

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Факультет фізико-математичний
Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»

В. о. завідувача кафедри

_____ Д. Є. Бобилєв

Реєстраційний № _____

«___» _____ 2021 р.

«___» _____ 2021 р.

**ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННІ ТЕОРІЇ
ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІ-16

ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності 014.04 середня освіта
математика (інформатика)

Романової Анастасії Миколаївни

Керівник:

канд. пед. наук, доцент Крамаренко Т.Г.

Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП	3
<p>РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.....8</p>	
1.1. Використання хмарних технологій у практиці навчання учнів.....7	7
1.2. Логіко-дидактичний аналіз стохастичної лінії у старшій школі в профільному вивченні математики.....16	16
1.3. Методичні засади навчання стохастики у профільній школі.....30	30
Висновки до розділу 1..... 37	37
<p>РОЗДІЛ 2 МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ НАВЧАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ</p>	
2.1. Використання онлайн сервісів Kahoot	38
2.2. Використання онлайн сервісів LearningApps.....48	48
2.3. Використання онлайн сервісів GeoGebra.....57	57
2.4. Використання у навчанні стохастики віртуальної дошки Jamboard..... 61	61
Висновки до розділу 2..... 70	70
ВИСНОВКИ	71
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ..... 73	73

ВСТУП

Актуальність дослідження. Стан розвитку загальної середньої освіти останніми роками характеризується не лише змінами в її структурі та змісті, а й пошуком найбільш ефективних технологій навчання учнів. Така стратегія обумовлена прагненням України забезпечувати додаткові можливості не лише для їх творчості та взаємодії між собою, а й із глобальним світом за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій [12, с. 8]. Однак задовольнити зростаючий попит споживачів освітніх послуг на інтернет-комунікації неможливо без використання сучасних веб-сервісів.

Світовий досвід використання хмарних технологій у сфері освіти свідчить про їх перспективність, адже вони загалом мають низку переваг, зокрема: безкоштовне використання програмного забезпечення; мобільність у роботі та універсальність доступу до інформації; захист персональних даних та розмежування доступу до спільної інформації; відсутність технічної підтримки роботи платформи та попереднього налаштування; можливість упровадження нових інтерактивних форм роботи [67].

Тенденції стрімкого розвитку інформаційно-комунікаційних технологій, особливо хмарних послуг, стають провідними у процесі освітньої реформи в Україні. Доказом цього є наукові праці В. Бикова [3;4], М. Жалдака [21;22;23], С. Семерікова [55;56] та інших.

Проте, не дивлячись на активність наукових розвідок у сфері хмарних технологій, їх практичне використання в навчально-виховному процесі загальноосвітнього навчального закладу з метою підвищення якості освіти школярів є недостатньо ефективним, що насамперед пояснюється недостатньою обізнаністю вчителів їх перевагами над традиційними технологіями навчання учнів.

Розвиток в учнів предметних компетентностей, насамперед математичної, – пріоритетне завдання навчання фізико-математичних дисциплін. Доцільно зауважити, що формування математичної компетентності при вивченні стохастички найкраще характеризується в

дослідженнях О.В. Трунової [60;61;62], М.І. Жалдака [23].

Математика як шкільний предмет має достатній потенціал для формування та розвитку стійких компонентів творчого стилю мислення, тих якостей, які необхідні людині для того, щоб бути успішною в сучасному житті, тобто бути компетентною. Компетентна людина визначається Н. Слюсаренко як така, що має достатні знання в будь-якій галузі, яка в будь-чому добре обізнана, тямуща, кваліфікована й має певні повноваження, права й владу [58]. Тому головне завдання вчителя математики – розвивати математичні здібності й навички учнів, підвищувати престиж знань, формувати не тільки математичні, але й ключові компетентності, тобто формувати вміння використовувати набуті в процесі навчання знання в повсякденному житті. А також, як зазначає В. Кузьменко, формувати у свідомості учня «картину світу», притаманну представникові певної культури й певного соціуму [36].

Вивчення математики в сучасних умовах набуває особливої актуальності. Зумовлено це тим, що все більше спеціальностей потребують застосувань математичних знань, практичних навичок і умінь високого рівня. Розбудова національної школи України включає в себе удосконалення математичної освіти, основними напрямками якої є оновлення змісту і технології навчання математики. Особистісно орієнтоване навчання, рівнева і профільна диференціація, які ґрунтуються на розробках стандартів математичної освіти, є основою для створення умов досягнення кожним учнем оптимального для нього рівня математичних знань і умінь, загального та математичного розвитку.

В контексті набуття учнями математичної компетентності О. В. Трунова особливу увагу звертає на вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцях і класах з поглибленим вивченням математики [60, с. 40-47]. Сучасна реформа математичної освіти в школі привела до появи в навчальних програмах відносно нових змістових ліній: «Елементи теорії множин. Комбінаторика», «Початки теорії

ймовірностей і вступ до статистики». Із введенням стохастичної лінії ставляться за мету вимоги, що стосуються вмінь аналізувати випадкові фактори, оцінювати ймовірність, висувати гіпотези, прогнозувати розвиток ситуації і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають імовірнісний характер. А це передбачає формування ймовірнісно-статистичних уявлень, знань, умінь і розвитку мислення учнів. Вивчення нових для школи тем сприяє реалізації прикладної спрямованості навчання математики. О. В. Трунова наголошує на доцільність введення елементів стохастики в програму середньої школи [61, с. 161-164].

Індивідуалізація самостійних і домашніх завдань з обов'язковою подальшою перевіркою дозволить прищепити навички самостійної роботи, а індивідуальний практикум з розв'язання стохастичних задач сприятиме відпрацюванню певних умінь використання імовірнісно-статистичних понять і методів у школі.

Дуже важливо особливо в період карантину використання віртуальних дошок та онлайн сервісів. Ще недостатньо використовуються віртуальні дошки, не всіма вчителями використовуються і Classroom, тому обрана тема магістерської роботи «Використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики» є **актуальною**.

Мета роботи – розкрити методику використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики.

Мета роботи конкретизується у таких **завданнях**:

- проаналізувати психолого-педагогічну, навчальну, математичну і методичну літературу, яка має відношення до проблеми дослідження, зокрема, дослідити використання хмарних технологій у практиці навчання учнів старшої школи; та вивчити сучасний стан навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики при профільному вивченні математики;
- здійснити логіко-дидактичний аналіз стохастичної лінії у старшій школі (профільний рівень); описати методичні засади навчання стохастики у

профільній школі;

- розробити дидактичні ігри для уроків математики з використанням програмних засобів: LearningApps, Kahoot, GeoGebra та дидактичні матеріали для уроків математики і навчання з використанням віртуальної дошки Jamboard;
- розробити методичні рекомендації щодо використання дидактичних матеріалів у навчанні стохастичності з використанням хмарних технологій.

Об'єктом дослідження є використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики.

Предметом дослідження методичні прийоми використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики.

Основні методи дослідження: теоретичні: вивчення і аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з теми, узагальнення; емпіричні: вивчення педагогічного досвіду, спостереження, порівняння, анкетування.

Практичне значення магістерської роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами-практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

Апробації дослідження. Оpubліковано статтю «Використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики» у електронному збірнику наукових праць молодих учених [52]. Оpubліковано тези «Навчання стохастичності у профільній школі з використанням ІКТ» у збірнику тез доповідей Всеукраїнської наукової-практичної конференції [53].

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел, що містить 68 найменування.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1.1. Використання хмарних технологій у практиці навчання учнів

Сьогодні, в еру інформатизації суспільства, все більшого значення набуває проблема використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальному процесі загальноосвітніх навчальних закладів [10]. Одним із найперспективніших напрямів розвитку ІКТ є використання хмарних технологій у навчальному процесі [12].

Хмарні технології – це технології, які надають користувачам Інтернету доступ до комп'ютерних ресурсів сервера і використання програмного забезпечення як онлайн - сервіса [38, с. 45]. Використання Інтернету, зокрема й хмарних технологій, у викладанні математики дає змогу вчителю формувати спеціальні математичні навички в школярів. Педагог отримує можливість широко застосовувати інформаційні технології навчання, де засобом підготовки й передання даних школярам є комп'ютер [40].

Використовуючи хмарні сервіси, кожен педагог може сам, без будь-якої допомоги, створити особисту сторінку в мережі Інтернет, де він може опубліковувати свої методичні розробки уроків, статті, програми навчання, методи роботи тощо. Можна звичайно виділити місце для домашніх завдань, завдань для допитливих [36].

Зазначимо, що хмарні технології при навчанні математики вчителі використовують досить рідко. Наразі використання хмарних технологій у навчальному процесі є актуальною тематикою, а тому використання хмарних технологій надає педагогу безліч можливостей для навчання під час карантину або хвороби учня, надавати навчальні послуги для школярів з обмеженими можливостями.

Так, щоб провести урок з математики із використанням хмарних технологій, необхідні і комп'ютери (чи ноутбуки, планшети, смартфони, інші пристрої), а також доступ до мережі Інтернет. Вчителі у своїй професійній діяльності можуть використовувати наступні хмарні технології:

- Web-додатки для навчання.
- Он-лайн сервіси для навчального процесу.
- Сховища файлів, спільний доступ до файлів.
- Електронні журнали та щоденники.
- Системи дистанційного навчання, бібліотеки, медіатеки.
- Ресурси для спільної роботи тощо [13].

Виділимо хмарні сервіси, які можна також використовувати при навчанні математики:

Хмарна платформа Google Apps (<https://www.google.com.ua/>) – можливість створення поштової скриньки з підтримкою текстового, голосового Google Talk та відеочату; робота з календарем Google; з диском Google –сховищем файлів; Google Docs – інструментом для створення документів, таблиць, презентацій, форм і малюнків будь-якої складності із можливістю використання шаблонів; сайтів Google – інструментом для створення сайтів за допомогою шаблонів та інші.

- Хмарні сховища файлів (Dropbox, SkyDrive, GoogleDocs тощо) [68;10].
- Створення тестів он-лайн - майстер-тест (<http://master-test.net/uk>), тесторіум (<http://www.testorium.net/>).
- Навчання математики он-лайн - Математика для школи - <http://formula.co.ua/>, Вивчаємо математику - <http://testmath.com.ua/> Академія хана - <https://uk.khanacademy.org/>, Вивчення математики онлайн - <http://ua.onlinemschool.com/> [20], тренажер Все 10 - <http://vse10.ru/> тощо).
- SageMathCloud (скорочено SMC) – це онлайн сервіс, в якому можна здійснити математичний або будь-який інший розрахунок Sage або IPython Notebook – <https://cloud.sagemath.com/>.

- Віртуальний кабінет вчителя Uztest.ru, в якому розміщені інформаційні ресурси та інтерактивні сервіси для підготовки і проведення занять з математики [45].

Зараз хмарні технології це повноцінний освітній інструмент для школярів та вчителів, яка дає змогу всім школам створювати свої власні онлайн-простори. В даний час, у будь-якого учня є власна поштова скринька, а також доступ до хмарного середовища школи, де знаходяться та зберігаються всі завдання у тому числі і домашні, підручники та інші дидактичні матеріали.

Уроки, які організовані за допомогою використання хмарних технологій, відрізняються від традиційних уроків тим, що замість підручників і зошитів – комп'ютери, а замість дошки – екран. Застосування хмарних технологій при викладанні математики дає змогу педагогу підвищувати свій професійний рівень знань, оскільки спонукає шукати нові форми, методи і засоби навчання.

Навчання математики, засноване на використанні хмарних технологій, не вимагає від школярів фізичної присутності за місцем отримання освіти, що так важливо в режимі традиційного навчання. Використання хмарних технологій при навчанні математики дозволяє не тільки отримати доступ до навчальних матеріалів різного виду, але й виконувати роботу спільно з однокласниками чи вчителем.

За останні декілька років суттєво змінилася методична робота вчителів. Від складання величезних паперових «папок» самоосвіти вони перейшли до хмарних технологій. Вчителі дистанційно навчаються, беруть участь у вебінарах, майстер-класах, відвідуючи сайти МОН, МАН, преси («Дистанційна Академія» видавництва «Основа», «Osvita.ua» та інші) або блоги інших вчителів. Відбувається швидкий обмін досвідом, стимулюється самоосвіта та самовдосконалення вчителів. Вражає те, що цей процес відбувається не через тиск адміністрації, а за власним бажанням. Часто вчителі оплачують таке навчання власним коштом, розуміючи наскільки

важливо отримувати знання та не відставати від учнів в питаннях використання гаджетів.

«Перевернутий клас» або **«перевернене навчання»** – це зворотній метод навчання, коли лекції та вивчення предмета відбувається онлайн [46], а домашнє завдання або закріплення матеріалу виконується в реальному класі. Цей метод в Сінгапурі називають методом «продуктивних провалів» («productive failure») [49]. Його запропонував глава Лабораторії досліджень навчальних процесів Національного інституту освіти країни Ману Капур. За його ідеєю учням пропонується спочатку спробувати розв'язати приклад або рівняння, а тільки потім пояснюють як це зробити. Використовується декілька сервісів для «перевернутого навчання» [57]. Взагалі, всі хмарні технології, про які далі піде мова, можна використовувати для даного методу. Вчителі можуть викладати навчальний матеріал, відео, фотоматеріали у себе на блозі, на сайті навчального закладу, Диску Google або на стіні в соціальних мережах, запропонувати учням ознайомитися з темою, а вже на уроці проводити обговорення, закріплення або опитування. Для контролю навчальних досягнень також можна використовувати ці ресурси.

Онлайн-навчання [15]. **МВОК** – масові відкриті онлайн курси [46]. Зараз у багатьох країнах світу університети та школи на своїх сайтах та інших освітніх ресурсах завантажують відеолекції, інтерактивний перелік літератури із пропозиціями масових відкритих онлайн-курсів (МООС) на таких Інтернет-платформах, як Udacity, Coursera і EdX, створюючи, таким чином, дивовижно багатий банк даних із різних освітніх напрямів.

У 2009 році в Україні впровадили науково-педагогічний проект «Дистанційне навчання школярів». У рамках науково-педагогічного проекту «Обласна електронна школа «Школа, відкрита для всіх» на порталі «Класна оцінка» педагоги у Дніпропетровській області створювали для різних навчальних предметів безкоштовні онлайн курси для школярів з особливими освітніми потребами.

Харківська компанія «Сміт» пропонує електронні засоби навчання:

віртуальні хімічні та біологічні лабораторії та підручники, що включають сучасні мультимедіа-системи. Їх можна використовувати online з планшета або ПК під час уроку при виконанні лабораторних дослідів або вивчення нового матеріалу, як домашнє завдання для закріплення знань або при використанні методу «перевернутого класу».

Хмарні платформи. Єдиний інформаційний простір в освіті планується побудувати [63] з використанням хмарних технологій, які надає компанія Microsoft Україна. Загальноосвітні навчальні заклади для впровадження нових форм проведення уроків, безпечного зберігання даних і електронного обміну даними будуть застосовувати хмарний сервіс Office 365, базовий тарифний план якого доступний для освітніх установ безкоштовно. В Дніпропетровському ліцеї інформаційних технологій при ДНУ імені Олеса Гончара учні, вчителі, батьки та адміністрація ліцею використовують цей сервіс для організації навчально-виховного процесу, миттєвої передачі інформації, спільної роботи над проектами. Створюється тісний зв'язок між учнями та вчителями, оптимізується та суттєво полегшується координація роботи на уроці та позакласній діяльності.

В листопаді 2015 року відбувся дистанційний майстер-клас “Хмарне портфоліо педагогічної діяльності” в рамках III міжнародної освітньої онлайн конференції INTEL для України та країн СНД “Нові горизонти ІКТ для сталого розвитку та освіти”. В результаті 67 вчителів України створили власне хмарне педагогічне портфоліо на Google диску. Всі документи, презентації, фотографії та відео необмежений час зберігаються, при роботі інформація кожної секунди запам'ятовується і не може зникнути, як це буває на комп'ютерах. Власник може за бажанням відкрити доступ до перегляду або спільної роботи іншим користувачам.

Хмарна платформа Google Apps Education Edition надає такі сервіси: календар Google, електронна пошта Gmail, диск Google, сайти Google, диск Google, Google Docs.

Диск Google – сховище зберігання власних файлів та можливість

налаштування прав доступу до них. Google Docs – сервіс для створення документів, таблиць, презентацій з можливістю надання прав спільного доступу декільком користувачам. Під час дистанційного навчання учитель математики може зручно обмінюватися з учнями необхідними документами. Зокрема розміщувати відеозаписи уроків, отримувати доступ до файлів з виконаним домашнім завданням.

Можливості, які доцільно вчителю використовувати у навчанні математики завдяки використанню хмарних сервісів:

- зберігання фото, відео, текстових документів необмеженого обсягу;
- спільна діяльність на віддаленій відстані;
- доступність поза межами роботи;
- миттєве збереження інформації.

Зручність і універсальність доступу забезпечується широкою доступністю послуг. Разом з тим, існують певні проблеми з боку безпеки, коли хмарні Провайдери можуть роками зберігати важливу інформацію на своїх серверах, а кібер – злочинці – перехоплювати інформацію. Звісно, великі хмарні провайдери застосовують всі можливі засоби для забезпечення максимальної безпеки інформації і вкладають кошти в розробку нових, ще більш ефективних засобів захисту, проте поки що не варто зберігати чи передавати особливо важливі документи в «хмари».

Ведення блогу. Блог – (веб-щоденник) це сайт, який є стрічкою записів (постів), які постійно доповнюються, сортуються за часом та датами. Його створювати набагато легше, ніж сайти, тому будь-який вчитель здатний на це. На ньому можна розміщувати текст, зображення, мультимедіа. Блог обов'язково містить можливість залишати коментарі тими, хто його відвідує, а тому він є інтерактивним середовищем спілкування учнів та вчителя. За допомогою цього сервісу вчитель-предметник або класний керівник може збирати інформацію, анкетувати учнів або батьків, виконувати контроль знань, організовувати проектну діяльність або проводити рефлексію після будь-яких заходів. Це ефективний засіб популяризації предмета або своєї

діяльності [5], [6], [7], [27].

Використання гаджетів. Гаррет Ріттер [15] керівник відділу мистецтва в англійській школі Уїллоу, який у 2013 році отримав престижну премію Пірсона за видатне використання технологій під час уроків, підкреслює, що навіть у простому сучасному смартфоні закладено набагато більше комп'ютерної потужності, ніж у космічному кораблі, що доставив першу людину на Місяць.

На уроках хімії та основ здоров'я під час виконання короткотривалих проектів учні використовують смартфони, планшети, ноутбуки для пошуку в мережі Інтернет інформації, малюнків, які ілюструють виступ їхньої групи перед класом. За відсутності підручників в смартфонах та планшетах використовується їх електронна версія. Учні навчаються усвідомлено використовувати цифрові технології.

Відеоблогінг [47]. Коли Гаррет Ріттер [15] запропонував своїм учням зробити серію навчальних відео з використанням студії звукозапису та завантажити їх на YouTube, вони в результаті отримали 185 тисяч переглядів: «Для моїх дітей із бідного району Кардіффа було просто дивовижно використати широкі можливості Інтернету».

Наші учні також знімають на мобільні телефони або планшети домашні досліди, а потім показують на уроці, або під час перерви. Наприклад, в 7-му класі це дослідження взаємодії соди із кефіром або лимонною кислотою, в 10-му класі учні навчаються позбавлятися від накипу на стінках чайника в побуті. А учні 11-х класів вивчають побутові способи виведення плям із тканини, створюють цікаві фільми-детективи або казки та викладають їх на YouTube. Приємно, що діти часто залучають батьків та маленьких братиків і сестричок до цієї роботи. Це пропагандує предмет хімії та зміцнює родини.

Соціальні медіа. Учні давно вже навчилися інтегрувати соціальні мережі в навчання. Під час роботи над довготривалими проектами вони в групі обмінюються інформацією для виступу або створення презентації. Відбувається процес спільної роботи над проектом.

Якщо використовувати соціальні медіа обережно і з розумом, вони можуть слугувати як корисний інструмент, а не як відволікаючий фактор, як це буває зазвичай.

Група у Facebook або інших соціальних медіа [16] дозволяє забезпечити для учнів простір, де вони зможуть ставити запитання та отримувати на них відповіді. Коли вони повернуться після школи додому і приступлять до виконання домашніх завдань, то зможуть поставити запитання, що їх цікавить, на стіні групи, на яке ви як учитель чи хтось з однокласників зможете дати відповідь.

На нашу думку, найпростіше вчителю буде скористатися платформою Classroom, оскільки це відкритий безкоштовний сервіс для дистанційного навчання. Зручно, що Classroom поєднаний з такими сервісами як Google Disc, Google Docs тощо, які адаптовані для освітніх задач. Для роботи з цією платформою обов'язково потрібно мати власну поштову скриньку в акаунті Google. Сервісом можна користуватися як з мобільного, так і з комп'ютера. У Classroom педагог може створювати власний віртуальний клас як один так і декілька, для кожного класу генерується свій код, за якими учні мають доступ до свого віртуального класу. В данному курсі вчитель може, наприклад, проводити опитування, публікувати навчальні матеріали, вікторину й створювати тематичні завдання. Можна встановити термін виконання тих чи інших завдань, педагог в режимі дійсного часу може спостерігати, як виконуються завдання учнями, бачити список виконаних зданих робіт або незданих робіт і виставляти оцінки за шкалою, яку він поставить. Вчитель також публікує оголошення у стрічці класу, додаючи в них не лише текст, а й, приміром, зображення або відео з Youtube, спілкується з учнями у чаті. Учні можуть бачити список завдань курсу - як виконані, так і ті, які лише доведеться здати. При цьому кожному учню вчитель може дати індивідуальне завдання, яке не побачать інші [66]. Таким чином, хмарні технології спричинили справжню революцію в освіті, спонукають учнів та вчителів до самоосвіти і самовдосконалення.

1.2. Логіко-дидактичний аналіз стохастичної лінії у старшій школі в профільному вивченні математики

Теорія ймовірностей та елементів статистики, елементи прикладної математики; комбінаторика; початки теорії ймовірностей. Вказані питання в різній мірі складності вивчаються в курсі математики різних профілів навчання. Підготовка людини до освіти має включати формування ймовірностно-статистичного мислення, навичок алгоритм побудови найпростіших математичних завдань, що враховують вплив того чи іншого випадку.

Для того, щоб набуті знання та навички учнями мали практичне спрямування, потрібно звернути увагу до статичної інтерпретації фактів та основних понять. Поняття ймовірності базується на статистичній основі. Коли вводиться статистичне означення ймовірності, важливо надати увагу пропедевтиці однорідності статистичного матеріалу, понять вибірки, застосування цього означення дає змогу отримати в практиці результати. Отримати формула класичної ймовірності можна за допомогою використання теореми додавання ймовірностей, отримують формулу класичної ймовірності. Ця формула в багатьох випадках розглядається дослід із скінченною кількістю рівноможливих наслідків, яка дає змогу передбачити ймовірність події, де проведено масово дослідів або неможливе, або пов'язане з великими труднощами.

Випадкова величина має математичну модель багатьох реальних процесів та явищ, отже потрібно акцентувати увагу на вивчення числових характеристик випадкової величина та їх гарнична поведінка (закон великих чисел), надати учням можливість уявити завдання математичної статистики. Для цього необхідно: ввести поняття випадкової величини (на рівні опису) з поняттям вибірки та законом розподілу тобто вибіркового розподілу; формувати у школярів поняття змісту, математичних сподівань випадкових величин; розуміння важливості введення міри розсіювання випадкових величин; вивчати паралельно вибіркоче середнє і математичне сподівання,

дисперсію та вибіркoву дисперсію, вміти розкривати їх зв'язок і відмінності. Тобто, доцільно сформува ти у школярів поняття змісту середніх показників та уміння в цих показниках орієнтуватися, адже це допомагає людині вирішувати та записати без помилок правильні рішення, раціонально сприймати інформацію, що поступає до неї. Тоді відкривається необхідність у кількісній оцінці розкиду статистичних даних, тому що статистичне дослідження навколишніх явищ не можливо виконати без розуміння міри розкиду.

Навчання в старшій школі в профільному класі з поглибленим вивченням математики суттєво підвищується теоретичний рівень вивчення навчального матеріалу. Варіативність обсягу теоретичного матеріалу закладена і в самій програмі. Значну увагу вивченню стохастичної лінії у школі приділено у роботах М.І. Жалдака [21], [22], [23], О.В.Трунової [60], [61], [62], Т.Г.Крамаренко [30], [31], [32], [33], О.Б. Жильцова [24] та інших.

В курсі алгебри пропедевтика вивчення стохастики починається в 8-9 класі. Учні вже мають уявлення про перестановки, як впорядковану множину однієї й тієї самої кількості елементів; ймовірність випадкової події і випадкову подію; про теорію ймовірностей як науку; мають представлення про способи збирання та подання даних, знають формулу кількості перестановок з m елементів, елементарні відомості про наближені обчислення, відносну, абсолютну похибки та точність наближення, мають уявлення про метод математичного моделювання. Повинні на даному етапі вже вміти: обчислювати за формулою кількість перестановок для значень m у межах 10; розв'язувати не складні задачі на обчислення ймовірностей, вміти наводити приклади математичних моделей, знаходити наближене значення величин та визначати статистичні характеристики вибірки також вміти обчислювати наближено за допомогою комп'ютера або калькулятора.

Основною метою введення лінії стохастики в даний курс є вивчення формул наближених обчислень значень елементарних функцій; приймати відомості про статистику як науку, її базові поняття, способи дослідження

деяких статистичних даних; формувати поняття означення перестановки з m елементів, комбінацію та розміщення з n по m елементів з повторенням елементів та надати вміння застосовувати означення та формули до розв'язування певних комбінаторних задач; формувати уяву про базові поняття теорії ймовірностей та виробити уміння їх застосувати до розв'язування не складних задач.

В шкільному курсі алгебри вивчають елементи стохастики в два етапи. У 9 класі вводять базові поняття стохастики та способи подання даних, також поняття гістограми розподілу значень, розкид і середнє значення. Після опрацювання даних тем вивчають про сприятливі випадки, ймовірність, розглядають випадки та розв'язують не складні приклади, які заготовлені на підрахунок, також надати обширну систему знань елементів статистики та початків теорії ймовірностей.

В 5-6 класі учні знайомляться з базовими поняттями статистики, вирішують задачі на типу «шанс виграшу», також розв'язують простіші завдання на множення та додавання ймовірностей при вивченні теми звичайних дробів. У 8 класі вводяться поняття наближених значень чисел і величин та дії над ними. В курсі геометрії доцільно навчити абстрактно мислити, уявляти абстрактні об'єкти тобто геометричні фігури. Поняття статистичної ймовірності та закон великих чисел природно розглянути на завершених вивчення теми.

В курсі алгебри 9 класу після вивчення перших понять стохастики і початків теорії ймовірностей на завершених доцільно систематизувати вивчений матеріал та провести пропедевтику щодо вивчення базових елементів стохастики до вивчення тем звичайних дробів. Дослідна праця вивчення початків стохастики у старшій школі говорить про те, що слід починати її із введення класичної ймовірності та елементарних статистичних випадкових подій, так само при вивченні числових множин досить довго вивчається та продовжується вивчення вже для точних чисел [39], [43].

Важливо піднести приклади на власної діяльності учнів (наприклад

дослід із записками , підкидання монети, гральних кубиків) та разом з учнями переконатися, що існують деякі закономірності для масових випадкових подій, які вивчає теорія ймовірності. Головну роль для набуття та усвідомлення учнями матеріалу відіграє система доцільно підібраних задач, де має бути значна кількість завдань прикладного змісту [27, с. 256-264].

Навчальну програма в школах з теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики вивчають на протязі 9 та 11 класів, зміст навчальної програми показано у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1.

Зміст навчальної програми

Клас	Зміст навчального матеріалу	Очікувані результати навчальної діяльності школярів
9 клас (8 год)	Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. Основні правила комбінаторики. Частота та ймовірність випадкової події. Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки.	Учень (учениця): наводить приклади: випадкових подій, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, застосування правил комбінаторики пояснює, що таке: частота випадкової події, ймовірність випадкової події; знаходить, відбирає і впорядковує інформацію з доступних джерел розв'язує задачі, що передбачають: використання комбінаторних правил суми та добутку; знаходження ймовірності випадкової події; обчислення частоти випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків.
11 клас (базовий рівень 12 год., профільний рівень 18 год.)	Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики: Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку.	Учень (учениця): обчислює відносну частоту події; обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами; пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки; знаходить числові характеристики вибірки даних.

Порівняємо характеристику підручників з алгебри 11 класу поглибленого рівня. Для цього було опрацьовано два підручника, а саме алгебра 11 клас з поглибленим вивченням математики, авторів: А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір [39] та підручник алгебра академічного та профільного рівня Є.П. Нелін, О.Є. Долгова [43].

Роздивимось більш детально на прикладі логіко-математичного аналізу.

Логіко-математичний аналіз теми за підручником: алгебра 11 клас з поглибленим вивченням математики, авторів: А.Г. Мерзляк та інші [39].

А) Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

Нові поняття: комбінація, перестановка, елементарний наслідок, розміщення, перетин, простір, елементарних наслідків, об'єднання та доповнення випадкових подій, незалежні події, несумісні події.

Факти: теорема про ймовірність перерізу множин, теорема про ймовірність об'єднання множин, властивості ймовірностей, формула бінома Ньютона.

Способи діяльності: рахування розміщень, перестановок, комбінацій, знаходження ймовірності випадкової події.

Базові поняття: класична ймовірність, неможлива подія, частота, рівноймовірні випадкові події, достовірна подія.

Способи діяльності: знаходження різниці, суми, добутку та відношення ймовірностей.

Б) Логіко-математичний аналіз означень нових понять

Покажемо формулювання означень нових понять, у дужках вказавши вид який йому відповідає.

Упорядкована комбінація, яка містить m елементів, називається **розміщенням з n елементів по m елементів** (вид – через найближчий рід).

Перестановкою із n елементів називається будь-яка скінченна послідовність, яка одержується в результаті упорядкування деякої скінченної множини, складеної з n елементів. (вид – через найближчий рід).

Простір елементарних наслідків – множина всіх можливих наслідків стохастичного експерименту. (вид – через найближчий рід).

Комбінацією з n елементів по m елементів називається вибірка елементів m із даної неупорядкованої множини. (вид – через найближчий рід).

Нехай A і B – випадкові події деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли відбуваються принаймні одна з двох подій A або B , називають **об'єднанням випадкових подій A і B** (вид – конструктивне).

Нехай A і B – випадкові події деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли відбуваються і випадкова подія A , і випадкова подія B , називають **перетином випадкових подій A і B** (вид – конструктивне).

Нехай A – випадкова подія деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли не відбувається подія A , називають **доповненням випадкової події** (вид – конструктивне).

Якщо дві випадкові події A і B деякого випробування не перетинаються то їх називають **несумісні події** (вид – конструктивне). Нехай A і B – випадкові події деякого випробування. Якщо ймовірність події A не змінюється від того, що відбулася подія B , а ймовірність події B не змінюється від того, що відбулася подія A , то випадкові події A і B називають **незалежними подіями** (вид – конструктивне).

Логіко-математичний аналіз теми: підручник 11 клас алгебра академічного та профільного рівня, Є.П. Нелін, О.Є. Долгова [43].

А) Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

Нові поняття: перестановка, розміщення, комбінація без повторень, елементарний наслідок, несумісні події, незалежні події.

Факти: властивості ймовірностей, формула бінома Ньютона.

Способи діяльності: рахунок комбінацій, перестановок, розміщень.

Базові поняття: рівноймовірні випадкові події, об'єднання, переріз,

неможлива подія, частота.

Способи діяльності: знаходження різниці, суми, відношення ймовірностей та добутку.

Б) Схема розв'язування комбінаторних задач (Рис. 1.1)

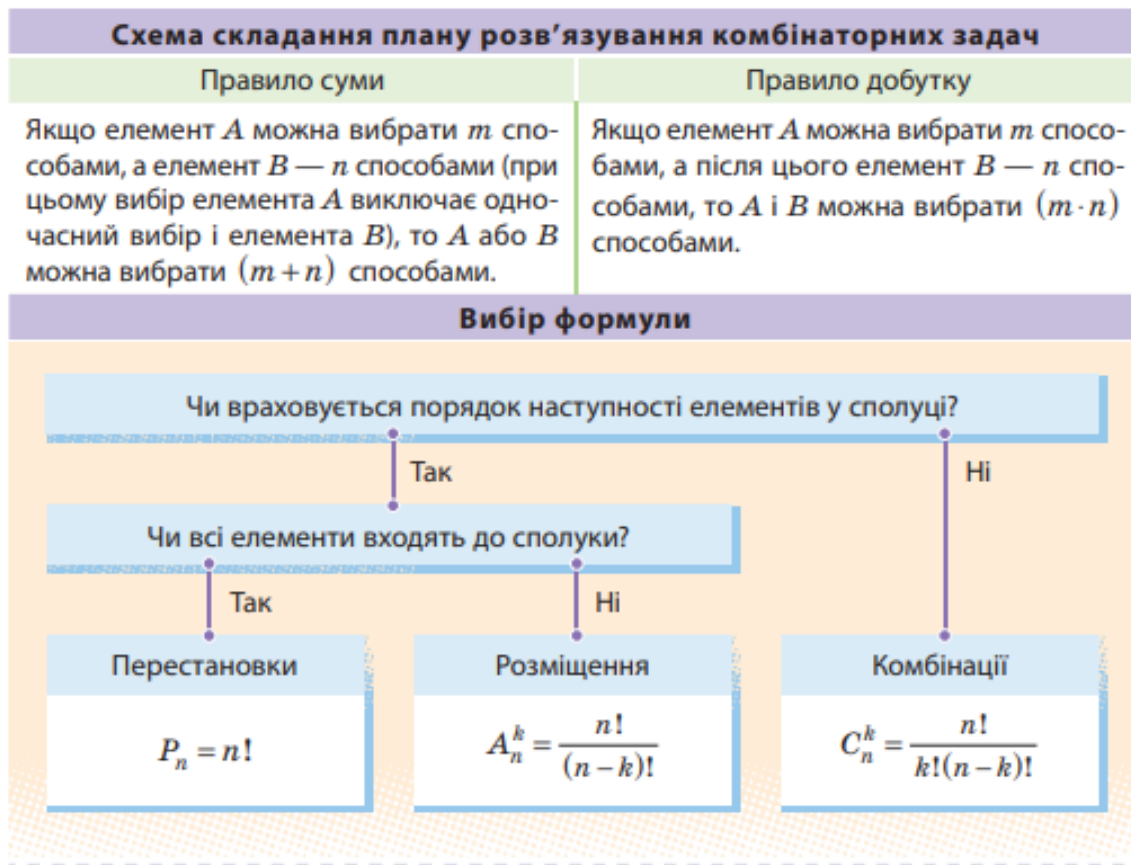


Рис.1.1. Схема розв'язування комбінаторних задач.

В) Логіко-математичний аналіз означень нових понять

Покажемо формулювання означення нових понять, у дужках вказавши відповідний йому вид.

Розміщенням з елементів по називають будь-яку впорядковану множину з елементів, складену з елементів заданої n -елементної множини (вид – через найближчий рід).

Перестановкою з елементів називають будь-яку впорядковану множину з заданих елементів (вид – через найближчий рід).

Комбінацією без повторень з n елементів по k елементів називається будь-яка k -елементна підмножина деякої заданої основної n -елементної множини (вид – через найближчий рід).

У підручнику з алгебри та початків аналізу основна увага приділяється реалізації основних положень концепції спеціалізованої освіти та організації особистісно орієнтованого викладання математики в загальноосвітніх школах. Матеріал відповідає чинній математичній програмі викладання академічного та профільного навчання, а також може бути використаний у навчанні з поглибленим вивченням математики.

Крім того, після огляду та опрацювання програмного засобу з алгебри 11 класу можна сказати, що тема повністю відповідає академічному та профільному рівню.

В першому розділі підручника написано, що математична статистика та теорія ймовірностей це предмет, яким користуються у житті, в будь-якій сфері. Тому методика вивчення стохастики має місце не лише для школярів, які вивчають це в більшій мірі природничого профілю, а й для учнів інших напрямків.

При вивченні методики навчання математичної статистики та теорії ймовірностей, доцільно зупинитись на базовому навчанні для різних профілів та провести порівняльну характеристику у методах навчання.

Фундаментом формування будь-якого фахівця свого ділу є дисципліни математичного напрямку. Для здобуття професійних перспектив і подальшої освіти в учнів враховуються інтереси та можливості школярів, перспективи їх профільного навчання.

В навчальній програмі курсу алгебри тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики» вивчають 9 та 11 класі.

В данній темі потрібно ознайомити учнів з такими термінами: відносною частотою подій; випадковими подіями; комбінаторними правилами суми та добутку; елементами комбінаторики; вибірковими характеристиками середнього значення, розмаху вибірки, медіани, моди, Також учні повинні навчатися обчислювати: ймовірність події, відносну частоту подій; вміти пояснювати зміст середніх показників; знаходити числові характеристики вибірки даних. Характерною відмінністю вивчення

даних тем в 11 класі є кількість годин, тобто учні вивчають 10 годин на стандартному рівні, 18 годин в профільному та 12 годин в академічному.

Викладання математики за фізико-математичним профілем означає поглиблену, залежно від академічного рівня, підготовку школярів-математиків у поєднанні з вивченням усіх природничих предметів, міжпредметну інтеграцію на основі використання математичних методів, у тому числі й математики. моделювання. При цьому математично-природознавча освіта на профільних математичних, фізико-математичних класах має бути орієнтована на обов'язкове засвоєння учнями конкретних знань та вироблення навичок моделювання реальних процесів. Слід враховувати, що при розвитку компетенцій у галузі природничих наук формується частина загальнонаукових, загальноосвітніх та соціально-особистісних компетентностей за участю гуманітарних та соціально-економічних дисциплін.

З. І. Слепкань [58] зауважує, що недоліками традиційного і сучасного навчання математики є недостатня увага до знань другого роду. Часто учні, які добре знають означення математичних понять, не вміють застосовувати їх у доведенні теорем і розв'язуванні задач, у тому числі й прикладного змісту. Тому дії, адекватні знанням, зокрема поняття, мають стати не тільки засобом, але й предметом засвоєння. Саме в розвивальній математичній освіті ставиться завдання навчати не тільки знанням (знанням про поняття), але й знанням про способи їх одержання та застосування.

На основі аналізу джерела [41] ми прийшли до висновку, що міжпредметні зв'язки в навчанні можуть здійснюватися в таких основних напрямках:

- 1) подання фактів, теорій, законів, які є спільними для декількох наукових областей;
- 2) формування елементарних умінь, на яких базуються методи суміжних дисциплін;
- 3) формування знань, які стають основою для

комплексного застосування у декількох дисциплінах.

Основний зв'язок при вивченні стохастичної лінії - звернути увагу на основні поняття і розуміння основних термінів теорії ймовірності. Під час навчання обчисленню ймовірностей доцільним є використання міжпредметних зв'язків та аналогії для покращення пам'яті теоретичного матеріалу.

Багато учнів не надто зацікавлені у вивченні нових тем, тому для підвищення їх пізнавального інтересу рекомендуємо приділяти більше уваги мотиваційній складовій уроку. Мотивація буде більш доречною через прикладну спрямованість.

З огляду на те, що теорія ймовірностей та математична статистика більше вивчаються в середній школі та в вищому навчальному закладі, це означає, що школярі вже професійно орієнтовані, принаймні переважна більшість вже визначилися зі своєю майбутньою професією. Рационально, щоб учитель демонстрував практичну цінність через майбутню професійну діяльність школярів. Наприклад, при вивченні теми «Вибіркові характеристики: мода, обсяг вибірки, середнє, медіанаі» учні повинні вміти обробляти статистичні дані під час проведення соціологічних, психологічних чи педагогічних досліджень з використанням знань, отриманих на уроці.

Крім того, доречно було б навести приклади таких зразків на етапі мотивації з урахуванням профілювання учнів (табл. 1.2). Кількість респондентів має бути не менше 100. Усі ці приклади опитування потрібні, щоб знайти помилки чи моменти, на які експерт повинен звернути увагу. Після проведення дослідження експерт самостійно обробить дані, зробить висновки на основі отриманих даних і не помилиться надалі, зможе уточнити аспекти, які необхідні для професійної діяльності. Вона вносить значний внесок у підвищення ефективності роботи вчителів та студентів шляхом використання засобів інформаційних технологій, таких як навчальні програми.

Навчальна програма може стати невід'ємною частиною системи знань і

навичок у сучасному інформаційному світі.

Таблиця 1.2.

Тематика фахових досліджень

	Професія	Приклад дослідження	алгебра 11 клас [39]	алгебра 11 клас [43]
1.	Медик	Яку кількість балів поставить опитуваний (від 1 до 10) новій медичній реформі? Чи задоволені громадяни сервісом в поліклініках (від 1 до 10)?	16.2.° 17.4.°	
2.	Програміст	Програми якої платформи користуються більшою увагою, та серед людей якого віку? Що стає причиною вибору професії: 1. Заробітна плата; 2. Творча складова; 3. Попит на спеціалістів.	13.15.°	8.2.2° 8.2.4° 10.2.8. 10.2.9.
3.	Юрист	Як багато разів на рік ви звертаєтесь до юридичної консультації?	13.12.° 14.17.° 15.16.°° 15.17.°°	9.5.°.
4.	Філолог	Яку кількість книжок опитуваний читає за рік? Яку додаткову мову ви знаєте: 1. Англійську; 2. Російську; 3. Німецьку; 4. Французьку; 5. Знаю більше 2-х мов; 6. Знаю більше 3-х мов;	14.2.° 14.3.° 14.33.*	8.1.9. 8.3.8°. 10.1.1.
5.	Математик	Скільки разів із 10 ви порахуєте решту грошей в магазині?	13.10.°, 13.14.° 15.21.°° 15.22.°° 17.16.° 19.6.°	8.1.4*. 8.3.11. 8.3.15.

Ми живемо в інформаційному середовищі, тому нам потрібно зосередитися на інформаційних технологіях, і знання англійської мови, а математика, безсумнівно, є одним з головних аспектів успіху в цій сфері. Так, щоб написати комп'ютерну програму, потрібно знати англійську мову, тому

що мови програмування базуються на його знаннях; а завдяки математиці будується логіка мови програмування і багато алгоритмів зводяться до знання математичної теорії та вміння нею керувати. Ми можемо використовувати міжпредметні зв'язки на будь-якому етапі навчання, а також у будь-якому типі навчання.

На прикладі декількох тем стохастики, розглянемо застосування знань англійської мови на уроках математики, про що й доповідали на конференції. Ми обрали такі теми: «Випадкова подія. Відносна частота подій», «Перестановки, розміщення, комбінації», «Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення», у вищій школі «Закони розподілу і числові характеристики випадкових величин», «Розподіл Фішера» та ін. Детальніше зупинимось на фрагментах уроків, де доречно об'єднувати англійську та математику [2].

Тема уроку «Випадкова подія. Відносна частота подій», етап уроку: мотивація навчальної діяльності. Для мотивування учнів можемо звернутися до історії розвитку теорії ймовірностей і при поясненні використовувати терміни англійською мовою. Тоді були дуже поширені gambling, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку (азартні ігри-gambling). Для розв'язування таких задач було не достатньо знань з математичної теорії. Так і зародилась стохастика. First concept теорії ймовірностей, було поняття події-event (першим поняттям - first concept). При такому варіанті проведення уроку, використовуючи слова англійської мови, підвищується образне мислення, збільшується словниковий запас слів.

При вивченні теми «Перестановки, розміщення, комбінації» на етапі уроку «виконання навчальних завдань» учні при розв'язуванні задач проговорюють числівники і дії англійською мовою. Наприклад, пропонується задача «В класі 10 навчальних предметів і 5 різних уроків в день. Скількома способами можна розподілити уроки в день?» Всі можливі розподіли уроків в день, являють собою, всі можливі розміщення з 10(ten) елементів по 5(five), тому всіх способів розподілу повинно бути: число

розміщень з 10 по 5, а це добуток чисел 10,9,8,7, що дорівнює 30240 (product чисел 10,9,8,7 equals 30240).

Вміння оперувати термінами англійською – це показник грамотності учня. Забезпечує розуміння літератури англійською мовою, й не тільки математичної, що дає доступ до багатьох корисних джерел іноземною мовою.

Тема уроку «Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення», етап уроку: актуалізація опорних знань. Доречним буде проведення фронтального опитування або використати опорну схему.

1. Пригадаємо, що ми називаємо середнім значенням?
2. Сума всіх значень набору, поділена на кількість елементів набору.
3. Що називаємо вибіркою?

Приклади зображуємо на схемі чи слайді англійською. Візуалізація – один із принципів використання міжпредметних зв'язків на уроках, дуже корисний для учнів-візуалів.

Тема уроку «Закони розподілу і числові характеристики випадкових величин», етап уроку: підведення підсумків. В підведенні підсумків пропонуємо рефлексію, де учні повинні відповідати на питання англійською, якщо достатньо знань – повністю, інакше – ввідну фразу: сьогодні я навчився (today i learned)...; мені сподобалося, що (I liked it, because)...; я дізнався, що (I learned because) ...; мені не сподобалось, тому що (I did not like it because)...; мене зацікавив той факт, що (I was interested in the fact that)...

Такий підхід розвиває мисленнєву діяльність, вміння аналізувати, застосовуючи одночасно знання зі стохастики та англійської мови.

Використання вчителем понять на англійській мові, та їх пояснення на українській забезпечує різностороннє запам'ятовування та розуміння нових понять. При такому навчанні задіяні обидві півкулі головного мозку, адже у людей домінує одна з півкуль: ліва – добре розвинуте аналітичне мислення, логіка, отже більше математичних здібностей; права

– відповідає за образне мислення, творчість, отже мають гуманітарну

напрявленість. Проте, людина може розвивати здібності обох півкуль головного мозку. Спираючись на це, вчителі можуть допомогти дитині в цьому, активно використовуючи на уроках інтегроване навчання, поєднуючи дисципліни, які потребують одночасного використання аналітичного і образного мислення.

Нами складено словник основних термінів стохастики. Наведемо приклади, подаючи поряд з математичним терміном українською відповідник англійською. Статистика – statistics, кореляція – correlation, імовірність – probability, перестановки – permutations, комбінації – combinations, ймовірність події – probability of an event, частота – frequency, вибірка – sample, простір елементарних подій – space of elementary events, група подій – group of events, протилежні події – opposite events, кількість – number, розмах вибірки – sampling rate, медіана – median, середнє значення – mean value та інші.

Таким чином, основні методологічні особливості полягають у тому, щоб приділяти особливу увагу використанню школярем термінології у процесі створення математичних моделей при вирішенні текстових завдань та наданні методів комп'ютерно-математичних систем при обчисленні числових характеристик, випадкових величин та їх опрацювання даних. Орієнтація на професійну діяльність – рушійна сила методики викладання теорії ймовірностей та математичної статистики для школярів різного профілю.

Математика – універсальна наука. Справді, його дослідження - одне з основ розвиненої особистості. Важливо мотивувати учнів у кожному класі і завжди показувати їхню практичну цінність, але крім використання міждисциплінарних зв'язків з іншими науками в класі математики, ви можете використовувати математику з іншими предметами.

Наприклад, під час уроків географії діти часто вирішують завдання за допомогою калькулятора. Пропонуємо вам завдання: Якою буде подія: можливо, неможлива чи ймовірна: цього року 10 січня температура повітря

буде -10 C , якщо минулого і позаминулого року була $+1\text{ C}$.

Щоб вирішити це завдання, учні повинні знати теорію ймовірностей, згадати, які події називаються ймовірними, які неможливі, які вірогідні. У викладанні біології ми використовуємо математику при вивченні теми "Генетика". Наприклад: за статистичними даними групу крові А мають 36,9% всіх європейців, групу В – 23,5%, групу АВ – 0,6%, групу О – 39%. Знайти ймовірність того, що у довільно взятого донора-європейця група крові А або В. Використовуючи збірник задач Г. І. Кармелюк [28], доречно розв'язати наступні задачі:

1. З множини всіх родин, які мають двох дітей, обрано одну родину. Всі елементарні події однаково ймовірні. Яка ймовірність того, що в цій родині два хлопчики, якщо відомо, що в ній є один хлопчик [28, с. 104].

2. При переливанні крові треба врахувати групу крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи, людині з другою або третьою групами крові можна перелити кров тієї ж групи, або першої, людині з першою групою можна перелити тільки кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу групу, 37,5% - другу, 20,9 – третю і 7,9% - четверту. Знайти ймовірність того, що переливання можна здійснювати, якщо є: а) один донор; б) два донори [28, с. 104].

Учні повинні бути активними на уроці, вони мають бути готовими ділитися своїми ідеями і завданнями. Мотивація школярів до навчальної діяльності має велике значення, і рушійною силою має бути не лише навчання, а й орієнтація на майбутнє, прикладний характер навчання.

1.3. Методичні засади навчання стохастики у профільній школі

Вивчення теорії ймовірностей, елементів комбінаторики, математичної статистики в шкільному курсі математики стало реальним з 1996 року, коли були включені програми, затверджені Міністерством освіти і науки України. Ця лінія важлива з огляду на сучасні тенденції математичної освіти. Мова

йде про особистісно-особистий, культурний, компетентний та дослідницький підходи до навчання. Вирішення цієї проблеми означає здійснення поступових суттєвих змін внаслідок зміни соціально-економічної ситуації, парадигми освіти, реалізації основних завдань математичної освіти з урахуванням зарубіжного досвіду реформування математичної освіти.

Імовірно-статистична лінія має загальноосвітнє, загальнокультурне значення. Чим може розвинуте логічне мислення учнів. Мова йде про такі типи мислення, як імовірно-статистичне та комбінаційне, і взагалі про мислення в незвичних, однозначно визначених умовах. Ця риса дуже важлива для формування світогляду людини. Це має вирішальне значення у створенні статистичної культури, особливо в навчанні правильному сприйняттю та використанню інформації. Це також відіграє роль у формуванні людського характеру. Імовірно-статистична семантична лінія значно розширює набір математичних моделей, якими повинні оволодіти школярі для опису реальних процесів та явищ, або ймовірнісних моделей.

Зріла спільнота ставить перед усіма членами помірно високі цілі про вміння аналізувати випадкові факти, гіпотези, прогнозувати розвиток ситуації, оцінювати можливості, приймати рішення в імовірнісних ситуаціях, у ситуаціях невизначеності. Тому основною метою вивчення комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики є формування розуміння детермінізму та шансу, щоб краще зрозуміти, що багато законів природи та суспільства є імовірнісними, що багато реальних явищ та процесів описуються імовірнісними моделями.

Імовірно-статистична семантична лінія складається з трьох компонентів: комбінаторики, теорії ймовірностей, статистики. Ці типи взаємопов'язані і призначені для навчання школярів аналізу даних.

При вивченні комбінаторики були представлені концепції постановки, планування з повторенням, поєднанням. Вивчення комбінаторики слід починати з пошуку можливостей, вирішення комбінаторних задач з використанням комбінаторних правил множення та додавання. Вивчення

основних комбінаційних схем у навчальній літературі відбувається мовою множин або мовою вибірок. Другий підхід є більш доцільним. По-перше, концепція впорядкованої множини важка для учнів. По-друге, мовна модель дозволяє завжди покладатися на зміст конкретної проблеми, що розглядається. Пояснення формул кількості розміщень може суттєво базуватися на правилі множення. Головним у вивченні комбінаторики має бути не одне і те ж перетворення виразів чи розв'язування рівнянь, що містять кількість розміщень, комбінацій, перестановок, а розв'язування текстових задач, використання елементів комбінаторики для розв'язання імовірнісних задач.

Рішення проблеми простих комбінацій полягає у визначенні типу сполуки та використанні відповідної формули для обчислення кількості цих сполук. Тут основною проблемою, яка виникає у школярів, є визначення типу сполуки.

Тому перед розв'язанням задачі обчислення кількості різних типів сполук бажано запропонувати школярам систему запитань, яка допоможе їм правильно визначити тип сполуки, до якої належить проблемна задача.

Однак такий підхід має суттєвий недолік. Коли учні читають умову задачі, вони намагаються “розпізнати” зв'язок, записувати “правильну” формулу і вже тоді виконується обчислення. У той же час вони не намагаються повністю зрозуміти дію, про яку йдеться, а намагаються її змодельовати.

Щоб цього уникнути, спочатку потрібно вирішити деякі проблеми із застосуванням правил комбінаторного додавання та множення:

- якщо є k способів вибору для одного об'єкта A і B – способу вибору n для іншого об'єкта, ви можете вибрати A або B в режимі $k + n$;

- якщо деякі об'єкти A можна вибрати k способами, то інший об'єкт B можна вибрати n способами, пари A і B можна вибрати kn -способом.

При вирішенні більш складних комбінаційних задач бажано, якщо це можливо, розглянути різні способи їх вирішення. Очевидно, що нестача часу

не завжди можлива. Тому, готуючись до занять, не потрібно обмежувати один спосіб вирішення проблеми, щоб робота на уроці була організована таким чином, щоб знайти більш раціональний спосіб її вирішення. У цьому випадку учні можуть знайти інші способи вирішення проблем, які обговорюються на уроці як домашнє завдання.

Вивчаючи елементи теорії ймовірностей у старшій профільній школі, слід звернутися до статистичної інтерпретації основних понять та фактів, щоб набуті знання та вміння були практично орієнтованими.

У шкільних підручниках існує три підходи до формулювання поняття ймовірності: аксіоматичний, статистичний, класичний [8], [9], [19], [21].

У гуманітарних дисциплінах на заняттях технічного, природничого, економічного профілів навчальний матеріал є повчальним, спираючись на статистичне визначення ймовірності. Цей підхід з часом є більш економічним, доступнішим для школярів, ніж інші, оскільки він значною мірою залежить від особистого досвіду студентів, їх інтуїції та здорового глузду. Що стосується класів математичного профілю, то для них найбільш прийнятним є аксіоматичний підхід. Він суворіший за інші підходи і дозволяє створювати найпростіші правдоподібні моделі випадкових експериментів. В аксіоматичному визначенні ймовірності також можуть розглядатися експерименти з нерівними наслідками.

Формулюючи поняття ймовірності на статистичній основі, потрібно звернути увагу на явище статистичної стабільності, навести приклади розпізнавання статистичних вибірок. Вводячи статистичне визначення ймовірності, бажано звернути увагу на пропедевтику концепцій вибірки, однорідність статистичного матеріалу та використання цього визначення для отримання практичного висновку. Крім того, виражаючи підсумовування ймовірностей, ми можемо отримати класичну формулу ймовірності. Його значення полягає в тому, що в багатьох випадках при розгляді експерименту з кінцевою кількістю однаково можливих наслідків це дозволяє передбачити ймовірність події в тих умовах, в яких масові експерименти або неможливі,

або надзвичайно важкі.

Класичне визначення ймовірності можна ввести для конкретного випадку. Таким чином А. М. Колмогоров на прикладі кидання двох кубиків та визначення суми балів на поверхнях кубиків описує поняття рівних випадків та поняття ймовірності: ймовірність - це співвідношення між сприятливими випадками та загальною кількістю рівних. Однак він зазначає, що математика не дає відповіді на питання, які випадки можна вважати однаково можливими. У випадку кидання кубиків, фізично важливі умови кубиків, що падають на будь-яку з шести граней у верхній частині, однакові. Крім того, можна вважати, що різні комбінації верхніх поверхонь двох кубів однаково ймовірні. Велика кількість повторних експериментів підтверджує ці припущення. Математична теорія ймовірностей має справу лише з обчисленням ймовірностей різних подій за певних припущень у проблемах, які нас цікавлять, припущення про те, які випадки слід розглядати, однаково можливо.

Таким чином, слід зазначити, що коли експерименти з класичним визначенням визначають ймовірність події, умови вважаються ідеальними - кубики повинні бути ідеально сформовані (центр ваги збігається з геометричним центром), монета рівної щільності металу і так далі.

Перед вивченням геометричного визначення ймовірності бажано пояснити школярам необхідність його введення. Слід зазначити, що класичне визначення ймовірності використовується для тестів з кінцевою кількістю наслідків. Для тестів з нескінченною кількістю наслідків вводиться геометричне визначення ймовірності.

Корисно пояснити це поняття на таких простих прикладах.

Наприклад, на прямій AB довжиною L одиниці подано відрізок CD довжиною k одиниць. Випадково “вибирають” точку на прямій AB . Як визначити ймовірність попадання точки в відрізок CD ?

Вивчивши випадок, слід зазначити, що геометричний підхід до ймовірності події не залежить від виміру геометричних просторів. Важливо

те, що простір усіх стихійних подій та підпростір подій, що сприяють події і чия ймовірність нас цікавить, були одного типу та однакових вимірів. Потім визначають геометричне визначення ймовірності.

Обмежений час, присвячений вивченню зародків теорії ймовірностей у школі, не дозволяє вирішити велику кількість завдань із застосування статистичних та геометричних визначень ймовірності. Для закріплення цих понять нам потрібно обмежитися вирішенням кількох проблем у класі та вирішенням таких проблем вдома.

Метою викладання вступу до статистики в 11 класі у школі профільного начнання є ознайомлення з поняттям статистики як науки, її методами та завданнями, способами подання даних та наочним поданням статистичного розподілу, розподілом частоти в балах та інтервалах ; врахування звалища та гістограми, медіани та моди, середнього значення.

Вибираючи зміст навчальних матеріалів, слід враховувати той факт, що статистика на сучасному етапі розвитку суспільства виконує три основні функції: інформативну, прогнозовану та аналітичну.

Зміст викладання статистичного матеріалу в шкільному напрямку математики повинен розкрити певною мірою освітні функції статистики. Вибираючи зміст людини в житті та її діяльності, необхідно правильно визначити, які знання потрібні, які знадобляться учням під час вивчення інших шкільних предметів для продовження навчання, який внесок ці знання можуть внести у формування різних аспектів інтелекту учнів; та світогляду.

Важливо встановити двосторонні міждисциплінарні зв'язки між статистикою, особливо зв'язками між іншими суб'єктами та статистикою.

Наприклад, в біології статистичні значення допомагають у вивченні генетики, фізіології та екології. В даний час жодна серйозна експериментальна робота з біології та медицини не обходиться без статистично обґрунтованого набору проведених експериментів та достовірної оцінки отриманих результатів. Приклади біологічних проблем такі.

1. Скільки в середньому яєць курка має в одній кладці?
2. Скільки мікроорганізмів містить в середньому 1 мм лісового ґрунту?
3. Яка середня тривалість життя в певній місцевості і як вона зміниться з часом?

Рішення цих проблем полягає в плануванні експериментів, спостереженні та аналізі їх результатів. Статистика - це математичний пристрій для розв'язання цих задач. Впровадження статистичних елементів у шкільний курс математики значно підвищує його корисну спрямованість. Навіть за допомогою невеликого математичного апарату, яким школярі опановують, вивчаючи вступ до статистики, можна вирішити проблеми соціальної цінності. Статистичні матеріали можуть ефективно використовуватися для навчання школярів математичному моделюванню - найважливішому виду математичної діяльності. Однак, щоб не залишати принцип прикладної навчальної орієнтації спільній декларації, він повинен бути реалізований на всіх фазах планування та організації навчального процесу: при постановці цілей, виборі змісту, методів, організаційних форм та засобів навчання.

Слід розрізняти вивчення вступу до статистики, а також інших частин математики. Найефективніший спосіб диференціації - залучення учнів до індивідуальних та диференційованих творчих робіт під керівництвом учителя. Проблеми такої роботи в основному пов'язані з пошуком тем досліджень, які відповідали здібностям учнів.

Висновки до розділу 1.

Хмарні технології надають доступ користувачам Інтернету доступ до комп'ютерних ресурсів сервера і використання програмного забезпечення як онлайн-сервіса. У ході дослідження, з'ясували що хмарні технології при навчанні математики вчителі використовують досить рідко, тому дана тематика є актуальною. Використання хмарних технологій надає педагогу низку можливостей для навчання під час карантину або хвороби учня. Вчитель може надавати навчальні послуги для школярів з обмеженими можливостями.

У ході дослідження з'ясовано, що учні починають вивчати базові поняття стохастики у 5-6 класі, потім 8-9, вивчення даних тем дає підґрунтя для вивчення більш складних тем стохастики в профільній школі.

Ми здійснили порівняльну характеристику підручників і виявили, що на вивчення змістової лінії стохастики авторами подається різна кількість тем.

Також були розглянуті методичні засади навчання стохастики у профільній школі. Вивчення комбінаторики слід починати з пошуку можливостей, вирішення комбінаторних задач з використанням комбінаторних правил множення та додавання. Вивчення основних комбінаційних схем у навчальній літературі супроводжується мовою множин або мовою вибірок.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ НАВЧАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

2.1. Використання онлайн сервісів Kahoot

Метою застосування онлайн сервісів Kahoot, LearningApps, GeoGebra при вивченні стохастики є:

– *навчальна*: показати взаємозв'язок стохастики з явищами та процесами реального життя, домогтися міцного засвоєння знань, формувати практичні уміння і навички розв'язання задач з основ комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, формувати базові вміння та навички застосування ймовірнісно-статистичного апарату для розв'язування теоретичних і прикладних задач, що виникають в різних галузях, вміння класифікувати стандартні задачі за ознаками, вміння розв'язувати їх, вміння сформулювати реальну прикладну задачу і побудувати її математичну модель, навчити проводити обробку статистичних даних;

– *розвивальна*: розвивати алгоритмічне та логічне мислення, спостережливість, активність, самостійність, вміння самоаналізу, вміння аналізувати, приймати рішення, правильно узагальнювати інформацію та робити висновки, розвивати творчий підхід до вирішення різноманітних задач;

– *виховна*: виховувати прагнення до самовдосконалення та саморозвитку, позитивне ставлення до себе.

Чимало авторів звертають увагу на те, що у навчанні стохастики доцільним буде використання системи динамічної математики GeoGebra [30], О.Семеніхіна [54]. Низку завдань на застосування GeoGebra у навчанні стохастики пропонують автори посібника [27, с. 249-257]. Зокрема розглядається використання вбудованих функцій для обчислення значень комбінаторних сполук, тестування з використанням GeoGebra, використання

калькулятора ймовірностей, розробником якого є Michael Borchers, розглядаються електронні наочності, які моделюють випадкові події авторства Manuel Sada [66].

Цикл уроків відкриває перший урок «Комбінаторні правила суми та добутку». Дидактична мета уроку – ознайомити школярів з тим, що вивчає комбінаторика, комбінаторними правилами суми та добутку, ознайомити учнів з формулами для обчислення числа перестановок, розміщень і комбінацій; учити використовувати ці формули під час розв'язування задач; дати схему розв'язування комбінаторних задач. Розвиваюча та виховна мета уроку – розвивати уважність, пам'ять, мовлення, логічне мислення; виховувати самостійність та відповідальність, працелюбність, охайність у роботі.

Доцільно обрати тип уроку – комбінаторний урок. Оскільки це перший урок з розділу «Елементи комбінаторики, теорії ймовірності і математичної статистики», важливо дітям згадати матеріал 9 класу. Дидактичне забезпечення базується на підручнику [39] А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського для 11-го класу за профільним рівнем.

Урок починається з актуалізації попередніх знань учнів та їх корекцією, а саме повторення тем, які вивчалися у 9 класі. Вчитель коротко проходить по означеннях факторіалу, перестановки елементів, розміщення, комбінації, надає приклади. Проводить мотивацію навчальної діяльності, тим самим мотивує учнів до теми уроку.

Вивчення нового матеріалу, вчитель починає з легкого прикладу. Пояснюючи нову тему, в завданні, що надає вчитель, присутні правила суми та добутку. В усвідомленні набутих знань вчитель для кращого розуміння та запам'ятовування просить учнів записати у зошит схему «Вибір правила комбінаторного додавання і комбінаторного множення», яка при розв'язуванні даних задач буде допомагати учням зорієнтуватися у виборі того чи іншого правила. Вчитель дає задачі з «зірочками», тобто з

ускладненнями.

На підведенні підсумків уроку, вчитель пропонує учням тест, задалегіть розробивши його на сайті Kahoot. Задає домашнє завдання. Детальну розробку уроку подано у Додатку А.

Дидактичне забезпечення: підручник, робочий зошит. В якості методичного забезпечення можуть слугувати вихідні відомості про підручник алгебра і початки аналізу А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський [39]. Під час уроку передбачається використання онлайн сервісів (програмного забезпечення) Kahoot.

На першому етапі уроку вчитель здійснює актуалізація попередніх знань учнів та їх корекцію.

Учитель нагадує учням, що вже вивчали цю тему в 9 класі, і заохочує їх пригадувати разом. Наводить життєві приклади:

- Туриста зацікавили 5 маршрутів по Наддніпрянщині та 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Розв'язання. Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один із них можна вибрати 12 способами.

- Із класу, у якому навчаються 28 учнів, потрібно вибрати трьох чергових по одному на кожний із трьох поверхів школи. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. Існує 28 способів вибрати чергового по першому поверху. Після того як цей вибір буде зроблено, залишиться 27 учнів, кожний з яких може стати черговим по другому поверху. Після вибору чергових для першого та другого поверхів чергового по третьому поверху можна вибрати 26 способами. Таким чином, за правилом добутку кількість способів вибору трьох чергових дорівнює: $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\ 656$.

Відповідь: 19 656 способами.

Для таких задач існують загальні методи розв'язування, що вивчає комбінаторика як розділ математики. Підґрунтям для розв'язування більшості комбінаторних задач є два правила: правило суми та правило

добутку, тому тема нашого урока «Комбінаторні правила суми та добутку».

Учні пригадують, що вони вивчали в 9 класі: що таке факторіал, перестановка, розміщення та комбінація?

Означення. *Факторіалом* називають добуток n послідовних натуральних чисел ($n!$) (читається як n – факторіал).

Наприклад: $0!=1$, $1!=1$, $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$, $2!=1 \cdot 2=2$, $4!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$.

Означення. *Перестановкою з n елементів* називають будь-яку впорядковану множину з n елементів.

$P_n = n!$ - формула числа перестановок без повторень.

В даній формулі кожен елемент, що входить у комбінацію поданий у єдиному екземплярі.

Повернемося до задачі, яку ми розглядали на початку заняття.

Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1,2,3,4,5, якщо цифри в числі не повторюються?

Отже, кількість таких чисел дорівнює $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Означення. *Розміщенням з n елементів по k* називають будь-яку впорядковану множину з елементів n - елементної множини.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ - формула числа розміщень без повторень.

Розглянемо задачу. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 за умови, що цифри не повторюються. Отже, маємо розміщення з 5 по 3 елементи:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Означення. *Комбінацією без повторень з n елементів по k* називають будь-яку k - елементну підмножину n – елементної множини.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - формула числа комбінацій без повторень.

Розглянемо задачу. Скількома способами можна вибрати дві різні цифри із цифр 1,2,3,4,5? У цій задачі не має значення порядок розміщення двох цифр, які вибираємо із даних п'яти цифр, тобто способів вибору цифр буде $C_5^2 =$

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

На наступному етапі уроку вчитель здійснює мотивація навчальної діяльності, повідомляє тему уроку.

Комбінаторні методи лежать в основі розв'язання багатьох задач теорії ймовірностей та її застосування. З задачами, в яких доводиться вибирати ті чи інші предмети, розміщувати їх в певному порядку і відшукувати серед різних розміщень найкращі, люди стикнулися ще в доісторичну епоху, обираючи найкращі розміщення мисливців під час полювання, воїнів під час битви, інструментів під час роботи. Певним чином розміщувалися прикраси на одязі, візерунки на кераміці. З ускладненням виробничих і суспільних відносин ширше приходилося користуватися загальними поняттями про порядок, ієрархію, групування. В тому ж напрямку діяв розвиток ремесл, торгівлі.

Наступним етапом є вивчення нового матеріалу.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів по Наддніпрянщині і 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут. Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один із них можна вибрати 12 способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило суми. Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b можна вибрати k способами, то вибір « a або b » можна здійснити $m + k$ способами.

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути та хоче побувати спочатку на Наддніпрянщині, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо вибрати один маршрут по Наддніпрянщині, то парою до цього маршруту може бути будь-який із 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів по Наддніпрянщині 5, то кількість пар (маршрут по Наддніпрянщині; маршрут по Карпатах) дорівнює $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ці міркування ілюструє така таблиця (табл. 2.1).

Перелік можливих маршрутів

		Маршрути по Карпатах						
		1	2	3	4	5	6	7
Маршрути по Наддніпрянщині	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Узагальненням цього прикладу є **правило добутку**.

Правило добутку. Якщо елемент a можна вибрати m способами й після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір « a і b » в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари $(a; b)$, можна зробити mk способами.

Ключовою частиною уроку є усвідомлення учнями набутих знань.

З цією метою для кращого розуміння та запам'ятовування вчитель просить учнів записати у зошит схему на рис. 2.1 а).

Задача 13.1.* Із міста А до міста В ведуть 4 дороги, а з міста В до міста С ведуть 3 дороги (рис. 2.1 б). Скількома способами можна проїхати з міста А до міста С?

Розв'язання. Дорогу з міста А до міста В можна обрати 4 способами, дорогу з міста В до С – 3 способами. Тоді за правилом добутку проїхати з міста А до міста С можна $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Відповідь: 12.

Задача 13.8.* Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

Розв'язання. Першою цифрою числа може бути будь-яка з п'яти цифер, отже, існує 5 варіантів вибору. Оскільки за умовою всі цифри в числі

мають бути різними, то для вибору другої цифри існує вже 4 варіанти, для вибору третьої – три, для вибору четвертої – 2, і п'ятої цифрою буде остання.

За правилом добутку маємо: існує $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ способів утворення числа.

Відповідь: $5!$

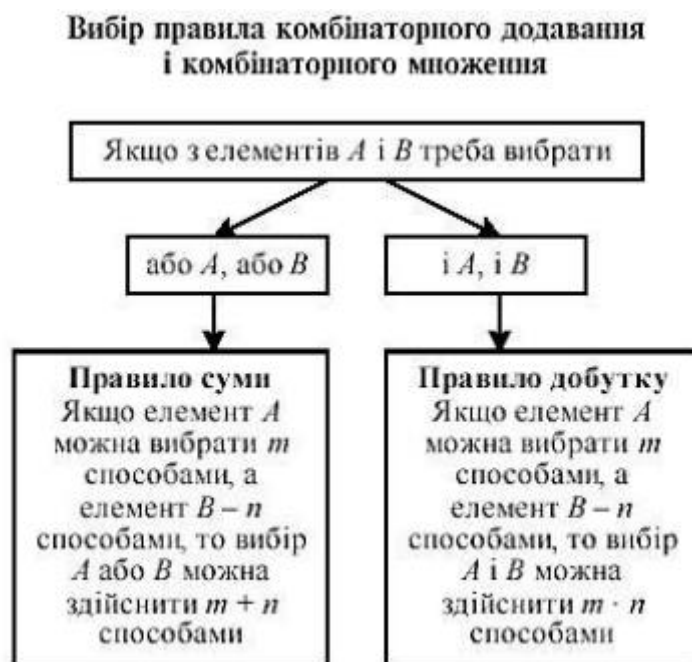


Рис. 2.1. а)

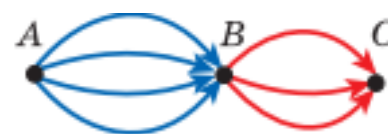


Рис. 2.2 б)

Задача 13.29.** У ряд на 10 поставлених поруч стільців сідають 5 хлопців і 5 дівчат. Скількома способами вони можуть розміститися так, щоб хлопці сиділи на стільцях з парними номерами, а дівчата – на стільцях з непарними номерами?

Розв'язання. Хлопців можна розсадити на 5 стільців з парними номерами $5!$ способами. Дівчат- аналогічно, $5!$ способами можна розсадити на стільці з непарними номерами. За правилом добутку, способів розсадити хлопців і дівчат $5! \cdot 5! = (5!)^2$

Відповідь: $(5!)^2$.

Задача 13.36.** Будемо вважати словом будь-яку скінченну послідовність букв українського алфавіту. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова: 1) молоко; 2) математика; 3) комбінаторика?

Розв'язання. 1) У слові «молоко» 6 букв. Для вибору першої існує 6 способів, для вибору другої – 5 способів, для вибору третьої – 4 способи, для четвертої – 3 способи, для п'ятої – 2 способи, для шостої – 1.

Але в слові «молоко» три букви «о», і від перестановки слово не змінюється. Способів переставлення букв «о» між собою $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Тоді кількість складених слів дорівнює $\frac{6!}{3!}$.

2) Аналогічно, оскільки в слові «математика» дві букви «м», три букви «а», дві букви «т», то маємо $\frac{10!}{2!2!3!}$

3) Аналогічно, оскільки в слові «комбінаторика», дві букви «о», » дві букви «а», » дві букви «к», маємо : $\frac{13!}{2!2!2!}$

Відповідь: 1) $\frac{6!}{3!}$

2) $\frac{10!}{2!2!3!}$

3) $\frac{13!}{2!2!2!}$

На завершальному етапі вчитель підводить підсумки уроку, повідомляє домашнє завдання.

Для підведення підсумку уроку учитель використовує розроблений у програмі Kahoot тест.

Наведемо приклади завдань, які охоплює даний тест (рис. 2.2. - рис. 2.6.) Зокрема, це завдання на розпізнавання формули, вибір правильної відповіді із чотирьох запропонованих варіантів. Вказати коротку відповідь, вписавши її у відведену комірку.

В якості домашнього завдання можемо запропонувати наступне:

13.34.** Серед 10 людей є двоє знайомих. Скількома способами можна посадити цих людей на 10 стільців так, щоб знайомі сиділи поруч?

13.35.** Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри в числі не повторювалися і парні цифри не стояли поруч?

Kahoot! Комбінаторні правила суми та добутку Settings Saved to My drafts Preview Upgrade

1 Quiz Як називається фо...

2 Quiz Комбінацією без п...

3 True or false Перестановкою з...

4 Type answer Чому дорівнює 5! У...

Add question Add slide

Як називається формула

Image reveal requires a paid subscription. Start free trial

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Remove

▲ Перестановка ○

◆ Факторіал ○

● Розміщення ✓

■ Комбінація без повторень ○

Рис. 2.2. Оберіть назву пропонованої формули.

Kahoot! Комбінаторні правила суми та добутку Settings Saved to My drafts Preview Upgrade

1 Quiz Як називається фо...

2 Quiz Комбінацією без п...

3 True or false Перестановкою з...

4 Type answer Чому дорівнює 5! У...

Add question Add slide

Комбінацією без повторень з n елементів по k називають...

Image reveal requires a paid subscription. Start free trial

Remove

▲ будь-яку k -елементну підмножину n -елементної множини. ✓

◆ будь-яку n -елементну підмножину k -елементної множини. ○

● будь-яку n -елементну множини k -елементної підмножини. ○

■ будь-яку k -елементну множини n -елементної підмножини. ○

Рис. 2.4. Оберіть назву пропонованої формули.

Kahoot! Комбінаторні правила суми та добутку Settings Saved to My drafts Preview Upgrade

1 Quiz Як називається фо...

2 Quiz Комбінацією без п...

3 True or false Перестановкою з...

4 Type answer Чому дорівнює 5! У...

Add question Add slide

Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множини з n елементів.

Image reveal requires a paid subscription. Start free trial

Remove

◆ True ✓

▲ False ○

Рис. 2.5. Оберіть назву пропонованої формули.

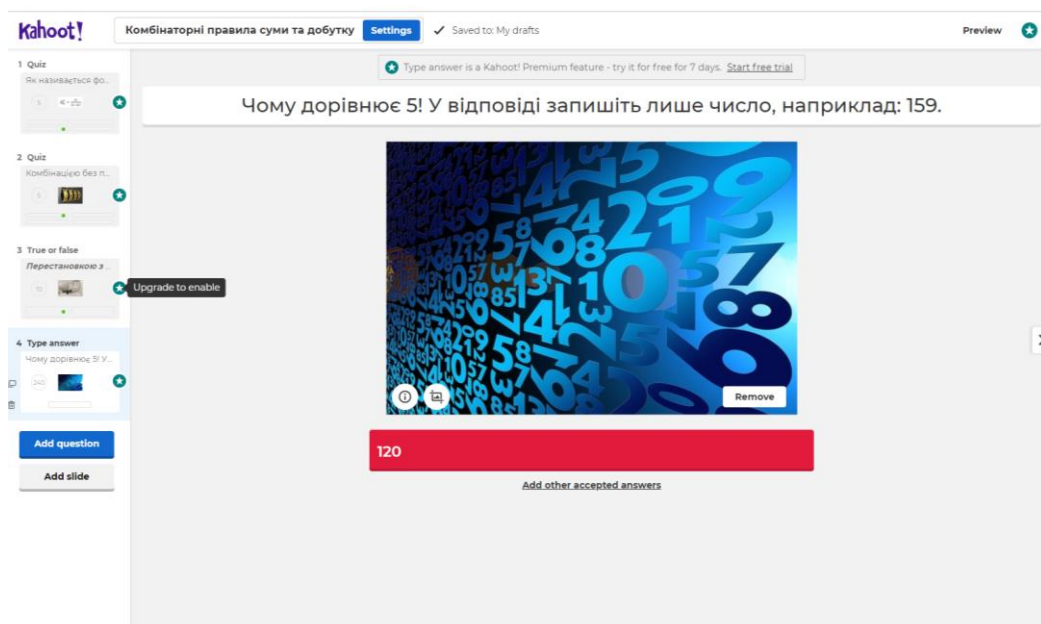


Рис. 2.6. Обчисліть значення за пропонуваною формулою.

Вчитель за допомогою Kahoot! може створювати опитування з будь-яких теми, може відобразити тест на своєму ноутбучі чи проекторі, таким чином діти на своїх гаджетах будуть обирати варіанти відповідей, з яких потрібно обрати правильний. Перевага цієї платформи у тому що вчитель може робити опитування яскравішими, що подобається дітям, наприклад: додавати фото, малюнки, відео чи графіку. Також відмінною можливістю серед інших платформ є включення на сайті усіляких бонусів, наприклад – додаткові бали за швидкі відповіді. Для дітей такі завдання перетворюються не на складний іспит, а на деяке цікаве змагання. Відповіді того чи іншого учня вчитель бачить відразу, а також для зручності може скачати результати самостійної у формі таблиці.

2.2. Використання онлайн сервісів LearningApps

Все більш популярним стає використання в освітньому процесі різноманітних інтернет-ресурсів, в тому числі онлайн-сервісів та навчальних середовищ. Одним з яскравих прикладів таких середовищ є сервіс мультимедійних дидактичних вправ LearningApps. Він призначений для розробки, зберігання та використання інтерактивних вправ у навчальній діяльності. Застосовувати такі вправи можна не тільки на уроці з

інтерактивною дошкою, а і як індивідуальні завдання для учнів з особливими потребами. Також значною перевагою даного сервісу є можливість інтеграції завдань у системи дистанційного навчання [1].

Вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики передбачає не просто формальне вивчення і закріплення основних понять і формул, а й має на меті зацікавити учнів у практичному їх застосуванні. Використання інтерактивних вправ дозволяє підвищити ефективність та результативність навчання учнів елементам стохастики. Ресурси онлайн-сервісу LearningApps надають можливість активного використання розроблених інтерактивних вправ в процесі вивчення дисципліни, оскільки сервіс містить велику базу завдань, розроблених учителями з різних країн. Крім вже готових вправ, вчитель може створити нові, змінивши наявні в сервісі вправи під власні потреби або розробити схожі та використовувати їх на своєму уроці. Урізноманітнити види вправ можна завдяки шаблонам сервісу (табл. 2.2).

Тема другого уроку «Випадкова величина». Мета уроку – ознайомити учнів з випадковою величиною, вчити учнів оцінювати ймовірності подій з урахуванням додаткових умов.

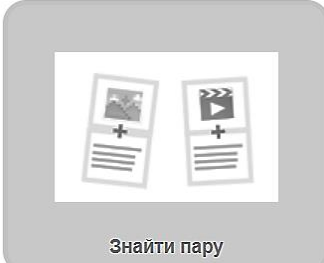

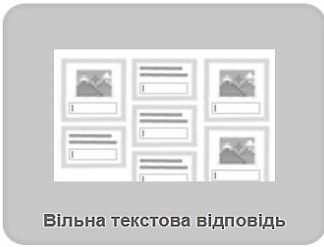
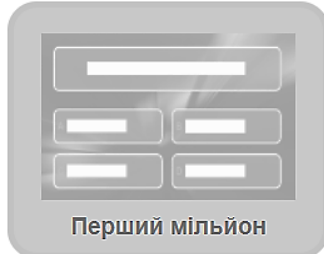
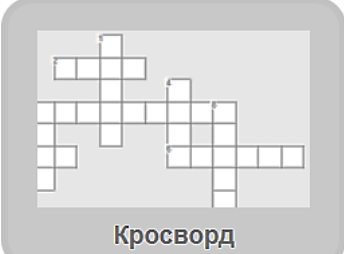
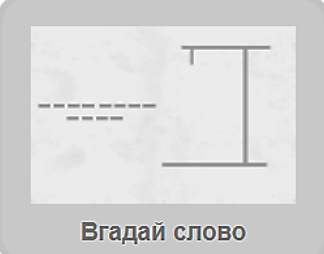
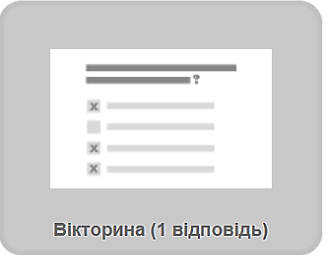

Розвиваюча та виховна мета уроку – розвивати уважність, пам'ять, мовлення, логічне мислення; виховувати самостійність та відповідальність, працелюбність, охайність у роботі.

Доречно обрати тип уроку – засвоєння нових знань, умінь, навичок.. Дидактичне забезпечення базується на підручнику [40] А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського для 11-го класу за профільним рівнем.

Вчитель вітається з учнями, усно просить відповісти дітей що таке факторіал, перестановки елементів, розміщення, комбінації. Проводить мотивацію навчальної діяльності, тим самим мотивує учнів до теми уроку.

Вивчення нового матеріалу починається з головних означень та прикладів. В усвідомленні набутих знань вчитель разом з унями розв'язує вправи, далі задачі з ускладненням, для кращого розуміння та запам'ятовування просить учнів перейти до вправи в LearningApps.

Шаблони сервісу LearningApps для створення вправ

<p>«Знайти пару»</p>  <p>Знайти пару</p>	<p>«Класифікація»</p>  <p>Класифікація</p>	<p>«Вільна відповідь»</p>  <p>Вільна текстова відповідь</p>
<p>«Перший мільйон»</p>  <p>Перший мільйон</p>	<p>«Кросворд»</p>  <p>Кросворд</p>	<p>«Вгадай слово»</p>  <p>Вгадай слово</p>
<p>«Вікторина»</p>  <p>Вікторина (1 відповідь)</p>	<p>«Пазл»</p>  <p>Пазл</p>	<p>«Скачки»</p>  <p>Скачки</p>

Дидактичне забезпечення: підручник, робочий зошит. В якості методичного забезпечення можуть слугувати вихідні відомості про підручник алгебра і початки аналізу А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський [39]. Під час уроку передбачається використання онлайн сервісів (програмного забезпечення) LearningApps.

На початку уроку вчитель здійснює актуалізацію опорних знань учнів. Доцільно на цьому етапі провести опитування у дітей що таке факторіал, перестановки елементів, розміщення, комбінації.

На наступному етапі уроку вчитель проводить мотивацію навчальної діяльності та повідомляє тему уроку.

Під час вивчення теорії ймовірностей нас часто цікавлять числові величини, пов'язані з результатами дослідів. Зокрема, кидаючи гральні кубики в настільній грі, хочуть дізнатися про кількість клітинок, на які треба пересунути фішку; вивчаючи якість продукції, обчислюють відсоток

бракованих деталей у випадково вибраній пробній партії; плануючи роботу станції швидкої допомоги, з'ясовують кількість викликів, що надходять за певний проміжок часу, і т. п. У таких випадках говорять, що в даному досліді розглядається випадкова величина (кількість клітинок у грі, відсоток бракованих деталей, кількість викликів «швидкої допомоги»). Наприклад, баскетболіст під час тренування послідовно виконує три кидки: штрафний (1 очко), з-під кільця (2 очки) і потім кидок з-за тричкової лінії (3 очки). Тренер записує результати, послідовно відмічаючи знаком «плюс» попадання, а знаком «мінус» – промах баскетболіста. У цьому досліді 8 елементарних наслідків (рис. 2.7.):

Елементарні наслідки	+++	++-	+--	+- -	-++	-+-	---+	----
----------------------	-----	-----	-----	------	-----	-----	------	------

Рис. 2.7. Результати елементарних наслідків до задачі.

Наступним етапом є вивчення нового матеріалу.

Означення. Функцію, яка кожному елементарному наслідку деякого досліду ставить у відповідність число, називають **випадковою величиною**.

Випадкові величини будемо позначати латинськими літерами x, y, \dots . Задають випадкову величину так само, як і будь-яку функцію: таблицею значень, формулою, описово, графіком тощо.

Приклад 1. Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що випали в результаті підкидання двох монет. Знайдіть множину значень випадкової величини x .

Розв'язання. Оскільки в результаті підкидання двох монет може випасти або 0, або 1, або 2 герби, то множиною значень випадкової величини x є множина $\{0, 1, 2\}$. ◀

Звернемося ще раз до досліду з прикладу 1. Якщо пронумерувати монети, то можна вважати, що даний дослід закінчується одним із чотирьох рівноможливих елементарних наслідків (рис. 2.8.):

Елементарні наслідки	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
----------------------	----	----	----	----

Рис. 2.8. Результати елементарних наслідків до задачі.

де буквою Г позначено випадіння на монеті герба, а буквою Ч – випадіння числа. Розглянемо випадкову величину x , яка дорівнює кількості гербів, що випали в результаті підкидання двох монет. Подамо її можливі значення у

вигляді таблиці (рис. 2.9):

Елементарний наслідок	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
Значення випадкової величини x	2	1	1	0

Рис. 2.9. Результати елементарних наслідків та випадкових величин до задачі.

Із цієї таблиці бачимо, що випадкова величина x набуває значення 2 в одному із чотирьох рівноможливих випадків, тобто з ймовірністю $1/4$. Цей факт прийнято записувати так: $P(x=2) = 1/4$. Міркуючи аналогічно, отримуємо: $P(x=0) = 1/4$, $P(x=1) = 1/2$.

Набір ймовірностей – $P(x=0) = 1/4$, $P(x=1) = 1/2$, $P(x=2) = 1/4$ – називають **розподілом ймовірностей** випадкової величини x . Розподіл ймовірностей випадкової величини часто подають у вигляді таблиці:

На наступному етапі вчитель проводить усвідомлення учнями набутих знань.

Пропонуються такі задачі:

18.1.° З метою контролю відвідуваності уроків учнями та ученицями 11-А класу заступник директора протягом дня заходить у клас і записує прізвища тих, хто відсутній на уроці. Опишіть усі елементарні наслідки цього досліду. Яку випадкову величину розглядає заступник директора школи? Укажіть множину значень цієї величини.

Розв'язання. Елементарні наслідки: різні списки відсутніх (різні прізвища учнів та учениць 11-А класу).

Випадкова величина – кількість відсутніх учнів на уроці.

Множина значень: цілі невід'ємні числа, не більші за кількість учнів в 11-А класі.

18.5.° У коробці лежать 15 куль, з яких п'ять куль підписано числом 1, а решта 10 куль – числом 2. З коробки навмання беруть одну кулю. Випадкова величина x дорівнює числу, написаному на вибраній кулі. Укажіть множину значень і складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

Розв'язання. Множиною значень випадкової величини x є множиа $\{1;2\}$ проілюструємо у таблиці 2.3.

Таблиця до задачі, знаходження ймовірності

Значення x	1	2
Ймовірність	$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

18.21. • Монету підкидають не більше ніж 5 разів доти, доки вперше не випаде герб, і записують, скільки разів довелося підкинути монету. Складіть таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини, що вивчається.

Розв'язання. Будемо писати букву Г, якщо неа монеті випадає герб, і букву Ч, якщо число (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4

Таблиця до задачі, знаходження ймовірності

Результат досліду	Г	ЧГ	ЧЧГ	ЧЧЧГ	ЧЧЧЧГ або ЧЧЧЧЧ
Значення x	1	2	3	4	5
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = \frac{1}{16}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8 + 4 + 2 + 1 + 1}{16} = 1.$$


Для закріплення також можна запропонувати схожу вправу на LearningApps (складання пазлу) на визначення виду подій (табл. 2.3).

Завдання 1. Укажіть, які з подій у наведених експериментах є достовірними, випадковими, неможливими.

Посилання та QR-код на дане завдання записано у таблиці 2.5.

Вибравши групу, учень має обрати всі ті елементи пазлу, які відносяться до цієї групи. Якщо елемент пазлу входить до обраної групи, він зникає, а на його місці з'являється частина зображення. Відкриття повного зображення відбувається лише у випадку, коли учень правильно співвідніс усі елементи пазлу з групами (рис. 2.7.).

Посилання та QR-код до вправи «Пазл»

Посилання на вправу	QR-код до вправи
<p>Визначити тип події</p> <p>https://learningapps.org/watch?v=pagrd15wc21</p>	

Якщо ж елемент пазлу не відноситься до групи, на екрані з'являється повідомлення про те, що подія не належить даній категорії. Тож є можливість спробувати ще раз виконати завдання.




Рис. 2.7. Вікно виконання вправи «Пазл» у LearningApps

На наступних уроках дану вправу можна також використовувати на етапі актуалізації опорних знань учнів з теми.

Ще подано тест «Теорія ймовірності, комбінаторика, статистика» у таблиці 2.6. та рис. 2.8. Також тест «Випадкова величина» у таблиці 2.7. та рис. 2.9.

Посилання та QR-код до вправи «Вікторина»

Посилання на вправу	QR-код до вправи
<p>Пройти тест «Теорія ймовірності, комбінаторика, статистика»</p> <p>https://learningapps.org/watch?v=po8dc7xxk21</p>	

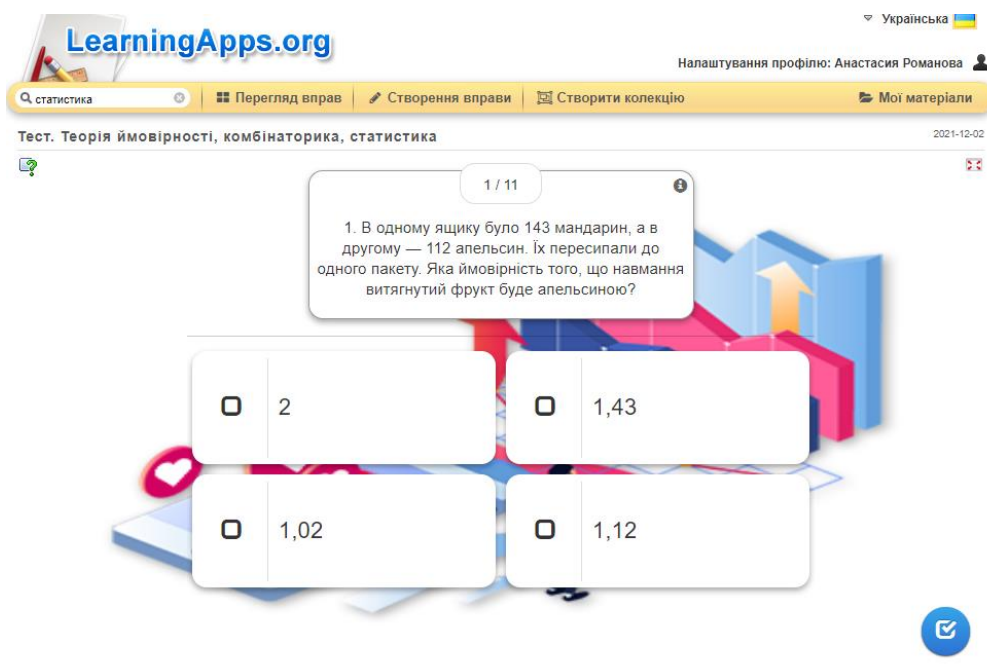



Рис. 2.8. Фрагмент виконання вправи «Вікторина» у LearningApps

Таблиця 2.7.

Посилання та QR-код до вправи «Вікторина»

Посилання на вправу	QR-код до вправи
<p>Тест «Випадкова величина»</p> <p>https://learningapps.org/watch?v=puwv7uwdj21</p>	

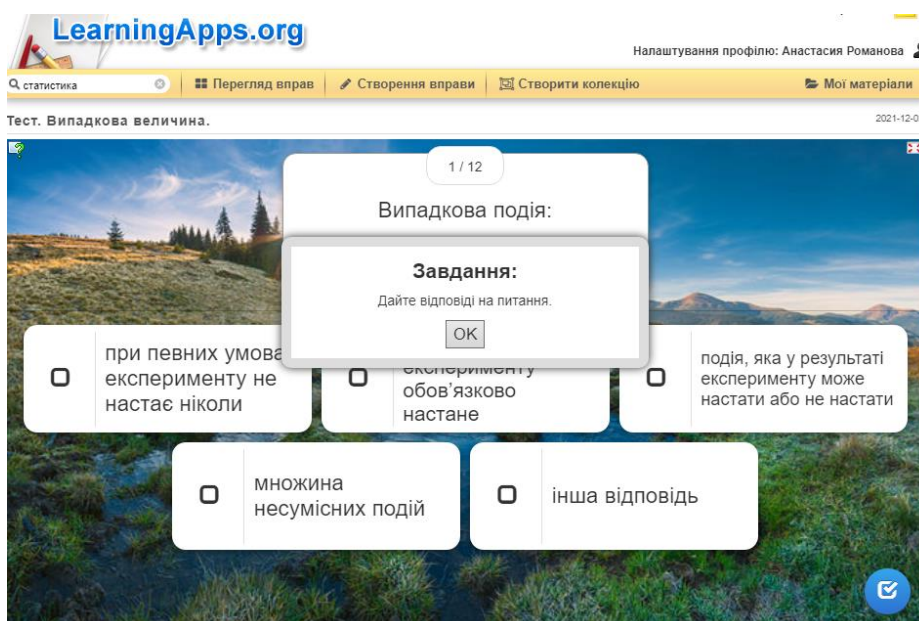


Рис. 2.9. Фрагмент виконання вправи «Вікторина» у LearningApps

Також можна показати учням міжпредметний зв'язок теорії ймовірностей і елементів описової статистики (рис. 2.10.)

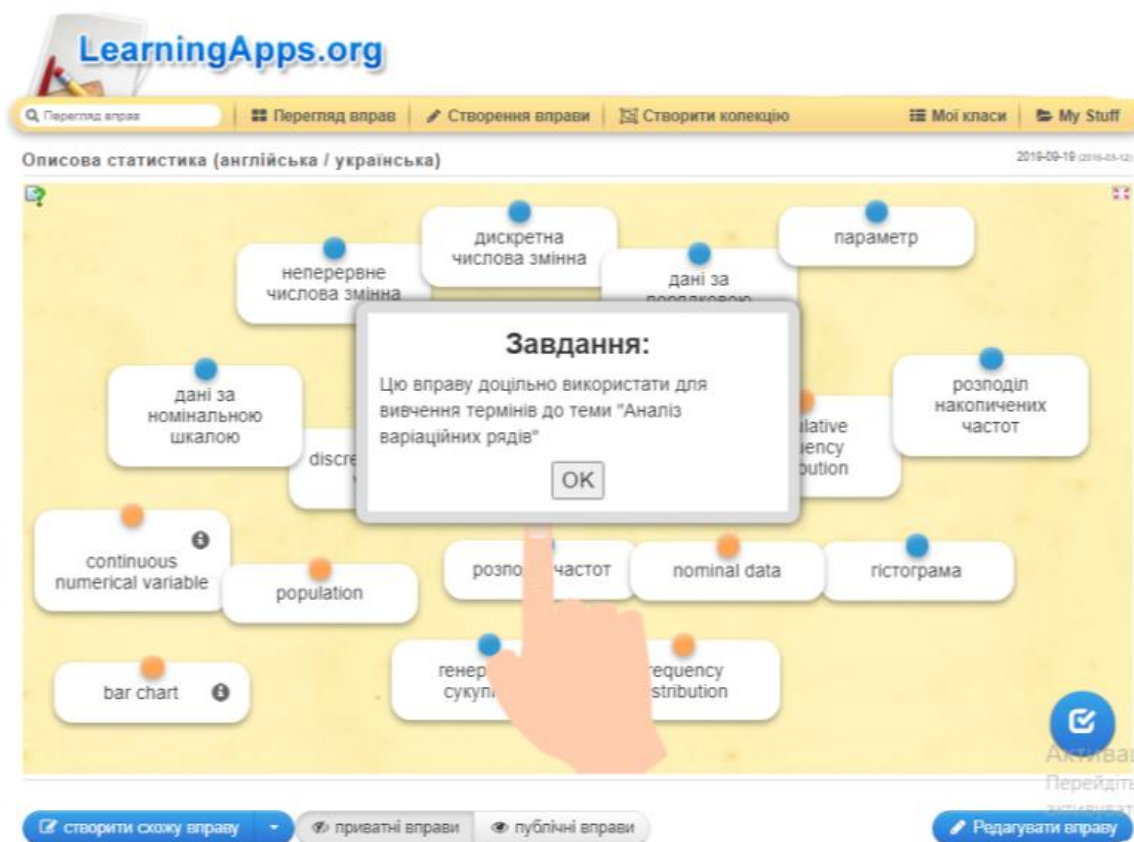


Рис. 2.10. Міжпредметні зв'язки теорії ймовірностей і елементів описової статистики

На завершальному етапі вчитель підводить підсумки уроку та повідомлення домашнього завдання.

Запитання для повторення:

- Яку подію називають протилежною даній?
- Що таке сума подій?
- Дайте означення добутку подій.
- Яка подія називається складеною?
- Приведіть приклад складеної події.

Вчитель задає домашнє завданн: 18.6.°, 18.22.°

Розв'язання домашнього завдання:

18.6.° Гральний кубик кидають один раз. Випадкова величина x дорівнює числу, що випало на кубіку. Укажіть множину значень і складіть

таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

Розв'язання. Множиною значень випадкової величини x є множин $\{1;2;3;4;5;6\}$, проілюстровано у таблиці 2.8.

Таблиця 2.8

Таблиця до задачі, знаходження ймовірності

Значення x	1	2	3	4	5	6
Ймовірність	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

18.22.• Гральний кубик кидають не більше ніж три рази доти, доки вперше не випаде шістка, і записують, скільки разів довелося кидати кубик. Складіть таблицю розподілу ймовірностей записаної випадкової величини (таблиця 2.9.).

Таблиця 2.9

Таблиця до задачі, знаходження ймовірності

Результат дослідів	Випала «6» при 1-му підкиданні	Випала «6» при 2-му підкиданні	Випала «6» при 3-му підкиданні
Значення x	1	2	3
Ймовірність	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{25}{36}$

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{6 + 5 + 25}{36} = 1.$$

Детальну розробку уроку подано у Додатку Б.

Отже, використання LearningApps на уроках дає змогу створювати інтерактивні вправи на заняттях, і в позаурочний час, застосування яких краще сприятиме сприйманню матеріалу, формуванню вмінь як спільної, так і самостійної роботи, підвищенню пізнавального інтересу. LearningApps допомагає активізувати навчальну діяльність школярів, підвищити їх мотивацію до навчання, розвиток пам'яті, логічного мислення, економити навчальний час. Також у сервісі зручний інтерфейс, та можливість налагодити платформу на українській мові.

2.3. Використання онлайн сервісу GeoGebra

Автори навчального посібника [27, с. 260-263] пропонують створювати «інтерактивний» навчальний матеріал з використанням GeoGebra. Наведено приклади завдань, які, на нашу думку, доцільно пропонувати учням при вивченні стохастичної лінії.

Під час вивчення теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» доцільно використовувати «інтерактивні» конструкції при розв'язуванні задач. Зміна входних параметрів у «інтерактивних» конструкціях веде до отримання інших результатів, проводячи такі динамічні зміни маємо змогу проводити дослідження, а це сприяє розвитку математичної дослідницької компетентності учнів.

Створювати «інтерактивний» навчальний матеріал у GeoGebra можна за допомогою таких інструментів, як повзунок, прапорець, поле вводу, кнопка, які розташовані на панелі інструментів, та зручно (на відміну від GRAN-2D) згруповані. Водночас використовують інструменти створення написів та вставки зображень.

При вивченні розділу «Випадкові події» спочатку розглядають поняття відносної частоти відбування події, пізніше переходять до аксіоматичного означення ймовірності випадкової події, властивостей безумовної чи умовної ймовірності випадкової події. При розв'язуванні задач широко застосовують як приклади мір так звані «класичне» і «геометричне означення» ймовірності випадкової події. Часто у школярів виникають труднощі при складанні алгоритмів розв'язування задач, іноді вони плутають поняття сумісних / несумісних та залежних / незалежних подій.

При вивченні даного розділу GeoGebra доцільно використати для створення так званих «інтерактивних» конструкцій. Для спрощення обчислень доцільно також скористатися командами Біноміальний Коефіцієнт[<Число n>, <Число r>], Кількість Розміщень[<Число>, <Число>].

Для створення динамічної конструкції спочатку необхідно визначити, які параметри з умови задачі будуть змінюватись. Спочатку створюються

«повзунки» для змінних параметрів, визначаються інтервали їх зміни. Далі проводяться обчислення у таблицях та за допомогою команд. Після цього можна переходити до створення полів для внесення даних, текстових полів, прапорців.

Розглянемо приклади створення «інтерактивних» конструкцій до комбінаторних задач та задач з теорії ймовірностей.

Задача №1 достатнього рівня [31]. Для шкільної лотереї підготовлено 50 білетів, з яких 6 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 5 білетів. Скільки існує різних варіантів вибору, при яких він вибере рівно 2 виграшні білети?

Розв'язання: Серед білетів 6 виграшних і 44 невигаших. Серед 5 білетів, що обрав учень, 2 виграшних і 3 невигаших. Кількість способів вибрати з 6 виграшних білетів 2 білети дорівнює $C_6^2 = 15$. Кількість способів вибрати з 44 невигаших білетів 3 білети дорівнює $C_{44}^3 = 13244$. За правилом добутку, варіантів вибору 5 білетів, серед яких 2 виграшних дорівнює $C_6^2 \cdot C_{44}^3 = 198660$.

Відповідь: 198660.

Для створення динамічної конструкції до задачі у GeoGebra (рис. 2.11), визначимо, які параметри у задачі будуть змінюватись, зокрема, у даній задачі пропонуємо зробити усі параметри динамічними.

Для цього створимо чотири повзунки: N , k , m , n , що будуть відповідати загальній кількості лотерейних квитків, кількості виграшних квитків, навмання витягнутих квитків та виграшних серед витягнутих відповідно. Далі проводяться обчислення за допомогою команди БіноміальнийКоефіцієнт[<Число n >, <Число r >], що обчислює кількість комбінацій із n по r . У даному випадку необхідно обчислити БіноміальнийКоефіцієнт[k, n] та БіноміальнийКоефіцієнт[$N-k, m-n$]. Далі у таблиці здійснюємо обчислення, що передбачають арифметичні операції над параметрами.

Задача (29.14).

Для шкільної лотереї підготовлено білетів, серед яких є виграшними.

Перший учень навмання вибирає білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно виграшні білети.

Розв'язання:

- 1. Серед білетів 6 виграшних і 44 невіграшних.
- 2. Серед 5 білетів, що обрав учень, 2 виграшних і 3 невіграшних.
- 3. Кількість способів вибрати з 6 виграшних білетів 2 білетів дорівнює кількості комбінацій з 6 елементів по 2, тобто дорівнює 15.
- 4. Кількість способів вибрати з 44 невіграшних білетів 3 білетів дорівнює кількості комбінацій з 44 елементів по 3 елементів, тобто дорівнює 13244.
- 5. За правилом добутку, варіантів вибору 5 білетів, серед яких 2 виграшних (і 3 невіграшних) дорівнює $15 \cdot 13244 = 198660$.
- Відповідь: 198660.

Рис. 2.11. Динамічна конструкція до задачі №1

На наступному кроці переходимо до створення полів для введення даних, текстових полів умови задачі, етапів розв'язання, створення прапорців, «вмикання» яких дозволяє переходити від одного етапу розв'язання до іншого.

Таким чином, зробивши параметри задачі динамічними, маємо змогу змінюючи вхідні параметри отримувати різні відповіді, а тобто використовувати конструкцію як своєрідний тренажер, а також проводити дослідження з учнями. Змінивши, наприклад, загальну кількість квитків у бік збільшення, можна простежити, що кількість варіантів вибору, при яких учень вибере рівно 2 виграшні білети зросте, а якщо зменшити, то навпаки зменшиться. Також можна простежити, що збільшення кількості білетів, що виймаються першим учнем призводить до величезного збільшення варіантів вибору виграшних квитків та ін.

Розглянемо добірки завдань, запропоновані О.Семеніхіною та М.Друшляк [54]. Для їх розв'язання та візуалізації пропонують застосовувати GeoGebra. Пропоновані задачі відповідають профільному та поглибленому вивченню математики в 11-му класі.

Задача 3. Пристрій складається з трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді 0.1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили, в одному досліді [24].

Розв'язання (GeoGebra 5.0). В меню виберемо пункт Вид/Калькулятор ймовірностей, тип розподілу – Біноміальний і введемо параметри $n=3$, $p=0,1$. У вікні калькулятора праворуч з'явиться закон розподілу (рис.2.12).

Задача 4. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність зіпсованості виробу по дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що по дорозі буде зіпсовано більше трьох [28].

Розв'язання (GeoGebra 5.0). Обираємо пункт меню Вид/Калькулятор ймовірностей. Виберемо тип розподілу – Пуассона і введемо його дані – . Відразу у вікні калькулятора справа з'явиться закон розподілу. Ймовірність зіпсувати по дорозі більше 3 приладів дорівнює (рис.2.13).

Методичний коментар до задач 3 та 4. Оскільки в програмі Gran1 [23] не передбачено інструменту для складання закону розподілу дискретної випадкової величини, обчислення ймовірності попадання дискретної чи неперервної випадкової величини в заданий інтервал, то для розв'язування такого класу задач доцільно використовувати програму GeoGebra 5.0.

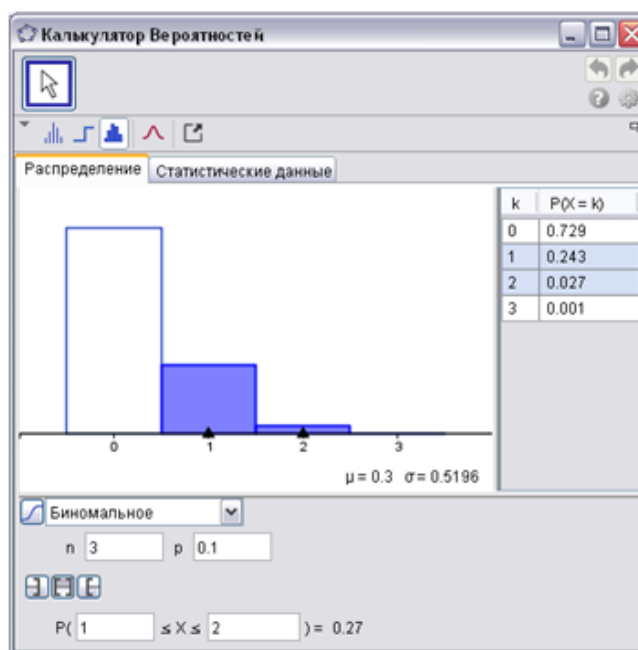


Рис. 2.12. Візуалізація обчислених результатів (Біноміальний).

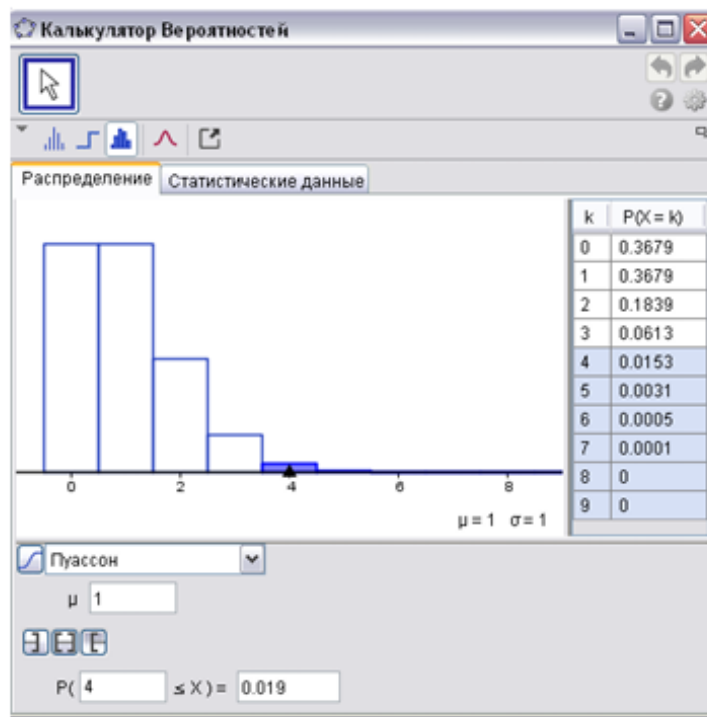


Рис. 2.13. Візуалізація обчислених результатів (Пуассона).

2.4. Використання у навчанні стохастики віртуальної дошки Jamboard

Онлайн-заняття - це нова реальність. І дошка для викладання вимагає заміни. Тепер для організації дистанційного навчання необхідна віртуальна інтерактивна дошка. Використовувати віртуальну дошку зручно, якщо учитель математики має у своєму розпорядженні мультимедійну дошку і може писати на дошці рукою або спеціальними маркерами – стилусами. Або ж він працює без мультимедійно дошки і використовує графічний планшет, приєднаний до ноутбука чи мобільного телефону.

Термін «мультимедійна дошка» подаємо за Д. В. Васильєвою [14] у широкому розумінні разом з відповідним обладнанням: комп'ютер учителя, мультимедійний проектор, сенсорна дошка, електронні олівці, програмні засоби, система дистанційного інтерактивного тестування та моніторингу знань тощо. Дослідниця обґрунтовує, що використання мультимедійної дошки у навчанні учнів 5-6 класів дозволяє інтенсифікувати всі етапи уроку, створити позитивне налаштування школярів на свідому та активну діяльність, підвищити рівень їх математичної та загальної культури, запровадити інноваційні методи і форми

навчання. У медіатеці створених Д. В. Васильєвою уроків є низка розробок для вивчення геометричного матеріалу.

Популярними на сьогодні є такі мультимедійні дошки: Smart Board, IQBoard, Classic Solution, Promethean ActivBoard, ScreenMedia, Triumph Board, Interwrite, IPBoard, Panasonic Panasonic та ін.

Переваги використання у навчанні математики мультимедійної дошки висвітлюють зокрема автори посібника [27, с. 152].

Віртуальна дошка - це сервіс, який працює як дошка для спільної роботи онлайн. Робота онлайн дошки виглядає так: у вас є робочий простір, "білий аркуш", на якому вчитель та учні можуть виконувати спільні дії. Одночасно з учителем в режимі реального часу цей робочий простір і всі зміни на ньому бачать люди, яким він надав доступ. Базово це працює як програма для малювання онлайн, але з додатковими функціями, які допоможуть організувати репетиторство онлайн або роботу з класом на дистанційному навчанні.

Автори публікації [18] зібрали відомості про найпопулярніші з віртуальних дошок і зробили короткий огляд на кожен. Ці сервіси замінять дошку вчителя під час онлайн занять: 1) BitPaper; 2) IDroo - електронна дошка для занять по скайпу; 3) AWW board; 4) Draw Chat - безкоштовна віртуальна дошка; 5) Miro; 6) WhiteboardFox. З власного досвіду знаємо про надзвичайну зручність використання віртуальної дошки Zoom та Jamboard.

Jamboard – дошка, переосмислена для спільної роботи в хмарі. Самоосвіту в опануванні мультимедійною дошкою, набуття учителями математики компетентностей в галузі ІКТ та удосконалення на цій основі педагогічної майстерності можна розглядати як важливу методичну умову ефективного використання нових засобів навчання.

Виокремимо кілька типів уроків, які стануть для учнів значно цікавішими, якщо використати мультимедійну дошку: урок-лекція, урок-провокація, урок-конференція, урок узагальнення і систематизації знань, уроки-тестування, інтегровані уроки, ділові ігри тощо. Зібравши потрібну команду для зустрічі або мозкового штурму можна перетворити ідею з хорошої на чудову. Коли

ми використовуємо ідеї команд з усього світу, наша робота стає більш спільною та продуктивною. У Google вирішили змінити визначення зустрічей. Тож на сьогодні Jamboard – цифрова дошка для спільної роботи, яка дозволяє всій команді легко ділитися ідеями в режимі реального часу та творити без обмежень. Дошку нині можна переміщувати в хмару.

Наведемо приклади розробок уроків, виконані з використанням Jamboard. На кожен із слайдів (максимально 20) можемо розмістити стікери для виділення певних думок і розстановки акцентів. Можна розмістити через буфер обміну необхідні малюнки і креслення чи завантажити їх з власного комп'ютера. Вчитель має можливість вписувати текстові повідомлення, будувати окремі геометричні фігури - прямокутник, квадрат, трикутник, коло, круг, овал, прямі та відрізки. Наведемо фрагменти розробок для дошки Jamboard, створені за підручником для поглибленого вивчення математики [39].

Умовна ймовірність.

Розв'язування задач на обчислення умовних ймовірностей зручно ілюструвати за допомогою деревоподібної схеми – **дендрограми** (від лат. *dendro* – дерево та грец. *gram* – запис, зображення). Наприклад, дослід із прикладу 1 можна проілюструвати дендрограмою, на якій подано всі можливі результати даного дослідження (рис. 2.17). Біля стрілок дендрограми зручно ставити значення ймовірностей відповідних подій. Пропонуємо вам перевірити самостійно правильність обчислення ймовірностей, записаних на дендрограмі 2.17. Дендрограма є прикладом важливого математичного об'єкта, яку застосовують у різних галузях знань. Наприклад, у класифікації живих організмів використовують ієрархічну модель, яка нагадує графічну схему 2.17. Хімічну структуру органічних сполук також зручно зображати у вигляді подібних схем. Такого роду об'єкти, які складаються з точок і відрізків, що їх сполучають, називають графами.

Тема третього уроку «Умовна ймовірність». Мета уроку – ознайомити учнів з умовною ймовірністю, вчити учнів оцінювати ймовірності подій з

урахуванням додаткових умов.

Розвиваюча та виховна мета уроку – розвивати уважність, пам'ять, мовлення, логічне мислення; виховувати самостійність та відповідальність, працелюбність, охайність у роботі.

Тип уроку – засвоєння нових знань, формування вмінь (дистанційний). Дидактичне забезпечення базується на підручнику [39] А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського для 11-го класу за профільним рівнем.

Вчитель вітається з учнями, проводить актуалізацію опорних знань, та мотивацію навчальної діяльності. Вивчення нового матеріалу починається з головних означень та прикладів. В усвідомленні набутих знань вчитель разом з унями розв'язує вправи, далі задачі з ускладненням, разом з учнями вчитель працює у віртуальній дошці Jamboard.

Дидактичне забезпечення: підручник, робочий зошит. В якості методичного забезпечення можуть слугувати вихідні відомості про підручник А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський [39]. Під час уроку передбачається використання онлайн сервісів (програмного забезпечення) Jamboard.

На першому етапі вчитель проводить актуалізацію опорних знань.

Починає з означення, дві події називають **залежними**, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи чи неяви другої події.

Розглянемо приклад розв'язання на появу події, яка залежить від появи чи неяви другої події (рис. 2.14.). В ящику **100 деталей: 80 стандартних і 20 нестандартних**. Якщо появилась стандартна деталь(**подія А**), то ймовірність появи стандартної деталі при другому випробуванні (**подія В**) $P(B)= 79/99$; якщо ж у першому випробуванні вийнято нестандартну деталь, то ймовірність $P(B)= 80/99$.

Отже, ймовірність появи події В залежить від появи чи неяви події А. Події А і В – залежні.

Розглянемо приклад. В ящику 100 деталей: 80 стандартних і 20 нестандартних. Навмання беруть одну деталь, не повертаючи її назад. (*) Події A і B – залежні.

Подія A , якщо навманнясь станд. дет., то подія B це імов. навбл при другому випробуванні:

$$P(A) = \frac{79}{99}$$

якщо же у першому випроб. вищита нестандарт. деталь, то імовірність $P(B) = \frac{80}{99}$

Імов. навбл. події B за ум. навбл. чи не навбл. A . (*)

Рис. 2.14. Приклад задачі з Jamboard

На наступному етапі вчитель проводить мотивацію навчальної діяльності, повідомляє тему уроку.

Число, яке виражає ймовірність події B за умови, що подія A вже відбулася, називається *умовною ймовірністю* події B відносно події A і позначається $P(B/A)$ або $P_A(B)$. Введемо позначення: нехай k – кількість усіх елементарних подій, які сприяють події A ; n – кількість усіх елементарних подій деякого випробування; m – кількість елементарних подій, які сприяють події B ; r – кількість елементарних подій, які сприяють події $A*B$ ($r \leq k$ і $r \leq m$).

Наступним етапом є вивчення нового матеріалу.

Теорема. Ймовірність добутку залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, якщо перша вже відбулася.

Доведення. (рис. 2.15.)

Якщо подія A відбулася, то це означає, що відбулася одна з елементарних подій, які сприяють події A . При цьому події B сприяють r і тільки r подій, які сприяють події $A*B$.

$$\text{Тому } P_A(B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A*B)}{P(A)}, \text{ звідси, } P(A*B) = P_A(B) * P(A).$$

Теорема. Ймовірність добутку залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, якщо перша вже відбулася.

Д-мне: Якщо подія A відбулася, то це озн., що відбулася одна з k елементарних подій, які спричиняють подію A . При умові події B спричиняють k і тільки k подій, які спричиняють подію $A \cdot B$.

Тому $P_A(B) = \frac{k}{k} = \frac{k}{k} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$, звідси,

$$P(A \cdot B) = P_A(B) \cdot P(A)$$

Наслідок! Якщо A і B незалежні, то $P(A/B) = P(A)$, а $P(B/A) = P(B)$ і тому $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Рис. 2.15 Доведення теореми ймовірності добутку залежних подій.

Ключовим етапом є усвідомлення учнями набутих знань.

Задача 1. В урні 3 білих і 7 червоних кульок. Навмання виймають одну кульку, а потім другу. Знайти ймовірність другої події, якщо перша вже відбулася (рис. 2.16.)

Розв'язання

Подія A – “перша взята кулька біла”, $P(A) = \frac{3}{10}$.

Ймовірність того, що друга із кульок буде червоною (подія B), знайдена при умові, що перша – біла, тобто умовна ймовірність дорівнює $P_A(B) = \frac{7}{9}$.

Шукана ймовірність по теоремі множення ймовірностей залежних подій дорівнює:

$$P(A * B) = P_A(B) * P(A) = \frac{3}{10} * \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Задача 1. В урні 3 білих і 7 червоних кульок. Навмання виймають одну кульку, а потім другу. Знайти ймовірність другої події, якщо перша вже відбулася.

10 кульок

Зрозуміли

Подія А — «взята перша кулька біла»;

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

Подія В — «взята друга кулька біла», при умові, що перша біла, тобто:

$$P_A(B) = \frac{7}{9}$$

За теоремою знайдемо ймовірність

$$P(A \cdot B) = P_A(B) \cdot P(A) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30}$$

Відповідь: $\frac{7}{30}$.

Рис. 2.16 Розв'язання задачі на ймовірність за допомогою теореми.

Використання віртуальної дошки Jamboard на прикладах 1,2 з підручника.

ПРИКЛАД 1.1 3 коробки, в якій лежать 2 червоні та 4 сині кулі, навмання беруть спочатку одну кулю, а потім — ще одну. Подія А полягає в тому, що перша взята куля виявиться червоною, а подія В — у тому, що друга взята куля також виявиться червоною.

154 Обчисліть $P_A(B)$.

Розв'язання. Якщо відбулася подія А, то перша взята куля — червона. Це означає, що перед вибором другої кулі в коробці знаходяться одна червона куля та 4 сині. Тому ймовірність того, що в цій ситуації друга взята куля також виявиться червоною, дорівнює $\frac{1}{5}$, тобто $P_A(B) = \frac{1}{5}$.

*Розв'язання задачі на обчислення умовних ймовірностей зручно ілюструвати за допомогою деревподібної схеми — дендрограми (від лат. *dendro* — дерево та грец. *gram* — запис, зображення). Наприклад, дослід із прикладу 1 можна проілюструвати дендрограмою, на якій подано всі можливі результати даного досліді (рис. 15.2).*

Віля стрілок дендрограми зручно ставити значення ймовірностей відповідних подій. Пропонуємо вам перевірити самостійно правильність обчислення ймовірностей, записаних на дендрограмі 15.2.

Дендрограма є прикладом важливого математичного об'єкта, яку застосовують у різних галузях знань. Наприклад, у класифікації живих організмів використовують ієрархічну модель, яка нагадує графічну схему 15.2. Хімічну структуру органічних сполук також зручно зображати у вигляді подібних схем. Такого роду об'єкти, які складаються з точок і відрізків, що їх сполучають, називають графами.

Н₁, Н₂, ..., Н_n
Н₁ + Н₂ + ... + Н_n = l
Н₁ · Н₂ · ... · Н_n — несуттєві
і ≠ j
P(N₁); P(N₂); ... P(N_n)
P(B|N₁); P(B|N₂); ... P(B|N_n)
P(B) = Σ P(N_i) · P(B|N_i)

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) =$$

$$= P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{2}{6}\right) \cdot \frac{1}{5} = 0,80$$

Рис. 15.2

Рис. 2.17 Фрагмент з розробки для дошки Jamboard.

Задача 2. Колектив працівників фірми складається на 65% із жінок. Серед працівників фірми 25% чоловіків і 35% жінок мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний працівник фірми є чоловік і має вищу освіту (рис. 2.18).

156 § 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ПРИКЛАД 1.2 Відомо, що озиме жито успішно переносить зиму з ймовірністю $\frac{9}{10}$. Якщо озиме жито успішно перенесе зиму, то ймовірність того, що й озима пшениця успішно переживе, дорівнює $\frac{13}{15}$. Якщо ж озиме жито навесні доведеться пересявати, то ймовірність того, що доведеться пересявати й озиму пшеницю, дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть ймовірність того, що пшениця успішно переживе.

Розв'язання. Позначимо через А і В події, які полягають у тому, що успішно переживуть зиму жито й пшениця відповідно. Тоді інформацію, подану в задачі, можна проілюструвати дендрограмою, зображеною на рисунку 15.5.

Жито й пшениця успішно переживуть, якщо відбудуться і подія А, і подія В (блакитні стрілки на дендрограмі). Ураховуючи формулу (1), отримуємо, що

$$P(A \cap B) = P(A)P_B(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{15} = \frac{39}{50} = 78\%$$

Пшениця успішно переживе, якщо відбудуться і подія В, і подія \bar{A} (червоні стрілки на дендрограмі). Тому

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 2\%$$

Пшениця успішно переживе (подія В) у разі одного з двох варіантів — жито успішно переживе (подія А) або жито доведеться пересявати (подія \bar{A}). Ці два варіанти проілюстровано на дендрограмі (рис. 15.5) блакитною та червоною вітками.

Це означає, що подія В є об'єднанням двох несумісних подій: $A \cap B$ (блакитна вітка) і $\bar{A} \cap B$ (червона вітка), тому

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 78\% + 2\% = 80\%$$

Відповідь: 0,8.

Рис. 15.5

Задача 2. Колектив працівників фірми складається на 65% із жінок. Серед працівників фірми 25% чоловіків і 35% жінок мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний працівник фірми є чоловік і має вищу освіту.

P-ниця
 Нех. n - вибраний n -й працівник має вищу освіту
 n - B - вибр. n -й праців. є чоловік.
 Подія C - вибраний n -й праців. є чоловік і має вищу освіту. За формулою, маємо

$P(C) = P(B \cap A) = \begin{cases} P(B) = 0,35; \\ P(A|B) = 0,25; \end{cases} = 0,35 \cdot 0,25 = 0,0875.$

Відповідь: 0,0875.

Таким чином, установлено, що для дослідів з n рівноможливими елементарними наслідками виконується рівність

$$P_A(B) \cdot P(A) = P(A \cap B), \quad (1)$$

яку за умови $P(A) > 0$ можна переписати у вигляді

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (2)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$



16. Умовна ймовірність 157

Рівність (2) пояснює, чому при $P(A) > 0$ використовують таке означення.

Означення. Нехай A і B — події деякого дослідів і $P(A) > 0$. Тоді умовною ймовірністю $P_A(B)$ події B за умови, що відбулася подія A , називають число $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

У випадку, коли $P(A) = 0$, умовну ймовірність $P_A(B)$ не означають.

Рис. 2.18 Фрагмент пояснення алгоритму розв'язування задачі на визначення умовної та повної ймовірності.

Задача 3. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5-ти попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий банк – 7 разів, третій банк – 9 разів при 10-ти звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесменові кредит? (рис. 2.19.)

Задача 3. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5-ти попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий банк – 7 разів, третій банк – 9 разів при 10-ти звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесменові кредит?

P-ниця
 Введемо позначення: подія A_i — i -тій банк виділить кредит, $i = 1, 2, 3$;
 n . A — хоча б 1 банк виділить бізнесменові кредит. За умовою задачі:
 $P(A_1) = \frac{6}{10}, P(A_2) = \frac{7}{10}, P(A_3) = \frac{9}{10} \Rightarrow P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}; P(\bar{A}_2) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}; P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$
 тобто ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій A_1, A_2, \dots, A_n дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних до них подій.
 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n), \quad (1.23)$
 За формулою, маємо:
 $P(A) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = 1 - 0,12 = 0,88$

Рис. 2.19 Фрагмент пояснення алгоритму розв'язування задачі на визначення умовної та повної ймовірності.

На завершальному етапі вчитель підводить підсумки уроку та повідомляє домашнє завдання.

Запитання для повторення:

- Яку подію називають протилежною даній?
- Що таке сума подій?
- Дайте означення добутку подій.
- Яка подія називається складеною?
- Приведіть приклад складеної події.

Детальну розробку уроку подано у Додатку В.

Інтерфейс у Jamboard настільки зрозумілий і простий у використанні, що навіть не потрібно вчитися, щоб розпочати роботу.

Jamboard включає повний набір функцій малювання, а також можливості для роботи з різними пензлями, розпізнавання рукописного введення та багато іншого. Існує мобільний додаток для платформ Android та iOS, який без проблем працює на смартфонах та планшетах.

Можна переносити файли з Google Диску на дошку. Також створювати нову сесію Jam у мобільному додатку Google Jamboard, а потім дозволити необмежену кількість учасників підключатися до нього з будь-якого іншого пристрою, де б вони не знаходилися.

У Google Jamboard та мобільних програмах є віртуальна лазерна указка, яку можна активувати під час презентації. Всі рухи курсора на поточній сторінці сеансу Jam будуть відображатися в реальному часі у вигляді віртуальної точки світла.

Сервіс має необмежені можливості для роботи з таблицями, ескізами, та схемами. Ви можете редагувати та редагувати їх у реальному часі.

Jamboard інтегрується з G-Suite, що дозволяє використовувати різні слайди, презентації, файли Google PDF та багато іншого.

Висновки до розділу 2

Для кожного вчителя головним завданням є розвиток навичок та вмінь комп'ютерних технологій, оскільки зараз без комп'ютерних технологій неможливо розв'язати жодну математичну задачу, тому вміння виконувати обчислення швидко й точно є базою для вивчення математики та інших дисциплін.

Важливою передумовою методики навчання стохастики з використанням хмарних технологій є наявність технічних засобів, завдяки яким можна користуватися сервісами Kahoot, LearningApps, GeoGebra, Jamboard та ін. Таке поєднання дає змогу зацікавити учнів навчатися, вивчати теоретичний матеріал, закріплювати знання з можливістю застосування на практиці різноманітних завдань, для вчителів це чіткий алгоритм дій та контролю зроблених завдань, який він може створювати за допомогою такого навчання. ІКТ допомагає учням проявляти себе творчо. Завдання, які розв'язуються в теорії ймовірностей та математичній статистиці, можуть бути задіяні в різних сферах життя. Якщо вчитель підбере завдання відповідно до профілю навчання, то інтерес учнів буде посилюватися. Такий підхід розвиває соціальну людину, яка більше впевнена у своїх силах доречно застосовує знання на практиці, досягає своїх цілей та вміє працювати в команді.

Нами були розроблені конспекти уроки з теми стохастики, вчителі математики можуть застосовувати цей матеріал на своїх уроках. Використання цих матеріалів допоможе вчителям у вирішенні проблем з використанням ІКТ.

Слід враховувати, що при розвитку компетентностей у галузі природничих наук формується частина загальнонаукових, загальноосвітніх та соціально-особистісних компетентностей за участю соціально-економічних та гуманітарних дисциплін.

ВИСНОВКИ

Актуальність магістерської роботи полягає у дослідженні ефективності використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики. Особливо доцільне використання хмарних технологій навчання в період карантину. Як показали наші дослідження, віртуальні дошки та онлайн сервіси недостатньо використовуються вчителями математики.

Відповідно до поставленої мети та завдань магістерської роботи в процесі розробки матеріалів щодо використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики отримані наступні основні результати:

- проаналізовано психолого-педагогічну, навчальну, математичну і методичну літературу, яка має відношення до проблеми дослідження, зокрема, досліджено використання хмарних технологій у практиці навчання учнів старшої школи; та вивчено сучасний стан навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики при профільному вивченні математики;
- здійснено логіко-дидактичний аналіз стохастичної лінії у старшій школі (профільний рівень); описано методичні засади навчання стохастики у профільній школі;
- розроблено дидактичні ігри для уроків математики з використанням програмних засобів: LearningApps, Kahoot, GeoGebra та дидактичні матеріали для уроків математики і навчання з використанням віртуальної дошки Jamboard;
- розроблені методичні рекомендації щодо використання дидактичних матеріалів у навчанні стохастики з використанням хмарних технологій.

Поставлені завдання виконані в повному обсязі, мета дослідження досягнута.

Дослідження проблем використання хмарних технологій у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики дозволило зробити такі

ВИСНОВКИ:

1. Впровадження інтерактивних вправ до уроків з використанням сервісу Kahoot, LearningApps та завдань системи динамічної математики GeoGebra забезпечує у навчанні стохастики диференціацію і підвищує інтерес до навчання, результативність та сприяє розвитку пізнавально навчальної активності школярів. Використання хмарних технологій надає педагогу низку можливостей для навчання під час карантину або хвороби учня, надавати навчальні послуги для школярів з обмеженими можливостями.

2. Необхідною складовою загальнокультурної, загальноосвітньої підготовки сучасної людини є стохастична грамотність, яка має бути в шкільному курсі математики з початкової школи до профільних класів. Йдеться як про вивчення певних понять і фактів, так і про створення окремого типу думки. Дослідження показали, що люди від природи погано пристосовані до ймовірнісної оцінки, розуміння та правильної інтерпретації ймовірнісної та статистичної інформації. Для цього потрібна цілеспрямована та систематична робота. Якість знань школярів залежить переважно від рівня методичної та математичної досконалості знань вчителів, особливо в контексті складності візуалізації стохастичного змісту.

3. Впровадження інформаційних та комунікаційних технологій у процес навчання математики, у тому числі стохастики, дозволяє модернізувати зміст та організаційні форми навчання, підвищує інтерес школярів до предмета, сприяє розвитку просторової уяви, розумових здібностей, пам'яті, уваги, рухливості, творчих здібностей, нестандартного мислення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аман І. С. Інтернет-сервіс мультимедійних дидактичних вправ LearningApps. URL: <http://internet-servisi.blogspot.com/p/learning-apps.html> (дата звернення: 29.03.2021)
2. Безверхня О. О. Міжпредметні зв'язки теорії ймовірності та математичної статистики з англійською мовою. *Наукові записки молодих учених*. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім В. Винниченка. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/index>] (дата звер. 05.03.2021)
3. Биков В.Ю. Дистанційна освіта – перспективний шлях до розвитку професійної освіти. *Педагогічна газета*. Січень 2001. №1. С. 2-4.
4. Биков В.Ю. Технології хмарних обчислень, нові функції ІКТ - підрозділів навчальних закладів і наукових установ . *Інформаційні технології в освіті*. 2011. № 10. С. 8-23.
5. Блог «Творчий учитель» вчительки математики та інформатики Вишнівчицької ЗОШ І-ІІІ ст.Теребовлянського р-ну Тернопільської обл. Попель С.М. URL: <http://popsm1.blogspot.com/>
6. Блог вчителів математики та інформатики Олександра та Тетяни Терлецьких «Для всіх, хто хоче знати математику». URL: <https://terletskyi.blogspot.com/>
7. Блог вчителя математики та інформатики Оксани Драпак. URL: <https://oksana-drapak.blogspot.com/>
8. Бродський Я. Вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей, статистики. *Математика*. 2006. №16. С. 8-18.
9. Бродський Я., Павлов О. Імовірісно-статистична змістова лінія в старшій школі. *Математика в школах України*. 2008. №4. С. 2-9.
10. Вакалюк Т. А., Шевельова М. К. Використання інформаційно-комунікаційних технологій в загальноосвітніх школах для підвищення якості освіти. *Інформаційно-комунікаційні технології як засіб підвищення якості освіти*: зб. наук. пр. [ред. кол.: В.Є. Берека (гол) та ін.]. Хмельницький : Видавництво ХОІППО, 2015. С. 40-45.

11. Вакалюк Т. А. Можливості використання хмарних сховищ. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання: тези доповідей Всеукраїнської наук.-практ. конф., (м. Умань, 23 травня 2014 р.)* / МОН України, Уманський ДПУ імені Павла Тичини; гол. ред. Ткачук Г.В. Умань : ФОР Жовтий О.О., 2014. С. 19–22.
12. Вакалюк Т. А. Можливості використання хмарних технологій в освіті. *Актуальні питання сучасної педагогіки: матеріали міжнар. наук.-практ.конф. (м. Острог, 1-2 листопада 2013 року).* Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2013. С. 97–99.
13. Вакалюк Т. А., Поліщук В.В. Перспективи використання хмарних технологій у навчальному процесі загальноосвітніх навчальних закладів України. *Педагогіка вищої та середньої школи.* Випуск 46. Кривий Ріг, 2015. С. 114-119.
14. Васильєва Д. В. Методика навчання математики учнів 5–6 класів з використанням мультимедійної дошки : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)»; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2013. 20 с.
15. Використання комп'ютерних і цифрових технологій у роботі шкільного вчителя. Кетрін Нейв, Велика Британія. URL: <https://osvita.ua/school/method/technol/44008/>
16. Використання соціальних медіа на уроках. URL: <https://osvita.ua/school/method/technol/46076/>
17. Гриценко В.И., Кудрявцева С.П., Колос В.В., Веренич Е.В. Дистанционное обучение: теория и практика: Монография. Киев: Наукова думка, 2004. 375 с.
18. Грушко А. 6 ресурсів, які працюють як онлайн дошка для вчителя. URL: <https://buki.com.ua/news/6-resursiv-yaki-zaminyat-doshku-vchytelya-pid-chas-onlaun-zanyattya/>
19. Дзямко В. Й., Месарош Л.В. Формування стохастичної компетентності через реалізацію міжпредметних зв'язків: наук. вісник

Ужгородського національного університету : серія: Педагогіка. Соціальна робота : голов. ред. І.В. Козубовська. Ужгород, 2018. Вип. 1 (42). С. 59-63.

20. Довжик М. Вивчення математики онлайн. 2013. URL: <http://ua.onlinemschool.com/>

21. Жалдак М. І., Біляй І.М. Стохастика : посіб. для вчителів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. 304 с. URL: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyku-ta-pidruchnyku> (дата звернення: 30.06.2020).

22. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. Посібник для вчителів. Київ: Шкільний світ, 2006. 120 с.

23. Жалдак М. І., Біляй І.М., Михалін Г.О. Початки стохастики : факультативний курс для учнів старшої школи. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. 163 с. URL: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyku-ta-pidruchnyku> (дата звернення: 30.06.2020).

24. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.: за ред. Г.О. Михаліна. К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с.

25. Захарчева Л. М. Можливості використання інтерактивних вправ сервісу Learning Apps в навчанні стохастики учнів з особливими освітніми потребами. *Наукові записки молодих учених*: матер. наук.-практ. конф., Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1675> (дата звернення 01.12.2020)

26. Зеленьак О.П. Математичні здібності веб-сервісу Wolfram Alpha. URL: <http://journal.osnova.com.ua/article/29828> Математичні «здібності» вебсервісу_%20wolfram_alpha

27. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і

доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/3315>

28. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : навч. посібник. К.: Центр учбової літератури, 2007. 576 с.

29. Колчук Т. В. Методика дистанційного навчання геометрії учнів основної школи : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)»: Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2014. 20 с.

30. Крамаренко Т. Г., Ухова О.М. Використання GeoGebra у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики. *Нові інформаційні технології в освіті для всіх* : безперервна освіта : Восьма міжнародна конференція ІТЕА-2013 (Київ, 26-27 листопада, 2013 р.) : матеріали доповідей та виступів. – Київ, 2013. С. 77-84.

31. Крамаренко Т. Г. Забезпечення компетентнісного підходу у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики майбутніх учителів фізики. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія №2. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання* : зб. наук. праць / Редрада.- К. : НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2018. №20(27). С. 50-56. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/2300>

32. Крамаренко Т. Г. Удосконалення підготовки учителя математики до використання ІКТ у навчанні стохастички учнів з особливими освітніми потребами. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 2. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2020. № 22 (29). С. 102-108. URL : <https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/index>

33. Крамаренко Т.Г. Проблеми підготовки вчителя математики до використання ІКТ у процесі навчання теорії ймовірностей і математичної статистики. *Вісник Черкаського університету*. Серія Педагогічні науки. Черкаси : Черкаський нац. ун-т., 2013. №8 (261). С. 63-71.

34. Литвинова С.Г. Проектування хмаро орієнтованого навчання середовища загальноосвітнього навчального закладу: монографія. Київ. : ЦП «Компринт», 2016. 354 с.
35. Лук А. Н. Психология творчества. М. : Наука, 1978. 126 с.
36. Любимова Е.В. Нужны ли облачные вычисления учителям и школьникам? 2013. URL: <http://ext.spb.ru/index.php/2011-03-29-09-03-14/131-edutech/2389-2013-02-21-07-15-03.html>
37. Математика: посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап'юк та ін. ; за ред. В. В. Корольського. 3-є вид., перероб. і доп. Тернопіль: Підручники і посібники, 2012. 416 с.
38. Матеріали VIII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції/ Проблеми впровадження інформаційних технологій в економіці. 2012. 420с.
39. Мерзляк А. Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів середньої загальної освіти. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.
40. Мініч Л. В. Використання інформаційних технологій на уроках фізики в основній школі. URL : <http://vuzlib.com/content/view/378/84/>
41. Міжпредметні зв'язки під час вивчення основ наук. URL: https://pidru4niki.com/90503/pedagogika/mizhpredmetni_zvyazki_vivchennya_osnov_nauk
42. Можливості використання хмарних технологій в освітній та соціальній сферах. Сабліна М.А. – ISSN On line: 2312-5829. Освітнологічний дискурс, 2014, № 3(7).
43. Нелін Є. П., Долгова О.Е. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. Рівень. Х. : Гімназія, 2011. 448 с.
44. Нова українська школа: основи Стандарту освіти. Львів, 2016. 64 с.

45. Облачные технологии в образовании. Сервис для хранения и работы с информацией он-лайн. URL: <http://edu-lider.ru/category/ikt-kompetentnyj-uchitel/informatizaciya/>

46. Образование сегодня. 2014. URL: info@ed-today.ru
<http://www.educatorstechnology.com/2013/03/14-technology-concepts-every-teacher.html>

47. Образовательные видеоканалы для изучения английского. URL: <http://newtonew.com/blog/post/326>.- Назва з екрану.

48. Олевський В. І., Олевська Ю.Б., Соколова Л.Є. Досвід використання технології «хмарних обчислень» в мережевих продуктах для шкільної освіти. *Вісник Харків. нац. ун-ту імені В.Н. Каразіна*. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2011. № 987, вип. 18.С. 82-92.

49. Победа через поражение: как детей в Сингапуре учат математике с помощью «продуктивных провалов». URL : <https://tjournal.ru/flood/56627-singapore-stufy-fail>

50. Положення про дистанційне навчання, затверджене наказом МОН від 25.04.2013 №466, зареєстроване в міністерстві юстицій України 30.04.2013 № 703/23235. URL: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/z0703-12>

51. Полякова Т.А. , Ширшова Т.А. Значение стохастической линии в формировании представлений учащихся о прикладных возможностях математики: научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. №5 (май). 0,4 п.л.

52. Романова А. Використання ІКТ у навчанні стохастики / наук. керівник Т.Крамаренко. *Наукові записки молодих учених*: матер. наук.-практ. конф., Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1886>

53. Романова А. Навчання стохастики у профільній школі з використанням ІКТ / А. Романова, Т. Крамаренко. *Проблеми розвитку*

професійних компетентностей вчителів природничо-математичного напрямку : зб. тез доп. Всеукр. наук.-практ. конф., м. Дніпро, 17-18 листопада, 2021 р. Дніпро, 2021.

54. Семеніхіна О., Друшляк М. Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і GeoGebra : порівняльний аналіз. Фізико-математична освіта : науковий журнал. 2015. № 1 (4). С. 21–30. URL: <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-26> (дата звернення: 30.06.2020).

55. Семеріков С. О., Кислова М.А., Словак К.І. Розвиток мобільного навчального середовища як проблема теорії і методики використання інформаційно-комунікаційних технологій в освіті. Інформаційні технології і засоби навчання. 2014. Том 42, № 4. С. 1-19. URL: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/download/1104/823>.

56. Семеріков С. О., Маркова О.М., Стрюк А.М. Хмарні технології навчання: витоки (фахова стаття). Інформаційні технології і засоби навчання. 2015. Том 46, № 2. С. 29-44. URL: <http://lib.iitta.gov.ua/11133/>

57. Сервисы для организации перевёрнутого класса. URL: <http://newtonew.com/blog/post/265>.

58. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підр. для студ. мат. Спеціальностей пед. навч. Закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 200. 512 с.

59. Слюсаренко Н. В., Матросова Н.В. Формирования у будущих полиграфистов технологической компетенции: *Учебное пособие*. Симферополь, 2008.176 с.

60. Трунова О.В. Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцях і класах з поглибленим вивченням математики : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)»: нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 2007. 20 с.

61. Трунова О.В. Про вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцях і класах з поглибленим вивченням математики.

Математика в школі. 2005. №2. С.40-47.

62. Трунова О.В. Про доцільність введення елементів стохастики в програму середньої школи. Вісник ЧДПУ імені Т.Г. Шевченка. Серія: педагогічні науки: Збірник. Чернігів: ЧДПУ, 2001. №4. С.161-164.

63. Хмарні технології як засіб розбудови інноваційної школи. Литвинова С.Г. Україна, м. Київ, Методичний центр інформаційних технологій в освіті.

64. Google Classroom: що це і як працює. URL: <https://www.bbc.com/ukrainian/news-52094706>.

65. Khan Academy w szkole publicznej (Summit Public Schools w San Jose, Kalifornia). URL: <http://youtu.be/fvGhLWuziBs>;

66. Sada Manuel. Probabilidad: simulaciones y problemas: GeoGebraBook / Manuel Sada. URL: <https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgS> (date of appeal : 31.07.2019).

67. Tejaswi Redkar, Tony Guidici. Windows Azure Platform / Redkar Tejaswi, Guidici Tony. – Second edition: Apress, 2011. 650 p.

68. Vakaliuk Tetiana. Advantages and disadvantages of use cloud data warehouse / Tetiana Vakaliuk, Mariya Medvedyeva // Journal L'Association 1901 "SEPIKE". – Frankfurt, Deutschland. – Poitiers, France. Los Angeles, USA. Edition 11. 2015. P. 104-106.