими ця система володіє
Архітектура	Архітектурні споруди, створені людиною, у більшій своїй частині симетричні
Мистецтво	Симетричність побудови картин, симетрія орнаментів



Симетрія будови молекул



Симетрія в архітектурі (станція Рокувата)



Векторна графіка



Симетрія в природі



Симетрія і фрактали у природі та комп'ютерній графіці

Рис. 3.9. Приклади симетрії та фракталів.

### *Контрольні питання і завдання*

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у проєкті «Симетрія навколо нас»?
2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи чи студентам 1-2 курсів фахових коледжів за проєктом «Симетрія та фрактали»? Наскільки доцільним у проєкті буде поєднання дослідження симетрії з можливістю створення програм побудови фракталів?
3. Як можна застосувати 3D-принтер у проєкті про симетрію?
4. Запропонуйте інші міжпредметні проєкти, які можна реалізувати при вивченні геометричних перетворень фігур на площині та в просторі.
6. Як відрізнятимуться завдання за проєктом для учнів старшої школи і студентів 1-2 курсів фахових коледжів?

### 3.5. «Золотий переріз» та «золота пропорція» у мистецтві, побуті та архітектурі

**Назви тем з математики:** Раціональні числа (6 клас); Перетворення фігур; Многогранники; Тіла обертання (9-10-11 клас, студенти 1-2 курсів фахових коледжів).

**Вікова категорія:** 12-13; 15-16, 16-17 років.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології, мистецтво, народознавство, історія (табл. 3.4).

**Актуальність та мета:** головна ідея STEAM-проєкту полягає в пошуку формули гармонії в архітектурі, мистецтві, побутових речах тощо. Здобувачі освіти перевіряють, наприклад, висунуту гіпотезу про те, що пропорції української хати є гармонійними і пов'язаними з «золотим перетином», здійснюють пошук «золотої пропорції» у творах мистецтва, архітектурі, живій природі тощо. Практична значущість проєкту крім навчального має і культурологічне значення. Перевірка цієї гіпотези вимагає від учасників знань та навичок з різних навчальних дисциплін, адже показує що навіть типова сільська архітектура базується на загальнолюдських принципах гармонії прекрасного. Працюючи над проєктом, учасники удосконалюватимуть STEM-компетентності та ключові компетентності, розвиток яких передбачено проєктом. Зокрема, уміння вчитися, соціальну та загальнокультурну компетентності, компетентності з інформаційних і комунікаційних технологій.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, вимірвальні та креслярські інструменти, зокрема додаток для мобільних телефонів Measures, прилади та матеріали для створення малюнків, предметів, що містять «золотий переріз» тощо.

**Умови проведення:** учасники формуються у малі групи по 2-3 особи. За бажанням можна здійснювати індивідуальну проєктну діяльність. Кожна група обирає для проєктної діяльності один із напрямів.

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проєкту може стати колекція дібраних зображень, матеріалів тощо, що містять «золотий переріз»; власноруч виготовлені предмети, малюнки тощо з наявністю «золотої пропорції», зроблено висновок про можливу наявність «золотого перерізу» в українському побуті та архітектурі.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Ключове питання проєкту – як використовуються знання з математики в створенні гармонії навколишнього світу? Щодо архітектури, то учасники зможуть встановити, що таке «золотий перетин», «золота пропорція» та які математичні співвідношення найчастіше зустрічаються в архітектурі типового українського житла? Наведемо приклади розроблених та впроваджених кейс-уроку і проєкту «Золотий переріз» ([приклад1](#), [приклад2](#)).

І. Учні /студенти разом зі своїм наставником висувають гіпотезу про наявність «золотої пропорції», готують план роботи над проєктом.



II. Вони шукають, аналізують, систематизують, створюють банк джерел і ресурсів. З'ясовують, що означає «золота пропорція», шукають матеріали, пов'язані з історією та архітектурою, наприклад, традиційного українського житла, створюють базу з найбільш важливими джерелами відомостей з проєкту.

III. Проводять дослідження; шукають зразки традиційної архітектури у власному селі чи у музеї побуту, проводять необхідні вимірювання; вивчають народні традиції, пов'язані з житлом та його будівництвом.

IV. Учасники проєкту опрацьовують результати досліджень, аналізуючи отримані матеріали; відшукують залежності між елементами споруд, намагаються знайти найбільш використовуване відношення.

V. Узагальнюють результати дослідження. Учасники проєкту порівнюють відшукані співвідношення з величиною «золотого перетину», намагаються відшукати причини такої залежності. Далі йде підтвердження чи спростування початкової гіпотези.

VI. Відбувається публічний захист проєкту; підбиваються підсумки роботи, здійснюється обмін думками.

*Таблиця 3.4.*

#### **Перелік навчальних предметів та питань**

<b>Предмет, галузь</b>	<b>Питання, які висвітлюються</b>
Математика	Що таке золотий переріз?
Музика	Чи є випадковістю наявність "золотих перерізів" у музичних творах багатьох композиторів?
Психологія	Як сприймається зображення, що містить "золотий переріз"?
Біологія	В основі яких організмів, біологічних побудов лежить "золотий переріз"?
Астрономія	Як відношення орбіт планет зв'язане з "золотим перерізом"?
Мистецтво	Як зв'язана гармонічність побудови творів мистецтва із "золотим перерізом"?
Архітектура	У чому полягає основна таємниця античної архітектури? І як це зв'язано із "золотим перерізом"?
Анатомія	В яких частинах тіла людей і тварин присутні пропорції "золотого перетину"?

#### **Контрольні питання і завдання**

1. Які напрями досліджень можна запропонувати здобувачам освіти за проєктом «Кругові орнаменти у архітектурі»? Що може бути кінцевим результатом (продуктом) у роботі над таким проєктом?

2. Як диференціювати завдання за проєктом «Геометричні форми у мистецтві» для учнів старшої школи та студентів 1-2 курсів фахових коледжів?

### 3.6. Геометричні форми в архітектурі

**Назва STEAM-проєкту:** «Проєктуємо Трикутоцентр»

**Назви тем:** Трикутники. Ознаки рівності трикутників (геометрія, 7 клас); Многогранники (11 клас, студенти 1-2 курсів фахових коледжів).

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість), мистецтво, мова і література, історія.

**Актуальність та мета:** практичне застосування знань про трикутники; дослідження використання трикутників в архітектурі, побуті тощо; естетичне виховання молоді; виховання технічної та фінансової грамотності. Для учнів старшої школи та студентів 1-2 курсів фахових коледжів трикутники можна розглядати як грані піраміди, грані правильного тетраедра, октаедра, ікосаедра, напівправильних многогранників.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, креслярські інструменти, матеріал для вирізання макету центру з картону, клей тощо; 3-D принтер для роздрукування фрагментів для макету.

**Умови проведення:** учасники працюють в групах чи індивідуально.

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проєкту може стати колекція зібраних малюнків, світлин зі спорудами, що містять фрагменти трикутної форми; колекція світлин з ландшафтного дизайну трикутної форми; виготовлений з картону чи з пластику макет. А також необхідні фінансові розрахунки за проєктом.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

Пропонуємо розробку плану проєкту за поданим покликанням [http://wiki.iteach.com.ua/Портфоліо\\_Банеди\\_Ольги\\_Сергіївни](http://wiki.iteach.com.ua/Портфоліо_Банеди_Ольги_Сергіївни) з теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» (рис.3.10). Для спільної роботи над проєктом можна використовувати пропонований шаблон сайту.

#### **Контрольні питання і завдання**

1. Як диференціювати завдання за проєктом для учнів основної та старшої школи?
2. Які завдання за проєктом доцільно запропонувати студентам 1-2 курсів фахових коледжів залежно від спеціальності, яку вони опановують?
3. Які STEM-компетентності можуть розвивати здобувачі освіти?



**Рис. 3.10.** Авторка проєкту досліджує трикутні конструкції на майдані у Києві

### 3.7. Кругоманія

**Назва теми:** Коло і круг (7 клас, 12-14 років).

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість), мистецтво, мова і література, географія.

**Актуальність та мета:** практичне застосування знань про коло та круг; дослідження використання в архітектурі, побуті тощо. Експериментальне отримання числа  $\pi$  через вимірювання відношення довжини обода до діаметра кола.

**Обладнання:** прилади для фотографування, сканування, нитки, мірні стрічки, речі побуту, що містять круг чи коло (порожні каструля, чашка, склянка, банка тощо), інструменти для запису вимірювань.

**Термін виконання міні-STREAM-проєкту:** 1 тиждень.

**Умови проведення:** учні працюють в парах чи індивідуально.

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проєкту може стати колекція зібраних малюнків, світлин зі спорудами, що містять форми у вигляді кіл та кругів; колекція світлин з ландшафтного дизайну у вигляді кругів та ін. В результаті дослідження відношення довжини ободка до його діаметра учні знаходили числа близькі до числа  $\pi$ . За всіма зібраними даними знайдено наближене значення числа  $\pi$ .

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Пропонуємо розробку плану навчального проєкту для 7-го класу за поданим покликанням [Коло і круг](#). Ми побували під час виробничої практики студентки Карини Шавиріної на захисті описаного проєкту у сьомому класі в Криворізькій гімназії №95. Учні вдало презентувати результати власних досліджень; критично та компетентно оцінювати їх, уміти правильно та творчо використовувати дані для вирішення проблеми пошуку числа  $\pi$ .

Під час роботи з проєктом учні об'єдналися у три групи. Учні першої – «Дослідники Кривого Рогу» – досліджують місцевість міста і виявляють в архітектурі, побуті тощо будови, атрибути, предмети на у формі кола і круга (рис.3.11). Учні другої – «Математики» – досліджують чи залежить число  $\pi$  від довжини та діаметра кола. Учні групи «Дослідники світу» досліджують, де зустрічається коло і круг в навколишньому світі та створюють схему про те, де використовується назва «коло».



Рис. 3.11. Світлини об'єктів Кривого Рогу у вигляді кіл



### 3.8. Конструктивна геометрія

**Назва теми:** задачі на побудову, починаючи з 7-го класу до 11-го класу, впродовж вивчення курсу планіметрії та стереометрії.

**Вікова категорія:** з 12 років.

**Навчальні предмети:** геометрія, інформатика, креслення.

**Актуальність та мета:** створення динамічних конструкцій з використанням систем динамічної математики виконується згідно алгоритмів розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки. Використання динамічних наочностей з можливістю проведення обчислювальних експериментів сприятиме набуттю учнями / студентами дослідницької та технологічної складових математичної компетентності, розвиватиме STEM-компетентності.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше – GRAN-2D, DG, креслярські інструменти.

**Термін виконання:** впродовж вивчення цієї чи іншої теми.

**Умови проведення:** учні працюють в групах чи індивідуально.

**Прогнозований результат:** створене динамічне креслення до задачі на побудову / обчислення / дослідження.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження**

#### 3.8.1. Клас 7-8-9. Приклади завдань.

Продемонструємо застосування методу побудови з використанням циркуля та лінійки – методу геометричних місць точок – на прикладі задачі: *побудувати трикутник ABC, якщо задано радіус кола, описаного навколо трикутника, кут A і медіану, проведену з вершини B* (рис. 3.12) ([розробка GeoGebra](#)). [Для розробки](#) на сайт GeoGebra додано коментар щодо побудови як посилання на [відео з Youtube](#) тощо.

Необхідно з'ясувати, до знаходження яких точок зводиться розв'язування задачі, і які дві вимоги мають ці точки задовольняти. У запропонованій задачі такими є точки C, A – вершини трикутника і точка L – основа медіани. На другому кроці відкидають одну з вимог задачі і будують геометричне місце точок, що задовольняють іншу вимогу. На третьому кроці будують ГМТ, які задовольняють раніше опущену вимогу. На заключному знаходять точки перетину геометричних місць точок. Розглянемо хід виконання побудов (рис. 3.12).

1) У лівому верхньому куті будуємо два відрізки, що відповідають радіусу кола та медіані, а також кут. Доцільно використати інструмент *Прапорець*, щоб тимчасово приховувати ці побудови, щоб учень мав змогу подумати, що саме йому потрібно будувати.

2) Будуємо коло заданого радіуса з центром у довільній точці O (інструмент *Коло / Циркуль*), проводимо у ньому довільну хорду XB (точки X, B прикріпити до кола; використати послугу *Об'єкт / Відрізок*).

3) Від променя XB відкладаємо кут з вершиною у точці X, рівний

даному (інструмент *Кут, рівний даному*). Збільшення чи зменшення величини кута вестиме до автоматичної перебудови креслення. Друга сторона кута перетне коло у точці, яку позначимо  $C$ .

Третя вершина трикутника – точка  $A$  буде лежати на колі в тій же півплощині по відношенню до прямої  $BC$ , що й точка  $X$  (ГМТ №5).

4) Будуємо коло з центром у точці  $B$  і радіусом, рівним медіані (ГМТ №1) (інструмент *Циркуль*).

5) Геометричним місцем середин всіх хорд, що виходять з вершини  $C$ , є коло з діаметром  $OC$  (ГМТ №7). Точка  $K$  – середина  $OC$ .

6) Якщо кола  $(K, OK)$  і  $(B, m_b)$  перетинаються в точці, яка лежить в одній півплощині з точкою  $X$  відносно прямої  $BC$ , то через цю точку  $L$  проводимо промінь  $CL$  до перетину з колом  $(O, R)$ . Отримаємо точку  $A$ .

7)  $ABC$  – шуканий трикутник, оскільки задовольняє всім вимогам, що ставились в умові задачі.

8) Досліджуємо за вихідними даними вид трикутника, довільно змінюючи кут, довжину радіуса кола та медіани. Задача має розв'язки, якщо кола  $(K, OK)$  і  $(B, m_b)$  перетинаються в точці над хордою  $BC$ .

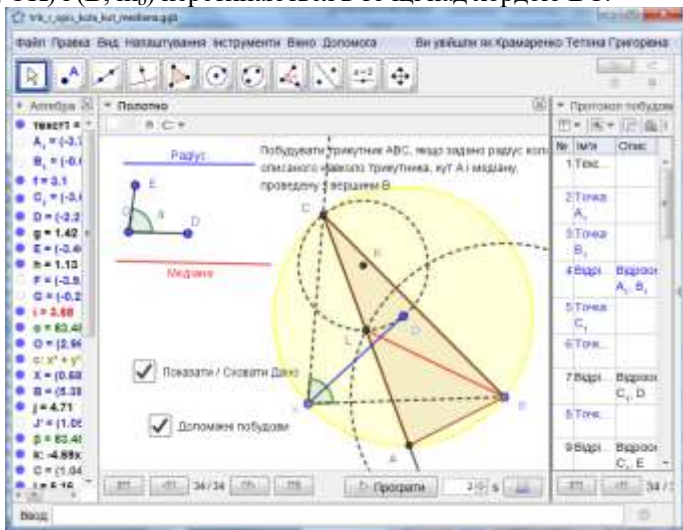


Рис.3.12. Побудова до задачі ([розробка GeoGebra](#))

Розглядаючи **перетворення подібності**, доцільно запропонувати учням випереджаюче домашнє завдання – самостійно здійснити дослідження властивостей перетворення, використовуючи розроблені динамічні креслення, і скласти звіт. Наприклад, нами розроблено такі наочності для дослідження властивостей перетворення «Подібність». Використовувати URL :з можливістю завантаження файлу <http://www.geogebra.org/material/show/id/42625> для класичної версії GeoGebra або ж <https://www.geogebra.org/m/KkjMTpPn> для використання

також на мобільних телефонах (рис. 3.13, рис. 3.14).

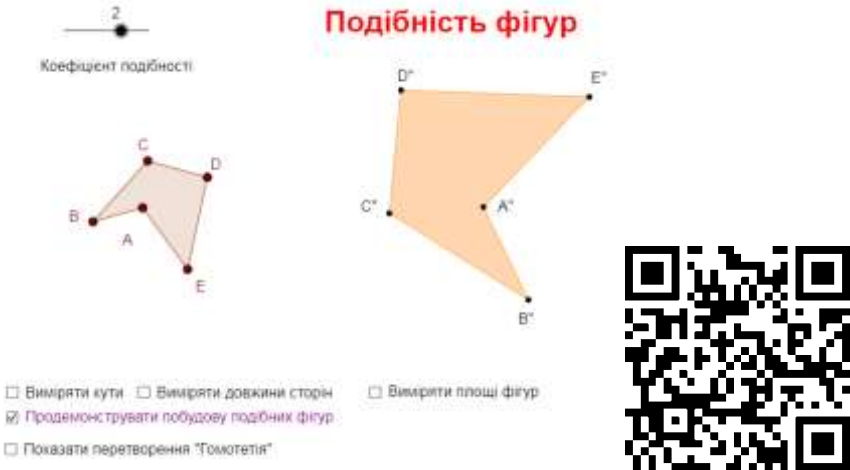


Рис 3.13. Видяг полотна, відкритого для дослідження ([розробка GeoGebra](#)).

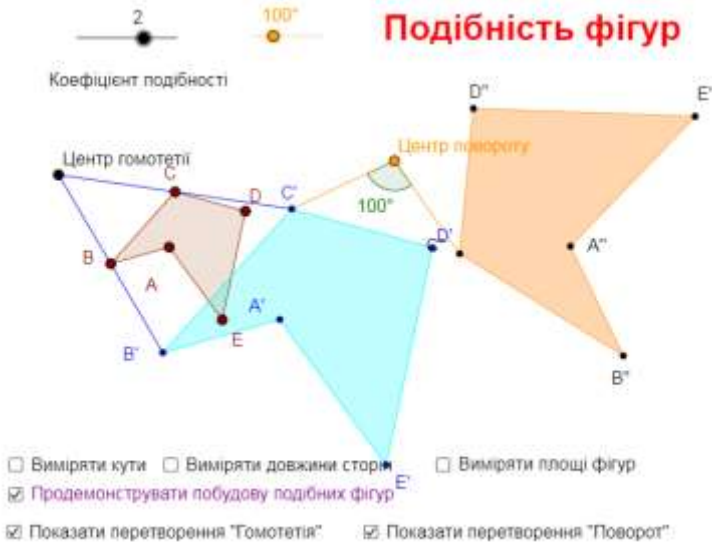


Рис. 3.14. Видяг полотна з відкритими деталями побудови

Варто стимулювати учасників висловлювати гіпотези щодо властивостей перетворення "Подібність". Доцільно продемонструвати побудову подібних фігур як комбінації гомотетії та повороту. Проведення дослідження і узагальнення його результатів сприятиме формуванню в тих, хто навчається, дослідницької математичної компетентності.

На рис. 3.14. представлено креслення з увімкненою побудовою гомететичної фігури. У процесі дослідження учасники можуть відкривати тимчасово приховані відомості (виміри кутів, довжини сторін, площі фігур).

Учитель повинен володіти навичками складання орієнтовних **планів дослідження** (завдання для учня).

1. Знайдіть відношення довжин відповідних сторін і порівняйте його із записаним значенням коефіцієнта подібності. Запишіть гіпотезу.

2. Виміряйте відповідні кути у подібних фігур. Запишіть гіпотезу.

3. Проведіть дослідження, змінюючи значення коефіцієнта подібності; змінюючи форму однієї з представлених фігур.

4. Знайдіть відношення площ подібних фігур, порівняйте знайдене число з коефіцієнтом подібності. Запишіть гіпотезу про зв'язок.

5. Дізнайтеся, як можна отримати подібні фігури. Проведіть дослідження для різних кутів і розташування центрів гомететії чи повороту.

6. Самостійно дайте відповіді на питання: а) які фігури будуть подібними; б) що виражає коефіцієнт подібності; в) про які властивості подібних фігур дізналися; г) в результаті яких перетворень і як можна отримати подібні фігури?

7. Дізнайтеся більше про перетворення "Подібність" у науково-популярній та у навчальній літературі.

### *3.8.2 Клас 10-11. Приклади побудов до задач.*

Розглянемо, які завдання конструктивної геометрії можна запропонувати учням **при вивченні стереометрії**. У публікаціях [26; 17; 27], [125] нами висвітлювалися проблеми розвитку STEM-компетентностей учнів у профільному вивченні математики.

Детальніше зупинимося на висвітленні **особливостей означення і побудови кута між площинами та лінійного кута двогранного кута**.

За допомогою GeoGebra (полотно 3D) можна здійснювати побудову у полотні основи піраміди (Оху) і при цьому побудови можуть синхронно відобразитися на 3D-полотні (рис. 3.15).

Варто привернути увагу до зручності за допомогою засобу побудови лінійних кутів двогранних кутів при основі. Згідно з означенням для визначення лінійного кута двогранного кута при основі необхідно провести площину, перпендикулярну до ребра двогранного кута. Тоді кут між утвореними променями в результаті перетину цієї площини з гранями двогранного кута визначить його лінійний кут. Варто зазначити, що величина кута між площинами змінюється в межах від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Тоді як величина двогранного кута може змінюватися в межах від  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

Наведемо приклад задачі з підручника для профільного вивчення математики (№ 836, [119, с. 162]).

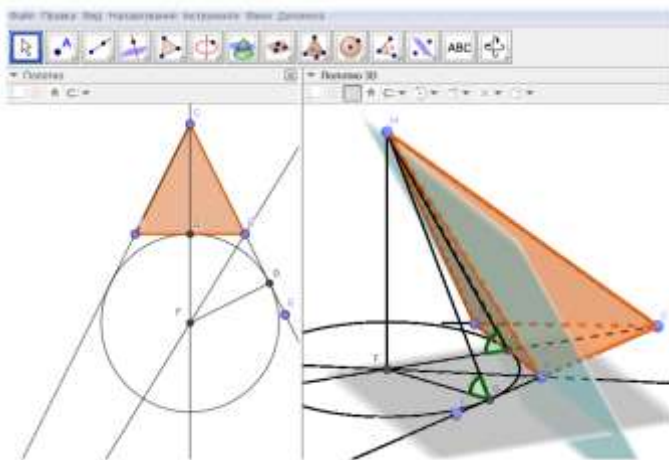
**Завдання 1.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з ку-

том  $\beta$  при вершині та радіусом  $R$  описаного кола. Площина кожної грані піраміди утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайти площу бічної поверхні.

Для побудови креслення до задачі доцільно використати одночасно 2D і 3D-полотно.

Часто допускаються помилки, оскільки розглядають лише один випадок. При цьому підміняють поняття «кут між площиною бічної грані і площиною основи» на «двогранний кут при основі». Якби в умові задачі був запис «двогранні кути при основі рівні», то розглядали б піраміду, у якій вершина проєктується в центр кола, вписаного в трикутник основи.

Оскільки мова йде лише про рівні кути між площинами, то задача матиме два розв'язки. Потрібно розглянути також випадок, коли один із двогранних кутів при ребрі основи тупий. У цьому разі вершина піраміди проєктується в центр зовнівписаного кола (рис. 3.15).



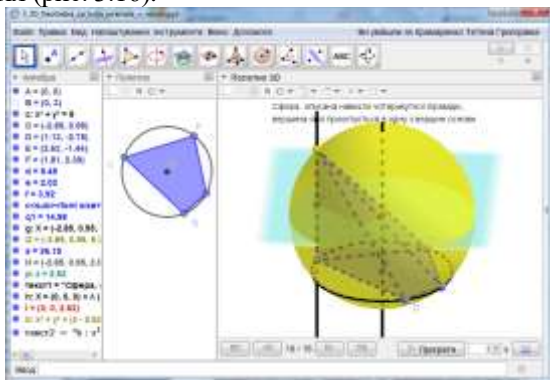
**Рис. 3.15.** Зображення піраміди і лінійних кутів (полотно 2D, полотно 3D)

Використання у навчанні стереометрії GeoGebra сприятиме формуванню в учнів при вивченні математики STEM-компетентностей, удосконаленню ключових математичної та цифрової компетентностей, компетентності у самонавчанні, розвитку просторової уяви та просторового мислення. Щоб спрямувати учителів математики та інформатики до впровадження у навчальний процес елементів STEM-освіти, доцільно у процесі їх навчання чи підвищення кваліфікації використовувати хмарні технології, хмаро орієнтовані засоби навчання, зокрема GeoGebra.

Зважаючи на те, що тема «Комбінації геометричних тіл» є складною для опанування учнями та окремими студентами, про що свідчить і досвід підготовки магістрів, пропонуємо розглянути кілька наочностей, пов'язаних з побудовою комбінацій кулі з многогранниками чи круглими тілами. Розглянемо [кілька прикладів створення наочностей з комбінаціями геометричних тіл за допомогою Модуля 3D Геометрія GeoGebra](#). Звіс-

но, краще подати побудови у класичній версії програми, однак всі пропонувані кроки побудови наразі доступні і для мобільних телефонів.

**Завдання 2. Навколо піраміди, вершина якої проєктується в одну із вершин основи, описано сферу.** Потрібно [створити наочність з використанням 3D-полотна класичної GeoGebra](#) до цієї комбінації геометричних тіл (рис. 3.16).



**Рис.3.16. Сфера описана навколо піраміди, вершина якої проєктується в одну із точок основи ([наочність 3D-полотна класичної GeoGebra](#)).**

Щоб визначити положення центра описаної навколо піраміди сфери, Спочатку встановлюємо, що для того, щоб навколо піраміди можна було описати сферу, необхідно, щоб навколо основи піраміди можна було описати коло. Тому на полотні будуємо коло (*Коло*) і в нього вписуємо довільний багатокутник (*Многокутник*), який слугуватиме основою піраміди. При цьому на полотні 3D програмне забезпечення виконує синхронно ті побудови, які виконані нами на першому полотні.

Далі через одну з вершин основи проводимо пряму, перпендикулярну до площини основи (*Пряма, перпендикулярна до площини*), і на ній обираємо довільну точку (*Точка на об'єкті*)– вершину піраміди. Будуємо піраміду (*Многогранник Піраміда*). Далі потрібно визначити, де буде розташований центр описаної сфери. З цією метою проводимо через центр описаного навколо основи кола пряму, перпендикулярну до площини основи (*Пряма, перпендикулярна до площини*). Ця пряма є геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин основи.

Будуємо ГМТ, які рівновіддалені від кінців одного з бічних ребер. Це буде площина, яка проходить через середину бічного ребра (*Середня точка*), перпендикулярно до нього (*Площина, перпендикулярна до прямої*). Далі потрібно знайти точку перетину (*Точка перетину прямої і площини*) побудованих перпендикуляра і площини. Це й буде центр описаної кулі.

На завершення виконують [побудову описаної сфери](#) (*Сфера за центром і радіусом*). Для того, щоб учні краще засвоїли алгоритм побудови описаної навколо піраміди сфери, проставляємо відмітку налаштування

полотна – показувати кроки побудови. У цьому разі учень зможе за бажанням переглянути хід побудови кілька разів і засвоїти алгоритм.

**Завдання 3.** Розглянемо, як користуючись **3D Геометрія**, **вписати кулю у правильну чотирикутну піраміду**. Для побудови основи піраміди використовують інструмент *Правильний багатокутник*, вказують на 3D-полотні дві точки – вершини ребра основи і зазначають, що правильний багатокутник має 4 вершини. Далі потрібно побудувати діагоналі квадрата (інструмент *Відрізок*) і визначити центр (*Точка перетину*). Потім через центр квадрата, який при цьому є й центром вписаного у квадрат кола, проводять *пряму, перпендикулярну до площини* квадрата. На цій прямій, беремо довільну точку (*Точка на об'єкті*) і будемо многогранник (*Піраміда*). Перпендикулярна до площини квадрата пряма є ГМТ, рівновіддалених від сторін основи правильної піраміди.

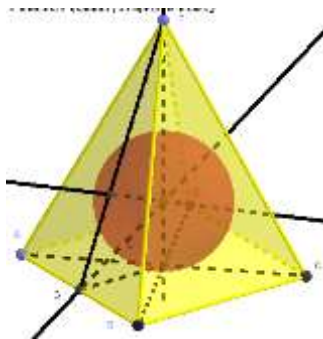
Щоб визначити положення центра вписаної у піраміду кулі, будемо геометричне місце точок, які рівновіддалені від граней двогранного кута при основі піраміди. Оскільки серед інструментів GeoGebra нема побудови бісекторної площини, тому потрібно побудувати лінійний кут двогранного кута при основі, а потім бісектрису цього кута. Будують площину, яка проходить через вершину піраміди, перпендикулярно до ребра основи (*Площина через точку, перпендикулярна до прямої; Точка перетину*). Можна замість площини провести пряму з вершини піраміди перпендикулярно до ребра основи (*Пряма, перпендикулярна до прямої*). Далі потрібно знайти точку перетину побудованих площини / перпендикуляра з ребром основи (*Точка перетину прямої і площини / Точка перетину двох прямих*). Тоді будують бісектрису отриманого лінійного кута. Точка його перетину з перпендикуляром до основи піраміди, проведеним з вершини піраміди, визначить центр вписаної кулі (*Точка перетину*). На завершення виконують побудову вписаної кулі (*Сфера за центром і радіусом*) (рис.2.10), вказавши послідовно центр кулі і точку перетину діагоналей квадрата.

#### **Контрольні питання і завдання**

1. Дослідити, як використовуючи засоби динамічної геометрії, можна розвивати в учнів здібності до висування гіпотез, уміння узагальнювати, розвивати STEM-компетентності?

2. Які наочності називають динамічними опорними конспектами?

3. Оцінити, у чому може проявлятися у процесі навчання математики позитивність властивості інтегрованості наочностей? Для яких типів занять найкраще використовувати інтегровані наочності?



**Рис. 2. 1. Куля, вписана у піраміду (розробка GeoGebra).**

### 3.9. Вимірювання на місцевості з додатком Multi Measures

**Назви тем з геометрії:** 1) 6 клас, Відношення та пропорції, масштаб; 2) 7 клас, Трикутники, ознаки рівності трикутників; 3) 8 клас, Подібність трикутників; 4) 9 кл. Теорема косинусів, теорема синусів, розв'язування трикутників. 5) 10 клас, студенти 1-2 курсів фахових коледжів. Паралельність і перпендикулярність у просторі.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, технічна творчість), фізика, географія.

**Актуальність та мета:** основним математичним змістом є практичне застосування математичних знань для виконання вимірювання на місцевості з використанням найпростіших інструментів, додатку з функціями вимірювання величин для мобільного телефону та окремих приладів за їх наявності. Математичний апарат прив'язаний до того, що вивчається на заняттях з математики чи вивчалось раніше.

**Обладнання:** додаток для мобільного телефону Measures, стрічка для вимірювання, віхи, прилади для вимірювання кутів та відстані тощо.

**Умови проведення.** Учасники працюють в парах, в невеликих групах чи, можливо, індивідуально, використовуючи для виконання завдання зазначене обладнання.

**Прогнозований результат:** розроблені алгоритми вимірювання відстані до недоступного об'єкта, висоти об'єкта; здійснені обчислення і, за можливості, здійснена перевірка вірогідності результатів.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Оскільки вимірювання на місцевості доцільно здійснювати при вивченні різних тем геометрії, то необхідно диференціювати завдання відповідно до віку здобувачів освіти та вивченого матеріалу. Для семикласників відстань до недоступного об'єкта, висоту недоступного об'єкта можемо вимірювати застосовуючи ознаки рівності трикутників. Восьмикласникам насамперед необхідно використовувати ознаки подібності трикутників, теорему Піфагора і допоміжні математичні алгоритми, що базуються на ознаках рівності трикутників. У 9-класників при вивченні теми «Розв'язування трикутників» алгоритми вимірювання мають базуватися, насамперед, на теоремі косинусів та синусів.

У 10-му класі і для студентів 1-2 курсів фахових коледжів весь попередньо розглянутий матеріал застосовується на новому, більш високому, рівні з узагальненням та систематизацією знань та умінь. Такі обчислення доцільно здійснювати при вивченні паралельності та перпендикулярності прямих та площин у просторі. Треба здійснити перехід від стереометричної задачі до планіметричної. При розв'язуванні завдань практичного змісту застосовуються означення та ознаки паралельності та перпендикулярності прямих, прямої і площини, площин. Метод для розв'язування планіметричної задачі учасники проекту можуть обрати самостійно. Можна розширити і перелік задач, додавши певні умови.



Наприклад, умову про те, що нема доступу до об'єкта, а потрібно визначити його висоту, протяжність тощо.

Як показали наші дослідження, найважче учням і студентам дається постановка проблеми за практичною ситуацією, створення математичної моделі для опису цієї ситуації, розробка алгоритму для здійснення вимірювання. Участь у даному проєкті сприяє систематизації та узагальненню знань здобувачів освіти. При цьому розвиваються їхні STEM-компетентності.

### 3.9.1. Клас 7. Ознаки рівності трикутників, рівнобедрений трикутник.

Працюючи з майбутніми учителями математики з метою їх підготовки до STEM-навчання учнів, ми спочатку проводили під час практики вимірювання в аудиторії, щоб переконатися у вірогідності отриманих результатів. Наприклад, з використанням ознак рівності трикутників проводили вимірювання від центра кімнати до доступної кутової точки (рис. 3.16). Оцінювали точність отриманих результатів, перевіряли правильність складеного алгоритму (рис. 3.17). Потім виходили на місцевість і вимірювали відстань до доступних та недоступних об'єктів.



Рис. 3.16. Відпрацьовуємо алгоритми вимірювання на місцевості.

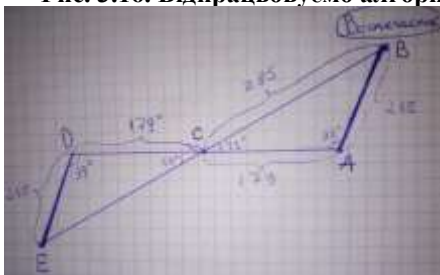


Рис. 3.17. Перевірка алгоритму вимірювання з використанням ознак рівності трикутників.

Подаємо фрагмент обчислення за проектом. Біля спроектованого Трикутоцентру протікає ріка Саксагань, яка відділяє будівлю від міста. Тому доцільно спроектувати міст біля центру. Для потрібно знати ширину річки. Знайдемо її за допомогою ознаки рівності трикутників (див рис. 3.17). Знайдемо на недоступному березі дерево чи кущ, позначим його В. На доступному березі ставимо віху (точка С), від неї відкладаємо відстань СА, виміряємо кути С і А. Для вимірювання кутів використовували додатки для мобільних телефонів Multi Measures (рис. 3.18).



Multi Measures - додаток для мобільних телефонів для вимірювання кутів, відстаней, нівелірів та інше.

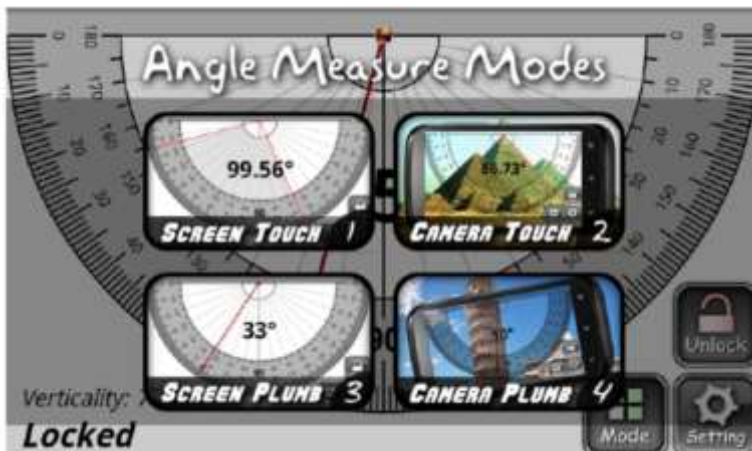


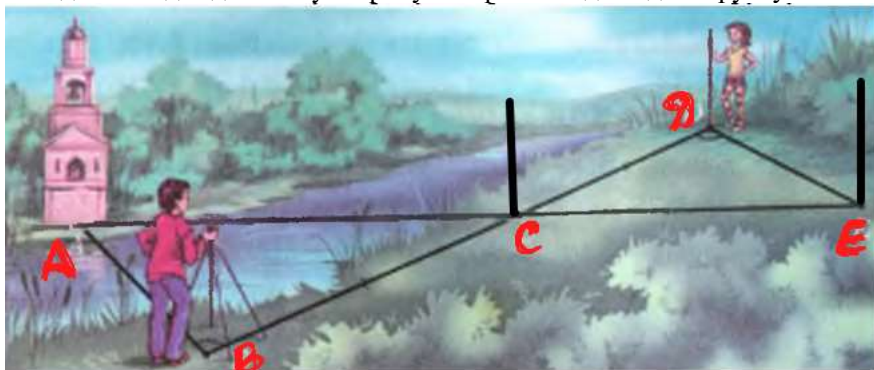
Рис. 3.18 Додаток для мобільних телефонів Multi Measures

Тепер відкладемо відстань CD, рівну відстані AC. Відкладемо пряму, створивши відповідно рівні кути. Побудовані трикутники рівні за стороною і прилеглими до неї кутами. Отже, шукана відстань АВ дорівнює ED. Таким способом можна вимірювати ширину річки, озера тощо.

Вимірювання на місцевості з учнями шкіл ми неодноразово проводили під час таких заходів, як День міста, День майбутнього студента, «наукові пікніки». Інструментом для вимірювання відстаней та кутів на сьогодні є додаток для мобільного телефону **Multi Measures**. Але відстань на місцевості можна вимірювати і кроками. Для цього потрібно попередньо визначити середню довжину кроку. Знаючи довжину кроку та кількість пройдених кроків, визначаємо невідому відстань між об'єктами.

Розпочати вимірювання на місцевості у сьомому класі зручно, якщо розглянути задачі з підручника геометрії на застосування ознак рівності трикутників. Найкраще, на нашу думку, пояснено, як потрібно здійснювати вимірювання, у підручнику авторського колективу А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір [133] (рис. 3.19) та підручнику Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова [111] (рис. 3.20). Однак і на цих малюнках доцільно доставити необхідні віхи. Під час так званих «наукових пікніків» з'ясували, що учні не розуміють, що чотири віхи є необхідними для вимірювання такого, як показано на рис. 3.19. Тому ми їх домалювали.

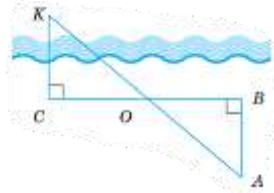
**Задача № 8.29.** ([133]) Для знаходження відстані від точки В до двіниці А, яка розташована на другому березі річки (рис. 3.19), за допомогою віх, рулетки й астролябії позначили на місцевості точки С, В і Е так, що В, С і D лежать на одній прямій, причому точка С є серединою відрізка BD. Потім намітили пряму АЕ, яка проходить через точку С, причому  $\angle ABC = \angle CDE$ . Далі, вимірявши одну зі сторін трикутника COE, визначили відстань від В до А. Яку сторону виміряли? Відповідь обґрунтуйте.



**Рис. 3.19.** Рисунок до задачі № 8.29 [133, с. 62].

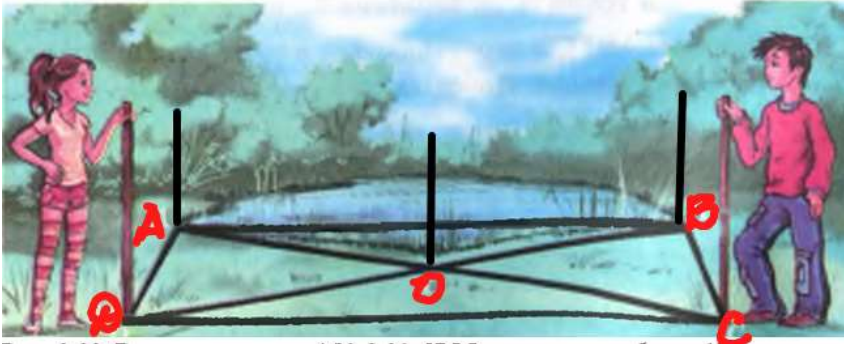
У підручник [111, с.117] формулювання такої ж задачі містить як відомості з історії, так і алгоритм здійснення вимірювань. Наведемо умову завдання без скорочення.

**Задача №492** Розгляньте малюнок (рис. 3.20). У такий спосіб давньогрецький учений Фалес Мілетський запропонував вимірювати відстань  $КС$  до корабля, який знаходився в морі. Робилося це так. Нехай у точці  $К$  знаходиться корабель, а в точці  $С$  – спостерігач. Від пункту спостереження  $С$  намічали напрямок на корабель  $К$  і до цього напрямку на березі з точки  $С$  відкладали перпендикулярний напрямок, на якому будували довільний відрізок  $СВ$  і знаходили його середину. У точці  $В$  намічався напрямок у сторону суші, перпендикулярний до напрямку  $СВ$ . Спостерігач йшов у напрямку  $ВА$ , дивлячись на корабель. Як тільки корабель і пункт  $О$  опинялися на одній прямій, спостерігач фіксував точку  $А$ , і тоді відстань  $КС$  дорівнювала відстані  $АВ$ , яку можна було знайти безпосереднім вимірюванням. Спробуйте визначити відстань до недоступного об'єкта таким способом.



**Рис.3.20**

**Задача № 8.30.** (підручник [133]) Для визначення ширини озера (рис. 3.21) на його березі позначили точки  $А$  і  $В$ , а потім ще точки  $С$ ,  $В$  і  $О$  так, щоб точка  $О$  була спільною серединою відрізків  $AC$  і  $BD$ ). Як можна визначити ширину озера? Відповідь обґрунтуйте.



**Рис. 3.21. Рисунок до задачі № 8.30 [133, с. 62].**

При такому формулюванні задачі не всі учні і студенти (майбутні учителі) розуміють алгоритм дії та як саме позначати точки  $С$ ,  $В$ ,  $О$ . Внесемо уточнення. На березі озера вибираємо точку  $О$ , щоб з неї можна було вільно пройти до точок  $А$  і  $В$ , в яких проставлено віхи. Вимірюємо земельним циркулем, мірною стрічкою чи за допомогою додатку мобільного телефону відстані  $AO$  та  $BO$ . Потім рухаємося вздовж прямої  $AO$  (при цьому віхи в точках  $А$  і  $О$  візуально мають збігатися в одну) на відстань  $AO$ . Проставляємо віху у точці  $С$ . Знову рухаємося від точки  $О$  до точки  $Д$  на відстань, рівну відстані  $BO$ . Щоб витримувати напрямок руху вздовж прямої, слідкуємо, щоб віхи в точках  $В$  та  $О$  візуально збігалися. Після

того, як визначили положення точки D, ставимо останню віху та визначаємо відстань між точками D та C. Ця відстань буде рівна ширині озера.

Про те як під час однієї із запланованих практик у Криворізькій Вальдорфській гімназії учні разом з учителями математики виїжджають за межі міста та використовують у вимірюваннях астролябію, поділилася досвідом директор гімназії, учитель математики Тетяна Арсентіївна Грицишина. Наразі перепоною для застосування STEM-підходів при вивченні зазначених тем може бути й те, що в школах нема приладів, за допомогою яких традиційно вимірювали кути. А додатки для мобільних телефонів Multi Measures для вимірювання величин ще не посіли належного місця у практиці навчання математики (рис. 3.18).

Наведемо ще приклади задач з підручників геометрії, які можна взяти за основу проєкту. До окремих задач подаємо ілюстрації з метою кращого розуміння фабули та розробки алгоритму дії.

**Задача № 351** [108, с. 101]. За малюнком (рис. 322 а)) поясніть, як можна знайти ширину перешкоди, користуючись **ознакою рівності прямокутних трикутників**.

Низку задач практичного змісту у рубриці «Застосуйте на практиці» подають автори М. І. Бурда та Н. А. Тарасенкова [114].

**Задача № 527.** Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами А і В, між якими не можна пройти, виконали певну побудову (див. рис. 322 б)). Пояснити, чому шукана відстань буде рівна довжині AD?

Для обґрунтування у представленій задачі доцільно скористатися **ознакою рівнобедреного трикутника**.

Наступні задачі цілком підійдуть і для **старту з навчальним проєктом «Економна економіка»**. Для обґрунтування учні будуть використовувати властивість точок, розташованих на серединному перпендикулярі відрізка, властивості рівнобедреного трикутника та його ознаки, а в подальшому і нерівність трикутника.

**Задача № 585.** Недалеко від населених пунктів А і В проходить шосе. Потрібно побудувати автобусну зупинку так, щоб відстані від неї до населених пунктів були однакові. Місце зупинки визначили так (рис. 322 в)): знайшли середину відстані між населеними пунктами. Провісили пряму DC перпендикулярно до АВ і позначили на цій прямій точку С біля шосе – місце зупинки. Чи правильно визначили місце для автобусної зупинки? Поясніть.

**Задача № 586.** Через місто А має проходити автомагістраль так, щоб два населених пункти В і С розташовувались із різних боків від неї на однаковій відстані. На малюнку (рис. 322 г) показано план будівництва магістралі. Поясніть, чому населені пункти будуть рівновіддаленими від автомагістралі.

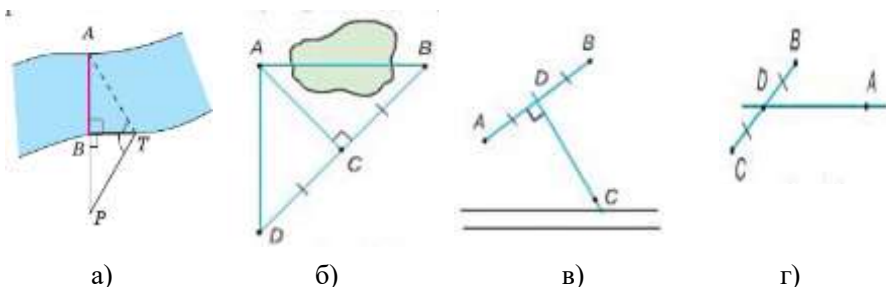


Рис. 322. Ілюстрації до задач для підручників геометрії (7-й клас)

3.9.2. Клас 8 -9. Подібність трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику. Теорема косинусів та синусів.

На курсах підвищення кваліфікації учителів математики ми ділилися досвідом впровадження проекту, розробками уроків, зокрема і для мультимедійної дошки. За QR-кодом (рис. 3.23 а)) можна завантажити розробку для мультимедійної дошки InterWrite, створено у програмному забезпеченні WorkSpace. За іншим QR-кодом (рис. 3.23 б)) цю ж розробку подано у форматі pdf, щоб учителям математики зручніше було переглянути запропоновані завдання.

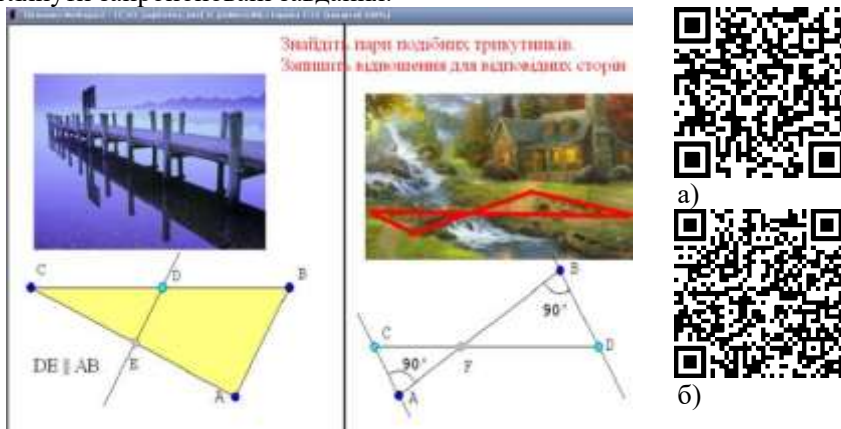


Рис. 3.23. [Слайд розробки](#), режим роботи на дошці двох користувачів

Переглядаючи розробку, учні зможуть ознайомитися з такими найпростішими інструментами для вимірювання на місцевості як екер, віхи (вішки), землемірний циркуль. Учні дізнаються більше про традиційні прилади для вимірювання кутів та відстаней – астролябія, секстант, теодоліт, нівелір, далекомір – та про додатки для мобільних телефонів.

У запропонованій читачу [розробці](#) мова йде про застосування знань про подібні трикутники до вимірювання відстаней на місцевості. Надано

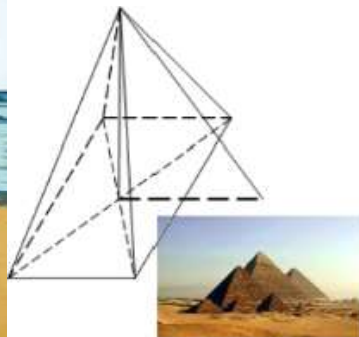


низку доцільних наочностей для реалізації STEM-проекту: визначення відстані до недоступної точки, висоти об'єкта тощо. Наприклад, подано малюнок за романом Жюль Верна «Таємничий острів» про те, **як визначали висоту скелі** (рис. 3.24, а). Зробимо пояснення до малюнка.

Перший дослідник лягає на пісок і дивиться на вершину скелі. Другий бере віху і ставить її на такій відстані між першим та скелею, щоб погляд того, хто лежить, проходив на вершину скали через верх віхи. Тоді вимірюється відстань від голови того, що лежить, до скелі і до віхи. А також висота віхи. Утвориться пара подібних прямокутних трикутників. Висота скелі у стільки разів більша за відстань до неї, у скільки разів висота віхи більша за відстань до віхи.



а)



б)

**Рис. 3.24. Схематичні малюнки для визначення висоти скелі і піраміди.**

Важливо розповісти учням історію про те, як давньогрецький філософ і математик **Фалес за довжиною тіні визначив висоту піраміди** (рис. 3.24, б)). Нібито Фалес зробив це так: у сонячний день закріпив у землі жердину, попередньо вимірявши її висоту. Тоді в момент часу, коли довжина тіні від жердини була рівна її висоті, відмітив точку, де закінчується тінь піраміди. Тобто висота піраміди буде рівна довжині тіні від її центру.

Можна виміряти висоту об'єкта і за довжиною власної тіні. Зріст людини у стільки разів більший за її тінь, як і висота вимірюваного об'єкта, наприклад, дерева, за тінь, яку дає об'єкт у ту ж пору дня. Варто поставити учням питання і обговорити, чому висоту предметів не можна знаходити за довжиною тіні від вуличного ліхтаря?

Розглянемо приклад **задачі для вимірювання за довжиною тіні**.

**Задача 685.** [113, с. 98]. У певний момент часу тінь від двометрової віхи мала довжину 1,4 м, а тінь від дерева (якщо міряти від стовбура) – 6,3 м. Визначте висоту дерева, знаючи, що діаметр стовбура біля землі дорівнює 1,2 м.

Варто звернути увагу учнів й на те, що **найкращий результат** вимірювання висоти дерева може давати **середнє арифметичне отриманих результатів вимірювання**. Адже в теорії ймовірностей обґрунтовується цей факт одним із законів великих чисел.

Перебуваючи зі студентами на практиці у Криворізькій гімназії №95, разом з учителем математики Антоніною Іванівною Цимбал впроваджували цей проєкт. Для вимірювання кутів по горизонталі та вертикалі використовували додаток Multi Measures для мобільних телефонів.

Розглянемо, як вимірювати відстань до недоступного об'єкта, **скориставшись світлиною** (рис. 3.25). Можливо, що цей спосіб буде для учнів найзручнішим і даватиме найменшу похибку. Він застосовний з використанням ознак подібності трикутників, але інтуїтивно зрозумілий і шестикласникам, які вивчають відношення, властивості пропорції та масштаб. На сьогодні всі учні користуються мобільними телефонами з вбудованою камерою. Адже вже шестикласники вимірюють відстань на карті і, знаючи масштаб, знаходять відстань на місцевості. Якщо здійснювати вимірювання за світлиною, то потрібно на природі зробити один реальний вимір і знайти відношення до відстані між зафіксованими об'єктами на світлині. Наприклад, на березі водоймища потрібно виміряти відстань між двома точками (вздовж зеленої лінії, рис. 3.25). Тоді зробити фото, щоб на нього потрапили ці дві точки. Знаходять коефіцієнт подібності трикутників як відношення виміряної відстані на місцевості до відстані між відповідними точками на світлині. Потім вимірюють на фото дві інші сторони трикутника і множать їх на знайдений коефіцієнт подібності. Визначаємо відстані до недоступного об'єкта. Тут використовують третю ознаку подібності трикутників: якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого, то такі трикутники подібні.

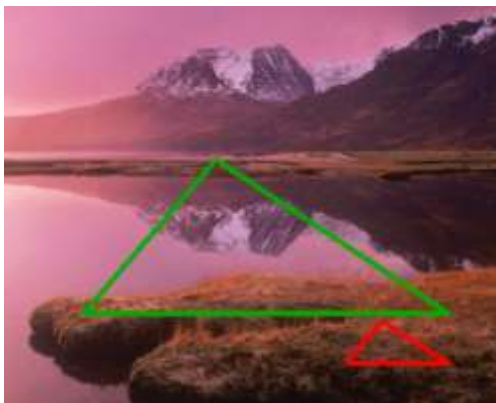


Рис. 3.25. Вимірювання відстані на фото.

При оцінюванні результатів роботи необхідно враховувати, як представлені виконавці проєкту, наскільки зроблене відповідає поставленим завданням, в якому об'ємі дібрано і опрацьовано матеріали, чи відображені результати дослідження? Завершити роботу над проєктом необхідно самооцінкою та оцінкою результатів навчання. Для контролю рівня знань учнів можна передбачити написання контрольної роботи і подання



відповідей на тестові завдання. Оцінюються всі види робіт, що їх виконували учні в ході реалізації проекту. Найважливішою для становлення учня як самобутньої особистості є самооцінка. На основі рефлексивних суджень учень має здійснити власну оцінку діяльності: що нового дізнався, чого навчився, що зрозумів; які види роботи виходили краще; які труднощі були, що намагався зробити, щоб їх подолати; які позитивні зміни у нього відбулися.

У підручниках геометрії 8-го класу подано значну кількість задач на вимірювання на місцевості, розв'язування прикладних задач. Зокрема подано задачі на знаходження висоти предмета, основа якого є доступною; основа якого є недоступною [113]; задачі на знаходження відстані між двома пунктами, які розділені перешкодою; задачі на знаходження кутів (кута підйому дороги, кута відкосу, кута, під яким видно деякий предмер тощо). Найбільш повно ці типи задач представлені у підручнику геометрії для 8-го класу М. І. Бурди та Н. А. Тарасенкової у рубриці «Проявіть компетентність» [113].

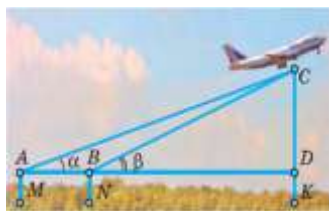
Наприклад, знайдіть кут підйому шосейної дороги, якщо на відстані 200 м висота підйому становить 8 м.

Інший приклад (№943, [113, с. 141]): знайдіть кут підйому вулиці, на якій розташована школа, якщо довжина фундаменту школи – 40 м, а його висота на початку і в кінці будівлі дорівнює 180 см і 90 см.

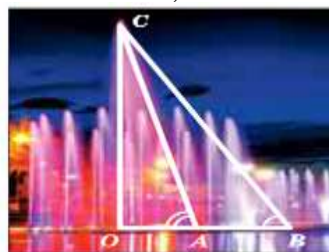
**Задачі для визначення висоти об'єкта з недоступною основою** пропонуються з різним сюжетом.

**Задача №944.** [113, с. 141 ] Щоб знайти, на якій висоті летить літак С (рис. 3.26 а), два спостерігачі в пунктах М і установили кутомірні прилади й виміряли відстань  $MN=a$ . У той момент, коли точки А, В і С лежали в одній вертикальній площині, виміряли одночасно кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Знаючи відстань а, кути  $\alpha$  і  $\beta$ , висоту h приладів, визначили шукану висоту СК. Пояснить спосіб знаходження висоти. Знайдіть висоту, на якій перебував літак, якщо результати вимірювання такі:  $a=80$  м,  $h=1,5$  м,  $\alpha=39^\circ$ ,  $\beta=44^\circ$ .

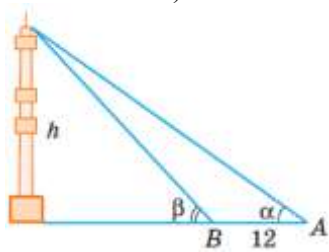
**Задача № 480** [110, с. 123]. Визначити висоту струменів фонтану: за даними малюнка (рис. 3.26 б)) обчисліть висоту струменя води фонтану



а)



б)



в)

Рис. 3. 26

СО, якщо  $AB=0,5$  м, величина кута А та В відповідно рівні  $87^\circ$  та  $84^\circ$ ?

**Задача №520** [110, с. 131]. Щоб визначити висоту телевізійної вежі (рис. 3.26 в)), виміряли відстань  $AB=12$  м і кути  $\alpha=35^\circ$ ,  $\beta=49^\circ$ . Знайдіть висоту вежі.

У підручнику [113, с. 136] подано детальне пояснення того, як розв'язувати задачу на визначення висоти вежі, яка відокремлена від спостерігача водною перешкодою (рис. 3.27). У восьмому класі пропонується скористатися співвідношеннями між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику. На рис. 3.27 пояснено, що спочатку обчислюють довжину відрізка  $DC$ , а потім додають висоту приладу, яким вимірювали кути. Якщо ж вимірювання кутів по вертикалі буде здійснюватися за допомогою додатка для мобільного телефону, то потрібно після визначення кута «вмикати замок», щоб для спостерігача зафіксувалося значення. Спостерігач при цьому тримає телефон у піднятій та витягнутій руці. І спрямовує її на найвищу точку вежі. Тоді до довжини обчисленого відрізка  $DC$  потрібно додати зріст спостерігача, вимірний від землі до рівня його очей.

## 2. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.



**Задача.** Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас водною перешкодою (мал. 420).

**Розв'язання.** На горизонтальній прямій, що проходить через основу вежі (мал. 420), позначаємо дві точки  $M$  і  $N$  та вимірюємо відрізок  $MN = a$ . Встановлюємо кутотвірний прилад у точках  $M$  і  $N$  та вимірюємо кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Із прямокутних трикутників  $ADC$  і  $BDC$  одержимо:

$$AC = \frac{DC}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad BC = \frac{DC}{\operatorname{tg}\beta}$$

Почленно віднімемо знайдені рівності:

$$AC - BC = \frac{DC}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{DC}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$\text{Звідси } AB = DC \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\text{Отже, } DC = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$

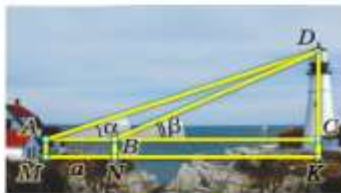
Додавши до  $DC$  висоту приладу  $AM = h$ , яким вимірювали кути, одержимо формулу для обчислення висоти вежі:

$$DK = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} + h,$$

Нехай результати вимірювання такі:

$$a = 10 \text{ м}, \quad h = 1,5 \text{ м} \quad \alpha = 35^\circ, \quad \beta = 40^\circ.$$

$$\text{Тоді } DK = \frac{10 \cdot \operatorname{tg}35^\circ \cdot \operatorname{tg}40^\circ}{\operatorname{tg}40^\circ - \operatorname{tg}35^\circ} + 1,5 = \frac{10 \cdot 0,700 \cdot 0,839}{0,839 - 0,700} + 1,5 = 43,8 \text{ (м)}.$$



Мал. 420

**Рис. 3.27.** Креслення для визначення висоти вежі, яка відокремлена від спостерігача водною перешкодою [113, с. 136].

Для розв'язування пропонується застосовувати як ознаки подібності

трикутників, так і введення тригонометричних функцій гострого кута у прямокутному трикутнику; вимірювання двох кутів для визначення висоти об'єкта; розв'язування прямокутних трикутників.

Звертаємо увагу на **задачі на розуміння принципів роботи оптичних приладів**. Зокрема, фотоапарату. Тут потрібні учням знання геометричної оптики. Зазначені задачі доцільно запропонувати у проєкті сумісно з учителями фізики. При цьому необхідно і розв'язувати задачі, і пояснювати застосування лінз в оптиці.

Наведемо приклади подібних задач.

**Задача № 628** [113, с. 90]. Триповерховий будинок на фотографії має висоту 8 мм. Знаючи, що його справжня висота дорівнює 13 м, а глибина камери фотоапарату – 12 см, визначте, на якій відстані від будинку був розміщений фотоапарат.

**Задача №18.19** [132, с. 118]. Зображення дерева, віддаленого на 60 м від об'єктива фотоапарата, має на плівці висоту 8 мм. Відстань від об'єктива до зображення дорівнює 40 мм. Яка висота дерева? (рис. 3.28)

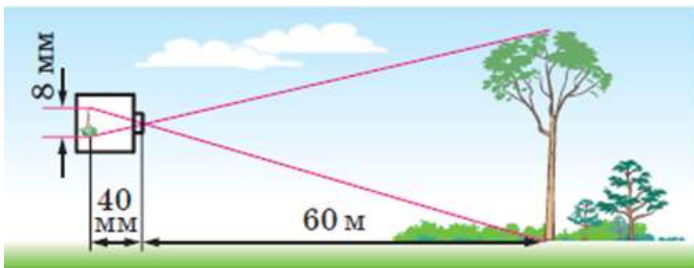


Рис. 3.28. Креслення до задачі на визначення висоти об'єкта.

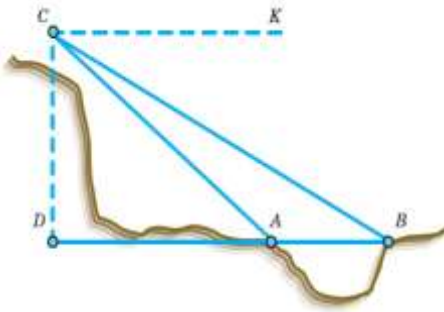
Виокремлюємо групу задач на **використання кута зниження**.

**Задача №905.** [113, с. 134]. Спостерігачеві, який стоїть на висоті 50 м (наприклад, на балконі багатоповерхівки), видно автомобіль під кутом  $30^\circ$  до горизонту. Як знайти відстань від спостерігача до автомобіля?

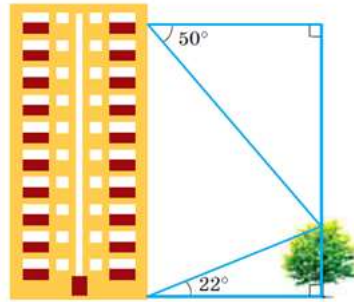
**Задача №945.** [113, с. 141]. З башти маяка заввишки 75 м над рівнем моря видно корабель під кутом зниження  $2^\circ$ . Знайдіть відстань від маяка до корабля.

**Задача №946.** [113, с. 141]. На малюнку (рис. 3.29 а)) схематично зображено спосіб вимірювання недоступної відстані АВ. Поясніть вимірювання. Знайдіть відстань АВ, якщо  $CD=200$  м, кути  $KCB$  та  $KCA$  відповідно рівні  $28^\circ$  та  $39^\circ$ .

**Задача №492.** [110, с. 124]. Щоб дістатися поглядом верхівки дерева від підніжжя будинку, потрібно дивитися вгору під кутом  $22^\circ$ . А щоб побачити верхівку дерева з балкона, що розташований на відстані 50 метрів над поверхнею землі, слід дивитися вниз під кутом  $50^\circ$  (рис. 3.29 б)). Знайдіть: а) висоту дерева; б) відстань від дерева до будинку.



а)



б)

Рис. 3.29. Креслення на визначення відстані через кут зниження.

Наведемо приклад задачі з підручника геометрії для 9-го класу. Для визначення висоти недоступного об'єкта у цій прикладній задачі необхідно застосувати теорему синусів.

**Задача №625.** [115, с. 102]. На горі розміщена башта заввишки 60 м (рис. 3.30). Деякий предмет на підшві гори видно з вершини В башти під кутом  $65^\circ$  до горизонту, а з її основи С – під кутом  $35^\circ$  до горизонту. Знайдіть висоту гори.



Рис. 3.30.

### Контрольні питання і завдання

1. Які STEM-компетентності можуть набувати учасники навчального процесу, беручи участь у проєкті «Вимірювання на місцевості»?
2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи за проєктом «Вимірювання на місцевості»?
3. Які види завдань на вимірювання на місцевості найчастіше зустрічаються у шкільних підручниках геометрії?
4. Запропонуйте інші міжпредметні проєкти, які можна реалізувати при вивченні тем, пов'язаних з розв'язуванням трикутників?
5. Як відрізнятимуться завдання за проєктом для учнів старшої школи та студентів 1-2 курсів фахових коледжів??
6. Які прилади чи додатки для мобільних телефонів доцільно запропонувати користувачам для участі у проєктах, пов'язаних з вимірюваннями на місцевості?
7. Який алгоритм вимірювання на місцевості, що опирається на використання світлин, отриманих за допомогою камери мобільного телефону?

### 3.10. Економна економіка

**Назви тем:** геометрія, «Нерівність трикутника»; 7 клас; алгебра, «Квадратична функція»; «Доведення нерівностей»; 9 клас, алгебра і початки аналізу, «Похідна та її застосування»; геометрія, «Об'єми та площі поверхні многогранників та тіл обертання»; «Комбінації геометричних тіл»; 10-11 клас профільної школи; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** алгебра, алгебра і початки аналізу, геометрія, економіка, трудове навчання, інформатика.

**Актуальність та мета:** В концепції математичної освіти поряд із зростанням ролі теоретичної складової, посилення прикладної спрямованості навчання визначається як один із пріоритетів розвитку освіти. Прикладні задачі – це задачі, які поставлені поза математикою і розв'язуються математичними засобами. Задачі такого виду відповідають певним вимогам: мати реальний практичний зміст, який демонструє практичну цінність набутих математичних знань; відповідати програмі; бути сформульованими доступно і зрозумілою мовою, не містити термінів, що потребують додаткових знань, які не передбачені програмою навчальної дисципліни. Практичні задачі евристичного характеру є потужним знаряддям для розвитку творчих здібностей особистості, їхніх STEM-компетентностей. Наприклад, здібностей втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми, переносити знання і уміння в нові ситуації, уміння бачити знайоме в незнайомому, винахідливість, гнучкість мислення та ін. Доступні для розуміння учнів / студентів прикладні задачі посилюють світоглядні аспекти навчання, мають незрівнянну цінність для мотивації вивчення нового математичного матеріалу. Життєвою необхідністю їх розв'язування найбільш природно обґрунтувати потребу у нових ідеях, знаннях і методах.

**Обладнання:** програмне забезпечення системи динамічної математики, креслярські інструменти, фарби, пензлі, папір, матеріали та інструменти для виготовлення макетів, 3D-принтер.

**Термін виконання.** 2-3 тижні. **Умови проведення.** Учасникам проєкту доцільно працювати в міні-групах.

**Прогнозованим результатом** може бути зроблений і обґрунтований розрахунок найбільш доцільного варіанту виконання роботи. Доцільне виготовлення макету за отриманими розрахунками з паперу, дерева чи з пластика за допомогою 3D-принтера.

#### *3.10.1. Алгоритм розв'язування прикладних задач, задач практичного змісту*

Один із фундаторів методології математичного моделювання Б.В. Гнеденко зазначав, що готувати не лише учнів, але й майбутніх вчителів математики потрібно так, щоб вони могли бачити, з одного боку, основний зміст сучасної математики, з іншого – її прикладні можливості, мето-

дологічні проблеми та історичний процес її розвитку. Причому, метод математичного моделювання слід розглядати як метод наукового пізнання.

Питання прикладної спрямованості матеріалу як засобу стимулювання навчальної діяльності висвітлювали М.П. Маланюк [129], Л.Л. Панченко [78], З.І. Слєпкань [97] та ін. Застосування ПЗ GRAN1 та GRAN-2D для аналізу функціональних залежностей, наближеного відшукання найбільших і найменших значень функції на заданій множині висвітлювали М.І. Жалдак, Є.Ф. Вінниченко, Ю.В. Горошко [105]. На важливості задач з оптимізацією розв'язку акцентують увагу З.І. Слєпкань [135], С.А. Раков [89] та ін. Ми також висвітлювали розв'язування подібних задач [125].

Прикладні задачі в процесі навчання виконують такі *дидактичні функції* як *навчаюча, виховна, розвиваюча, контролююча* [125]. Вирішальною серед цих функцій все частіше називається розвиваюча.

На основі аналізу розглянутих вище джерел, досвіду використання програмних засобів навчального призначення можемо констатувати:

- розв'язування практичних задач надзвичайно важливе для розвитку STEM-компетентностей особистості, активізації їх творчої діяльності;
- педагогічна практика свідчить про низьку готовність значної частини учнів і студентів до розв'язування таких задач, починаючи з аналізу умови до дослідження на прийнятність, змістовність отриманих результатів;
- впровадження інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики дозволяє значно інтенсифікувати процес розв'язування практичних, прикладних задач за рахунок перекладання операцій обчислення на програмне забезпечення.

Розглянемо схему розв'язування задач з практичним змістом, описану нами в навчальному посібнику [125]:

1. Вивчення задачі і здійснення її структурного аналізу:
  - а) виділення об'єктів задачі та відношень між ними;
  - б) виділення величин, які розглядаються в задачі;
  - в) пригадування і встановлення співвідношень між величинами.
2. Складання плану розв'язування задачі у загальному вигляді.
3. Побудова математичної моделі: складання числових виразів, рівнянь, нерівностей, використання готових (раніше вивчених) співвідношень, формул, тотожностей.
4. Розв'язування задачі.
5. Перевірка правильності моделювання та розв'язку задачі.
6. Дослідження здобутих розв'язків у даній практичній ситуації, знаходження остаточного результату – відповіді.
7. Пошуки інших способів розв'язування задачі, виділення найраціональнішого.
8. Опис найраціональнішого способу розв'язування задачі.
9. Складання задач, обернених до даної, їх розв'язування.
10. Встановлення меж застосування способу розв'язування задачі (для

задач з іншим практичним змістом чи іншими числовими даними).

11. Складання узагальненої задачі, її розв'язування та дослідження.

Зауважимо, що не для всіх задач і не кожного разу потрібно виконувати всі етапи. Наприклад, етапи 9, 10, 11 можна включати під час розв'язування опорних задач. Поряд з повною схемою розв'язування задач з практичним змістом можна застосовувати і згорнуту [78, с. 22]: 1) попередній аналіз об'єкта дослідження; 2) побудова моделі; 3) реалізація моделі математичними методами; 4) аналіз одержаних результатів та їх перенесення на образ, що вивчається. В згаданій публікації задачі розглянуто тренувальні (для вироблення стійких умінь і навичок) і розвиваючі (для розвитку творчого мислення). Щоб забезпечити поетапне оволодіння евристичною схемою діяльності математичного моделювання, доцільно на першому етапі застосовувати тренувальні задачі з відносно простим змістом, такі, що текст задачі містить підказку у виборі моделі.

Комп'ютерною моделлю можна назвати таку заміну реальних об'єктів, яка дозволяє всебічно відобразити найважливіші сторони досліджуваного об'єкта або явища в навчальному процесі.

Оскільки прикладні задачі вимагають творчого підходу того, хто навчається, як на стадії створення математичної моделі, так і при відшуканні одного чи кількох способів розв'язування, інтерпретації отриманих результатів, то доцільно розв'язувати їх в кілька етапів. На першому етапі – здійснювали аналіз умови, можливо, і постановку задачі. На другому етапі можна вислуховувати пропозиції учасників, обговорювати результати дослідження, в тому числі отримані на комп'ютері. На цьому ж етапі намічають шлях теоретичного обґрунтування. На заключному етапі можна робити остаточні висновки. Розбиття на кілька етапів корисне з метою забезпечення інкубації – *через уявний відхід від проблеми, підсвідомий аналіз і вибір підготувати ґрунт для «відкриття».*



Наведемо приклади розв'язування задач з практичним змістом за допомогою динамічної математики (QR-код [розробки GeoGebra](#), [колекція наочностей GeoGebra](#)).

Запропоновані нижче задачі можна віднести як до навчально-творчих задач на оптимізацію, що передбачають вибір оптимального розв'язування та оптимізацію затрат і розвивають відповідно такі компоненти творчих здібностей особистості, як *гнучкість та раціоналізм мислення*, так і до *конструкторських задач* чи до *експериментальних задач на моделювання*. Два останні види навчально-творчих завдань дозволяють розвивати здібності особистості до конструювання та до широкого перенесення принципів, методів наукового пізнання у нові ситуації.

Конкретну задачу на відшукування екстремальних значень можна розв'язувати різними способами. Часто використовують нерівність трикутника, обмеженість функції синус і косинус; квадратична функція

$y=ax^2+bx+c$  досягає в точці  $x=-0.5b/a$  максимального значення при  $a<0$ , та найменшого при  $a>0$ . Вивчаючи тему «Доведення нерівностей» в класах з поглибленим вивченням математики, доцільно запропонувати для розв'язування практичні задачі, в яких для обґрунтування використовуються нерівності Коші, Коші-Буняковського. Зазначимо, що часто опорну нерівність Коші (для  $a\geq 0, b\geq 0$  виконується  $0.5(a+b)\geq\sqrt{ab}$ ) використовують формально, бо не перевіряють, коли в нерівності виконується умова рівності (при  $a=b$ ). Саме з умови рівності отримуємо важливий висновок: якщо сума двох додатних чисел стала, то їх добуток буде найбільшим тоді, коли значення цих величин рівні між собою. Якщо ж добуток двох додатних величин сталий, то їх сума буде найменшою тоді і тільки тоді, коли значення цих величин збігаються. Умова рівності в практичних задачах на екстремум найсуттєвіша.

На заняттях з підготовки до олімпіад при поглибленому вивченні математики бажано розглянути більш загальні твердження, сформульовані в посібнику [129, с. 82]: добуток  $x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot\dots\cdot x_n^{m_n}$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ , сума яких дорівнює даному числу  $S$ , набуває найбільшого

значення тоді, коли  $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n}{m_n}$ , де  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – довільні дода-

тні раціональні числа. Сума  $x_1+x_2+\dots+x_n$  набуває найменшого значення, якщо добуток  $x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\cdot\dots\cdot x_n^{m_n}$  сталий і виконується співвідношення:

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n}{m_n}.$$

### 3.10.2. Нерівність трикутника; Властивість точок, розташованих на серединному перпендикулярі відрізка; бісектриси кута

Наведемо **приклади задач з підручників геометрії**, які можуть бути запропоновані учням у ході даного проєкту і дають вихід на пошук оптимальних варіантів. Обґрунтування буде опиратися на властивості точок на серединному перпендикулярі відрізка, нерівність трикутника.

**Задача №669. [114]** Недалеко від залізниці розташовано два села. Знайдіть на лінії залізниці місце для станції, яка була б рівновіддаленою від цих сіл. Зробіть малюнок.

**Задача №670. [114]** Мешканці трьох дачних будинків А, В і С вирішили знайти таке місце для колодязя, щоб відстань від нього до будинків була однаковою. Як визначити місце для колодязя?

**Задача №735. [114,]** Для забезпечення водою двох населених пунктів, що розташовані з одного боку від каналу, потрібно на його березі побудувати водонапірну башту так, щоб сумарна довжина труб від неї



до кожного з пунктів була найменшою. Як це зробити? Поясніть.

Вивчаючи тему «Нерівність трикутника», помітили, з якою цікавістю школярі розв'язують задачу про оптимальне розміщення мосту через річку, яка протікає поблизу двох населених пунктів, та вирішують проблему зменшення витрат на асфальтування доріг.

### 3.10.3. Система динамічної математики (7-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів)

Для вирішення проблеми варто запропонувати створити динамічне креслення за допомогою системи динамічної математики (рис. 3.31).

На першому етапі переводимо прикладну задачу на математичну мову. Вводимо наступні абстрактні об'єкти: населені пункти – точки; береги річки – дві паралельні прямі; шлях, що з'єднує населені пункти, подаємо у вигляді ламаної. Аналізуємо, які величини задані в умові, а які потрібно в задачі знайти. До заданих відносимо відстані до берегів річки від населених пунктів, ширину річки, відстань між населеними пунктами вздовж берега. Щоб побудувати динамічне креслення, необхідно з'ясувати, які об'єкти в динамічному кресленні будуть головними, залежними чи напівзалежними.

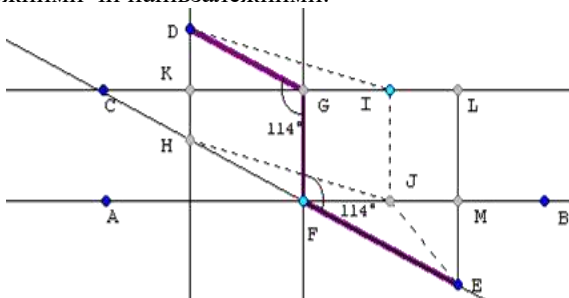


Рис.3.31. Проект для побудови мосту ([Gran-2D](#), QR колекції [Geogebra](#))

- Виробляємо поданий нижче алгоритм створення креслення:
- 1) побудуємо точки  $A, B, C$  (Створити \ Точка);
  - 2) проведемо берег річки  $AB$  (Створити \ Пряма);
  - 3) через точку  $C$  паралельно до  $AB$  проходить другий берег (Створити \ Паралельна пряма);
  - 4) позначаємо населені пункти  $D, E$  (Створити \ Точка);
  - 5) вибираємо на прямій  $AB$  довільну точку  $F$  (вхід на міст) і даємо ствердну відповідь на питання про її прикріплення до об'єкта;
  - 6) будуємо міст – перпендикулярну до  $AB$  пряму через точку  $F$  (Створити \ Перпендикулярна пряма);
  - 7) знаходимо точку  $G$  – точку перетину з протилежним берегом (Створити \ Точка перетину об'єктів);
  - 8) прокладаємо дорогу, що з'єднує пункти (Створити \ Ламана  $DGFE$ ). Якщо вказівник переліку об'єктів установемо на пункті «лама-

на», то в полі *характеристик* з'явиться її довжина;

9) щоб знайти оптимальне розташування точки  $F$ , змінюють її положення, рухаючи вздовж прямої. При цьому відстежуємо зміну величини шляху як довжину ламаної або ж створюємо динамічний вираз за формулою  $Len(D,G)+Len(G,F)+Len(F,E)$  (подано у форматі *GRAN-2D*). Для того, щоб створити динамічний вираз в середовищі GeoGebra, потрібно створити напис, ввівши до його складу три об'єкти – позначення відрізків. Щоб отримати підсумок, вписують вираз у відведену комірку.

Якщо у вчителя/викладача є змога лише демонструвати наочність через проєктор, то можна пропонувати заздалегідь підготовлену модель, проставляючи відмітки біля введених об'єктів. Одночасно переглядають дану модель і з використанням мобільних телефонів.

Для довільного розташування пунктів на кресленні можемо знайти розташування точки  $F$ . Пропонується знову повернутися до вихідної проблеми і проаналізувати кожну із складових шляху. Варіюючи такою несуттєвою величиною, як відстань до берега, встановлюємо, що ширина річки не впливає на оптимальну довжину шляху. Тому переходимо до підзадачі даної задачі. За якої умови сума відстаней від населених пунктів до входу на міст буде однаковою? Учасники дослідження можуть висунути дві гіпотези – внутрішні різносторонні кути  $DGF$  і  $EFG$  рівні чи прямі  $DG$  та  $EF$  паралельні. Зрештою, обидві гіпотези будуть правильними. Перевірку рівності кутів виконуємо за допомогою послуги *Обчислення \ Кут*. Користуючись динамічним кресленням, потрібно спрямували учасників навчального процесу до самостійного висновку.

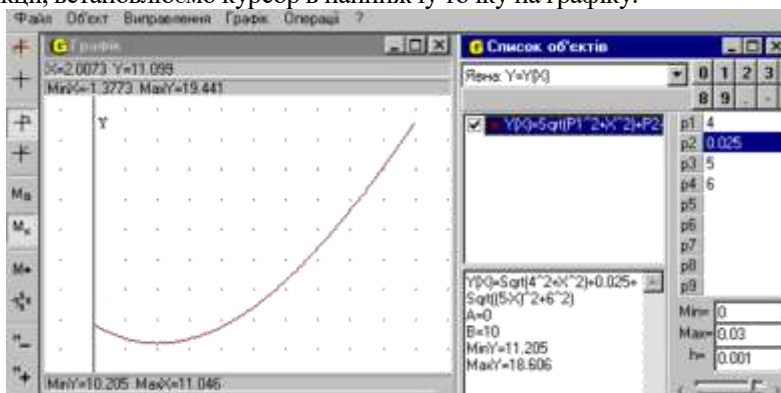
Наступним кроком має йти пошук обґрунтування висунутої гіпотези. Для цього потрібно здійснити побудову паралелограма. Для обґрунтування висунутої гіпотези застосовуємо властивості паралелограма  $DGFH$  та нерівність трикутника  $HEJ$ , де  $J$  – довільна точка на прямій  $AB$ , відмінна від  $F$ . Оскільки  $HE < HJ+JE$ , то  $DG+GF+FE < DI+IJ+JE$ . Шлях  $DGFE$  найкоротший.

Для самостійної роботи учням / студентам можна запропонувати розглянути розташування пунктів з одного боку річки, а додатково створити динамічне креслення за допомогою системи динамічної математики.

### 3.10.4. Дослідження функції з використанням похідної (10-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів)

Задачу про побудову мосту через річку можна розв'язувати з використанням похідної. Модель-функція для дослідження за допомогою [GRAN1](#) чи GeoGebra така ж, як і для дослідження з похідною без застосування програмних засобів. Позначимо відстань  $DK$  (рис. 3.32) через параметр  $P1$  (створити відповідний бігунок), ширину річки  $P2$ , відстань між пунктами  $KL$  вздовж берега через  $P3$ , відстань  $EM$  від другого пункту до берега річки через параметр  $P4$ . Нехай змінна  $x$  – це відстань  $KG$ . Для дослідження [за допомогою GRAN1 створюємо об'єкт явного типу](#) задання

за формулою  $Y(X) = \sqrt{P1^2 + X^2} + P2 + \sqrt{(P3 - X)^2 + P4^2}$ . Для кожного з параметрів вказуємо невід'ємні межі. Відстані, про які йде мова в задачі, можна змінювати, рухаючи бігунок параметра. Щоб знайти точку мінімуму функції, встановлюємо курсор в найнижчу точку на графіку.



**Рис.3.32.** Дослідження розташування мосту через річку ([скріншот GRAN1](#))

У Geogebra можемо скористатися при цьому вкладкою *Інспектор функції* чи інструментами *Функції та Обчислення / Екстремум*, зробивши відповідний запис у рядку введення. При цьому записують *Екстремум[функція, початок відрізка, кінець відрізка]*.

Важливо правильно інтерпретувати отриманий результат і узагальнити його. Для параметрів функції, графік якої подано на рис. 3.32 ( $P1=4$ ,  $P2=0.025$ ,  $P3=5$ ,  $P4=6$ ), знайдено, що  $X=2$ . Для точки мінімуму буде виконуватися умова рівності тангенсів кутів  $DGK$  і  $EFM$ , тобто  $P1/X = P4/(P3 - X)$ . Умову отримаємо, обгрунтовуючи результат за допомогою похідної  $X = P1 * P3 / (P1 + P4)$ .

Наведемо **приклад** задач з підручника алгебри і початків аналізу [107, с.422], які можуть запропоновані учням/студентам у ході даного проекту і дають вихід на пошук отримальних варіантів. Розв'язування задачі зводиться до створення моделі-функції, дослідження функції за допомогою похідної на наявність локальних екстремумів.

**Задача 50.17.** У півколо радіуса 20 см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть сторони прямокутника.

**Задача 50.18.** У півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника

**Задача 50.23.** У трапеції менша основа й бічні сторони дорівнюють  $a$ . Якою має бути більша основа трапеції, щоб площа трапеції була найбільшою?

**Задача 50.30.** Завод А розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, яка прямує в місто В, і на відстані 130 км від міста В. Під яким кутом до залізниці слід провести шосе від заводу А, щоб доставка вантажів з А до В була найдешевшою, якщо вартість перевезення по шосе у

два рази більша, ніж залізницею?

**Приклад.** Пункти А, В і С розміщені у вершинах прямокутного трикутника ( $\angle ACB = 90^\circ$ ),  $BC = 3$  км,  $AC = 5$  км. З пункту А в пункт С веде шосейна дорога. Турист починає рухатися з пункту А по шосе. На якій відстані від пункту А турист має звернути із шосе, щоб за найменший час дійти з пункту А до пункту В, якщо швидкість туриста по шосе дорівнює 5 км/год, а поза шосе – 4 км/год?

Вивчаючи тему «Переміщення фігур», можна побудувати динамічні креслення до наступних практичних задач:

1) З прямокутного листа жерсті розмірами 5 x 8 дм виготовити коробку без кришки найбільшого об'єму. Якими мають бути її виміри (рис. 3.33)?

2) При конструюванні трансформатора змінного струму заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним [осердям найбільшої площі](#). Знайти розміри осердя, якщо задано радіус порожнини котушки?

Створюємо розгортку поверхні коробки, дотримуючись правил побудови у системі динамічної математики. Послідовність побудов у програмі така сама, як і при виконанні цих дій вручну з циркулем та лінійкою. На стороні  $AC$  прямокутника  $ACDB$  виберемо довільну точку  $E$  і *прикріпимо її до об'єкта* пряма  $AC$ . Відріжемо у кожному з чотирьох кутів прямокутника квадратики, довжини сторін яких дорівнюють  $CE$ . Для цього знайдемо точку  $F$  – точку перетину кола (центр  $C$ , радіус  $CE$ ) зі стороною  $CD$  і проведемо через точки  $F$  та  $E$  пряму, перпендикулярну до сторін прямокутника. Точку перетину прямих позначимо  $G$ . Через середину сторони  $AB$  проведемо вісь симетрії. Точка перетину її з діагональною  $AD$  утворить центр симетрії прямокутника. Для побудови симетричних точок користуємося послугою *Побудова точки, симетричної даній відносно прямої (точки)*. Якби лист жерсті був квадратним, то для відрізання квадратиків могли б застосувати поворот навколо центра на кут  $90^\circ$ . На завершення побудови розгортки обводимо контур – створюємо замкнену ламану, що містить 12 вершин.

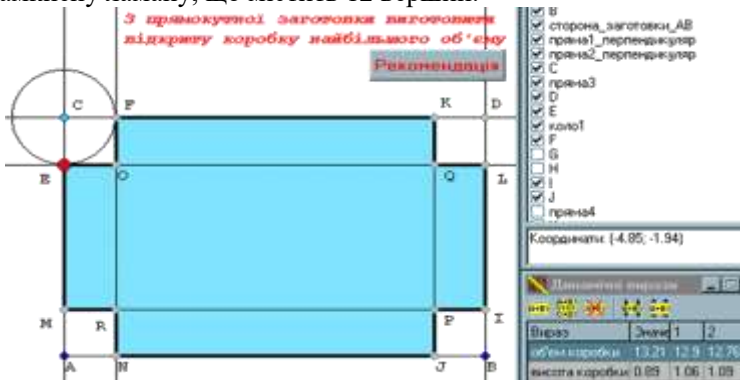


Рис.3.33. Розгортка відкритої коробки ([GRAN-2D](#), [GeoGebra](#)).

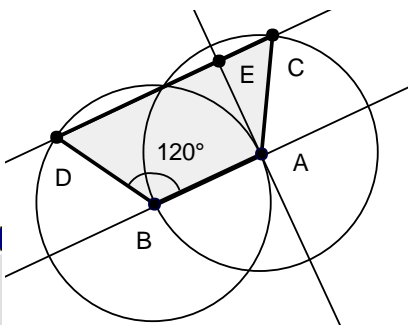
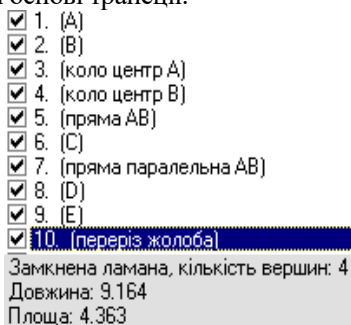
У GRAN-2D, активізувавши послугу Обчислення \ Динамічний вираз \ Створити, складаємо вираз для відстеження зміни об'єму коробки  $LEN(O,Q)*LEN(Q,P)*LEN(O,F)$ . Рухаємо точку E вздовж сторони прямокутника i, звернувшись до послуги *Обчислення \ Динамічний вираз \ Зафіксувати поточне значення*, реєструємо величину об'єму. Серед обчислених значень вибираємо найбільше. Для прямокутника з розмірами 5 x 8 дм встановлюємо, що відрізати потрібно квадратики зі стороною 1 дм. Для листа квадратної форми знайдемо, що максимальне значення об'єму буде за умови, коли відтинаємо квадратики зі стороною, рівною шостій частині сторони початкової заготовки.

Порівняємо, як задачу про коробку розв'язують через створення моделі у вигляді функції. Правило-орієнтир при цьому таке ж, як і для дослідження з похідною [135, 414]: 1) проаналізувати формулювання задачі, з'ясувавши, найбільше значення якої величини треба знайти; вибрати незалежну змінну (аргумент)  $x$  і записати цю величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію; 2) знайти найбільше значення функції. Отже, введемо змінну  $x$  – довжину сторони квадратики і складемо функцію  $V(x) = (5 - 2x)(8 - 2x)x$ , при  $x \in (0; 2.5)$ . Побудувавши графік функції, визначають точку екстремуму і екстремум за допомогою координатного курсору, який потрібно розмістити у найвищій точці графіка (GRAN1). Обґрунтовують результат з використанням похідної. Знаходять похідну  $V' = 12x^2 - 52x + 40$  і переконуються, що при  $x=1$  значення об'єму максимальне. У системі динамічної математики *GeoGebra* для визначення точок екстремумів та екстремумів доцільно скористатися інструментом *Інспектор функцій*.

Під час заняття з метою економії часу можна використати моделі в режимі *покрокової побудови*. Наприклад, доцільно продемонструвати модель для створення проблемної ситуації на етапі мотивації при вивченні теми «Застосування похідної до дослідження функції», що сприятиме розвитку мотиваційно-творчої активності та спрямованості особистості. Застосування комп'ютерних технологій спрямоване на цілісне сприйняття досліджуваного явища, з'ясування його сутності, а тому сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу, більш повному осмисленню його здобувачами освіти. Це зробить їх діяльність більш усвідомленою і продуктивною.

*Попередній аналіз і побудова моделі.* Нехай в завданні стоїть вимога з трьох однакових дошок виготовити жолоб найбільшого об'єму. Спочатку виділяємо підзадачу: знайти рівносторонню трапецію найбільшої площі. Розчленуємо умову задачі на елементарні умови і вимоги. Об'єктом в задачі є трапеція, у якої менша основа і бічні сторони рівні. Вимогою є обчислення площі. Вибудовуємо послідовність створення об'єктів за допомогою GRAN-2D (рис. 3.34). Креслимо кола з центрами в точках A і B та радіусом AB. Виберемо на одному з кіл точку C і через неї проведемо пряму, паралельну AB до перетину з другим колом. Будуємо

замкнену ламану – трапецію. Довжина відрізка АВ рівна ширині дошки і меншій основі трапеції.



**Рис.3.34. Поперечний переріз жолоба – рівностороння трапеція (GRAN-2D)**

*Реалізація моделі засобами ІКТ.* Величини, необхідні для дослідження, обчислюються в програмі автоматично. Для зменшення похибки обчислення рекомендуємо збільшити кількість значущих цифр за допомогою послуги *Налагодження програми / Налаштування*. При зверненні в GRAN-2D до послуги *Обчислення \ Кут* і вказуванні букв D, B, A, в динаміці обчислюватиметься тупий кут, який змінюється в результаті руху по колу точки C. Досліджуємо зміну площі залежно від тупого кута (динамічний вираз  $AREA(A, B, D, C)$ ) і встановлюємо шуканий кут.

Вибудовуємо послідовність створення об'єктів за допомогою *GeoGebra* (рис. 3.35):

- Креслимо кола з центрами в точках A і B та радіусом АВ. Довжина відрізка АВ рівна ширині дошки і меншій основі трапеції.
- Створюємо на полотні бігунок  $a$ , за допомогою якого будемо задавати тупий кут трапеції у градусах в межах від 90 до 180.
- Відкладаємо від відрізка АВ проти годинникової стрілки кут  $a$  з вершиною у точці А. Отримуємо точку С.
- Через точку С проводимо пряму, паралельну до відрізка АВ, до перетину з іншим колом. Отримуємо точку D.

На завершення будуємо замкнену ламану – трапецію. При цьому автоматично обчислюється площа трапеції  $q_1$ .

*Реалізація моделі засобами ІКТ.* Величини, необхідні для дослідження, обчислюються в програмі автоматично. Для зменшення похибки обчислення доцільно збільшити кількість значущих цифр за допомогою послуги *Налаштування програми*. Досліджуємо зміну величини площі  $q_1$  залежно від величини тупого кута.

Для того, щоб простіше було порівнювати значення, які отримаємо для площі трапеції залежно від тупого кута, створюємо таблицю, до якої заносимо значення бігунка та величину площі трапеції. Якщо таблиця відкрита, то у контекстному меню для властивостей об'єкта з'являється рядок «*Занести до таблиці*». Спочатку вказуємо про занесення до таблиці значень ку-

та, далі виділяємо трапецію і, викликавши контекстне меню, зазначаємо про занесення значень площі. При зміні значень бігунка з обраним кроком, таблиця автоматично заповнюється відповідними наборами значень (рис. 3.35). Встановлюємо, що найбільше значення площі трапеції буде для кута  $120^\circ$ .

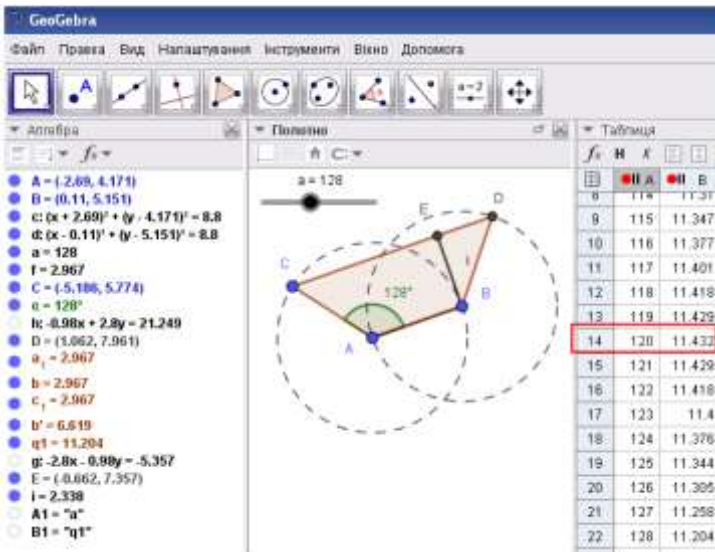


Рис. 3.35. Побудовано переріз жолоба. Справа подано таблицю зі списком даних *Кут і Площа трапеції*.

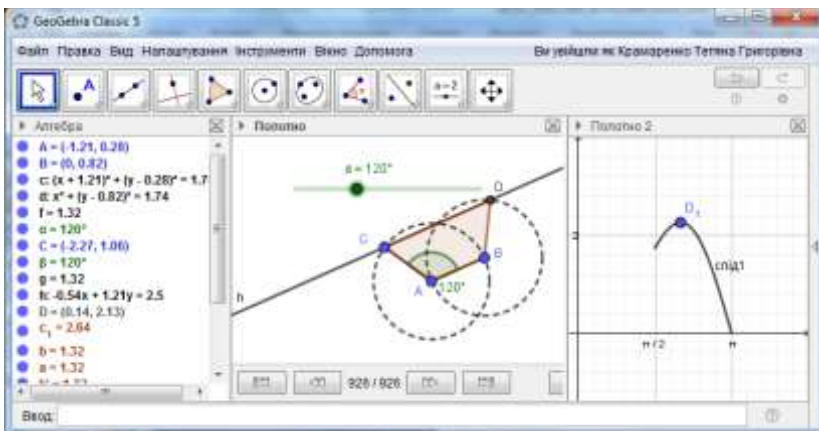


Рис. 3.36. Справа на полотні 2 побудовано ГМТ [величини кута і площі](#).

Зрештою, можна будувати динамічну конструкцію і графік функції площі як геометричне місце точок з координатами  $(a, q_1)$  на одному чи різних полотнах. Спочатку будують довільну точку, а потім у властиво-



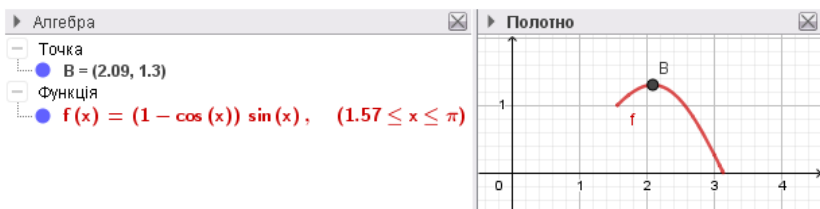
стях змінюють її координати на  $(a, q1)$ . Потім обирають вкладку *Локус*. У якості незалежного параметра вказують значення бігунка  $a$ , а залежної точки – точку з координатами  $(a, q1)$ . Коли анімувати об'єкт-бігунок, то побудована точка буде описувати графік функції площі. Однак, визначити екстремум можемо візуально, тому що до *Локус* застосувати *Інспектор функції* чи інструмент *Екстремум* не можемо.

Розглянемо ще й інші прийоми розв'язування задачі засобами GeoGebra, змодельовавши відповідну функцію площі.

*Реалізація моделі-функції засобами ИКТ.* Складемо функцію для обчислення площі трапеції і знайдемо її найбільше значення. Прийнемо ширину дошки рівною 1, величину тупого кута трапеції  $a$ . Тоді з трикутника BED (рис. 2.36) отримаємо  $ED = DB \cdot \sin(a - 90^\circ) = -\cos(a)$ . Висоту трапеції обчислимо за формулою  $BE = DB \cdot \cos(a - 90^\circ) = \sin(a)$ . Тоді запишемо формулу для обчислення площі трапеції:  $S(a) = (1 - \cos(a)) \cdot \sin(a)$ .

Розв'язуючи задачу з використанням похідної, диференціюють функцію  $S(a)$ , отримують критичну точку  $a = 2\pi/3$  і перевіряють, що це точка максимуму.

За допомогою команди GeoGebra *Функція*  $[(1 - \cos(x)) \cdot \sin(x), \pi/2, \pi]$  можна ввести до розгляду функцію  $S(x) = (1 - \cos(x)) \cdot \sin(x)$ . Створений об'єкт автоматично отримав позначення  $f$ , яке за бажанням можна змінити. Далі користуємося командою *Екстремум* і у рядку введення записуємо вираз  $\text{Екстремум}[f, \pi/2, \pi]$ , вказавши, на якому відрізьку необхідно обчислити екстремум. У результаті на графіку функції з'являється точка, абсциса якої є точкою максимуму функції, а ордината – максимумом функції, а у списку об'єктів точка з цими координатами, обчисленими наближено:  $2,09 \text{ рад} \approx 2\pi/3 \text{ рад}$ .



**Рис.3.37.** Скріншот [виконаної побудови графіка](#) функції площі

У якості незалежної змінної  $x$  можна взяти довжину відрізка ED – півризницю основ, через  $a$  позначити довжину меншої основи та бічної сторони. За формулою  $S = \frac{1}{2}(2x + 2a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$  обчислюватимемо площу трапеції. Створюємо об'єкт типу *Бігунок*, яким будемо визначати ширину дошки. Для дослідження за допомогою GeoGebra створюємо



об'єкт типу *Функція* за формулою *Функція* $[0.5*(2*x+2*a)*\text{sqrt}(a^2-x^2),0,a]$ , де  $a$  – параметр (ширина дошки). Вказуємо межі зміни змінної  $X$  та параметра. Рухаючи бігунок параметра, змінюємо ширину дошки і відстежуємо, як точка максимуму пов'язана з величиною цього параметра. Для визначення точки максимуму розташовуємо координатний курсор у найвищій точці графіка (рис. 3.38) і знаходимо, що  $x_{\max} = 0,5 \cdot a$ , тобто згідно з позначенням  $2x=a$ .

*Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на образ, що вивчається.* З трикутника  $VED$  встановлюємо кут збивання дошок  $120^\circ$ .

При обґрунтуванні гіпотези з використанням похідної, попередній аналіз і побудова моделі-функції повторюють викладені вище.

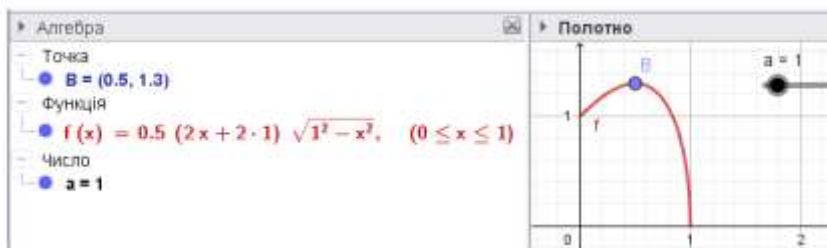


Рис. 3.38. Графік функції площі трапеції (GeoGebra).

Для дослідження за допомогою GRANI позначаємо ширину дошки (змінна  $y$ ) через параметр  $P1$  і створюємо об'єкт типу *Явний  $y(x)$*  за формулою  $(X + P1) * \text{SQRT}(P1^2 - X^2)$ . Вказуємо межі зміни  $X$  та параметра  $P1$ :  $A=0, B=5$ . Рухаючи бігунок параметра  $P1$ , змінюємо ширину дошки і відстежуємо, як точка максимуму пов'язана з величиною параметра  $P1$ . Знаходимо, що  $X_{\max}=0,5P1$ , тобто згідно з позначенням  $2x=y$  (рис. 3.39).

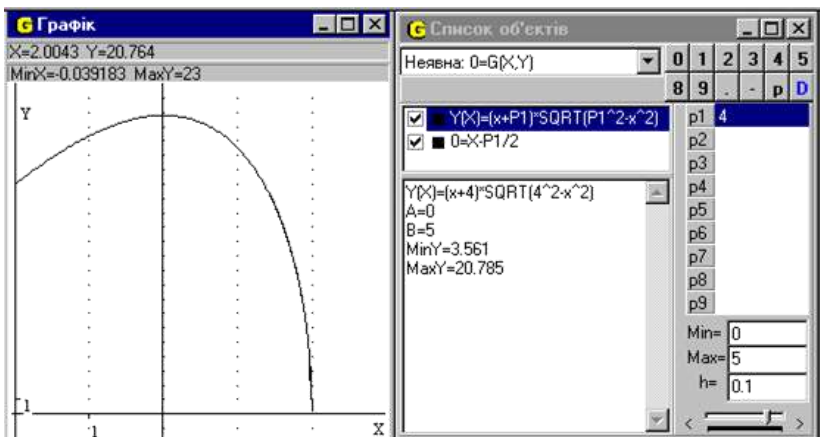


Рис.3.39. Графік функції площі трапеції (GRANI).

### 3.10.5. Нерівність Коші; Властивості квадратичної функції (9-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів)

Прикладні задачі розв'язують також за допомогою систем рівнянь, застосовуючи властивості квадратичної функції, нерівність Коші та ін. Найчастіше розглядають задачі на рух, спільну роботу, суміші, обчислення вартості та ін., а також геометричні задачі, до розв'язування яких застосовують алгебраїчні методи. Наведені нижче задачі ми спочатку пропонували учасникам проекту розв'язати, а потім виготовити коробку з картону за отриманими розмірами.

**Задача 1.** З прямокутної заготовки із заданими розмірами виготовити відкриту коробку з найбільшою бічною поверхнею.

Для розв'язування задачі складають математичну модель – квадратичну функцію та знаходять її максимальне значення, яке досягається у вершині параболи.

**Задача 2.** Виготовити упаковку з картону заввишки 5 см з найбільшою площею повної поверхні, якщо в наявності є дріт для укріплення по периметру нижньої основи завдовжки 12 см. Попередньо виконати розрахунки довжин сторін прямокутника, який лежатиме в основі (рис.3.40).

**Задача 3.** Обгородити для паркування земельну ділянку у вигляді прямокутника найбільшої площі, якщо в наявності є матеріал для тимчасової загорожі завдовжки 80 м. При цьому залишити необгородженою ділянку довжиною 4 м зі сторони заїзду.

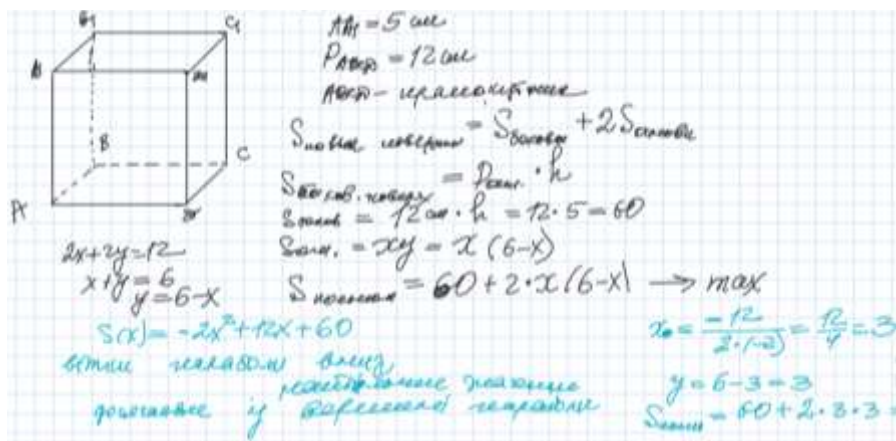


Рис. 3.40. Скріншот розв'язання задачі на пошук екстремуму функції

В якості незалежної змінної беруть одну із сторін прямокутника. Тоді інші сторони позначають  $x$ ,  $y$ ,  $y$ . Знаючи довжину загорожі, виражають змінну  $y$  через змінну  $x$  та підставляють у вираз для площі. У ході розв'язування учні досліджують на екстремум квадратичну функцію та встановлюють, що з усіх прямокутників у цьому випадку найбільшу

площу буде мати квадрат. На рис. 3.41 подано скріншот з віртуальної дошки Google Jamboard з розв'язанням задачі на пошук екстремуму квадратичної функції.

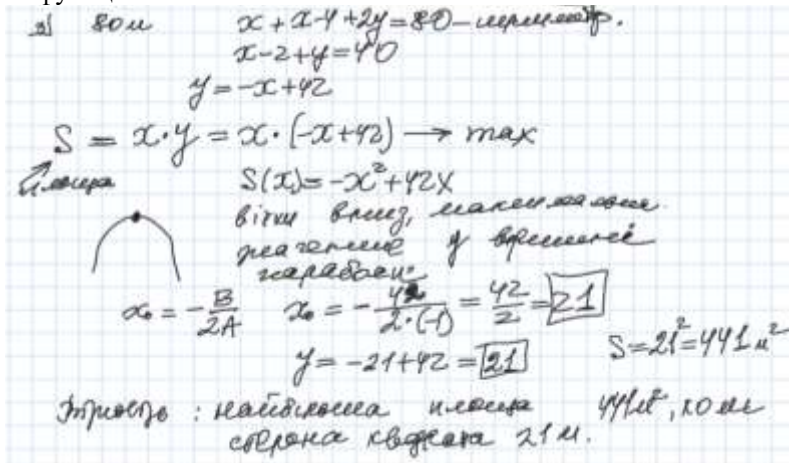


Рис. 3.41 Скріншот розв'язання задачі на пошук екстремуму функції.

**Задача 4.** Із залишку тирсоплити у вигляді трапеції необхідно вирізати прямокутну кришку з максимальною площею. Як це зробити?

**Задача 5.** Із заготовки у вигляді трикутника вирізати паралелограм найбільшої площі так, щоб у паралелограма і трикутника був спільний кут. Як це зробити?

**Задача 6.** Серед усіх прямокутників, вписаних в дане півколо, знайти прямокутник найбільшої площі. Як це зробити?

**Задача 7.** З клаптиків тканини у вигляді кругів вирізати для аплікацій чотирикутники найбільшої площі. Як це зробити?

Розвиває STEM-компетентності особистості як розв'язування нестандартних задач, так і відшукування нестандартного методу для розв'язування пізнавальної задачі. Наприклад, доцільно запропонувати використати нерівність Коші для обґрунтування результатів, отриманих за допомогою системи динамічної математики до такої розвиваючої задачі: під яким кутом потрібно збити три однакові дошки, щоб одержати жолоб з найбільшим поперечним перерізом (найбільшим об'ємом)?

При обґрунтуванні гіпотези про те, які будуть розміри трапеції, за нерівністю Коші, попередній аналіз і побудова моделі-функції повторюють викладені вище.

Для доведення за нерівністю Коші перетворимо формулу  $S = \frac{1}{2}(2x + 2a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$  для вираження площі трапеції. Необхідно знайти найбільше значення площі за умови сталої величини  $l = 3a$ . Добуток  $3S^2 = (x + a)(x + a)(x + a)(3a - 3x)$  набуває найбільшого значення при

сталій сумі  $2l = (x+a) + (x+a) + (x+a) + (3a-3x) = 6a$  за умови  $x+a = 3a-3x$ . Тоді  $a=2x$ .

Проаналізуємо дидактичні функції, що їх виконує запропонована задача. *Навчальна функція* забезпечує формування системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах засвоєння. В учнів / студентів формується вміння застосовувати нерівність Коші чи похідну до розв'язування задач на екстремум, будувати до них динамічні креслення. *Виховна роль задачі* проявляється у формуванні навичок праці, наукового світогляду, пізнавального інтересу та самостійності. *Розвиваюча* – забезпечує розвиток вміння моделювати ситуацію, оволодіння прийомами розумової діяльності, сприяє формуванню здібності переносити знання та вміння в нові ситуації, бачити знайоме в незнайомому та ін. *Контролююча функція* спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння матеріалу.

У двох наступних задачах для обґрунтування результатів також можна використати **нерівність Коші**. Однак ці завдання краще розглянути при вивченні теми «Площі фігур».

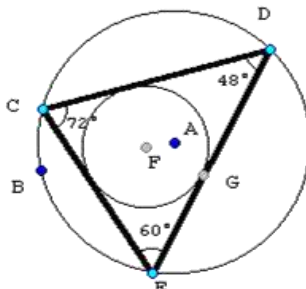
**Задача 8.** В деталі, що має форму циліндра, просвердлити паралельно її осі круглий наскрізний отвір, діаметр якого дорівнював би діаметру кола, вписаного в трикутник, вписаного в свою чергу у поперечний переріз цієї деталі. Знайти максимально можливий відсоток відходів від первісної маси деталі [124, 190].

**Задача 9.** З відходів виробництва, що є обрізками трикутної форми, штамкують круглі шайби. Визначити найбільший відсоток використання матеріалу.

У результаті дослідження для першого завдання сформуємо висновок: з усіх трикутників, вписаних в дане коло, найбільший радіус вписаного кола у рівностороннього трикутника.

Для другого завдання динамічний вираз складасмо як відношення площі вписаного кола до площі трикутника CDE (рис. 3.42): [у форматі GRAN-2D](#) за формулою  $(LEN(F,G))^2 * \pi * 100 / \text{AREA}(C,D,E)$  чи за іншою, в якій площа кола не розписана,  $\text{AREA}(\text{КОЛО2}) / \text{AREA}(C,D,E) * 100$ . Для рівностороннього трикутника встановимо найбільший відсоток використання матеріалу обрізків – майже 60,5%.

Як результати дослідження, сформуємо важливі практичні висновки: найбільшу площу з усіх трикутників, вписаних в дане коло, має рівносторонній; з усіх трикутників зі сталою площею найбільший радіус вписаного кола також у правильного трикутника. Обґрунтуємо висунуту



**[Рис.3.42. розробка GRAN-2D](#)**

гіпотезу. При незмінній величині площі отримаємо

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{4S}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} \leq \frac{4S}{3 \cdot 2a}.$$

Рівність маємо при  $a=b=c$ .

Завдяки розв'язуванню задач кількома способами, включаючи і моделі, створені за допомогою ПЗ, вибору найдоцільнішого способу розв'язування, задач нестандартного виду формується креативна якість особистості – гнучкість мислення. Прояв цієї якості діагностується в легкості переходу від одного способу розв'язування до іншого, вмінні знаходити декілька способів розв'язування поставленої задачі.

### *3.10.6. Стереометричні задачі практичного змісту (10-11 клас, 1-2 курси фахових коледжів)*

Геометрія є наукою абстрактною і часто викладається без належної реалізації її прикладної спрямованості. Це призводить до того, що значна частина здобувачів освіти не відчуває потреби у вивченні даного предмета, оскільки не бачить можливості використання набутих геометричних знань, зокрема зі стереометрії, у майбутньому. А тому є потреба у наповненні змісту прикладними стереометричними задачами.

Пропонуємо спочатку розглянути дві задачі практичного змісту, для розв'язування яких вбачаємо за доцільне використати додаток GeoGebra 3D. Ці задачі ми пропонували для розв'язування студентам коледжу економіки Державного університету економіки та технологій, порівнювали результати, подані учасниками контрольної та експериментальної груп. Результати проведеного дослідження на базі двох паралельних груп спеціальності «Фінанси та кредит» щодо ефективності використання під час пояснення GeoGebra 3D ми висвітлювали у публікації [17]. У експериментальній групі було завдання розв'язати задачі на основі динамічного рисунку, контрольна група розв'язувала такі ж задачі, але за допомогою статичного.

**Задача 1.** З дерев'яної колоди завдовжки 5 м та діаметром основ 20 см і 15 см виготовляють балку з поперечним перерізом у формі прямокутника максимальної площі? Скільки відсотків деревини йде у відходи?

**Задача 2.** Обчисліть об'єм найбільшого бруса з основою у формі прямокутника, який можна витесати з колоди циліндричної форми. Довжина колоди 5 м, а товщина – 20 см. Який відсоток деревини при цьому піде у відходи?

Запропонована анкета складалась з декількох запитань, на які студенти відповідали під час розв'язування задач.

1. З якими фігурами будемо працювати? Правильна відповідь: циліндр і прямокутний паралелепіпед.

2. Як розташовані фігури одна відносно іншої? Правильна відповідь: паралелепіпед вписаний в циліндр.

3. Якої форми має бути поперечний переріз балки, щоб її розмір був

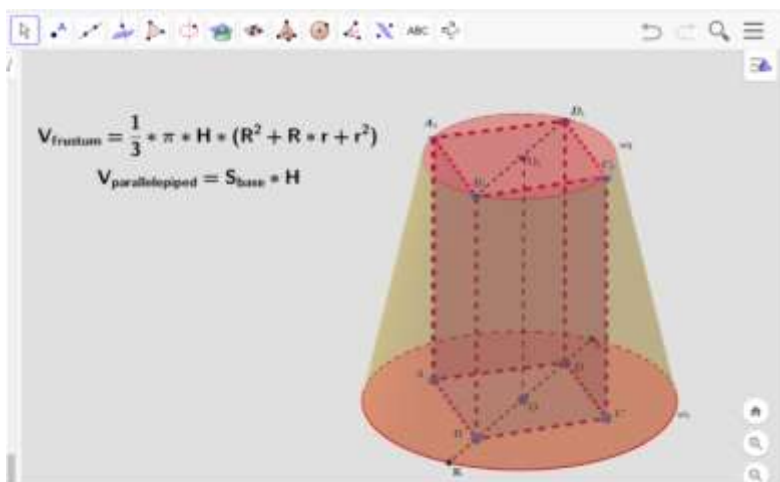
максимальним? Правильна відповідь: об'єм бруса буде найбільшим, якщо поперечний переріз бруса буде квадратної форми. Для цього не обов'язково складати функцію і досліджувати її на екстремум, достатнього скористатися формулою для обчислення площі чотирикутника, вписаного в коло.

На другому етапі у контрольній групі було продемонстровано рисунок до задачі на папері, в експериментальній – у GeoGebra (рис. 3.43) та розглянуто його в динаміці.

4. Після цього групам повторно задали останнє запитання щодо перерізу. Статистика позитивних відповідей покращилась, причому переважно в експериментальній групі.

5. Що розуміють під відходами від виготовлення колоди? Правильна відповідь – різниця між об'ємом зрізаного конуса та об'ємом паралелепіпеда.

Використання динамічного зображення у GeoGebra допомогло студентам експериментальної групи покращити статистику відповідей. Результати анкетування показали, що вища результативність досягається саме при демонструванні динамічних моделей.



**Рис. 3.43. Паралелепіпед, вписаний у зрізаний конус.**

Ми доповнювали добірки завдань на оптимізацію з використанням GeoGebra наочностями для реалізації міжпредметних зв'язків початків аналізу та стереометрії. При цього можна за виразами для обчислення об'єму тіла відслідковувати зміну цієї величини і знаходити оптимальні розміри бруса. Доцільно також скористатися у GeoGebra інструментом «інспектор функцій», щоб знаходити екстремальні значення функції та візуалізувати абстракції. Зручно одразу на полотні прописати формули, а потім під час обговорення відкривати їх покривою.

Щоб зробити таку заготовку в додатку GeoGebra 3D, потрібно спочатку побудувати зрізаний конус (шляхом перетину конуса площиною), потім через центр меншого кола і точку на ньому будуємо пряму. До отриманої прямої проводимо перпендикулярну пряму, обравши точкою центр меншого кола. Відмічаємо точки перетину прямих з колом та через отримані 4 точки будуємо квадрат (за допомогою інструменту Многокутник), послідовно з'єднавши точки. З вершин квадрата опускаємо перпендикуляри до нижньої основи конуса (більшого кола) та відмічаємо точки перетину перпендикулярів з площиною основи конуса, через отримані 4 точки будуємо квадрат, послідовно з'єднавши точки. За допомогою інструменту Призма будуємо призму, обравши многокутник основи (квадрат) і вершину на одній з точок меншого кола.

При поглибленому навчанні математики ми пропонували задачі стереометрії на оптимізацію за підручниками для 10-го і 11-го класів [106; 107], за посібником М.І.Сканаві [124, с. 344-345]. Після розрахунків оптимальних розмірів призми / піраміди здійснювали креслення розгортки многогранника і склеювали. Для демонстрацій пропонували моделі у динаміці, створені за допомогою системи динамічної математики.

Наведемо приклади математичних задач, які здобувачі освіти повинні були переформулювати як задачі практичного змісту.

1. Яких розмірів мають бути радіус основи і висота відкритого циліндричного бака, щоб при заданому об'ємі  $V$  на його виготовлення було витрачено найменшу кількість листового металу?

2. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди має сталу задану площу і нахилена до площини основи під кутом  $A$ . При якому значенні  $A$  об'єм піраміди є найбільшим?

3. У правильну чотирикутну піраміду з ребром основи  $a$  і висотою  $H$  вписано правильну чотирикутну призму так, що її нижня основа розміщена в основі піраміди, а вершини верхньої основи – на бічних ребрах. Знайти ребро основи і висоту призми, яка має найбільшу бічну поверхню.

4. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має сталу задану довжину і утворює з площиною основи кут  $A$ . При якому значенні  $A$  об'єм піраміди буде найбільшим?

5. У правильній трикутній піраміді бічна грань має сталу задану сталу площу і утворює з площиною основи кут  $A$ . При якому значенні  $A$  відстань від центра основи піраміди до її бічної грані найбільша?

6. У конус із заданим сталим об'ємом вписано піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом при вершині, що дорівнює  $A$ . При якому значенні  $A$  об'єм піраміди найбільший?

7. Твірна конуса має сталу довжину і утворює з висотою конуса кут  $A$ . У конус вписано правильну шестикутну призму з рівними ребрами (основа призми розміщена у площині основи конуса). При якому значенні  $A$  бічна поверхня призми найбільша?

Розв'язування задач прикладного змісту надає можливість мотиву-

вати, активізувати навчально-пізнавальну діяльність учасників навчального процесу та сприятиме практичному застосуванню набутих знань.

Навчальний матеріал слід насичувати різними задачами економічного змісту. Наприклад, *задачами лінійного програмування*; завданнями, пов'язаними з опрацюванням *статистичних вибірок* тощо.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, які беруть участь у проєкті «Економна економіка»?

2. Які напрями досліджень за проєктом «Економна економіка» можна запропонувати учням профільної школи і студентам 1-2 курсів фахових коледжів?

3. Як можна застосувати 3D-принтер під час роботи у проєкті?

4. Запропонуйте інші міжпредметні проєкти, які можна реалізувати при вивченні математики у старшій школі і у фаховому коледжі з метою пошуку оптимальних рішень.

6. Як диференціювати завдання за проєктом для учнів основної та старшої школи, учнів профільної школи та студентів 1-2 курсів фахових коледжів, які навчаються за певними спеціальностями.

### **3.11. Похідна у задачах фізики та економіки**

**Назва теми:** Застосування похідної у навчанні фізики та економіки; 10-11 клас; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** алгебра і початки аналізу, економіка, фізика, інформатика. **Тип заняття:** бінарний урок:

**Актуальність та мета:** Стало традицією проведення інтегрованих занять математики з інформатикою, фізикою, економікою в коледжі економіки Державного університету економіки та технологій. Зокрема, за такими темами як застосування похідної, визначених інтегралів, векторів та ін. Подаємо окремі фрагменти таких занять, зокрема схеми і таблиці (табл. 3.5 – 3.9), які відображають міжпредметні зв'язки фізики, математики, економіки та інформатики, складені сумісно з **учителем фізики коледжу О. Г. Пиріжок<sup>1</sup>** (табл. 3.5 - 3.8).

**Обладнання:** прилади для вимірювання фізичних величин результатів експерименту, підручники, плакати з наочностями.

**Термін виконання.** 2-3 тижні. **Умови проведення.** Учасникам проєкту доцільно працювати в міні-групах.

**Прогнозованим результатом** можуть бути добірки завдань, що демонструють застосування похідної у математиці, економіці та фізиці.

---

<sup>1</sup> Пиріжок О.Г., Діденко С.І., Прибилович Т.В. Застосування похідної в математиці, фізиці, економіці. *Фізика в школах України*. 2013, №8.

Пиріжок О.Г. Економічно орієнтовані методики в шкільному курсі фізики. *Фізика в школах України*. 2006, №11-12.



Таблиця 3.5.

## Використання математичних понять на заняттях з фізики

Поняття курсу	Питання курсу фізики
Приріст функції	Приріст внутрішньої енергії. Приріст об'єму.
Степенева і показникова функції	Графіки термодинамічних процесів рівняння Пуассона. Формула роботи при ізотермічному процесі. Формула роботи при адіабатному процесі.
Похідна Частинна похідна Повний диференціал	Абсолютна і відносна похибки, дослідження функції. Молярна теплоємність газу при сталому тиску. Молярна теплоємність газу при сталому об'ємі.
Інтеграл	Робота газу при зміні його об'єму. Види рівняння Пуассона.
Числові системи та наближені обчислення	Похибки вимірювання, точність. Правило обчислення похибок під час розв'язання задач та виконання лабораторного практикуму.

Таблиця 3.6.

## Використання похідної у фізиці

Фізична величина	Формули
Швидкість	$v = X'$ ; а) $x = vt$ , $v = (vt)' = v$ ; б) $x = v_0t + \frac{at^2}{2}$ , $v = (v_0t) + (\frac{at^2}{2})' = v_0 + at$
Прискорення	$a = V'$ , якщо $v = at$ , то $a = a$
Потужність	$P = \frac{dA}{dt} = A'$ , $dA = Fdx$ , Тоді $P = \frac{Fdx}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv$
Сила	$F = ma$ , де $a = \frac{dv}{dt}$ , тоді $F = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$
Сила струму	$i = \frac{dq}{dt} = q'$
ЕРС індукції	$E_i = - \frac{d\Phi}{dt} = -\Phi'$

Під час розгляду питання інтеграції з економікою, багато викладачів самотужки складають задачі з економічним змістом. Щоб задача мала сенс необхідні реальні, достовірні техніко-економічні і промислово-економічні дані. Їх можна взяти в журналі «Економіка України», «Географія та економіка в школі», у технічних паспортах приладів, а також у будь-якій технічній літературі.

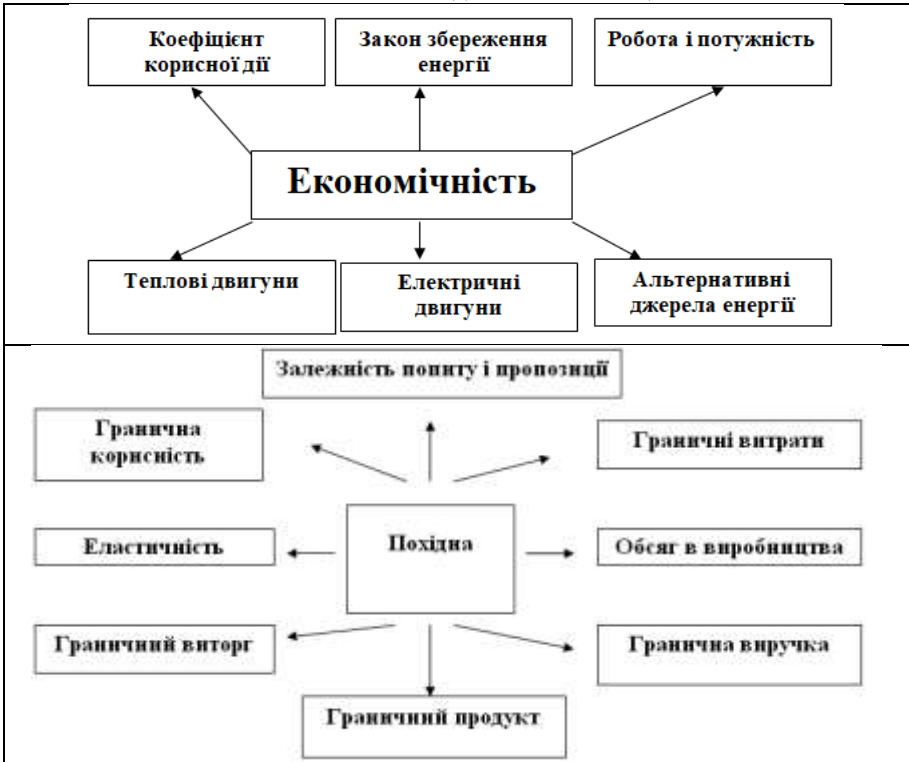
Курс фізики має значні можливості для встановлення зв'язків з математикою, економікою, екологією, інформатикою тощо, які забезпечуватимуть формування цілісного уявлення про природу на основі діалектичної єдності природничих знань; систематичність знань; формування в учнів та студентів умінь встановлювати всебічні зв'язки між явищами, поняттями, творіннями; розуміння цих зв'язків як фактору, що сприяє поглибленню знань; посилення практичної спрямованості навчання.

Таблиця 3.7.

**Визначення економічних понять у фізиці**

<p><b>Економіка</b> – наука, що вивчає поведінку людей у їх господарській діяльності.</p>	<p><b>Фізика</b> – це наука розуміти природу.</p>
<p><b>Прямі витрати</b> – частина розходів, що безпосередньо пов'язані із процесом виготовлення продукції.</p> <p><b>Необхідна праця</b> – це праця, затрачена працівниками матеріального підприємства на створення необхідного продукту.</p>	<p><b>Корисна робота</b> – це різниця між повною енергією та її втратами.</p> <p><b>Затрачена робота</b></p>
<p><b>Економічна ефективність</b> – співвідношення між отриманими результатами і розходами на здійснення даного рішення.</p> <p><b>Економічність</b> – це доля корисно використаної енергії у відношенні до загальної її кількості</p> $\frac{KKД}{100\%}$	<p><b>Коефіцієнт корисної дії</b></p> $\eta = \frac{A_{кор}}{A_{затр}} \times 100\%$
<p><b>Продуктивність</b> – кількість виконаної роботи за одиницю часу.</p>	<p><b>Потужність</b></p> $N = \frac{A}{t}$

**Схеми застосування поняття економічності у фізиці  
та поняття похідної в економіці**



**Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, які беруть участь у проєктах, які пов'язують математику з фізикою та економікою?
2. Які визначення економічних понять застосовні у фізиці та математиці?
3. Які напрями досліджень за проєктом, що пов'язують математику з фізикою та економікою можна запропонувати учням профільної школи і студентам 1-2 курсів фахових коледжів?
4. Як диференціювати завдання за проєктом з використанням похідної функції для учнів профільної школи та студентів 1-2 курсів фахових коледжів, які навчаються за певними спеціальностями?

### 3.12. Малюємо графіками

**Назва змістової лінії:** Функції. **Вікова категорія:** з 12 років залежно від того, які функції вивчено; для учнів 7-9 класів, 10-11 класів профільної школи; студентів 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** алгебра / алгебра і початки аналізу; інформатика, комп'ютерна графіка, мистецтво.

**Актуальність та мета:** Ейдографіка – різновид комп'ютерного моделювання за допомогою графіків функцій та рівнянь. Це своєрідний симбіоз застосування математики, програмного забезпечення і мистецтва. Як зазначає С.П. Параскевич [79, 67] ([переглянути презентацію «Астроарт»](#)), самостійне створення образів у техніці ейдографіки є продуктивною діяльністю і сприяє розвитку креативності особистості завдяки інтегрованому поєднанню математичних та художньо-естетичних знань при посередництві комп'ютерного забезпечення; реальній можливості самовиразитися, створити щось нове, особистісно значуще; збагаченню навчального процесу позитивними емоціями; активізації навчально-пізнавальної діяльності. Створення малюнків з використанням динамічної математики є одним із підходів запровадження STEM-освіти. Подані нижче малюнки (рис. 3.45-3.48) доступні для виконання як учням 10-11 класів профільної школи, так і студентам 1-2 курсів фахових коледжів, які вивчають математику.

**Обладнання:** програмне забезпечення системи динамічної математики, креслярські інструменти, фарби, пензлі, папір. **Умови проведення.** Учасники можуть працювати як в міні-групах, так і індивідуально.

**Прогнозований результат:** малюнки, створені з використанням графіків функцій, комп'ютерна графіка.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Значно підвищує інтерес тих, хто навчається, до математики *дидактична гра*. Вплив її на проявляється в тому, що гра вносить деякий елемент невизначеності, що збуджує, активізує розум, налаштовує на пошук оптимальних рішень. Використовуючи у навчанні дидактичну гру, викладач може розвивати в учасників навчального процесу такі компоненти творчих якостей як фантазія, творча уява, образність мислення. Л.В. Тополя, М.Е. Марко виокремлюють наступні притаманні педагогічній грі риси: вільна розвиваюча діяльність, що починається за бажанням, заради задоволення від самого процесу діяльності, а не тільки від результату (процедурне задоволення); творчий, в певній мірі імпровізаційний, активний характер діяльності (поле творчості); емоційна піднесеність діяльності (емоційна напруга), що передбачає як суперництво, так і співпрацю в команді; змагання та ін.; наявність прямих чи непрямих правил, що відображає зміст гри, логічну і часову послідовність її розвитку. За характером педагогічного процесу виділяють такі групи гри: а) навчальні, тренувальні, контролюючі, узагальнюючі; б) пізнавальні, виховні, розвиваючі; в) репродуктивні, продуктивні, творчі та інші. Дидактична гра, що використовується як засіб розвитку пізнавальної активності

особистості, є грою за готовими правилами.

У формі конкурсу художників-математиків рекомендують провести заняття побудови графіків функцій і автори посібника<sup>1</sup>. Бажано об'єднати учасників у групи і кожній з них запропонувати системи рівнянь чи нерівностей, якими зашифровано малюнок. Переможе та команда, яка краще справиться з побудовою графіків, записаних на аркушах. Побудову можна здійснити як вручну, так і з використанням динамічної математики. Виконуючи завдання, учасники оперують також поняттями області визначення і області значень функції.

При розшифровці рис. 3.44 в учасників можуть виникнути проблеми при побудові залежностей з модулями, а саме – «руки»  $y = 2||x| - 2| - 2$  та «рукавів»  $y \leq -2(|x| - 2)^2 + 3,5$ .

Завдання з тренувального перейде в розряд розвиваючого, якщо запропонувати учасникам проекту описати рівняннями малюнок, виконаний в координатній площині. При вивченні теми «Побудови графіків функцій за допомогою елементарних перетворень» актуальним буде STEM-проект «Малюємо графіками функцій». Кінцевим продуктом в проекті стане колекція малюнків. Завдання для учасників будуть корисними у тому смислі, що закладають базу для усвідомлення практичного застосування матеріалу – опису графічних зображень за методом функціонального подання. Учням чи студентам доступно вивчати предмет в ігровій формі, тому й учителів / викладачів потрібно відповідно готувати. При цьому наявний елемент заохочення, ігровий ефект. «Художники» мають можливість проявити нестандартний підхід, творчість, розкрити прихований потенціал дослідника.

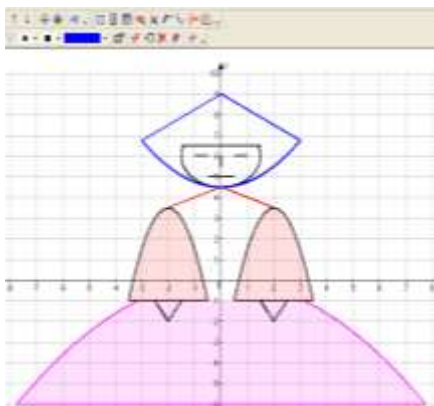


Рис.3.44. GMT, побудовані за рівняннями та нерівностями ([розробка Advanced Grapher](#)), [QR-код розробки малюнків GeoGebra](#) і [колекції](#).

<sup>1</sup> Скобелев Г. М., Берман В. П. Математика в позаурочний час. Київ. 1973. 160 с.

В окремих учасників можуть виникнути проблеми при створенні малюнка для описування, а не лише при добиранні функцій. Простіше побудувати графік функції за готовою формулою. Інша справа, коли потрібно проаналізувати – графіки яких функцій (чи частини графіків) нагадують ті чи інші криві, дібрати формулу, з'ясувати вплив коефіцієнтів, можливо, зробити корекцію малюнка тощо. Тобто, виконання малюнків створює передумови розвитку не лише творчої уяви і фантазії, але й уміння аналізувати, синтезувати, креативної якості – здібності до формування залежності.

За допомогою GRAN1 та GeoGebra можна не лише побудувати графіки функції, але й наблизити криві графіками многочленів від першого до сьомого степеня включно. Для цього створюють об'єкт *Таблиця*, зазначають степінь многочлена, будують графік. В GeoGebra з цією метою звертаються до вкладки *Регресійний аналіз*, обирають поліноміальну модель. Звернемо увагу на можливість добору коефіцієнтів, наприклад, квадратичної функції, через зміну параметрів у формулі  $y=ax^2+bx+c$ . Для цього створюють об'єкт  $y = P1 * x^2 + P2 * x + P3$ , де  $P1, P2, P3$  – коефіцієнти, які можна змінювати, якщо рухати бігунок параметра. Більша затрата часу при такому доборі функції компенсується тим, що дослідники глибше усвідомлюють зміст параметрів.

Завдання на створення малюнків ускладнюють виставленням вимоги: для описування кривих, що мають вертикальну вісь симетрії задіяти перетворення  $y=f(x/|x|)$ , з горизонтальною віссю – перетворення  $|y|=f(x)$ . При поглибленому вивченні математики можна запропонувати задіяти [функції, які містять цілу та дробову частину числа](#). Наприклад, рівняння «трави» задається формулою періодичної функції  $y=k\{x\}+b$ . За допомогою GRAN1 для цього створюють об'єкт явного типу задання  $y = P1 * (x - \text{int}(x)) + P2$  і  $y = k * (x - \text{floor}(x)) + b$ , якщо застосовують [систему динамічної математики GeoGebra](#). Дробова частина представлена як різниця між числом та його цілою частиною. Для розфарбовування частин малюнка будують ГМТ, задані відповідними нерівностями і перевіряють правильність виконання за допомогою ПЗ.

Малюнок «Котик» (рис. 3.45) описано поданими нижче рівняннями та нерівностями. Наразі повну побудову можемо виконати у класичній GeoGebra.

Об'єкти явного виду задання: 1)  $y=x*x/4, x \in [-6,5; 6,5]$ ;

2)  $y=10, x \in [-5;-3]$ ;

3)  $y=2, x \in [-1; 1]$ ;

4)  $y=9, x \in [-4;-2]$ ;

5)  $y=9, x \in [2; 4]$ ;

6)  $y=x*x+1, x \in [-1;1]$ ;

7)  $y=-0.25*x^2+abs(x)+3$ , 8)  $y=-0.35*x^2+abs(x)+3, x \in [-3; 3]$ ;

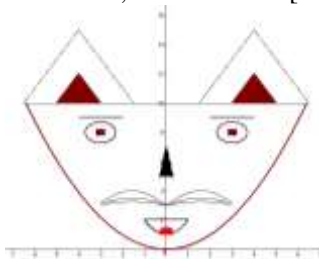
9)  $y= -0.5*x^2+abs(x)+3, x \in [-2,5; 2,5]$ .

Об'єкти неявного виду задання  $f(x,y)=0, f(x,y)<0, f(x,y)>0$ :

1)  $y+abs(abs(x)*2-8)-15=0, x \in [-10;10]; y \in [10;15]$ ;

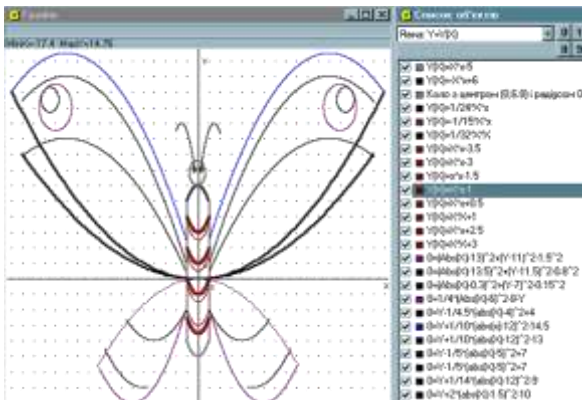
2)  $y+abs(abs(x)*2-8)-12<0, x \in [-10;10]; y \in [10;12]$ ;

- 3)  $y+7*abs(x)-7<0, x \in [-10;10]; y \in [5;7];$   
 4)  $(abs(x)-3)^2+(y-8)^2-0.5=0.$  5)  $(abs(x)-3)^2+(y-8)^2-0.05<0$   
 6)  $y+2*x^2-1.5<0, x \in [-10;10]; y \in [1; 2].$



**Рис. 3.45. Малюнок «Котик»** ([розробки Advanced Grapher](#) і [GeoGebra](#))

При побудові ГМТ, заданих рівняннями, враховують особливості. Наприклад, графік функції  $y = -abs(abs(x)*2-8)+15$  можна будувати двічі, оскільки за один раз умову області визначення функції  $1.5 < |x| < 6.5$  подати складно. Якщо ж для побудови ГМТ створити об'єкт неявного типу задання, то побудову можна здійснити за один раз, оскільки при створенні вказують як відрізки для  $x$ , так і для  $y$ . У побудовах використано лінійну, квадратичну функції, функції з модулями, задіяне також рівняння кола. Якщо малюнок виконувати за допомогою Advanced Grapher чи GeoGebra, то можна зберегти у файлі заштриховані ГМТ, задані нерівностями. У GeoGebra при побудові ГМТ, заданих нестрогою нерівністю, граничні лінії побудовані суцільною лінією, а у випадку строгої нерівності – пунктиром. Зменшити кількість об'єктів у переліку можна, якщо розглянути перетворення з модулем.



**Рис. 3.46. «Метелик»** ([розробка](#) і [колекція GRAN1](#); [розробка GeoGebra](#))

Користуючись ПЗ для побудови графіків, учасники навчального процесу можуть розглядати відомі їм функції, будувати графіки композицій. Важливо, щоб змодельовавши візерунки, вони проаналізували, як побудо-

вано графіки, як вигляд графіка залежить від параметрів, від несвідомого перейшли до свідомого, щоб отримати підґрунтя для нових творчих актів.

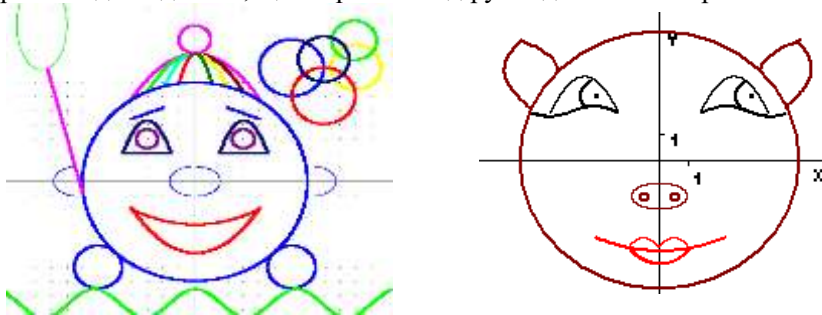


Рис. 3.47. Рисунки графіками ([розробка1](#), [розробка2 GRANI](#))

Використовуючи GeoGebra, можемо у вирази для функцій вводити параметри і зазначати для них анімацію. При цьому малюнок буде динамічним. Можна зберегти розробку як Gif-малюнок за одним з обраних параметрів. Потім його зручно додавати до презентацій, веб-сторінок.

На рис. 3.48 побудовано графіки квадратичних та лінійних функцій.

При вивченні квадратичної функції це завдання доступне для виконання вже у 9-му класі. Доцільно запропонувати учням творче завдання – описати криві на малюнку за допомогою функціональних залежностей.

Добірку «розшифрованих» функцій подаємо у форматі використання графічних калькуляторів:

- |                                       |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $Y(X)=X^2, x \in [-10;10];$        | 2) $Y(X)=X^2+20, x \in [-5;5];$     |
| 3) $Y(X)=45, x \in [-5;5];$           | 4) $Y(X)=100, x \in [-10;10];$      |
| 5) $Y(X)=-X^2/4+125, x \in [-12;12];$ | 6) $Y(X)=-X^2/4+120, x \in [-8;8];$ |
| 7) $Y(X)=-X^2/4+115, x \in [-6;6];$   | 8) $Y(X)=-X^2/4+110, x \in [-4;4];$ |
| 9) $Y(X)=80, x \in [-5;-3];$          | 10) $Y(X)=80, x \in [3;5].$         |

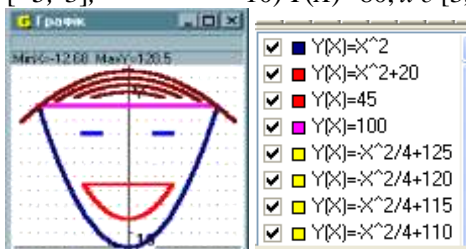


Рис. 3.48. Малюнок «Дівчина-красуня» виконано за допомогою GRANI

Починаючи вивчення у шостому класі *декартових координат*, доцільно запропонувати створити колекції STEM-малюнків «У світі тварин», «Квіти мого міста» та інші. Мета гри – розвивати фантазію учнів, естетичні якості. Пропонуємо завдання відтворити на площині ланцюжок, заданий парами чисел, за яким приховано зображення якоїсь фігури, тварини тощо (рис. 3.49). Доцільно і самостійно підготувати таку



вправу: побудувати малюнок, описати його координатами. Зазначені завдання можна виконувати як вручну, так і з використанням програмних засобів. Для цього необхідно створювати об'єкти типу *Ламана*. Щоб частину площини, обмеженої ламаною, можна було розфарбувати, необхідно побудувати за допомогою ПЗ замкнену ламану. За допомогою GeoGebra дану вправу зручно використовувати на мультимедійній дошці з використанням інструменту *Перо*.

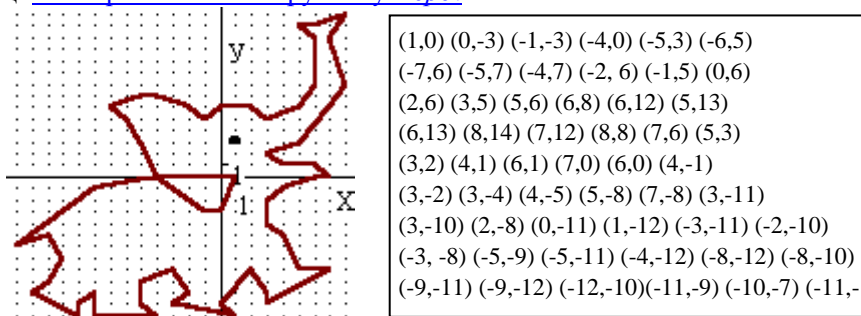


Рис. 3.49. «Веселе слоненя» (розробка GRAN1).

Вивчаючи з учнями тему «Круг та його частини», можна запропонувати їм створити колекцію малюнків, в яких приховані певні геометричні фігури (рис. 3.50). Для цього й сам учитель має дібрати в літературі потрібний матеріал, продумати, як подати завдання, щоб учні, створюючи малюнки, могли самовиразитися. Щоб зробити малюнок привабливим, за допомогою динамічної математики його можна розфарбувати. При цьому можна наближено обчислювати площі фігур чи довжини відрізків.

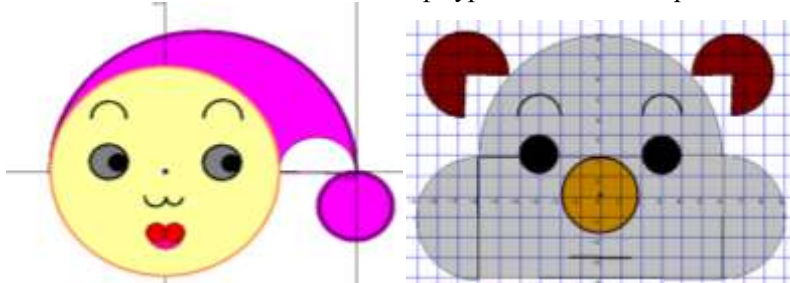


Рис. 3.50. Побудовано з використанням GRAN-2D («хлопчик», «Бровко»).

### Контрольні питання і завдання

1. Порівняти, як будують графіки функціональних залежностей з використанням програмного забезпечення «Алгебра, 7-9 клас», динамічної математики GeoGebra і GRAN1. Звернути увагу на можливість введення обмеження на незалежні та залежні змінні в усіх засобах.

2. Як можна розвивати STEM-компетентності особистості, якщо ви-

користувати у навчанні математики дидактичну гру?

3. Побудувати малюнок на папері вручну, описати криві функціональними залежностями. Для корекції складених формул, області визначення функції скористатися побудовою графіків з використанням програмного забезпечення GRAN1, GRAN-2D чи GeoGebra.

4. Розробити ланцюжок пар чисел, побудувавши які на площині, отримаємо зображення певної фігури, тварини тощо.

### 3.13. Параболи і параболоїди навколо нас

**Назви тем:** Алгебра, «Квадратична функція», 9 клас;

Алгебра і початки аналізу, «Визначені інтеграли»; Геометрія, «Тіла обертання», учні 10-11 класів профільної школи; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Вікова категорія:** 14-15; 16-17 років.

**Навчальні предмети:** алгебра, алгебра і початки аналізу, геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість), мистецтво, мова і література.

**Актуальність та мета:** створення колекцій світлин, що містять зображення параболи чи параболоїда; виготовлення макетів у формі параболоїдів, перевірка оптичних властивостей парабол та параболоїдів; виховання в учнів дизайнерських знань та умінь; естетичне виховання.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra чи інше, креслярські інструменти, матеріали та інструменти для виготовлення макетів, 3D-принтер, деталі для складання електричного кола, лампочка для ліхтарика.

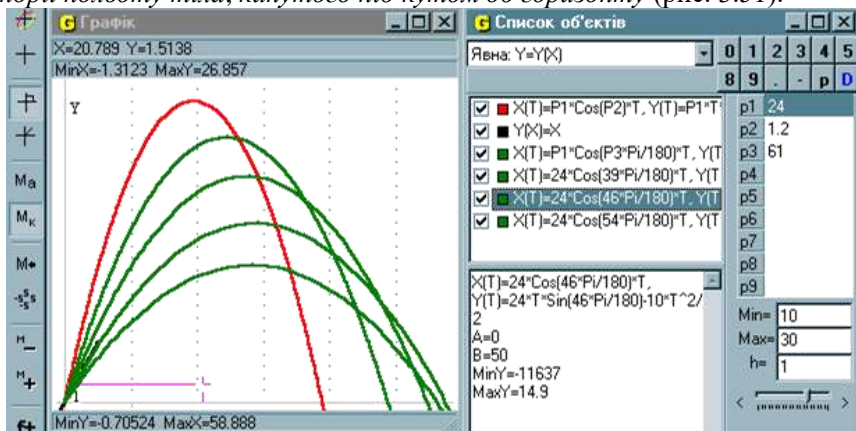
**Умови проведення:** учасники проекту працюють в групах чи індивідуально, виготовляють з матеріалів параболоїд.

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проекту може стати колекція світлин, що містять зображення параболи чи параболоїда; виготовлення макетів у формі параболоїдів, перевірка оптичних властивостей парабол та параболоїдів.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Основним завданням проекту є підвищення мотивації для вивчення основ наук, навчання працювати в групі над вирішенням спільного завдання, ефективно планувати свою роботу, використовувати сучасні технології. За допомогою програмних засобів учні / студенти краще засвоять *побудови графіків функцій через елементарні перетворення*, в тому числі, і перетворення з модулями.

З кривими, які мають форму параболи, можна зустрітися, вивчаючи рух предметів. Наприклад, траєкторія польоту каменю, кинутого під кутом до горизонту, футбольного м'яча або артилерійського снаряда за відсутності опору повітря є параболою. Струмені води у фонтані утворюють фігуру, схожу на параболу. У проекті «Вимірювання на місцевості» ми вже розглядали питання, як можна виміряти висоту струменів

фонтану. Вивчаючи квадратичну функцію, доцільно дослідити *траєкторії польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту* (рис. 3.51).



**Рис.3.51 Траєкторія польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту**  
**(скріншот розробки GRAN1, розробка GeoGebra)**

Задаємо параметрично функцію, за допомогою якої можемо визначити положення тіла над горизонтом у довільний момент часу:  $x=(V_0 \cos \alpha)t$ ,  $y=(V_0 \sin \alpha)t - gt^2/2$ , будуємо графік і досліджуємо, змінюючи кут  $\alpha$  чи початкову швидкість  $V_0$ . Спочатку виконаємо дослідження за допомогою програмного засобу. При цьому для радіанної міри кута необхідно створити об'єкти типу «параметрично» за формулами  $x(t)=P1 * \text{Cos}(P2) * T$ ,  $y(t)=P1 * T * \text{Sin}(P2) - 10 * T^2 / 2$ . Рухаючи бігунок параметра спочатку для  $P1$ , а потім для  $P2$ , досліджують залежність дальності польоту і висоти підйому від початкового кута і початкової швидкості. В ході дослідження необхідно встановити, що найбільша дальність польоту досягається, коли початковий кут рівний  $45^\circ$ .

У процесі дослідження з використанням GRAN1 встановлюють світловий курсор на функцію з параметром та використовують для створення траєкторій польоту послугу *Об'єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами*. Графіки, побудовані за допомогою програмного засобу, можна розрізняти за кольорами.

Обґрунтовують результати дослідження властивостями квадратичної функції, заданої формулою  $y=xtga - gx^2 / (2v^2 \cos^2 \alpha)$ .

Якщо параболу обертати навколо її осі, то отримаємо поверхню, яку називають параболоїдом обертання. Таку форму мають дзеркала прожекторів, автомобільних фар, телескопів та деяких інших приладів. Обчислити об'єм параболоїда, його масу, якщо він однорідний і відома його густина у математиці можна з використанням визначених інтегралів.

Розглянемо, які оптичні властивості параболоїдів можна дослідити, якщо долучити до проекту учителів/викладачів фізики. Промені світла

від джерела, розміщеного у фокусі параболи, відбиваючись від поверхні обертання, утворюють паралельний пучок світла. І навпаки, усі світлові промені, які йдуть паралельно осі обертання, після відбивання збираються в одній точці – фокусі. Ця властивість лежить в основі принципу роботи параболічних антен.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати учасники проекту, досліджуючи використання параболоїдів в техніці, їх оптичних властивостей?

2. Які ще напрями досліджень можна запропонувати учням 10-11 класів профільної школи і студентам 1-2 курсів фахових коледжів за проектом «Парабола»?

3. Як можна застосувати 3D-принтер під час роботи у проекті?

4. Як використовують еліпсоїди, гіперболоїди у науці та техніці?

5. За допомогою яких програмних засобів зручно побудувати параболоїд та продемонструвати динамічну зміну його параметрів?

### **3.14. Визначені інтеграли (математика + фізика і механіка)**

**Назва теми:** «Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач механіки, фізики»

**Вікова категорія:** 16-18 років, учні 11 класу; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** алгебра і початки аналізу, фізика, інформатика, хімія.

**Актуальність та мета:** Ввести формули для обчислення деяких фізичних величин за допомогою визначених інтегралів, розглянути приклади застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач фізики, техніки, механіки.

**Засоби навчання та обладнання:** підручник, фізичні прилади, програмний засіб «Алгебра, 11 клас»<sup>1</sup>.

**Тип інтегрованого заняття.** Засвоєння нових знань.

**Ключові слова:** визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца, шлях, робота, маса, кількість теплоти, заряд.

Пропонуємо розробку інтегрованого заняття за поданим планом.

#### **План заняття.**

I. Перевірка домашнього завдання та актуалізація опорних знань здобувачів освіти (повторення формули Ньютона-Лейбніца, властивостей визначених інтегралів, формул з курсу фізики для обчислення шляху, роботи, заряду, кількості теплоти, маси).

---

<sup>1</sup> Геометрія, 11 клас : мультимедійний підручник. URL : <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/geometriya-11-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).

II. Повідомлення теми, визначення мети, завдань уроку. Мотивація навчальної діяльності. Важливою передумовою ефективності вивчення і засвоєння нових навчальних математичних понять є використання мотиваційного фактору. Усвідомлення можливості застосовувати отримані знання на практиці, при вивченні фізики, економіки обумовить цілеспрямовану діяльність здобувачів освіти.

III. Сприйняття та усвідомлення нового навчального матеріалу. Користуючись таблицею бібліотеки наочностей, з'ясувати, як обчислюється за допомогою визначених інтегралів переміщення, робота, кількість теплоти, маса стержня, заряд для змінних величин швидкості, продуктивності, теплоємності, густини, струму. Усвідомлення отриманих знань, пробні вправи з перевіркою за електронною наочністю.

IV. Застосування набутих навичок та вмій у процесі виконання вправ.

V. Підсумки заняття і повідомлення домашнього завдання.

Щоб повноцінно використовувати засіб у навчанні, вчителю/викладачу необхідно вміти завантажувати розроблений урок і при потребі його редагувати (видаляти окремі елементи уроку, додавати нові з бібліотеки наочностей, створювати текстові повідомлення, імпортувати наочності).

На прикладі розробки за обраною темою з'ясуємо, як вчитель математики чи викладач може удосконалювати розроблені раніше уроки, доповнювати їх новими наочностями. Переглянемо урок № 29 (7) «Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач механіки, фізики» з бібліотеки уроків програмного засобу «Алгебра, 11 клас». Для цього перейдемо до режиму *Уроки*, у переліку знайдемо розробку з вказаним номером, відкриємо її у робочій області. Щоб переглянути урок і мати змогу його редагувати, завантажимо добірку елементів з робочої області до поточного вікна.

До зазначеного уроку пропонується включити сім елементів.

*Елемент 1*, в якому записана тема уроку, мета, тип уроку.

*Елемент 2* – таблиці з формулами (табл. 3.10; 3.11) для обчислення величини шляху при змінній швидкості руху тіла; маси тонкого стержня з неоднорідною лінійною густиною; роботи змінної сили; заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за певний проміжок часу; кількості теплоти, що виділяється чи поглинається тілом, за умови, що питома теплоємність залежить від температури.

Для різних типів завдань пропонується по одному прикладу (п'ять елементів). Наведемо перелік цих завдань.

*Елемент 3*. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю  $v(t) = 3 + 3t^2$  (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за перші 5 с.

## Застосування визначених інтегралів до обчислення фізичних величин

№	Фізична величина	Формула для обчислення
1.	$S$ – пройдений тілом шлях, $v(t)$ – швидкість, $t \in [t_1, t_2]$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2.	$m$ – маса тонкого стержня, $\rho(x)$ – лінійна густина, $x \in [x_1, x_2]$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
3.	$q$ – величина заряду, $I(t)$ – сила струму, $t \in [t_1, t_2]$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
4.	$A$ – робота, $N(t)$ – потужність; $F(x)$ – змінна сила, $x \in [x_1, x_2]$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx; A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
5.	$Q$ – кількість теплоти, $C(t)$ – теплоємність, $t \in [t_1, t_2]$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} C(t) dt$

У розробці завдань для проєкту опирайтеся на міжпредметні зв'язки зазначених навчальних дисциплін, проілюстровані у табл. 3.9.

*Елемент 4.* Лінійна густина неоднорідного стержня завдовжки 6 см змінюється за законом  $\rho(x) = 3x + 4$  (г/см). Знайти масу стержня.

*Елемент 5.* Протягом 7 с величина струму в провіднику змінювалась за законом  $I(t) = 3t^2 + 2t$  (А). Знайти величину заряду, що пройшов через провідник за цей час.

*Елемент 6.* Сила у 2 Н розтягує пружину на 4 см. Яку роботу слід виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см?

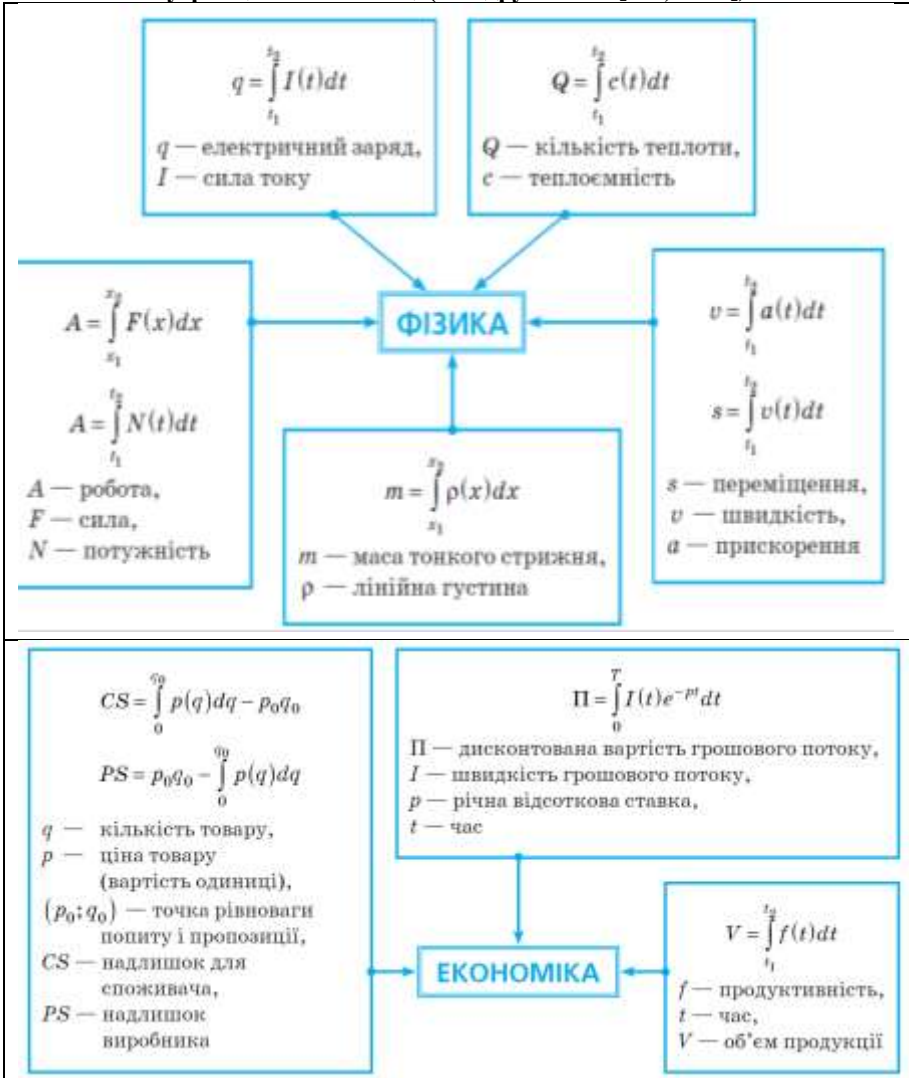
*Елемент 7.* Сила  $f$ , з якою електричний заряд  $e_1$  відштовхує заряд  $e_2$  (того самого знаку), що знаходиться від нього на відстані  $r$ , виражається

формулою  $f = k \frac{e_1 e_2}{r^2}$ , де  $k$  – стала. Визначити роботу сили  $f$  при пере-

міщенні заряду  $e_2$  з точки  $A_1$ , яка знаходиться від  $e_1$  на відстані  $r_1$ , в точку  $A_2$ , яка знаходиться від  $e_1$  на відстані  $r_2$ , покладаючи, що заряд  $e_1$  вміщено у точку  $A_0$ , прийняту за початок відліку.

До кожної задачі (*елемент* бібліотеки наочностей) створено по два *кадри*. У першому кадрі подано умову завдання, у другому – його розв'язання. Завдяки такому поданню відомостей створюються сприятливі умови для розвитку у здобувачів освіти пізнавальної самостійності, запровадження інтерактивних технологій навчання математики.

Застосування визначених інтегралів до обчислення величин у фізиці та в економіці (за підручником [134, с.116])



Для уроків у класах з поглибленим вивченням математики та фахових коледжах доцільно додати ще кілька завдань. Наприклад, на обчислення роботи при піднятті вантажів.

З'ясуємо, як можна редагувати вже розроблений урок. Щоб додати

для актуалізації опорних знань та умінь учнів елемент «Формула Ньютона-Лейбніца», перейдемо з відкритим поточним уроком до режиму *Конструктор*. Виберемо розділ 4, тему 1 «Первісна та інтеграл», урок 3-4 «Формула Ньютона-Лейбніца» та завантажимо його у робочу область. Серед запропонованих елементів знайдемо «Формула Ньютона-Лейбніца» і завантажимо елемент у вікно поточного уроку. На панелі поточного уроку доданий елемент розташований останнім, тому перемістимо його вліво на друге місце, використовуючи при цьому навігаційні клавіші панелі поточного уроку (при виділеному елементі натиснути стрілку вліво).

Як зазначалося вище, важливою передумовою ефективності вивчення і засвоєння нового навчального матеріалу є використання мотиваційного фактору, демонстрування міжпредметних зв'язків *геометрія – математичний аналіз – фізика*. Доцільно включити до елементів уроку завдання, яке вже розв'язувалося на попередньому занятті. А саме, за допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіками функцій  $y=0,5 \cdot x^2$  і  $y=4-x$  (рис. 3.52). Це завдання потрібно переформулювати відповідно до теми уроку: знайти масу однорідної пластини чи знайти центр мас однорідної пластини.

Щоб додати зазначений елемент уроку, виберемо розділ 4, тему 1 «Первісна та інтеграл», урок 5-6 «Застосування визначених інтегралів до обчислення площ та об'ємів геометричних фігур» та завантажимо його у робочу область. Серед запропонованих базових елементів знайдемо «Задача 3» і завантажимо елемент у вікно поточного уроку. На панелі поточного уроку доданий елемент розмістимо третім.

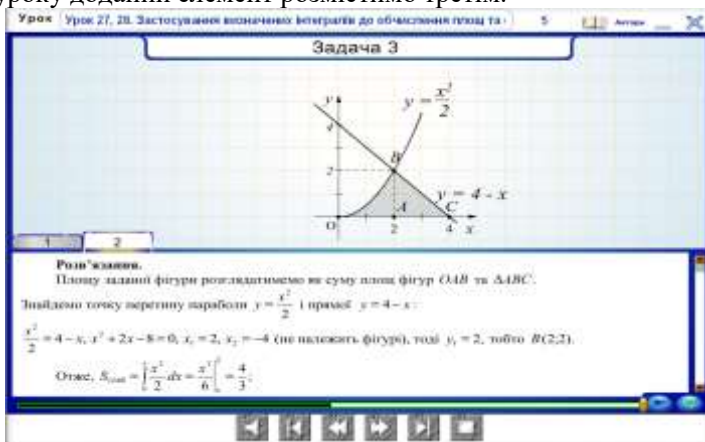


Рис. 3.52. Кадр з розв'язанням задачі на обчислення площі фігури

Для створення нового уроку необхідно на панелі роботи з поточним уроком у полі «Урок» ввести його назву і натиснути кнопку *Зпам'ятати*.

Додаймо нові завдання на обчислення виконаної роботи – на викачування води з бочки, на побудову піраміди Хеопса. Якщо учні/студенти



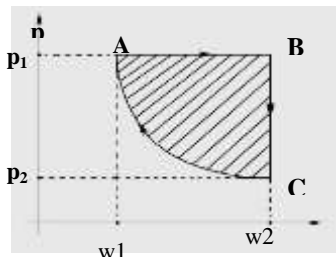
вже вивчали властивості логарифмічної функції, доцільно запропонувати завдання на визначення роботи, яку виконає ідеальний газ. Пропоновані завдання можуть бути розв'язані на наступному уроці, але зберігати їх в бібліотеці краще разом. Тому нумерацію елементів уроку продовжуватимемо з врахуванням двох доданих базових елементів.

**Елемент 10.** Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з циліндричної бочки висотою 4 м, з радіусом основи 2 м.

**Елемент 11.** Піраміда Хеопса є правильною чотирикутною пірамідою висотою 147 м, в основі якої лежить квадрат зі стороною 232 м. Знайти роботу проти сили тяжіння, затрачену при будівництві піраміди.

**Елемент 12.** Експериментально встановлено, що залежність витрати бензину автомобілем від швидкості на 100 км шляху визначається формулою  $Q=18-0,3v+0,0003v^2$ ,  $30 < v < 110$ . Визначити середню витрату бензину, якщо швидкість руху 50-60 км/год.

**Елемент 13.** Ідеальний газ в об'ємі  $w_1=1\text{м}^3$  при тиску  $p_1=3\cdot 10^5$  Па здійснює коловий цикл за 3 етапи (рис. 3.53). Газ при сталому тиску нагрівають до температури, при якій його об'єм збільшується в три рази. Після цього він при сталому об'ємі охолоджується до температури, при якій його тиск дорівнює  $p_2=10^5$  Па. З цього стану газ повертається у початковий стан при сталій температурі. Обчислити виконану газом роботу.



**Рис. 3.53** Зображення колового процесу

Базові елементи уроку № 7(29) розміщені у розділі 4 «Інтеграл та його застосування», темі 1 «Первісна та інтеграл». Тому перед тим, як доповнювати бібліотеку новими наочностями, необхідно урок 7-8 з вказаного розділу і теми у режимі *Конструктор* завантажити у робочу область. Тоді всі текстові повідомлення, імпортовані файли зображень, звукові файли будуть зберігатися у папці `C:\Program Files\UkrPriborService\Algebra_11\assemble_Algebra_11\data\rozdil_4\Tema_1\Lesson_7_8`.

Для створення текстового повідомлення «натиснемо» на піктограму **T** панелі роботи з файлом. У відкритому вікні для створення текстового повідомлення запишемо назву нової задачі «Задача про викачування води з бочки», введемо її умову і назву файлу, під якою задача буде зберігатися у бібліотеці наочностей  $z_9$  (рис. 3.54 б). Аналогічно створюємо і зберігаємо текстові повідомлення до інших трьох задач.

Крім текстового повідомлення з умовою завдання, бажано подати і деякі нотатки з розв'язаннями задач чи підказками для обчислення. А саме, створити ще одне текстове повідомлення для кожної задачі чи імпортувати розв'язання як зображення (файл з розширенням jpg), якщо запис містить значну кількість формул. Для задачі про викачування води

з бочки можна подати нотатки, якими учень/студент може скористатися при самостійному опрацюванні завдання. Для розв'язування задачі розіб'ємо циліндр паралельними основі площинами на тонкі шари. Виділивши один з них на глибині  $y$  і позначивши його товщину та об'єм відповідно через  $\Delta y$  та  $\Delta V$ , отримаємо  $\Delta V = \pi R^2 \Delta y$  ( $\text{м}^3$ ). Маса води  $\Delta Q$  в знайденому об'ємі рівна  $\Delta Q = 1000\pi R^2 \Delta y$  ( $\tau$ ), оскільки  $1\text{ м}^3$  води важить 1 т. Щоб викачати воду, яка знаходиться в розглянутому шарі, його необхідно підняти до краю бака, тобто на висоту  $y$ . Робота  $\Delta P$ , яка здійснюється при цьому виразиться так:

$$\Delta P = \Delta Q g y = 1000\pi g R^2 y \Delta y (*).$$



Рис. 3.54 Елементи з імпортованими наочностями для уроку

При послідовному підніманні до краю бака кожного шару, починаючи з першого та закінчуючи останнім, виконується в кожному випадку робота, яка визначається рівністю (\*); при цьому  $y$  змінюється від 0 до  $H$ . Запис для виконаної роботи матиме вигляд  $\sum 1000\pi g R^2 y \Delta y$ . Але отримана величина роботи тільки наближена. Щоб знайти шукану роботу, будемо необмежено збільшувати число поділок циліндра площинами. Тоді вся робота обчислюватиметься за допомогою визначеного інтеграла  $\int_0^H 1000 \pi g R^2 y dy$ , де  $g$  – прискорення сили тяжіння.

Малюнок до завдання можна виконати за допомогою графічного редактора Paint, зберегти з розширенням  $\text{jpg}$  та імпортувати у бібліотеку наочностей. Імпортують файли таких типів: зображення ( $\text{.swf}$ ,  $\text{.jpg}$ ), таблиць ( $\text{.tab}$ ), текстів ( $\text{.txt}$ ), звуків ( $\text{.mp3}$ ), уроків ( $\text{.les}$ ).

Для задачі про піраміду доцільно імпортувати фото з єгипетськими пірамідами, підказку для перевірки, чи правильно записано інтеграл для обчислення роботи по зведенню піраміди Хеопса (рис.3.54 в, г). Складаємо

вираз, враховуючи, що  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $H$  – висота піраміди,  $x$  – висота від основи до виділеного шару піраміди,  $\rho$  – густина каменю.

$$A = A(H) = \int_0^H dA = g\rho \frac{a^2}{H^2} \int_0^H x \cdot (H - x)^2 dx.$$

Щоб додати імпортований елемент до уроку, необхідно перейти до потрібного розділу бібліотеки наочностей і обрати елемент. Елемент автоматично додається в обраний кадр поточного уроку.

Для завдання про обчислення роботи ідеального газу імпортуємо малюнок, який демонструє коловий процес і створюємо текстове повідомлення з підказкою – рівнянням Менделєєва – Клапейрона  $pV = RT/\mu$ . Робота при здійсненому коловому процесі чисельно дорівнює площі криволінійного трикутника ABC (рис. 3.54 а, д).

### **Контрольні питання і завдання**

1. Дослідити, які можливості для організації самостійної роботи здобувачів освіти надає використання у навчанні конструктора уроку *Алгебра, 10-11 клас*?

2. Розробити урок за обраною темою програми вивчення математики в 10-му чи в 11-му класі чи на 1-2 курсах фахових коледжів з використанням конструктора уроку *Алгебра, 10-11 клас*. Дібрати відповідні завдання бібліотеки наочностей засобу, створити власні кроки – текстові повідомлення, імпортувати графічні наочності. Дібрати завдання для актуалізації опорних знань та умінь, для контролю і корекції знань.

### **3.15. Визначені інтеграли (математика + економіка).**

**Назва теми:** Застосування визначених інтегралів до розв’язування задач математики, економіки, механіки і фізики.

**Вікова категорія:** 16-18 років, учні 11 класу; студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** алгебра і початки аналізу, геометрія, фізика, інформатика, хімія, основи економіки.

**Актуальність та мета:** Узагальнення та систематизація знань здобувачів освіти, представлення результатів проєктної діяльності; обчислення деяких фізичних величин за допомогою визначених інтегралів, розглянути приклади застосування визначеного інтеграла до розв’язування задач фізики, техніки, механіки, економіки, геометрії. Зміст творчо-пошукових завдань для підсумкового заняття подано в табл. 3.12.

**Засоби навчання та обладнання:** підручник, фізичні прилади, програмний засіб системи динамічної математики.

**Тип заняття.** Узагальнення та систематизації знань.

**Ключові слова:** визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца, шлях, робота, маса, кількість теплоти, заряд.

Таблиця 3.12

## Зміст творчо-пошукових завдань для учнівської конференції

№	Зміст завдань, виконавці (подано назви груп)	
1	Історичні	Історична довідка. Підготувати повідомлення про видатних математиків, чий імена пов'язані з розвитком теорії інтегрального числення
2	Математичні Інформатики	Методи інтегрування (безпосереднього інтегрування, заміни змінної, інтегрування частинами). Геометричний зміст визначеного інтеграла. Підготувати теоретичні відомості, <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ добірки завдань на обчислення визначених інтегралів;</li> <li>▪ завдання для розв'язування за допомогою програми.</li> </ul>
3	Математики	Задачі геометрії. Підготувати <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ теоретичні відомості (обчислення площі фігури, об'єму тіла, об'єму тіла обертання);</li> <li>▪ добірки задач на обчислення площі фігури, об'єму тіла, об'єму тіла обертання).</li> </ul>
4	Інформатики	Підготувати завдання на обчислення за допомогою ПЗ: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ площі фігури;</li> <li>▪ обчислення площі поверхні і об'єму тіла обертання, вписати у певну криву ламану, оцінити точність обчислення площі фігури, об'єму тіла обертання.</li> <li>▪ Створити презентацію «Об'єми тіл обертання» за допомогою Microsoft PowerPoint, що містить теоретичні відомості</li> </ul>
5	Економісти	Економічний зміст визначеного інтеграла. Підготувати теоретичні відомості <ul style="list-style-type: none"> <li>• про визначення коефіцієнта Джині,</li> <li>• застосування функції Коба-Дугласа,</li> <li>▪ визначення середнього часу на випуск одиниці продукції</li> </ul> Дібрати відповідні задачі економіки.
6	Фізика Історика	Задачі фізики. Систематизувати типи задач, підготувати формули. Підготувати завдання на обчислення <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ задача на обчислення роботи газу,</li> <li>▪ роботи для побудови піраміди Хеопса</li> </ul> Підготувати і продемонструвати досліди Підготувати історичну довідку про єгипетські піраміди
7		Підготовка матеріалів для випуску «Інформаційного дайджесту»

### Опис алгоритму дій, ходу впровадження.

Вивчаючи теми на застосування похідної і визначеного інтеграла, доцільно впроваджувати проєкти, в яких розглядати задачі практичного змісту, задачі геометрії, фізики, економіки.

У табл. 3.12. подано зміст творчо-пошукових завдань до теми «Застосування визначених інтегралів», які можуть виконувати здобувачі освіти, готуючись до занять систематизації і узагальнення у формі конференції. Доцільно наближено обчислити визначені інтеграли за допомогою *GRANI* чи *GeoGebra*. Наведемо приклади завдань на обчислення визначених інтегралів.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$a) y = 3x - x^2 - 1.5, \quad y = 0.5 \cdot |2x - 3|; \quad б) y = 7 - |x|, \quad y = 0.25 \cdot |4 - x^2|.$$

Щоб обчислити площу фігури за допомогою програмного засобу (рис. 3.55), потрібно побудувати графіки функцій, наближено визначити межі інтегрування, розташувавши курсор в точках перетину графіків, а потім скористатися послугою *Операції \ Інтеграл (GRANI)*.

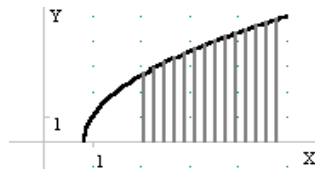


Рис. 3.55. Криволінійна трапеція

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо прямої  $y=0$  криволінійної трапеції, обмеженої кривими  $Y=1+0.5\sin 2x$ ,  $x=0$ ;  $x=\pi/2$ ;  $y=1$ . Для обчислення за допомогою програмного засобу *GRANI* використовують послугу *Інтеграл \ Об'єм тіла обертання \ Вісь Ox*. При цьому зображується тіло обертання.



3. Щоб отримати конус заданого об'єму чи заданої поверхні обертання, слід через параметри подати межі інтегрування і, рухаючи бігунок параметра, дібрати необхідне значення параметра.

4. Щоб обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $Ox$  криволінійної трапеції, обмеженої кривими  $y=|x^2+x-6|$ ,  $y=0$ ,  $x=-4$ ,  $x=3$ , будують графік функції ( $y=Abs(X^2+X-6)$ ), обрають послугу *Операції \ Інтеграл \ Площа поверхні та об'єм тіла обертання навколо осі  $Ox$* , зазначають межі інтегрування  $-4$  та  $3$ . Щоб тіло обертання було видно на екрані, добирають масштаб для зображення криволінійної трапеції (рис. 3.56 а)). У вікні *Відповідь* отримуємо:  $V=396.57$ ,  $S=520.14$ .

На рис.3.56 б) подано QR-код відео з обчисленням об'єму тіла обертання та його експериментальною перевіркою. На слайді представлено розв'язання через подвійний інтеграл. Однак задачу можна звести і до обчислення інтеграла від однієї змінної:

$$V = \pi \cdot \int_7^{13} (0,92 \cdot \sqrt{z-7})^2 dz$$

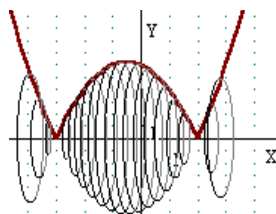


Рис. 3.56 а)



Рис. 3.56 б). Обчислення об'єму тіла і експериментальна перевірка.

5. Ширина річки 20 м, заміри глибини у поперечному перерізі через кожні 2 м наведено в таблиці, де  $x$  – відстань від берега, а  $y$  – глибина у метрах. Визначити наближено площу поперечного перерізу.

$x$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y$	0,5	0,8	1,9	2,3	2,9	3,9	3,7	3,1	3,5	2,8	1,5

Щоб побудувати ескіз поперечного перерізу русла, слід обрати тип даних *Ламана* і занести в таблицю координати точок. Щоб можна було скористатися послугою *Операції з ламаними \ Площа многокутника*, необхідно додати ще дві точки  $(0,0)$ ,  $(20,0)$  і замкнути ламану. У вікні *Відповідь* отримасмо результат обчислення 51,8 кв. од.

«Економісти» презентують підготовлені задачі, зокрема задачі про загальні, середні, граничні витрати; функції попиту та пропозиції товару; нарощування капіталу.

6. Виробництво продукції характеризується граничними витратами у вигляді функції від обсягу виробництва (кількість одиниць продукції). Фірма хоче визначити функціональне співвідношення між кількістю випущеної продукції та загальними виробничими витратами.

Відомі при цьому постійні виробничі витрати, що складають 5000 грош. од. Граничні витрати  $MC$  (у грош. од.) представлені функцією

$$MC = 0,003Q^2 - 0,2Q.$$

Ця функція повинна бути інтегрована для утворення функції загальних витрат  $TC$ .

7. Функції попиту та пропозиції товару описуються рівняннями  $Q_D = 30 - P$ ,  $Q_S = -15 + 2P$ . Визначте вигоду споживача та виробника.

Розв'язуючи задачу, спочатку визначимо рівноважну ціну  $P^*$  та об-

сяг продажу  $Q^*$ :  $30 - P = -15 + 2P$ ,  $P^* = 15$ ,  $Q^* = 15$ .

Визначимо вигоду споживача:

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{Q^*} f(Q) dQ - P^* Q^* = \int_0^{15} (30 - Q) dQ - 15 \cdot 15 = \\ &= \left( 30Q - \frac{Q^2}{2} \right) \Big|_0^{15} - 225 = 30 \cdot 15 - \frac{15^2}{2} - 225 = 112,5 \end{aligned}$$

Визначимо вигоду виробника:

$$DS = P^* Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q) dQ = 15 \cdot 15 - \int_0^{15} (0,5Q + 7,5) dQ = 225 - \left( \frac{Q^2}{4} + 7,5Q \right) \Big|_0^{15} = 225 - \left( \frac{15^2}{4} + 7,5 \cdot 15 \right) = 56,25$$

8. Розглянемо ще один приклад застосування інтеграла для визначення функціональної залежності нарощування капітального майна. Залежності подібного типу застосовуються при аналізі національної та регіональної економіки. Якщо формування капіталу (нові заводи, устаткування, машини тощо) розглядати як неперервний процес залежний від часу, то зміна капітального майна визначається у вигляді функції від часу. Знаючи процес формування капітального фонду (наприклад, нові капіталовкладення) у часі, тобто як функцію від часу, можемо визначити значення загального капітального фонду у вигляді невизначеного інтеграла. При цьому, застосовуючи невизначений інтеграл до функції створення капітального майна, знаходимо величину загального фонду капіталу з точністю до константи інтегрування  $C$ . Остання визначається з початкових умов (величини загального капітального фонду в деякий фіксований момент часу, наприклад, при  $t=0$ ).

9. Визначений інтеграл економісти застосовують для визначення за продуктивністю праці обсягу випущеної продукції. Розглянемо приклад.

Якщо  $f(t)$  – продуктивність праці в момент  $t$ , то  $Q = \int_0^T f(t) dt$  – обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу  $[0; T]$ . Знайти функцію, яка показує обсяг продукції (у вартісному виразі) та його величину за робочий день.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Дослідити, як використовуючи засоби динамічної математики, можна розвивати в здобувачів освіти здібності до висування гіпотез, уміння узагальнювати, розвивати STEM-компетентності?

2. Які наочності називають динамічними опорними конспектами?

3. Оцінити, у чому може проявлятися у процесі навчання математики позитивність властивості інтегрованості наочностей?

4. Для яких типів занять найкраще використовувати інтегровані наочності?

### 3.16. Побудова графіків тригонометричних функцій

#### Бінарне заняття /інтегрований урок.

**Призначення:** для учнів 10-11 класів ліцеїв; студентів 1-2 курсів фахових коледжів.

**Мета: освітня:** сформувати навички здобувачів освіти застосовувати способи перетворення графіків до побудови графіків тригонометричних функцій; узагальнити, систематизувати і розширити знання і вміння з побудови графіків тригонометричних функцій; формувати навички використання комп'ютерних технологій на заняттях з математики;

– *виховна:* виховувати культуру введення записів на дошці і у зошитах, культуру математичного мовлення;

– *розвиваюча:* розвивати аналітичні здібності (вміння аналізувати, порівнювати, виділяти головне); розвивати навички креслення і самоконтролю.

**Обладнання:** лінійка, мультимедійна дошка, проєктор.

**Програмні засоби:** система динамічної математики GeoGebra, Microsoft PowerPoint

#### Література:

! Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 512 с. : іл.

#### Хід роботи

**I. Організаційна частина.** Повідомлення теми, мети та завдання.

#### II. Актуалізація опорних знань.

1. Сформулюйте правило побудови графіка функції  $y = kf(x)$ .

$$y = kf(x) \rightarrow y = f(x)$$

Якщо  $k > 1$ , то розтяг від осі  $Ox$  в  $k$  разів.

Якщо  $0 < k < 1$ , то стиск до осі  $Ox$  в  $\frac{1}{k}$  разів.

2. Сформулюйте правило побудови графіка функції  $y = f(kx)$ .

$$y = f(kx) \rightarrow y = f(x)$$

Якщо  $k > 1$ , то стиск до осі  $Oy$  в  $k$  разів.

Якщо  $0 < k < 1$ , то розтяг від осі  $Oy$  в  $\frac{1}{k}$  разів.

3. Приклади 1-2 в GeoGebra. Викладач перетягує повзунок, студенти називають функцію, графік якої зображено. Наприклад,  $y = 2\cos x$ ,  $y = \frac{1}{2}\cos x$ ,  $y = -\cos x$ ,  $y = \sin 2x$ ,  $y = \sin \frac{1}{2}x$ ,  $y = \sin(-x)$ .



4. Побудова графіка функції  $y = tgx$  за точками.

5. Правило побудови графіків функцій з модулем.  $y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|$ . Щоб побудувати графік модуля функції, треба зберегти частину графіка  $y = f(x)$ , розташовану вище осі  $Ox$ , а частину графіка, розташовану нижче, відобразити симетрично відносно осі  $Ox$ .  $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|)$  частину графіка функції  $y = f(x)$ , яка лежить лівіше осі  $Oy$ , відкидаємо, а частину графіка, розташовану правіше осі ординат, зберігаємо, і її ж відображаємо симетрично щодо осі  $Oy$ .

6. Приклади 3-4 в GeoGebra. Студенти називають функцію графік якої зображено.  $y = tgx$ ,  $y = |tgx|$ ,  $y = ctgx$ ,  $y = ctg|x|$ .

7. Яку функцію називають парною (непарною)? Функція  $y = f(x)$  називається парною (непарною), якщо для довільного  $x$  з області визначення функції виконується рівність  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ).

8. Назвіть властивість графіка парної і непарної функції. Парна функція – графік симетричний відносно осі ординат; не парна – графік симетричний відносно початку координат.

### III. Застосування знань, умінь та навичок.

#### 1. Визначте парність функції.

1.  $f(x) = \sin 3x$ ; Непарна
2.  $f(x) = ctg 7x$ ; Непарна
3.  $f(x) = x \operatorname{tg} 2x$ ; Парна
4.  $f(x) = x^3 - \sin 2x$ ; Непарна
5.  $f(x) = 2 + x \cos x$ ; Ні парна, ні непарна
6.  $f(x) = |\operatorname{tg} 10x|$ ; Парна
  
7.  $f(x) = \cos 4x$ ; Парна
8.  $f(x) = \operatorname{tg} 8x$ ; Непарна
9.  $f(x) = x \sin 5x$ ; Парна
10.  $f(x) = ctg 6x - x^5$ ; Непарна
11.  $f(x) = 3 - x \operatorname{ctg} 2x$ ; Парна
12.  $f(x) = |\sin 9x|$ ; Парна

#### 2. Побудуйте графіки функцій.

Побудови здійснюються одночасно як вручну, так і з використанням системи динамічної математики GeoGebra.

178. a)  $y = 1 + \sin 2x$ ;

б)  $y = \cos 2x - 1$ .

179. a)  $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;

б)  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

180. a)  $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ ;

б)  $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ .

181. a)  $y = \sin |x|$ ;

б)  $y = \operatorname{tg} |x|$ .

207. a)  $y = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$ ;

б)  $y = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$ .

208. a)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ;

б)  $y = \operatorname{tg}(-2x) \operatorname{ctg} 2x$ .

209. a)  $y = \frac{|x|}{x} \cdot \operatorname{tg} x$ ;

б)  $y = \frac{|x|}{x} \cdot \operatorname{ctg} x$ .

210. a)  $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ ;

б)  $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$ .

211. a)  $y = \cos x + |\cos x|$ ;

б)  $y = \sin x - |\sin x|$ .

212. a)  $y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + |x|\right)}{\cos x}$ ;

б)  $y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + |x|\right)}{\sin x}$ .

213. a)  $y = 5x \sqrt{x} \cdot \sqrt{-\sin^2 x}$ ;

б)  $y = 3x^3 \sqrt{-\cos^2 x}$ .

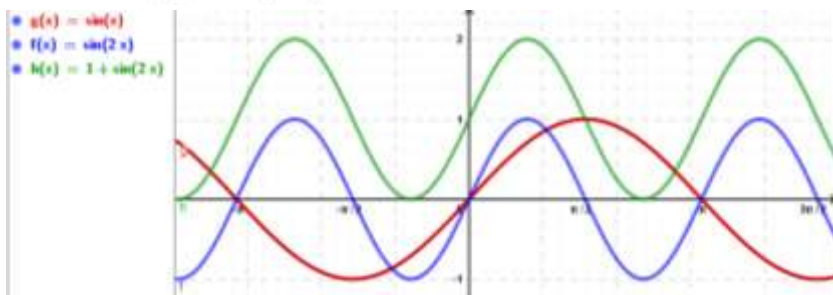


Рис. 3.57. Покрокова побудова графіків до завдання №178 а).

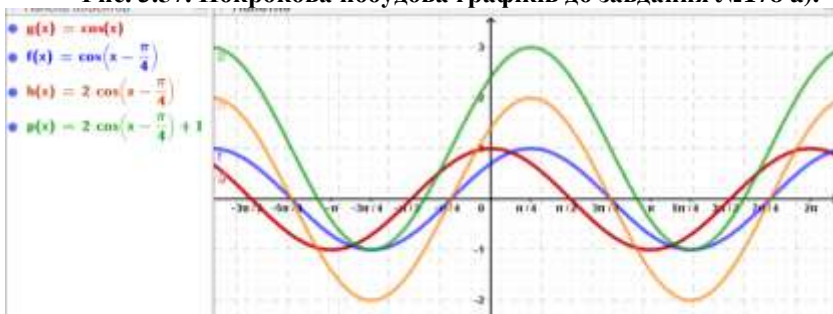


Рис. 3.58. Покрокова побудова графіків до завдання №180 а).

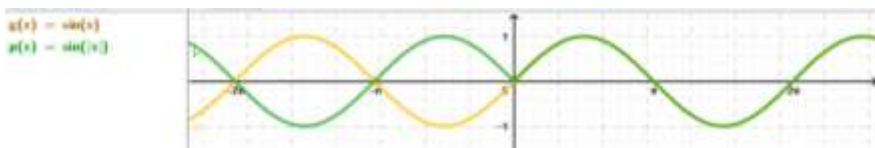


Рис. 3.59. Покрокова побудова графіків до завдання №181 а).

$$207. \text{ а) } y = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$$

$$y = \sqrt{\cos^2 2x} \quad y = |\cos 2x|$$

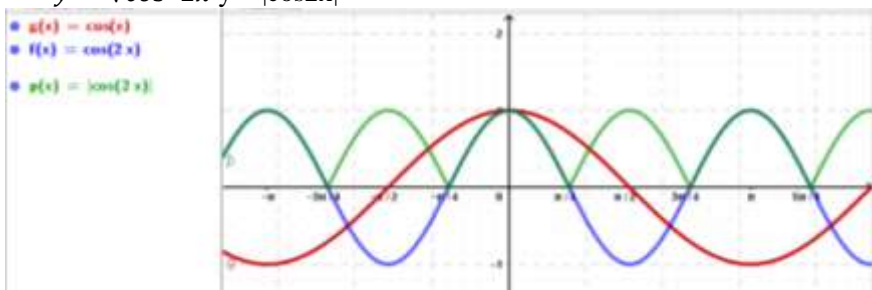


Рис. 3.60. Покрокова побудова графіків до завдання №207 а).

$$208. \text{ а) } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$$

$$D(f): \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Рис. 3.61. Покрокова побудова графіків до завдання №208 а).

$$210. \text{ а) } y = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1, & \sin x > 0 \\ -1, & \sin x < 0 \end{cases}$$

$$D(f): \sin x \neq 0$$

$$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$\sin x > 0$  В межах одного оберту одиничного кола:  $0 < x < \pi$

Додаємо період синуса, тобто  $2\pi n$ :  $2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sin x < 0$  В межах одного оберту одиничного кола:  $\pi < x < 2\pi$

Додаємо період синуса, тобто  $2\pi n$ :  $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Рис. 3.62. Покрокова побудова графіків до завдання №210 а).

$$209. \text{ а) } y = \frac{|x|}{x} \cdot \operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x > 0 \\ -\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

$$D(f): x \neq 0$$

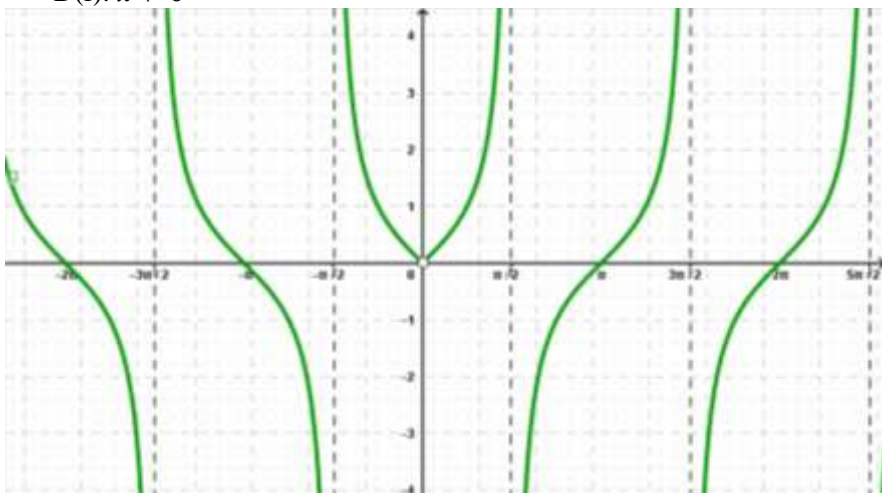


Рис. 3.63. Покрокова побудова графіків до завдання №209 а).

$$211. \text{ а) } y = \cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x, & \cos x \geq 0 \\ 0, & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$D(f):$$

$\cos x \geq 0$  В межах одного оберту одиничного кола:  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Додаємо період косинуса, тобто  $2\pi n$ :  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$n=1: -\frac{\pi}{2} + 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$$

$$n=0: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; n=-1: -\frac{\pi}{2} - 2\pi < x < \frac{\pi}{2} - 2\pi; \frac{-5\pi}{2} < x < \frac{-3\pi}{2}$$

$\cos x < 0$  В межах одного оберту одиничного кола:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Додаємо період синуса, тобто  $2\pi n$ :  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$n=1: \frac{\pi}{2} + 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$$

$$n=0: \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$n=-1: -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$$

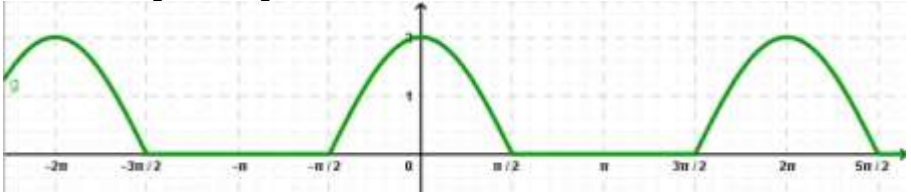


Рис. 3.64. Покрокова побудова графіків до завдання №211 а).

$$212. \text{ а) } y = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + |x|)}{\cos x}$$

$$D(f): \cos x \neq 0$$

$$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{\cos|x|}{\cos x} = 1$$

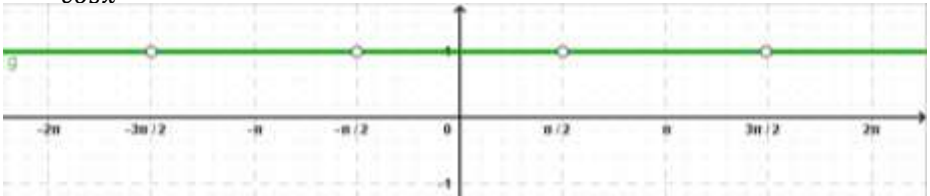


Рис. 3.65. Покрокова побудова графіків до завдання №178 а).

$$213. \text{ а) } y = 5x\sqrt{x} \cdot \sqrt{-\sin^2 x}$$

$$D(f): \begin{cases} x \geq 0 \\ -\sin^2 x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ \sin^2 x \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

$$x = \pi n, n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$n=0: x=0; n=1: x=\pi; n=2: x=2\pi; n=3: x=3\pi$$

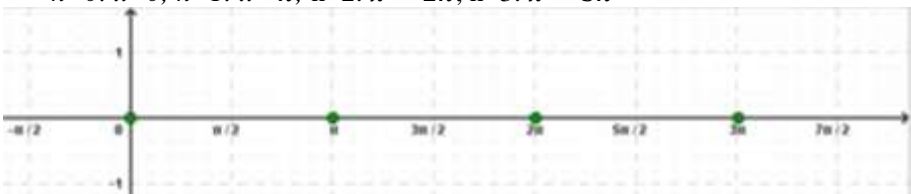


Рис. 3.66. Покрокова побудова графіків до завдання №213 а).

IV. Підбиття підсумків, повідомлення домашнього завдання.  
Завершити розв'язування номерів а) №178-181, 207-213.

### 3.17. Фінансова математика

#### Назви тем:

9 клас, тема «Елементи прикладної математики. Відсоткові розрахунки. (9, Мрзл, поглиб);

9 клас, тема «Геометрична прогресія»;

11 клас, 1-2 курс фахового коледжу; тема «Показникова функція, її властивості та графік».

**Вікова категорія:** 14-15, 16-18 років. **Навчальні предмети:** алгебра / алгебра і початки аналізу, інформатика, основи економіки.

**Актуальність та мета:** Фінансова математика – розділ прикладної математики, який охоплює математичні завдання, пов'язані з фінансовими розрахунками. Загалом фінансова математика створює та розширює математичні або чисельні моделі, у яких вона спирається не на фінансову теорію, а використовує ринкові ціни як вхідні дані.

Участь у навчальному проєкті «Фінансова математика» дасть змогу учням 9-11 класів, студентам 1-2 курсів фахових коледжів глибше ознайомитися з професією, зрозуміти механізми нарахування відсотків та ін. Серед основних напрямів фінансової математики для ознайомлення здобувачам освіти можна запропонувати класичну фінансову математику або математику кредиту, яка відповідає за виконання процентних розрахунків; розглядає питання, пов'язані з різними борговими інструментами, наприклад, векселями, депозитарними сертифікатами, облігаціями; аналізує потоки платежів, які застосовуються у банківській справі, кредитуванні, інвестуванні. Важливо дізнатися здобувачам освіти і про актуальні розрахунки, які складають математичну основу для страхування. У ході впровадження проєкту підвищується фінансова грамотність його учасників – учнів / студентів.

**Обладнання:** програмне забезпечення GeoGebra, таблиці Google чи інше для створення фрагментів програми «Фінансовий калькулятор».

**Умови проведення:** учасники проєкту працюють в групах чи індивідуально, розробляють фрагменти програм «Фінансового калькулятора». **Термін виконання:** 3-4 тижні.

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проєкту має стати звіт за наявними в регіоні банками щодо ефективності взяти кредит готівкою, кредит на нове житло, автомобіль тощо. А також створення фрагментів програми «Фінансовий калькулятор».

#### Опис алгоритму дій, ходу впровадження.

Низку задач з теми «Елементи прикладної математики. Відсоткові розрахунки» представлено у підручнику алгебри для дев'ятого класу для поглибленого вивчення математики авторського колективу А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір [131]. В інших підручниках для 9-го класу подібні задачі можна знайти в темі «Геометрична прогресія», для 11-го класу та студентів 1-2 курсів коледжів – в темі «Показникова функція».

Починаючи з 5-го класу, учні розв'язують задачі на відсотки. У 9-му класі до таких типових задач на відсотки як знаходження відсотка від числа; знаходження числа за його відсотком; знаходження відсоткового відношення двох чисел, додається формула складних відсотків. Учні в 9-му класі вже вміють конструювати математичні моделі цих задач за допомогою виразів. В 11-му класі чи у фаховому коледжі знання та уміння здобувачів освіти з фінансової математики удосконалюються при вивченні показникової функції.

Банківські працівники і громадяни, які зберігають гроші в банку під відсотки чи беруть кредит, мають справу з формулами нарахування відсотків. Тому користувачу потрібно попередньо ознайомитися з умовами кредитування в різних банках, уміти оцінити, в якому банку найвигідніше взяти кредит. Практичним результатом втілення проєкту може стати звіт за наявними в регіоні банками щодо ефективності взяти кредит готівкою, кредит на нове житло чи автомобіль тощо.

А також можна передбачити створення фрагментів програм «Фінансовий калькулятор» через консультування з викладачем інформатики. Цікаво буде учням ознайомитися з уже існуючими фінансовими калькуляторами, наприклад, за покликанням <https://finsee.com/>.

Наведемо умови прикладних задач з підручника [131], які можуть бути стартовими для проєкту «Фінансова математика».

**Задача 21.2.**<sup>o</sup> Вкладник поклав до банку 5000 грн під 8 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через три роки?

**Задача 21.22.** Вкладник поклав у банк 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 %. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

**Задача 21.23.** Вкладник поклав у банк 10 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 2 %. На кінець другого року на рахунку стало 11 880 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

Автори підручника [131, с.244] пояснюють, як уникнути неоднозначності в задачах на відсоткові розрахунки. Задачі, у яких ідеться про зміну процентних ставок, можуть викликати певні ускладнення. Типовим прикладом є задачі 21.22, 21.23, у яких ідеться про збільшення (зменшення) «банківського відсотка». Щоб уникнути цієї неоднозначності, в економіці та інших областях, де широко застосовують відсоткові розрахунки, використовують поняття «процентні пункти». Якщо вживають слово «пункти», то потрібно до тієї відсоткової ставки, що була раніше, додавати чи віднімати відсотки підвищення чи зниження. Якщо ж так не вказано, то можна трактувати і таким чином: знайдене значення лише підвищувати чи понижувати, а не всю суму. Тому автори реформульовують задачу 21.22 уже з врахуванням терміну «процентні пункти».

**Задача 21.22.** Вкладник поклав у банк 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 процентних пункти. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка в перший рік?

У сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а декілька разів в році – по півріччях, поквартально, щомісячно. Деякі комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування відсотків. На практиці, як правило, фіксується не ставка за період нарахування, а річна ставка, де період нарахування вказується. Наприклад, „15% річних з поквартальним нарахуванням відсотків”. Тоді нарахування відсотків відбувається за формулою, що враховує як річну ставку, так і кількість періодів нарахування відсотків.

Нехай  $j$  – річна ставка;  $m$  – число періодів нарахувань у році. Щоразу відсотки нараховуються за ставкою  $j/m$ .  $j$  називають номінальною ставкою. Ставка  $j$  потрібна для того, щоб знати, яке число потрібно розділити на кількість періодів у році, щоб одержати ставку за період.

Формула нарощення тоді буде мати такий вигляд:

$$S = P \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = P \left( 1 + \frac{j}{m} \right)^N \quad (*)$$

Приклад 3.7. Яким буде борг, що дорівнює 1000 грн., через 5 років при складній ставці 15% річних, якщо відсотки нараховуються поквартально.

Нарощену суму боргу знаходимо за формулою (\*):

$$S = 1000 \left( 1 + \frac{0,15}{4} \right)^{4 \cdot 5} = 2088,152 \text{ грн}$$

При тому, що нарощена сума боргу при річному нарахуванні відсотків дорівнювала б 2011,36 грн.

Тобто, чим частіше нараховуються відсотки, тим швидше відбувається процес нарощення боргу.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у проєкті «Фінансова математика»?
2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи і студентам фахових коледжів за проєктом «Фінансова математика»?
3. Які види завдань з фінансової математики найчастіше зустрічаються у шкільних підручниках?
4. Які найпростіші програми «Фінансовий калькулятор» можна запропонувати створити здобувачам освіти?
6. Які додатки для мобільних телефонів доцільно запропонувати для участі у проєкті Фінансова математика?



### 3.18. Перерізи многогранників

**Назви тем:** тема «Вступ до стереометрії. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників»; тема «Паралельність прямих і площин у просторі. Методи побудови перерізів многогранників».

**Вікова категорія:** 15-17 років. 10 клас, 1-2 курс фахового коледжу.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість).

**Актуальність та мета:** Сьогодення ознаменоване стрімким інформаційно-технологічним розвитком. Тому необхідна підготовка професіоналів, що мають фундаментальні знання та практичний досвід, володіють інноваційними технологіями. Важливе впровадження в навчальний процес сучасної школи навчальних досліджень на основі ІКТ як засобу формування в учнів стійкого інтересу й готовності до творчої діяльності. Одним із засобів для STEM-навчання є система динамічної математики. Наприклад, вітчизняний засіб GRAN чи хмаро орієнтований GeoGebra. Вивчаючи тему «Многогранники», доцільно організувати роботу здобувачів освіти над проєктом «Перерізи многогранників площиною», об'єднавши їх у групи залежно від того, які методи побудови перерізів чи засоби для побудови будуть застосовуватися (рис. 3.67). Доцільно так розробити наочності за допомогою названих засобів, щоб можна було покроково відтворити хід побудови перерізу, вмикати / вимикати кнопку побудови перерізу, записи ходу побудови, звуковий супровід. Рухаючи точки вздовж ребер чи в зазначених площинах, можна імітувати рух січної площини. При цьому може змінюватися форма перерізу і послідовність кроків побудови.

**Обладнання:** програмне забезпечення Microsoft PowerPoint, динамічна геометрія GeoGebra, GRAN-2D чи DG, креслярські інструменти, матеріали та інструменти для виготовлення макетів, 3D-принтер.

**Термін виконання** впродовж вивчення теми.

**Умови проведення** Учасники працюють індивідуально або в парах.

**Прогнозований результат.** Створена добірка моделей перерізів многогранників площиною.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Розглянемо приклади завдань на побудову перерізу многогранника площиною, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій; через пряму і точку, яка їй не належить тощо. Варто здійснювати побудову лінійних кутів двогранних кутів та їх вимірювання; кута між прямою і площиною.

Розглянемо, які чотири підходи до побудови перерізу многогранника площиною має розрізняти учитель/викладач, щоб пропонувати здобувачам освіти оптимальний відповідно до їхньої освітньої траєкторії. Якщо той, хто навчається, не в повній мірі володіє інструментами GeoGebra, доцільно пропонувати аркуш зі списком послідовності кроків побудови. Поряд потрібно подати піктограми, що відповідають викори-

станим інструментам. Доречно на роздрукованих матеріалах розмістити QR-коди наочностей для демонстрації.

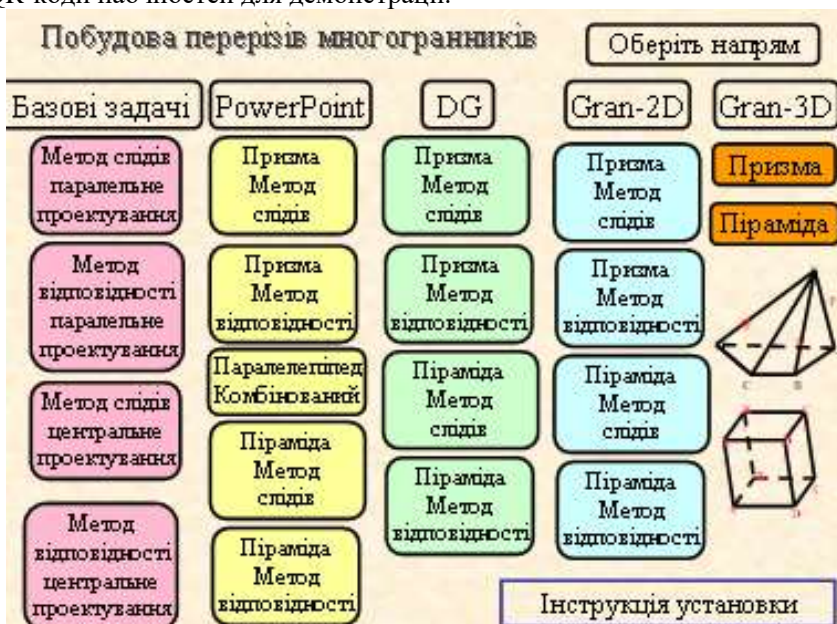


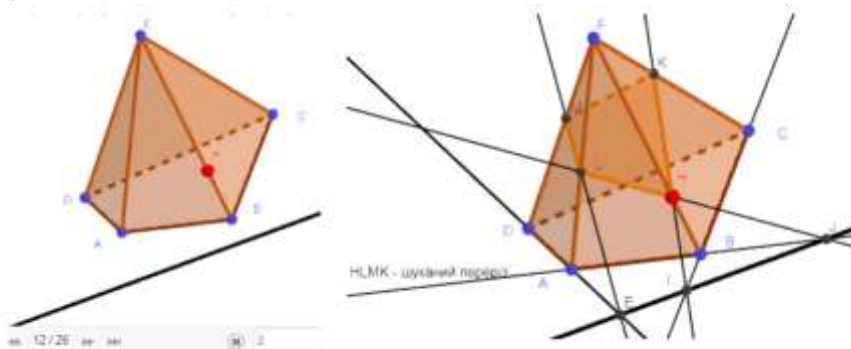
Рис. 3.67. Меню презентації «Перерізи многогранників»

1) Побудова на полотні 2D. Спочатку доцільно покроково відтворити кілька креслень, створених із застосуванням методу слідів на 2D-полотні. Щоб інтенсивніше подавати матеріал, можна одразу пропонувати здобувачам освіти побудований многогранник. Однак, у ході дослідження фіксували випадки, що вони неправильно зображали многогранник. А вже після його побудови на площині, не мали можливості його динамічно змінювати. Наприклад, щоб побудувати зображення призми на полотні 2D, в основі якої лежить  $n$ -кутник, доцільно виконати наступні кроки. Спочатку будують  $n$ -кутник, використовуючи відповідний інструмент. Потім краще побудувати вектор вздовж одного з ребер призми. Далі здійснюють паралельне перенесення  $n$ -кутника на побудований вектор. З'єднують відповідні вершини. Така побудова виконана з врахуванням властивостей паралельного проєктування. Побудова на полотні 2D доволі громіздка, вимагає логічного обґрунтування кожного кроку побудови. Але якщо здобувачі освіти ним оволодіють, то це найбільшою мірою розвиватиме у них логічне мислення.

2) Далі варто порівняти попереднє креслення з кресленням за цією ж умовою задачі, але вже створеним на полотні 3D. При цьому всі прямі для побудови перерізу можуть бути відтворені покроково. До переваг

такої побудови можна віднести можливість динамічно змінювати побудований многогранник і розташування точок, через які проходить січна площина. За допомогою додатку 3D-Геометрія GeoGebra можна імітувати зовнішні дії з геометричними тілами, необхідними для того, щоб здобувач освіти міг провести з ними мисленнєві внутрішні дії і розвинути просторове мислення. На нашу думку, цей підхід є найоптимальніший для розвитку просторової уяви, логічного мислення.

На рис. 3.68 подано побудову перерізу піраміди січною площиною, яка проходить через точку на бічному ребрі і пряму, проведену у площині основи.



**Рис. 3.68. Побудова перерізу піраміди площиною.**

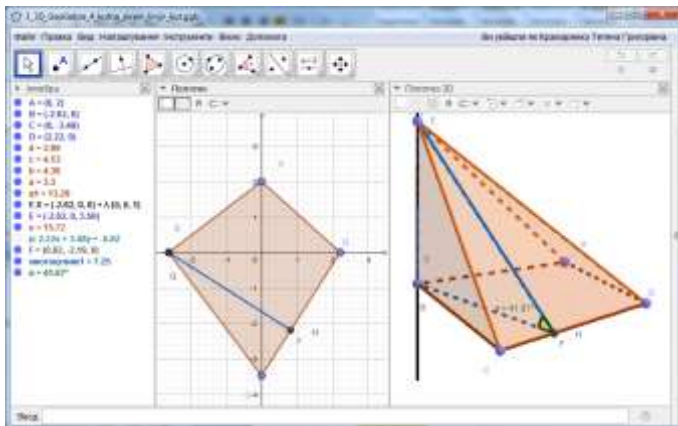
3) Третій варіант для побудови перерізу на полотні 3D. Спочатку потрібно побудувати многогранник, січну площину, а потім скористатися інструментом «Перетин двох поверхонь». Учень, «повертаючи» многогранник зможе краще розглянути побудову. Такий підхід доречний, коли застосовують інструменти доповненої реальності, і учні мають змогу суміщати креслення із зображенням реального об'єкта. Доцільно пропонувати учням знаходити приклади таких перерізів серед оточуючих предметів, в архітектурі тощо. Можна дослідити, як змінюється многокутник, отриманий у перерізі, залежно від розташування точок на ребрах призми. Є змога визначити об'єм многогранника, площу граней, а також площу перерізу призми, попередньо знявши відмітки відображення призми і січної площини (у властивостях об'єкта обрати відмітку «не показувати»).

4) Використання одночасно 2D і 3D полотна. Таке комбінування доцільне, якщо складно побудувати многокутник, який лежить в основі піраміди чи вказати положення вершини піраміди тощо.

Наприклад, якщо в основі піраміди чи призми лежить трапеція, зокрема прямокутна чи рівнобічна. Або, наприклад, вершина піраміди проєкується в одну з вершин основи чи на сторону основи (Рис. 3.69). Вар-

то зазначити, що такі побудови можна здійснити лише у класичній версії GeoGebra, а перегляд побудови може бути доступний і на мобільному телефоні після завантаження файлу у хмарне сховище GeoGebra.

Просторове мислення як різновид образного мислення і важлива грань інтелектуального розвитку особистості відіграє значну роль в оволодінні знаннями основ наук. Оперування просторовими образами - це і вміння за плоским зображенням відтворити просторові форми і характеристики реального технічного об'єкта, і вміння уявити його в динаміці, у взаємозв'язках з іншими об'єктами.



**Рис.3.69.** Піраміда, дві грані якої перпендикулярні до площини основи.

У навчанні доцільно розподілити учасників навчального процесу на три підгрупи відповідно до типу оперування просторовими образами. Це допоможе підходити до розвитку їх просторової уяви диференційовано, враховуючи індивідуальні особливості, поступово ускладнюючи завдання, доповнюючи навчальний матеріал наочністю, фіксуючи увагу на практичному застосуванні знань. Дії з моделями, створеними за допомогою програмного засобу, займають проміжну ланку між зовнішніми діями з геометричними тілами та мисленими внутрішніми діями. Мислені дії повинні передувати зовнішнім, щоб задіяти та розвинути уяву людини.

У значній кількості задач елементарної математики, пов'язаних з побудовою на зображеннях, вимагається виконувати побудову перерізів заданих просторових фігур. Виділяють метод слідів, внутрішнього проєктування (спосіб відповідності) і комбінований метод [120], [135].

Динамічні креслення перерізів многогранників доцільно також використовувати під час перших уроків стереометрії в 10-му класі, коли здобувачі освіти опановують аксіоматику, вивчають властивості паралельного проєктування. На Google-диску [нами пропонуються динамічні моделі](#), створені у ході впровадження навчального проєкту «Перерізи многогранників» з використанням засобів PowerPoint, GRAN-2D, GRAN-3D та DG.

На сьогодні однією з найпотужніших розробок GeoGebraBook з побудови перерізів многогранників є добірка наочностей [Сидорука В. А.](#) [178]. Автор пропонує книгу наочностей з перерізами многогранників, креслення до яких виконано різними методами: метод слідів, метод внутрішнього проєктування та інші (<https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs>). У запропонованому автором методичному посібнику подано також основні теоретичні відомості, опорні задачі.

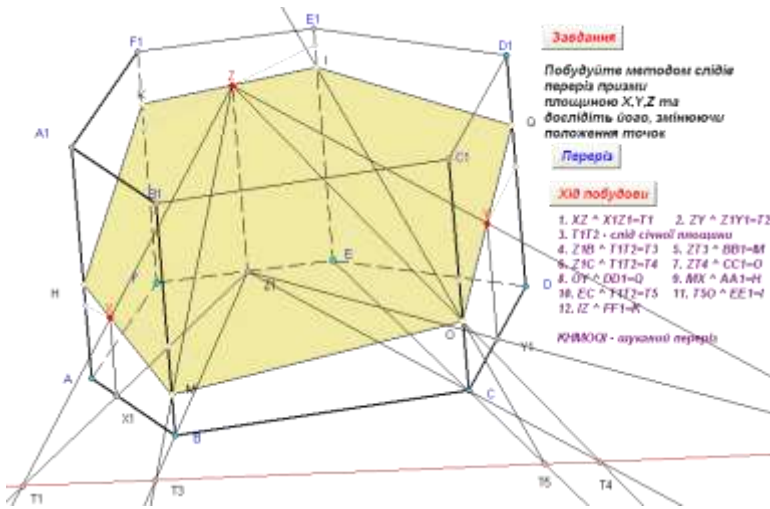
Навчання побудовам перерізів рекомендується розпочати зі складання алгоритмів до базисної задачі [135, 466]. *Задано три точки A, B, C та їх проєкції. Знайти на площині ABC точку D, проєкція якої D<sub>1</sub> відомо при заданому напрямку проєктування.* У добірці є чотири динамічні креслення для базисної задачі, подано алгоритми побудови. Будуючи перерізи призми площиною, найчастіше користуються паралельним проєктуванням, а для піраміди – центральним проєктуванням. Для розвитку просторової уяви учасників навчального процесу більш раціональним є знаходження сліду площини перерізу в площині будь-якої грані, відмінної від площини нижньої основи многогранника.

**Динамічні креслення, створені з використанням GRAN-2D**, GeoGebra чи DG, оснащують кнопками типу *сховати* \ *показати об'єкт*. За допомогою цих кнопок (*прапорців*) тимчасово приховують виконані кроки побудови, щоб учень / студент мав змогу здійснювати самоперевірку правильності виконання завдання. Після налаштування режиму перегляду, можна покроково відтворити хід побудови перерізу, модифікувати многогранники, зробити моделі «керованими» – вмикати \ вимикати кнопки побудови перерізу, записи ходу побудови, звуковий супровід. Порядок виконання побудови учнем/ студентом може бути відмінним від закладеного у файлі, однак самі перерізи повинні співпасти. Щоб дослідити, якого виду многокутник можемо отримати в якості перерізу, доцільно змінювати положення заданих точок, рухаючи їх вздовж ребер чи в певних площинах.

На рис. 3.70 подано побудову перерізу шестикутної призми площиною методом слідів. Площина перерізу проходить через три точки, розміщені в площинах бічних граней призми. Хід побудови виписано на слайді зліва.

Використання методу відповідності продемонструємо на прикладі задачі на побудову перерізу шестикутної піраміди площиною, що проходить через точки на ребрах A, E, C (рис. 3.71).

Знаходять точку перетину січної площини з ребром  $SB_1$ :  $E_1B_1 \cap A_1C_1 = X_1$ ,  $AC \cap SX_1 = X$ ,  $EX \cap B_1S = H$ . Виконуючи побудови  $C_1E_1 \cap A_1D_1 = Y_1$ ,  $CE \cap SY_1 = Y$ ,  $AY \cap SD_1 = D$ , встановлюють точку на ребрі  $SD_1$ . Для перетину ребра  $SF_1$  виконують дії:  $A_1D_1 \cap C_1F_1 = Z_1$ ,  $SZ_1 \cap AD = Z$ ,  $CZ \cap SF_1 = F$ . Тоді  $AHCDEF$  – шуканий переріз. Для акцентування уваги на ключових побудовах, в режимі *Налаштування відтворення побудови* знімають відмітки з допоміжних.



**Завдання**  
 Побудуйте методом слідів переріз призми площинною X,Y,Z та дослідіть його, змінюючи положення точки

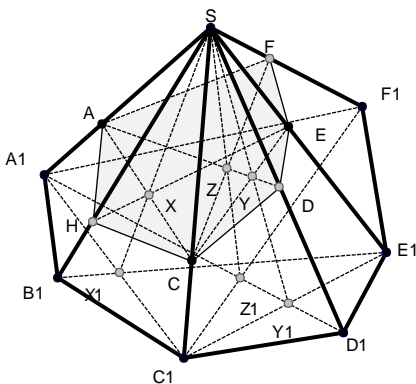
**Перевір**

**Хід побудови**

- $KZ \wedge X1Z1=T1$
- $ZY \wedge Z1Y1=T2$
- $T1T2 \cdot$  слід січної площини
- $Z1B1 \wedge T1T2=T3$
- $ZT3 \wedge B1B1=M1$
- $Z1C1 \wedge T1T2=T4$
- $ZT4 \wedge C1C1=O$
- $OY \wedge O1O1=Q$
- $MX \wedge AA1=N$
- $EC \wedge F1E1=T5$
- $T5O \wedge EE1=K$
- $Z2 \wedge FF1=L$

КНМНОQ - шуканий переріз

Рис.3.70. Побудову перерізу призми виконано за допомогою DG



**Хід побудови**

- $E1B1 \wedge A1C1=X1$
- $AC \wedge SX1=X$
- $EX \wedge B1S=H$  ребро SB1
- $C1E1 \wedge A1D1=Y1$
- $CE \wedge SZ1=Y$
- $AY \wedge SD1=D$  ребро SD1
- $A1D1 \wedge C1F1=Z1$
- $SZ1 \wedge AD=Z$
- $CZ \wedge SF1=F$  ребро SF1

Рис. 3.71. Побудова перерізу піраміди площинною (файл DG).

**Контрольні питання і завдання**

1. Переглянути і проаналізувати добірки наочностей запропоновані вище. Зокрема добірку [«Наочності до задач стереометрії»](#) за QR-кодом.

2. Запропонувати спосіб побудови за допомогою системи динамічної математики точки в площині грані многогранника, що не лежить на ребрі цієї грані.

3. Побудувати в середовищі динамічної математики методом слідів та методом внутрішнього проєктування переріз 5-кутної піраміди чи призми площинною, що проходить через три точки, взяті на ребрах многогранника чи в його гранях. Для створеного креслення додати підказки, використовуючи відповідні інструменти.



### 3.19. Голограма і многогранники

**Назва теми:** Многогранники.

**Вікова категорія:** 16-18 років; 11 клас, 1-2 курс фахового коледжу.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість).

**Актуальність та мета:** Голограма – це проєктування зображення об'єкта з площини у тривимірний простір. При цьому створюється ілюзія об'ємності, оскільки людина бачить не самі об'єкти, а їхні світлові образи. Запропонований проєкт є трансдисциплінарним.

Різноманітні гаджети, зокрема мобільні телефони, мають стати дієвими інструментами завдяки STEM-освіті для засвоєння математики і набуття навичок розв'язування математичних задач через математичні практикуми з завданнями дослідницького характеру; демонстрацію експериментів з їх аналізом, що систематизує отримані знання; участь у навчальних проєктах. Ми залучали студентів коледжу до участі у STEM-проєкті *створення 3D-голограми*.

**Обладнання:** програмне забезпечення Adobe Premiere Pro, креслярські інструменти, матеріали та інструменти для виготовлення макетів, зокрема пластикові пластини, клей.

**Термін виконання:** 1-2 тижні.

**Умови проведення.** учасники навчального процесу можуть працювати як в міні-групах, так і індивідуально; як дистанційно, так і в аудиторії.

**Прогнозований результат:** створені і продемонстровані голограми.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

Під час уроків математики з теми «Зрізана піраміда» студентам було запропоновано зробити макет правильної зрізаної чотирикутної піраміди. Матеріалом для виготовлення слугували пластикові пластини. Спочатку студенти зробили розмітку на пластині (рис. 3.72), потім вирізали та склеїли макет (рис. 3.73). Для перевірки роботи відкрили готове відео 3D-голограми на телефоні і поставили зверху перевернуту модель (3.74).

На інформатиці, під час вивчення комп'ютерної графіки, зробили власні відео для 3D-голограми (рис. 3.75). Студентам було запропоновано список тем з різних предметів, таким чином в результаті отримали велику кількість відео, які у подальшому використовували на різних навчальних дисциплінах (URL:[https://youtu.be/2vZ1K17\\_Zqw](https://youtu.be/2vZ1K17_Zqw)).

Використання створених голограм на заняттях збільшувало інтерес студентів та мотивувало на подальшу дослідницьку роботу.

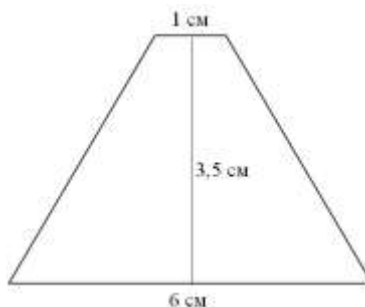
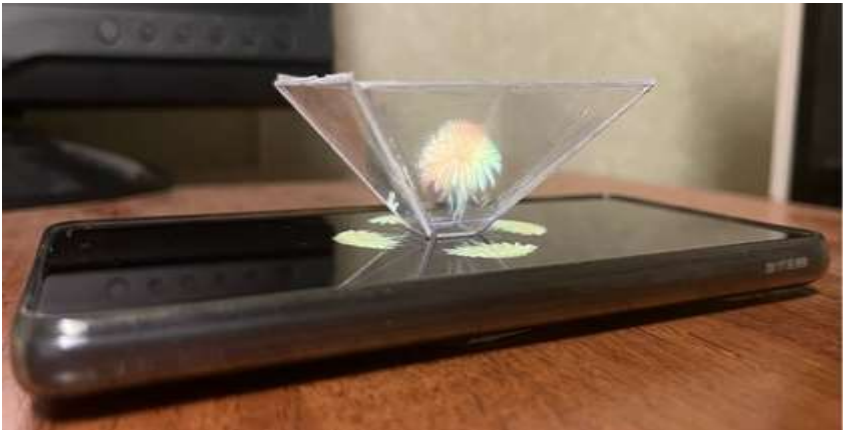
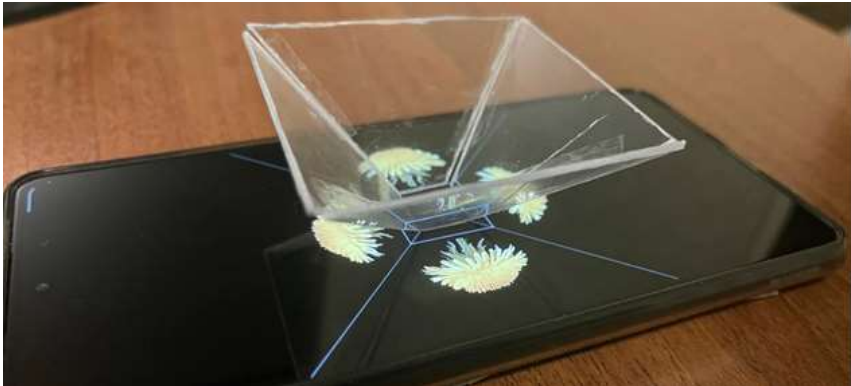


Рис. 3.72. Графарет з розміткою



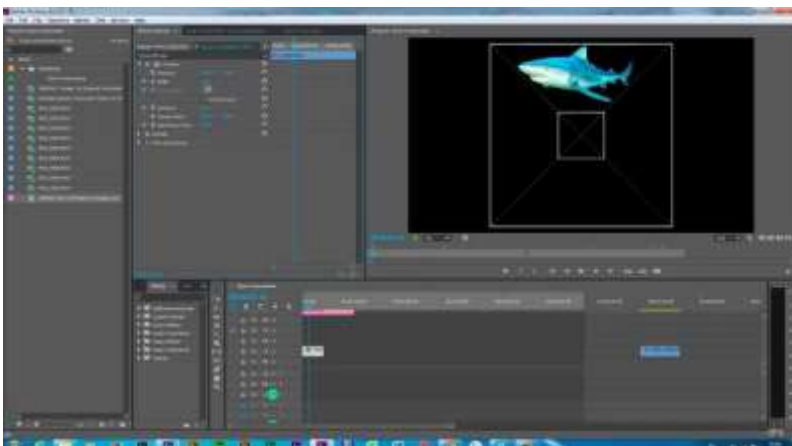


**Рис. 3.73. Розгортка та макет зрізаної піраміди.**



**Рис. 3.74. Демонстрація створеної голограми.**





**Рис. 3.75.** Етап створення власного відео у відеоредакторі: Акула-бик, яка може адаптуватися у прісних водоймах.

### *Контрольні питання і завдання*

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у проєкті «Голограма»?
2. Які напрями досліджень можна запропонувати учасникам навчального процесу з проєкту, крім поданих у тексті? Які спільні завдання з математики та інформатики вони можуть виконувати у ході проєкту?
3. З яких етапів складається процес підготовки до проєкту та його впровадження? Які звітні документи доцільно запропонувати для звіту про роботу над проєктом?
4. Які форми доцільно запропонувати учасникам навчального процесу для оцінювання та самооцінювання роботи над проєктом, спрямування їх на успіх?

### **3.20. Доповнена реальність і STEM: AR-додаток GeoGebra**

**Назви тем:** тема «Вступ до стереометрії. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників»; тема «Паралельність прямих і площин у просторі. Методи побудови перерізів многогранників».

**Вікова категорія:** 15-18 років; 10 клас; 1-2 курс фахового коледжу.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість).

**Актуальність та мета:** Одним із засобів для STEM-навчання є система динамічної математики. Розглянемо, які маніпуляції можна здійснювати, використовуючи додаток *Доповнена Реальність* (рис. 3.76). Можемо, наприклад, записати рівняння поверхні та дослідити отриманий результат, змінювати окремі параметри та в режимі реального часу

спостерігати зміни. Також можемо «просканувати» оточуючі нас предмети, отримати відповідні моделі, а вже далі досліджувати їх. Перед дослідженням потрібно розмістити математичні предмети на будь-якій поверхні. Побудовані і зафіксовані моделі можна «обійти» з усіх сторін, «заглянути» у середину, зробити скріншот внутрішніх структур.

**Обладнання:** програмне забезпечення динамічна геометрія GeoGebra, креслярські інструменти, матеріали та інструменти для виготовлення макетів, 3D-принтер.

**Умови проведення:** Учасники працюють індивідуально або в парах.

**Прогнозований результат:** створена добірка моделей перерізів многогранників площиною. **Термін виконання:** впродовж вивчення теми.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Режим *3D Графіка* призначений для роботи з 3D-об'єктами. Створювати об'єкти можна за допомогою вкладок «*Алгебра*» або «*Інструменти*». В режимі *Алгебра* ми додаємо об'єкти за допомогою математичних функцій, а в режимі *Інструменти* за допомогою панелі інструменти, яка пропонує великий набір інструментів для створення тривимірних об'єктів. Крім добре відомих інструментів (створення точок, відрізків, прямих, кутів і многокутників), є також спеціалізовані інструменти для побудови об'ємних тіл, такі як сфера, піраміда, призма, конус, циліндр. Можна будувати перерізи об'ємних фігур і формувати розгортку.

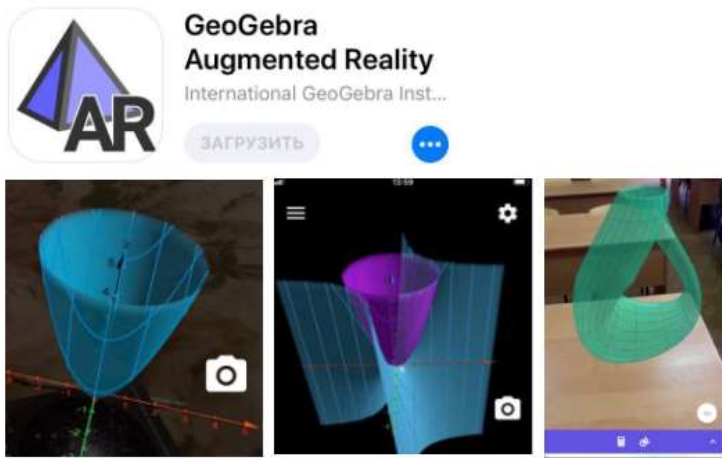


Рис. 3.76. Колекція прикладів 3D-об'єктів AR-GeoGebra.

Для створення математичної моделі в додатку «Доповнена реальність», спочатку потрібно створити модель в 3D Графіка, а вже потім за допомогою «кнопки» «AR» с проєктувати в реальний світ. Щоб розмістити об'єкт в реальному світі, треба обрати місце, навести на нього фотокамерою і натиснути на екран телефону. Після цього фігура зафіксу-

ється в обраному місці. Для зміни розміру, кольору об'єкту, використовуємо сенсорний екран.

Оскільки в додатку є можливість будувати призму, складнощі можуть виникати при створенні певних видів призм. Розглянемо детально на прикладі прямої призми в основі якої лежить прямокутник.

У таблиці 3.13. подано перелік інструментів для здійснення побудови моделей та подано описи їх застосування.

Таблиця 3.13.

### Приклади інструментів для здійснення побудов

№	Зображення	Інструмент	Застосування
1		Куб	двічі «клікнути» у вікні 3D-виду для створення точок, які задають ребро куба
2		Переміщення	дозволяє витиснути призму з многокутника чи циліндр з кола
3		Витиснути піраміду	дозволяє побудувати піраміду з багатокутника або конус з кола
4		Обертання 3D графіки	дозволяє обертання в тривимірному просторі
5		Розгортка	дозволяє побудувати розгортку до зазначеного многогранника
6		Сфера: центр та точка	дозволяє побудувати сферу, вибравши центр і будь-яку точку на поверхні
7		Площина через 3 точки	побудова площини, послідовно обравши три точки
8		Симетрія відносно площини	виберіть об'єкт, який хочете відобразити, а потім вкажіть площину відображення
9		Вигляд з	дозволяє перевести вид в положення нормалі до обраного об'єкта

Алгоритм створення прямокутного паралелепіпеда в 3D-графіці представлено у таблиці 3.14. Користувач отримує детальний опис кроків

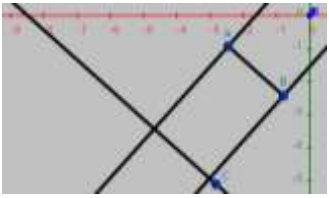
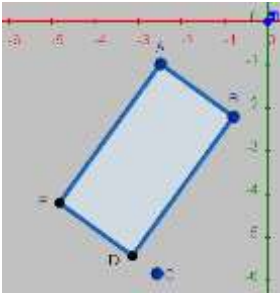
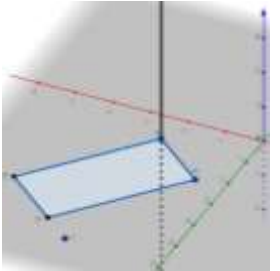
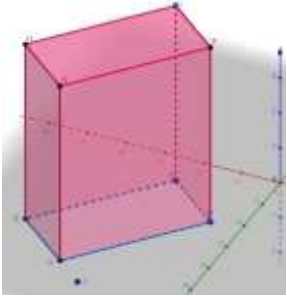
побудови і отримані зображення.

Після побудови призми в 3D Графіці ([geogebra.org/3d/gevtdung](https://www.geogebra.org/3d/gevtdung)), натискаємо на «кнопку» AR (доповнена реальність). Далі необхідно за допомогою фотокамери обрати місце в навколишньому середовищі, куди плануємо перенести об'єкт. Наприклад, на стіл. Натиснувши на екран, фігуру буде перенесено в реальний світ, де її можна буде дослідити (<https://drive.google.com/open?id=1JhG3sllMkWbW3Pidl76GVECu5xZ0tmte>). Камера телефона слугуватиме нашими очима. Зануривши телефон у віртуальну фігуру, ми побачимо її зсередини, можемо обійти довкола неї, також додаток дозволяє змінювати розмір, колір. За допомогою доповненої реальності з GeoGebra можна наочно побачити, що повсюди нас оточують математичні об'єкти, фігури; досліджувати їх, ходити довкола них (<https://drive.google.com/open?id=1HkkUDppoLhCPuW-IINuvJyLPETz4foFO>), зазирати або заходити всередину фігури. У зафіксовану фігуру можемо вводити реальні об'єкти, що мають форму прямокутного паралелепіпеда.

Таблиця 3.14.

**Алгоритм створення прямокутного паралелепіпеда в 3D-графіці**

№	Етапи побудови	Методичні вказівки	Рисунок
<i>Побудова динамічного прямокутника</i>			
1	Побудувати відрізок	Для того, щоб побудувати відрізок в площині Оху, потрібно обрати інструмент «Вигляд з» (знаходиться в групі «Редагування») і вказати дану площину. Потім обрати інструмент «Відрізок» і вказати дві точки – кінці відрізка, через які автоматично побудує відрізок АВ.	
2	Побудувати пряму, паралельну відрізку	За допомогою інструменту «Точка» поставимо точку в довільному місці (точка С). Обираємо інструмент «Паралельна пряма», вказуємо на побудований відрізок і точку. При цьому автоматично буде побудовано пряму g.	

3	Побудувати перпендикуляри до прямої, що проходить через кінці відрізка	Обираємо інструмент «Перпендикулярна пряма», вказуємо на пряму $g$ та на точку $A$ – отримали пряму перпендикулярну до прямої $g$ , що проходить через т. $A$ (позн. $i$ ). Аналогічно будуємо пряму через точку $B$ (позначимо $j$ ).	
4	Побудувати прямокутник	Обираємо інструмент «Многочутник» і вказуємо на точки перетину прямих і відрізків. У вкладці «Алгебра» прибираємо видимість зайвих прямих, за бажанням, змінюємо колір об'єктів. Змінювати розмір прямокутника можемо за допомогою переміщення точок $A$ , $B$ , $C$ .	
<i>Побудова прямокутної призми</i>			
5	Побудувати пряму, перпендикулярну до площини прямокутника	Обираємо інструмент «Перпендикулярна пряма», вказуємо на прямокутник і на його вершину. Отримали пряму $h$ , яка є перпендикулярною до прямокутника $ABDE$ і проходить через його вершину.	
6	Побудувати призму	Обираємо інструмент «Призма», вказуємо на прямокутник і на пряму $h$ . Призму побудовано, змінити її розміри можна за допомогою точок $A$ , $B$ , $C$ , $I$ . У вкладці «Алгебра» прибираємо видимість прямої $h$ .	

Враховуючи, що при створенні геометричного тіла «призма» автоматично обчислюється його об'єм, можемо визначити співвідношення між об'ємом реального тіла і результатом, який запропонований програмним засобом (рис. 3.77). При цьому здобувачеві освіти потрібно володіти апаратом застосування властивостей подібних тіл.

Ми пропонуємо здобувачам освіти, крім традиційного виведення формул під час вивчення теми «Об'єми тіл», STEM-підхід. Він полягав у тому, що учасникам навчального процесу пропонувалося висунути гіпотезу щодо того, як співвідносяться об'єми призми і піраміди, циліндра і конуса. Для цього використовували виготовлені моделі цих геометричних тіл і пересипали суху речовину з конуса в циліндр, з призми у піраміду.

За допомогою доповненої реальності студенти можуть зрозуміти основні поняття 3D-геометричних фігур, їх взаємозв'язки та способи побудови 3D-фігур та об'єктів у 3D-просторі. Важливо, що доповнена реальність може забезпечити динамічну візуалізацію 3D-структур геометричних фігур. Ця функція допомагає здобувачам освіти зрозуміти всебічне підґрунтя 3D-геометричних фігур та покращити навички роботи з геометричними структурами. Крім того, взаємодія на основі жестів рук забезпечує інтуїтивно зрозумілий і зручний для здобувачів освіти спосіб безпосередньо контролювати і взаємодіяти з геометричними фігурами в 3D-просторі.

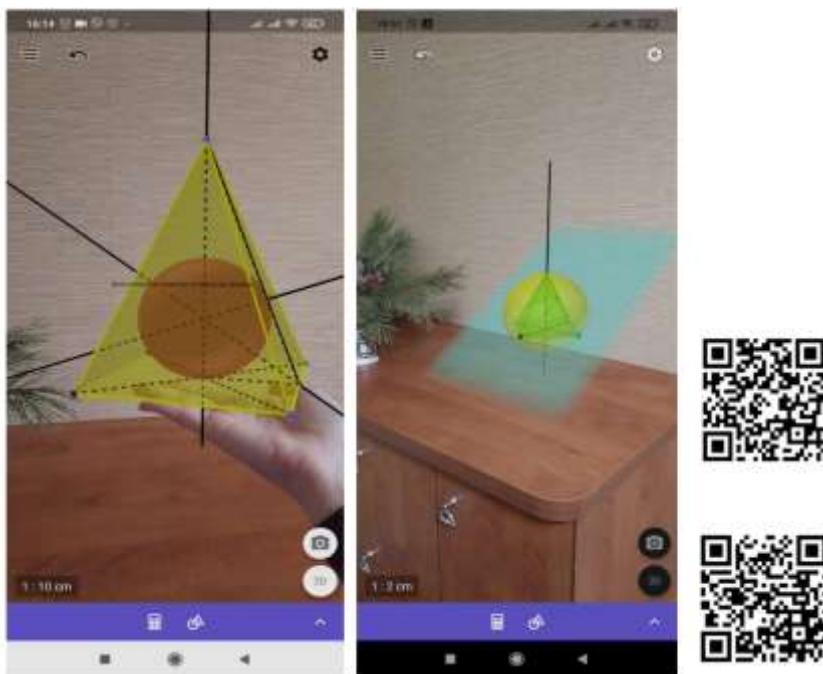


Рис. 3.77. GeoGebra AR-демонстрація.

Додаток доповненої реальності GeoGebra дозволяє перенести побудовану фігуру в простір кімнати (див. рис. 3.77, рис. 3.78). Побудувавши фігуру, натискаємо кнопку "AR". Далі потрібно за допомогою камери вибрати середовище, в яке ми плануємо перемістити об'єкт. Наприклад, на стіл. Натисканням на екран фігура буде «перенесена» в реальний світ [17], де її мо-

жна буде досліджувати. Камера телефону слугуватиме нам очима. Зануривши телефон у віртуальну фігуру, ми побачимо її зсередини, зможемо обійти її, також додаток дозволяє змінювати розмір, колір [17].

Маючи досвід взаємодії з 3D-фігурами за допомогою власних жестів рук, студенти можуть покращити власну обізнаність про взаємозв'язки між 3D-фігурами та легко запам'ятати або зберегти знання про 3D-фігури.



**Рис. 3.78.** Демонстраційні ролики GeoGebra AR.

Дослідивши можливості використання системи динамічної математики GeoGebra при вивченні змістової лінії функції, у навчанні геометрії, вияснили, що залучення учнів до виконання досліджень з використанням GeoGebra сприяє розширенню кола навчальних завдань, включаючи в нього нестандартні завдання дослідницького та прикладного характеру. Це створює умови для досягнення високої мотивації навчання, забезпечення індивідуалізації процесу навчання.

Реалізація прикладного аспекту у викладанні математики з використанням GeoGebra 3D Graphing Calculator with Augmented Reality сприятиме розв'язанню одного з головних завдань STEM-освіти – її індивідуалізації. Крім того, розвиватиме дослідницькі навички здобувачів освіти, розширюватиме можливості їх соціалізації через оволодіння ІКТ, що має привести до планомірного розвитку універсальних STEM-



компетентностей, які дозволять випускнику навчального закладу краще адаптуватися в життєвих ситуаціях, що постійно змінюються.

Розглянувши низку форм та методів і апробувавши окремі з них, з'ясували, що метою кожного вчителя/викладача, який веде STEM-предмет, має стати мотивування та зацікавлення здобувачів освіти. Чим різноманітнішими і цікавішими будуть заняття, тим більше здобувачів освіти захопляться даним предметом. Впровадження елементів STEM-освіти в навчання математики дає можливість підвищити якість науково-технологічної підготовки учасників навчального процесу, що в подальшому сприятиме підвищенню їх життєвих компетентностей.

Перспективу подальших досліджень вбачаємо в розробці і дослідженні ефективності застосування наочностей з використанням інструментів доповненої реальності в систематичному курсі як елементарної, так і вищої математики.

### ***Контрольні питання і завдання***

1. Навести приклади тем геометрії при вивченні яких зручно застосувати додаток AR Geogebra. Дібрати завдання для одного з занять. Визначити мету застосування засобу, роль і місце у ході заняття. Визначити переваги застосування програмного засобу навчання математики у порівнянні з традиційними засобами?

2. Які сучасні засоби доповненої реальності використовують у навчанні математики?

3. Описати види завдань, для розв'язування яких можна використовувати додаток AR Geogebra. Проаналізувати, які з STEM-компетентностей можна розвивати в здобувачів освіти, якщо використовувати у навчанні математики додаток AR Geogebra?

## **3.21. Програма TinkerCAD у навчанні стереометрії**

**Назва теми:** Многогранники.

**Вікова категорія:** 15-18 років, 11 клас, 1-2 курс фахового коледжу.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, комп'ютерна графіка, технічна творчість).

**Актуальність та мета:** опанування здобувачами освіти програми TinkerCAD; розробка проєктів для майданчика відпочинку, кімнати відпочинку через використання комбінацій геометричних тіл.

До роботи у STEM-проєкті залучали студентів коледжу.

**Обладнання:** програмне забезпечення TinkerCAD, креслярські інструменти, матеріали та інструменти для виготовлення макетів.

**Термін виконання:** 2-3 тижні.

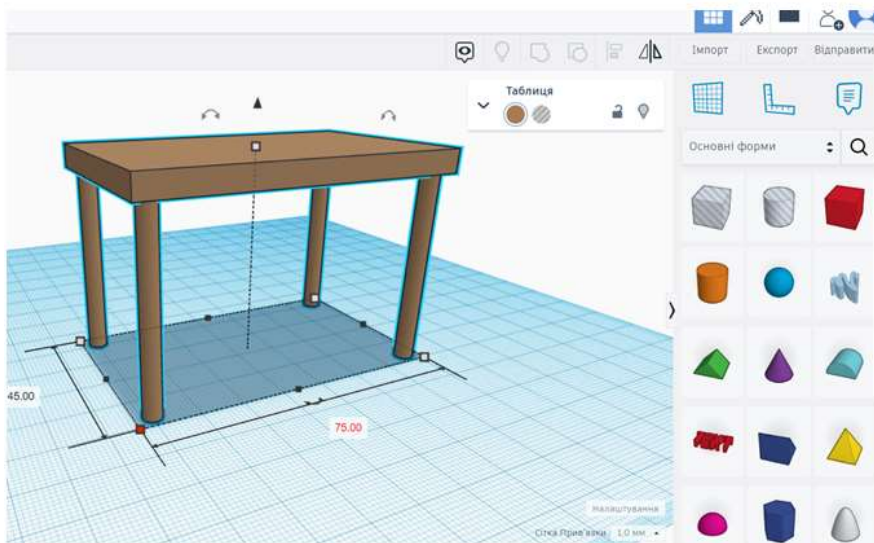
**Умови проведення.** Учні можуть працювати як в міні-групах, так і індивідуально; як дистанційно, так і в аудиторії.

**Прогнозований результат:** розробка проєктів майданчика відпо-



чинку з використанням комбінацій геометричних тіл.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** На першому етапі студенти отримали завдання з використанням програми створити побутове просторове тіло та знайти об'єм просторової фігури. Далі необхідно було розрахувати площу повної поверхні та об'єм утвореної фігури. На рис. 3.79 представлено модель стола, виконану учасником навчального процесу в програмі TinkerCAD «Комбінації геометричних тіл».



**Рис. 3.79. Модель стола виконано в програмі TinkerCAD «Комбінації геометричних тіл»**

Далі подаємо розрахунки створеної моделі. Довжина столу  $a = 75$  см, ширина  $b = 45$  см, товщина кришки столу  $c = 5$  см. Ніжки столу у формі циліндру, діаметр основи  $d = 4$  см, висота  $h = 45$  см.

Спочатку учасники навчального процесу знаходили площу повної поверхні кришки столу (паралелепіпеда)

$$S_{\text{ппк}} = 2(ab + ac + bc) = 2(75 \cdot 45 + 75 \cdot 5 + 45 \cdot 5) = 2 \cdot 3975 = 7950 \text{ см}^2$$

Обчислимо площу поверхні однієї ніжки:

$$S_{\text{пнн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 565,2 + 25,12 = 590,32 \text{ см}^2$$

Площа повної поверхні столу:

$$S_{\text{пп}} = S_{\text{ппк}} + 4S_{\text{пнн}} = 7950 + 4 \cdot 590,32 = 10311,28 \text{ см}^2$$

Далі знаходили об'єм ніжки столу:

$$V_{\text{пнн}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 4 \cdot 45 = 565,2 \text{ см}^3$$

Далі знаходили об'єм столу:

$$V = a \cdot b \cdot c + 4 \cdot V_{\text{пнн}} = 75 \cdot 45 \cdot 5 + 4 \cdot 565,2 = 19135 \text{ см}^3$$

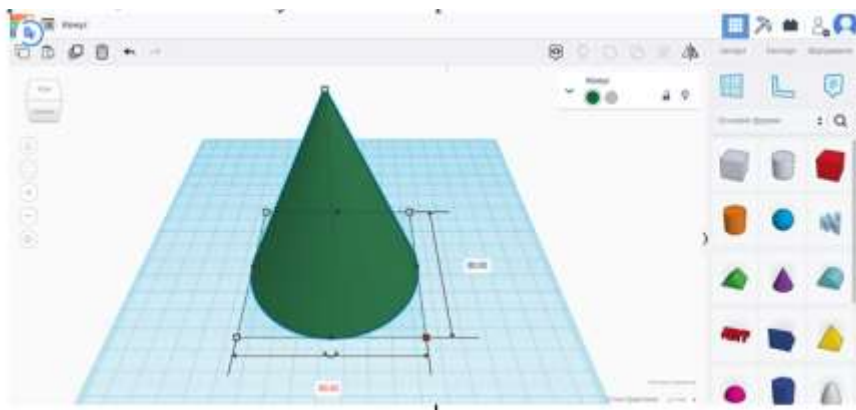
Відповідь:  $S_{\text{пп}} = 10311,28 \text{ см}^2$ ,  $V = 19135 \text{ см}^3$ .

Доцільно дотримуватися диференційованого підходу у навчанні, створити умови для вибору здобувачами освіти посильних їм різнорівневих завдань. Якщо попереднє завдання можна класифікувати як достатнього рівня складності, то наступне можемо віднести до завдання середнього рівня складності. Відповідно до рівня власних домагань, здобувач освіти може обрати доступне йому для виконання завдання.

**Завдання 2** (середній рівень складності). Створити з використанням програмного засобу TinkerCAD будь-яке просторове тіло, знайти площу його повної поверхні та об'єм (рис. 3.80).

Розміри побудованого конуса – діаметр основи 80 см, висота 90 см. Спочатку учениця обчислила довжину твірної конуса:

$$l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{90^2 + 40^2} = \sqrt{9700} = 98,48 \text{ см}$$



**Рис. 3.80.** Проект виконано учасницею навчального процесу в програмі TinkerCAD до теми «Об'ємні геометричні тіла»

Користуючись відповідною формулою, студентка визначила площу бічної поверхні конуса:

$$S_{\text{бнк}} = \pi R l = \pi \cdot 40 \cdot 90 = 11304 \text{ см}^2$$

На завершення обчислено площу повної поверхні конуса:

$$S_{\text{пнк}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бнк}} = \pi R^2 + \pi R l = 5024 + 11304 = 16328 \text{ см}^2$$

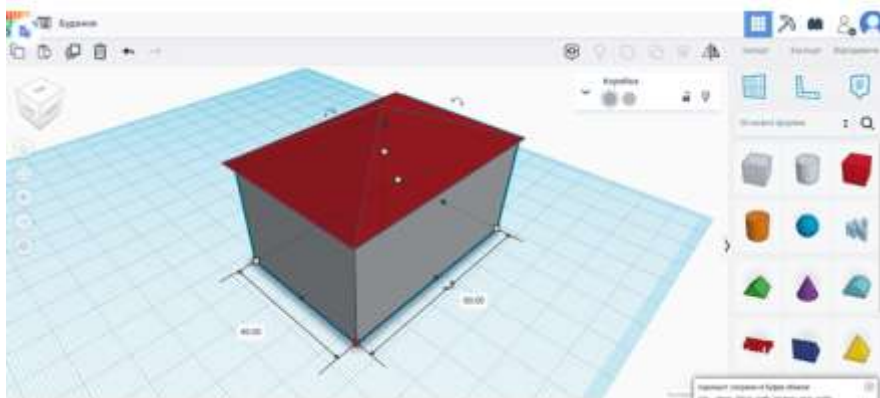
Об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 1600 \cdot 90 = 1500720 \text{ см}^3$$

Відповідь:  $S_{\text{пнк}} = 16328 \text{ см}^2$ ,  $V = 1500720 \text{ см}^3$ .

**Завдання 3.** (Достатній рівень). Проект (рис. 3.81) виконано здобувачем освіти в програмі TinkerCAD: «Об'ємні геометричні тіла, що зустрічаються в побуті».

Завдання: знайти площу повної поверхні будинку.



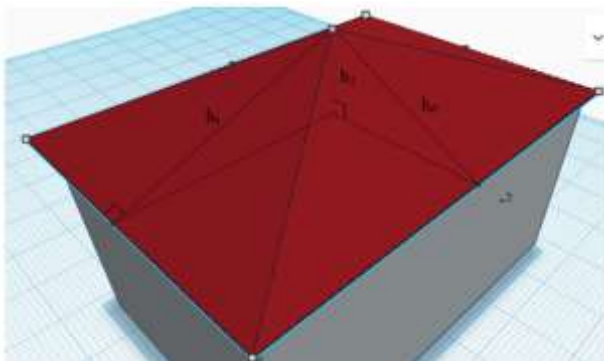
**Рис. 3.81. Проект будинку виконано здобувачем освіти в програмі TinkercAD**

Побудований будинок складається з прямокутного паралелепіпеда та прямої чотирикутної піраміди. Розміри побудованого будинку: довжина  $a = 40$  м, ширина  $b = 60$  м, висота стін до даху  $h_1 = 25$  м, розміри даху: довжина  $c = 42$  м, ширина  $d = 62$  м, висота  $h_2 = 5$  м.

Спочатку розрахуємо площу стін будинку:

$$S_{\text{стін}} = 2(a \cdot h_1 + b \cdot h_1) = 2(1000 \cdot 1500) = 5000 \text{ м}^2$$

Площу бічної поверхні піраміди розрахуємо як суму площ бічних граней. На рис. 3.82 подано позначення висот бічних граней піраміди.



**Рис. 3.82. Позначення висот бічних граней піраміди.**

Оскільки бічні грані – це рівнобедрені трикутники, то:

$$\begin{aligned} S_{\text{бп}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} ch_c + 2 \cdot \frac{1}{2} dh_d = ch_c + dh_d \\ &= c \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h_2^2} + d \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_2^2} = \end{aligned}$$

$$= 42 \cdot \sqrt{961 + 25} + 62 \cdot \sqrt{441 + 25} = 42 \cdot 31,4 + 62 \cdot 21,6 = 2658 \text{ м}^2$$

Тоді площа повної поверхні будинку обчислюється за поданими нижче формулами:

$$S_{\text{пн}} = S_{\text{стін}} + S_{\text{бп}} = 5000 + 2658 = 7658 \text{ м}^2$$

Відповідь:  $S_{\text{пн}} = 7658 \text{ м}^2$ .

**Завдання 4** (високий рівень складності). Здобувачам освіти було запропоновано розробити в програмі TinkerCAD «Зони відпочинку» (рис. 3.83) та «Спортивний майданчик». Відповідно до розроблених макетів, далі кожен «архітектор» отримав індивідуальні завдання для розрахунків кошторису спроектованих об'єктів. **Завдання:** розрахувати кількість коштів, що піде на облаштування майданчика.



**Рис. 3.83. Проект «Зона відпочинку» в програмі TinkerCAD.**

Наведемо приклади розрахунків для зони відпочинку. Для облагородження зони біля фонтану необхідна бруківка, ціна матеріалу 300 грн/м.кв., ціна укладки 150 грн/м.кв. Оскільки територія квадратна, з довжиною 5 м, то необхідно  $5 \cdot 5 \cdot (300 + 150) = 11250$  грн.

Для озеленення території потрібно насіння газонної трави. 1 кг насіння коштує 290 грн, витрати близько 4 кг на сотку. Оскільки земельна ділянка зони відпочинку складає 5 соток, то потрібно 20 кг насіння. Отже, вартість 5800 грн, робота коштує 2000 грн. В сумі упорядкування газону обійдеться в 7800 грн.

У табл. 3.15 подано перелік найменувань товарів для зони відпочинку, кількість необхідних одиниць, ціну і загальну вартість за кожним найменуванням.

Таблиця 3.15.

Таблиця кошторису

№	Назва	Кількість	Ціна, грн	Вартість
1	Велика набивна садова скульптура для саду Лев	1	20100	20100
2	Садовий фонтан "Перлина у малому басейні"	1	27 800	27800
3	Лавка садово-паркова	1	3220	3220
4	Пуф куб для саду	4	500	2000
5	Стіл для саду	1	1200	1200
6	Кінотеатр під відкритим небом	1	110 000	110000
7	Ліхтар вуличний	2	1800	3600
8	Смітник тротуарний бетонний	1	450	450
9	Саджанці дерев для саду	2	300	600
10	Саджанці пальм	3	400	1200
12	Кущові квіти для клумби	2	170	340
13	Газон			7800
14	Бруківка			11250
Всього				189560

Також варто додати ціни на монтаж фонтану – 47000 грн, монтаж лінії вуличного освітлення – 40000 грн, встановлення лавки – 500 грн, встановлення кінотеатру (з проведенням електрики) 6500 грн. Транспортні затрати не враховували, оскільки ціна залежить від місця розташування території.

Отже, для облаштування запропонованої зони відпочинку необхідно витратити  $189560 + 47000 + 40000 + 500 + 6500 = 283\ 560$  грн.

У табл. 3.16 подано приклади елементів для зони відпочинку з вказаною ціною продукції та джерелом відомостей.

**Завдання 5.:** Розрахувати кількість коштів, що піде на закупку матеріалів для спортивного майданчика, проєкт якого представлено на рис. 3.84.

Секція огорожі довжиною 2,5 м, оцинкована із зварної сітки, висотою 2,4 метри коштує 320 грн. Потрібно чотири секції, отже, 1280 грн. Баскетбольне кільце 1200 грн, футбольні ворота 1600. Спортивний комплекс (драбини і сітка для лазання) 13200 грн. Гумове спортивне покриття 1250 грн/м. кв., потрібно 40 м. кв, отже, 50000 грн. Ліхтар вуличний 1900 грн та лавка вулична 2500 грн.

Отже, ціна закупки матеріалів для такого спортивного майданчика  $1280 + 1200 + 1600 + 13200 + 50000 + 1900 + 2500 = 71680$  грн.

Приклади елементів для зони відпочинку із зазначеними цінами.



Велика набивна садова скульптура  
для саду: Лев  
Джерело:  
<https://cutt.ly/D3HLp8i>  
Ціна: 20100 грн



Садовий фонтан "Перлина у малому басейні"  
Джерело:  
<https://cutt.ly/x3HLWMD>  
Ціна: 27 800 грн



Лавка садово-паркова  
Джерело: <https://cutt.ly/w3HZeah>  
Ціна: 3220 грн



Пуф куб для саду  
Джерело: <https://cutt.ly/73HZYuf>  
Ціна: 500грн

**Контрольні питання і завдання**

1. Навести приклади тем геометрії при вивченні яких зручно застосовувати програму TinkerCAD. Дібрати завдання для одного з уроків. Визначити мету застосування засобу, роль і місце у ході уроку. Визначити переваги застосування на даному занятті програмного засобу навчання математики у порівнянні з традиційними засобами?

2. Які сучасні засоби доповненої реальності використовують у навчанні математики?

3. Описати види завдань, для розв'язування яких можна використувати програму TinkerCAD.

4. Проаналізувати, які з STEM-компетентностей можна розвивати у здобувачів освіти, якщо використовувати у навчанні математики додаток AR Geogebra?



**Рис. 3.84. Проект «Спортивний майданчик» виконано в програмі TinkerCAD**

### **3.22. У світі фракталів**

**Назва теми:** Перетворення фігур у просторі.

**Вікова категорія:** 15-17 років; геометрія, 10 клас, 1-2 курс фахового коледжу.

**Навчальні предмети:** геометрія, технології, мистецтво, фізика, хімія, біологія, економіка.

**Актуальність та мета:** здобувачі освіти мають встановити, які види фракталів існують та здійснювати пошук фракталів в оточуючому світі: у побуті, архітектурі, мистецтві, живій природі тощо; розуміти властивості, напрями використання. Вони мають встановити, що таке фрактал, які бувають фрактали, де знаходять застосування? Цікавим для учасників навчального процесу буде вивчення тематики фракталів на уроках геометрії чи в позаурочний час – під час гурткової роботи з математики. Тематика проєкту/кейс-уроку «Подорож до країни фракталів» дозволить інтегрувати геометрію, інформатику, мистецтво та фізику.

**Обладнання:** система динамічної математики GeoGebra, програмне забезпечення для генерації фракталів; креслярські інструменти, пласти-



лін; фотокамери, 3D-принтер та ін. **Термін виконання:** 2 тижні.

**Умови проведення:** учасники навчального процесу формуються у малі групи по 2-3 особи. За бажанням можна здійснювати індивідуальну проєктну діяльність. Кожна група обирає для проєктної діяльності одну із тем (табл. 3.17).

Таблиця 3.17.

### Перелік навчальних предметів та питань

Математика	Поняття фракталів, види фракталів, зв'язок з симетрією
Біологія	Фрактали в живій та неживій природі
Фізика	Аналіз фізичної системи на основі наявних даних про симетрії, якими ця система володіє, фрактали в структурі мінералів
Архітектура	Архітектурні споруди, створені людиною, що мають фрактальну будову
Мистецтво	Фрактали в побудові картин, орнаментів, музика і фрактали
Інформатика	Програмування фракталів та використання

**Прогнозований результат:** практичним результатом втілення проєкту можуть стати колекції добірок фракталів, власні зарисовки / вироби, що містять фрактали (рис. 3.84), розробки фрагментів програм з друкуванням зображень фракталів на папері чи за допомогою 3D-принтера; розробка зображення у вигляді фракталів для ялинкових прикрас тощо.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Фрактал (лат. fractus — подрібнений, дробовий) – нерегулярна, самоподібна структура. В широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої. Розрізняють алгебраїчні, геометричні та стохастичні фрактали. Термін «фрактал» увів 1975 року Бенуа Мандельброт. Для фракталу збільшення масштабу не веде до спрощення структури, тобто на всіх шкалах можна побачити однаково складну картину. Фрактал є самоподібним або приблизно самоподібним. Багато об'єктів в природі мають властивості фракталу, наприклад: узбережжя, хмари, крони дерев, сніжинки, кровеносна система, система альвеол людини або тварин. Економісти за допомогою фракталів описують курси валют.

Якщо цей проєкт є груповим, то одному з учасників навчального процесу можна запропонувати дослідити історію виникнення фракталів, іншому – особливості ліній, третьому – підібрати палітру до зображень, четвертий може проаналізувати, де саме використовують фрактали.

Серед найбільш відомих фракталів виокремлюють сніжинку Коха та килимок Серпінського (рис. 3.85).

Про решітку Серпінського можна говорити вже у восьмому класі під час вивчення матеріалу про подібність трикутників. Автори підручника геометрії [112, с. 88] у задачі №425 рекомендують розглянути малюнок, на якому зображено послідовну побудову трикутника (решітки) Серпінсь-



кого. Учням радять подумати та встановити алгоритм побудови такого трикутника, самостійно намалювати трикутник з найбільшою кількістю «отворів». Скільки синіх трикутників утворюється на кожному етапі? Потрібно довести, що всі сині трикутники подібні між собою.



**Фрактальна графіка**



**Ящірки**



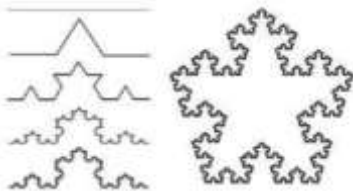
**Комп'ютерна графіка**



**Фрактали в архітектурі**



**Фрактали в природі**



**Сніжинка Коха**



**Килимок Серпінського**

**Рис. 3.85. Приклади фракталів**

Роль фракталів у комп'ютерній графіці сьогодні дуже велика. З їх допомогою можна намалювати лінії й фігури дуже складної форми. Фрактальна геометрія у комп'ютерній графіці незамінна, коли потрібно створити гори, штучні хмари, поверхню моря тощо.

Програми фрактальної графіки автоматично генерують зображення (візерунки) шляхом математичних розрахунків. Для генерації фрактальних зображень використовують різні програмні засоби. Зокрема Art Dabbler, Ultra Fractal, Fractal Explorer, ChaosPro, Apophysis, Mystica.

У фізиці фрактали природним чином виникають при моделюванні нелінійних процесів, таких, як турбулентний плин рідини, складні процеси дифузії-адсорбції, полум'я, хмари тощо. Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. У біології вони застосовуються для моделювання популяцій і для опису

систем внутрішніх органів (система кровоносних судин).

Після створення кривої Коха було запропоновано використовувати її при обчисленні довжини берегової лінії.

З фракталами здобувачі освіти можуть ознайомитися також на факультативі чи при вивченні вибіркової дисципліни «Комп'ютерна математика».

### ***Контрольні питання і завдання***

1. Навести приклади тем математики при вивченні яких доцільно впроваджувати проєкт «Фрактали».

2. Які сучасні засоби доповненої реальності використовують у навчанні математики?

3. Як можна застосувати систему динамічної математики Geogebra для створення фракталів?

4. Проаналізувати, які з STEM-компетентностей можна розвивати в здобувачів освіти, якщо реалізувати у навчанні проєкт «Фрактали»?

### **3.23. Математика та робототехніка.**

**Назви тем.** Тема визначається завданням з робототехніки. Найчастіше це теми з геометрії «Коло, круг та їх частини», «Чотирикутники», «Теорема Піфагора», «Многокутники» та ін.; з алгебри, алгебри та початків аналізу – змістова лінія функції, відношення та пропорції та ін.

**Вікова категорія:** 12-17 років.

**Навчальні предмети:** геометрія, алгебра, технології (інформатика, трудове навчання, креслення, технічна творчість).

**Актуальність та мета:** Прогресивним напрямом розвитку математичної освіти учнів 10-11 класів є впровадження освітньої робототехніки. Унікальність освітньої робототехніки полягає у можливості об'єднати конструювання та програмування в одному курсі, що сприяє інтегруванню викладання інформатики, математики, фізики, креслення та природничих наук, а також розвитку інженерного мислення школярів через технічну творчість. Це є потужним інструментом синтезу знань, що складають основу сучасної STEM-технології. Саме робототехніка є одним із напрямів розвитку STEM-освіти. Характерна реалізація міжпредметних зв'язків фізико-математичного циклу за допомогою робототехніки.

**Обладнання:** програмне забезпечення LegoMindstorms EV3 (комплект робототехніки III-го покоління в лінії MindstormsLego) та ін.

**Термін виконання:** не визначено термін – як в ході заняття, так і впродовж кількох днів самостійного опрацювання з консультуванням.

**Умови проведення:** здобувачі освіти працюють в групах чи індивідуально, складають з конструктора за схемою робота, записують програму для виконання роботом певних дій, досліджують їх правильність.

**Прогнозований результат:** складений з конструктора робот, написана програма для виконання роботом певних дій, протестоване вико-

нання роботом запланованих дій.

### **Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

Уроки робототехніки передбачають командну роботу, де, зазвичай, працюють у парах: збирають робота, пишуть програму. Робота в парах дає змогу ретельніше продумати проблему, обмінятися ідеями з партнером і лише потім втілити їх в життя. Командна робота сприяє розвитку навичок спілкування, вміння висловлюватись, критичного мислення, вміння переконувати й вести дискусію. Ця форма роботи дозволяє набутти навичок співробітництва, оволодіти вміннями висловлюватися та активно слухати. Дані навички дуже необхідні в сучасному житті. Під час уроку з робототехніки учні практично застосовують теоретичні знання, отримують можливість застосувати шкільні знання з математики на практиці і краще розуміють значення відсотків, тригонометричних функцій тощо. Теоретичні обчислення з численними припущеннями і наближеннями суттєво відрізняються від того, що відбувається в реальності. Йдеться про обґрунтовані шляхи щодо необхідності проведення експерименту в навчальному закладі – своєрідного фундаменту будь-якого науковця та інженера.

Програмування робота допомагає візуалізувати закони математики в навколишньому світі, організувати міжпредметні зв'язки інформатики з предметами природничо-математичного циклу та ін. Наприклад, у програмному забезпеченні LegoMindstorms EV3 (це комплект робототехніки третього покоління в лінії MindstormsLego) є цілий блок присвячений математиці. Він називається «Операції з даними». І до його використання потрібно відповідно готувати учителів. Даний блок включає в себе такі підрозділи: змінна, константа, операції над масивом, логічні операції, математика, округлення, порівняння, діапазон (інтервал), текст, випадкове значення. При побудові робота використовується симетрія. Побудувавши один елемент робота, швидко створюють йому симетричний. Тому доцільно провести дослідження по визначенню осі симетрії у робота та її ролі в підтримці балансу. Перевага такої роботи полягає в тому, що учень знаходиться не в віртуальному просторі, а може відчувати і бачити математичне перетворення, якому навчається.

Впровадження робототехніки на уроках математики в старшій школі чи у фаховому коледжі дозволяє вирішувати такі важливі завдання, як:

- 1) створення дієвого освітнього середовища, заснованого на інженерній спрямованості;
- 2) забезпечення рівного доступу здобувачів освіти до освоєння передових технологій, здобуття практичних навичок;
- 3) залучення здобувачів освіти до науково-технічної творчості, формування потреб технічної творчості в учнів, профорієнтацію;
- 4) створення творчої спільноти захоплених робототехнікою учасників навчального процесу;
- 5) виявлення, навчання, супровід обдарованої молоді, забезпечення

відповідних умов для їх утворення та творчого розвитку;

6) організацію високо мотивованої навчальної діяльності здобувачів освіти з просторового конструювання і моделювання;

7) підвищення мотивації до вивчення наук природничого циклу: математики, фізики, інформатики;

8) створення системи міжпредметної взаємодії та міжпредметних зв'язків інформатики, технології, математики та фізики;

9) пропедевтику інженерної освіти зі шкільного віку;

10) соціалізацію здобувачів освіти у вигляді проведення змагань з освітньої робототехніки.

Особливість поєднання занять математики із заняттями з робототехніки полягає у важливості командної роботи, яка потребує роботи учасників навчального процесу у парах: під час складання алгоритму, в ході написання програми. Робота в парах допомагає глибше і якісніше продумати проблему, обмінятися різними ідеями між учасниками групи та ефективно потім втілити їх у життя. Крім того, командна робота направлена на розвиток навичок спілкування, критичного мислення, вміння переконливо обґрунтовувати власну думку в процесі дискусії. Така форма роботи дозволяє здобувачам освіти набути навичок співробітництва, оволодіти вміннями конструктивно висловлюватися і слухати.

У ході уроку математики з елементами робототехніки здобувачі освіти отримують можливість застосувати знання з математики на практиці і краще усвідомити окремі теми (пропорції, відсотки, тригонометричні функції тощо). Окреме місце в навчальному процесі посідають обчислення з численними припущеннями і наближеннями, які суттєво відрізняються від того, що відбувається в реальності. Тому важливим завданням стає застосування програмування як засобу розв'язування математичних задач.

Програмування робота допомагає здобувачам освіти візуально осмислити закони математики та практично їх застосувати на практиці.

Так, програмне забезпечення LegoMindstorms EV3 (комплект робототехніки III-го покоління в лінії MindstormsLego) містить цілий блок, що присвячений математиці і називається «Операції з даними». Зокрема, цей блок включає в себе наступні підрозділи: змінна, константа, операції над масивом, логічні операції, математика, округлення, порівняння, діапазон (інтервал), текст, випадкове значення. Тому використання даного програмного забезпечення як на уроках математики в 10-11 класах, так і під час практичних занять зі студентами 1-2 курсів фахових коледжів може стати надзвичайно важливим.

Одним із варіантів використання основ робототехніки у шкільному курсі математики є **розв'язування задач на розрахунок траєкторії руху робота**. Залежно від набутого рівня знань здобувачів освіти при розв'язуванні таких задач можуть бути корисними знання про властивості пропорції, формули довжини кола, швидкості руху і тригонометрич-

ні формули.

При вивченні теми «Коло» можна використовувати такі задачі:

**Задача 1.** Знайдіть відстань, яку проїде робот, якщо його колесо зробить 2 обороти.

**Задача 2.** Знайдіть кількість градусів (оборотів), необхідних для того, щоб робот проїхав 90 см.

**Задача 3.** Який діаметр повинно мати колесо робота, щоб він за 4 обороти проїхав 80 см?

**Задача 4.** Потрібно визначити значення  $q$ , що обчислюється за формулою  $q = S/d$ , за таких умов: один оберт колеса робота дорівнює  $360^\circ$ ; за один оборот робот проїжджає відстань, що дорівнює довжині кола. Скласти програму для руху робота (колесо повертається на  $360^\circ$  або 1 оборот). Виміряти відстань, яку проходить робот ( $S$ ) та діаметр колеса ( $d$ ). Зробити висновок. Якщо є можливість, доцільно провести ще один експеримент, використовуючи колеса з іншим діаметром.

Виходячи зі змісту запропонованих задач, вони вже є цілком доступними для учнів п'ятого-шостого класу.

При вивченні **формул руху** можна запропонувати наступні задачі:

**Задача 1.** Визначити швидкість руху  $V$  робота та середню швидкість  $V_{\text{ср}}$  руху робота. Скласти програму для руху робота за час 1, 3, 5, 20, 50 с. Визначити відстань, яку проїде робот за вказаний час. Результати дослідження записати до таблиці.

**Задача 2.** Скласти програму для руху робота впродовж 10 с. Виміряти відстань, яку проїде робот за цей час. Розрахувати, який шлях проїде робот за 5 с? Правильність отриманих обчислень та результатів перевірити експериментально.

**Задача 3.** Запрограмувати рух робота так, щоб він проїхав 30 см. Скласти програму для руху робота на один оберт колеса на  $360^\circ$ . Визначити відстань, яку проїде робот. Розрахувати, яку відстань робот проїде, якщо колесо обернеться на 5 градусів. Розрахувати, на скільки градусів мають обернутися колеса, щоб робот проїхав 50 см.

**Задача 4.** За умовою задачі відомо, що при повороті вправо роботу необхідно зафіксувати праве колесо, а ліве колесо повинне здійснювати рух уперед. Для того, щоб робот повернув праворуч на  $90^\circ$ , необхідно, щоб ліве колесо робота зробило один повний оберт (оборот на  $360^\circ$ ). На скільки градусів має повернутися вал лівого двигуна, щоб робот повернувся праворуч на кут  $45^\circ$ ,  $120^\circ$  та  $180^\circ$ ? Написати програми повороту робота на вказані кути і провести експериментальну перевірку.

Доречно задати завдання: розрахувати, на скільки градусів повинні повернутися колеса для переміщення робота вперед на задану відстань. З'ясувавши, яку відстань робот проїде при повороті коліс на  $360^\circ$ , отримують відповідь для всієї заданої відстані. А після цього наочно перевіряють її. Також можна запропонувати позмагатися, давши спробу для переміщення роботів на задану відстань: хто виявиться ближче до фіні-

шної смуги, той переможе. Можна запропонувати й інші завдання з програмування робота, використовуючи математичні знання. Наприклад, задати таку швидкість мотору, щоб робот об'їхав перешкоду по колу. Для виконання цього завдання необхідно спочатку виміряти відстань між центрами коліс, адже у кожного робота вона різна. Так колеса при повороті пройдуть різну відстань.

Розв'язання окремих із наведених задач ми представили у статті «Проблеми підготовки учителя до впровадження елементів STEM-навчання математики» [67].

Під час уроку з робототехніки учні практично застосовують теоретичні знання, отримують можливість застосувати шкільні знання з математики на практиці і краще розуміють значення відсотків, тригонометричних функцій тощо. Теоретичні обчислення з численними припущеннями і округленнями суттєво відрізняються від того, що відбувається в реальності. Йдеться про обґрунтовані шляхи щодо необхідності проведення експерименту в навчальному закладі – своєрідного фундаменту становлення майбутнього науковця та інженера.

Наприклад, можна запропонувати учням таке завдання: розрахувати число обертів колеса, необхідне для переміщення робота вперед на 88 см. Для розв'язування даного завдання учень спочатку повинен розрахувати, скільки пройде робот за один оберт колеса, скориставшись формулою довжини кола  $C = \pi d$ , де  $d$  – діаметр кола. Вимірявши діаметр кола, тобто колеса, отримуємо 56 мм. Отже, за один оберт робот пройде 176 мм, а 88 см – за 5 обертів.

Доречно буде здобувачам освіти задати подібне завдання: розрахувати на скільки градусів повинні повернутися колеса для переміщення робота вперед на 88 см. З'ясувавши, що при повороті коліс на  $360^\circ$  робот пройде 176 мм і наочно це перевіривши, учні отримають підтвердження теоретичних міркувань і розрахунків. Також здобувачам освіти можна запропонувати позмагатися, давши їм одну спробу для переміщення своїх роботів на задану відстань. Хто виявиться ближче всіх до фінішної смуги, той переможе.

Можна, використовуючи математичні знання, придумати низку завдань з програмування робота. Наприклад, задати таку швидкість мотору, щоб робот об'їхав перешкоду по колу. Для виконання цього завдання необхідно спочатку виміряти відстань між центрами коліс, адже у кожного робота вона різна.

Нехай відстань від перешкоди до першого колеса дорівнює  $R_1$ , а відстань між центрами коліс  $R_2$ . За один і той же час колеса пройдуть різну відстань з різною швидкістю, ліве колесо буде рухатися з радіусом  $R_1$ , а праве – з радіусом  $(R_1 + R_2)$ . Нехай довжина кола по якому буде рухатися ліве колесо  $C_1$ , а довжина кола, по якому буде рухатися праве колесо  $C_2$ , тоді отримаємо:  $C_1 = 2\pi R_1$ ,  $C_2 = 2\pi(R_1 + R_2)$ .

Позначимо за  $V_1$  і  $V_2$  швидкості моторів правого і лівого коліс відповідно, виразимо час через швидкості правого і лівого моторів, отримаємо:

$$t = \frac{2\pi R_1}{V_1}; t = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{V_2}.$$

Оскільки час однаковий, прирівняємо праві частини рівностей і виразимо відношення  $V_2$  до  $V_1$ :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

Заняття з робототехніки допомагають вирішенню прикладних завдань, надихають молодь до новаторства в сфері науки, технології, математики, заохочують думати творчо, аналізувати ситуацію, критично мислити, застосовувати свої навички для вирішення проблем реального світу. У ході інтегрованих занять з математики та робототехніки здобувачі освіти не лише отримують теоретичні знання, але й практичні навички роботи з робототехнікою, оскільки використовують її як інтерактивний компонент, за допомогою якого набуті теоретичні знання закріплюються на практиці.

Програмування може здійснюватися графічною мовою LabView, яка йде разом із конструктором LegoMindstorms, що допомагає наочно демонструвати алгоритм роботи програми. Використання елементів робототехніки під час навчання математики з елементами програмування сприяє підвищенню мотивації здобувачів освіти до математичної науки та більш глибокому розумінню принципів дії алгоритмічних конструкцій.

Основними методами розв'язування математичних задач під час інтегрованих занять з математики і робототехніки є метод проєктів і метод дослідження. При цьому завдання може ставити як вчитель/викладач, так і самі здобувачі освіти. Учні/студенти розв'язують їх через реалізацію групової роботи; самостійного розроблення механізму (конструювання); написання програми (програмування); багаторазового тестування програми з метою усунення помилок (налагодження) та відповідного доопрацювання конструкції (модернізація).

Для підготовки здобувачів освіти до розв'язування математичних задач з елементами робототехніки доцільно розглянути наступні задачі.

### **Задача №1 (тема «Функції, властивості та графіки»)**

Під час виконання завдання робот повинен зчитати чорно-білий штрих-код. Лінії штрих-коду можуть бути різної ширини. Чорні лінії на штрих-коді чергуються з білими.

Дослідники вирішили використати два датчики освітленості. Під час калібрування на полігоні датчики показали значення, подані у таблиці (табл. 3.18).

Під час випробування робот отримав дані з датчиків, представлені у таблиці 3.19.

Таблиця 3.18

**Значення датчиків під час калібрування на полігоні**

Найменування	На білому	На чорному
Показники 1-го датчика	91	6
Показники 2-го датчика	94	8

Таблиця 3.19.

**Дані з датчиків, отримані під час випробування робота**

Найменування	1	2	3	4	5	6	7	8
Показники 1-го датчика	86	67	50	35	21	46	77	55
Показники 2-го датчика	89	70	55	39	27	49	82	59
	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>
Показники 1-го датчика	31	11	29	51	78	63	47	31
Показники 2-го датчика	35	14	33	55	81	59	49	34
	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
Показники 1-го датчика	44	57	72	54	34	12	27	45
Показники 2-го датчика	48	61	75	58	37	16	31	49
	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>31</b>	<b>32</b>
Показники 1-го датчика	61	55	42	23	39	51	69	85
Показники 2-го датчика	65	54	46	29	42	55	73	89

Зчитування показників датчиків відбувалось через кожні 0,5 с. Для кожного з датчиків в якості порогового значення було взято середнє арифметичне між показниками на чорному та на білому.

**Завдання** - визначте, скільки всього чорних смужок було на штрих-кодi. У відповідi вкажіть ціле число.

**Розв'язання:**

Визначимо границю сірого для кожного для датчиків: для першого датчика  $(91 + 6)/2 = 48,5$ ; для другого –  $(94 + 8)/2 = 51$ .

Встановимо, в яких вимірах показники датчиків будуть нижче границі сірого. Визначимо, скільки разів датчики переходять із білого (показники вище границі сірого) у чорний (показники нижчі границі сірого).

Отже, як видно, це відбувалося 5 разів, а це значить, що робот проїхав на штрих-кодi 5 чорних смуг.

**Відповідь:** робот проїхав на штрих-кодi 5 чорних смуг.



### Задача № 2 (Тема «Многокутники», «Правильні многокутники»).

Тема «Многокутники» за навчальною програмою з математики вивчається у восьмому класі. Тому подані нижче задачі доцільно пропонувати учням, починаючи з 8-го класу. Якщо ж учні працюватимуть у різновікових групах, то з розв'язуванням таких та подібних задач можуть справлятися і молодші школярі.

Робот-кресляр рухається по рівній горизонтальній поверхні та наносить на неї зображення (рис. 3.86) за допомогою пензля, який закріплений посередині між колесами. Траєкторія є ламаною лінією  $IJKLMNOP$ , яка включає відрізки, що є сторонами правильного восьмикутника  $ABCDEFGH$  і правильного шестикутника  $FEIJKL$ , а також відрізка  $GL$ . Сторона многокутника рівна 3 м.

Робот оснащений двома окремо керованими колесами, відстань між центрами коліс становить 30 см, діаметр колеса робота – 8 см. Усі повороти робот повинен здійснювати на місці, обертаючи колеса з однаковою швидкістю у протилежних напрямках. Через кріплення пензля робот не може їхати назад.

1) Визначте, на який мінімальний сумарний кут повинен повернутися робот, щоб накреслити цю фігуру. Відповідь надайте в градусах, за необхідності округливши результат до цілих.

2) Як зміниться результат, якщо робот розпочне рух з точки  $E$ ?

3) Чи може робот побудувати всі сторони многокутників і при цьому не проходити жодну з його сторін двічі?

4) Чи залежить мінімальний сумарний кут поворотів робота від величини відстані між центрами його коліс та діаметра колеса?

5) Як зміниться траєкторія руху робота та сумарний кут повороту, якщо шестикутник буде лежати в середині восьмикутника (рис. 3.87 а))?

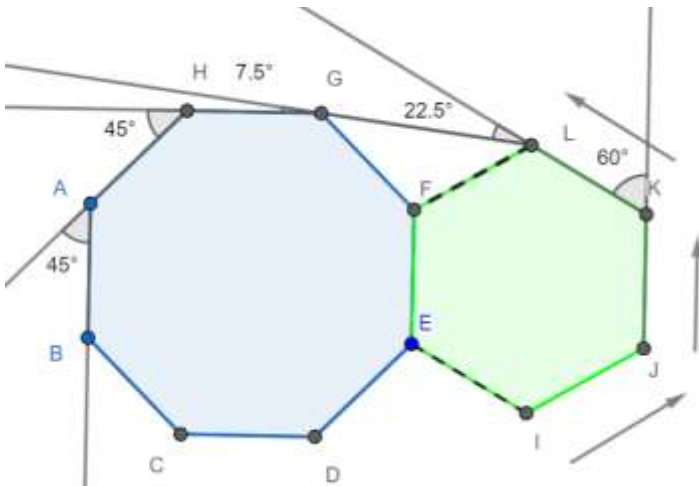


Рис. 3.86. Траєкторія руху робота.

### Розв'язання:

Кут правильного восьмикутника дорівнює:

$$(8 - 2) \times 180^\circ : 8 = 135^\circ.$$

Кут повороту при проїзді по одному куту восьмикутника дорівнює:

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \text{ (рис. 3.86).}$$

Робот зробить 7 обертів по восьмикутнику:

$$7 \times 45^\circ = 315^\circ.$$

Кут правильного шестикутника дорівнює:

$$(6 - 2) \times 180^\circ : 6 = 120^\circ.$$

Кут повороту при проїзді по одному куту шестикутника дорівнює:

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Робот зробить 2 повороти при проїзді через вершини К і J:

$$2 \times 60^\circ = 120^\circ.$$

Знайдемо кут  $GHI$ :

$$\angle GFL = 360^\circ - (135^\circ + 120^\circ) = 105^\circ.$$

Обчислимо величини рівних гострих кутів при основі рівнобедреного трикутника  $GFL$ :

$$\angle FGL = \angle GLF = 0,5 \times (180^\circ - 105^\circ) = 37,5^\circ.$$

Знайдемо величини двох кутів з вершинами в точках G та L. Для цього спочатку обчислимо величини двох допоміжних кутів:

$$\angle LGH = 135^\circ + 37,5^\circ = 172,5^\circ$$

$$\angle GLK = 120^\circ + 37,5^\circ = 157,5^\circ$$

Використовуючи теорему про властивості суміжних кутів, визначимо кути повороту в вершинах G та L:

$$180^\circ - \angle LGH = 180^\circ - 172,5^\circ = 7,5^\circ,$$

$$180^\circ - \angle GLK = 180^\circ - 157,5^\circ = 22,5^\circ.$$

Таким чином, сумарний кут повороту буде дорівнювати:

$$315^\circ + 120^\circ + 22,5^\circ + 7,5^\circ = 465^\circ.$$

**Відповідь:** робот має повернутися на мінімальний сумарний кут  $465^\circ$ .

**Для самостійного розв'язування** розглянути випадки розташування правильних шестикутника та квадрата. Вписати ланцюжки кутів, на які має здійснювати поворот робот, обходячи багатокутники (рис.3.87 б, в)).

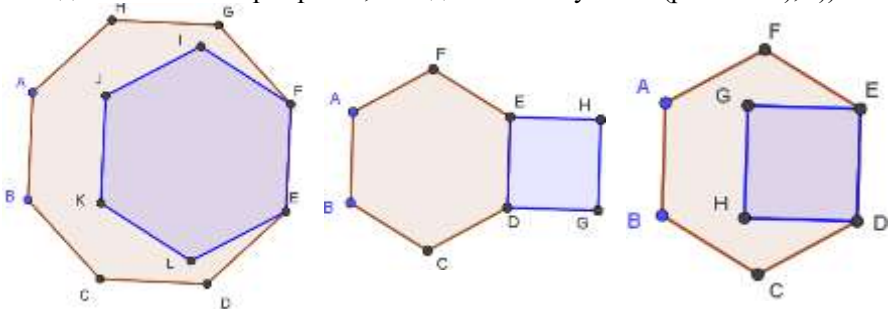


Рис. 3.87. Рисунки для визначення траєкторій руху робота і кутів повороту.



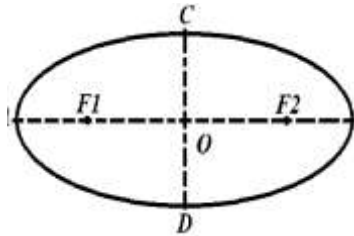
**Рис. 3.88. Студенти фізико-математичного факультету КДПУ беруть участь в районному освітньому хабі з робототехніки у STEM-центрі Криворізької гімназії №72.**

**Задача № 3** (Тема «Функції, їх властивості та графіки»).

Роботи змагаються в гонках по лінії. Траса має вигляд еліпса (рис. 3.89). За регламентом роботи мають стартувати в точці  $C$ , проїхати всю трасу 3 рази, після чого доїхати до точки  $D$  та фінішувати в ній.

Відомо, що  $F_1F_2 = 2\sqrt{2}$  м, коефіцієнт стиснення еліпса дорівнює 1.

Визначте довжину шляху, який має подолати робот трасою. При розрахунках взяти  $\pi \approx 3,14$ . Відповідь надати в сантиметрах, округливши результат до цілих. У відповіді записати тільки число.



**Рис.3.89.** Схема руху роботів

**Розв'язання:**

Визначимо параметри еліпса – довжини півосей:

$$c = \frac{F_1F_2}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ (м)}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - k^2}$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1,5 \text{ (м)}$$

$$b = a \times k = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = 0,5 \text{ (м)}$$

Обчислимо довжину шляху, який проїхав робот:

$$L = 4 \times \frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b} = 4 \times \frac{\pi \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + (1,5 - 0,5)^2}{1,5 + 0,5} = 1,5\pi + 2.$$

Тепер знайдемо шлях, який проїхав робот по трасі:

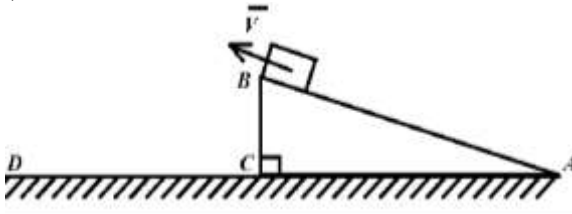
$$S = 3,5 \times (1,5\pi + 2) = 3,5 \times 1,5 \times \pi + 7 = 5,25\pi + 7 = 23,485 \text{ (м)},$$

$$23,485 \text{ м} \approx 2349 \text{ см}$$

**Відповідь:** шлях, який проїхав робот по трасі, дорівнює 2349 см.

**Задача №4** (Тема «Тригонометричні функції»)

Робот підіймається по похилій площині та «стрибає» з неї з верхньої точки (рис.3.90).



**Рис.3.90.** Схема похилої площини

Швидкість робота в момент відриву від похилої площини дорівнює

5 дм/с. Кут нахилу площини до горизонту  $\angle BAC = 30^\circ$ , довжина основи похилої площини  $CA = 2\sqrt{3}$  м. Треба визначити, на якій відстані від похилої площини приземлиться робот ( $CD=?$ ). Опір повітря не враховувати. Маса робота дорівнює 1,5 кг. Прискорення вільного падіння можна взяти за  $10 \text{ м/с}^2$ . Відповідь надати у сантиметрах, за потреби округливши результат до цілих.

Експериментально визначити, під яким найбільшим кутом нахилу даний робот піднімається на похилу площину?

#### Розв'язання:

Визначимо висоту, з якої робот буде «стрибати»:

$$BC = (2\sqrt{3} \cdot tg(30^\circ) = 2 \text{ (м)}.$$

Введемо систему координат. В якості початку координат виберемо точку  $C$ . Вісь  $OX$  направимо вздовж  $CD$ , от  $C$  до  $D$ . Вісь  $OY$  направимо вертикально вгору.

Запишемо рівняння руху робота вздовж осі  $OY$  після відриву від похилої площини:

$$Y(t) = 2 + 0,5 \sin(30^\circ) t - \frac{10}{2} t^2$$

Тепер обчислимо, через скільки секунд після відриву робота від похилої площини він торкнеться підлоги:

$$Y(t) = 2 + 0,5 \sin(30^\circ) t - \frac{10}{2} t^2 = 0,$$

$$10t^2 - 0,5t - 4 = 0,$$

$$D = \frac{1}{4} + 160 = \frac{641}{4}.$$

$$\text{Маємо: } t_1 = \frac{0,5 - 0,5\sqrt{641}}{20} < 0, t_2 = \frac{0,5 + 0,5\sqrt{641}}{20} \approx 0,6579 \text{ с.}$$

Запишемо рівняння руху робота вздовж осі  $OX$  після відриву від похилої площини:

$$X(t) = 0 + 0,5t \cos(30^\circ) + 0.$$

Визначимо, на якій відстані від похилої площини робот буде знаходитись після приземлення:

$$X(t_2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 + \sqrt{641}}{40} \approx 0,2849 \text{ (м)} \approx 28 \text{ см}$$

**Відповідь:** робот приземлиться на відстані 28 см. від площини.

#### Задача № 5 (тема - Функції, їх властивості та графіки)

Робота с вимкненими двигунами та зафіксованими колесами поставили на похилій площині в точку  $D$  (рис.3.91).

Робот з нульовою початковою швидкістю починає зісковзувати по похилій поверхні з постійним прискоренням. Кут нахилу площини до горизонту  $\angle EAD = 30^\circ$ . Коефіцієнт тертя ковзання коліс робота по поверхні похилої площини дорівнює 0,1. Прискорення вільного падіння можна взяти за  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Визначити, якою буде швидкість у робота, коли він досягне точки

$B$ , якщо  $EC = 3\sqrt{3}$  мм. Відповідь дати в метрах за секунду, округливши результат до цілих.

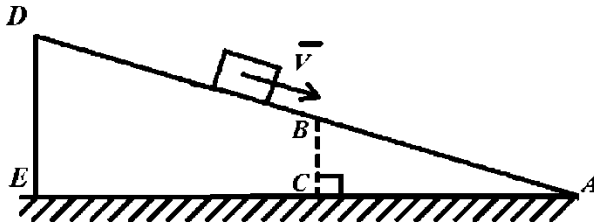


Рис.3.91. Схема похилої площини для руху робота

### Розв'язання:

Запишемо рівняння руху робота:

$$\overline{F_{\text{тр}}} + m \overline{g} + \overline{N} = m \overline{a}.$$

Зробимо дві проєкції цього рівняння на дві вісі. Вісь  $OX$  направимо з точки  $B$  вздовж поверхні похилої площини вниз, до точки  $A$ . Вісь  $OY$  направимо перпендикулярно до похилої площини вгору з точки  $B$ .

$$\text{На вісь } OX: -F_{\text{мп}} + mg \sin(30^\circ) + 0 = ma \quad (1)$$

$$\text{На вісь } OY: 0 - mg \cos(30^\circ) + N = 0. \quad (2)$$

$$\text{З рівняння (2) отримаємо } N = mg \cos(30^\circ) \quad (2')$$

Силу тертя сковзання можна визначити зі співвідношення

$$F_{\text{мп}} = \mu N = \mu mg \cos(30^\circ) \quad (3')$$

Підставимо (3') в (1) і отримаємо:

$$- \mu mg \cos(30^\circ) + mg \sin(30^\circ) + F = ma,$$

$$a = \frac{F}{m} - g(\sin(30^\circ) - \mu \cos(30^\circ)) = \frac{F}{m} - g\left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{20}\right) \quad (3'')$$

Швидкість робота можна розрахувати наступним чином:

$$V(t) = V_0 + at = 0 + at = at \quad (4)$$

Спочатку треба визначити момент часу, в який робот дістанеться точки  $B$ . Розрахуємо шлях, яку робот пройшов від точки  $D$  до точки  $B$ :

$$L = DB = \frac{EC}{\cos(30^\circ)} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = 6 \text{ (м)}$$

Пройдений шлях робота можна розрахувати за формулою:

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} = 0 + 0 + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2} \quad (5)$$

З (5) визначимо момент часу, коли робот досягне точки  $B$ :

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}}. \text{ Звідси шукана швидкість буде дорівнювати:}$$

$$V_B = at = a \times \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{2La}$$

Або:

$$V_B = \sqrt{2 \times 2 \times 9,8 \times \frac{10 - \sqrt{3}}{20}} \approx 7 \text{ м/с}$$

**Відповідь:** швидкість у робота, коли він досягне точки  $B$ , буде дорівнювати  $7 \text{ м/с}$ .



**Рис. 3.92.** Викладачі КДПУ під час курсів підвищення кваліфікації з проблем використання міжпредметних зв'язків у навчанні STEM-дисциплін (тренер і автор програми – канд. пед. наук, доцент Н. А. Хараджян).

### Задача № 6 (Тема «Функції, їх властивості та графіки»)

Робот, оснащений двома окремими колесами, радіус кожного з коліс дорівнює 6 см. Лівим колесом управляє мотор  $A$ , правим - мотор  $B$ . Колеса напрямку приєднані до моторів.

Робот під'їжджає до перехрестя та повертається на місці. Відомо, що вісь мотора  $A$  повернулася на  $540^\circ$ , а вісь мотора  $B$  повернулася на  $-540^\circ$ . Відстань між центрами коліс робота дорівнює 15 см. Маса робота - 1 кг. При розрахунках доцільно взяти  $\pi \approx 3,14$ .

Треба визначити градусну міру кута, на який повернувся робот. Відповідь надати в градусах, за необхідності округливши дані до цілих.

#### Розв'язання:

Визначимо спочатку кількість обертів, яку зробило кожне з коліс робота за час повороту:

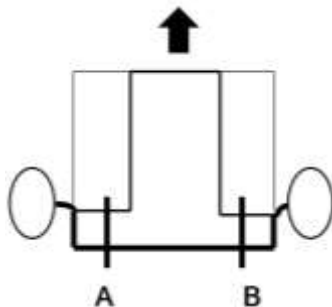
$$540^\circ : \frac{360^\circ}{1 \text{ об}} = 1,5 \text{ (об)}.$$

Визначимо, чому дорівнює довжина дуги, по якій проїхав робот:  
 $1,5 \times 2 \times \pi \times 6 = 18\pi \text{ (см)}$ .

Тепер розрахуємо градусну міру дуги, по якій повертався робот:

$$\frac{18\pi}{\pi 15} 360^\circ = \frac{6}{5} 360^\circ = 432^\circ.$$

**Відповідь:** градусна міра кута, на який повернувся робот, дорівнює  $432^\circ$ .



**Рис.3.93.** Схема робота

### Задача №7 (Тема «Тригонометричні функції»)

Робот-кресляр рухається по рівній горизонтальній поверхні і наносить на неї зображення (рис.3.94) за допомогою пензля, закріпленого в центрі колісної бази.

Дане зображення (чотирипроменева зірка) складено з двох рівних ромбів, один з яких повернутий відносно іншого на  $90^\circ$  навколо точки перетину діагоналей. Вершини А, В, С і D лежать на колі, радіус якого дорівнює 2 м. Гострі кути ромбів дорівнюють  $60^\circ$ .

Треба визначити довжину траєкторії. При розрахунках прийміть  $\pi \approx 3,14$ . Відповідь надати в дециметрах, округливши результат до цілих. Наведіть детальне розв'язання цієї задачі.

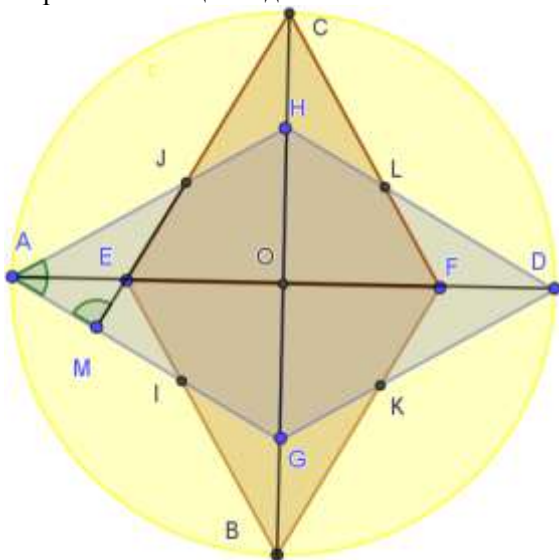


Рис.3.94. Зображення, нанесене роботом

#### Розв'язання:

Точки В, G, H, С лежать на одній прямій, точки А, E, F, D також лежать на одній прямій.  $BC \cap AD = O$ ,  $BC \perp AD$   $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 60^\circ$   $AG = AH$ , тобто, трикутник AGH – рівнобедрений.

$\angle IAE = 30^\circ$   $\angle OBE = 30^\circ$ ,  $\angle BEO = 90^\circ - \angle OBE = 60^\circ$ ,  $\angle BEO$ - зовнішній кут трикутника IAE  $\angle IAE = 60^\circ - \angle IAE = 30^\circ$   $\angle IAE = \angle AIE = 30^\circ$ , отже,  $IE = EA$ ,  $\angle IEA = 120^\circ$ .

Можна бачити, що трикутники IAE і JAE рівні, а це означає, що  $IA = JA$ . Аналогічно обґрунтовуємо, що всі сторони многокутника AJCLDKVI рівні.

Маємо:  $AO = OB = r = 2$  м,

$$OE = OB: \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}},$$



$$AE = AO - OE = r - \frac{r}{\sqrt{3}},$$

$$EM \perp AI, AM = AE \times \cos 30^\circ = \left(r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AI = 2AM = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right) = r(\sqrt{3} - 1).$$

Оскільки у многокутника 8 сторін, то його периметр дорівнює:

$$P = 8 \times (\sqrt{3} - 1) \times r.$$

Звідси, довжина траєкторії руху робота дорівнює:

$$L = 8(\sqrt{3} - 1)r + 2\pi r = 2r(4(\sqrt{3} - 1) + \pi) \approx 2 \times 2 \times (4 \times (\sqrt{3} - 1) + 3,14) \\ \approx 24,27 \text{ (м)} \quad 24,27 \text{ м} \approx 243 \text{ дм}$$

Відповідь: довжина траєкторії руху робота складає 243 дм.

### Задача №8 (Тема «Функції, їх властивості та графіки»)

Робот оснащений двома окремо керованими колесами, діаметр кожного з коліс робота дорівнює 9 см. Лівим колесом керує мотор А, правим колесом - мотор В. Колеса прямо під'єднані до моторів. Посередині між колесами робота закріплений пензель. Через особливості кріплення пензля робот не може їхати назад.

Робот за допомогою пензля накреслив прямокутник. У трьох вершинах прямокутника робот повернувся на кут, що доповнює кут прямокутника до  $180^\circ$ . Всі повороти робота робив на місці, обертаючи колеса однаковою швидкістю в протилежних напрямках.

Відомо, що довжина прямокутника в 1,5 рази більша за його ширину. Після того, як робот закінчив наносити зображення, з'ясувалося, що вісь мотора А повернулась на  $12\ 960^\circ$ , а вісь мотора В - на  $14\ 040^\circ$ . Якщо робот обертає колесами в тому ж напрямку, що й до цього, то кут обертання осі зростає, а коли в протилежному, то зменшується.

Відстань між центрами коліс (ширина колії) робота дорівнює 18 см, маса робота - 2 кг. При розрахунках прийміть  $\pi \approx 3,14$ .

Треба обчислити площу прямокутника, який накреслив робот. Відповідь надати в квадратних дециметрах, округливши результат до цілих.

#### Розв'язання:

Робот проїхав 4 прямолінійних відрізки і повернувся 3 рази на  $90^\circ$  на місці. Виходячи з опису, робот завжди повертав в одному й тому ж напрямку, тобто вісь мотора В додатково повернулась 3 рази на один й той же кут вперед, а вісь мотора А - додатково повернулась 3 рази на той самий кут назад.

Нехай  $\alpha$  - це кут, на який повернулись осі за 3 повороти робота на  $90^\circ$ , а  $\beta$  - це сумарний кут обертання осей моторів при проїзді по сторонах прямокутника.

Тоді маємо:

$$\varphi_A + \varphi_B = (\beta - \alpha) + (\beta + \alpha) = 2\beta$$

$$\beta = (\varphi_A + \varphi_B) / 2$$

Позначимо через  $X$  ширину прямокутника. Оскільки довжина прямокутника в 1,5 рази більша за його ширину, то вона буде дорівнювати  $1,5X$ . Тоді периметр прямокутника дорівнюватиме:

$$P = 2 * (X + 1,5X) = 5X.$$

Сумарний кут повороту коліс робота при проїзді по меншій стороні прямокутника:

$\beta_1 = (\varphi_A + \varphi_B) / 10$ , довжина меншої сторони прямокутника дорівнюватиме:

$$\frac{\beta_1}{360^\circ} \times \pi d = \frac{12960^\circ + 14040^\circ}{10 \times 360^\circ} \times 3,14 \times 9 = 7,5 \times 9 \times 3,14 = 211,95 \text{ (см)}$$

Площа прямокутника дорівнюватиме:

$$S = 1,5 \times 211,95^2 \approx 67384,2 \approx 67384 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$67384 \text{ см}^2 \approx 674 \text{ дм}^2$$

**Відповідь:** площа прямокутника, який накреслив робот, дорівнює  $674 \text{ дм}^2$

### Задача №9 (Тема «Елементи комбінаторики»)

В ящику знаходяться 70 різнокольорових кульок: 40 червоного кольору, 20 синього кольору та 10 зелених.

Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з ящика роботу з непрацюючим датчиком кольору, щоб серед них обов'язково було 15 кульок одного кольору.

#### Розв'язання:

Дана задача ґрунтується на законах теорії ймовірностей. Якщо робот витягне набір з 38 кульок, то такий набір може складатися з 14 червоних, 10 зелених і 14 синіх кульок. Тобто, очевидно, що в наборі з 38 кульок немає 15 кульок одного кольору.

У разі витягування роботом з ящику 39 і більше кульок, наступна кульку буде або синя, або червона, адже зелені кульки вже закінчились. Тому, починаючи з 39 кульок, робот може витягнути 15 кульок одного кольору – синього або червоного.

**Відповідь:** робот має витягнути 39 кульок.

Таким чином, ми розглянули низку математичних задач, в яких застосовані елементи робототехніки. Дані задачі, розв'язані за допомогою теоретичних знань та математичних формул, містять певні алгоритми розв'язку, що можуть бути запрограмовані. Під час розв'язування даних завдань можуть використовуватись як групові, так й індивідуальні форми роботи з учнями. Набуті школярами навички розв'язування задач з робототехніки дозволять їм у подальшому навчанні швидше опановувати нові технології та способи пошуку алгоритмів вирішення математичних та фізичних задач.



**Рис. 3.95. Моделі роботів, складених з конструкторських наборів.**

Розглянуті форми роботи під час заняття сприяють ефективному розвитку пізнавальних та творчих навичок, а також самостійності здобувачів освіти. Використання зазначених методів дозволяє організувати навчальний процес на комплексному поєднанні принципів проблемного і діяльнісного підходів в освіті, а також особистісно-орієнтованого навчання та колективної взаємодії.

#### ***Контрольні питання і завдання***

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у заняттях з робототехніки?
2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи та студентам фахових коледжів з робототехніки?
3. Як диференціювати завдання з робототехніки для учнів основної та старшої школи?
4. Які конструкторські набори доцільно використовувати здобувачам освіти для складання роботів та програмування їх дій?

### **3.24. Описова статистика**

**Назва теми:** «Елементи математичної статистики» (9-й, 11-класи); «Статистика» (студенти 1-2 курсів фахових коледжів).

**Вікова категорія:** 15-18 років.

**Навчальні предмети, які можуть інтегруватися при виконанні навчального проєкту:** алгебра, фізика, економіка, технології; статистика.

**Актуальність та мета:** Застосовуючи програмні засоби для розв'язування задач, які потребують статистичного опрацювання даних, можна інтенсифікувати процес навчання за рахунок вивільнення здобувачів освіти від рутинних обчислень, а зекономлений час відвести на обговорення отриманих результатів, складання задач за частотною таб-

лицею. В ІТ-сфері є відносно новий напрям Big Data; однією з важливих професій – є Data-аналітик. Для роботи з великими даними використовується також статистичний аналіз.

**Обладнання:** програмне забезпечення GRAN1, GeoGebra, Google-таблиці, Google-форми, папір для анкет тощо.

**Термін виконання:** впродовж вивчення теми /курсу.

**Умови проведення:** здобувачі освіти формуються у малі групи по 2-3 особи. За бажанням можна здійснювати індивідуальну проектну діяльність. Кожна група обирає для проектною діяльності одну із тем.

**Прогнозований результат:** зібрані та опрацьовані статистичні дані за обраним напрямком дослідження, представлені звіти.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження**

Розглянемо приклади завдань, що містять дані, які потребують статистичного опрацювання даних. Далі для поданих даних представлено також результати опрацювання з використанням GRAN1 ([добірка завдань, відео](#)).

**Наприклад, отримано такі дані про зріст дівчат 15-18 років:**

159 162 158 161 160 160 158 169 156 160 164 169 155 157 161 159  
175 176 171 161 162 163 165 170 163 162 170 174 171 161 171 172 174  
168 168 172 173 168 169 168 166 166 162 166 159 164 163 159 170 173  
167 167 169 162 168 167 167 169 170 165 165 164 164 166 165 165 164  
163 159 169 167 162 164 163 165 166 165 167 166 167

*Знайти об'єм та розмах вибірки, моду, медіану, середнє арифметичне, середнє квадратичне відхилення. Побудувати частотну таблицю, гістограму відносних частот. Користуючись частотною таблицею, розподілити за зростом замовлення на пошиття 2000 форм для працівників (зріст 160-164, 164-168 і далі), обчислити ймовірний прибуток від продажу цієї партії одягу, якщо відомий прибуток від продажу одиниці товару певного розміру.*

Для створення *статистичної вибірки* потрібно вказати тип даних вибірки (варіанти, частоти або відносні частоти); модель даних (дискретна або неперервна); тип графіка залежно від типу розподілу (полігон – для дискретного, гістограма – для неперервного); розглянути відповідно дискретну чи неперервну функцію розподілу. Якщо вводяться відносні частоти, то вказують об'єм вибірки. Для неперервної моделі даних, що задається через набір варіант, вказують відрізок задання вибірки та кількість відрізків розбиття.

Розглянемо алгоритм опрацювання статистичних даних за допомогою **програмного засобу Gran1**. Обираємо тип даних *Статистична вибірка* (див. рис. 3.96), використовуємо послугу *Об'єкт створити*. Зазначаємо, що модель даних *Неперервна*, і потрібно побудувати *Гістограму* (рис. 3.96). Обираємо тип даних *Варіанти* і вводимо дані з клавіатури. Бажано зберегти введені дані у файл. Далі додатково вказуємо відрізок задання та кількість відрізків розбиття (рис. 3.97). Бажано підтвердити

визначену автоматично за формулою Стерджеса кількість відрізків відповідно до об'єму вибірки.

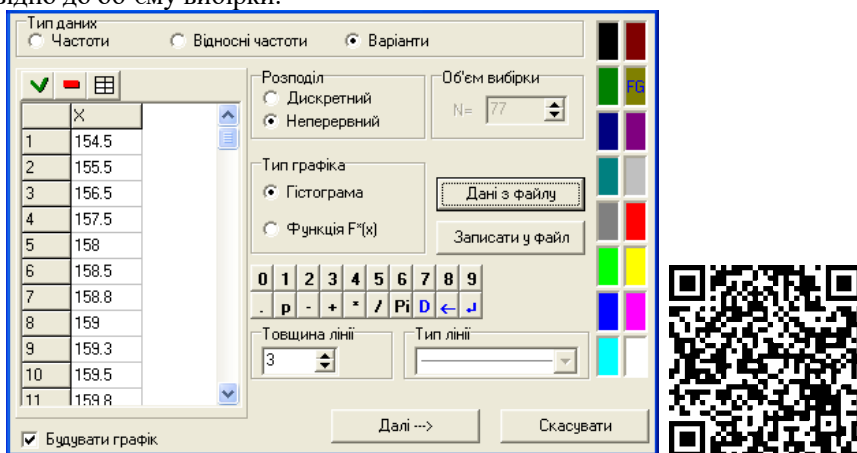


Рис. 3.96. Робоче вікно для введення вибірки, QR добірки завдань

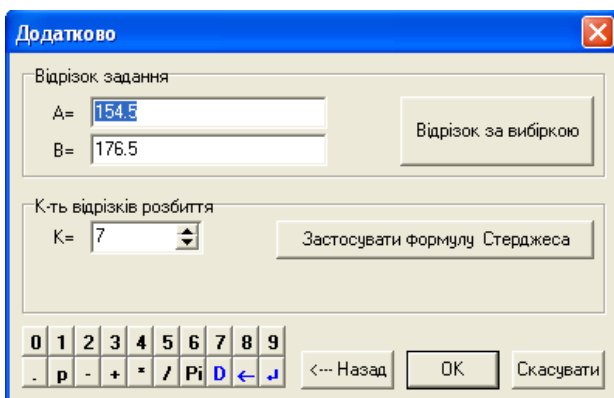


Рис. 3.97. Визначення розмаху вибірки, кількості відрізків розбиття

Послуга *Операції \ статистика* призначена для операцій, які пов'язані з опрацюванням статистичних даних: *Частотна таблиця*, *Критерій Пірсона*, *Щільність нормального розподілу за вибіркою*.

Послуга *Операції \ статистика \ частотна таблиця* (рис. 3.98) використовується при необхідності переглянути частотну таблицю для статистичної вибірки. Таблиця подається у додатковому вікні, в якому вказані 1) значення варіант для дискретного або межі інтервалів для неперервного розподілу; 2) частота варіанти для дискретного або частота попадання в інтервал для неперервного розподілу; 3) накопичена частота (сума частот від першої до даної включно); 4) відносна частота варіанти для дискретного або відносна частота попадання в інтервал для неперервного розподілу; 5) накопичена відносна частота.

Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
154.5 - 157.6	4	4	0.05195	0.05195
157.6 - 160.8	9	13	0.1169	0.1688
160.8 - 163.9	16	29	0.2078	0.3766
163.9 - 167.1	20	49	0.2597	0.6364
167.1 - 170.2	16	65	0.2078	0.8442
170.2 - 173.4	8	73	0.1039	0.9481
173.4 - 176.5	4	77	0.05195	1




Рис. 3.98. Частотна таблиця до вибірки «Зріст дівчат»

Щоб визначити, скільки форм для певного зросту потрібно пошити, перемножують обчислені відносні частоти на обсяг замовлення. Отримані дані запишемо в графу 6 (табл. 3.20). Щоб визначити затрати тканини, перемножують отриману кількість одиниць продукції для кожного інтервалу (граф 6) на витрати тканини для пошиття одиниці продукції (граф 3). Планований прибуток для кожного інтервалу (граф 9) отримують як добуток відповідних даних в графі 4 і графі 6.

Таблиця 3.20.

**Обчислення прибутку і кількості тканини для пошиву форми**

№	Зріст дівчат	Витрати на од. продукції	Прибуток	Кількість = відносна частота * обсяг партії		Кількість тканини		Прибуток
				5	6	7	8	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	152-156	2,5	2	0,01299·2000	26	2,5·26	65	52
2	156-160	2,8	3	0,1169·2000	208	2,8·208	582,4	624
3	160-164	3,1	4	0,2208·2000	442	3,1·442	1370,2	1768
4	164-168	3,4	4	0,3247·2000	649	3,4·649	2206,6	2596
5	168-172	3,7	4	0,2338·2000	468	3,7·468	1731,6	1872
6	172-176	4,0	3	0,09091·2000	182	4,0·182	728	546
7	176-180	4,3	2	0,1299·2000	26	4,3·26	111,8	52
Σ					2001		6795,6	7510

У програмі GRAN1 передбачена послуга *Операції \ Статистика \ Щільність нормального розподілу за вибіркою*, за допомогою якої для поточного неперервного розподілу статистичних ймовірностей можна побудувати новий об'єкт-функцію, що визначається за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} e^{-\frac{(x-M)^2}{2S^2}}, \text{ де } M - \text{статистичне математичне сподівання, а } S -$$

статистичне середнє квадратичне відхилення для заданої вибірки (рис. 3.99).

Доцільно порівняти площу під гистограмою і згенерованою кривою (послуга *Операції \ Інтеграл*), перевірити гіпотезу про узгодженість статистичних даних за критерієм Пірсона (*Операції \ Статистика \ Критерій Пірсона*), для функції щільності нормального розподілу перевірити «правило 3 сигм», побудувати графік функції (рис. 3.100) чи щільності розподілу статистичних ймовірностей, обчислити площу фігури, обмеженої цим графіком.

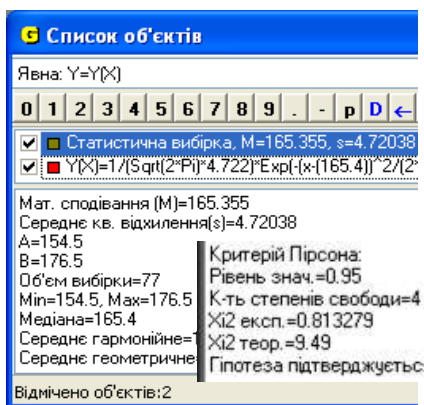
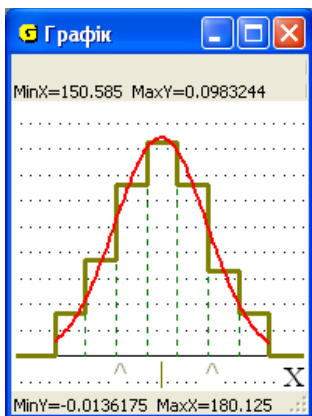


Рис. 3.99. Вікно з результатами статистичного опрацювання даних вибірки

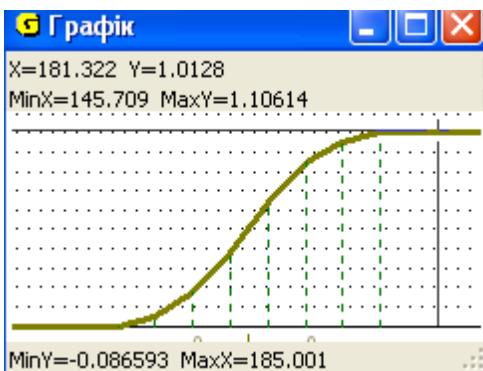


Рис. 3.100. Графік функції розподілу відносних частот, [QR відеоуроків](#).

3. Користуються популярністю у навчанні стохастики *наочності*, які *модельють випадкові події*. Низку таких наочностей наводять у публікаціях О. Семеніхіна та М. Друшляк [93; 94]. Заслужують на увагу і потребують локалізації українською наочності [Manuel Sada](#) [150]. Наведемо приклади окремих наочностей із зазначеної добірки (рис. 3.101).

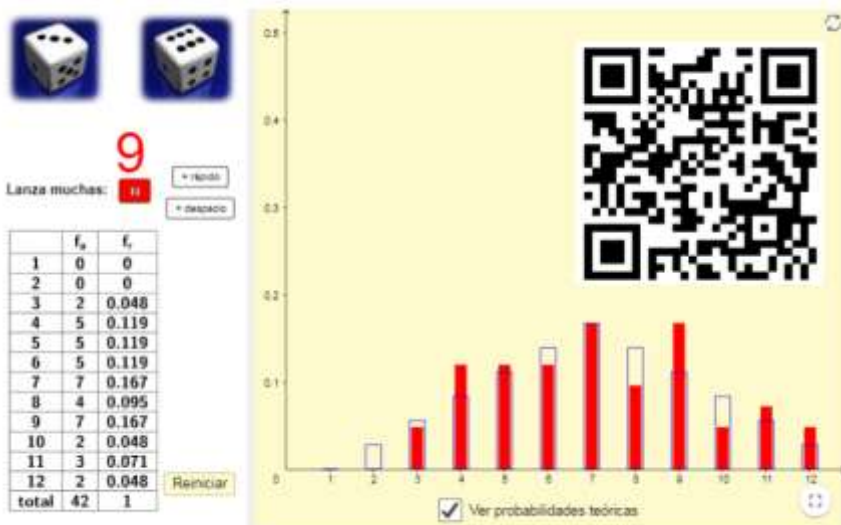


Рис. 3.101. Моделювання процесу підкидання двох кубиків і фіксування суми чисел, які випадають на верхніх гранях.

Розглянемо, які настанови доцільно дати досліднику, який працює з цією наочністю. Далі подаємо орієнтовний текст, який може супроводжувати розробку GeoGebra.

Подивіться на початкову діаграму та частотну таблицю, у якій зібрані результати після того, як кинули 20 разів по два кубики, і запишіть їх суму. Який результат відбувся найчастіше? Скопіюйте і таблицю, і діаграму у свій ноутбук, щоб порівняти їх з подальшими результатами.

Натисніть кнопку «Киньте один раз» та спостерігайте за змінами: опишіть, що змінилося в таблиці і на гістограмі.

Клацніть на «Перезапустити» та змодельуйте серію викидання кубиків ще 20 разів. Дайте відповіді на ті самі запитання, що й вище, та повторіть схему у своєму зошиті.

Якби довелось зробити ставку на те, який результат буде найбільш повтореним після 100 підкидань, то на що б ви зробили ставку? Чому?

Натисніть кнопку *Відтворити*, щоб «кинути багато разів», і перегляньте зміни. Використовуйте кнопку «Пауза», щоб зупинитись, а потім спостерігайте за результатами після 100 запусків.

Скопіюйте діаграми, отримані після 10, 100 та 1000 запусків у свій ноутбук. Що спільного та відмінного ви спостерігаєте?

Що складніше отримати, коли ви підкидаєте два кубики: 12 чи 10? Чому? А 11 чи 12? Чому?

Який найімовірніший результат, коли підкидати дві кістки? Чому?



Отже, у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики доцільно використовувати GeoGebra, оскільки можна будувати гістограми розподілу статистичних ймовірностей і кумулятивні криві, обчислювати ймовірність потрапляння випадкової величини на заданий інтервал тощо. За допомогою динамічних параметрів отримати динамічні графіки.

GeoGebra – це «інтерактивний» моделюючий засіб, за допомогою якого у навчанні математики можна створювати динамічні моделі та унаочнити частину навчального матеріалу.

**Приклади дослідницьких завдань** для вивчення елементів математичної статистики.

1. Дослідити відношення зросту учня до його маси для підлітків деякого класу навчального закладу. Користуючись формулою Кьютела, розрахувати, чи відповідає маса учня його зросту? Для цього необхідно масу, виміряну в кілограмах, поділити на квадрат зросту, взятий у метрах. Якщо відношення менше двадцяти, то вагу необхідно набирати. Якщо значення обчисленої величини лежить в межах від 20 до 23, то вага нормальна. Тим учням, у яких обчислений коефіцієнт більший за 24, але не перевищує 29, бажано зменшувати вагу.

2. Дослідити індекс маси членів власної родини і наскільки збалансованим є в родині харчування. Більш широко можна сформулювати тему проекту «Математика на кухні».

3. Взуттєвій фабриці потрібно виготовити партію взуття обсягом 5000 пар для підлітків. Опитати учнів 9-11-их класів, з'ясувати у них розміри взуття, опрацювати статистичні дані, підготувати поради для представника взуттєвої фабрики щодо виготовлення кількості пар взуття певних розмірів.

4. Дослідити витрати з бюджету власної родини, включаючи податки, витрати на комунальні послуги, харчування, розваги тощо. Які можна зробити поради щодо більш раціонального використання коштів?

5. Урожайність зернових культур в районі подана в центнерах з гектара. Наближено обчислити урожай, який можна зібрати з 300 гектарів зернових?

40.2 10.2 15.4 19.4 14.1 28.0 15.8 20.1 26.5 15.6 29.3 13.6 18.6  
34.6 20.8 28.4 18.2 28.1 17.1 26.4 25.9 37.6 32.6 31.4 27.9 21.4  
10.9 26.4 38.0 49.1 22.0 26.5 25.6 27.6 20.1 30.0 40.2 26.2 11.0  
12.9 27.2 30.1 15.4 31.4 31.4 12.4 37.6 34.0 12.1 18.3 19.1 36.7  
14.6 12.9 30.1 18.5 12.4 18.1 38.3 13.4 20.1 29.2 26.1 10.8 19.2

6. Яка математика, зокрема статистика, використовується у сільському господарстві, у транспортній галузі, у професії батьків?

7. Наскільки ефективно використовується город чи присадибна ділянка, якщо така є у розпорядженні вашої родини?

8. Разом з учителями математики, фізики, економіки доцільно реалі-

зувати проєкт, пов'язаний з раціональним використанням водних ресурсів. У цьому проєкті можуть бути розглянуті питання, як заощаджувати ресурси, скільки коштує очистка води для побутових послуг і використання для їжі? Як використовують воду в різних країнах світу?

9. Разом з учителями математики, фізики, економіки доцільно реалізувати проєкт, пов'язаний з раціональним використанням електроенергії. У цьому проєкті можуть бути розглянуті питання, як заощаджувати ресурси, скільки коштує вироблення кіловата енергії на теплових, гідроелектростанціях? Як використовують енергію сонця і вітру в різних країнах світу? Наскільки раціональне використання електроенергії у вашій оселі?

10. Цікаво буде підліткам дізнатися і про те, як однокласники чи одногрупники використовують вільний час, які соціальні мережі використовують, які книги читають, якими видами спорту займаються і наскільки регулярно це відбувається?

### ***Контрольні питання і завдання***

1. Описати види завдань з теорії ймовірностей і математичної статистики, для розв'язування яких можна використовувати ПЗ *GRANI* та *GeoGebra*.

2. Як можна використати програмні засоби для опрацювання результатів педагогічних досліджень?

3. У чому відмінності в опрацюванні статистичних даних для дискретних і неперервних розподілів?

4. Переглянути уроки до теми «Теорія ймовірностей і математична статистика». Дослідити, якими наочностями доцільно доповнити бібліотеку, якщо використати для аналізу варіаційних рядів Microsoft Excel? У навчанні конструктора уроку *Алгебра, 10-11 клас*?

### **3.25. STEM-урок з математичної статистики.**

**Назва теми:** Частота та ймовірність випадкової події (алгебра, 9 клас).

**Вікова категорія:** 14-15 років.

**Актуальність та мета:** Через проведення нескладних експериментів встановити, що за частотою випадкової події можна оцінювати її ймовірність. При цьому кількість випробувань має бути достатньо великою. Частота випадкової події дає змогу лише наближено оцінити ймовірність випадкової події. Чим більше випробувань провести, тим точнішою буде оцінка ймовірності випадкової події за її частотою. Учні навчатимуться шукати закономірності у серії випадкових випробувань, розуміти, як приймають рішення в умовах невизначеності.

**Обладнання:** підручник [131], гральні кубики, кнопки, монети, канцелярське приладдя, файл для віртуальної дошки Jamboard.

**Умови проведення експериментів:** учні працюють в парах, групах чи індивідуально.

**Основні завдання, які пропонуються учням у ході уроку.**

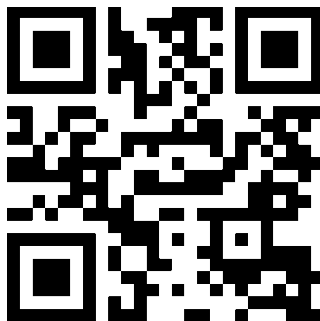
Завдання складено за підручником для 9-го класу авторського колективу А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір [131].

На рис. 3.102 представлено QR-посилання на [файл для віртуальної дошки Jamboard](#) (рис. 3.102 а) та [відеокоментар з рекомендаціями](#) щодо проведення уроку (рис. 3.102 б)).

1. Спочатку доцільно **розглянути кілька характерних прикладів стохастичних експериментів**. Скористаємося прийомом незавершених речень. Для цього на віртуальній дошці закінчення речень закрили, даючи учням можливість висловити власні здогадки (рис. 3.103). Наприклад, якщо відкрити книгу навмання, то ... неможливо знати заздалегідь, який номер сторінки ви побачите. Неможливо до початку футбольного матчу визначити, ... з яким рахунком закінчиться гра, та інші.



а)



б)

Рис. 3.102. Представлено QR-посилання на матеріали до уроку.

Наведіть приклади експериментів, результати яких передбачити неможливо.

- Якщо відкрити книгу навмання, то неможливо знати заздалегідь,
- Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким
- Ви не можете бути впевненим у тому, що коли натиснете на кнопку вимикача, то
- Немає гарантії, що з курячого яйця, покладеного до інкубатора,

Рис. 3.103. Скріншот слайду з прикладами стохастичних експериментів.

2. Наступним кроком вводиться поняття події та випадкової події. Результат спостереження, досліду, експерименту називають подією. Випадковою подією називають такий результат спостереження або экс-

перименту, який при дотриманні даного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися. Учні наводять приклади випадкових, вірогідних та неможливих подій. Найпоширенішими моделями для стохастичних експериментів є монети, гральні кубики, колода карт тощо. Наприклад, якщо кидати монету, то випадковою подією є випадання герба. Однак, якщо проводити експеримент велику кількість разів, то майже порівну разів буде випадати число та герб. У цьому вже проявляються закономірності у випадковому.

Доцільно на дошці розподілити події на випадкові, вірогідні та неможливі, пересунувши їх стилусом у відповідні пункти (рис. 3.104.).



**Рис. 3.104.** Завдання на класифікацію події.

3. Демографам відоме число 0,512. Статистичні дані, отримані в різні часи та в різних країнах, свідчать про те, що на 1000 новонароджених припадає в середньому 512 хлопчиків. Число 0,512 називають частотою випадкової події «народження хлопчика».

Для того щоб за частотою випадкової події можна було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою. Таким чином, частота випадкової події дає змогу лише наближено оцінити ймовірність випадкової події. Чим більше випробувань провести, тим точнішою буде оцінка ймовірності випадкової події за її частотою.

4. У підручнику запропоновано низку нескладних експериментів, які можуть провести учні у ході уроку. Наведемо приклад одного з них.

№26.4. Експеримент полягає в підкиданні двох монет. Проведіть цей експеримент: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 150 разів. Результати, отримані в кожній із чотирьох серій експериментів, занесіть у таблицю.

У кожній із чотирьох серій експериментів підрахувата частоту випадкової події: 1) випадання двох гербів; 2) випадання тільки одного герба; 3) випадання двох чисел.

Чи можна на основі цих спостережень зробити припущення, що подія «випав рівно один герб» є більш ймовірною, ніж подія «не випало жодного герба»? На чому базується таке припущення? Чи можна на основі цих спостережень гарантувати, що перша з названих подій є більш ймовірною, ніж друга?

5. Доцільно також провести експеримент з підкидання пари кубиків і зазначення суми чисел, які випадають на верхніх гранях. Потім порівняти відносні частоти з розрахованими ймовірностями. Детальніше питання опрацювання результатів цього експерименту висвітлено у даному навчальному посібнику в темі «Метод Монте-Карло».

6. Підбиваючи підсумки, учні приходять до висновку, що якщо випробування масові та проходять в однакових умовах, то в результаті стохастичних процесів можна спостерігати певні закономірності.

### ***Контрольні питання і завдання***

1. Які STEM-компетентності можуть набувати учні, проводячи досліди при вивченні стохастичної лінії?

2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи при вивченні стохастики?

3. Які звітні документи доцільно запропонувати учням для звіту про проведені експерименти?

4. Провести стохастичний експеримент. Виберіть навімання одну сторінку з твору українського письменника. Визначте, скільки разів на цій сторінці зустрінуться букви «н», «о», «я», «ю», а також скільки всього на ній букв. Оцініть ймовірність появи цих букв у вибраному тексті. Ця оцінка дозволить зрозуміти, чому на клавіатурах букви «н» і «о» розміщено ближче до центру, а букви «я» і «ю» – ближче до краю.

## **3.26. Лінійне програмування і задачі оптимізації**

**Назви тем:** 9-10-11 клас, алгебра, алгебра і початки аналізу, поглиблене вивчення, тема «Розв'язування систем рівнянь та нерівностей з двома змінними»; 1-2 курси фахового коледжу; алгебра і початки аналізу, тема «Розв'язування систем рівнянь та нерівностей»; вища математика «Системи лінійних рівнянь та нерівностей».

**Вікова категорія:** 15-18 років.

**Навчальні предмети:** алгебра і початки аналізу, основи економіки / економіка, технології.

**Актуальність та мета:** Багато планово-виробничих і економічних задач пов'язані з розподілом обмежених ресурсів (сировини, робочої

сили, енергії, палива тощо). Життєвою необхідністю розв'язування таких задач найбільш природно обґрунтувати потребу у нових ідеях, знаннях і методах математики.

Часто розподіл ресурсів можна здійснити не єдиним чином. Наприклад, дану продукцію можна отримати різними способами, по-різному вибираючи технологію, сировину, застосовуючи обладнання, організацію процесу. При цьому кожний спосіб розподілу ресурсів, що оцінюється з позиції деякого критерію (прибуток, об'єм випуску продукції тощо), характеризується певним значенням показника цього критерію. Природним тому є намір знайти такий варіант розподілу (програму, план), який би гарантував найбільший економічний ефект. Такий план називають оптимальним.

Методи і моделі лінійного програмування широко застосовуються при оптимізації процесів у всіх галузях народного господарства: при розробці виробничої програми підприємства, розподілі її по виконавцях, при розміщенні замовлень між виконавцями і по тимчасових інтервалах, при визначенні найкращого асортименту продукції, що випускається, в задачах перспективного, поточного та оперативного планування і управління; при плануванні вантажопотоків, визначенні плану товарообігу і його розподілу; в задачах розвитку і розміщення продуктивних сил, баз і складів матеріальних ресурсів тощо.

Задачі лінійного програмування на визначення оптимальних планів випуску продукції мають відповідати певним вимогам: мати реальний практичний зміст, який демонструє практичну цінність набутих математичних знань; відповідати навчальній програмі; бути сформульованими доступною і зрозумілою мовою; бажано, щоб не містили термінів, що потребують додаткових знань і не передбачені програмою.

**Обладнання:** програмне забезпечення системи динамічної математики, креслярські інструменти, папір.

**Термін виконання:** 2-3 тижні. **Умови проведення:** здобувачам освіти доцільно працювати в міні-групах.

**Прогнозований результат.** Розроблений і обґрунтований розрахунок найбільш доцільного варіанту виконання замовлення на випуск продукції, виходячи з наявних матеріалів тощо.

#### **Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

Низку задач на визначення екстремальних значень функції доцільно досліджувати за допомогою GRAN1. Наведемо приклад задачі на визначення оптимального за прибутком плану виробництва.

#### **Оптимізація планів виробництва.**

**Приклад 1.** Підприємство випускає столи і книжкові полиці. У табл. 3.21 подано затрати і прибутки для кожного виду продукції, наявні ресурси. *Знайти оптимальний за прибутком план виробництва.*

*Розв'язання.* Створимо математичну модель виробничої ситуації.

Нехай  $x$  – кількість столів,  $y$  – кількість книжкових полиць.  $P(x;y)=3x+2y$  – функція прибутку. Складемо математичну систему обмежень (формула (\*)) і представимо її у вигляді, зручному для розв'язування за допомогою GRAN1 (взяти тип *Функція задана неявно*).

Таблиця 3.21.

Вид виробу	Матеріальні затрати			Прибуток
	Час на виготовлення (год.)	Лісоматеріали (м <sup>3</sup> )	Скло (м <sup>2</sup> )	
Стіл	9,2 (P2)	0,3	–	3 (P7)
Полиця	4 (P3)	0,6	2	2 (P8)
Ресурси	520 (P4)	24 (P5)	40 (P6)	

$$\left\{ \begin{array}{l} 9,2x + 4y \leq 520 \\ 0,3x + 0,6y \leq 24 \\ 2y \leq 40 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 520 - (9,2x + 4y) \geq 0 \\ 24 - (0,3x + 0,6y) \geq 0 \\ 40 - 2y \geq 0 \quad (*) \\ x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right.$$

На рис. 3.105 побудоване ГМТ, задане першими трьома нерівностями. Дві останні нерівності подаємо як *Відрізок для побудови графіків*. Розв'язки системи нерівностей заповнюють опуклий п'ятикутник на площині. Щоб заштрихувати точки, необхідно скористатися послугою *Операції \ Нерівності \ G(x,y)>0*. Попередньо перед функціями прибутку, якщо вони представлені у неявному вигляді, слід зняти відмітку.

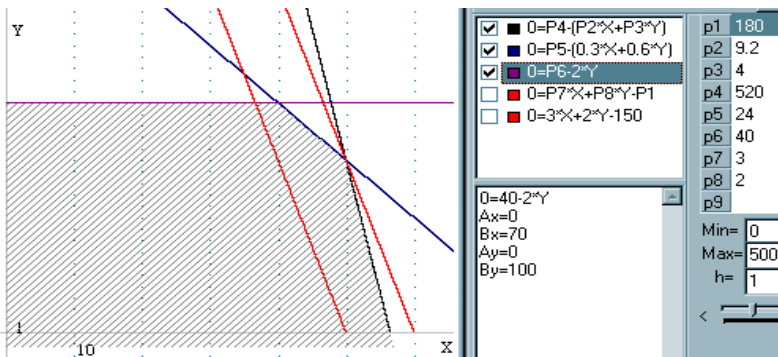


Рис. 3.105. ГМТ, що задовольняють систему нерівностей

Потрібно знайти такі точки  $(x,y)$  п'ятикутника, для яких вираз  $3x+2y$  набуває найбільших числових значень. Множина точок, заданих рівнянням  $3x+2y=c$ , є прямою лінією. На рис. 3.105 побудовано кілька прямих для різних значень параметра  $3x+2y=50$ ,  $3x+2y=150$ ,  $3x+2y=P1$ .

Для зручності дослідження (не витирається заштриховане ГМТ, коли змінюється параметр  $P1$ ) функцію прибутку подати за формулою  $y = -2 \cdot x/3 + P1/3$ . Значення  $P1$  у рівнянні  $3x + 2y = P1$  знаходять встановивши координати граничної точки. Обчислюють, що найбільший прибуток 145 одиниць у точці  $x=50, y=15$ . Отже, потрібно випускати 50 столів і 15 полиць.

За допомогою GRAN1 можна отримати динамічну модель для визначення оптимального плану. Позначимо за допомогою параметрів  $P2, P3$  час на виготовлення стола, полиці,  $P4$  – ресурс годин,  $P5, P6$  – запас лісоматеріалів, скла,  $P7, P8$  – прибуток від продажу стола, полиці. Відповідно до введених параметрів створимо функції виробництва товарів  $0 = P4 - (P2 \cdot X + P3 \cdot Y)$ ;  $0 = P5 - (0.3 \cdot X + 0.6 \cdot Y)$ ;  $0 = P6 - 2 \cdot Y$  та функцію прибутку  $0 = P7 \cdot X + P8 \cdot Y - P1$ . Змінюючи один з параметрів, досліджуємо його вплив на інші показники.

**Приклад 2.** Для виготовлення двох видів виробів А і В використовується фрезерне, токарне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в таблиці 3.22. У таблиці також вказаний загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду. Визначити, скільки виробів і якого виду доцільно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Таблиця 3.22.

**Матеріальні затрати підприємства на одиницю виготовленої продукції.**

Затрати часу на 1 виріб	Вид виробу	Тип обладнання				Прибуток (грн.)
		Токарне	Фрезерне	Зварювальне	Шліфувальне	
	А	4	8	5	8	15
	В	5	4	4	5	28
Фонд робочого часу обладнання		240	200	200	320	-

*Розв'язання.* Складемо математичну модель задачі. Позначимо, що буде виготовлено  $x$  одиниць виробів виду А,  $y$  одиниць – виду В. Враховуємо, що кількість вироблених одиниць продукції має бути невід'ємною. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити  $4 \cdot x + 5 \cdot y$  у верстат-годин токарного обладнання. Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 240 годин, то повинна виконуватися нерівність

$$4 \cdot x + 5 \cdot y \leq 240.$$

Аналогічні міркування відносно можливого використання фрезер-



ного, зварювального і шліфувального обладнання призведуть до системи нерівностей (\*\*):

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 5 \cdot y \leq 240, \\ 8 \cdot x + 4 \cdot y \leq 200, \\ 5 \cdot x + 4 \cdot y \leq 200, \\ 8 \cdot x + 5 \cdot y \leq 320, (**), \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Складемо функцію прибутку, враховуючи, що буде виготовлено  $x$  одиниць виробів виду А,  $y$  одиниць виробів виду В. Прибуток від їх реалізації буде обчислюватися за формулою:

$$F(x, y) = 15 \cdot x + 28 \cdot y. (***)$$

Потрібно серед усіх невід’ємних розв’язків системи нерівностей (\*\*) знайти такий, при якому функція (\*\*\*) набуває максимального значення. Лінійна функція (\*\*\*), максимум якої потрібно визначити, разом із системою нерівностей (\*\*) і умовою невід’ємності змінних утворюють математичну модель початкової задачі.

На рис. 3.106 у формі чотирикутника LBKC подано геометричне місце точок, які задовольняють систему нерівностей (\*\*).

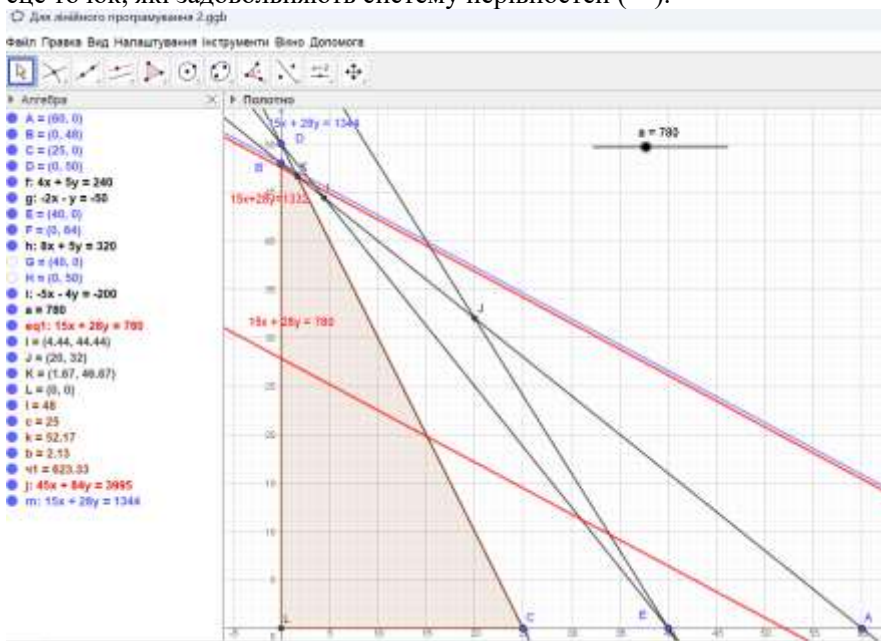


Рис. 3.106. Креслення, виконане за допомогою GeoGebra, до задачі на визначення оптимального плану випуску продукції.

Зліва у списку об'єктів подано координати точок перетину відповідних прямих. Червоним кольором побудовано графік функції прибутку. В результаті дослідження можемо встановити, що найвигідніше для підприємства випускати лише продукцію другого виду. Тобто 48 одиниць виробів виду В. При цьому прибуток буде складати 1344 ум. од. При цьому буде використано по 240 верстато-годин токарного та шліфувального обладнання, по 192 години фрезерного та зварювального.

Якщо випускати хоча б одну одиницю продукції А, то наявний фонд верстато-годин дасть змогу випустити 47 одиниць продукції виду В. При цьому буде використано 239 верстато-годин токарного та 243 години шліфувального обладнання, 196 верстато-годин фрезерного та 193 години зварювального обладнання. Прибуток складе 1316 ум.од.

Для випуску хоча б двох одиниць продукції А наявний фонд верстато-годин фрезерного обладнання не дозволяє випустити більше 46 одиниць продукції виду В. Прибуток при цьому складе 1288 ум. од. Саме недостатня кількість верстато-годин фрезерного обладнання обмежує випуск продукції виду А. Якщо в ній є необхідність, то щоб при цьому отримувати якомога більші прибутки від випуску продукції обох видів, потрібно збільшити резерв верстато-годин цього обладнання.

Використання створених креслень до задач на випуск двох видів продукції дає змогу краще здійснювати аналіз не лише щодо отримання найбільшого прибутку, але й тоді, коли стоїть завдання випускати продукції якось виду не менше, ніж задане число. Якщо ж розглядається випуск продукції трьох видів (приклад 3), то образами заданих нерівностей обмежень будуть площини. У цьому випадку аналізувати ГМТ значно складніше.

**Приклад 3** (вища математика). Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовується фрезерне, токарне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в табл. 3.23.

Таблиця 3.23.

**Матеріальні затрати підприємства на одиницю виготовленої продукції.**

Затрати часу на 1 виріб	Вид виробу	Тип обладнання				Прибуток (грн.)
		Токарне	Фрезерне	Зварювальне	Шліфувальне	
	А	4	10	6	8	15
	В	5	3	4	7	28
	С	6	5	8	10	20
Фонд робочого часу обладнання		240	100	200	320	-

У таблиці також вказаний загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду. Визначити, скільки виробів і якого виду

доцільно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

*Розв'язання.* Складемо математичну модель задачі. Позначимо, що буде виготовлено  $x$  одиниць виробів виду А,  $y$  одиниць – виду В і  $z$  одиниць – виду С. Враховуємо, що кількість вироблених одиниць продукції має бути невід'ємною. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити  $4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z$  верстато-годин токарного обладнання. Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 240 годин, то повинна виконуватися нерівність

$$4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \leq 240.$$

Аналогічні міркування відносно можливого використання фрезерного, зварювального і шліфувального обладнання призведуть до системи нерівностей (\*\*):

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \leq 240, \\ 10 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z \leq 100, \\ 6 \cdot x + 4 \cdot y + 8 \cdot z \leq 200, \\ 8 \cdot x + 7 \cdot y + 10 \cdot z \leq 320, (**), \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Складемо функцію прибутку, враховуючи, що буде виготовлено  $x$  одиниць виробів виду А,  $y$  одиниць виробів виду В і  $z$  одиниць виробів виду С. Прибуток від їх реалізації буде обчислюватися за формулою:

$$F(x, y, z) = 15 \cdot x + 28 \cdot y + 20 \cdot z. (***)$$

Потрібно серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (\*\*) знайти такий, при якому функція (\*\*\*) набуває максимального значення. Лінійна функція (\*\*\*), максимум якої потрібно визначити, разом із системою нерівностей (\*\*) і умовою невід'ємності змінних утворюють математичну модель початкової задачі.

### **Оптимізація транспортних перевезень.**

**Приклад 4** У трьох пунктах відправлення зосереджений однорідний вантаж у кількостях, відповідно рівних 320, 280 і 300 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, відповідно рівних 160, 420 і 320 т. Вартості перевезень 1 т вантажу з кожного пункту відправлення в кожен пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, що забезпечує вивіз наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пункти призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень.

**Приклад 5.** Розв'язати графічним методом задачу планування стану рухомого складу депо. З пункту А в пункт Б щоденно відправляються пасажирські і швидкі поїзди. Дані про організацію перевезень в табл. 3.24:

Таблиця 3.24.

**Відомості щодо комплектування поїздів та перевезення пасажирів.**

Поїзд	Кількість вагонів				
	Багажний	Поштовий	Плацкарт	Купейний	Люкс
Швидкий	1	1	5	6	3
Пасажирський	1	-	8	4	1
Число пасажирів в вагоні	-	-	58	40	32
Парк вагонів	10	6	75	78	18

Скільки повинно бути сформовано швидких і пасажирських поїздів, щоб перевезти максимальну кількість пасажирів?

**Приклад 6.** Телекомунікаційна компанія надає два основні види послуг: підключення користувачів по безлімітному плану в Internet і хостинг веб-сайтів.

Для організації доступу в Internet компанія купує трафік:

- вхідний з пропускнуою спроможністю виділеної лінії - до 10 Гбіт/с за ціною 0,02 долар за 1 Мбіт/с;

- вихідний трафік, з максимальним об'ємом 15 Гбіт/с за ціною 0,01 долара за 1 Мбіт/с.

Для надання послуги хостингу одного сайту необхідно зарезервувати 15 Мбіт/с на передачу і 20 Мбіт/с на прийом. Місячний дохід від послуги складає 5,5 доларів. Для надання послуги доступу в Internet необхідно зарезервувати 30 Мбіт/с на прийом і 10 Мбіт/с на передачу. Місячний дохід від послуги складає 7,5 доларів.

Визначити, при якій кількості супроводжуваних сайтів і кількості користувачів Internet компанія отримає максимальний дохід, якщо кількість портів на сервері віддаленого доступу обмежена, що не дозволяє надавати послуги доступу в Internet більше 480 клієнтам, і загальна кількість клієнтів (доступ в Internet і хостинг) не може перевищувати 512.

**Приклад 7.** Вартість видобування руди залежить від глибини видобування. Апроксимувати табличні дані для глибини 500-700 м многочленом і спрогнозувати вартість видобування руди на глибині 800 м.

500 м	550 м	600 м	665 м	700 м
810 гр. од.	870 гр. од.	920 гр. од.	983 гр. од.	1120 гр. од.

**Контрольні питання і завдання**

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у проєктах за задачами на оптимізацію?

2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи та студентам фахових коледжів з використання лінійного про-

грамування? Дібрати відповідні дані, скласти математичні моделі до задач на визначення оптимального складу сумішей, транспортних задач тощо; знайти оптимальні розв'язки поданих вище завдань.

3. Ознайомитися з можливістю застосування засобів «Пошук розв'язку» та «Підбір параметра» в Пакеті аналізу Microsoft Excel.

### 3.27. Пошук функціональних залежностей

**Назва проєкту:** «Передбачувана випадковість»

**Назви тем:** «Елементи математичної статистики» (11 клас, поглиблене вивчення математики, поняття про регресію); «Статистика», 2-3 курс фахового коледжу.

**Вікова категорія:** 16-18 років.

**Навчальні предмети:** Основний навчальний предмет – алгебра і початки аналізу / статистика. Тема «Елементи математичної статистики», підтема «Використання методу найменших квадратів для встановлення залежностей між випадковими величинами». Здобувачі освіти використовують навчальні компетентності з інформатики, фізики, психології, суспільствознавства, економіки, біології.

**Актуальність та мета:** Основна мета проєкту – залучити здобувачів освіти до дослідницької діяльності, висування гіпотез, експериментальної їх перевірки та опрацювання результатів експерименту, в тому числі з використанням програмних засобів. Здобувачі освіти виявлятимуть залежності між зростом і вагою людини, між вагою і довжиною стопи, між зростом і довжиною стопи. Дослідять, чи існує зв'язок між зростом людини, її вагою та рівнем IQ. Інші групи – досліджують і «перевіdkривають» закони фізики (зокрема, формулу для визначення тиску, закон Ома), досліджують стабільність курсу національної валюти у доларовому еквіваленті впродовж певного періоду; зв'язок між величиною вкладених у виробництво коштів та отриманими прибутками. Результати дослідницької діяльності мають виражатися складеними рівняннями залежностей і прогнозуванням результатів – екстра- та інтерполяцією.

**Обладнання:** програмне забезпечення для збору і опрацювання статистичних даних; паперові носії відомостей, вимірювальні прилади тощо.

**Термін виконання:** 3-4 тижні.

**Умови проведення:** здобувачі освіти формуються у малі групи по 2-3 особи. За бажанням можна здійснювати індивідуальну проєктну діяльність. Кожна група обирає для проєктної діяльності один із напрямів досліджень.

**Прогнозований результат.** Виявлені та представлені у вигляді формул залежності між двома випадковими величинами.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.** Наведемо приклад портфоліо, яке здобувачі освіти можуть розробляти у ході проєкту.

[План вивчення теми \(Google\) гіперпосилання \(pdf-файл\)](#)

[План впровадження проєкту \(Google\).](#)

**Оцінювання учнів.** На початку проєкту використовуються такі методи оцінювання як опитування; перегляд та обговорення презентації вчителя; робота з таблицями.

- Таблиця [«З Х Д»](#);
- [Опитувальник за темою проєкту](#);
- [Презентація основних питань вчителя \(презентація Prezi\)](#);
- [Опитувальник "Що знаю і вмію?"](#)

**Впродовж роботи над проєктом** використовують для оцінювання здобувачів освіти наступні методи як консультації (online); продовження роботи з таблицями ЗХД; самостійну роботу з листами оцінювання проєкту та кінцевого продукту проєкту (само- і взаємооцінювання); робота з опитувальниками до теми.

- Таблиця [«З Х Д»](#);
  - Листи [оцінювання проєкту та кінцевого продукту проєкту](#);
  - [Форма самоспрямування роботи у групі](#);
  - [Форма самоспрямування власного навчання](#)
  - [Форма оцінювання для дослідження](#)
  - Форма [оцінювання веб-ресурсів](#)
  - Інша форма [оцінювання веб-ресурсів](#)
  - [Онлайн-таблиця для контролю роботи над проєктом](#);
- Опитувальники з теми, що розглядається.

**Наприкінці роботи над проєктом** використовують такі методи оцінювання як демонстрація (захист проєкту); робота з таблицями; анкетування; аналіз онлайн-таблиці та листів оцінювання.

- Таблиця [«З Х Д»](#);
- [Презентація основних питань вчителя \( презентація Prezi\)](#);
- Лист [оцінювання проєкту та кінцевого продукту проєкту](#);
- [Форма оцінювання презентації](#);
- [Форма оцінювання блогу](#); [Форма оцінювання сайту](#)
- Лист-контроль [Оцінювання навичок спільної діяльності](#);
- [Онлайн-таблиця для контролю роботи над проєктом](#);
- [Опитувальники з матеріалами до теми. Тексти письмової роботи.](#)

## **Діяльність здобувачів освіти та керівника проєкту**

### **I етап – Підготовчий**

Перед початком роботи над проєктом вчитель

- Створює [сайт проєкту](#);
- [буклет учителя про формування навичок мислення високого рівня \(файл, створений за допомогою Publisher\)](#);
- [перелік навичок 21 століття](#);
- пересвідчитися, що здобувачі освіти знають, як користуватися програмними засобами [GeoGebra](#) і [Gran1](#);

QR-коди окремих документів проєкту.

 <p>Передбачувана непередбачуваність Навчальний проєкт до теми "Елементи математичної статистики"</p>	
<p>Презентація основних питань вчителя (<a href="#">презентація Prezi</a>)</p>	
	
<p>Презентація основних питань (<a href="#">презентація Google</a>). Сайт проєкту.</p>	
	
<p><a href="#">План вивчення теми, план проєкту</a>; <a href="#">Буклет про використання методу навчальних проєктів</a></p>	

## II етап – Мотиваційний

- Перед здобувачами освіти ставиться ключове питання: Як можна передбачати випадкове?. Під час проведення мозкового штурму відбувається його обговорення.
- Визначаються можливі напрями, які могли б дати відповідні набори даних. Обговорюються та оцінюються ідеї здобувачів освіти, які вони пропонують.
- Вчитель пропонує презентацію основних питань та таблицю З-Х-Д (знаю – хочу дізнатися). Тематичні та змістові питання допоможуть здобувачам освіти зрозуміти тему та мету даного проєкту.
- Щоб оцінити попередні знання здобувачів освіти для виконання проєкту виконується завдання по заповненню графічних схем.
- Здобувачі освіти формують 4 групи, обирають одну з тем для дослідження; обирають спосіб представлення результату власної роботи.
- Вчитель повідомляє, що створено сайт проєкту.

## III етап – Конструктивний Перший тиждень

Учасники проєкту, ознайомившись зі своїми тематичними питаннями, протягом першого тижня займаються пошуком відомостей; складають план діяльності для впровадження своїх планів. Після цього вчитель проводить рефлексію зі здобувачами освіти та індивідуальні консультації з кожною групою, в тому числі через сайт проєкту, коригує їх діяльність, надає певні рекомендації та спрямовує роботу над питанням.

### Другий тиждень

Учасники проєкту працюють над створенням презентацій, вебсторінок. Для опрацювання результатів доцільно скористатися таблицями Google. Для цього попередньо заносять дані до таблиці. Потім виділяють стовпчики «Зріст» та «Вага», додають *Діаграму*, обравши тип «Точкова». Далі потрібно перейти до *Редактор діаграм – Оформлення* (рис. 3.107). Обрати *Пряма*, зазначи-

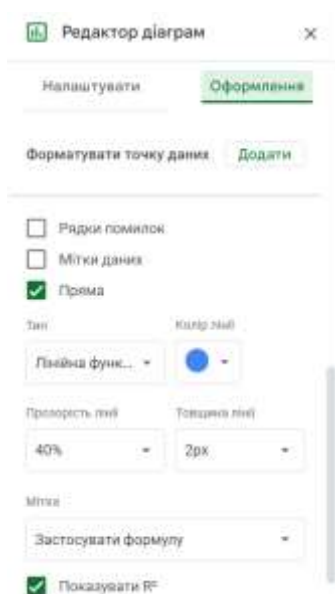
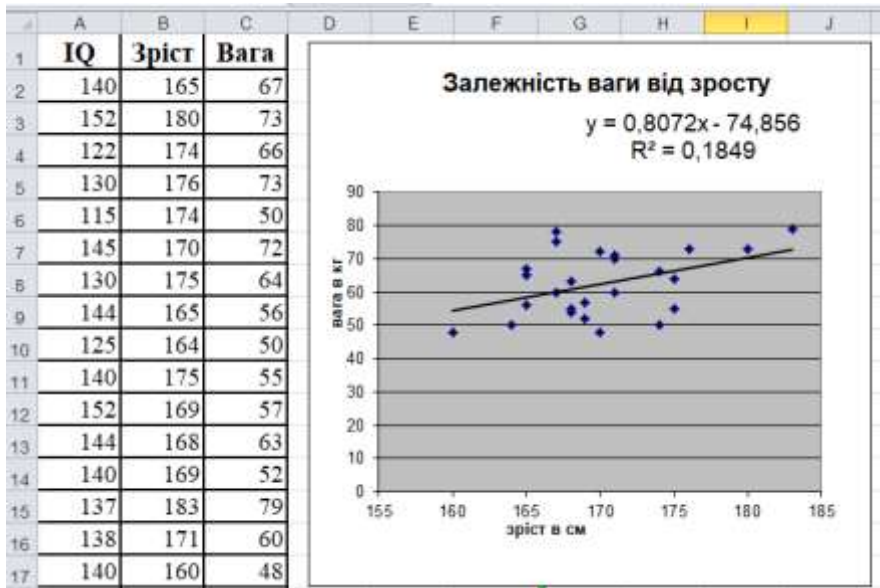


Рис. 3.107. Вікно редактора діаграм в таблицях Google.



ти тип *Лінійна функція*, в *Мітках* обрати *Застосувати формулу*, *Показувати R<sup>2</sup>*. Чим ближче значення *R<sup>2</sup>* до одиниці, тим значущішим буде зв'язок між значеннями величин, які досліджуються.

• I група – «біологи» працюють над питанням «В чому полягає гармонія у людини між зростом, вагою, довжиною стопи?». Вони повинні представити результат своєї роботи у вигляді презентації і сторінки на сайті проєкту, де висвітлюються основні результати дослідження «вага-зріст», «зріст-вага», «довжина стопи-вага», «зріст – довжина стопи», подаються графічні відомості про результати дослідження, висновки. На рис. 3.108 представлено результати дослідження зв'язку між величиною зросту та вагою дівчат 16-20 років.



**Рис.3.108.** Результати дослідження зв'язку між величиною зросту та вагою дівчат 16-20 років.

Проаналізувавши результати дослідження зв'язку між довжиною стопи людини (розмір взуття) та її вагою (рис. 3.109), дійшли висновку, що у людей з довшою стопою частіше спостерігається більша вага. Це можна пояснювати як тим, що величина зросту і довжина стопи людини – величини, які корелюються. Тобто у людей з більшим зростом довша стопа і більша вага. А ще можна трактувати й так: люди з більшою довжиною стопи менше «відчувають» власну вагу.

• II група – «Інтелектуали» проводитиме дослідження за питанням «Чи найвищий є найрозумнішим?». Вона також представлятиме результат своєї роботи у вигляді презентації і відповідної сторінки спільного сайту, де висвітлюються: основні результати діяльності у ході проєкту.



Рис. 3.109. За допомогою графіка представлено результати дослідження зв'язку між довжиною стопи людини (розмір взуття) та вагою.

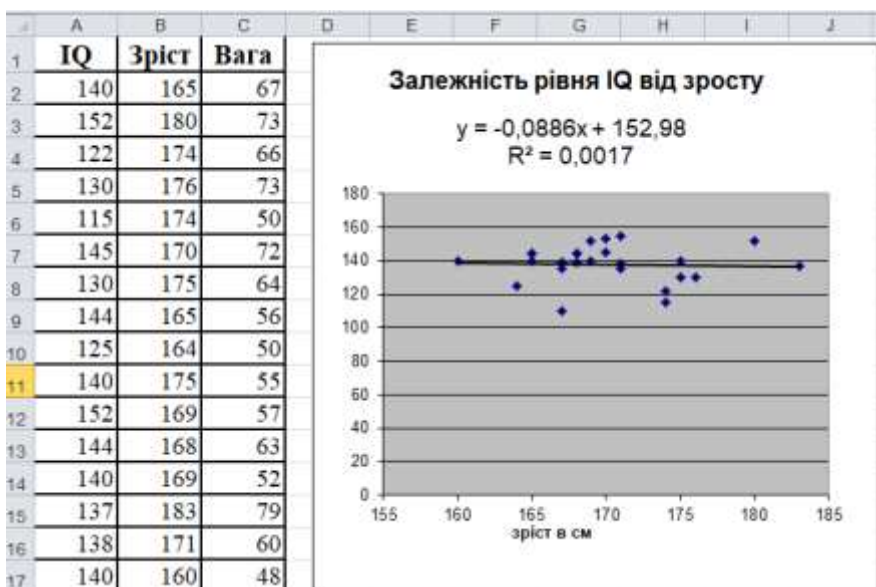
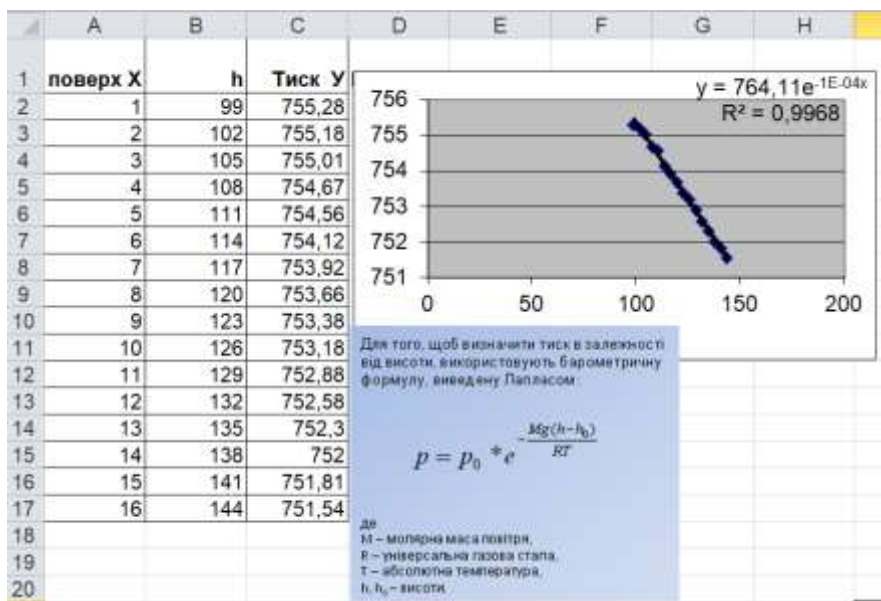


Рис. 3.110. За допомогою графіка представлено результати дослідження зв'язку між зростом людини та її рівнем IQ.

III група – «Фізики» працює за тематичним питанням «Як можна за допомогою математичної статистики «відкрити» нові закони у фізиці, хімії, біології?». Зокрема здобувачі освіти можуть провести навчальне дослідження та «перевідкрити» закон Ома, а процес дослідження, отримані результати опублікувати у щоденнику спостережень. Наприклад, скористатися блогом.

За допомогою приладу вимірювання тиску студенти здійснювали вимірювання на кожному з поверхів 16-поверхового будинку (рис. 3.111). На першому поверсі будинку зазначили, що висота над рів-

нем моря складає 99 метрів. Далі додавали по 3 метри висоти на кожен поверх. Як результат дослідження – підтвердження барометричної формули, за якою вимірюють атмосферний тиск залежно від висоти на рівнем моря.



**Рис. 3.111.** За допомогою графіка представлено результати дослідження залежності тиску від висоти над рівнем моря.

IV група визначається щодо того, як математика допоможе спрогнозувати тенденції змін вартості національної валюти у доларовому еквіваленті та інших (рис.3.112). Результати дослідження та зібрані аналітичні матеріали представляє у формі публікації чи добірки матеріалів на сайті.

Вчитель роздає учасникам проекту документ Контрольний список ([Учнівська презентація ходу та результатів проекту](#), [Учнівська публікація чи брошура ходу та результатів проекту](#), [Учнівський блог ходу та результатів проекту](#)), щоб допомогти здобувачам освіти планувати та стежити за своїм прогресом.

Одним із документів фасилітації є [Презентація основних питань вчителя](#). Учитель у роботі [дотримується стратегій фасилітації](#).

#### IV етап – захист проекту

- Перед завершенням роботи здобувачі освіти, використовуючи Критерії [оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту](#), перевіряють власну роботу та коригують навчальні потреби.

- Щоб перевірити рівень володіння учнями навчальним матеріалом, відбувається підсумкове оцінювання вмінь і навичок та заповню-

ється і обговорюється третя колонка таблиці З-Х-Д. Здобувачі освіти разом з учителем переглядають таблицю З Х Д оцінюють та самооцінюють, наскільки записи у колонках 2 і 3 можна співставити.

- Вони пишуть підсумкову письмову роботу
- Підсумовуються оцінки учасників проєкту, оцінки вчителя роботи груп з Google-таблиці.
- Після представлення всіх результатів відбувається обговорення ключового питання.

Доцільно для подальшої участі здобувачів освіти у навчальних проєктах здійснити рефлексію



Рис. 3.112. Динаміка середнього курсу валют в банках України (2023).

### Контрольні питання і завдання

1. Які STEM-компетентності можуть набувати здобувачі освіти, беручи участь у проєкті дослідження функціональних залежностей?
2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи та студентам фахового коледжу економічного спрямування з цього проєкту?
3. З яких етапів складається процес підготовки до проєкту та його впровадження?
4. Які форми доцільно запропонувати здобувачам освіти для оцінювання та самооцінювання роботи над проєктом, спрямування їх на успіх? Як можна оцінити роботу учасника проєкту, якщо він працює у складі групи?
5. Які звітні документи доцільно запропонувати здобувачам освіти для звіту про роботу над проєктом?

### 3.28. Метод Монте-Карло

**Назва проєкту:** Шукаємо закономірності у випадковостях.

**Назва теми:** «Початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики» (профільний рівень); «Елементи теорії ймовірностей» (поглиблене вивчення).

**Вікова категорія:** 17-18 років, 11 клас, студенти 1-2 курсів фахових коледжів.

**Навчальні предмети:** математика, інформатика, біологія.

**Актуальність та мета:** Перед учасниками проєкту ставляться практичні завдання, які підкріплюються теорією. Всі групи ознайомлюються з теоретичними основами закону великих чисел: при проведенні масових випробувань в однорідних умовах відносні частоти відбування подій наближаються до ймовірностей. Здобувачі освіти на практиці (дослідах) перевіряють дію закону великих чисел у різних життєвих ситуаціях.

**Обладнання:** програмне забезпечення таблиці Google, два гральні кубики, розграфлений папір, голка; папір та ручка для реєстрації результатів експерименту, пакети з насінням, на яких вказано відсоток насіння, яке зійде тощо.

**Термін виконання** 1-2 тижні.

**Умови проведення** Експерименти кожен дослідник проводить самостійно, потім збираються результати в загальну таблицю і опрацьовуються. Для створення міні-програм з імітації викидання двох кубиків можна учні можуть працювати в невеликих групах. Доцільно організувати щонайменше чотири групи учасників.

**Прогнозований результат.** Узагальнений висновок про порівняння відносних частот і розрахованих ймовірностей; розроблені фрагменти програм з імітаційного моделювання.

**Опис алгоритму дій, ходу впровадження.**

#### 3.28.1. Підкидання двох кубиків, визначення суми чисел на верхніх гранях

«Гравці» розглянуть задачу про найімовірніше число випадання суми очок на верхніх гранях двох кубиків. Доцільний малюнок (рис. 3.113) до цього завдання подано у підручнику алгебри для 9-го класу [131, с. 227].

Можемо отримувати натуральні числа від 2 до 12. На поданому далі рисунку (рис. 3.114) представлено результати експерименту. В експерименті взяло участь 16 студентів. В загальному пару кубиків підкинули 886 разів. Для розрахунку відносних частот і побудови відповідного полігону застосовували таблиці Google.

Щоб розрахувати ймовірності, потрібно визначити число варіантів представлення кожного з чисел від 2 до 12. Доцільно для підрахунку скористатися малюнком 3.113. За правилом множення можемо визначити, що загальна кількість варіантів  $6 \cdot 6 = 36$ . З них по одному варіанту припадає на числа 2 і 12:  $1+1=2$ ;  $6+6=12$ . По два варіанти припадають на числа 3 і 11:  $3=1+2=2+1$ ;  $11=5+6=6+5$ . Відповідно ймовірність того, що сума чисел на

верхніх гранях буде рівна 2 чи 12 визначається як  $1/36$ ; ймовірність випадання чисел 3 та 11 визначається як  $2/36$ . При цьому найбільше – 6 варіантів матиме число «7». А тому й найбільша ймовірність  $6/36$  (рис. 3.115).

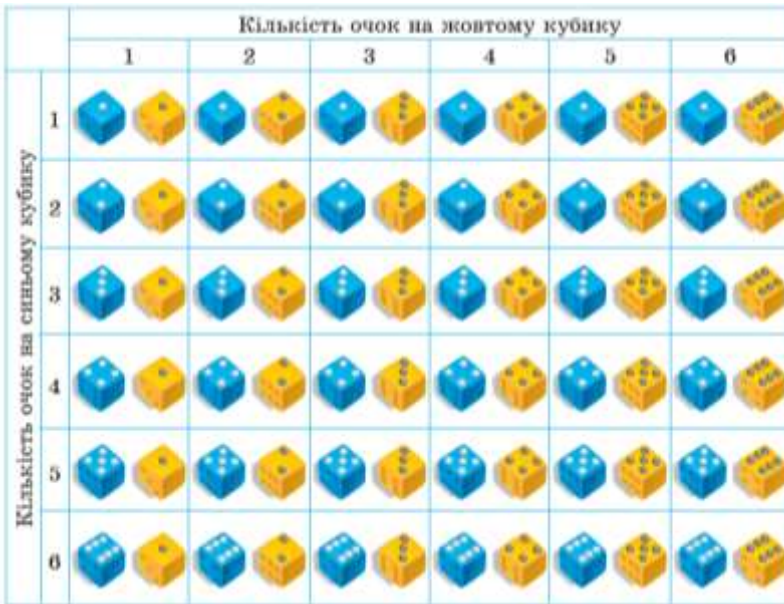


Рис. 3.113. Представлення можливих варіантів випадання очок при підкиданні двох гральних кубиків [131, с. 227].



Рис. 3.114. Полігон відносних частот та ймовірностей викидання суми чисел на двох верхніх гранях кубиків.



Сума очок на двох гральних кубиках

2 = 1+1: 1  
 3 = 1+2 = 2+1: 2  
 4 = 1+3 = 2+2 = 3+1: 3  
 5 = 1+4 = 2+3 = 3+2 = 4+1: 4  
 6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1: 5  
 7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1: 6  
 8 = 2+6 = 3+5 = 4+4 = 5+3 = 6+2: 5  
 9 = 3+6 = 4+5 = 5+4 = 6+3: 4  
 10 = 4+6 = 5+5 = 6+4: 3  
 11 = 5+6 = 6+5: 2  
 12 = 6+6: 1

Перевірити результати розрахунку ймовіостей частот

- $P(2)=P(12)=1/36 = 0,0278$ ;
- $P(3)=P(11)=2/36 = 0,0556$ ;
- $P(4)=P(10)=3/36 = 0,0833$ ;
- $P(5)=P(9)=4/36 = 0,1111$ ;
- $P(6)=P(8)=5/36 = 0,1389$ ;
- $P(7) = 6/36 = 0,1944$

$P(0) = 2^0 \cdot 0,0278 + 0,0556 + 0,0833 + 0,1111 + 0,1389 + 0,1944 = 1$

Таблиця для обчислення відносної частоти

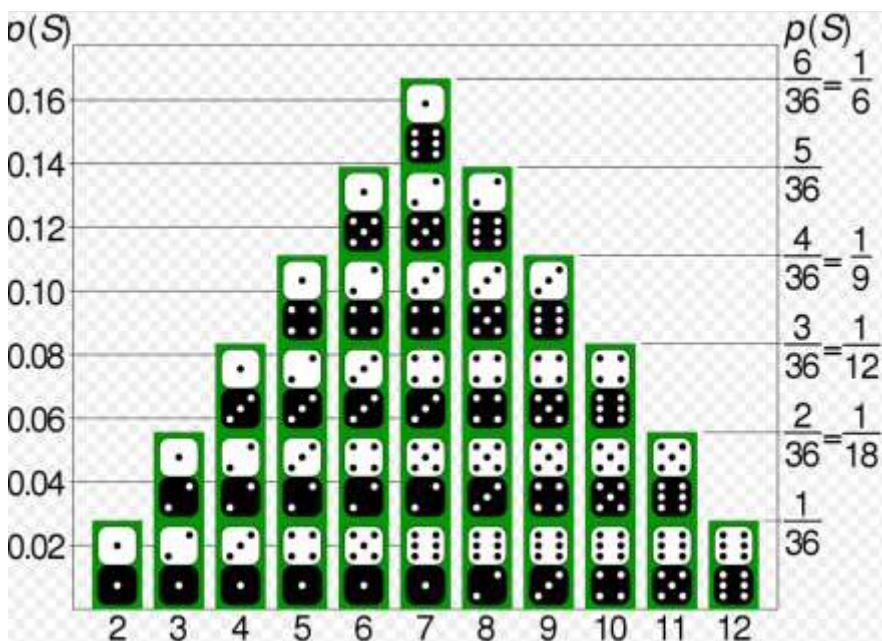


Рис. 3.115. Пояснення обчислення ймовірностей появи чисел на верхніх гранях кубиків [https://uk.wikipedia.org/wiki/Розподіл\_ймовірностей] .

Доцільно запропонувати учням / студентам написати фрагменти програми на Python для підкидання двох кубиків і обчислення суми чисел на верхніх гранях. Як за допомогою програми обчислити відносні частоти випадання чисел від 2 до 12, якщо підкинути кубики 100 разів?

Нижче подаємо фрагмент програми на Python, яка моделює підкидання двох кубиків, обчислює суму чисел на верхніх гранях та відносну частоту їх появи для 100 підкидань:

```

import random
def roll_dice():
    dice_1 = random.randint(1, 6) # перший кубик
    dice_2 = random.randint(1, 6) # другий кубик
    return dice_1, dice_2
def calculate_frequencies(num_rolls):
    frequencies = {n: 0 for n in range(2, 13)} # масив для зберігання частот
    for _ in range(num_rolls):
        dice_1, dice_2 = roll_dice()
        total = dice_1 + dice_2
        frequencies[total] += 1
    return frequencies
# Виклик функції та виведення результату
num_rolls = 100
result = calculate_frequencies(num_rolls)
print("Відносні частоти випадання чисел від 2 до 12:")
for num, frequency in result.items():
    print(f"Сума {num}: {frequency/num_rolls:.2f}")

```

На рис. 3.116 представлено фрагмент програми, складеної студентом, з демонстрацією результатів підкидання кубиків та обчислення відносних частот. У цій програмі використовується бібліотека **random** для генерації випадкових чисел, що моделюють підкидання кубиків. Функція **roll\_dice** генерує випадкові числа для двох кубиків. Функція **calculate\_frequencies** здійснює певну кількість підкидань кубиків та обчислює відносні частоти випадання сум чисел на верхніх гранях. Результат виводиться на екран, друкуючи відносні частоти для кожної суми від 2 до 12.



Рис. 3.116. Фрагмент програми з демонстрацією результатів підкидання двох кубиків та обчислення відносних частот.



### 3.28.2. «Лінгвісти» проводять експеримент з написанням слів.

**Стохастичний експеримент.** Алгоритм опрацювання результатів.

- 1) На трьох папірцях написати по чотири слова.
- 2) Підраховувати у кожному слові кількість літер.
- 3) Записати для кожної групи кількість слів, що мають парну кількість літер (варіанти 0, 1, 2, 3, 4).
- 4) Зібрати дані зі всієї групи. Розрахувати статистичну ймовірність події А – "слово має парну кількість цифр".
- 5) Побудувати полігон відносних частот кількості слів у кожній групі, що мають парну кількість цифр. По осі абсцис відкласти значення варіанти (0, 1, 2, 3, 4), по осі ординат – отримані статичні ймовірності (відносні частоти).
- 6) Розрахувати теоретично розрахувати ймовірності появи чисел 0, 1, 2, 3, 4; побудувати полігон ймовірностей. Порівняти результати експерименту і теоретичні розрахунки (рис. 3.117; рис. 118).

На рис. 3.117 представлено граф можливих варіантів для чотирьох слів у стовпці для розрахунку ймовірності написання слів з парною кількістю літер. Можливих варіантів буде  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ . З них по одному варіанту, коли всі чотири слова, написані у колонці, з парною кількістю літер і всі з непарною. По чотири варіанти, коли серед чотирьох чисел одне з непарною і три з парною, а також три з непарною, а одне з парною кількістю літер. Ймовірність такої події рівна  $4/16$ .



**Рис. 3.117. Полігон відносних частот та ймовірностей написання слів з парною кількістю літер.**

Для підрахунку кількості варіантів доцільно «рухатися» вздовж ланцюжка графа, поданого на рисунку 3.118. Під кожним ланцюжком

прописано, скільки разів в ланцюжку слів з парною кількістю літер. Найбільша ймовірність у випадку, коли з чотирьох слів два буде з парною кількістю літер. Ймовірність «двійки» рівна 6/16.

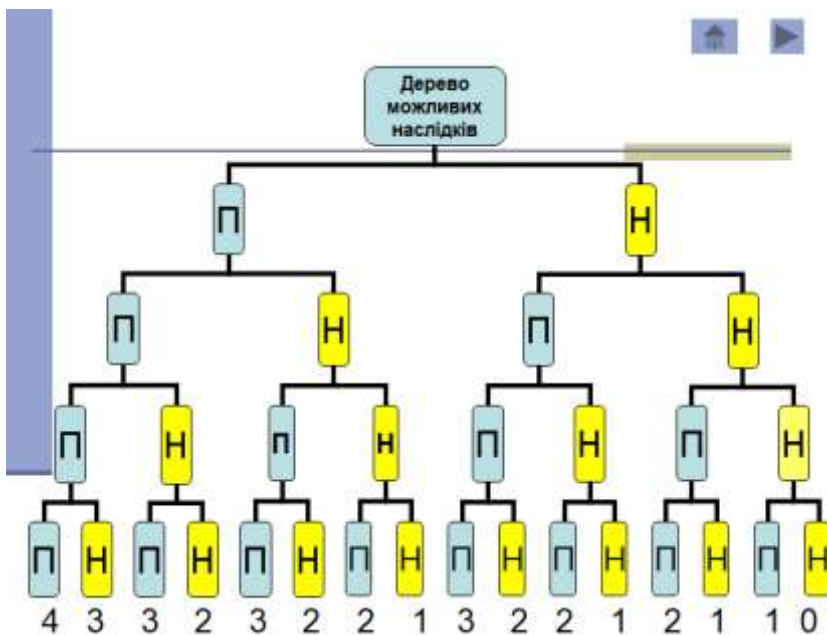


Рис. 3. 118. Граф можливих варіантів для розрахунку ймовірностей.

### 3.28.3. Задача Бюффона. Оцінка числа $\pi$ .

Учасники групи «Бюффон» підкидають голку на розграфлений папір, підраховують кількість перетинів голкою лінії.

Голку довжиною  $2 \cdot l$  навмання кидають на площину, покриту паралельними прямими, проведеними на однаковій відстані  $2 \cdot a$  одна від одної. Підраховують кількість перетинів голки з цими прямими, наближено визначають значення числа  $\pi$ .

На рис. 3.119 представлено фрагмент таблиці з зібраними даними та розрахунком числа  $\pi$ . Оскільки число підкидань незначне – не перевищує 1000, то отримане наближене значення значно відрізняється від істинного. Тобто, для отримання точніших результатів потрібно здійснювати більше реалізацій.

На рис. 3.120 подано фрагмент записів на віртуальній дошці з поясненнями до задачі Бюффона. Для обчислення необхідно визначити простір елементарних подій. Для цього описують положення голки кутом, який вона утворює з додатним напрямом осі абсцис та відстанню до

найближчої з горизонтальних ліній. При цьому кут  $\varphi$  вимірюється в межах від  $0^\circ$  до  $180^\circ$  (від 0 до  $\pi$  радіан). Простір елементарних подій подаємо у вигляді прямокутника, одна з сторін якого дорівнює  $\pi$ , а інша рівня половині відстані між горизонтальними лініями. Тоді в прямокутнику заштриховують фігуру, обмежену знизу віссю абсцис, а зверху графіком функції  $l \cdot \sin(\varphi)$ . Відношення площі утвореної фігури до площі прямокутника наближено дорівнює відношенню кількості перетинів голкою лінії до загального числа підкидань голки. Отримуємо формулу для наближеного обчислення  $\pi$ :

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{N_{\text{перетн}}}{N_{\text{кинуто}}}$$

В	Е	Г	Д	Ж	З
Кинути	Перетнула	Число pi			
50	23	2.90			
50	25	2.67			
48	21	3.05			
100	32	4.17			
50	15	4.44	l - половина довжини сірника		2
50	24	2.78	a - половина відстані між прямим		3
50	28	2.38			
50	24	2.78			
50	23	2.90			pi
50	26	2.56		703	318
50	28	2.38			
50	22	3.03	Всього	703	318
55	27	2.72			

Рис. 3.119. Результати експерименту з розрахунком числа  $\pi$ .

Ми запропонували студентам написати фрагменти програми на Python для визначення кількості перетинів горизонтальних ліній, відстань між якими 6 см, голкою, довжина якої 4 см. Здійснити в ході експерименту 200 підкидань голки. Нижче подаємо фрагмент коду.

У цій програмі використовується бібліотека **random**, щоб генерувати випадкові числа для позицій голки та лінії. Функція **count\_crossings** здійснює 200 підкидань голки та визначає, чи перетинає голка горизонтальну лінію. Результат, тобто кількість перетинів, виводиться на екран.

```
import random

def count_crossings():
    needle_length = 4 # довжина голки в см
    distance_between_lines = 6 # відстань між лініями в см
    crossings = 0 # лічильник перетинів

    for _ in range(200):
        line_position = random.uniform(0, distance_between_lines) # випадкова позиція лінії
        needle_position = random.uniform(0, distance_between_lines) # випад-
```

кова позиція голки

```

if needle_position <= needle_length and line_position <=
needle_position:
crossings += 1
return crossings
# Виклик функції та виведення результату
result = count_crossings()
print("Кількість перетинів голки:", result)

```

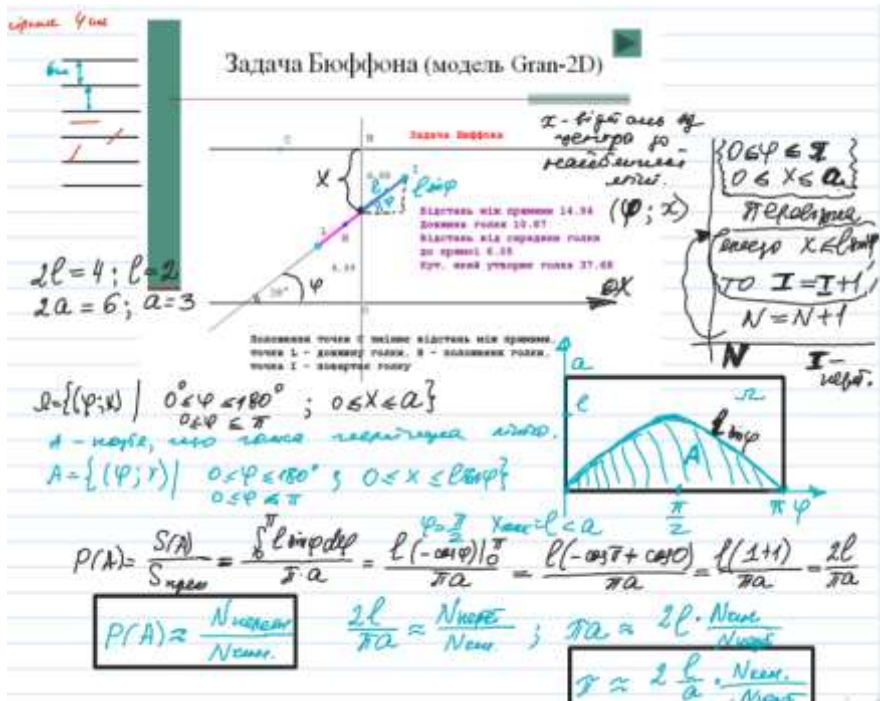


Рис. 3.120. Фрагмент записів на віртуальній дошці з поясненнями до задачі Бюффона.

3.28.4. Оцінка  $\pi$  через генерацію точок у квадраті

Оцінку методом Монте-Карло для значення  $\pi$  можна здійснити також шляхом генерації випадкових точок в квадраті і обчислення пропорції точок, що лежать усередині вписаного в квадрат круга, до числа точок, кинutih у квадрат (рис. 3. 121). Ймовірність того, що точка, кинута в квадрат, потрапить в круг, пропорційна відношенню площі круга до площі квадрата.



## Оцінка числа $\pi$



- Просту оцінку методом Монте-Карло для значення  $\pi$  можна знайти шляхом генерації випадкових точок в квадраті і перерахунок пропорції точок, що лежать усередині вписаного круга.
- Щоб за цим методом знайти число, потрібно значна кількість кидань, бо збігається до числа дуже повільно.

Ймовірність того, що точка, кинута в квадрат, потрапить в круг, пропорційна ...

відношенню площі круга до площі квадрата.

Рис. 3.121. Зображення моделі для оцінки числа  $\pi$ .

Ідея полягає в моделюванні випадкових точок  $(x, y)$  у двовимірній площині з базовою фігурою у вигляді квадрата, довжина сторони якого  $2r$ , з центром у  $(0;0)$ . Розглядають коло всередині тієї самої області з радіусом  $r$  і вписане в квадрат. Потім обчислюємо відношення кількості точок, які лежать всередині кола, і загальної кількості згенерованих точок. Відомо, що площа квадрата дорівнює  $4r^2$  кв. одиниць, а площа круга дорівнює  $\pi r^2$ . Тому оцінку числа  $\pi$  будемо здійснювати за формулою:

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{N \text{ точок, що потрапили у круг}}{N \text{ точок, кинutih у квадрат}}$$

Привабливість алгоритму полягає в тому, що взагалі не потрібна графіка чи симуляція для відображення згенерованих точок. Просто генеруємо випадкові  $(x, y)$  пари, а потім перевіряємо, чи виконується нерівність  $x^2 + y^2 \leq r^2$ . Якщо так, то збільшуємо кількість точок, які з'являються всередині кола.

У рандомізованих алгоритмах і алгоритмах моделювання, таких як Монте-Карло, чим більше число ітерацій, тим точніший результат. Щоб за цим методом оцінити число  $\pi$ , потрібно значна кількість реалізацій. Мова йде саме про оцінку, а не обчислення значення числа.

Ми пропонували студентам скласти фрагмент програми на різних мовах програмування. Фрагмент програми на мові Python.

```
import random
Iterations = 500
```

```
circle_points = 0
square_points = 0
```

```
# Всього згенеровано випадкових чисел: можливі значення x та y
for i in range(Iterations **2):
```

```
# Генерація чисел відбувається за рівномірним неперервним розподілом
# ймовірностей з інтервалу (-1; 1).
rand_x = random.uniform(-1, 1)
rand_y = random.uniform(-1, 1)
```

```

# Обчислюється відстань між точкою з координатами (x, y) та
# початком координат
origin_dist = rand_x**2 + rand_y**2

# Перевірка, чи точка (x, y) лежить всередині кола радіуса 1
# Якщо точка належить колу, то додається +1 в circle_points
if origin_dist <= 1:
circle_points += 1

square_points += 1

# Здійснюється оцінка числа pi,
#  $\pi \approx 4 \cdot (N \text{ точок, що потрапили у круг}) / (N \text{ точок, кинутих у квадрат})$ 
pi = 4 * circle_points / square_points

## print(rand_x, rand_y, circle_points, square_points, "-", pi)
# print("\n")
print("Остаточна оцінка Pi=", pi)

```

«Флористи» висівають для проростання у горщику редиску чи помідори, перевіряють, чи відповідає відсоток проростання насіння, тому відсотку, який вказаний на упаковці.

«Спец-агенти» розкриють таємниці «секретного» методу Монте-Карло, зокрема представлять фрагменти програм, написані в одній з мов програмування.

### 3.28.5. Обчислення визначених інтегралів методом Монте-Карло

#### I спосіб. Алгоритм методу:

Фігура складної форми описується простою фігурою (квадрат, прямокутник тощо) відомої площі (рис. 3.122).



Рис. 3.122. Обчислення площі сегмента методом Монте-Карло (I).

На базовій фігурі випадковим чином розставляється  $n$  точок.

Площа фігури складної форми обчислюється через відношення точок, що потрапили в неї, до загального числа точок  $n$ . Чим більше число  $n$ , тим шукане значення площі буде точнішим.

### II спосіб. Алгоритм методу:

Випишують підінтегральну функцію.

Записують  $n$  випадкових рівномірно розподілених чисел.

Обчислюють значення аргументу через випадкові рівномірно розподілені числа  $xi=a+(b-a)Ri$ ,  $a$  – нижня межа інтегрування,  $b$  – верхня межа,  $Ri$  – випадкові, рівномірно розподілені числа від 0 до 1.

Обчислюють значення підінтегральної функції в точках  $xi$ , далі знаходять середнє значення отриманих значень підінтегральної функції.

Наступним кроком отримане середнє значення множать на довжину відрізка інтегрування. Отримують наближене значення інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(a + (b-a) \cdot Ri)$$

На рис. 3.123 подано фрагмент записів у таблиці Google обчислення площі сегмента методом Монте-Карло за другим алгоритмом.

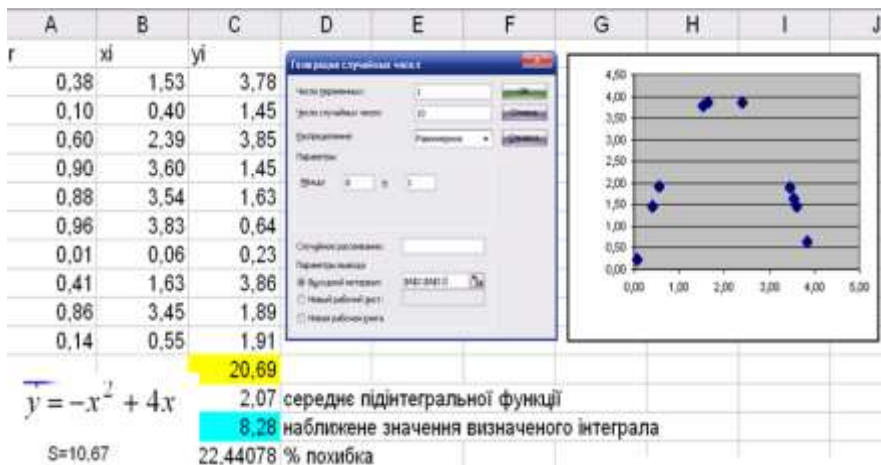


Рис. 3.123. Обчислення площі сегмента методом Монте-Карло (II).

Проведені та опрацьовані експерименти мають переконати здобувачів освіти в тому, що предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Зокрема, при масових випробуваннях відносні частоти відбування подій будуть незначно відрізнятися від ймовірностей. Для того, щоб за частотою

випадкової події можна було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою. Таким чином, частота випадкової події дає змогу лише наближено оцінити ймовірність випадкової події. Чим більше випробувань провести, тим точнішою буде оцінка ймовірності випадкової події за її частотою.

Завдяки тому, що математична статистика є наукою про планування експериментів та аналіз їх результатів, здобувачі освіти можуть знаходити закономірності у випадкових процесах, що відбуваються масово в однорідних умовах, краще зрозуміти, як приймають рішення в умовах невизначеності.

### ***Контрольні питання і завдання***

1. Які STEM-компетентності можуть набувати учні, беручи участь у проєкті «Метод Монте-Карло»?

2. Які напрями досліджень можна запропонувати учням старшої школи, студентам коледжів із цього проєкту, крім поданих у тексті? Які спільні завдання з математики та інформатики можуть виконувати здобувачі освіти у ході проєкту?

3. З яких етапів складається процес підготовки до проєкту та його впровадження?

4. Які форми доцільно запропонувати здобувачам освіти для оцінювання та самооцінювання роботи над проєктом, спрямування їх на успіх?

5. Які звітні документи доцільно запропонувати здобувачам освіти для звіту про роботу над проєктом?

6. Провести стохастичний експеримент та опрацювати його результати. На папір нанесено квадратну сітку. Довжина сторони квадрата рівна 1,5 діаметра монети, яку випадково кидають на цей папір. Як часто монета перетинатиме лінії сітки? Які шанси виграти приз, якщо він призначається у випадку, коли монета після падіння не перетне лінії сітки? Обґрунтувати отримані результати, обчислюючи ймовірність події «монета перетнула лінію». Порівняти її з отриманою відносною частотою відбування події.



## РОЗДІЛ 4. ПРОГРАМА ВИБІРКОВОЇ ДИСЦИПЛІНИ, ДІАГНОСТИКА STEM-КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ

### 4.1. Програма вибіркової дисципліни «Математика в STEM-навчанні»

Таблиця 4.1

#### Загальні відомості

<b>Рівень вищої освіти</b>	Перший (бакалаврський)
<b>Спеціальність</b>	014 Середня освіта (Математика). Навчальна дисципліна вільного вибору студента.
<b>Освітня програма</b>	Доступна для всіх здобувачів вищої освіти
<b>Форма навчання</b>	Денна
<b>Статус дисципліни</b>	Вибіркова
<b>Семестр</b>	3 курс, 6 семестр
<b>Вимоги до допуску</b>	Наявність базових знань з шкільного курсу математики, навичок використання ІКТ.
<b>Обсяг дисципліни</b>	Кредити – 3,0. Загальний обсяг годин – 90 год. Годин аудиторної роботи – 32 год, з них 4 год. лекції, 28 год. лабораторні заняття; годин самостійної роботи – 58 год.
<b>Форма звітності</b>	Залік
<b>Електронні навчальні курси</b>	<a href="https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=545">https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=545</a> <a href="https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=543">https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=543</a>
<b>Аудиторних занять у тиждень</b>	Тижневе аудиторне навантаження 2 години згідно розкладу занять.

#### АНОТАЦІЯ

Предметом вивчення навчальної дисципліни є математика в STEM-навчанні, сучасні технології навчання математики, включаючи комп'ютерно-орієнтовані засоби, методи і форми навчання, прикладну спрямованість навчання. Навчальна дисципліна доповнює професійну математичну і методичну підготовку учителя розглядом основних аспектів теорії та практики STEM-навчання. Навчальна дисципліна є інтегрованою і опирається на компетентності здобувачів освіти, набуті при вивченні методики навчання математики, інформаційно-комунікаційних технологій в освіті, елементарної математики та педагогіки.

В основу концептуальних засад курсу покладено проектну методику на основі самостійної (індивідуальної чи групової) дослідницької діяльності слухачів. У навчанні здобувачі освіти мають набути власного досвіду

постановки і проведення навчальних досліджень на основі комп'ютерного моделювання у середовищах підтримки математичної діяльності; добору засобів та методів навчання з використанням програмних засобів; підготовки дидактичних матеріалів, засобів наочності тощо. Навчання за кожним модулем має подібну структуру: обговорення в парах чи в малих групах завдань для домашнього виконання та внесення до складових портфоліо відповідних змін; обговорення актуальних проблем, пов'язаних з інтегрованим навчанням, STEM-навчанням, ефективним використанням інформаційно-комунікаційних та інших інноваційних педагогічних технологій у навчальному процесі; розроблення відповідних електронних наочностей, планів чи планів-конспектів уроків; оцінювання в групах розроблених складових портфоліо.

### ЦІЛІ НАВЧАННЯ, КОМПЕТЕНТНОСТІ ТА ПРОГРАМНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Цілі навчання, компетентності та програмні результати узгоджено з проектом<sup>1</sup> стандарту для бакалаврського рівня вищої освіти.

У процесі навчання будуть удосконалюватися **загальні компетентності**. Набудуть подальшого розвитку такі **фахові компетентності**, як здатність перенесення системи наукових знань у професійну діяльність та в площину навчального предмету; здатність здійснювати цілепокладання, планування та проектування процесів навчання і виховання здобувачів освіти з урахуванням їх вікових та індивідуальних особливостей, освітніх потреб і можливостей; добирати та застосовувати ефективні методики й технології навчання, виховання і розвитку здобувачів освіти; здатність формувати і розвивати в них ключові та предметні компетентності засобами навчального предмету та інтегрованого навчання; формувати ціннісне ставлення, розвивати критичне мислення; здатність до суб'єкт-суб'єктної (рівноправної та особистісно-зорієнтованої) взаємодії з здобувачами освіти в освітньому процесі, можливого залучення батьків до освітнього процесу на засадах партнерства.

Учасники курсу зможуть удосконалити такі **компетентності предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)** як здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання; здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі; здатність до кількісного мислення, розробки і дослідження математичних моделей явищ,

---

<sup>1</sup> Проект Стандарту вищої освіти України перший (бакалаврський) рівень, галузь знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальність 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями). Київ, 2023.

процесів та систем, використання обчислювальних інструментів для чисельних і символічних розрахунків; здатність застосовувати спеціалізовані мови програмування та пакети прикладних програм; здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів; здатність розв'язувати задачі шкільного курсу математики базової середньої школи різного рівня складності і пояснювати їх розв'язання учням; здатність діяти за заданими базовими математичними алгоритмами, здійснювати їх вибір і застосування.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач повинен

**знати:** основні концепції, психолого-педагогічні аспекти використання математики у STEM (STEAM) навчанні, базові засади створення і впровадження STEM-проектів, проведення STEM-уроків, використання веб-ресурсів підтримки навчального процесу; діяльнісні середовища професійного призначення, зокрема педагогічні програмні засоби навчання математики, їх використання в навчальному процесі для реалізації педагогічних ідей; технологію розв'язування математичних задач з використанням засобів сучасних інформаційних технологій, зокрема системи динамічної математики;

**вміти:** використовувати ІКТ для підготовки, супроводу, аналізу, коригування навчального процесу, управління навчальним процесом; поєднувати традиційні методичні системи навчання з інноваційними інформаційно-комунікаційними технологіями; розробляти і використовувати веб-ресурси, розробляти і впроваджувати STEM-проекти, зокрема, у навчанні математики; використовувати у навчанні міжпредметні зв'язки математики з іншими навчальними дисциплінами; добирати раціональні методи і засоби навчання, враховуючи індивідуальні особливості учнів/студентів коледжів, їх нахили і здібності; на основі розуміння сутності неформалізованих, творчих компонентів мислення здійснювати постановку проблеми і добір потрібних операцій з використанням інформаційно-комунікаційних технологій навчання, що приводять до її розв'язування.

До **програмних результатів навчання** за даною навчальною дисципліною можна віднести те, що майбутній учитель умітиме враховувати в освітньому процесі закономірності розвитку, вікові та інші індивідуальні особливості учнів; зможе краще планувати та проектувати процеси їх навчання і виховання на основі компетентнісного підходу з урахуванням їх освітніх потреб; здійснювати добір і застосовувати сучасні освітні технології та методики для формування предметних компетентностей учнів; критично оцінювати результати їх навчання та ефективність уроку; вибрати відповідні форми та методи виховання учнів на уроках і в позакласній роботі; застосовувати сучасні ІКТ та цифрові технології у професійній діяльності.

До **програмних результатів навчання, пов'язаних з предметною**

**спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)**, доцільно віднести наступні: майбутній учитель демонструє навички розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; виконує базові перетворення для специфічних ситуацій, використовує спеціалізовані програмні засоби комп'ютерної та прикладної математики та інтернет-ресурси; застосовує методи математичного моделювання; природничих та/або соціальних процесів; демонструє здатність розв'язувати задачі шкільного курсу математики; вибирати математичні методи розв'язування задач; показує здатність формувати ціннісний аспект математичного знання, координувати його емоційне сприйняття учнями, розробляти і пропонувати різні форми та види виховання позитивного ставлення до математики та мотивації учнів до засвоєння її основ та методів; генерує в учнів розуміння основ математичного моделювання, готовність до застосування моделювання для розв'язування задач, формування математичних компетентностей учнів.

### **ВИДИ РОБІТ І ЗАВДАНЬ. ІНСТРУМЕНТАРІЙ НАВЧАННЯ.**

Дискусійні заняття з викладачем і учасниками курсу; розробка і впровадження STEM-проектів. Курс орієнтовано на активні форми навчання: проведення навчальних експериментів, підготовку дидактичних та методичних матеріалів, розробок уроків алгебри і геометрії, доповідей, презентацій, використання електронних навчальних курсів і засобів спілкування у мережі. Розв'язування прикладних задач з математики, зокрема з використанням системи динамічної математики. проектування та розробка STEM-уроків. Ознайомлення з нормативними документами щодо впровадження STEM-навчання.

Для забезпечення навчального процесу необхідно мати підключення до мережі Інтернет з можливістю працювати з хмарними сервісами Google чи Microsoft, вільним програмним забезпеченням [LearningApps](#), системою динамічної математики [GeoGebra](#) та ін.

### **ПОЛІТИКИ КУРСУ**

Навчання може здійснюватися як онлайн, так і в аудиторіях навчального закладу. У випадку оффлайн-навчання передбачається систематичне відвідування аудиторних занять, за винятком поважних причин, використання у навчанні додатків для мобільних телефонів. Вимоги до подання виконаних завдань розміщені у електронному навчальному курсі. При організації освітнього процесу в КДПУ студенти та викладачі діють відповідно до [нормативної бази університету](#). Зокрема, дотримуються Положення про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти КДПУ ([Завантажити](#)).

### **СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ**

Поточний (усне опитування, перевірка домашнього завдання, тесту-

вання) та підсумковий контроль – демонстрація та оцінювання розробленого портфоліо (залік). Система оцінювання – накопичувальна. Шкала оцінювання – 100-бальна. Самостійна та індивідуальна робота включає опрацювання відповідних розділів навчального посібника, ресурсів електронного курсу, участь в обговоренні педагогічних проблем за темою заняття, розробка і наповнення блогу учителя математики з використанням інструменту Blogger / сайту / розробка власного каналу. Це головний продукт проектної діяльності. Курс закінчується захистом кожним здобувачем створеного протягом вивчення матеріалу власного портфоліо, що містить блог чи сайт вчителя, розроблені план-конспекти STEM-уроків, наочностей, створених з використанням системи динамічної математики, опрацювання статистичних даних.

### МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, РЕСУРСИ

Електронний навчальний курс «Математика в STEM-навчанні», розроблений на платформі MOODLE. Електронні підручники та посібники, зразки електронних документів, методичні рекомендації до виконання завдань, ілюстративні матеріали, базова та додаткова література.

### СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Таблиця 4.2

#### Основні теми курсу

№ ЗМ	Теми змістових модулів	Години	
		АР	СР
<b>Змістовий модуль 1. STEM-навчання: від теорії до практики впровадження Лекції.</b>			
1.1	Методична система STEM-навчання. STEM- компетентності, ключова та предметні математичні компетентності. Реалізація елементів STEM-освіти в умовах сучасного навчального процесу. Розвиток STEM-компетентностей здобувача освіти у процесі STEM-навчання. Проблеми підготовки учителя до впровадження STEM-навчання.	2	4
1.2	Методи математичного моделювання у STEM-навчанні. Прикладні задачі. Інтегровані уроки та міжпредметні зв'язки математики з фізикою, хімією, інформатикою, біологією, лінгвістикою як основа для STEM-навчання. Навчальні проєкти як основа STEM-навчання.	2	4
<b>Всього:</b>		<b>4</b>	<b>8</b>

<b>Змістовий модуль 2.</b>			
<b>Планування і впровадження STEM-проектів у навчанні геометрії.</b>			
<b>Лабораторні заняття.</b>			
2.1.	Система динамічної математики і спеціалізовані математичні додатки для мобільних телефонів, додатки доповненої реальності як інструменти STEM-навчання. Дослідження властивостей геометричних перетворень. Електронні інструменти. STEM-проекти, пов'язані з геометричними перетвореннями фігур: симетрією, паралельним перенесенням, поворотом, перетворенням подібності.	2	4
2.2.	Конструктивна геометрія. Система динамічної математики GeoGebra: модуль Геометрія. Розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки з використанням електронних інструментів. STEM-проекти, пов'язані з правильними багатокутниками та многогранниками.	2	4
2.3.	Вимірювання на місцевості. Використання додатку Multi Measures.	2	2
2.4.	Геометричні форми у мистецтві та архітектурі. Програма TinkerCAD в проектному навчанні стереометрії.	2	2
2.5.	Мейкерство як інноваційний підхід впровадження STEM. Голограма і многогранники. Виготовлення правильних та напівправильних многогранників. 3D-Геометрія GeoGebra. Додатки доповненої та віртуальної реальності у STEM-проектах з стереометрії, зокрема AR GeoGebra.	2	2
2.6.	Математика у робототехніці.	2	4
	<b>Всього:</b>	<b>12</b>	<b>18</b>
<b>Змістовий модуль 3.</b>			
<b>Планування і впровадження STEM-проектів у навчанні алгебри, алгебри і початків аналізу.</b>			
3.1.	Побудова графіків функціональних залежностей, розв'язування задач шкільного курсу алгебри. STEAM-проект «Малюємо графіками функцій».	2	2

Продовж. табл. 4.2

3.2.	Фінансова математика і підприємництво у STEM-навчанні.	2	2
3.3.	Застосування методів оптимізації у розробці STEM-проектів «Економна економіка» (нерівність Коші, нерівність трикутника, властивості функцій, дослідження функцій з використанням похідної).	2	2
3.4.	Стохастика у STEM-навчанні, наукові засади опрацювання експериментальних даних (Microsoft Excel, GeoGebra, Google-таблиці).	2	4
3.5.	Метод Монте-Карло, розгляд алгоритмів реалізації імітаційного моделювання.	2	4
<b>Всього:</b>		<b>10</b>	<b>14</b>
<b>Змістовий модуль 4.</b>			
<b>Підготовка до презентації власного проекту.</b>			
4.1.	Технологія розробки STEM-проекту. Організаційно-методичні аспекти планування STEM-проектів, створення технологічних карт.	2	8
4.2.	Демонстрація, розробленого STEM-проекту.	2	6
4.3.	Обговорення, рецензування, оцінювання, удосконалення розроблених STEM-проектів.	2	4
<b>Всього:</b>		<b>6</b>	<b>18</b>
<b>Всього за навчальною дисципліною:</b>		<b>32</b>	<b>58</b>

#### 4.2. Діагностика STEM-компетентностей здобувачів освіти

У табл. 4.3 подано перелік розроблених і адаптованих анкет для діагностики STEM-обізнаності учителів / викладачів фахових коледжів та учнів/студентів фахових коледжів, мотивації навчальної діяльності здобувачів освіти та комунікативності. Запропоновано низку завдань для визначення рівня сформованості STEM-компетентностей здобувачів освіти.

##### 4.2.1. Анкета 1. Визначення стану впровадження STEM-освіти у навчальний процес

Анкета визначення стану впровадження STEM-освіти у навчальний процес закладів освіти у навчанні математики (для вчителів / викладачів фахових коледжів).

**Мета:** визначити стан впровадження STEM-освіти у навчальний процес старшої школи / фахових коледжів з вивчення математики. Вчителям та методистам загальноосвітніх закладів, викладачам фахових коледжів

## QR-коди анкет та тесту

	
Додаток А (STEM-обізнаність вчителів) <a href="https://forms.gle/DtqNvAVaT6fO9Z4Y7">https://forms.gle/DtqNvAVaT6fO9Z4Y7</a>	Додаток Б (STEM-обізнаність учнів / студентів 1-2 курсів коледжів) <a href="https://forms.gle/sWHFAGxyj4B1epgdA">https://forms.gle/sWHFAGxyj4B1epgdA</a>
	
Додаток В (мотивація) <a href="https://forms.gle/fmGbVaCLURpQCBO17">https://forms.gle/fmGbVaCLURpQCBO17</a>	Додаток Г (комунікативність) <a href="https://forms.gle/bJ7qvGWXtUrvqNnM6">https://forms.gle/bJ7qvGWXtUrvqNnM6</a>
	
Додаток Д (мотивація за А. О. Реана, В. О. Якуніна) <a href="https://forms.gle/mxg3xxMgN95ZYUEu6">https://forms.gle/mxg3xxMgN95ZYUEu6</a>	Додаток Е (задачі) <a href="https://forms.gle/uQLGucgur9W1T8k76">https://forms.gle/uQLGucgur9W1T8k76</a>

пропонується прочитати твердження та за допомогою шкали оцінок висловити міру згоди з ними або вказати, на їх погляд, правильне твердження ( <https://forms.gle/DtqNvAVaT6fO9Z4Y7>).

- 1. Ваша стать:**  Чол.  Жін.
- 2. Ваш вік:** Вкажіть повну кількість років .
- 3. Рівень Вашої освіти**  
 початковий рівень (короткий цикл) вищої освіти



- перший (бакалаврський) рівень вищої освіти
  - другий (магістерський) рівень вищої освіти
  - третій (освітньо-науковий) рівень вищої освіти
  - науковий рівень вищої освіти
  - середня спеціальна освіта
  - інший варіант відповіді
4. **Чи маєте Ви педагогічну освіту?**  Так  Ні
  5. **Ваш стаж педагогічної діяльності:** Вкажіть кількість років
  6. **Вкажіть тип освітнього закладу, у якому Ви здійснюєте педагогічну діяльність:**  Школа  Ліцей  Коледж  Інше
  7. **Які навчальні предмети Ви викладаєте?**
    - Математика  Інформатика  Фізика  Хімія  Інші
  8. **Чи впроваджуєте Ви у навчальний процес старшої школи нові освітні технології?**  Так  Ні  Частково
  9. **Наскільки Ви обізнані у змісті поняття «STEM-освіта»?**
    - Добре обізнаний  Частково обізнаний
    - Погано обізнаний зі змістом поняття  Не обізнаний
  10. **На Вашу думку, STEM-навчання це:**
    - етап уроку, який спрямований на формування математичних і мовленнєвих компетентностей;
    - навчальний процес, який сприяє формуванню ІКТ-компетентностей та практичним навичкам;
    - системний навчальний процес, який спрямовано на формування ключових компетентностей і практичних навичок;
    - інша відповідь.
  11. **Як Ви вважаєте, що з наведеного не є ознакою STEM-навчання?**
    - подання навчальної інформації через життєві ситуації
    - заохочення до експериментальних досліджень
    - прикладний, міждисциплінарний підхід
    - заучування як провідна форма опанування матеріалу.
  12. **Якщо STEM-навчання інтегровано з мистецтвом, то як буде звучати така аббревіатура?**
    - STEAM;  STREAM;  STROM.
  13. **Чи організовуєте Ви роботу в старшій школі / фаховому коледжі з використанням компонентів STEM?**  Так  Ні  Частково
  14. **Які навчальні засоби та обладнання необхідні для впровадження STEM-освіти в старшій школі / фаховому коледжі?**
    - мультимедійна / віртуальна дошка,  телевізор,
    - комп'ютерне обладнання,  3D принтер,
    - колонки (чи навушники),  VR окуляри,

- мережеве обладнання (бездротові мережі),
  - планшети / ноутбуки / телефони,  AR книги
  - нічого з переліченого вище,  інший варіант відповіді.
15. **Які використовували навчальні засоби та обладнання для впровадження STEM-освіти в старшій школі / фаховому коледжі?**
- мультимедійна / віртуальна дошка,  телевізор,
  - комп'ютерне обладнання,  3D принтер
  - колонки (чи навушники),  VR окуляри,
  - мережеве обладнання (бездротові мережі),  AR книги,
  - планшети / ноутбуки / телефони,
  - нічого з переліченого вище,  інший варіант відповіді.
16. **Чи забезпечені Ви сучасними засобами програмного забезпечення для впровадження STEM-освіти в освітній процес старшої школи / фахового коледжу?**  Так,  Ні,  Частково.
17. **Чи використовуєте Ви у STEM-заходах системи динамічної математики, наприклад, GeoGebra?**
- Так,  Ні,  Ваш варіант.
18. **Чи використовуєте технологію доповненої реальності під час освітнього процесу?**  Ваша відповідь
19. **Чи використовували Ви мобільні електронні засоби (ноутбуки, планшети, смартфони) для впровадження STEM-освіти в навчальний процес старшої школи / фахового коледжу з вивчення математики під час очного навчання?**
- Так,  Ні,  Частково.
20. **Як доцільніше впроваджувати STEM-підходи в закладах освіти?**
- всі уроки з предмета розробляти та проводити на засадах STEM-підходів;
  - застосовувати елементи STEM на окремих заняттях з предмету;
  - впроваджувати STEM-підходи системно: включати елементи STEM на кожному уроці, окремі проводити як STEM-уроки, реалізовувати STEM-проекти;
  - інший варіант.
21. **Чи впроваджуєте Ви дослідницьку та проектну діяльність здобувачів освіти із застосуванням методів STEM?**
- Так,  Ні,  Частково.
22. **Чи задоволені Ви загальною організаційною роботою в закладі освіти стосовно впровадження методів STEM в освітні процеси?**  Так,  Ні,  Частково.
23. **Чи отримуєте Ви від керівництва закладу освіти додаткову професійну підтримку та засоби професійного навчання для впровадження STEM-освіти?**  Так,  Ні,  Частково.

24. **Як Ви оцінюєте власний рівень самоосвіти для впровадження STEM-навчання в освітній процес старшої школи / / фахового коледжу?**  
 Високий,  Достатній,  Середній,  Низький.
25. **Чи використовуєте Ви засоби самоосвіти для впровадження STEM-навчання в освітній процес старшої школи / фахового коледжу з вивчення математики?**  Так,  Ні,  Частково.
26. **Чи вважаєте ви достатнім та доступним сучасний рівень підтримки для самоосвіти вчителів / викладачів у впровадженні нових технологій в освітній процес старшої школи фахових коледжів?**  Так,  Ні,  Частково.
27. **Які з перелічених компетентностей мають відношення до STEM-компетентностей? (можна обрати декілька варіантів)**  
 Математична компетентність;  
 Компетентність у галузі науки;  
 Компетентність у галузі технологій;  
 Компетентність у галузі інженерії;  
 Ваші варіанти відповіді.
28. **Які методи STEM-освіти Ви впроваджуєте в освітній процес старшої школи / фахових коледжів? (можна обрати декілька варіантів відповіді)**  
 STEM-курс,  STEM-проект,  STEM-квест,  
 STEM-фестиваль,  STEM-хакатон,  Інтегровані уроки,  
 Інший варіант відповіді.
29. **Розташуйте у доцільній послідовності етапи дослідження:**  
 гіпотези, висновок, аналіз, проблема, експеримент;  
 гіпотези, проблема, експеримент, аналіз, висновок;  
 проблема, гіпотези, експеримент, аналіз, висновок;  
 аналіз, проблема, висновок, гіпотези, експеримент;  
 експеримент, гіпотези, аналіз, проблема, висновок.
30. **У яких формах навчання найбільш ефективно, з Вашої точки зору використовувати компоненти STEM-освіти?**  
 очна (офлайн);  дистанційна (онлайн);  змішана;
31. **Чи впливає використання STEM-освіти на мотивацію учнів старших класів / студентів 1-2 курсів фахових коледжів до вивчення предметів, пов'язаних із наукою, технікою та математикою?**  Так,  Ні,  Частково.
32. **З якого етапу методично обґрунтовано починати STEM-урок / практичне чи лабораторне заняття?**  
 актуалізації знань, вмінь та навичок;  
 постановки та визначення для розв'язання актуальної значущої проблеми для учнівства;

- фронтальної бесіди та перевірки домашніх завдань;  інше.
33. **Чи спостерігали Ви позитивні зміни у рівнях набутих знань та вмій учнів старшої школи / студентів 1-2 курсів фахових коледжів після впровадження STEM-освіти?**  
 Так,  Ні,  Частково
34. **Які перешкоди виникали у Вас при впровадженні STEM-освіти в навчальний процес старшої школи / фахових коледжів? (можна обрати декілька варіантів)**  
 Недостатність матеріально-технічної бази для впровадження STEM-освіти у закладі освіти.  
 Недостатня фахова підготовка вчителів для впровадження STEM-освіти у навчальний процес старшої школи / фахових коледжів з вивчення математики.  
 Недостатня підтримка керівництва школи / коледжу та відсутність фінансування для впровадження STEM-освіти в освітній процес старшої школи / фахових коледжів з навчання математики.  
 Відсутність мотивації учнів старшої школи / студентів 1-2 курсів фахових коледжів до вивчення математики засобами STEM-освіти.  Ваш варіант відповіді.
35. **Як ви оцінюєте зацікавленість здобувачів освіти у вивченні STEM-предметів?**  
 Зацікавленість здобувачів освіти у вивченні STEM-предметів висока.  
 Здобувачі освіти виявляють інтерес до STEM-освіти та беруть участь у проєктній та дослідницькій діяльності.  
 Частина здобувачів освіти проявляє більший інтерес до інших предметів, що призводить до складнощів у роботі на уроках математики засобами STEM-освіти.  
 Часто виникає проблема відсутності мотивації до навчання математики засобами STEM-освіти.  
 Ваш варіант відповіді.
36. **Які переваги Ви бачите у використанні STEM-освіти в навчальному процесі старшої школи? (можна обрати декілька варіантів).**  
 STEM-освіта допомагає розвивати критичне мислення та розв'язувати складні завдання.  
 Застосування STEM-освіти сприяє підвищенню мотивації здобувачів освіти до навчання та формуванню практичних навичок.  
 Використання STEM-освіти сприяє розвитку технологічних здібностей та підготовці здобувачів освіти до майбутньої професійної діяльності.  
 STEM-освіта допомагає інтегрувати знання з різних предметів

та навчати здобувачів освіти бачити зв'язки між ними.

Ваш варіант відповіді.

37. **Які перспективи Ви бачите у використанні STEM-освіти в навчальному процесі старшої школи / фахового коледжу?**  
(можна обрати декілька варіантів)

Впровадження STEM-освіти дозволить більш ефективно підготувати здобувачів освіти до майбутніх професій, пов'язаних з наукою, технологією та інженерією.

Впровадження STEM-освіти забезпечить ширшу та змістовнішу підготовку здобувачів освіти до вступу в вищі навчальні заклади та подальшої кар'єри.

STEM-освіта може сприяти підвищенню інтересу здобувачів освіти до вивчення природничих наук, технологій та інженерії, що може призвести до збільшення кількості фахівців у цих галузях.

STEM-освіта допоможе підготувати здобувачів освіти до майбутнього ринку праці та розвивати конкурентоздатних фахівців.

Ваш варіант відповіді.

38. **При викладанні яких тем Ви використовували методи STEM-освіти в старшій школі?**  Ваша відповідь.

### **Інтерпретація результатів анкетування.**

Відповіді вчителів, методистів освітнього закладу; викладачів 1-2 курсів фахових коледжів будуть проаналізовані та визначені основні аспекти і тенденції щодо ефективності та перспективних напрямків і шляхів впровадження методів STEM-освіти у навчальні процеси.

#### *4.2.2. Анкета 2. Визначення обізнаності здобувачів освіти з поняттям та змістом STEM-освіти*

<https://forms.gle/sWHFAGxyj4B1epgdA>

**Мета:** визначити ступінь обізнаності учнів старшої школи / студентів 1-2 курсів фахових коледжів з поняттям та змістом STEM-освіти. Здобувачам освіти пропонується прочитати питання та за допомогою запропонованих варіантів надати відповідь. Для цього слід поставити напроти кожного твердження поставити позначку, яка означає відповідь, що відповідає його точці зору або вписати у зазначену графу свій варіант відповіді на запитання.

1. **Ваша стать:**  Чол. ;  Жін.

2. **Ваш вік :** Вкажіть повну кількість років  .

3. **Вкажіть тип освітнього закладу, у якому Ви навчаєтесь**

- Школа;  Ліцей,  Коледж,  Інше.
- 4. Наскільки Ви обізнані у змісті поняття «STEM-освіта»?**  
 Добре обізнаний;  Частково обізнаний;  
 Погано обізнаний зі змістом поняття;  Не обізнаний.
- 5. Абревіатура STEM розшифровується як**  
 System (Система), Topics (Предмет), Economy (Економіка) та Model (Модель).  
 Science (Наука), Topics (Предмет), Economy (Економіка) та Mathematics (Математика).  
 Science (Наука), Technology (Технології), Engineering (Інженерія) та Mathematics (Математика).  
 System (Система), Technology (Технології), Engineering (Інженерія) та Model (Модель).
- 6. Що є для вас STEM? (декілька відповідей)**  
 подання навчальної інформації через життєві ситуації;  
 заохочення до експериментальних досліджень;  
 заучування як провідна форма опанування матеріалу;  
 прикладний аспект (розв'язування задач/проблем практичного змісту);  
 міждисциплінарний підхід (поєднання декількох предметів);
- 7. Як Ви вважаєте, що з наведеного НЕ є ознакою STEM-навчання?**  
 подання навчальної інформації через життєві ситуації;  
 заохочення до експериментальних досліджень;  
 заучування як провідна форма опанування матеріалу;  
 прикладний аспект (розв'язування задач/проблем практичного змісту);  
 міждисциплінарний підхід (поєднання декількох предметів).
- 8. Чи впроваджуються на заняттях з математики компоненти STEM-навчання у вашому освітньому закладі?**  
 Так,  Ні,  Частково.
- 9. При вивченні яких ще навчальних предметів вчителі / викладачі вашого освітнього закладу використовують компоненти STEM-освіти? (можна обрати декілька відповідей)**  
 фізики,  хімії,  географії,  української мови / літератури,  
 іноземної мови / зарубіжної літератури,  
 не застосовують STEM-освіту,  ваша відповідь.
- 10. Яке обладнання Ви використовували на STEM-заняттях під час очного (офлайн) навчання? (декілька відповідей).**  
 мультимедійна / віртуальна дошка,  телевізор,  
 комп'ютерне обладнання,  колонки (чи навушники),  
 мережеве обладнання (бездротові мережі),

- планшети / ноутбуки / телефони,  3D принтер,  VR окуляри,
  - AR книги,  нічого з переліченого вище,
  - інший варіант відповіді.
11. **Чи використовувате Ви в навчанні математики та STEM-заходах системи динамічної математики, наприклад, GeoGebra?**  Так,  Ні,  Ваш варіант.
  12. **Чи займаєтесь Ви на уроках дослідницькою та проєктною діяльністю?**  Так,  Ні,  Частково.
  13. **Розташуйте у доцільній послідовності етапи дослідження:**
    - гіпотези, висновок, аналіз, проблема, експеримент;
    - гіпотези, проблема, експеримент, аналіз, висновок;
    - проблема, гіпотези, експеримент, аналіз, висновок;
    - аналіз, проблема, висновок, гіпотези, експеримент;
    - експеримент, гіпотези, аналіз, проблема, висновок;
  14. **При вивченні яких тем з математики Ви використовували проєктні та дослідницькі методи?**  Ваша відповідь.
  15. **Вкажіть назву проєкту, у створенні якого Ви брали участь на уроках / заняттях з математики?**  Ваша відповідь.
  16. **В яких з перелічених заходів Ви обізнані та брали участь? (декілька відповідей)**
    - STEM-курс;  STEM-проєкт,  STEM-квест;
    - STEM-фестиваль;  STEM-хакатон;
    - інтегровані уроки (поєднання декількох навчальних предметів на одному занятті);
    - не обізнаний з жодним;  Ваш варіант відповіді.
  17. **Чи брали участь у STEM-заходах під час дистанційного (онлайн) навчання?**  Так;  ні;  інший варіант відповіді.
  18. **Чи мотивує Вас участь у STEM-заходах до вивчення предметів, пов'язаних із наукою, технікою, інженерією та математикою?**  Так;  Ні;  Частково.
  19. **Чи спостерігали Ви у себе підвищення рівня знань та вмінь після участі у STEM-заходах?**
    - Так;  Ні,  Частково,  Не впроваджувались вказані методи.

**Інтерпретація результатів анкетування.** Відповіді будуть проаналізовані та визначені основні аспекти і тенденції щодо ефективності та перспективних напрямків і шляхів впровадження методів STEM-освіти у навчальні процеси старшої школи та фахових коледжів з вивчення математики.

4.2.3. Тестування учнів 10-11 класів та студентів 1-2 курсів фахових коледжів для визначення рівня сформованості STEM-компетентностей у процесі навчання математики

<https://forms.gle/uQLGucgur9W1T8k76>

**Мета:** визначити рівень сформованості STEM-компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання математики.

Рекомендуємо взяти ручку і папір для виконання роботи на чернетці. Розв'яжіть завдання та оберіть правильну відповідь, зверніть увагу, останні два запитання потребують розгорнутої відповіді.

*Завдання 1 – перероблена задача №473, ст. 166 [Тарасенкова, Н. А., Богатирьова, І. М., Коломієць, О. М., & Сердюк, З. О. (2017). Алгебра підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл.] Завдання 2-6 запозичені у PISA (математика) <http://gym7-cv.ho.ua/PISA/PISAmat.pdf>*

*Завдання 7-15 запозичені у Education Quality and Accountability Office (Канада), тестування для 9 класу*

<https://dwod99k06nyqh.cloudfront.net/#/en/test-auth/g9-sample/340/adaptive>

1. Державний прапор України – стяг із двох рівновеликих горизонтальних смуг синього й жовтого кольорів. Співвідношення ширини прапора до його довжини 2:3. У вас є два рулони синьої та жовтої тканини, ширина яких по 60 см, яку довжину треба відрізати, щоб отримати найбільший розмір прапора?

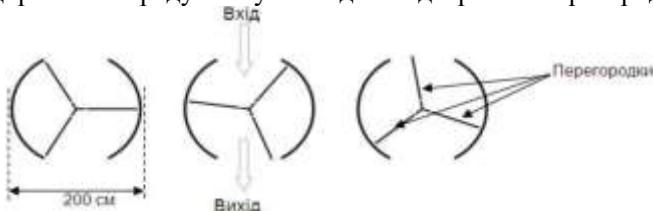
- 20;  360;  180;  120.

2. Ви готуєте власну заправку для салату. Ось рецепт на 100 мілілітрів (мл) заправки. Салатне масло: 60 мл. Гірчиця: 30 мл. Соевий соус: 10 мл. Скільки мілілітрів (мл) салатного масла знадобиться, щоб зробити 150 мл цієї заправки? Завдання розв'язується за допомогою відповідної пропорції.

- 110 мл;  100 мл;  150 мл;  90 мл.

3. Двері мають три скляні перегородки, що разом з цими дверима обертаються усередині кругового простору. Внутрішній діаметр цього простору 2 метри (200 сантиметрів). Три дверні перегородки ділять простір на три рівні сектори. Нижче на плані показані дверні перегородки в трьох різних позиціях, якщо дивитися на них зверху.

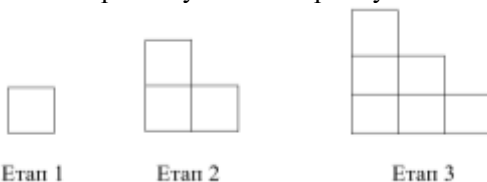
Чому дорівнює в градусах кут між двома дверними перегородками?



- 180°;  120°;  360°;  66,6°.



4. Робот малює послідовність «драбинок», складених з квадратів. Нижче показані етапи побудови. Видно, що на етапі 1 він використав один квадрат, на етапі 2 – три квадрати і на етапі 3 – шість квадратів. Скільки квадратів він використовує на четвертому етапі?



- 9;  10;  12;  18.

5. Учитель географії пропонує учням тести, виконання кожного із яких оцінює в 100 балів. Середня оцінка Ігоря за чотири перших тести дорівнює 60 балам. За п'ятий тест він отримав 80 балів.

Чому дорівнює середня оцінка Ігоря за п'ять тестів по географії?

- 60;  70;  64;  80.

6. У документальному фільмі йшлося про землетруси та про частоту, із якою вони відбуваються. Була показана дискусія про можливість передбачення землетрусів. Так, геолог стверджував: «Шанси на те, що в подальші 20 років в місті N станеться землетрус, складають два з трьох». Яке з наступних міркувань правильно передає суть твердження геолога?

$\frac{2}{3} \cdot 20 = 13,3$ , тому між 13 і 14 роками потому в місті N станеться землетрус.

$\frac{2}{3}$  більше, ніж  $\frac{1}{2}$ , тому можна бути впевненим, що впродовж 20 наступних років в місті N станеться землетрус.

Імовірність того, що впродовж 20 років в місті N станеться землетрус, більша, ніж імовірність того, що він не станеться.

Неможливо передбачити, що може статися.

7. У парку є  $n$  лавочок. На кожній лавці можуть сидіти максимум 2 людини. У цей час на кожній лавці сидить максимальна кількість людей, а в парку гуляє 8 осіб. Який вираз відображає загальну кількість людей у парку в цей час?

- $2n$ ;   $2n+8$ ;   $2n-8$ ;   $8n+2$ .

8. Довжина сторони куба А дорівнює 4 см. Довжина сторони куба В втричі перевищує довжину сторони куба А. У скільки разів об'єм куба В більший за об'єм куба А?

- 1664 рази;  192 рази;  27 разів;  9 разів.

9. Проводиться дослідження для порівняння кількості опадів за місяць для двох міст. Який із запропонованих типів графіків **найкраще** відобразить ці дані, щоб можна було порівняти кількість опадів за кілька місяців?

- Стовпчаста діаграма,  Гістограма,  Кругова діаграма,
- Подвійна стовпчаста діаграма.

10. Озеленювач використовує довжину черевика для оцінки відстані. Довжина черевика близько 32 см. Якщо ландшафтний дизайнер створює сад шириною 3,5 м, то на скільки приблизно довжин чобіт буде ширина саду?

- 1 довжина черевика;  9 довжини черевика;
- 11 довжини черевика;  36 довжини черевика.

11. Студентка планує кроки перед кодуванням у програмі:

- Призначте значення  $x$ .
- Якщо  $x$  – ціле число, відобразіть  $x$ .
- Або визначте ціле число  $n$  таке, що  $x - 1 < n < x$ .
- Показати  $n$ .

Вона призначає  $\pi$  до значення  $x$ . Що має відобразитися як вихід на основі її кроків?   $n=3$ ;   $n=4$ ;   $n=\pi$ ;   $n=2,14$ .

12. Температура повітря в горах падає на  $4^\circ\text{C}$  на кожні 1000 м висоти. Якщо температура повітря біля підніжжя гори становить  $25^\circ\text{C}$ , на якій висоті температура повітря буде  $17^\circ\text{C}$ ?

- 1000 м;  2000 м;  4000 м;  8000 м.

13. Карл інвестує 100 доларів на ощадний рахунок, на який щорічно отримує відсотки. Виберіть **дві** зміни, які дозволять Карлу заробити **більше** грошей з цього ощадного рахунку.

- Банк знижує процентну ставку.
- Карл збільшує свої початкові інвестиції.
- Банк додає комісію за підтримку активного рахунку.
- Щороку Карл вкладає на рахунок більше грошей.

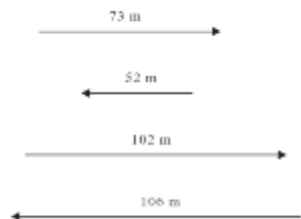
14. Рівняння  $C = 60t + 30$  представляє співвідношення між загальною вартістю ремонту холодильника  $C$ , в гривнях, і часом ремонту  $t$ , в годинах. Яке твердження правильне?

- Погодинна ставка становить 90 грн.
- Фіксована плата становить 90 грн.
- Погодинна ставка становить 60 грн, а фіксована плата становить 30 грн.
- Погодинна ставка становить 30 грн, а фіксована плата становить 60 грн.

15. Робот рухається по прямій.

Ці стрілки зображують рухи робота вліво та вправо. Куди переміститься робот по відношенню до свого початкового положення?

- переміститься на 333 м ліворуч від свого початкового положення;
- переміститься на 333 м праворуч від свого початкового положення;



- переміститься на 17 м праворуч від свого початкового положення;
- переміститься на 17 м ліворуч від свого початкового положення.

*Завдання 16-17 з розгорнутою відповіддю*

16. Чи можна знайти висоту будівлі, не піднімаючись на її дах? Поясніть, як це можна зробити? Або чому цього зробити не можна?

17. Вам запропонували виконати проєкт на тему «Кристали – природні многогранники». З чого ви почнете роботу? Які напрямки пошуку ви могли б запропонувати? Як ви вважаєте, яку кількість груп доцільно створити та які завдання вони могли б виконувати? Які навчальні предмети можна об'єднати при виконанні проєкту? Яке обладнання стане в нагоді? Який прогнозований результат? Щоб ви могли представити як кінцевий результат?

### **Інтерпретація результатів тестування.**

Показником фіксації сформованості STEM-компетентностей в процесі вивчення математики буде слугувати загальний показник за 10 бальною шкалою, де:

- за кожну правильну тестову відповідь учень отримує 0,5 бали;
- за розгорнуту відповідь на завдання №16 – 1 бал, №17 – 1,5 бали.
- за кожну неправильну відповідь – 0 балів.

Максимальна кількість отриманих балів дорівнює 10 балам (завдання №16 та №17 потребують розгорнутої відповіді).

Нижче подаємо **відповіді до окремих питань анкет та тесту** для самоперевірки після заповнення анкет та виконання тесту.

### **Анкета 1.**

10. STEM-навчання – це системний навчальний процес, який спрямовано на формування ключових компетентностей і практичних навичок.

11. Не є ознакою STEM-навчання заучування як провідна форма опанування матеріалу.

12. Якщо STEM-навчання інтегровано з мистецтвом, то така аббревіатура буде звучати STEAM.

20. Доцільніше впроваджувати STEM-підходи в закладах освіти системно: включати елементи STEM на кожному уроці, окремі проводити як STEM-уроки, реалізовувати STEM-проєкти.

27. Перелічені нижче компетентності мають відношення до STEM-компетентностей: математична компетентність; компетентність у галузі науки; компетентність у галузі технологій; компетентність у галузі інженерії.

29. Доцільна послідовність етапів дослідження: проблема, гіпотези, експеримент, аналіз, висновок.

32. Методично обґрунтовано починати STEM-урок з постановки та визначення для розв'язання актуальної значущої проблеми для учнівства.

### Анкета 2.

5. Аббревіатура STEM розшифровується як Science (Наука), Technology (Технології), Engineering (Інженерія) та Mathematics (Математика).

6. STEM – подання навчальної інформації через життєві ситуації; заохочення до експериментальних досліджень; заучування як провідна форма опанування матеріалу; прикладний аспект (розв'язування задач/проблем практичного змісту); міждисциплінарний підхід (поєднання декількох предметів).

7. НЕ є ознакою STEM-навчання заучування як провідна форма опанування матеріалу.

13. Доцільна послідовність етапів дослідження: проблема, гіпотези, експеримент, аналіз, висновок.

### Відповіді до тесту:

1. Державний прапор України : 180.
2. Власна заправка для салату : 90 мл.
3. Дверні перегородки :  $120^\circ$ .
4. Робот малює : 10.
5. Середня оцінка тесту : 64.
6. Імовірність того, що впродовж 20 років в місті N станеться землетрус, більша, ніж імовірність того, що він не станеться.
7. Лавок у парку  $2n+8$ .
8. Об'єм куба B більший за об'єм куба A у 27 разів.
9. Порівняти кількість опадів за кілька місяців найкраще за подвійною стовпчастою діаграмою.
10. Ширина саду буде на 36 довжин черевика.
11. Студентка отримує  $n=3$ .
12. Шукана температура буде на висоті 2000 м.
13. Карл збільшує свої початкові інвестиції. Щороку Карл вкладає на рахунок більше грошей.
14. Погодинна ставка ремонту холодильника становить 60 грн, а фіксована плата – 30 грн.
15. Робот переміститься на 17 м праворуч від свого початкового положення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ / РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

### *Нормативні документи про освіту, зокрема STEM-освіту*

1. DigComp 2.0: The Digital Competence Framework for Citizens. Update Phase 1: The Conceptual Reference Model. Luxembourg Publication Office of the European Union / Vuorikari R., Punie Y., Carretero Gomez S., Van den Brande G. 2016. EUR 27948 EN. doi:10.2791/11517 (дата звернення 18.05.2023).
2. Державний стандарт базової середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України 30 вересня 2020 р. URL : <https://mon.gov.ua/ua/news/oprilyudnenoderzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti> (дата звернення 19.11.2022 р.).
3. Закон України «Про повну загальну середню освіту». Відомості Верховної Ради (ВВР), 2020, № 31. URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text> <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2145-19> (дата звернення: 26.05.2022).
4. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) до 2027 року : постанова Кабінету Міністрів України від 5 серпня 2020 р. № 960-р. URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text> (дата звернення 19.11.2022 р.).
5. Методичні рекомендації щодо впровадження STEM-освіти у загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладах України на 2017/2018 н.р. / І. П. Василашко, С. Л. Горбенко, О. В. Лозова, О. О. Патрикєєва. *Методист*. Київ : Видавництво «Шкільний світ», 2017. № 8 (68). С. 37–43. <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v1470777-17#Text> (дата звернення 19.11.2022 р.).
6. Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти України у 2018/2019 навчальному році. № 22.1/10-2573 від 19.07.2018 р. URL: [https://osvita.ua/legislation/Ser\\_osv/61444/](https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/61444/) (дата звернення 29.11.2022 р.).
7. Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти у закладах загальної середньої та позашкільної освіти у 2020/2021 навчальному році: Лист Інституту модернізації змісту освіти № 22.1/10-1646 від 19.08.2020 р. URL: <https://drive.google.com/file/d/1qxDeN7-bycJXSBKTRqvBnO9Xuc5TFSgs/view> (дата звернення: 30.09.2021).
8. Навчальна програма з математики для 5-9 класів : навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Наказ Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. URL : <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf> (дата звернення 24.07.2019).
9. Наказ міністерства освіти і науки України від 20.09.2021 № 999 «Про реалізацію інноваційного освітнього проєкту «Я – дослідник 2.0 (дидактична система природничо-наукової початкової освіти) на вересень 2021-листопад 2024 роки». URL : <https://drive.google.com/file/d/1Qcs-ex4vf0Ljas83Pj0tNd2FT-RqYtH/view> (дата звернення: 05.02.2023).
10. Освітні програми : сайт Міністерства освіти і науки України. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi> (дата звернення 30.06.2019).
11. Положення про STEM-центр Криворізького державного педагогічного університету : затверджено Вченою радою ун-ту 11 березня 2021 року, протокол № 9. URL : <https://drive.google.com/file/d/13IbhBt70x-oQbbRVrY1oDQefWgVxgDb8/view> (дата звернення 19.11.2022 р.).

12. Про затвердження Національної рамки кваліфікацій : постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1341 (в редакції постанови Кабінету Міністрів України від 12 червня 2019 р. № 509) URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1341-2011-п/conv> (дата звернення 22.07.2019)
13. Про затвердження типової освітньої програми для 5-9 класів закладів загальної середньої освіти : Наказ Міністерства освіти і науки України № 235 від 19 лютого 2021 р. Київ. URL : <https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-tipovoyi-osvitnoyi-programi-dlya-5-9-klasiv-zagalnoyi-serednoyi-osviti> (дата звернення 19.11.2022 р.).
14. Про освіту : Закон України від 5 вересня 2017 р. № 2145-VIII (в редакції від 16.07.2019). Відомості Верховної Ради. URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19/conv> (дата звернення: 22.07.2019).
15. Проект Стандарту вищої освіти України перший (бакалаврський) рівень, галузь знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальність 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями). Київ, 2023.
16. Стратегія розвитку вищої освіти в Україні на 2022-2032 роки : наказ Кабінету Міністрів України від 23 лютого 2022 року №286-р URL : <https://mon.gov.ua/storage/app/media/news/2022/04/15/VO.plan.2022-2032/Stratehiya.rozv.VO-23.02.22.pdf> (дата звернення 19.11.2022 р.).

*Наукові праці: дисертації, монографії, статті*

17. A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school / Vlasenko K, Lovianova I, Armash T, Sitak I, Kovalenko D. 2021 *Journal of Physics: Conference Series*1946. DOI <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012003>
18. An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective / Diego-Mantecon J. M., Prodromou T., Lavicza, Z., Blanco T. F., Ortiz-Laso Z. *ZDM Mathematics Education*, 2021. 53(5), 1137–1148. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9> (accessed 25 Oct 2022).
19. Augmented reality software design for educational purposes / Syrovatskyi O.V., Semerikov S.O., Modlo Ye.O., Yechkalo Yu.V., Zelinska S.O. In: Kiv, A.E., Semerikov, S.O., Soloviev, V.N., Striuk, A.M. (eds.) *Proceedings of the 1st Student Workshop on Computer Science & Software Engineering (CS&SE@SW 2018)*, Kryvyi Rih, Ukraine, November 30, 2018. *CEUR Workshop Proceedings* 2292, 193–225. <http://ceurws.org/Vol-2292/paper20.pdf> (2018). Accessed 21 Mar 2019
20. Balyk Nadiia, Barna Olga, Shmyger Galyna, Oleksiuk Vasyl Model of Professional Retraining of Teachers Based on the Development of STEM Competencies. *ICT in Education, Research and Industrial Applications*. Proc. 14th Int. Conf. ICTERI 2018. Volume II: Workshops. Kyiv, Ukraine, May 14-17, 2018 pp. 318–331 [https://ceurws.org/Vol-2104/paper\\_157.pdf](https://ceurws.org/Vol-2104/paper_157.pdf) (accessed 25 Oct 2022).
21. Bobyliev D.Y., Vihrova E.V. Problems and prospects of distance learning in teaching fundamental subjects to future mathematics teachers. *Journal of physics: Conference series* 1840 (1), 012002 2021 J. Phys.: Conf. Ser. DOI 10.1088/1742-6596/1840/1/012002.
22. Hothousing: Utilising industry collaborative problem-solving practices for STEAM in schools / Houghton T., Lavicza Z., Diego-Mantecon J. M., Fenyvesi K., Weinhandl R., Rahmadi I. F.. *Journal of Technology and Science Education*, 12(1), 2022. pp. 274–289. <https://doi.org/10.3926/jotse.1324> (accessed 25 Oct 2022).

23. Implementation of adaptive learning at higher education institutions by means of Moodle LMS / Morze N, Varthenko-Trotsenko L, Terlecka T, Smyrnova-Trybulska E.. *Journal of Physics: Conference Series* 1840, 2021. 012062 IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012062> (accessed 25 Oct 2022).
24. JKU STEAM Conference. Early-career researchers in STEAM education conference. GeoGebra Book, Linz, 2021. URL: <https://www.GeoGebra.org/m/qsgvgsnpn> . (accessed 25 Oct 2022).
25. Kramarenko T.; Pylypenko O. Serdiuk O. Digital Technologies in Specialized Mathematics Education: Application of GeoGebra in Stereometry Teaching. In Proceedings of the 1st Symposium on Advances in Educational Technology. Volume 1: AET, 2022. pages 576–589. DOI: 10.5220/0010926300003364. <https://philpapers.org/archive/POHPP0.pdf#page=593> (accessed 25 Oct 2022).
26. Kramarenko T.H., Pylypenko O.S., Zaselskiy V.I.: Prospects of using the augmented reality application in STEM-based Mathematics teaching. CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org). 2019. Vol. 2547, pp. 130–144. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2547/paper10.pdf> (accessed 25 Oct 2022)..
27. Kramarenko, T.H., Pylypenko, O.S., Muzyka, I.O.: Application of GeoGebra in Stereometry teaching. CTE Workshop Proceedings (CEUR-WS.org). Vol. 2643, pp. 705–718. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2643/paper42.pdf> (accessed 25 Oct 2022).
28. Linz School of Education. Research. STEM-education, Linz, 2021. URL: <https://www.jku.at/en/linz-school-of-education/research/stem-education/> (accessed 25 Oct 2022).
29. Marienko, M., Shyshkina, M. The Design and Implementation of the Cloud-Based System of Open Science for Teachers' Training. In: Auer, M.E., Pachatz, W., Rüttmann, T. (eds) Learning in the Age of Digital and Green Transition. ICL 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 633. Springer, Cham. 2023. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-26876-2\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-031-26876-2_31) (accessed 15 Jun. 2023).
30. Mathematics Learning Through Arts, Technology and Robotics: Multi-and Transdisciplinary STEAM Approaches / Lavicza Z., Fenyvesi K., Lieban D., Park H., Hohenwarter M., Diego J., Prodromou T. 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 2018.
31. Mintii I. S.. Blended learning: definition, concept, and relevance. *Educational Dimension*, 8, 2023. 85–111. <https://doi.org/10.31812/ed.539> (accessed 15 Jun. 2023).
32. Morze N., Varchenko-Trotsenko L. Tiutiunyk A. Introduction of STEAM education with the use of 3D technologies: modelling, scanning and printing. *Open Educational E-environment of modern university* , 2016. P. 51–59.
33. Popel, M.V., Shyshkina, M.P.: The Cloud Technologies and Augmented Reality: the Prospects of Use. In: Kiv, A.E., Soloviev, V.N. (eds.) Proceedings of the 1st International Workshop on Augmented Reality in Education (AREdu 2018), Kryvyi Rih, Ukraine, October 2, 2018. CEUR Workshop Proceedings 2257, 232–236. <http://ceur-ws.org/Vol2257/paper23.pdf> . Accessed 30 Nov 2018
34. Pylypenko O. Development of critical thinking as a means of forming STEM competencies. *Educational Dimension*, 55. 2020. 317–331. URL: <https://doi.org/10.31812/educdim.v55i0.3955> .
35. Review of the Experience with the Implementation of STEM-education Technologies / Vlasenko K., Sitak I., Chumak O., Kondratyeva O. Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education: Monograph. In L. Kyba (A. Ed.). Budapest, Hungary: SCASPEE, 2019. P. 97–110. URL: [https://drive.google.com/file/d/0B0mGM6lS\\_wnKZVpKWfKlLWIKRTdaVndEdFVvLU5SeFRpRWN3/view](https://drive.google.com/file/d/0B0mGM6lS_wnKZVpKWfKlLWIKRTdaVndEdFVvLU5SeFRpRWN3/view) (accessed 15 Jun. 2023).
36. Sanders M. STEM, STEM-education , STEMmania. *The Technology Teacher*, Vol.

- 68, 2009. 20–26. URL: [http://www.artstem.org/wp-content/uploads/2010/09/Sanders\\_STEM\\_VTProgram.pdf](http://www.artstem.org/wp-content/uploads/2010/09/Sanders_STEM_VTProgram.pdf).
37. Semenikhina O.V., Drushlyak M. G., Shishenko I. V. STEM-project as a means of learning modeling for pre-service mathematics and computer science teachers. Vol. 90, Issue4, 2022. P. 46–56. DOI: 10.33407/itlt.v90i4.4946.
38. STEAMTEACH Austria: Towards a STEAM professional development program / Houghton T., Lavicza Z., Rahmadi I.F., Diego-Mantecon J.M., Fenyvesi K., Weinhandl R., Ortiz-Laso Z. *International Journal of Research in Education and Science* (IJRES),8(3). 2022. pp. 502–512. <https://doi.org/10.46328/ijemst.2747> (accessed 25 Oct 2022).
39. Strutynska O. & Umryk M. Learning startups as a project based approach in STEM education. *E-learning and STEM Education Scientific* Ed. Eugenia Smyrnova-Trybulska “E-learning”, Katowice-Cieszyn, Vol. 11, 2019. P. 529–555.
40. Theoretical and methodological principles of natural sciences and mathematical education (STEM-education) / Patrikeeva O., Gorbenko S., Lozova O., Vasylyashko I. *Problems of Education*, 2021. 2(95), 53–66. <https://doi.org/10.52256/2710-3986.2-95.2021.04>
41. Training of Mathematical Disciplines Teachers for Higher Educational Institutions as a Contemporary Problem / Vlasenko K., Kondratieva O., Lovianova I., Sitak I., Chumak O. *Universal Journal of Educational Research* 7, Horizon Research. 2019. pp. 1892–1900.
42. Zavalevskiy Y., Gorbenko S., Lozova O. Psychological and pedagogical conditions for the development of STEM education. *Problems of Education*, (297), 2022. 61–77. <https://doi.org/10.52256/2710-3986.2-97.2022.04> Accessed 21 Mar 2023
43. Балик Н. Р., Шмигер Г. П. Підходи та особливості сучасної STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*, №2(12), 2017. С. 26–30.
44. Балик Н. Р., Барна О. В., Шмигер Г. П. Впровадження STEM-освіти у педагогічному університеті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи : 2017* : матеріали Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. Тернопіль, 2017. С. 11–15. URL: <https://clck.ru/TG4hS> (дата звернення 19.11.2022 р.).
45. Балик Н. Р., Шмигер Я. П. Формування STEM-компетентностей у процесі підготовки майбутніх учителів до впровадження STEM-освіти. 2017. URL : [http://elar.fizmat.tnpu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/1007/Balyk\\_Shmyger\\_Vasylenko\\_Stem.pdf?sequence=1](http://elar.fizmat.tnpu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/1007/Balyk_Shmyger_Vasylenko_Stem.pdf?sequence=1) (дата звернення 18.05.2022).
46. Барна О. В., Балик Н. Р. Впровадження STEM-освіти у навчальних закладах: етапи та моделі URL : <http://elar.ippo.edu.te.ua:8080/bitstream/123456789/4559/1/Barna.pdf> (дата звернення 20.11.2018).
47. Ботузова Ю. В. Компетентнісний та stem підходи в професійній підготовці майбутніх учителів математики. *Наукові записки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка* : Педагогічні науки. 2018. Вип. 173(2). С. 51–54. URL : [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nz\\_p\\_2018\\_173\(2\)\\_12](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nz_p_2018_173(2)_12) (дата звернення 19.02.2023 р.).
48. Ботузова Ю. В. Динамічні моделі GeoGebra на уроках математики як основа STEM-підходу. *Фізико-математична освіта* : 2018. Випуск 3 (17). С. 31–35. URL : <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-403> (дата звернення 30.06.2022).
49. Ботузова Ю. В. Особливості використання STEM-технологій в навчанні математики. *Наукові записки*. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Випуск 12 (I). С. 3–8. <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMT0/article/viewFile/1284/1257> (дата звернення 19.02.2023 р.).



50. Валько Н. В. Система підготовки майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін до застосування STEM технологій у професійній діяльності: автореф. дисер. д-ра пед. наук: 13.00.04 / Класич. приват. ун-т. Запоріжжя: 2020. 40 с.
51. Василяшко І. П., Білик Т. В. Упровадження STEM-навчання – відповідь на виклик часу. *Управління освітою*. Київ, 2017. № 2 (386). С. 28–31.
52. Василяшко І. П. Методичні рекомендації щодо впровадження STEM-освіти у загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладах України на 2017/2018 н.р. / І. П. Василяшко, С. Л. Горбенко, О. В. Лозова, О. О. Патрикеева. *Методист*. Київ : Шкільний світ, 2017. № 8 (68). С. 37–43.
53. Васильєва Д. В. Методика навчання математики учнів 5–6 класів з використанням мультимедійної дошки : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02. Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. 2013. 20 с.
54. Вінниченко С. Ф. Розв'язування задач на ГМТ з використанням моделюючих програмних засобів. *Математика в школі*. 2003. № 4. С. 13–16.
55. Вінниченко Є. Ф., Костюченко А. О. Деякі особливості геометричних перетворень в програмі GRAN-2D. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. № 5 (12). С. 114–120.
56. Грамбовська Л. В. Методика використання комп'ютерного моделювання у процесі розв'язування прикладних стереометричних задач на побудову. *Математика в школі*. 2011. № 5. С. 40–45.
57. Гриб'юк О. О. Імерсивні технології у процесі навчання предметів математичного циклу: становлення нової освітньої парадигми. *Педагогічні науки: теорія та практика*. 2021. № 4. С. 35–45. URL : [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vznu\\_ped\\_2021\\_4\\_7](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vznu_ped_2021_4_7) (дата звернення 19.02.2023 р.).
58. Гриб'юк О. О. Комп'ютерне моделювання та робототехніка в навчально-виховному процесі сучасного навчального закладу. *FOSS Lviv-2017* : збірник наук. праць 7 Міжнар. наук.-практ. конф., Львів, 27-30 квітня 2017 р. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2017. С. 38–43.
59. Дементівська Н. П., Морзе Н. В. Як можна комп'ютерні технології використати для розвитку учнів та вчителів? *Актуальні проблеми психології : Психологічна теорія і технологія навчання* / за ред. С. Д. Максименка, М. Л. Смольсон. Київ : Міленіум, 2005. Т. 8, вип. 1. С. 23–38.
60. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*. Київ, 2003. Вип. 7. С. 3–16.
61. Закарлюка І. С. STEM-освіта: трансдисциплінарний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін. *Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2023), м. Черкаси, 6-7 квітня 2023 р.* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023. С. 200–201.
62. Збірник матеріалів «STEM-тиждень – 2021» /уклад. : Патрикеева О. О., Василяшко І. П., Коваленко М. В., Черноморець В. В. Київ. Видавничий дім «Освіта», 2021. 575 с. URL : [Z\\_STEM-tyzhden2021.pdf \(yakistosviti.com.ua\)](https://www.yakistosviti.com.ua/STEM-tyzhden2021.pdf) (дата звернення 19.02.2023 р.).
63. Збірник матеріалів «STEM-школа – 2021» / уклад.: Н. І. Гущина, І. П. Василяшко, О. О. Патрикеева, О. В. Коршунова, Л. Г. Булавська. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021. 155 с.
64. Крамаренко Т. Г., Банада О. С. Використання системи динамічної математики GeoGebra в розробці STEM-проектів. *Актуальні аспекти розвитку STEM-освіти у навчанні природничо-математичних дисциплін*: зб. матеріалів І Міжнар. наук.-практ. конф. Кропивницький, 16-17 травня 2018 р. Кропивницький, 2018. С. 80–83.

65. Крамаренко Т. Г., Банада О. С. Робототехніка як напрямок STEM-освіти та її зв'язок з математикою. *Людина: мова, культура, пізнання*. Кривий Ріг, 2018. Том 42. С. 90–99.
66. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Застосування STEM-підходів у навчанні математики. *Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2023), м. Черкаси, 6-7 квітня 2023 р.* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023. С. 202.
67. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Проблеми підготовки учителя до впровадження елементів STEM-навчання математики. *Фізико-математична освіта* : Суми : СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2018. Вип. 4 (18). С. 90–95. URL: [http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2018-v4-18/2018\\_4-18-Kramarenko\\_Pylypenko\\_FMO.pdf](http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2018-v4-18/2018_4-18-Kramarenko_Pylypenko_FMO.pdf) (дата звернення 19.02.2023 р.).
68. Крамаренко Т.Г. Використання методу Монте-Карло у навчанні стохастички в контексті підготовки учителів математики до впровадження STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*. 2023. Том 38, №4, С. 42-48.
69. Кузьменко О. С. Теоретичні і методичні засади навчання фізики студентів технічних закладів вищої освіти в контексті розвитку STEM-освіти: монографія - Кропивницький: КОД, 2018. 624 с.
70. Кузьмінський А. І., Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики. Черкаси: Вид. від. ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2009. 320 с.
71. Левченко Ф. Г. Педагогічні умови інтеграції змісту дисциплін природничо-математичного циклу на основі STEM орієнтованого підходу. *Сучасні аспекти модернізації науки: стан, проблеми, тенденції розвитку* : зб. матеріалів XXX Міжнар. наук.-практ. конф. Гамбург, 2023. С. 216–220. URL : <http://perspectives.pp.ua/public/site/conferency/conf-30.pdf#page=217> (дата звернення 19.02.2023 р.).
72. Левченко Ф. Г. Дидактична складова STEM освіти. *Modern research in world science* : The 8th International scientific and practical conference October 29-31, 2022. Lviv. Ukraine. 2022 С. 625–628. URL : <https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-modern-research-in-world-science-29-31-10-2022-lviv-ukrayina-arhiv/> (дата звернення 19.02.2023 р.).
73. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі : теоретичний аспект : монографія. Черкаси : Вид. Чабаненко Ю. А., 2014. 368 с.
74. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії : монографія. Вінниця : ФОП Легкун В.М., 2013. 450 с.
75. Овчар І. М. Впровадження STEM-технологій в навчання математики студентів технічних спеціальностей коледжів та технікумів. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Випуск 50. С. 184–187. URL : [https://lib.iitta.gov.ua/715454/1/z\\_50.pdf#page=184](https://lib.iitta.gov.ua/715454/1/z_50.pdf#page=184) (дата звернення 19.02.2023 р.).
76. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.
77. Освітні технології : навч.-метод. посіб. / О. М. Пехота та ін. ; за ред. О. М. Пехоти. Київ : А.С.К., 2001. 256 с.
78. Панченко Л. В. Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики. *Математика в школі*. 2004. № 9. С. 21–28.
79. Параскевич С. П. Ейдографіка як засіб розвитку креативності майбутніх вчителів

- лів математики. Кривий Ріг: Видавн. відділ НМетАУ, 2008. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. С. 67–71.
80. Пилипенко О. С. GeoGebra як засіб розвитку STEM-компетентностей учнів у навчанні математики : зб. наук. праць здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного ун-ту (приурочено до 90-річчя КДПУ). Кривий Ріг : КДПУ, 2020. С. 91–94.
  81. Пилипенко О. С. Використання мобільного додатку 3D calculator GeoGebra з доповненою реальністю у навчанні математики. *Проблеми розвитку професійних компетентностей вчителів природничо-математичного напрямку* : збірник тез доповідей Всеукр. наук.-практ. конф. 23 грудня 2020 року, Дніпро. Дніпро : КЗВО «ДАНУ» ДОР», 2021. С. 183–186.
  82. Пилипенко О. С. Можливості навчального сервісу WordWall : *Актуальні аспекти розвитку STEM-освіти у навчанні природничо-математичних дисциплін* : зб. матеріалів IV Міжнар. наук.-практ. конф. Кропивницький, 12-13 травня 2021 р. Кропивницький, 2021. С. 155–158.
  83. Пилипенко О. С. Перспективи використання цифрових квест-кімнат в освітньому процесі. *Організація дистанційного навчання в умовах воєнного стану*: зб. доповідей наук.-практ. конф. ОМО викладачів інформатики та обчислювальної техніки Дніпропетровської обл. / упоряд. Н. Г. Григор'єва та В. В. Венгренюк. Дніпро, 2022. С. 36–39.
  84. Пилипенко О. С., Пиріжок О. Г. Інтегроване навчання як основна складова STEM-освіти *Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2023), м. Черкаси, 6-7 квітня 2023 р.* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023. С. 207–208.
  85. Пилипенко О.С. STEM-компетентності: сутність та структура. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету*. Серія : Педагогічні науки : зб. наук. пр. Вип. 3. Бердянськ : БДПУ, 2021. С. 142–149. <https://doi.org/10.31812/123456789/4535>.
  86. Пилипенко О.С. Огляд онлайн-сервісу Mentimeter для створення та проведення миттєвих опитувань. *Проблеми розвитку професійних компетентностей вчителів природничо-математичного напрямку* : зб. тез доповідей Всеукр. наук.-практ. конф. 17–18 листопада 2021 року, м. Дніпро. Дніпро : КЗВО «ДАНУ» ДОР», 2022. С. 55–58.
  87. Пікалова В. В. Реалізація STEM-освіти в проєктній діяльності майбутнього вчителя математики. *Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету*, Вип. 9, 2020. С. 95 –103. DOI: 10.28925/2414-0325.2020.9.8
  88. Пікалова В. В. Використання пакету GeoGebra як інструмента реалізації концепції STEM-освіти у процесі підготовки майбутніх учителів математики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.10 / Криворізький держ. педагог. ун-т. Кривий Ріг, 2021. 266 с. URL : [http://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/7867/diss\\_Pikalova.pdf?sequence=1](http://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/7867/diss_Pikalova.pdf?sequence=1)
  89. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2005. 503 с.
  90. Ракута В.М. Бібліотека комп'ютерних моделей, як необхідна складова сучасного навчального середовища. *Наукові записки*. Випуск № 98. 2011. С. 246–249. URL : [https://drive.google.com/file/d/0B5v29f\\_pNRDiNjZkZmFkZGltYjA3ZS00OGU5LWl3YTktNjBkYmQzODRiYWw3/view](https://drive.google.com/file/d/0B5v29f_pNRDiNjZkZmFkZGltYjA3ZS00OGU5LWl3YTktNjBkYmQzODRiYWw3/view) (дата звернення: 30.06.2019).
  91. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2012. №4

- (30). URL : <https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/download/700/524> (дата звернення: 30.06.2019).
92. Рамський Ю. С. Методична система формування інформаційної культури майбутніх вчителів математики : автореферат дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : 13.00.02. Київ, 2013. 56 с. URI: <http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/36637> (дата звернення: 30.06.2022).
93. Семеніхіна О. В. Друшляк М. Г. Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і GeoGebra : порівняльний аналіз. *Фізико-математична освіта*. 2015. № 1 (4). С. 21–30. URL : <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-26> (дата звернення: 30.06.2022).
94. Семеніхіна О.В., Друшляк М. Г. Візуалізація експериментальних випробувань на основі випадкових подій у середовищі GeoGebra 5.0. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. 2014. № 14. С. 94–103. URL : <http://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/2679> (дата звернення: 30.06.2022).
95. Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі : монографія. Кривий Ріг : Мінерал ; 2009. 340 с. <https://doi.org/10.31812/0564/667>.
96. Сисосва С. О. Підготовка вчителя до формування творчої особистості учня : монографія. Київ : Поліграфкнига, 1996. 406 с.
97. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.
98. Сороко Н.В. Модель STEAM-орієнтованого освітнього середовища для розвитку інформаційно-цифрової компетентності вчителя закладу загальної освіти. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія: Педагогіка. Соціальна робота. 2020. Випуск 2 (47). С. 176–185.
99. Стрижак О. С. та ін. STEM-освіта: основні дефініції. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2017. №. 62, № 6. С. 16–33.
100. Тарасенкова Н. А. Підвищення кваліфікації учителів математики в умовах компетентізації освіти. *Проблеми математичної освіти (ПМО – 2019)* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. 11–12 квітня 2019 р. Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є. І., 2019. С. 18–19.
101. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 400.
102. Хараджян Н. А. Розуміння STEM-освіти та STEM-професій суспільством : зб. наук. праць Кам'янець-Подільськ. нац. у-ту імені Івана Огієнка. Серія педагогічна, 2021. Випуск 27. С. 87–91. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2021-27.87-91>
103. Хараджян Н. А., Ткаченко О. А. Використання принципів STEM-освіти у процесі розвитку інтелектуальних умінь підлітків. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ\*плюс – 2018*» : матеріали III Міжнар. наук.-метод. конф., 8-9 листопада 2018 р. У 2 томах. Суми, 2018. Т. 1. С. 238–240.
104. Чашечникова О. С. Створення творчого середовища в умовах диференційованого навчання математики: монографія. Суми: Вид-во ПП Вінниченко МД, ФОП Литовченко Є. В., 2011, 412 с.

*Підручники, навчальні посібники з математики, навчально-методичні посібники з методики навчання математики*

105. Mathematics with a computer / М. І. Zhaldak, Y. V. Goroshko, E. F. Vinnychenko,

- G.Y. Tsybko. Kyiv, National Dragomanov Pedagogical University, 2016. 305 с.  
URL : <https://ktoi.fi.npu.edu.ua/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky?download=7:mathematics-with-a-computer> (date of appeal: 16.02.2023).
106. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф.рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків : Гімназія, 2019. 304 с .
  107. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф.рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 512 с.
  108. Апостолова Г. В. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2015. 216 с.
  109. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, проф. рівень. Київ : Освіта, 2011. 400 с.
  110. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
  111. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2015. 192 с.
  112. Бевз Г. П., Бевз В. П., Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021. 273 с.
  113. Бурда М. І., Тарасенкова Н.А. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. загальної середньої освіти. Київ : Оріон, 2021. 195 с.
  114. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.
  115. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 224 с.
  116. Васильєва Д. В. Мультимедіа на уроках математики. 5–6 класи. Київ : Ред. газет природничо-математичного циклу, 2013. 128 с.
  117. Васильєва Д. В., Василюк Н. І. Збірник задач з математики. 5-9 класи : наскрізні лінії компетентностей та їх реалізація. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 112 с.
  118. Волкова Н. П. Інтерактивні технології навчання у вищій школі : навч.-метод. посіб. Дніпро : Університет імені Альфреда Нобеля, 2018. 360 с.
  119. Геометрія : підруч. для 11 кл. / Бевз Г. П., Бевз В. Г. Владімірова Н. Г. , Владіміров В. М. Київ, Генеза, 2011. 336 с.
  120. Геометрія : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф.рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 272 с .
  121. Жалдак М. І., Вітюк О. В. Комп'ютер на уроках геометрії: посіб. для вчителів. Київ : РННЦ „ДІНІТ”, 2004. 168 с. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2022).
  122. Жалдак М. І., Біляй І. М. Стохастика : посіб. для вчителів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. 304 с. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2022).
  123. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Біляй І. М. Початки стохастики : факультативний курс для учнів старшої школи. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. 163 с. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2022).

124. Збірник задач з математики для вступників до вузів: за редакцією М. І. Сканаві. Мінськ. 1990. 528 с.
125. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. 2-ге вид., перероб. і доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. педаг. ун-т, 2019. 444 с. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/3315> (дата звернення: 16.02.2023).
126. Крамаренко Т. Використання мультимедійної дошки під час навчання геометричних перетворень на площині. *Математика в сучасній школі*. 2013. № 9. С. 38–43. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/577> (дата звернення: 26.02.2022).
127. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером : навч. посіб. / за ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 272 с. – URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/570> (дата звернення: 26.02.2022).
128. Кушнір І. А. Математична енциклопедія. Київ : Астарта, 1995. 768 с.
129. Маланюк М. П., Лукавецький В. І. Олімпіади юних математиків. Київ. 1977. 104 с.
130. Математика: посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап'юк та ін. ; за ред. В. В. Корольського. 3-є вид., перероб. і доп. Тернопіль: Підручники і посібники, 2012. 416 с.
131. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
132. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2016. 384 с.
133. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення : навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Харків : Гімназія, 2015. 192 с.
134. Нелін Є. П., Долгова О. Е. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень. Харків : Гімназія, 2011. 448 с.
135. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

*Програмні засоби, настанови користувачам та інші ресурси з проблем використання цифрових технологій*

136. Blogger : програмне забезпечення для розробки блогів. URL : <https://www.blogger.com/>.
137. Borchers [Michael](https://www.geogebra.org/m/UaZzHjZG) Probability Calculator. URL : <https://www.geogebra.org/m/UaZzHjZG> (date of appeal : 31.07.2022).
138. DG : програмно-методичний комплекс навчального призначення «Динамічна геометрія DG» для загальноосвітніх закладів, версія 1.0. Харків, 2002. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. Системні вимоги: Pentium, тактова частота від 1100 MHz, 64 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
139. GeoGebra : динамічна математика для навчання та викладання : офіційний сайт розробників системи динамічної математики Dynamic MathematicsforEveryone . URL : <http://www.geogebra.org/> (дата звернення 30.06.2022).
140. GeoGebra : динамічна математика для навчання та викладання : підручники . URL : <https://wiki.geogebra.org/en/Tutorials> (дата звернення 30.06.2022).

141. GRAN1 : Програмний засіб, версія 1.1. Київ, 2012. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/index.php/uk/zavantazhyty/category/1-gran1> (дата звернення: 30.06.2022).
142. GRAN1 : програмний комплекс «», версія 1.0. К. : Республіканський навчально-методичний центр «Дініт», 2003. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. Системні вимоги: Pentium, тактова частота від 1100 MHz, 64 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
143. GRAN-2D : програмний засіб, версія 1.1. Київ, 2012. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-2d> (дата звернення: 30.06.2022).
144. GRAN-3D : програмний засіб, версія 1.1. . Київ, 2012. URL : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-3d> (дата звернення: 30.06.2022).
145. Hohenwarter M., Hohenwarter J. GeoGebra Help 3.2. URL : <http://static.geogebra.org/help/docuen.pdf> (дата звернення 30.06.2022).
146. Hohenwarter [Markus](#). GeoGebra Quickstart. Check-as-you-go GeoGebra Tutorial. URL : <https://www.geogebra.org/m/Ebm5wBW5> (date of appeal : 30.06.2022).
147. Hohenwarter M., Hohenwarter J. GeoGebra Help 3.2. URL : <http://static.geogebra.org/help/docuen.pdf> (дата звернення 30.06.2022).
148. Interwrite Workspase : офіційний сайт розробників програмного забезпечення Interwrite Workspase для дошки Interwrite DualBoard. URL : <http://interwrite-workspace.software.informer.com/download/> (дата звернення: 30.06.2022).
149. MOODLE : офіційний сайт розробників системи CLMS MOODLE. URL : <http://www.moodle.org>.
150. Sada [Manuel](#). Probabilidad: simulaciones y problemas [Electronic Resource] : GeoGebraBook / [Manuel Sada](#). - Mode of access: <https://www.geogebra.org/m/qjWuUAg> (date of appeal : 31.07.2022).
151. Teaching STEM, URL: <https://teach.com/what/teachers-know/stem-education> (дата звернення: 30.01.2022).
152. Web 2.0 LearningApps.org : сервіс для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою інтерактивних модулів. URL : <http://learningapps.org/> (дата звернення: 30.06.2022).
153. Wolfram|Alpha computational intelligence. URL : <https://www.wolframalpha.com>. (дата звернення: 30.12. 2022).
154. Барна О. В. STEM-освіта: реальні кроки до успіху. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=oAigBUCILzo> (дата звернення 18.05.2022).
155. Васильєва Д. В. Урізноманітнення форм навчання математики в контексті STEM-освіти. Зимова сесія "Web-STEM-школи-2018". 2018. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=MshUSDfSYwU> (дата звернення 20.11.2022).
156. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті DG : посіб. для вчителів математики / С. А. Раков, В. П. Горох, К. О. Осенков та ін. Харків : Вікторія. 2002. 136 с.
157. Електронний навчально-методичний комплект для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 7 клас». Київ: ДП «ІПТ», 2008. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
158. Електронний навчально-методичний комплект для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 7 клас»: настанова користувача. Київ: ДП «ІПТ», 2008. 30 с.
159. Крамаренко Т. Г. Блог «Щоденник тренінгу «Intel Навчання для майбутнього»: блог. URL : <https://kramarenko2014.blogspot.com/> (дата звернення: 30.06.2022).



160. Крамаренко Т. Г. Блог Тетяни Крамаренко «Математика + ІКТ» : блог. URL : [http://kramarenko12.blogspot.com/p/blog-page\\_28.html](http://kramarenko12.blogspot.com/p/blog-page_28.html) (дата звернення: 30.06.2022).
161. Крамаренко Т. Г. Вибрані питання елементарної математики з GeoGebra : GeoGebraBook. URL : <https://www.geogebra.org/m/gqpk8yfu> (дата звернення 29.07.2022).
162. Крамаренко Т. Г. Впровадження STEM-технологій у навчанні математики : презентація. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/2512> (дата звернення: 18.05.2022).
163. Крамаренко Т. Г. Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики в середній школі : навч.-метод. комплекс для змішаного (очно-дистанційного) навчання на базі онлайн-платформи MOODLE (Спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)). Криворізький держ. пед. ун-т. URL : <http://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=542> (дата звернення: 30.03.2023).
164. Крамаренко Т. Г. Навчальна практика за технологією "Intel Навчання для майбутнього : навч.-метод. комплекс для змішаного (очно-дистанційного) навчання на базі онлайн-платформи MOODLE (Спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)). Криворізький держ. пед. ун-т. – URL : <https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=543> (дата звернення: 30.03.2023).
165. Методичні рекомендації для проведення тренінгу для вчителів : матеріали навчальної програми Intel «Навчання для майбутнього. 10 версія» / Корпорація Intel, Інститут комп'ютерних технологій США; адаптовано для використання в Україні; загальна редакція: Н. П. Дементівська, Н. В. Морзе, Т. В. Нанаєва. Київ, 2011.
166. Методичні рекомендації щодо використання програмного засобу навчального призначення «Геометрія, 8 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів під час проведення уроку вчителем та в процесі самостійної роботи учнів. Київ: ДП «ІПІТ», 2008. 10 с.
167. Морзе Н. В., Дементівська Н. П. Intel. Навчання для майбутнього : адаптація до укр. видання. Київ, 2010.
168. Попель С. М. Творчий вчитель : блог URL : <http://popsml.blogspot.com/> (дата звернення: 30.06.2022).
169. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra : GeoGebraBook / Л.Е.Гризун, В.В. Пікалова, І.Д.Русіна, В.А.Цибулька. [Kharkiv GeoGebra Institute](http://www.geogebra.org/m/jjgf2vfk). URL : <https://www.geogebra.org/m/jjgf2vfk> (дата звернення 06.01.2023).
170. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra як інструменту реалізації STEM-освіти: навч. посіб. / Гризун Л. Е., Пікалова В. В., Русіна І.Д., Цибулька В. А. Харків : ХНПУ імені Г.С. Сковороди, 2018. 80 с.
171. Програма спеціального курсу «Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі математики загальноосвітніх навчальних закладів» / М. І. Жалдак, В. Ю. Биков, Ю. О. Жук та ін. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики* : зб. наук. праць. Випуск VI: в 3-х томах. Кривий Ріг: Видавн. відділ НметАУ, 2006. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. С. 4-20.
172. Програмний засіб "Бібліотека електронних наочностей "Геометрія, 7-9 клас". Київ : Мальва, 2006. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
173. Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів України», версія 1. Херсон, 2006. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. Системні вимоги: Pentium, тактова частота від 1100 MHz, 128 Mb RAM, CD-ROM Windows XP.



174. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів версія 1.0 . Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. Системні вимоги: Pentium, тактова частота від 1100 MHz, 128 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
175. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів: настанова користувача. Версія 1.0. Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. 44 с.
176. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів: Методичні рекомендації по використанню програмно-методичний комплекс при проведенні уроку та при самостійній роботі учнів. Версія 1.0. Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. 26 с.
177. Риковський М. Й. Ресурси GeoGebra . URL : <https://www.geogebra.org/u/mirinf> (дата звернення 06.07.2022).
178. Рождественська Л. В. STEAM-проекти в шкільній освіті, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=SnBjtBe5Ofg> .
179. Сидорук В. А. Побудова перерізів многогранників : навч.-метод. посіб. *GeoGebraBook* . URL : <https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs> (дата звернення: 30.06.2022).
180. Смирнова-Трибульська Є. М. Інформаційно-комунікаційні технології в професійній діяльності вчителя : посіб.для вчителів. Херсон: Айлант, 2007. 560 с.
181. Український проєкт «Якість освіти». WEB-STEM-школа-2018. URL: <http://yakistosviti.com.ua/uk/web-stem-shkola-programa-2018> (дата звернення 29.11.2022).

## ПРО АВТОРІВ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ПОСІБНИКА

**Крамаренко Тетяна Григорівна**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету;

[kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua](mailto:kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua)

**Наукова бібліометрія:**

[Google Scholar](#);

[Scopus](#);

[Репозитарій КДПУ](#)

[ORCID](#) [0000-0003-2125-2242].



**Пилипенко Ольга Сергіївна**, викладач інформатики та математики Відокремленого структурного підрозділу «Криворізький фаховий коледж Державного університету економіки і технологій», аспірантка кафедри інформатики та прикладної математики Криворізького державного педагогічного університету.

[banadaolga96@gmail.com](mailto:banadaolga96@gmail.com)

**Наукова бібліометрія:**

[Google Scholar](#);

[Scopus](#);

[Репозитарій КДПУ](#);

[ORCID](#) [0000-0003-0493-8429].



**У цьому посібнику авторами сумісно підготовлено пункти 1.1-1.3; 1.5; 3.6; 3.8; 3.10; 3.14-3.15; 3.17-3.18; 3.20; 3.22-3.24.**

**Крамаренко Т. Г.** розроблено пункти 1.4; 2.1-2.3; 3.1-3.5, 3.7; 3.9; 3.12-3.13; 3.25-3.27; 4.1.

**Пилипенко О. С.** підготовлено пункти 3.11; 3.16; 3.19; 3.21; 4.2.

Навчальне видання

**Крамаренко** Тетяна Григорівна  
**Пилипенко** Ольга Сергіївна

**МАТЕМАТИКА в STEMі**

Комп'ютерний набір та верстка      Т.Г. Крамаренко

Підп. до друку 30.06.2023  
Папір офсетний №1  
Ум. друк. арк. 26,1

Формат 80×84 1/16  
Зам. №  
Тираж прим.

50086, м. Кривий Ріг, проспект Гагаріна, 54. тел. : (056) 405-13-96  
E-mail: k\_mathematics@kdpu.edu.ua