НКО—УРСР
КРИВОРІЖСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

# НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Том I

ВИДАННЯ
КРИВОРІЖСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
КРИВИЙ РІГ 1941 ДНІПРОПЕТРОВСЬК

НКО—УРСР

КРИВОРІЖСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

# НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Том I











ВИДАННЯ
КРИВОРІЖСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
КРИВИЙ РІГ 1941 ДНІПРОПЕТРОВСЬК

*Ф. К. КОСИК*

# ПОБУДУВАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА ДЛЯ ОПЕРАТОРІВ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Багато різних проблем математичної фізики і техніки приводяться до краєвих задач, що полягають у відшуканні розв'язка диференціальної системи, яка складається з диференціального рівняння і граничних умов, абож у відшуканні розв'язка відповідного інтегрального рівняння, яке замінює диференціальну систему (1, 2, 3, 4).

Кращим засобом дослідження таких задач математичного природознавства є функція Гріна, вивчення якої було предметом робіт багатьох математиків (5, 6, 7). У цій статті ми розглянемо кілька побудувань функції Гріна в порівняно зручній у багатьох випадках формі.

Як відомо, функція Гріна $K(x, s)$ оператора $L(u)$ відповідає граничним умовам:

$$R_j(u) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

де

$$L(u) \equiv P_0(x)\overset{(n)}{u}(x) + P_1(x)\overset{(n-1)}{u}(x) + \ldots + P_n(x)u(x)$$

$P_i(x)$ — неперервні на $[a, b]$ функції,

$P_0(x)$ — крім того, відмінна від нуля для всіх $x$ на $[a, b]$,

$$R_j(u) = R_{j1}(u) + R_{j2}(u),$$

$$R_{j1}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{jr}\overset{(r)}{u}(a),$$

$$R_{j2}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{jr}\overset{(r)}{u}(a),$$

цілком визначається такими чотирма властивостями:

1. $K(x, s)$ і її похідні по $x$ до $(n-2)^{\text{го}}$ порядку включно є неперервні функції для всіх $x \subset [a, b]$.

2. Похідна $(n-1)^{\text{го}}$ порядку в точці $x = s$ для $s \subset (a, b)$ має розрив, при чому стрибок дорівнює $\dfrac{1}{P_0(s)}$.

3. $K(x, s)$ при будьякому $s \subset (a, b)$ задовольняє граничні умови:

$$R_j(u) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

4. На $[a, s)$ і $(s, b]$ функція $K(x, s)$, як функція $x$, задовольняє диференціальне рівняння $L(u) = 0$ при будьякому $s \subset (a, b)$.

Коли $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ є фундаментальна система розв'язків рівняння $L(u) = 0$, то оскільки функція $K(x, s)$ на $[a, s)$ і $(s, b]$ задовольняє це рівняння, вона може бути представлена так:

$$K(x, s) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i(x) & \text{для } x \leqslant s, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_i(x) & \quad \text{„} \quad x \geqslant s. \end{cases}$$

Для визначення коефіцієнтів $a_i$ та $b_i$, використавши перші три властивості функції Гріна, складемо систему рівнянь:

$$(C) \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\, u_i^{(m)}(s) = 0 \quad [m = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)] \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\, u_i^{(n-1)}(s) = \dfrac{1}{P_0(s)} \\ R_j(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} [a_i R_{j1}(u_i) + b_i R_{i2}(u_i)] = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta(s)$ можна представити в такому вигляді:

$$\Delta(s) = A \cdot w(s),$$

де:

$$A = \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix}, \quad w(s) = \begin{vmatrix} u_1(s) \ldots u_n(s) \\ u_1'(s) \ldots u_n'(s) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1^{(n-1)}(s) \ldots u_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}.$$

Через те, що $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ линійно незалежні розв'язки диференціального рівняння $L(u) = 0$, то вронскіан $w(s) \neq 0$ для всіх $s \subset [a, b]$ і, вважаючи $A \neq 0$, матимемо, що детермінант $\Delta(s)$ системи $(C)$ відмінний від нуля для всіх $s \subset [a, b]$.

Але при умові: $\Delta(s) \neq 0$ існує одна і тільки одна система $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ розв'язків системи $(C)$; виходить, що існує функція Гріна $K(x, s)$ і при цьому єдина.

Вважаючи, як і раніше $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ фундаментальною системою розв'язків диференціального рівняння $L(u)=0$ і детермінант $A \neq 0$, побудуємо ядро:

$$(\Phi_1) \qquad K(x, s) = \begin{cases} \sum\limits_{i, k=1}^{n} C'_{ik} u_i(x) V_k(s) & \text{для } x \leqslant s, \\ \sum\limits_{i, k=1}^{n} C''_{ik} u_i(x) V_k(s) & \text{„} \quad x \geqslant s, \end{cases}$$

де:

$$C'_{ik} = -\frac{1}{A} \begin{array}{c} \\ \end{array} \overset{i \text{ колонка}}{\begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_{12}(u_k) \ldots R_1(u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n(u_1) \ldots R_{n2}(u_k) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix}};$$

$$C''_{ik} = \frac{1}{A} \overset{i \text{ колонка}}{\begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots \overline{R_{11}(u_k)} \ldots R_1(u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n(u_1) \ldots R_{n1}(u_k) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix}},$$

$$V_k(s) = \frac{1}{P_0(s)} \frac{w_{nk}(s)}{w(s)},$$

де: $w_{nk}$ алгебричне доповнення $k$-го елемента останнього рядка вронскіана $w(s)$, і доведемо, що $K(x, s)$ є функція Гріна для диференціальної системи:

$$L(u) = 0$$
$$R_j(u) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

1. Доведемо, що $K(x, s)$ має першу і другу властивості, необхідні для функції Гріна.

Через те, що $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ разом із своїми першими похідними є неперервні функції для $x \subset [a, b]$ і $K_{m0}(x, s)$

$$[m = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$$

для $x \neq s$, як сума скінченого числа таких неперервних функцій є функція неперервна, де:

$$K_{pq}(x, s) = \frac{\partial^{p+q} K(x, s)}{\partial x^p \partial^q}.$$

Щоб показати, що для $x=s$ функції $K_{m0}(x, s)$ $[m=0,1, \ldots (n-2)]$ неперервні, а $K_{n-1,0}(x, s)$ — розривна, при чому стрибок дорівнює $\dfrac{1}{P_0(s)}$, складемо різницю:

$$K_{m0}(s+0;\ s)-K_{m0}(s-0;\ s):$$

$$K_{m0}(s+0;\ s)-K_{m0}(s-0;\ s)=\sum_{i,\,k=1}^{n}(C''_{ik}-C'_{ik})\,u_i^{(m)}(s)\,V_k(s).$$

Але, додавши детермінанти, що входять у чисельники виразів для $C'_{ik}$ і $C''_{ik}$, матимемо:

$$C''_{ik}-C'_{ik}=\begin{cases}0 & i\neq k\\ 1 & i=k,\end{cases}$$

то:

$$K_{m0}(s+0,\ s)-K_{m0}(s-0,\ s)=\sum_{i=1}^{n}u_i^{(m)}(s)\,V_i(s)$$

або, представивши суму у вигляді детермінанта, матимемо:

$$K_{m0}(s+0;\ s)-K_{m0}(s-0;\ s)=\frac{1}{P_0(s)}\begin{vmatrix}u_1(s)\ \dots\ u_n(s)\\ \dots\dots\dots\dots\\ u_1^{(n-2)}(s)\ \dots\ u_n^{(n-2)}(s)\\ u_1^{(m)}(s)\ \dots\ u_n^{(m)}(s)\end{vmatrix}$$

через те, що детермінант:

$$\begin{vmatrix}u_1(s)\ \dots\ u_n(s)\\ \dots\dots\dots\dots\\ u_1^{(n-2)}(s)\ \dots\ u_n^{(n-2)}(s)\\ u_1^{(m)}(s)\ \dots\ u_n^{(m)}(s)\end{vmatrix}=\begin{cases}0 & \text{для } m=0,1,\dots(n-2)\\ w(s) & \text{„}\ \ m=n-1\end{cases}$$

то:

$$K_{m0}(s+0;\ s)-K_{m0}(s-0;\ s)=\begin{cases}0 & \text{для } m=0,1,\dots,(n-2)\\ \dfrac{1}{P_0(s)} & \text{„}\ \ m=n-1,\end{cases}$$

що й доводить наше твердження.

2. $K(x,s)$ також задовольняє граничні умови: $R_j(u)=0$ $(j=1,2,\dots,n)$. Справді,

$$R_j(K)=R_{j1}(K)+R_{j2}(K).$$

Підставимо у праву частину цієї тотожності вирази для $K(x,s)$, при чому в перший доданок — вираз для $x\leqslant s$, у другий — для $x\geqslant s$; тоді,

$$R_j(K)=R_{j1}\left[\sum_{i,\,k=1}^{n}C'_{ik}u_i(x)\,V_k(s)\right]+R_{j2}\left[\sum_{i,\,k=1}^{n}C''_{ik}u_i(x)\,V_k(s)\right]$$

і, через лінійність і однорідність операторів $R_{j1}$ та $R_{j2}$ відносно $u(x)$ і її похідних, можна написати

$$R_j(K) = \sum_{i,\,k=1}^{n} C'_{ik} V_k(s) R_{j1}(u_i) + \sum_{i,\,k=1}^{n} C''_{ik} V_k(s) R_{j2}(u_i)$$

або

$$R_j(K) = \sum_{k=1}^{n} V_k(s) \left\{ \sum_{i=1}^{n} C'_{ik} R_{j1}(u_i) + \sum_{i=1}^{n} C''_{ik} R_{j2}(u_i) \right\}.$$

Розглянемо вираз, що в фігурних дужках, який позначимо через $\gamma_{kj}$

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{n} C'_{ik} R_{j1}(u_i) + \sum_{i=1}^{n} C''_{ik} R_{j2}(u_i)$$

Додамо і віднімемо у правій частині цієї рівності вираз

$$\sum_{i=1}^{n} C'_{ik} R_{j2}(u_i);$$

тоді

$$(*) \quad \gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{n} C'_{ik} R_j(u_i) + \sum_{i=1}^{n} (C''_k - C'_{ik}) R_{j2}(u_i).$$

Доведемо, що всі

$$\gamma_{kj} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Для цього розкладемо в чисельнику виразу $C'_{ik}$ детермінант за елементами $i$-ої колонки. Матимемо:

$$C'_{ik} = -\frac{1}{A} \sum_{e=1}^{u} R_{e2}(u_k) A_{ei},$$

де $A_{ei}$ — алгебричне доповнення, що відповідає елементові $R_e(u_i)$ в детермінанті $A$. Отже, перший доданок у правій частині співвідношення (*) можна представити в такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} C'_{ik} R_j(u_i) = -\frac{1}{A} \sum_{e=1}^{n} R_{e2}(u_k) \sum_{i=1}^{n} A_{ei} R_j(u_i).$$

Але на підставі відомої властивості детермінантів:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ei} R_j(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{для } e \neq j \\ A & \text{„ } e = j \end{cases}$$

і тому

$$\sum_{i=1}^{n} C'_{ik} R_j(u_i) = -R_{j2}(u_k).$$

Другий доданок дорівнює $R_{j2}(u_k)$;
через те, що

$$C''_{ik} - C'_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq k \\ 1 & \text{„ } i = k, \end{cases}$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} (C''_{ik} - C'_{ik}) R_{j2}(u_i) = R^{j}{}_{2}(u_k).$$

Отже, всі

$$\gamma_{kj} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Таким чином

$$R_j(K) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} V_k(s) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Лишається перевірити, що $K(x, s)$ має четверту властивість, тобто $L(K) = 0$ для $x$ зсередини $[a, s)$ та $(s, b]$.

Що це має місце, видно з рівностей:

$$L(K) = L\left[\sum_{i,k=1}^{n} C_{ik} u_i(x) V_k(s)\right] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} C'_{ik} V_k(s) L(u_i) \quad \text{для} \quad x \subset [a, s)$$

$$L(K) = L\left[\sum_{i,k=1}^{n} C''_{ik} u_i(x) V_k(s)\right] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} C''_{ik} V_h(s) L(u_i) \quad \text{для} \quad x \subset (s, b]$$

і через те, що $u_i(x), u_i(x), \ldots, u_n(x)$ — розв'язки диференціального рівняння, то

$$L(u_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отже, $L(K) = 0$ для $x$ зсередини $[a, s)$ та $(s, b]$.

Перетворивши, як і раніше, $C'_{ik}$ до вигляду

$$C'_{ik} = -\frac{1}{A} \sum_{j=1}^{n} R_j(u_k) A_{ji},$$

а також представивши у вигляді детермінантів суми по $i$ і по $k$, що у виразах для $K(x, s)$ при $x \leqslant s$, і, зробивши те саме з $K(x, s)$ для $x \geqslant s$, матимемо функцію Гріна в такій формі:

$$\underset{x \leq s}{K(x, s)} = -\frac{1}{P_0(s)\,Aw(s)} \sum_{j=1}^{n} \begin{array}{r} \\ \\ j \text{ рядок} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdots\cdots \\ u_1(x) \ldots u_n(x) \\ \cdots\cdots \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_u) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1(s) \ldots u_n(s) \\ u'_1(s) \ldots u'_n(s) \\ \cdots\cdots \\ u_1^{n-2}(s) \ldots u_n^{n-2}(s) \\ R_{j2}(u_1) \ldots R_{j2}(u_n) \end{vmatrix}$$

$(\Phi_2)$

$$\underset{x \geq s}{K(x, s)} = \frac{1}{P_0(s)\,Aw(s)} \sum_{j=1}^{n} \begin{array}{r} \\ \\ j \text{ рядок} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdots\cdots \\ u_1(x) \ldots u_n(x) \\ \cdots\cdots \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1(s) \ldots u_n(s) \\ u'_1(s) \ldots u'_n(s) \\ \cdots\cdots \\ u_1^{(n-2)}(s) \ldots u_n^{(n-2)}(s) \\ R_{j1}(u_1) \ldots R_{j1}\, u_n) \end{vmatrix}$$

Позначимо через $y_j(x)$ детермінант

$$\begin{array}{r} \\ \\ j \text{ рядок} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdots\cdots \\ u_j(x) \ldots u_n(x) \\ \cdots\cdots \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix}$$

і доведемо, що $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння: $L(u) = 0$.

Через те, що $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ є розв'язки диференціального рівняння $L(u) = 0$, то

$$L(y_j) = L\left[\sum_{i=1}^{n} A_{ji} u_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} L(u_i) = 0.$$

Виходить, що

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

є розв'язки рівняння $L(u) = 0$ і, крім того, є система лінійно незалежних розв'язків рівняння $L(u) = 0$, бо

$$W(y_2, y_2, \ldots, y_n) = A^{n-1} W(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

що легко перевірити перемноженням рядка на рядок детермінантів

$$A^{n-1} = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1} \ldots A_{nn} \end{vmatrix}$$

та

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1(x) \ldots & u_n(x) \\ u_1(x) \ldots & u'_n(x) \\ \cdots\cdots & \cdots \\ u_1^{(n-1)}(x) \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

і користуючись позначенням $y_j(x)$.

Але $u_1, u_2, \ldots, u_n$ лінійно незалежні розв'язки рівняння $L(u)=0$. Тому $W(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$ для всіх $x$ на $[a, b]$.

І через те, що $A \neq 0$, то й $A^{n-1} \neq 0$; виходить, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, як добуток $A^{n-1}$ на $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ теж не рівен нулю для всіх $x$ на $[a, b]$, а тому $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно незалежні функції.

Отже, система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння $L(u)=0$.

Окремим випадком розглянутої вище функції Гріна є функція Гріна оператора $L(u)$, яка відповідає граничним умовам штурмового типу:

$$\begin{cases} R_{j1}(u)=0 & (j=1, 2, \ldots, p) \\ R_{j2}(u)=0 & (j=p+1, p+2, \ldots, n). \end{cases}$$

Вираз функції Гріна, що відповідає цим граничним умовам, можна дістати з виразів $(\Phi_1)$ та $(\Phi_2)$.

Поклавши в них

$$\begin{cases} R_j(u)=R_{j1}(u)+0 & \text{для} \quad j=1, 2, \ldots, p \\ R_j(u)=0+R_{j2}(u) & \text{„} \quad j=p+1, p+2, \ldots, n, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} R_{j1}(u)=0 & \text{для} \quad j=p+1, p+2, \ldots, n \\ R_{j2}(u)=0 & \text{„} \quad j=1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

у виразі $(\Phi_1)$ матимемо

$$(\varphi)_1 \quad K(x\, s)=\begin{cases} \sum_{i, k=1}^{n} C'_{ik} u_i(x) V_k(s) & \text{для} \quad x \leqslant s \\ \sum_{i, k=1}^{n} C''_{ik} u_i(x) V_k(s) & \text{„} \quad x \geqslant s, \end{cases}$$

де $u_i(x)$ та $V_k(s)$ представляють те ж, що й вище

$$A=\begin{vmatrix} R_{11}(u_1)\ldots & R_{11}(u_n) \\ \cdots & \cdots \\ R_{p1}(u_1)\ldots & R_{p1}(u_n) \\ R_{p+1,2}(u_1)\ldots & R_{p+1,2}(u_n) \\ \cdots & \cdots \\ R_{n2}(u_1)\ldots & R_{n2}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$C'_{ik}=-\frac{1}{A}\begin{array}{c}\qquad\qquad i\ \text{колонка}\qquad\qquad\\ \left|\begin{matrix} R_{11}(u_1)\ldots & 0\ldots & R_{11}(u_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{p1}(u_1)\ldots & 0\ldots & R_{p1}(u_n)\\ R_{p+1,2}(u_1)\ldots & R_{p+1,2}(u_k)\ldots & R_{p+1,2}(u_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{n2}(u_1)\ldots & R_{n2}(u_k)\ldots & R_{n2}(u_n)\end{matrix}\right|\end{array};$$

$$C''_{ik}=\frac{1}{A}\begin{array}{c}\qquad\qquad i\ \text{колонка}\qquad\qquad\\ \left|\begin{matrix} R_{11}(u_1)\ldots & R_{11}(u_k)\ldots & R(u_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{p1}(u_1)\ldots & R_{p1}(u_k)\ldots & R_{p1}(u_n)\\ R_{p+1,2}(u_1)\ldots & 0\ldots & R_{p+1,2}(u_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{n2}(u_1)\ldots & 0\ldots & R_{n2}(u_n)\end{matrix}\right|\end{array}$$

А з виразу ($\Phi_2$) одержимо:

$$\underset{x\leqq s}{K(x,s)}=-\frac{1}{P_0(s)A\cdot w(s)}\sum_{j=p+1}^{n}\begin{array}{r}\\ \\ \\ \\ \\ j\ \text{рядок}\longrightarrow\\ \\ \\ \end{array}\left|\begin{matrix} R_{11}(u_1)\ldots & R_{11}(u_n)\\ \cdots & \cdots\\ R_{p_1}(u_1)\ldots & R_1(u_n)\\ R_{p+1,2}(u_1)\ldots & R_{p+1,2}(u_n)\\ \cdots & \cdots\\ u_1(x)\ldots & u_n(x)\\ \cdots & \cdots\\ R_{n_2}(u_1)\ldots & R_{u_2}(u_n)\end{matrix}\right|\cdot\left|\begin{matrix} u_1(s)\ldots & u_n(s)\\ u_1'(s)\ldots & u_n'(s)\\ \cdots & \cdots\\ u_1^{(n-2)}(s)\ldots & un^{(n-2)}(s)\\ R_{j_2}(u_1)\ldots & R_{j_2}(u_n)\end{matrix}\right|$$

($\varphi_2$)

$$\underset{x\geqq s}{K(x,s)}=\frac{1}{P(s)\,A\cdot w(s)}\sum_{j=1}^{p}\begin{array}{r}\\ \\ j\ \text{рядок}\nearrow\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left|\begin{matrix} R_{11}(u_1)\ldots & R_{11}(u_n)\\ \cdots & \cdots\\ u_1(x)\ldots & u_n(x)\\ \cdots & \cdots\\ R_{p_1}(u_1)\ldots & R_{p_1}(u_n)\\ R_{p+1,2}(u_1)\ldots & R_{p+1,2}(u_n)\\ \cdots & \cdots\\ R_{n_2}(u_1)\ldots & R_{n_2}(u_n)\end{matrix}\right|\cdot\left|\begin{matrix} u_1(s)\ldots & u_n(s)\\ u_n(s)\ldots & u_n'(s)\\ \cdots & \cdots\\ u_1^{(n-2)}(s)\ldots u_n^{(n-2)}(s) & \\ R_{j_1}(u_1)\ldots & R_{j_1}(u_n)\end{matrix}\right|$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. К. Кошляков — Основные диференциальные уравнения математической физики.
2. Р. Курант и Д. Гильберт — Методы математической физики.
3. У. В. Ловит — Линейные интегральные уравнения.
4. И. И. Привалов — Интегральные уравнения.
5. Смогоржевский — Журнал института математики Вуан за 1935 г., №№ 3—4.
6. Е. Л. Буницкий — К теории функции Грина, 1913 г.
7. Я. Д. Тамаркин — О некоторых общих задачах теории обыкновенных диференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды, 1917 г.
8. Ф. Сурикова — Общие линейные диференц. системы, 1936 г. Доклады А. Н. СССР, том 1, № 4.


---

## *Ф. К. Косик* — ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ


### Резюме

В статье дается построение функции Грина для оператора:

$$L(u) = P_0(x)\, u^{(n)}_{(x)} + P_1(x) u^{(n-1)}_{(x)} + \ldots + P_n(x)\, u(x),$$

соответствующей граничным условиям:

$$R_j(u) = R_{j1}(u) + R_{j2}(u) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

где:

$$R_{j1}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{jr} u^{(r)}_{(a)}$$

$$R_{j2}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{jr} u^{(r)}_{(b)}$$

в виде:

$$K(x, s) = \begin{cases} \sum\limits_{i,k=1}^{n} C'_{ik} u_i(x)\, V_k(s) & x \leqslant s \\ \sum\limits_{i,k=1}^{n} C''_{ik} u_i(x)\, V_k(s) & x \geqslant s. \end{cases}$$

где $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$—фундаментальная система решений диференциального уравнения $L(u) = 0$

$$V_k(s) = \frac{W_{uk}(s)}{W(s)}$$

$w(s)$ — вронскиан системы функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$,
$w_{nk}(s)$ — алгебраическое дополнение $k$-го элемента последней строки детерминанта $w(s)$.

$$C'_{ik} = -\frac{1}{A} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad i\text{-ая колонка} \\ \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_{12}(u_k) \ldots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1) \ldots R_{n2}(u_k) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix} \end{array}$$

$$C''_{ik} = \frac{1}{A} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad i\text{-ая колонка} \\ \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_{11}(u_k) \ldots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1) \ldots R_{n1}(u_k) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

или в виде

$$K(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{P_0(s) \cdot A \cdot w(s)} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(x)\, \omega_{j2}(s) & x \leq s \\ \dfrac{1}{P_0(s) \cdot A \cdot w(s)} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(x)\, \omega_{j1}(s) & x \geq s \end{cases}$$

где:

$$y_j(x) = \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1(x) \ldots\ u_n(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix} \longleftarrow j\text{-ая строка.}$$

$$\omega_{j1}(s) = \begin{vmatrix} u_1(s) \ldots\ u_n(s) \\ u_j(s) \ldots\ u'_n(s) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{1(s)}^{(n-2)} \ldots u_{(s)}^{(n-2)} \\ R_{j1}(u_1) \ldots R_{j1}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$\omega_{j2}(s) = \begin{vmatrix} u_j(s) \ldots\ u_n(s) \\ u'_1(s) \ldots\ u'_n(s) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{1(s)}^{(n-2)} \ldots u_{(s)}^{(n-2)} \\ R_{j2}(u_1) \ldots R_{j2}(u_n) \end{vmatrix}$$

*F. K. Kossik*—DIE AUFSTELLUNG DER FUNKTION GREENS FÜR DER OPERATOR DER HÖHEREN ORDNUNG


## Resumee

Iu dem Artikel gibt man uns die Aufstellung der funktion Green für den Operator:

$$L(u)=P_0(x)u_{(x)}^{(n)}+P_1(x)u_{(x)}^{(n-1)}+\ldots+P_n(x)u(x)$$

die den Randbedingungen entspricht:

$$R_j(u)=R_{j1}(u)+R_{j2}(u)=0 \quad (j=1, 2, 3, \ldots, n),$$

wo:

$$R_{j1}(u)=\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{jr}\overset{(r)}{u}(a),$$

$$R_{j2}(u)=\sum_{r=0}^{n-1} \beta_{jr}\overset{(r)}{u}(b)$$

in Form

$$K(x, s)=\begin{cases} \sum\limits_{i,k=1}^{n} C_{ik}''u_i(x)V_k(s) & x\leq s \\ \sum\limits_{i,k=1}^{n} C_{ik}''u_i(x)V_k(s) & x\geqslant s \end{cases}$$

wo $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$—das fundamentale Systemder Auflösungen der Differential-gleichung $L(u)=0$.

$$V_k(s)=\frac{W_{nk}(s)}{W(s)}$$

$W(s)$—Wronskian des Systems der Funktionen $u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots, u_n(x)$,

$W_{nk}(s)$—die algebraische Ergänzung des $K=$ten Elements der letz ten Zeile des Determinants.

$$C'_{ik} = -\frac{1}{A} \begin{array}{c} \qquad\qquad i = \text{te Kolonne} \\ \begin{vmatrix} R_1(u_1) \dots & R_{12}(u_k) \dots & R_1(u_n) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ R_n(u_1) \dots & R_{n2}(u_k) \dots & R_n(u_n) \end{vmatrix} \end{array}$$

$$C''_{ik} = \frac{1}{A} \begin{array}{c} \qquad\qquad i = \text{te Kolonne} \\ \begin{vmatrix} R_1(u_1) \dots & R_{11}(u_k) \dots & R_1(u_n) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ R_n(u_1) \dots & R_{n1}(u_k) \dots & R_n(u_n) \end{vmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} R_1(u_1) \dots & R_1(u_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R_n(u_1) \dots & R_n(u_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

oder in Form

$$K(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{P_0(s)AW(s)} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(x)\omega_{j2}(s) & x \leq s \\[2ex] \dfrac{1}{P_0(s)AW(s)} \sum\limits_{t=1}^{n} y_j(x)\omega_{j2}(s) & x \geqslant s \end{cases}$$

wo

$$y_j(x) = \begin{array}{cl} \begin{vmatrix} R_1(u_1) \dots & R_1(u_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1(x) \dots & u_n(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R_n(u_1) \dots & R_n(u_n) \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow j = \text{ste Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\omega_{j1}(s) = \begin{vmatrix} u_1(s) \dots & u_n(s) \\ u'_1(s) \dots & u'_n(s) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u^{(n-2)}_1(s) \dots & u^{(n-2)}_n(s) \\ R_{j1}(u_1) \dots & R_{j1}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$\omega_{j2}(s) = \begin{vmatrix} u_1(s) \dots & u_n(s) \\ u'_1(s) \dots & u'_n(s) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u^{(n-2)}_1(s) \dots & u^{(n-2)}_n(s) \\ R_{j2}(u_1) \dots & R_{j2}(u_n) \end{vmatrix}$$

---