

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____ Бобилев Д. Є.

Реєстраційний № _____

« ___ » _____ 20__ р.

« ___ » _____ 20__ р.

**МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ
СТАРШОКЛАСНИКІВ З ТЕМИ «РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ, СИСТЕМИ
РІВНЯНЬ»**

Кваліфікаційна робота студентки групи
МІм-16

ступінь вищої освіти – магістр

спеціальності: 014.04 середня освіта

Математика (Інформатика)

Грідіної Олени Олександрівни

Керівник:

доктор педагогічних наук, професор

Лов'янова Ірина Василівна

Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____
(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В ШКМ.....	7
1.1. Узагальнення методів розв’язування рівнянь і нерівностей з однією змінною в курсі алгебри основної школи.....	7
1.2. Узагальнення методів розв’язування рівнянь, нерівностей з однією змінною та систем рівнянь в курсі алгебри і початків аналізу.....	17
1.3. Представлення тем змістової лінії «Рівняння і нерівності» в ЗНО.....	23
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПРИЙОМИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ З ТЕМИ «РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ, СИСТЕМИ РІВНЯНЬ» В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ.....	30
2.1. Методика представлення основних понять і фактів про рівняння, нерівності і системи рівнянь в курсі алгебри 7-11 класів в узагальненій формі.....	30
2.2. Методичні прийоми систематизації знань старшокласників з тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей» на етапі узагальнюючого повторення.....	45
2.2.1. Системи вправ на повторення основних фактів і формул пов’язаних з рівняннями та нерівностями.....	45
2.2.2. Використання засобів ІКТ у підготовці до ЗНО з тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь»	72
ВИСНОВКИ.....	84
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	87
ДОДАТКИ.....	91
ДОДАТОК А.....	91

ВСТУП

*Рівняння та нерівності - золотий ключ,
що відкриває всі математичні сезами.*

С. Коваль

Актуальність дослідження. Узагальнення і систематизація знань – це важливий етап якісної математичної підготовки учнів. Питаннями систематизації знань займалися видатні педагоги минулого, такі як Я. А. Коменський [13], Дістервег А. [11] та ін. Вперше завдання формування в учнів системи наукових знань, а не кускових, ізольованих представлень була чітко визначена наприкінці 30-х років, коли серед принципів навчання з'явився принцип систематичності та послідовності. Над проблемами узагальнення та систематизації працювали: дидакти О. Онищук [36], І. Я. Лернер [18], методисти В. П. Іржавцева [1], Л. Я. Федченко [1] та інші.

Теми змістової лінії «Рівняння і нерівності» представлені згідно з навчальною програмою з математики в усіх класах з 5 по 11. У 5–6 класах навчальний матеріал, що стосується рівнянь і нерівностей, має загалом пропедевтичний характер. Учні 5-х класів розв'язують нескладні рівняння першого степеня на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а в 6-му із використанням основних властивостей рівнянь.

Як зазначається у навчальній програмі з математики, основними завданнями курсу алгебри 7-9 класів є формування умінь розв'язування рівнянь і нерівностей та їх систем, достатніх для свідомого їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичних застосувань. Важливе завдання полягає в залученні учнів до використання рівнянь як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних задач. Процес розв'язування рівняння трактується в курсі алгебри як послідовна заміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих в курсі математики 5-6 класів, в курсі алгебри 7 класу вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною. Курс передбачає вивчення лінійних рівнянь, квадратних рівнянь та

рівнянь, які зводяться до лінійних або квадратних, зокрема дробово-раціональних рівнянь. Розглядаються системи лінійних рівнянь та рівнянь другого степеня з двома змінними. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння – другого степеня, а друге – першого степеня. Передбачається розгляд лише найпростіших систем рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня. Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей. Розглядається розв'язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною [33].

У курсі математики старшої школи розширюються класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи розв'язування, сфери застосування. Вивчення цього матеріалу пов'язується з властивостями відповідних функцій: степеневої, тригонометричних, показникової, логарифмічної [32].

Аналіз завдань ЗНО з математики за останні роки засвідчує, що тема «Рівняння, нерівності, системи» завжди ґрунтовно представлена в завданнях ЗНО. А тому, якісна підготовка старшокласників до проходження ЗНО потребує ретельної систематизації знань з теми, яка розгортається з 5 по 11 класи. Саме це підтверджує актуальність дослідження теми: «Методика узагальнення і систематизації знань старшокласників з теми «Рівняння, нерівності, системи рівнянь».

Мета дослідження: розкрити методику узагальнення і систематизації знань учнів з тем змістової лінії «Рівняння і нерівності» в умовах підготовки старшокласників до ЗНО.

Завдання дослідження:

1. Дослідити як відбувається узагальнення методів розв'язування рівнянь і нерівностей з однією змінною та систем рівнянь в курсі алгебри основної школи й алгебри і початків аналізу старшої школи.

2. Проаналізувати, як в завданнях ЗНО з математики представлені теми: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей».

3. Розробити методичний матеріал для представлення основних понять й фактів про рівняння і нерівності в курсі алгебри 7-11 класів в узагальненій формі.

4. Дібрати методичні прийоми систематизації знань старшокласників з тем «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей» на етапі узагальнюючого повторення.

Об'єкт дослідження: процес узагальнення і систематизації знань учнів з математики.

Предмет дослідження: методичні прийоми узагальнення і систематизації знань старшокласників з тем змістової лінії «Рівняння і нерівності» на профільному рівні навчання алгебри і початків аналізу.

Основні методи дослідження: *теоретичні:* теоретичний аналіз, порівняння і узагальнення методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження для систематизації теоретичного матеріалу, уточнення змісту основних понять змістової лінії «Рівняння і нерівності»; *емпіричні:* бесіди з вчителями і учнями, аналіз досвіду роботи вчителів з навчання методів розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем.

Практичне значення роботи полягає у тому, що матеріали дослідження можуть бути використані вчителями у практичній професійній діяльності, а також учнями 11-х класів при підготовці до ЗНО, щоб поглибити власні знання методів розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем в курсі алгебри і початків аналізу та на етапі підготовки до ЗНО, матеріал може бути використаний викладачами педагогічних ВНЗ при викладанні дисципліни «Елементарна математика» з метою узагальнення, поглиблення та систематизації знань студентів про рівняння, нерівності, їх системи та методи їх розв'язування, а також у самостійній роботі студентів під час опрацювання питань з методики навчання математики та у процесі виробничої педагогічної практики у закладах середньої освіти.

Апробація результатів дослідження: Результати дослідження відображені в статті «Методика узагальнення і систематизації знань старшокласників з теми «Квадратні рівняння» в умовах підготовки до ЗНО» [10] у електронному збірнику наукових праць молодих учених факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених»; а також на IX Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО – 2021» з публікацією тез доповіді «Використання онлайнного сервісу Learningapps.org для узагальнюючого повторення теми «Рівняння»» [9, с. 136-137].

Структура та обсяг роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 53 найменування та одного додатку.

РОЗДІЛ 1.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В ШКМ

1.1. Узагальнення методів розв'язування рівнянь і нерівностей з однією змінною в курсі алгебри основної школи.

У 5–6 класах навчальний матеріал, що стосується рівнянь і нерівностей, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує учнів до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсах алгебри та алгебри і початків аналізу. Зокрема, учні мають дістати уявлення про використання букв для запису законів арифметичних дій, формул, навчитись обчислювати значення простих буквених виразів, складати за умовою задачі й розв'язувати нескладні рівняння першого степеня спочатку на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом із використанням основних властивостей рівнянь [33].

За допомогою правила знаходження невідомого доданка розв'язуються рівняння виду $x + a = b$, де x – невідоме число, a і b – відомі числа, в 5-му класі.

Наприклад, розв'язуючи рівняння $x + 2 = 5$, записують $x = 5 - 2$. Звідси $x = 3$.

В 6-му класі до такого рівняння застосовують правило. Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане [30].

Зауважимо, що коли дане рівняння не має коренів, то, додавши до обох його частин одне й те саме число, отримаємо рівняння, яке також не має коренів.

Застосуємо це правило до вже розглянутого рівняння $x + 2 = 5$. До обох його частин додамо число -2 .

Отримаємо: $x + 2 + (-2) = 5 + (-2)$. Звідси $x = 5 - 2$.

Ми бачимо, що доданок 2 «перестрибнув» з лівої частини рівняння до правої, змінивши при цьому знак на протилежний.

Цей приклад ілюструє таке твердження.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане [30].

Наприклад у рівнянні $2x - 1 = x + 5$ перенесемо доданок x із правої частини рівняння в ліву, а доданок -1 – з лівої частини в праву, помінявши знаки цих доданків.

Отримаємо: $2x - x = 5 + 1$. Звідси $x = 6$.

Розв'яжемо рівняння $\frac{1}{3}x = 4$. За правилом знаходження невідомого множника запишемо: $x = 4 \div \frac{1}{3}$. Звідси $x = 12$ (5 клас).

Цей результат можна отримати й іншим способом (6 клас). Помножимо обидві частини рівняння $\frac{1}{3}x = 4$ на число 3. Отримаємо: $3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 4$. Звідси $x = 12$.

Цей приклад ілюструє таке твердження.

Якщо обидві частини рівняння помножити (або поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане [30].

Чому в цьому твердженні заборонено множити обидві частини рівняння на 0?

Пояснимо це на прикладі рівняння $2x = 4$. Число 2 – єдиний його корінь. Якщо ж обидві частини цього рівняння помножити на 0, то отримаємо рівняння $0 \cdot 2x = 0 \cdot 4$, коренем якого є будь-яке число. Отже, корені отриманого рівняння не збігаються з коренями початкового рівняння [30].

Використання основних властивостей рівнянь в курсі математики 6 класу є першим своєрідним узагальненням знань учнів про рівняння, та способи їх розв'язування.

Основними завданнями курсу алгебри 7-9 класів є формування умінь розв'язування рівнянь і нерівностей та їх систем, достатніх для свідомого їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичних застосувань. Важливе завдання полягає в залученні учнів до використання рівнянь як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних задач. У процесі вивчення курсу посилюється роль обґрунтувань математичних тверджень, індуктивних і дедуктивних міркувань, формування різноманітних алгоритмів, що має сприяти розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів [33].

Розглянемо, як подається змістова лінія рівнянь та нерівностей у діючих підручниках [23, 25, 26, 27, 28, 29].

Вивчення теми «Лінійні рівняння» в курсі алгебри 7 класу починається з того розгляду трьох рівнянь:

$$2x = -3,$$

$$0x = 0,$$

$$0x = 2.$$

Число $-1,5$ є єдиним коренем першого рівняння.

Оскільки добуток будь-якого числа на нуль дорівнює нулю, то коренем другого рівняння є будь-яке число.

Третє рівняння коренів не має.

Незважаючи на істотні відмінності отриманих відповідей, наведені рівняння зовні схожі: усі вони мають вигляд $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа.

Рівняння виду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Наведемо ще приклади лінійних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 7; -0,4x = 2,8; -x = 0.$$

Далі зміст розгортається в узагальненому вигляді.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b .

1) Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a , отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, що дорівнює $\frac{b}{a}$.

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$.

Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо $a = 0$ та $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо $a = 0$ та $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.

Отримані висновки у підручнику подаються у вигляді таблиці (табл. 1.1.) [26, с. 14].

Таблиця 1.1

Розв'язання лінійного рівняння виду $ax = b$

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x – будь-яке число	Коренів немає

У 8 класі перед вивченням теми «Квадратні рівняння» систематизуються і узагальнюються попередні знання учнів про лінійні рівняння і вводиться поняття рівняння першого степеня.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають рівнянням першого степеня.

Наприклад, кожне з лінійних рівнянь $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ є рівнянням першого степеня. А ось лінійні рівняння $0x = 0$, $0x = 2$ не є рівняннями першого степеня.

Числа a і b називають коефіцієнтами рівняння першого степеня $ax = b$.

Те, що множина рівнянь першого степеня є підмножиною множини лінійних рівнянь, ілюструє схема на рисунку 1.1. [27, с. 141].

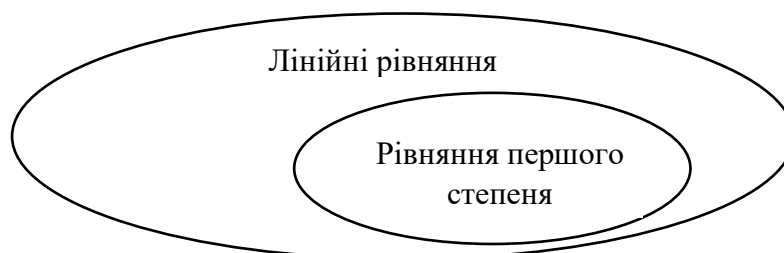


Рис. 1.1. Класифікація лінійних рівнянь

Далі вводиться поняття квадратного рівняння.

Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a , b і c називають коефіцієнтами квадратного рівняння. Число a називають першим або старшим коефіцієнтом, число b – другим коефіцієнтом, число c – вільним членом.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають зведеним [27].

Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ – це зведені квадратні рівняння.

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число a , отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Розглядаються види квадратних рівнянь.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Існує три види неповних квадратних рівнянь.

1. При $b = c = 0$ маємо: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ і $b \neq 0$ маємо: $ax^2 + bx = 0$.
3. При $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо: $ax^2 + c = 0$.

Розв'яжемо неповні квадратні рівняння кожного виду.

1. Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.
2. Рівняння $ax^2 + bx = 0$ подамо у вигляді $x(ax + b) = 0$. Це рівняння має два корені x_1 і x_2 , один з яких дорівнює нулю, а другий є коренем рівняння першого степеня $ax + b = 0$. Звідси $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} < 0$ або $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, що в першому випадку рівняння коренів не має. У другому випадку рівняння має два корені:

$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Узагальнюються отримані результати в таблиці (табл. 1.2.) [28, с. 143].

Таблиця 1.2.

Розв'язання квадратного рівняння

Коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Далі виводиться формула коренів квадратного рівняння, як результат виконання рівносильних перетворень рівняння.

Знаючи коефіцієнти a і b рівняння першого степеня $ax = b$, можна знайти його корінь за формулою $x = \frac{b}{a}$.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами a , b і c квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходити його корені.

$$\text{Маємо: } ax^2 + bx + c = 0.$$

Оскільки $a \neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Існування коренів останнього рівняння та їхня кількість залежить від знаку значення виразу $b^2 - 4ac$. Це значення називають дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D , тобто $D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова *discriminare*, що означає «розрізняти», «розділяти» [26].

Тепер рівняння $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння коренів не має. Справді, при будь-якому значенні x вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

2. Якщо $D = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння можна записати у вигляді

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2.$$

Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$. Тоді $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ або

$$x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Цей запис називають формулою коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати й у випадку, коли $D = 0$. Маємо:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

В результаті виведення формули отримуємо алгоритм розв'язування квадратного рівняння, який є своєрідним узагальненням формули і не потребує її виведення кожного разу, а тільки формулює правило використання формули.

Під час розв'язування квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант D квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;
- якщо $D \geq 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння [27, с. 149].

В темі курсу алгебри 7-го класу «Системи лінійних рівнянь з двома змінними» вивчаються: Рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними. Системи рівнянь із двома змінними. Розв'язування систем методом підстановки. Розв'язування систем методом додавання [33].

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними розглядаються в курсі алгебри 9-го класу. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння – другого степеня, а друге – першого степеня. Передбачається розгляд лише найпростіших систем рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня [33].

Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей [33].

Властивості рівносильних перетворень рівнянь переносяться на нерівності.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.





Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній [29, с. 32].

Будь яка нерівність зі змінною зводилася до рівносильної нерівності одного із чотирьох видів: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, де x – змінна, a і b – деякі числа. Такі нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною [29, с. 35].

У підручнику [29, с. 35] наводять таблицю позначень і зображень вивчених числових проміжків (табл. 1.3.).

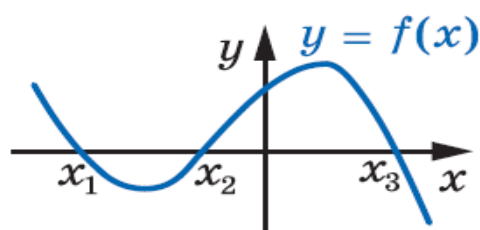
Таблиця 1.3.

Числові проміжки

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	

Важливим узагальненням способів розв'язування нерівностей є метод інтервалів. Розглянемо його теоретичні основи і зміст [23, с.35].

На рисунку 1.2. зображено графік деякої функції f , у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1 , x_2 і x_3 . Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

Рис. 1.2. Графік функції f

Теорема 1. Якщо функція неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає сталий знак.

Наприклад, функція $y = x^2 - 1$ неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ і не має на них нулів. Отже, розглядувана функція на вказаних проміжках зберігає знак (рис.1.3.).

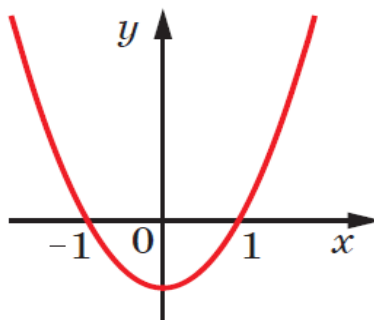


Рис. 1.3. Графік функції $y = x^2 - 1$

Ця теорема є основою загального методу розв'язування нерівностей виду $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$, де f – функція, неперервна на $D(f)$.

Роз'яснимо застосування цього методу на прикладі функції, графік якої зображено на рисунку 1.2.

Уявимо собі, що з цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f , за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 1.4.).

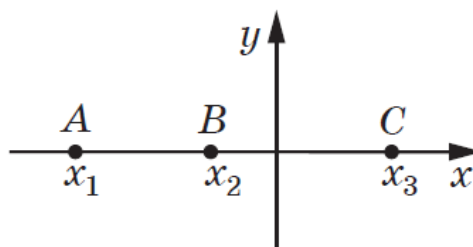


Рис. 1.4. Графік функції f , за винятком всіх точок, крім A , B , C

Кожний із проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f .

Функція f є неперервною на цих проміжках. Отже, за вище розглянутою теоремою зазначені проміжки є проміжками знакосталості функції f .

Залишається з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на кожному із зазначених проміжків. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty; x_1)$ і $f(a) > 0$. Оскільки $(-\infty; x_1)$ – проміжок знакосталості функції, то для будь-якого $x \in (-\infty; x_1)$ значення функції має той самий знак, що $f(a)$, отже, виконується нерівність $f(x) > 0$. Вибираючи по одній точці на кожному проміжку знакосталості та знаходячи значення функції в цій точці, можна визначити знак функції на розглядуваних проміжках.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають методом інтервалів [23, с. 37].

Також в 9-му класі в курсі алгебри розглядається розв'язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною. Як і способи розв'язування дробово раціональних рівнянь в 8-му класі, так і розв'язування систем нерівностей в 9-му класі подається на конкретних прикладах без уточнення суттєвих узагальнень [33].

Таким чином, спостерігаємо, що лінійні та дробово раціональні рівняння й нерівності розв'язуються за допомогою методу рівносильних перетворень, для квадратних рівнянь і нерівностей, формули виводяться також методом рівносильних перетворень. Враховуючи це, ми бачимо, що з класу в клас узагальнюються знання учнів про метод рівносильних перетворень.

1.2. Узагальнення методів розв'язування рівнянь, нерівностей з однією змінною та систем рівнянь в курсі алгебри і початків аналізу.

У курсі математики старшої школи набуває розвитку змістова лінія «Рівняння та нерівності». У старшій школі розширюються класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи розв'язування, сфери застосування. Вивчення цього матеріалу пов'язується з властивостями відповідних функцій.

У 10-11 класах за програмою рівня стандарту не передбачений розгляд окремої теми «Рівняння і нерівності». На профільному рівні учні 10-го класу вивчають такі теми: «Найпростіші рівняння з параметрами», «Нерівності. Метод інтервалів», «Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї». Після вивчення даних тем учні повинні вміти користуватися теоремою Безу при

розв'язуванні рівнянь та нерівностей та розв'язувати найпростіші рівняння з параметрами, а також нерівності за допомогою методу інтервалів. Також виділяється 32 години на вивчення теми: «Тригонометричні рівняння і нерівності», де учні набувають знання та навички з тем: «Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки», «Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь», «Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції». Після вивчення цих тем, учні формулюють означення обернених тригонометричних функцій; обґрунтовують формули коренів тригонометричних рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$; розв'язують тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами [32].

Досить багато математиків займалось вивченням та розробкою методики розв'язання задач з параметром, зокрема рівнянь та нерівностей. Їх досягнення та результати стали значним внеском у розвиток математики. Це такі вчені, як Крамор В. С. [16], Полонський В. Б., Якір М. С. [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30], Нелін Є.П. [34], Ципкін А. Г. [51, 52], Пінський А. І. [52], Новосьолов С. І. [35], Ткачук В. В. [50], Лікоть В. В. [19] та інші. У цих роботах методично розкрито особливості розв'язування певних типів завдань з параметром різними способами, а також показано широкий спектр можливих розв'язків за поданими способами. Аналізуючи список джерел, можна сказати, що задачі з параметром не в повній мірі використовуються для вивчення в шкільному курсі математики. Оскільки не в усіх рівнях програм з математики передбачені години для їх належного розгляду.

На профільному рівні учні 11-го класу вивчають тему «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація» на, яку відводиться 30 годин. Учні детально знайомляться з темами: «Методи розв'язування рівнянь з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо)», «Методи розв'язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної,

застосування властивостей функцій тощо)», «Системи рівнянь та методи їх розв'язування (рівносильні перетворення та використання рівнянь-наслідків, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо)» і після їх вивчення, вміють розрізняти види рівнянь та їх систем, нерівностей та їх систем, методи розв'язування рівнянь і нерівностей та їх систем; обґрунтовують рівносильність виконаних перетворень; застосовують загальні методи та прийоми до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем; розв'язують рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей з параметрами; за описами реальних ситуацій; розв'язують задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь [32].

В темі «Методи розв'язування рівнянь з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо)» розглядаються основні методи розв'язування рівнянь і нерівностей на основі рівносильних перетворень (табл. 1.4., 1.5.) [24].

Таблиця 1.4.

Схеми розв'язування деяких типових рівнянь

Тип рівняння	Умова, рівносильна даному рівнянню
$ f(x) = g(x) $	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$
$ f(x) = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$	$f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Таблиця 1.5.

Схеми розв'язування деяких типових нерівностей

Тип нерівності	Умова, рівносильна даній нерівності
$ f(x) < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$
$ f(x) > g(x)$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{cases}$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 1$	$f(x) > g(x)$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}, 0 < a < 1$	$f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x), 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Також зосереджується увага на таких методах, як: метод розкладання на множники; метод заміни змінної; застосування властивостей функції. Розглянемо сутність цих методів.

1. Метод розкладання на множники:

Добре, коли вдається ліву частину рівняння $f(x) = 0$ подати у вигляді добутку кількох виразів. Як правило, цей крок є корисним, оскільки дозволяє замість даного рівняння розв'язати сукупність більш простих рівнянь.

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, що число 1 є коренем даного рівняння. Тоді ліву частину рівняння можна подати у вигляді добутку $(x - 1)Q(x)$, де $Q(x)$ – квадратний тричлен. Для знаходження $Q(x)$ поділимо «куточком» многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двочлен $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -5x^2 + 11x - 6 & \\ -5x^2 + 5x & \\ \hline 6x - 6 & \\ -6x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отримали, що $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Маємо: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$.

Це рівняння рівносильне сукупності $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$

Відповідь: 1; 2; 3 [24, с. 212].

2. Метод заміни змінної

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння так:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - x^2 + 4x - 2 = 0;$$

$$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 2 = 0.$$

Зробивши заміну $x^2 - 4x = t$, отримуємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$.

$$\text{Звідси } \begin{cases} t = 2, \\ t = -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x = 2, \\ x^2 - 4x = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $2 + \sqrt{6}$; $2 - \sqrt{6}$; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$ [24, с. 213].

3. Застосування властивостей функції

Пошук області визначення функції f може бути ключем до розв'язування рівняння $f(x) = 0$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \log_3 x + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 1.$$

Розв'язання. Застосування будь-яких прийомів, пов'язаних з перетворенням лівої частини даного рівняння, навряд чи призведе до успіху. Разом з тим знаходження області визначення рівняння – шлях цілком природний.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ 4x - x^2 - 3 \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що областю визначення розглядуваного рівняння є двоелементна множина $\{1, 3\}$. Перевірка показує, що число 1 не підходить, а число 3 є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 3 [24, с. 215].

Розглянуті методи вивчаються не в якійсь конкретній темі «Рівняння, нерівності та їх системи» на уроках узагальнення та систематизації знань, а при вивченні окремих видів дробово раціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь на базовому та профільному рівнях.

1.3. Представлення тем змістової лінії «Рівняння і нерівності» в ЗНО.

Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики передбачає що, в розділі «Рівняння, нерівності та їх системи» будуть перевірятися такі знання і уміння (табл. 1.6.) [44].

Таблиця 1.6.

Представлення теми «Рівняння, нерівності та їх системи» в програмі ЗНО

Назва теми	Учень повинен знати	Предметні вміння та способи навчальної діяльності
Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи.	<ul style="list-style-type: none"> - рівняння з однією змінною, означення кореня (розв'язку) рівняння з однією змінною; - нерівність з однією змінною, означення розв'язку нерівності з однією змінною; - означення розв'язку системи рівнянь з двома змінними та методи їх розв'язань; - рівносильні рівняння, нерівності та їх системи; - методи розв'язування раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь 	<ul style="list-style-type: none"> - розв'язувати рівняння і нерівності першого та другого степенів, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; - розв'язувати системи рівнянь і нерівностей першого і другого степенів, а також ті, що зводяться до них; - розв'язувати рівняння і нерівності, що містять степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні вирази; - розв'язувати рівняння, що містять тригонометричні вирази; - розв'язувати ірраціональні рівняння; - застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей функцій) у процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та систем; - користуватися графічним методом розв'язування і дослідження рівнянь, нерівностей та систем; - розв'язувати рівняння і нерівності, що містять змінну під знаком модуля; - розв'язувати рівняння, нерівності та системи з параметрами

Аналіз завдань ЗНО основної сесії за останні роки дозволив з'ясувати теми та рівень вправ, які найчастіше зустрічаються [12]. А саме, у дослідженні систематизовано завдання за видами рівнянь і нерівностей та за рівнями складності завдання.

Лінійні рівняння.

1) Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\frac{5x+8}{3} = 1$?

А	Б	В	Г	Д
1	0	3	-2	-1

2) Укажіть корінь рівняння $1 - 5x = 0$.

А	Б	В	Г
5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	4

3) Якщо числа x і y задовольняють співвідношення $2y + 4 = x$, то $y =$

А	Б	В	Г	Д
$2x - 8$	$8 - 2x$	$\frac{x - 4}{2}$	$\frac{x + 4}{2}$	$\frac{4 - x}{2}$

Квадратні рівняння.

1) Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-4; 3	1; 3	-3; -1	-2; 3	-1; 4

2) Розв'яжіть рівняння $(x + 1)(2x - 3) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-3; 1	-1,5; 1	$-1; \frac{2}{3}$	-1; 3	-1; 1,5

Метод інтервалів.

1) Укажіть число, що є розв'язком нерівності $\frac{5}{x-3} \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
-2	0	2	9	4

2) Розв'яжіть нерівність $(x^2 + 64)(x - 5) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; 8)$	$(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$	$(-\infty; 5)$

Рівняння і нерівності з модулем.

1) Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $|x| > 3$?

А	Б	В	Г	Д
3	1	0	-3	-8

Ірраціональні рівняння

1) Розв'яжіть рівняння $4\sqrt{x} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	16	$-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2) Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{6 - 4x} = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 3)$	$[3; 6)$

3) Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{x + 12} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-12; -6)$	$[-6; 0)$	$[0; 6)$	$[6; 12)$	$[12; +\infty)$

Тригонометричні рівняння.

Розв'яжіть рівняння $3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},$ $n \in \mathbb{Z}$

Показникові рівняння і нерівності.

1) Розв'яжіть рівняння $2^{2x} = \frac{1}{2^3}$.

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	-1,5	1,5	2

2) Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^{x+3} - 3 \cdot 2^x = 10\sqrt{2}$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1)$	$[1; 2)$	$[2; +\infty)$

3) Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+3} \geq 144$.

А	Б	В	Г	Д
$[34,5; +\infty)$	$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; 4,5]$	$[4,5; +\infty)$

Логарифмічні рівняння і нерівності

1) Розв'яжіть нерівність $\log_3 x < -1$.

А	Б	В	Г	Д
$(\frac{1}{3}; +\infty)$	$(-\infty; \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}; 0)$	$(0; \frac{1}{3})$	$(-\infty; -3)$

2) Розв'яжіть нерівність $\log_{0,9}(3x) > 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0,27)$	$(-\infty; 0,6)$	$(0,27; +\infty)$	$(0,6; +\infty)$	$(0; 0,27)$

3) Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\log_4(x - 1) = 3$?

А	Б	В	Г	Д
4	13	63	65	82

4) Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\log_{64} x = \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 6]$	$(6; 32)$	$[32; +\infty)$

Системи рівнянь і нерівностей

1) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x = 16^{-1}. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок цієї системи, то $x_0 \cdot y_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-36	-14	-6	4	6

2) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy = -12, \\ x(2y - 1) = -18. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок цієї системи, то $x_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-6	-16	-9	2	6

3) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2y = 5x, \\ x + y = 14. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ укажіть добуток $x_0 \cdot y_0$.

А	Б	В	Г	Д
5	10	20	40	48

4) Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 6 > 2x, \\ 7x - 28 \leq 0. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(3; 4]$	$(-\infty; -3)$	$(-3; 4]$	$(-\infty; 4]$

Рівняння, нерівності і системи з параметром.

1) Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра a .

2) Розв'яжіть нерівність $\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \leq 0$ залежно від значень параметра

a .

3) Задано рівняння $(5^{2x+1} - 25^x - 20)(\sqrt{ax-6} - \sqrt{a-2x}) = 0$, де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть рівняння $5^{2x+1} - 25^x - 20 = 0$.

2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a .

4) Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y – змінні,

α – довільна стала.

1. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.

2. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a .

5) Задано систему нерівностей $\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2(\pi\alpha)+\cos(2\pi\alpha)+x} > \alpha, \end{cases}$ де x – змінна,

α – стала.

1. Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.

2. Визначте множину розв'язків другої нерівності системи залежно від значень α .

3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень α .

б) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x - y| = |x - a|, \\ \lg(y - a) = \lg(4a^2 + x - x^2). \end{cases}$ залежно від

значень параметра a .

Узагальнимо проаналізоване у таблиці 1.7.

Як бачимо зі змісту завдань, підготовка учнів до ЗНО потребує повторення тем з курсу алгебри основної школи, а також систематизації знань учнів з тем, які вивчалися в курсі алгебри та початків аналізу.

Таблиця 1.7.

Результати дослідження

	Тестові завдання	Завдання, відкритої форми з розгорнутою відповіддю
Лінійні рівняння	2017, 2020, 2021	
Квадратні рівняння	2019, 2020	
Метод інтервалів	2016, 2017	
Рівняння і нерівності з модулем	2019	
Ірраціональні рівняння	2017, 2018, 2021	
Тригонометричні рівняння	2016	
Показникові рівняння і нерівності	2017, 2018, 2019	
Логарифмічні рівняння і нерівності	2016, 2018, 2020, 2021	
Системи рівнянь і нерівностей	2016, 2018, 2019, 2020	
Рівняння, нерівності і системи з параметром		2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021

Проаналізувавши завдання, які зустрічалися в ЗНО минулих років, можемо бачити, що найчастіше зустрічаються тестові завдання з тем: «Логарифмічні рівняння і нерівності» та «Системи рівнянь і нерівностей». Особливої уваги потребує тема «Рівняння, нерівності та системи з параметром», яка зустрічається кожного року в завданнях відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Якісна підготовка учнів до ЗНО можлива лише в тому разі, коли існує правильна систематична робота. Задля успішного складання зовнішнього незалежного оцінювання, важливо вивчати різні види рівнянь та нерівностей, оскільки вони перетинаються між собою або витікають одне з одного. Якщо учень не вміє розв'язувати квадратні рівняння, то згодом при розв'язуванні складніших завдань, рівняння, що зводяться до квадратних, йому також будуть не під силу. А тому, своєчасне підґрунтя знань з певної теми, дають змогу старшокласникам перейти до набуття нових знань з впевненістю того, що минулий матеріал був вчасно і якісно засвоєний.

Методичним прийомом організації узагальнюючого повторення учнів з тем «Рівняння», «Нерівності», «Системи» буде присвячений наступний розділ роботи.

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИЧНІ ПРИЙОМИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ З ТЕМИ «РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ, СИСТЕМИ РІВНЯНЬ» В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

2.1. Методика представлення основних понять і фактів про рівняння, нерівності і системи рівнянь в курсі алгебри 7-11 класів в узагальненій формі.

Як підказує досвід, основні поняття і факти, необхідні учням для правильного розв'язування рівнянь, нерівностей і систем доречно представляти у вигляді узагальнюючих таблиць, які містять основну інформацію з теми у зручному для сприйняття вигляді, а саме: схеми, графіки, формули, текстове описання, приклади. Таким чином систематизований навчальний матеріал сприяє швидкому його сприйняттю і має різні форми, які є зручними для учнів з різними активними каналами сприйняття: одним зручніше зрозуміти, читаючи текст, інші краще запам'ятовують символічні та схематичні записи, дехто сприймає метод після розгляду прикладу його застосування. Тому вважаємо за доречне всю інформацію, яка необхідна учням з теми «Рівняння, нерівності, системи» і яка вивчалася протягом кількох років в різних класах і темах, систематизувати у вигляді узагальнюючих таблиць.

Опорні конспекти та схеми складає вчитель для учнів (щоб учні засвоїли подану в ньому інформацію) або учні (тоді вчитель оцінить, наскільки вони зрозуміли прочитаний чи почутий матеріал), або спільними зусиллями вчителя та учнів під час діалогу (для створення атмосфери пошуку, маленького відкриття). Процес навчання учнів є ефективнішим, якщо він ґрунтується не лише на викладанні матеріалу в традиційній формі, але й відображається у стислих конспектах або опорних схемах.

Подані таблиці та схеми можна використовувати на етапі актуалізації опорних знань учнів, для пригадування основних понять теми. Також на етапі

вивчення нового матеріалу, після розгляду головних понять теми, важливо підбити підсумки й це можна зробити у вигляді узагальнюючої таблиці або схеми, для кращого сприйняття та запам'ятовування учбового матеріалу. При розв'язуванні завдань, після засвоєння первинного матеріалу, доречно користуватися такими схемами, щоб учні швидше вирішували завдання і водночас запам'ятовували головне. На уроках узагальнюючого повторення вчителі також часто використовують різноманітні таблиці, ілюстрації, схематичні зображення, діаграми, учбові картки. Представляємо зміст цих таблиць, які складені на основі діючих підручників і навчальних посібників [3, 4, 15, 16, 21, 22, 27, 28, 34, 43, 49]. Оскільки, рівняння і нерівності з однією змінною дуже подібні по своїй суті, тому їх можна об'єднати в одну таблицю, щоб учні наочно одразу бачили та запам'ятовували, що у них подібне, а що відрізняється.

Таблиця 2.1.

Рівняння і нерівності з однією змінною

Рівняння	Нерівності зі змінною
Означення. Рівність із змінною називається рівнянням.	Поняття нерівності зі змінною. Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків: $>$ (більше), $<$ (менше), \geq (більше або дорівнює), \leq (менше або дорівнює), то одержуємо нерівність зі змінною.
У загальному вигляді рівняння розуміється як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргументів, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому рівняння з однією змінною x у загальному вигляді звичайно записують так: $f(x) = g(x)$	У загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») звичайно записується так: $f(x) > g(x)$
Коренем (або розв'язком) рівняння називається значення змінної, що перетворює рівняння на правильну числову рівність.	Розв'язком нерівності називається значення змінної, що перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність.
Розв'язати рівняння (нерівність) – значить знайти всі його корені (розв'язки) або показати, що їх немає.	
Область допустимих значень (ОДЗ)	
Означення. Областю допустимих значень (або областю визначення) рівняння чи нерівності називається спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, що стоять у лівій і правій частинах рівняння або нерівності.	

Для лінійних рівнянь і нерівностей можна запропонувати схему розв'язування, звернувшись до якої учні одразу, будуть розуміти, який повинен бути наступний крок розв'язання.

Таблиця 2.2.

Лінійні рівняння і нерівності

Лінійні рівняння	Лінійні нерівності
Означення. Лінійним рівнянням з однією змінною x називається рівняння вигляду $ax + b = 0$, де a і b – дійсні числа.	Означення. Лінійною нерівністю з однією змінною x називається нерівність вигляду $ax + b > 0$ ($< 0, \geq 0, \leq 0$)
Якщо $a \neq 0$, то лінійне рівняння називається також рівнянням першого степеня.	Якщо $a \neq 0$, то лінійна нерівність називається також нерівність першого степеня.
Схема розв'язування	Схема розв'язування (для випадку > 0)
<p style="text-align: center;">$ax + b = 0$, тоді</p> <pre> graph TD A(ax = -b) -- a = 0 --> B(0 * x = -b) A -- a != 0 --> C(x = -b/a) B -- b = 0 --> D(x - будь-яке число) B -- b != 0 --> E(коренів немає) C --> F(єдиний корінь) </pre> <p style="text-align: center;">$0 \cdot x = 0$</p> <p style="text-align: center;">x – будь-яке число</p> <p style="text-align: center;">нескінченна множина коренів</p>	<p style="text-align: center;">$ax + b > 0$, тоді</p> <pre> graph TD A(ax > -b) -- a > 0 --> B(x > -b/a) A -- a < 0 --> C(x < -b/a) A -- a = 0 --> D(0 * x > -b) D -- b > 0 --> E(x - будь-яке число) D -- b <= 0 --> F(розв'язків немає) </pre>

Для лінійних рівнянь з двома змінними, ми пропонуємо таблицю, у якій розглянуто всі можливі випадки того, як може виглядати таке рівняння, і компактно представлено розв'язки і графік розв'язків лінійних рівнянь з двома змінними.

Таблиця 2.3.

Лінійні рівняння з двома змінними

Рівняння	Значення a, b, c	Розв'язки	Графік розв'язків
$ax + by = c$	$a \neq 0, b \neq 0$	Безліч пар чисел, які знаходяться так: x надають довільного значення i , підставивши його в рівняння замість x , знаходять відповідно значення y .	Пряма виду $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
$ax + by = c$	$a = 0, b \neq 0, c \neq 0$	Безліч пар чисел $(m; \frac{c}{b})$, де m – довільне число.	Пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат у точці $(0; \frac{c}{b})$.
$0 \cdot x + by = c$	$a = 0, b \neq 0, c = 0$	Безліч пар чисел $(m; 0)$, де m – довільне число.	Вісь абсцис.
$0 \cdot x + by = 0$	$a \neq 0, b = 0, c \neq 0$	Безліч пар чисел $(\frac{c}{a}; n)$, де n – довільне число.	Пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $(\frac{c}{a}; 0)$.
$ax + 0 \cdot y = c$	$a \neq 0, b = 0, c = 0$	Безліч пар чисел $(n; 0)$, де n – довільне число.	Вісь ординат.
$0 \cdot x + 0 \cdot y = c$	$a = 0, b = 0, c \neq 0$	Розв'язків немає.	Графік побудувати неможливо.
$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$	$a = b = c = 0$	Безліч пар чисел $(m; n)$, де m і n – довільні числа.	Координатна площина.

На рисунку 2.1. представлено алгоритм послідовних перетворень неповного квадратного рівняння, який дозволяє знайти правильний розв'язок завдання.

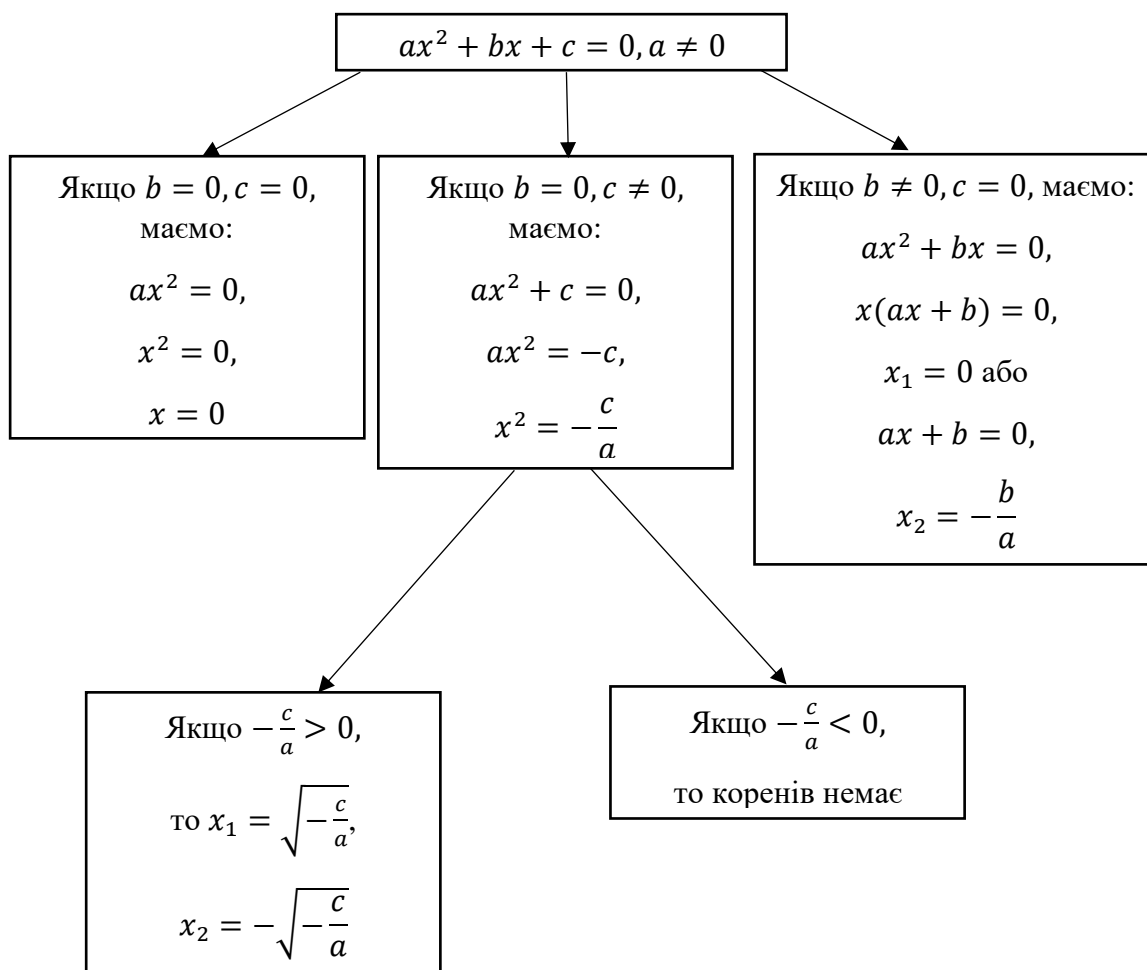


Рис. 2.1. Розв'язки неповних квадратних рівнянь

При розв'язуванні квадратних рівнянь, доречно запропонувати учням, користуватися таблицею 2.4. для вибору формули в залежності від дискримінанта або формулою коренів зведеного та повного квадратних рівнянь, що наведена у таблиці 2.5.

Таблиця 2.4.

Корені квадратного рівняння

Квадратне рівняння	Дискримінант $D = b^2 - 4ac$	Корені рівняння
$ax^2 + bx + c = 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
	$D = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
	$D < 0$	Коренів немає

Таблиця 2.5.


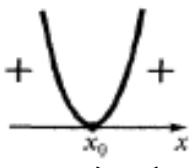
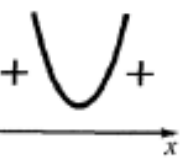
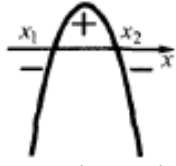
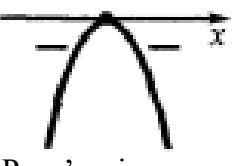
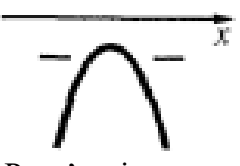
Теорема Вієта

Для зведеного квадратного рівняння	Для повного квадратного рівняння
<p>Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$	<p>Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

У таблиці 2.6. наведено використання графічного методу в залежності від знаку дискримінанту і старшого коефіцієнта.

Таблиця 2.6.

Квадратні нерівності

Означення. Нерівність вигляду $ax^2 + bx + c > 0$ ($< 0, \geq 0, \leq 0$) називається квадратною, якщо $a \neq 0$		
Щоб розв'язати квадратну нерівність, досить знайти корені квадратного тричлена і побудувати ескіз його графіка (параболу). Як відповідь записуються проміжки осі Ox , для яких точки параболи розміщені вище від осі Ox (для випадку > 0) і нижче від осі Ox (для випадку < 0). (Якщо квадратний тричлен має два різних корені x_1 і x_2 , можна також використати метод інтервалів)		
$ax^2 + bx + c > 0$ ($D = b^2 - 4ac$)		
<p>$a > 0$ $D > 0$</p>  <p>$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$</p>	<p>$a > 0$ $D = 0$</p>  <p>$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$</p>	<p>$a > 0$ $D < 0$</p>  <p>$x \in \mathbb{R}$ ($x \in (-\infty; +\infty)$)</p>
<p>$a < 0$ $D > 0$</p>  <p>$x \in (x_1; x_2)$</p>	<p>$a < 0$ $D = 0$</p>  <p>Розв'язків немає</p>	<p>$a < 0$ $D < 0$</p>  <p>Розв'язків немає</p>

У таблиці 2.7. представлено схему розв'язування дробових рівнянь і нерівностей та наведено рівносильні перетворення найпростіших дробових рівнянь і нерівностей з прикладами.

Таблиця 2.7.

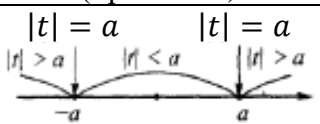
Дробові рівняння і нерівності

Схема розв'язування	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Розв'язування дробових рівнянь</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Розв'язування дробових нерівностей</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;">Використання рівнянь-наслідків</div> <ol style="list-style-type: none"> 1. Зводимо до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 2. Знаходимо корені рівняння $f(x) = 0$ 3. Виконуємо перевірку підстановкою у початкове рівняння 	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;">Використання рівносильних перетворень</div> <ol style="list-style-type: none"> 1. Фіксуємо ОДЗ початкового 2. Зводимо до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ і розв'язуємо ці рівняння (нерівності) на ОДЗ початкового або виконуємо рівносильні перетворення так, щоб увести зручну заміну змінних
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Використання властивостей відповідних функцій</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Використання методу інтервалів</div> <ol style="list-style-type: none"> 1. Переносимо всі члени в один бік 2. Зводимо до спільного знаменника, обов'язково зберігаючи знаменник 3. Розв'язуємо методом інтервалів
Рівносильні перетворення найпростіших дробових рівнянь і нерівностей	
У загальному вигляді	Приклад
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$	$\frac{x^2 - 4}{x^3 - 5x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^3 - 5x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ або } x = -2, \\ x^3 - 5x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1 < 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \text{ або } x < 1$
$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$
$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x > 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \leq 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \text{ або } x \leq 1$

Приклад розв'язування дробової нерівності методом інтервалів
$\frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} \geq 0$ <p>1. ОДЗ: $x \neq 2$.</p> <p>2. Нулі $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} = 0$ при $x = 1$ або $x = 3$.</p> <p>3. Позначаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ в кожному інтервалі.</p>  <p>Відповідь: $x \in [1; 2)$ або $x = 3$.</p>

Таблиці 2.8. - 2.12., супроводжують навчальний матеріал алгебри та початків аналізу протягом вивчення усієї змістової лінії «Рівняння, нерівності та їх системи». Подані нижче таблиці вчитель може використати на різних етапах уроку, зокрема у вигляді презентації на слайдах. Також, можна застосовувати їх на етапі актуалізації опорних знань учнів, задля того, щоб пригадати основні поняття та формули. На уроках застосування знань, умінь та навичок, представлені таблиці можна запропонувати, як алгоритм дій, виконуючи який, учні прийдуть до правильного розв'язку. На уроці узагальнення і систематизації знань, можна скористатися даними таблицями для того, щоб якісно закріпили набуті знання, уміння та навички з певної теми. При підготовці до самостійних робіт, можна користуватися узагальнюючими таблицями, оскільки в них розглянуті деякі приклади типових завдань. Також можна використовувати їх, як зразок для виконання вправ в класній і домашній роботі.

Розв'язування рівнянь і нерівностей із модулями

Способи розв'язування		
<p>За означенням</p> $ a = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0 \\ 0, & \text{якщо } a = 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$	<p>Виходячи з геометричного змісту</p> <p>a – відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = a$ $f(x) = g(x)$ $f(x) > a$ $f(x) < a$ 	<p>За загальною схемою</p> <ol style="list-style-type: none"> Знайти ОДЗ Знайти нулі всіх підмодульних функцій Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на інтервали Знайти розв'язок у кожному інтервалі (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий інтервал)
<p>Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)</p>  <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = a \leftrightarrow (f(x) = a \text{ або } f(x) = -a)$ $f(x) = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \text{ або} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ $f(x) > a \leftrightarrow (f(x) < -a \text{ або } f(x) > a)$ $f(x) < a \leftrightarrow -a < f(x) < a \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}$ <p>Узагальнення</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(x) = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x) \end{cases}$ $f(x) > g(x) \leftrightarrow f(x) < -g(x) \text{ або } f(x) > g(x)$ $f(x) < g(x) \leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ 	<p>Використання спеціальних співвідношень</p> <ol style="list-style-type: none"> $u = u \leftrightarrow u \geq 0$ $u = -u \leftrightarrow u \leq 0$ $u = v \leftrightarrow u^2 = v^2$ $u > v \leftrightarrow u^2 > v^2$ або $u - v > 0 \leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$ знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їхніх квадратів $u + v = u + v \leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$ $u + v = -u - v \leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0 \\ v \leq 0 \end{cases}$ $u + v = u + v \leftrightarrow uv \geq 0$ $u + v = u - v \leftrightarrow uv \leq 0$ $x - a + x - b = b - a \leftrightarrow a \leq x \leq b, \text{ де } a < b$ 	

Ірраціональні рівняння і нерівності

Означення. Ірраціональним рівнянням (нерівністю) називається рівняння (нерівність), що містить змінну під знаком кореня n -го степеня (радикала)	
Схема розв'язування	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Розв'язування ірраціональних</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Розв'язування ірраціональних нерівностей</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Використання рівнянь-наслідків</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Використання рівносильних перетворень</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">У кінці – перевірка підстановкою у початкове рівняння</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">(на ОДЗ заданого)</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Використання властивостей відповідних функцій</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Використання методу інтервалів</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">для нерівностей вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$</div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">Напрямок перетворень Перехід від ірраціональних рівнянь і нерівностей до раціональних шляхом а) піднесення обох частин рівняння або нерівності до одного й того ж самого степеня, б) спеціальних замінів</div>	
Теорема про рівносильність деяких ірраціональних рівнянь (нерівностей)	
Для рівнянь	Для нерівностей
${}^{2k+1}\sqrt{f(x)} = g(x) \leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$	${}^{2k+1}\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$ ${}^{2k+1}\sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow f(x) < g^{2k+1}(x)$
При піднесенні обох частин рівняння (або нерівності) до непарного степеня (зі збереженням знака нерівності) одержуємо рівняння (або нерівність), рівносильне даному	
${}^{2k}\sqrt{f(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$	${}^{2k}\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ ${}^{2k}\sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$

Продовж. табл. 2.9.

Якщо обидві частини рівняння або нерівності невідомі, то при піднесенні обох частин до парного степеня (зі збереженням знака нерівності) одержуємо рівняння або нерівність, яке рівносильне даному (на ОДЗ заданого)

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)}$$

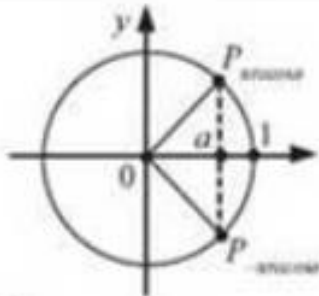
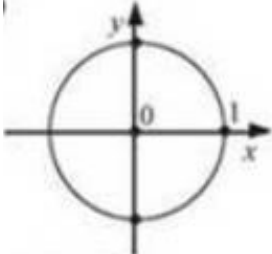
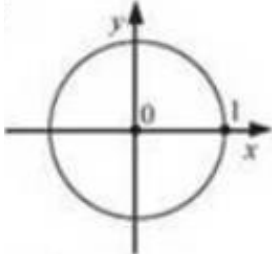
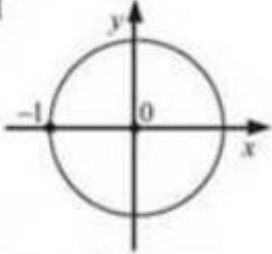
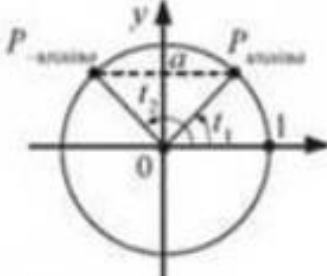
$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

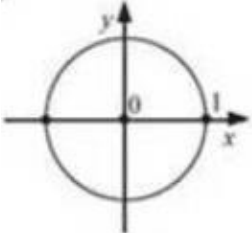
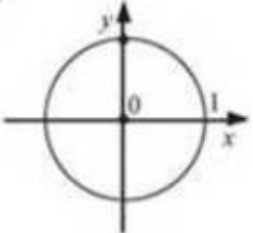
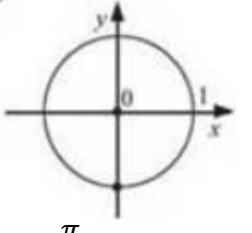
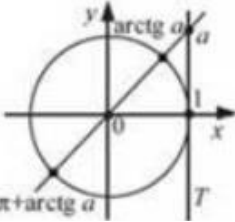
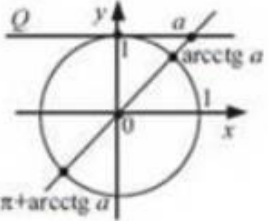
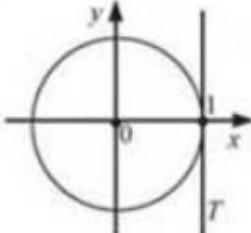
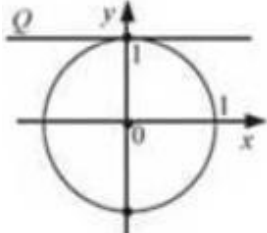
$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Таблиця 2.10.

Тригонометричні рівняння і нерівності

Рівняння $\cos t = a$		
$ a > 1$ Коренів немає, бо $ \cos t \leq 1$	$ a \leq 1$  $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	
Окремі випадки		
$\cos t = 0$  $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos t = 1$  $t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos t = -1$  $t = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Рівняння $\sin t = a$		
$ a > 1$ Коренів немає, бо $ \sin t \leq 1$	$ a \leq 1$  $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	

Продовж. табл. 2.10.

Окремі випадки		
$\sin t = 0$  $t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\sin t = 1$  $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\sin t = -1$  $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Рівняння		
$\operatorname{tg} t = a$  $t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{ctg} t = a$  $t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
Окремі випадки		
$\operatorname{tg} t = 0$  $t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{ctg} t = 0$  $t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	

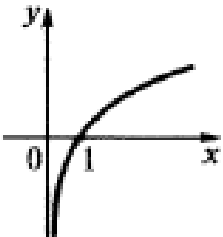
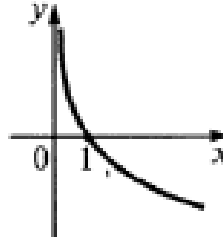
Таблиця 2.11.

**Схема виконання рівносильних перетворень найпростіших
показникових рівнянь і нерівностей**

Рівняння	Нерівності
$a > 0$ $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $a \neq 1$ $f(x) = g(x)$ $a = 1$ x – будь-яке число з ОДЗ	$a > 0$ $a \neq 0$ $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $a > 1$ $f(x) > g(x)$ Знак нерівності не змінюється $0 < a < 1$ $f(x) < g(x)$ Знак нерівності змінюється на протилежний

Таблиця 2.12.

Логарифмічні рівняння і нерівності

Означення. Логарифмічним рівнянням (нерівністю) називається рівняння (нерівність), в якій змінна знаходиться під знаком логарифма		
Опорні співвідношення		
Формули	Графіки функції $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	
Уникайте перетворень, що звужують ОДЗ початкового рівняння чи нерівності!	$a > 1$	$0 < a < 1$
	 <p style="text-align: center;">зростає</p>	 <p style="text-align: center;">спадає</p>
Схема виконання рівносильних перетворень найпростіших логарифмічних рівнянь і нерівностей		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\log_a f(x) = b$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> $a > 0, a \neq 1$ </div> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $f(x) = a^b$ </div> <p style="text-align: center; font-size: small;">(оскільки $a > 0$, то $a^b > 0$ і тому ОДЗ початкового рівняння врахована автоматично)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> $a > 0, a \neq 1$ </div> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ </div> <p style="text-align: center; font-size: small;">або</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> $a > 0, a \neq 1$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin: 10px 0;"> $a > 1$ $0 < a < 1$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin: 0 auto;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center; width: 45%;"> <p style="font-size: small;">Знак нерівності не змінюється і враховується ОДЗ</p> </div> <div style="text-align: center; width: 45%;"> <p style="font-size: small;">Знак нерівності змінюється і враховується ОДЗ</p> </div> </div>

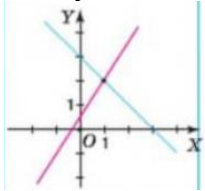
В шкільному курсі математики вивчають певні способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. В таблиці представлено спосіб, план розв'язання і наведено приклад.

Способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними:

- 1) графічний;
- 2) підстановки;
- 3) додавання.

Таблиця 2.13.

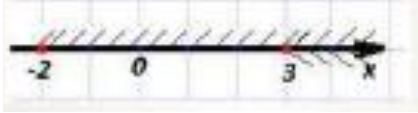
Способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Спосіб	План розв'язування	Приклад
Графічний	1) Побудувати в одній системі координат графік кожного з рівнянь системи; 2) Визначити координати точки перетину цих графіків, якщо це можливо.	$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$ 1) Побудували в одній системі координат графіки рівнянь $x + y = 3$ і $3x - 2y = -1$;  2) Прямі перетинаються в точці $A(1; 2)$. Відповідь: $(1; 2)$.
Підстановки	1) З'ясувати, в якому рівнянні системи та яку змінну зручніше виразити через іншу; 2) В обраному рівнянні виразити обрану «зручну» змінну через іншу; 3) Підставити знайдений вираз в інше рівняння системи; 4) Розв'язати отримане рівняння відносно «зручної» змінної; 5) Підставити знайдений корінь у те рівняння системи, з якого виразили «зручну» змінну через іншу; 6) Розв'язати отримане рівняння відносно іншої змінної; 7) Записати пару чисел, яка є розв'язком системи.	$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$ 1) $x + y = 3$; 2) $y = -x + 3$; 3) $3x - 2(-x + 3) = -1$; $3x + 2x - 6 = -1$; $5x = 5$; $x = 1$; 5) $y = -1 + 3$; $y = 2$. 7) Відповідь: $(1; 2)$.
Додавання	1) З'ясувати, для якої змінної її коефіцієнти в обох рівняннях зручно перетворити на протилежні числа; 2) Для коефіцієнтів «зручної» змінної знайти додаткові множники, які дозволять перетворити ці коефіцієнти на протилежні числа; 3) Відповідно помножити рівняння системи, на ці додаткові множники; 4) Додати отримані рівняння та розв'язати рівняння-суму як рівняння відносно другої змінної; 5) Підставити знайдений корінь в одне з рівнянь системи; 6) Розв'язати отримане рівняння як рівняння відносно «зручної» змінної; 7) Записати пару чисел, яка є розв'язком системи.	$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$ 1) для y ; 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases} \cdot 2$ 3) $\begin{cases} 2x + 2y = 6, \\ 3x - 2y = -1; \end{cases}$ 4) $\frac{\quad}{5x = 5}$; $x = 1$; 5) $1 + y = 3$; $y = 2$. 7) Відповідь: $(1; 2)$.

Зразок виконання системи нерівностей подано в таблиці 2.14.

Таблиця 2.14.

Розв'язок системи нерівностей

<p>Як знайти розв'язок системи нерівностей?</p> <p>Розв'язок системи нерівностей – це спільна частина числових проміжків, що є розв'язками кожної з нерівностей їх системи, яку називають їх перерізом і позначають за допомогою знака \cap.</p>	<p>Приклад: Розв'яжемо систему нерівностей:</p> $\begin{cases} 2x - 6 > 0 \\ 0,5x + 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > 6 \\ 0,5x > -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x > -2 \end{cases}$ <p>Розв'язок кожної з нерівностей системи є числовим проміжком, відповідно $(3; +\infty)$ і $(-2; +\infty)$. Запис $(3; +\infty) \cap (-2; +\infty)$ означає переріз, тобто спільну частину даних проміжків.</p>  <p>Розв'язком нерівності є проміжок $(3; +\infty)$.</p>
--	---

У представлених таблицях логічно упорядковано й систематизовано той мінімум основних і додаткових відомостей зі шкільного курсу алгебри та початків аналізу тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей», який дає змогу розв'язувати найскладніші алгебраїчні завдання, що пропонуються при підготовці до ЗНО.

Крім теоретичного матеріалу та прикладів його використання, наведених у серії таблиць було розглянуто приклади розв'язування алгебраїчних завдань. Особливу увагу приділено виконанню тотожних перетворень виразів і розв'язуванню рівнянь та нерівностей. Для різних типів рівнянь та нерівностей виділяються «ключові» ідеї та методи їх розв'язування у вигляді загальних схем або приписів, порад алгоритмічного типу. Ці загальні схеми особливо важливі для систематизації знань і умінь у процесі підготовки до ЗНО.

2.2. Методичні прийоми систематизації знань старшокласників з тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей» на етапі узагальнюючого повторення.

2.2.1. Системи вправ на повторення основних фактів і формул пов'язаних з рівняннями та нерівностями.

При підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання, під час повторення тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей», на етапі узагальнюючого повторення, доречно запропонувати учням, завдання, подібні до тих, які зустрічалися у ЗНО в минулих роках. Саме тому було підібрано систему вправ на повторення різноманітних завдань з поданих тем [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12,14, 15, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 47, 48, 49].

1) Лінійні рівняння. Лінійні нерівності.

Розв'яжіть рівняння $0,5(3x - 4) = \frac{x+1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{7}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	6

Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-3}{3} = \frac{x+1}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
1,2	5	12	2,4	0,4

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $0,5(x - 4) = 1,5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4]$	$(-4; 0]$	$(0; 4]$	$(4; 8]$	$(8; +\infty)$

Розв'яжіть рівняння $2(x + 5) - 3(4 - x) = 3$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{5}$	-1	1	-5

Яке з чисел є коренем рівняння $3x + 5 = 1$?

А	Б	В	Г
$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-1\frac{1}{5}$

Яке з чисел є коренем рівняння $4x + 2 = 10$?

А	Б	В	Г
1	-2	2	-3

Знайдіть корінь рівняння $\frac{x+2}{5} + \frac{x-2}{10} = \frac{1}{2}$

А	Б	В	Г
0	1	2	5

Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$.

А	Б	В	Г
12	36	-6	-1

Розв'яжіть нерівність $-\frac{x}{5} > 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -25)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 25)$	$(-1; +\infty)$	$(-25; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $10 - 3x > 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; 2)$

Розв'яжіть нерівність $0,2x - 54 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 27)$	$(270; +\infty)$	$(-\infty; 2,7)$	$(-\infty; 270)$	$(10,8; +\infty)$

Чи є число 4 коренем рівняння?

а) $4x = 12$; б) $\frac{1}{4}x = 1$; в) $0x = 0$; г) $0x = 4$.

Чи є число -5 коренем рівняння?

а) $x + 3 = 2$; б) $2 - x = 7$; в) $\frac{x}{5} = 1$; г) $4x = 20$.

Чи є число 2 розв'язком рівняння?

а) $x + 7 = 9$; б) $5x = 12$; в) $x - 8 = -6$; г) $\frac{x}{4} = 2$.

Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $25 + x = 37$; | 2) $x - 12 = 23$; | 3) $24 - x = 18$; |
| 4) $3,7 - x = 1,9$; | 5) $1 = \frac{2}{3} + x$; | 6) $13 = 74 - x$; |
| 7) $6x = 30$; | 8) $5y = 0$; | 9) $4z = -8$; |
| 10) $2x + 3 = 19$; | 11) $3y - 4 = 1$; | 12) $1 - 3x = 25$; |
| 13) $5x + 3 = 18$; | 14) $1,7x - 2 = 3,1$; | 15) $4 - 4y = 6$; |
| 16) $-1,2y = 0,03$; | 17) $-4(x + 8) = -108$; | 18) $5(2y + 1) = -1$; |
| 19) $-12,6 = 6(x + 2,5)$; | 20) $\frac{z}{1,5} = -7$; | 21) $\frac{0,7x+1}{0,5} = 4$; |
| 22) $6 + 3z = 15$; | 23) $2x - 11 = -3$; | 24) $7 - 6x = 10$; |
| 25) $4(2x + 3) = -4$; | 26) $-2(3 + y) = 10,06$; | 27) $\frac{5z+4}{3} = -17$; |
| 28) $-\frac{2}{3}x = 6$; | 29) $\frac{4}{7}x = -\frac{16}{21}$; | 30) $\frac{x-1}{7} = 3$; |
| 31) $\frac{5}{9}x = 1$; | 32) $-3x = \frac{6}{7}$; | 33) $-1,4x = -2,1$; |
| 34) $-\frac{1}{6}x = 6$; | 35) $-6x = \frac{1}{3}$; | 36) $0,1x = -2,75$; |

37) $\frac{1}{3}x = 12;$

38) $\frac{5}{7}x = -\frac{10}{49};$

39) $\frac{2}{3}x = 5;$

40) $-\frac{5}{7}y = 1;$

41) $1 - \frac{3}{4}x = \frac{5}{8};$

42) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 15.$

43) $4,7x - 2 = 4,5x + 3;$

44) $2x - 3 - (3x - 2) = -8;$

45) $10(2x - 7) - 5(4x - 2) = -60;$

46) $3(5x - 4) - (15x - 2) = 9;$

47) $\frac{3x+1}{7} + \frac{2x+1}{5} = 2;$

48) $\frac{2x+1}{3} + \frac{7-x}{6} = \frac{5x-3}{2}.$

Для даного рівняння заповніть таблицю.

Лінійне рівняння із двома змінними	$x - y + 7 = 0$	$2x + y - 6 = 0$	$x - 2y + 10 = 0$
виразити y через x			
виразити x через y			

У рівнянні $4x - 2y + 5 = 0$ виразіть змінну:

а) y через змінну x

б) x через змінну y

Знайдіть два будь-яких розв'язки цього рівняння.

Виразіть:

а) змінну y через змінну x з рівняння $7x - y = 18;$

б) змінну x через змінну y з рівняння $3x + 9y = 0;$

в) змінну y через змінну x з рівняння $13x - 2y = 6;$

г) змінну x через змінну y з рівняння $8x + 15y = 24.$

2) Квадратні рівняння. Квадратні нерівності.

Добуток коренів рівняння $x^2 - 12x + 20 = 0$ дорівнює:

А	Б	В	Г
1	20	3	12

Сума коренів рівняння $x^2 + 2x - 15 = 0$ дорівнює:

А	Б	В	Г
5	2	-2	-5

Рівняння $x^2 + 6x - 7 = 0$ має корені:

А	Б	В	Г
1 і 7	1 і 6	1 і -7	-1 і 7

Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x - 8 = 0$.

А	Б	В	Г
1; 8	7; 8	-8; 1	-1; 8

Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

А	Б	В	Г
1; 8	7; 8	-8; 1	-1; 8

Розв'яжіть рівняння $3x^2 + x - 4 = 0$.

А	Б	В	Г
3; -4	-3; 4	$-1; \frac{4}{3}$	$1; -\frac{4}{3}$

Розв'яжіть рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$.

А	Б	В	Г
3; 5	-3; -5	-3; 5	3; -5

Обчисліть добуток коренів рівняння $x^2 + 6x - 55 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
-55	55	-6	6	-49

Розв'яжіть рівняння $x^2 + 6x - 40 = 0$ за теоремою Вієта.

А	Б	В	Г
5; -8	-5; 8	4; -10	-4; 10

Розв'яжіть рівняння $x(x + 2) = 8$.

А	Б	В	Г
-8; 1	8; -1	-2; 4	2; -4

Розв'яжіть рівняння $2x(x + 2) = 5(x + 2)$.

А	Б	В	Г	Д
-2,5; 2	-2	2,5	-2; 0,4	-2; 2,5

Установіть відповідність між рівняннями та їх коренями.

- | | |
|--|-----------|
| 1) $x^2 - 4 = 0$; | А) -2, 6; |
| 2) $x^2 - 4x = 0$; | Б) 0, 2; |
| 3) $x^2 - 4x - 12 = 0$; | В) -2, 2; |
| 4) $\frac{x^2 - 4x - 12}{x - 6} = 0$. | Г) 0, 4; |
| | Д) -2. |

Знайдіть корені рівняння:

1) $10x = 3x^2 + 3$;

2) $9y + 2 = 5y^2$;

3) $9x^2 + 4 = 12x$;

4) $4y^2 = 20y - 25$.

Розв'яжіть квадратне рівняння за теоремою Вієта:

1) $x^2 + 14x - 15 = 0$;

2) $x^2 - 9x - 10 = 0$;

3) $x^2 - 6x - 40 = 0$;

4) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 + 31x - 28 = 0$;

2) $3x^2 + 20x + 12 = 0$;

3) $3x^2 + 53x - 18 = 0$;

4) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

5) $3x^2 + 22x - 16 = 0$;

6) $x^2 - 10x - 24 = 0$;

7) $x^2 - 16x - 161 = 0$;

8) $4x^2 + 73x + 18 = 0$;

9) $x^2 - 12x + 36 = 0$;

10) $x^2 - x - 56 = 0$;

11) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

12) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

13) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

14) $x^2 + 4x - 12 = 0$;

15) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

16) $x^2 - 3x + 4 = 0$;

17) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

18) $x^2 - 4x - 21 = 0$;

19) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

20) $2x^2 + x - 1 = 0$;

21) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;

22) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;

23) $2x^2 - 3x + 2 = 0$;

24) $7x^2 - 6x - 1 = 0$;

25) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

26) $x^2 + 5x + 4 = 0$;

27) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

28) $x^2 - 2x + 6 = 0$;

29) $x^2 - 8x + 16 = 0$;

30) $x^2 - 10x + 21 = 0$;

31) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;

32) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;

33) $2x^2 + x - 3 = 0$;

34) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

35) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

36) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

37) $x^2 - 4x - 21 = 0$;

38) $x^2 + x - 56 = 0$;

39) $x^2 - 6x - 7 = 0$;

40) $x^2 - 8x + 12 = 0$;

41) $x^2 + 7x + 6 = 0$;

42) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;

43) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;

44) $2x^2 - x - 6 = 0$;

45) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;

46) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;

47) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;

48) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;

49) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;

50) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;

51) $x^2 - 4x + 1 = 0$;

52) $2x^2 - x - 4 = 0$;

53) $x^2 - 8x + 20 = 0$;

54) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

55) $x^2 + 12x - 13 = 0$;

56) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

57) $x^2 - x - 72 = 0$;

- 58) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; 59) $2x^2 - 7x - 4 = 0$; 60) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
 61) $-2x^2 + x + 15 = 0$; 62) $6x^2 + 7x - 5 = 0$; 63) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
 64) $x^2 - 6x + 11 = 0$; 65) $-x^2 - 8x + 12 = 0$; 66) $25c^2 + 15c - 4 = 0$;
 67) $2x^2 + 7x = 4$; 68) $x^2 - 4x = 2 - 3x$; 69) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
 70) $x^2 - 4x = 4x - 7$; 71) $6x^2 - 5x - 6 = 0$; 72) $x^2 - 2x - 1 = 0$;
 73) $7x^2 - 18x + 8 = 0$; 74) $x^2 + x - 90 = 0$; 75) $x^2 + 21x + 90 = 0$;
 76) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; 77) $x^2 + 1,2x + 0,2 = 0$; 78) $x^2 + 0,5x - 1,5 = 0$;
 78) $x^2 - 6x + 6 = 0$; 79) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; 80) $4x^2 - 16x + 7 = 0$;
 81) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 82) $2x^2 + 7x - 4 = 0$; 83) $2x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$;
 84) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$; 85) $3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$; 86) $5x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$;
 87) $x^2 - 7x - 18 = 0$; 88) $x^2 + 7x - 18 = 0$; 89) $x^2 + x - 6 = 0$;
 90) $4x^2 + 3x - 10 = 0$; 91) $x^2 + 3x - 130 = 0$; 92) $x^2 - 7x - 120 = 0$;
 93) $4x^2 - 4x - 3 = 0$; 94) $4x^2 - 4x - 15 = 0$; 95) $9x^2 - 12x - 5 = 0$;
 96) $9z^2 - 24z - 20 = 0$; 97) $2y^2 - 7y + 3 = 0$; 98) $9y^2 - 13y + 4 = 0$;
 99) $2x^2 - 7x - 30 = 0$; 100) $x^2 - x - 42 = 0$; 101) $5z^2 - 8z + 3 = 0$;
 102) $4x^2 + 3x = 1$; 103) $x^2 = 5x - 4$; 104) $x^2 - 2x = 3$;
 105) $x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} = 0$; 106) $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$. 107) $x^2 - x - 3 = 0$
 108) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 109) $x^2 - 6x - 7 = 0$; 110) $x^2 - 6x + 9 = 0$;
 111) $16x^2 - 24x + 27 = 0$; 112) $4x^2 - 19x + 12 = 0$;
 113) $5x(x - 4) + 1 = x^2 - 16x$; 114) $(y - 1)(y + 3) = y + 3$;
 115) $2z(z - 2) = z^2 + 2(z - 4)$; 116) $(x + 4)(x + 2) - 4 = x$;
 117) $(3x - 1)(x + 2) = 20$; 118) $(x - 4)(4x - 3) + 3 = 0$;
 119) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 12x$; 120) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 = 25$;
 121) $x^2 - 3x + 0,81 = 0$; 122) $x^2 - 2x + 0,36 = 0$;
 123) $7(x + 1) = 5x^2 + 3x + 7$; 124) $8x^2 + 3(x + 5) = 15 - 2x$;
 125) $(x - 1)(x + 1) = 2(x - 1)$; 126) $(x - 3)(x + 3) = 2x + 6$;

$$127) 3x^2 + 4 = 4x + 2(x^2 - 2x + 4); \quad 128) (x + 1)(x + 3) + 8x = 5x^2 + 3;$$

$$129) 6x = 37 - (3x - 1)^2; \quad 130) -x^2 + 16 + 2x = (4 + 3x)^2;$$

$$131) (x - 3)(x + 3) = 7x - 19; \quad 132) (2x + 7)(5 - 2x) = 35 - 5x^2.$$

Не розв'язуючи квадратного рівняння $x^2 - 7x + 5 = 0$, знайдіть:

а) $x_1^2 + x_2^2$;

б) $x_1^3 + x_2^3$.

Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

$$1) (x + 1)(x - 2) = 4; \quad 2) 8x = (x - 4)(x + 4);$$

$$3) (x + 2)^2 - 13 = 3(x - 1); \quad 4) 4x^2 - 5 = 2x(1 + 3x);$$

$$5) (x + 3)^2 - 6 = 8 + 10x; \quad 6) 4(x + 8) = (x - 4)(x + 2);$$

$$7) 2(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 8; \quad 8) 3(x - 1)(x + 1) + 11 = 5(2 + x);$$

$$9) (x - 4)(x + 1) = x - 7; \quad 10) 7x^2 - 3 = x(x - 11) + 1;$$

$$11) 2(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 1; \quad 12) 4(x - 2)(x + 2) + 5 = 7(x - 2);$$

Розв'яжіть рівняння попередньо звівши їх до вигляду $ax^2 + c = 0$:

$$1) x(x - 15) = 3(108 - 5x); \quad 2) (x - 2)(x + 2) = 2x^2 - 13;$$

$$3) (x - 3)^2 = 25 - 6x; \quad 4) (2x + 1)(x - 2) = 16 - 3x.$$

3) Цілі і дробові нерівності, які розв'язуються методом інтервалів.

Розв'яжіть нерівність $x + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 3)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2)$ $\cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; 3)$ $\cup (3; +\infty)$	$(-2; 3)$ $\cup (3; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2+64}{x-5} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; 8)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$

Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x-5} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5)$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; 3]$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; 3]$

Розв'яжіть нерівність $\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$

Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-6)(x+2)^2}{x-3} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-2\} \cup (3; 6]$	$(-\infty; -2] \cup (3; 6]$	$[-2; 6]$	$(-\infty; 6]$	$(-\infty; 3) \cup (3; 6]$

Розв'яжіть нерівність $(x+4)(x-7) > 3(x-7)$.

А	Б	В	Г	Д
$(7; +\infty)$	$(-1; 7)$	$(-1; 7) \cup (7; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $2x \geq x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$[0; 2]$	$(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$	$[-2; 0]$	$(-\infty; 2]$

Розв'яжіть нерівність $(x + 4)^2 \leq 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 8]$	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 4]$	$[-8; 8]$	$[-8; 0]$

Розв'яжіть нерівність $(x + 4)(x - 8) > 3(x - 8)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$	$(-1; 8)$	$(-1; 8) \cup (8; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(8; +\infty)$

Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\frac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0$.

Знайдіть кількість усіх цілих розв'язків нерівності $\frac{x^2-x-12}{(x+1)^2} \leq 0$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2+11x+30}{x^2+3x-10} < 0$. У відповідь запишіть найменше ціле число, що задовольняє цю нерівність. Якщо такого числа немає, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x} \geq 1$. У відповіді запишіть суму всіх цілих її розв'язків.

Розв'яжіть нерівність $(18 + 2x)^2 \cdot (x^2 + 8x + 15) \leq 0$. У відповіді запишіть суму всіх цілих її розв'язків.

4) Рівняння і нерівності з модулем.

Яке з наведених чисел є коренем рівняння $2|x| = 2$?

А	Б	В	Г	Д
$x = 4$	$x = 2$	$x = 0$	$x = -1$	$x = -2$

Укажіть суму коренів рівняння $|x - 1| = 6$.

А	Б	В	Г	Д
-2	0	2	7	12

Укажіть корінь рівняння $|x^2 - 6x| = 9$, який належить проміжку $(-2; 1]$.

А	Б	В	Г	Д
$3 - 3\sqrt{2}$	$3 - \sqrt{2}$	1	2	$4 - 2\sqrt{2}$

Розв'яжіть рівняння:

- 1) $|x| + 6 = 13$;
- 2) $|x| - 7 = -12$;
- 3) $7|x| - 3 = 0$;
- 4) $|x - 5| = 4$;
- 5) $|9 + x| = 0$;
- 6) $|x - 4| = -2$;
- 7) $|3x + 4| = 2$;
- 8) $|2x + 1| + 13 = 14$;
- 9) $||x| - 3| = -5$;
- 10) $|x| - 8 = -5$;
- 11) $|x| + 5 = 2$;
- 12) $|x + 12| = 3$;
- 13) $|8 - 0,2x| = 12$;
- 14) $||x| - 2| = 2$;
- 15) $|x| + 3x = 12$;
- 16) $|x| - 4x = 9$;
- 17) $||x| - 1| = |x - 1|$;
- 18) $2x - |x| = -1$;
- 19) $||x| - 2| = |x + 2|$;
- 20) $|x| + |x - 2| = 0$;
- 21) $|10x - 7| - 32 = -16$;
- 22) $2(x - 5) - 6|x| = -18$;
- 23) $7|x| - 3(x + 2) = -10$;
- 24) $|x - 1| + |x + 1| = 0$;
- 25) $|x - 4| + |2x - 8| = 0$;
- 26) $|x - 3| + |6 - 2x| = 0$.

Розв'яжіть рівняння і зробіть перевірку.

- 1) $|x| + 5 = 12$;
- 2) $|x| - 8 = -3$;
- 3) $2|x| + 3 = 25$;
- 4) $|x + 4| = 0$;
- 5) $|x - 2| = 12$;
- 6) $|x - 1| + 7 = 3$;
- 7) $|2x - 3| = 5$;
- 8) $|2x| - 3 = 5$;
- 9) $2|x - 3| = 5$.

Розв'яжіть рівняння $||2x - 1| - 3| = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

5) Ірраціональні рівняння і нерівності.

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{1-x} = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-20; -10)$	$(-10; -5)$	$(-5; 5)$	$(5; 10)$	$(10; 20)$

Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 9)\sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0$. У відповідь запишіть суму коренів.

Розв'яжіть рівняння $x - 5 + \sqrt{x^2 - 14x + 13} = 0$. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх добуток.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1} = \sqrt{3}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповіді зазначте добуток усіх коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповіді запишіть число 100.

6) Тригонометричні рівняння і нерівності.

Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	інша відповідь

Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}(3x) = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Розв'яжіть рівняння $2\sin x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $2\sin x = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$

Укажіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$

Укажіть нерівність, що виконується для $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

А	Б	В	Г
$1 - \sin^2 \alpha < 0$	$\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0$	$1 - \cos^2 \alpha < 0$	$\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha < 0$

Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\operatorname{tg} x = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх коренів.

Розв'яжіть рівняння $\frac{2 \cos x + 1}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} = 0$. У відповідь запишіть кількість усіх його коренів. Якщо рівняння має безліч коренів, то у відповідь запишіть число 100.

7) Показникові рівняння і нерівності.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$

Розв'яжіть рівняння: $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
рівняння не має коренів	-1	-0,5	0,5	1

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^x = \frac{1}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-6; -4]$	$(-4; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 2]$	$(2; 4]$

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^x = \frac{1}{27}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]$	$(-5; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 2]$	$(2; +\infty)$

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $5^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$?

А	Б	В	Г	Д
$(-3; -2]$	$(-2; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 3]$

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^x = 30$?

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)	(5; 11)

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $3^{x+4} = 27$?

А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $3^x \cdot 4^x = \frac{1}{144}$.

А	Б	В	Г	Д
$[-25; -5)$	$[-5; -1)$	$[-1; -1)$	$[1; 5)$	$[5; 25)$

Розв'яжіть рівняння $4^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	32

Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \frac{1}{25}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5]$	$(-\infty; 2]$	$(0; 2]$	$[2; +\infty)$	$[5; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(3; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $10^{x+1} > 0,01$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; -2)$	$(-3; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(1; +\infty)$

Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$	$(-\infty; -3)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

Розв'яжіть нерівність $2 \cdot (0,3)^x < 0,18$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 0,3)$	$(0,3; +\infty)$	$(0; 2)$

Розв'яжіть нерівність $6^x < \frac{1}{36}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$	$(-\infty; -2)$	$\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

Розв'яжіть нерівність $2^x \leq 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; \log_2 3]$	$(0; \log_2 3]$	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$	$(-\infty; \log_3 2]$	$[\log_2 3; +\infty)$

Розв'яжіть рівняння $3^x \cdot 4^x = (12^{x+1})^5$.

Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 8^{x-5}$. У відповідь запишіть суму всіх цілих розв'язків цієї нерівності. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0$. Якщо нерівність має цілі розв'язки, то вкажіть найбільший з них. Якщо нерівність має розв'язки, але вказати найбільший цілий розв'язок неможливо, то у відповідь запишіть число 50. Якщо нерівність не має розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'яжіть нерівність $\frac{10^x - 16 \cdot 5^x}{x+2} \geq 0$. У відповідь запишіть суму всіх цілих розв'язків нерівності на проміжку $[-3; 7]$.

8) Логарифмічні рівняння і нерівності.

Розв'яжіть рівняння $\log_3 x = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	3	-1	-3	$-\frac{1}{3}$

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,1} 10 < \log_{0,1} x$.

А	Б	В	Г	Д
$(10; +\infty)$	$(0; 10)$	$(0,1; 10)$	$(-10; 0)$	$(-\infty; 10)$

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} 5 < \log_{0,5} x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; 0)$	$(0; 5)$	$(5; +\infty)$	$(0,5; 5)$	$(-\infty; 5)$

Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{5}} x > 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; \frac{1}{25})$	$(\frac{1}{25}; +\infty)$	$(0; \frac{1}{25})$	$(10; +\infty)$	$(-\infty; \frac{1}{10})$

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x - 1) > 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 1,25)$	$(2; +\infty)$	$(1,25; +\infty)$	$(0; 0,25)$	$(-\infty; 1,25)$

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2]$	$(0,4; 2]$	$(0; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$(0; 2]$

Розв'яжіть нерівність $3 + \log_2 x \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[\frac{1}{8}; +\infty)$	$(0; \frac{1}{8}]$	$(-\infty; \frac{1}{8}]$	$[8; +\infty)$	$-6; +\infty)$

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\log_3 x = 2$?

А	Б	В	Г	Д
$(-4; -1]$	$(1; 2]$	$(2; 5]$	$(5; 8]$	$(8; 11]$

Розв'яжіть рівняння $\log_6(x - 3) + \log_6(x - 8) = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

Розв'яжіть рівняння $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$. Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

Розв'яжіть рівняння $\log_4 x \cdot \left(\log_4 x + \log_4 \frac{1}{16}\right) = 3$. Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповіді їхню суму.

Розв'яжіть рівняння $|3 \lg x + 1| - |\lg x - 3| = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть суму всіх коренів.

Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню суму. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2^{\log_2(-2x)} - 15 < 0$. У відповіді запишіть суму всіх цілих розв'язків цієї нерівності.

Розв'яжіть нерівність $\lg \frac{4}{2x-3} \geq 0$. У відповіді запишіть найбільший розв'язок цієї нерівності. Якщо найбільший розв'язок нерівності не існує, то у відповіді запишіть число 100.

Знайдіть кількість усіх цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 6x) \geq -2$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

9) Системи рівнянь і нерівностей.

Скільки всього розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(-2; 1)	(2; -1)	(6; 4)	(8; -4)

Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 15, \\ 2x + 3y = 10. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(6; 2)	(3; -4)	(5; 0)	(0; -1,5)

Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x - 2y = 3, \\ 2x + 3y = -4,5. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(6; 2)	(3; -4)	(5; 0)	(0; -1,5)

Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x + 3y = 18. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(6; 2)	(3; -4)	(5; 0)	(0; -1,5)

Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(3; 3)	(2; 2)	(2; 1)	(-1; 5)

Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ 2x - y + 1 = 0. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(2; 2)	(1; 3)	(-1; 5)	(4; 0)

Укажіть пару чисел, що є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases} ?$

А	Б	В	Г
(4; 3)	(-4; 3)	(-4; -3)	(4; -3)

Знайдіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8. \end{cases}$

А	Б	В	Г
(11; 3)	(3; 11)	(-11; 3)	(-3; 11)

Знайдіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 10. \end{cases}$

А	Б	В	Г
(-1; -1)	(5; 5)	(1; 1)	(-5; -5)

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 4y = 11, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$

А	Б	В	Г
(3; 1)	(1; 3)	(1; 2)	(2; 1)

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 15x + 2y = 7, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$

А	Б	В	Г
(3; -19)	(1; -4)	(-5; 41)	(-1; 11)

Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ x + 2y = -5. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$

обчисліть суму $x_0 + y_0$.

А	Б	В	Г	Д
-2	-1	1	2	-4

Розв'яжіть систему $\begin{cases} 4y = 6x, \\ x - y = 12. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок цієї системи, то

$x_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-24	36	4,8	7,2	-36

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3y + 2^x = -13, \\ 2^x - y = 15. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок цієї

системи, то $x_0 + y_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-4	-3	1	5	15

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку

$(x_0; y_0)$ системи знайдіть суму $(x_0 + y_0)$.

А	Б	В	Г	Д
-18	3	4	8	12

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3\sqrt{x} = 12, \\ x - 2y = 26. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку

$(x_0; y_0)$ системи обчисліть суму $x_0 + y_0$.

А	Б	В	Г	Д
11	21	-7	-10	-14

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 10x - 4y = 26, \\ 6x + 4y = 6. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ обчисліть добуток $x_0 \cdot y_0$.

А	Б	В	Г	Д
-3	-6	4	6	3

Розв'язком яких систем є пара чисел $(-5; 2)$?

А	Б	В
$\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$	$\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} 5x - y = 6,2, \\ 0,8x + 3y = 13; \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$
- 12) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} 5a - 4b = 1, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$
- 14) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8; \end{cases}$
- 15) $\begin{cases} 5x + 2y = 15, \\ 8x + 3y = 20; \end{cases}$
- 16) $\begin{cases} 7x + 4y = 5, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$
- 17) $\begin{cases} 8p - 5q = -11, \\ 5p - 4q = -6; \end{cases}$
- 18) $\begin{cases} 6u - 5v = -38, \\ 2u + 7v = 22; \end{cases}$
- 19) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$
- 20) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$
- 21) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$
- 22) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$
- 23) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$
- 24) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55; \end{cases}$
- 25) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases}$
- 26) $\begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$
- 27) $\begin{cases} 6x - 4z = 5, \\ 4x - 1,5z = 1; \end{cases}$
- 28) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21; \end{cases}$
- 29) $\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8, \\ 1,2x - 0,5y = 7; \end{cases}$
- 30) $\begin{cases} 1,4x - 2,5y = 39, \\ 0,8x - 1,3y = 21; \end{cases}$

$$\begin{array}{lll}
31) \begin{cases} x^2 - y^2 = 80, \\ x + y = 10; \end{cases} & 32) \begin{cases} |x - y| = 5, \\ x + y = 8; \end{cases} & 33) \begin{cases} \frac{4}{5}x - y = 7, \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y = 11; \end{cases} \\
34) \begin{cases} \frac{3}{7}x - z = 15, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{7}z = 14; \end{cases} & 35) \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y-x}{5} = 6; \end{cases} & 36) \begin{cases} \frac{x-y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y-x}{3} = 9. \end{cases} \\
37) \begin{cases} 2x - 3(x - y) = 7, \\ 5y - 2(x - 2y) = 23; \end{cases} & 38) \begin{cases} 4y - 5(y - x) = 8, \\ 2(3x - y) + 7y = -14; \end{cases} \\
39) \begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y - 5, \\ \frac{5y-7}{6} + \frac{4x-3}{2} = 20 - 5x; \end{cases} & 40) \begin{cases} x + 4(2y - (x - 5)) = 36, \\ 7\left(\frac{3}{3}(y + 2x) - \frac{1}{5}y\right) = 4x; \end{cases} \\
41) \begin{cases} \frac{5+y}{3} - \frac{3x+4y}{4} = 3x + 1, \\ \frac{7x+2}{3} + \frac{4x-3}{2} + \frac{11}{6} = 1 - 3x; \end{cases} & 42) \begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} - 3y = -5, \\ \frac{5y-7}{2} - \frac{3-4x}{6} - 18 = -5x. \end{cases}
\end{array}$$

Розв'яжіть графічно систему лінійних рівнянь.

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases} & 2) \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases} & 3) \begin{cases} x - y = -2, \\ x + 3y = -10; \end{cases} \\
4) \begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - y = 1; \end{cases} & 5) \begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases} & 6) \begin{cases} x - y = 0, \\ 4x - y = 6; \end{cases} \\
7) \begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x - y = 5; \end{cases} & 8) \begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases} & 9) \begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 2y = 12; \end{cases} \\
10) \begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13; \end{cases} & 11) \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 6, \\ 4x + y = 12; \end{cases} & 12) \begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - 3y = 6; \end{cases} \\
13) \begin{cases} 5x - 2y = -3, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases} & 14) \begin{cases} -3x + 5y = 1, \\ 4x - y = 10. \end{cases}
\end{array}$$

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^{2y-x} = 32, \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -2. \end{cases}$ Запишіть у відповідь

добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0 \cdot y_0)$ є розв'язком вказаної системи рівнянь.

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} (0,5)^{1-2x} > (0,5)^{8+x}, \\ \frac{4}{x-5} < 0. \end{cases}$ У відповіді

запишіть кількість усіх цілих розв'язків цієї системи. Якщо система має безліч розв'язків, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x+8}{2y-5} = 2. \end{cases}$ Запишіть у відповідь добуток

$x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком цієї системи рівнянь.

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x-2y} = \frac{1}{3}, \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку

$(x_0; y_0)$ системи обчисліть добуток $x_0 \cdot y_0$.

Розв'яжіть систему $\begin{cases} 5 \cos \frac{\pi y}{2} = x^2 - 8x + 21, \\ y + 5x - 4 = 0. \end{cases}$ Якщо система має єдиний

розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь запишіть суму $x_0 + y_0$; якщо система має більше, ніж один розв'язок, то у відповідь запишіть кількість усіх розв'язків.

Розв'яжіть систему $\begin{cases} y + x = 3, \\ x^2 + 4 = 8y. \end{cases}$ Якщо пара $(x_0; y_0)$ є єдиним розв'язком

цієї системи рівнянь, то запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$. Якщо пари $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$ є розв'язками цієї системи рівнянь, то запишіть у відповідь найменший із добутків $x_1 \cdot y_1$ та $x_2 \cdot y_2$.

Розв'яжіть систему $\begin{cases} \sqrt{y - 7x + 33} = x, \\ 4x - y = 5. \end{cases}$ Якщо система має єдиний

розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповіді запишіть добуток $x_0 \cdot y_0$. Якщо система має два розв'язки $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, то у відповіді запишіть найбільший відповідь з добутків $x_1 \cdot y_1$ та $x_2 \cdot y_2$.

Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x^2-1} \leq 1, \\ 4\sqrt{9-x^2} \leq 0,25^{x-3}. \end{cases}$

10) Рівняння з параметром.

Укажіть множину всіх значень a , при яких виконується рівність $|a^3 - a^2| = a^3 - a^2$.

А	Б	В	Г	Д
$[1; +\infty)$	$\{0\} \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup \{0\}$	$[0; 1]$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Знайдіть найбільше ціле значення параметра a , при якому система рівнянь $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ має два розв'язки.

Знайдіть найбільше ціле значення параметра a , при якому рівняння $|x^2 - 3|x| - 4| = a$ має тільки чотири корені. Якщо такого значення a не існує, то у відповідь запишіть число 100.

Знайдіть найбільше ціле значення параметра a , при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Знайдіть найменше значення a , при якому має розв'язки рівняння $\frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 6 - 5a - 2a^2$.

Укажіть найменше значення a , при якому рівняння $\frac{x^2 - x + a}{2x + 3} = 0$ має рівно один корінь.

При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $\sqrt{2x + 15} \cdot (\sqrt{x^2 + 18x + 81} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}) = a\sqrt{2x + 15}$ має лише два різні корені?

При якому найменшому значенні a рівняння $\sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x - 3}} + (14 - 2a) \cdot \sqrt[4]{x - 3} + 32 = 6a$ має хоча б один корінь?

Знайдіть усі значення параметра a , при яких добуток коренів рівняння $\log_2^2 x - (2a^2 - a) \log_2 x + 1 - 2a = 0$ дорівнює 8. Якщо таке значення a єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень більше одного, то у відповідь запишіть найменше з них.

Знайдіть значення параметра a , при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $(\frac{3}{2}; 2)$.

При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x| - 1} - 2x = a$ має один корінь?

Знайдіть найменше ціле значення параметра a , при якому рівняння $\sqrt{x^2 - 5x} + \sqrt{x^2 - 9x + 20} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x - 5}$ має два корені.

Знайдіть усі від'ємні значення параметра a , при яких система рівнянь
$$\begin{cases} 2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3|x| = 11 - y, \\ 25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповіді. Якщо таких значень кілька, то у відповіді запишіть їхню суму.

Знайдіть найбільше значення параметра a , при якому система рівнянь
$$\begin{cases} (2a - 1) \sin x + \cos x = 2, \\ a \sin x + (2a - 1) \cos x = a + 1 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків.

Знайдіть найменше значення параметра a , при якому рівняння $2^{\sin^2(2\pi x + \frac{5\pi}{4})} = \frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13}$ має додатний корінь.

Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1)(2^x + \lg a) < 0$.

Задано рівняння $(25^x + 2a \cdot 5^x + a^2) \cdot \sqrt{\frac{x+8}{x+3}} - 2 = 0$, де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{x+8}{x+3}} - 2 = 0$.

2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a .

Якісна система вправ зі значною кількістю різнорівневих завдань, дає змогу учням добре підготуватися до ЗНО та узагальнити свої знання зі змістової лінії «Рівняння, нерівності, системи». Оскільки, лише при систематичній роботі, під час розв'язування великої кількості практичних завдань, учні мають змогу потренуватись і згодом впевнено їх вирішувати.

2.2.2. Використання засобів ІКТ у підготовці до ЗНО з тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь»

Для самостійної роботи на уроці можна використовувати гаджети учнів. Для швидкого доступу до тесту створюю QR-код (рис. 2.2.) за допомогою «генератора QR-кодів». Установивши необхідне програмне забезпечення, учні зчитують закодовану інформацію, відкривають завдання на смартфонах, роблять необхідні записи у зошитах і відразу отримують свій результат.



Рис. 2.2. QR-код на «Навчальний сайт з математики»

Одним із сервісів для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою інтерактивних модулів є онлайн-сервіс LearningApps. Ці модулі можуть використовуватись безпосередньо як навчальні ресурси як для колективної роботи класу, так і для організації самостійної роботи учнів. Освітнє середовище LearningApps [45] надає готові інтерактивні вправи поділеними за категоріями: за предметом, рівнем освітнього ступеня та готовими шаблонами, які можна використати або створити свої власні. Вправи на сайті подаються у зручному візуальному режимі сітки зображень, навівши на які вказівник миші можна побачити тип вправи та її рейтинг на сайті (залежить від кількості переглядів та оцінок користувачів). Блоки (вони називаються Вправами) не включені в жодні конкретні сценарії чи програми, тому вони не розглядаються як цілісні уроки чи завдання, натомість їх можна використати у будь-якому доречному методичному сценарії [9].

Зареєстрованим на сайті користувачам надається можливість не лише створювати та редагувати вправи, але й створювати папки з колекціями наочностей, створювати класи, реєструвати учнів, планувати перегляд ними певних вправ, вести статистичний облік виконання ними завдань. Це особливо зручно в сучасних умовах організації онлайн-занять з учнями. Вправи,

розроблені у середовищі LearningApps, доступні для виконання також на мобільних телефонах, оскільки відкриваються у браузері. Щоб користувач був оцінений дистанційно, потрібно щоб він був приєднаним до віртуального класу LearningApps, який створює учитель і розсилає запрошення для своїх учнів.

Створення завдань у середовищі LearningApps здійснюється на основі запропонованих шаблонів: створи пару, класифікація, числова пряма, просте упорядкування, вільна текстова відповідь, вікторина, заповни пропуски, склади пазл та інші.

Аналіз завдань ЗНО з математики за останні роки засвідчує, що тема «Рівняння, нерівності, системи» завжди ґрунтовно представлена в завданнях ЗНО. А тому, якісна підготовка старшокласників до проходження ЗНО потребує ретельної систематизації їх знань з теми.

Для ефективної організації повторення теми «Рівняння» пропонуємо для старшокласників наступні вправи.

Таблиця 2.15.

Рекомендаційні вправи з теми «Рівняння»

Тема	Посилання на завдання
Лінійні рівняння	https://learningapps.org/1887050
Квадратні рівняння	https://learningapps.org/2597462
Рівняння з модулем	https://learningapps.org/1518142
Ірраціональні рівняння	https://learningapps.org/1472951
Тригонометричні рівняння	https://learningapps.org/321193
Показникові рівняння	https://learningapps.org/5034550
Логарифмічні рівняння	https://learningapps.org/1145098

На рисунку 2.3. представлені скріншоти екранів в процесі виконання учнями завдань.

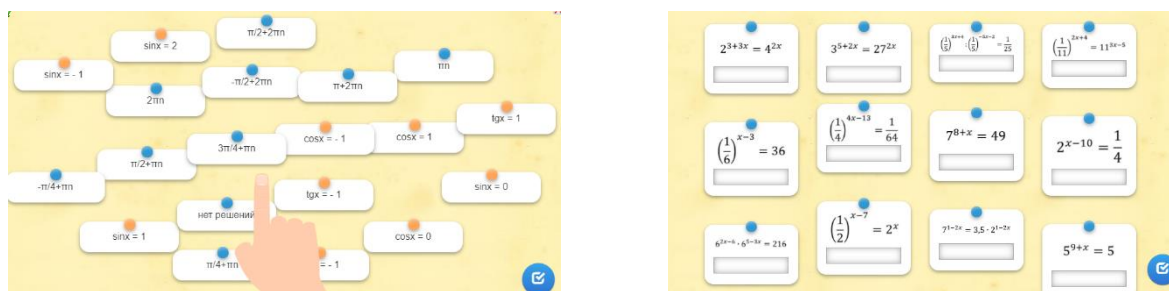


Рис. 2.3. Фрагменти вправ з теми «Рівняння» на LearningApps

Для повторення теми «Нерівності» пропонуємо для старшокласників наступні вправи.

Таблиця 2.16.

Рекомендаційні вправи з теми «Нерівності»

Тема	Посилання на завдання
Числові проміжки	https://learningapps.org/view3769309 , https://learningapps.org/view7013688 , https://learningapps.org/view12459808
Властивості числових нерівностей	https://learningapps.org/view4819263 , https://learningapps.org/view12462724
Нерівності	https://learningapps.org/view2871818 , https://learningapps.org/view8381820
Лінійні нерівності	https://learningapps.org/view1076764 , https://learningapps.org/view4937739 , https://learningapps.org/view4937349 , https://learningapps.org/view1927963 , https://learningapps.org/view5457081
Квадратні нерівності	https://learningapps.org/view5100645 , https://learningapps.org/view5100687 , https://learningapps.org/view5380504 , https://learningapps.org/view5436008
Показникові нерівності	https://learningapps.org/view5447089 , https://learningapps.org/view5448232 , https://learningapps.org/view15627501
Показникові і логарифмічні нерівності	https://learningapps.org/view5223315
Нерівності з модулем	https://learningapps.org/view6690427 , https://learningapps.org/view6690464 , https://learningapps.org/view10877964
Метод інтервалів	https://learningapps.org/view8381767

На рисунку 2.4. представлені скріншоти екранів в процесі виконання учнями завдань.

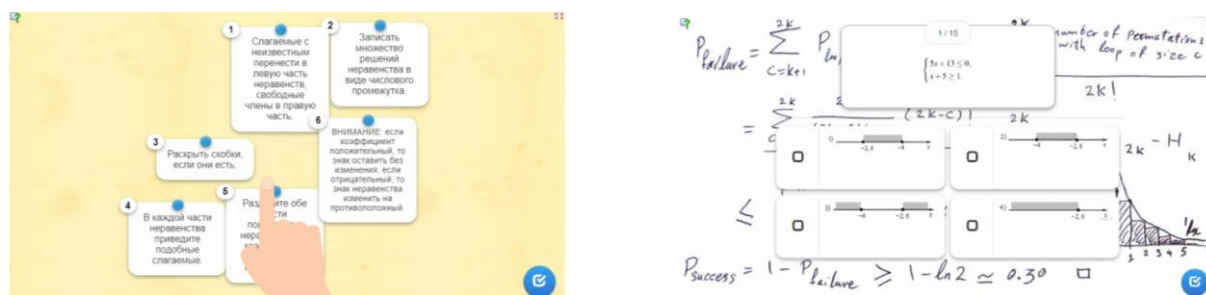


Рис. 2.4. Фрагменти вправ з теми «Нерівності» на LearningApps

Для повторення теми «Системи рівнянь і нерівностей» пропонуємо для старшокласників наступні вправи.

Рекомендаційні вправи з теми «Системи рівнянь і нерівностей»

Розв'язання систем лінійних нерівностей	https://learningapps.org/view5277384
Розв'язання систем лінійних і квадратних нерівностей	https://learningapps.org/view5275004
Розв'язання нерівностей і системи нерівностей	https://learningapps.org/view5467200

На рисунку 2.5. представлені скріншоти екранів в процесі виконання учнями завдань.

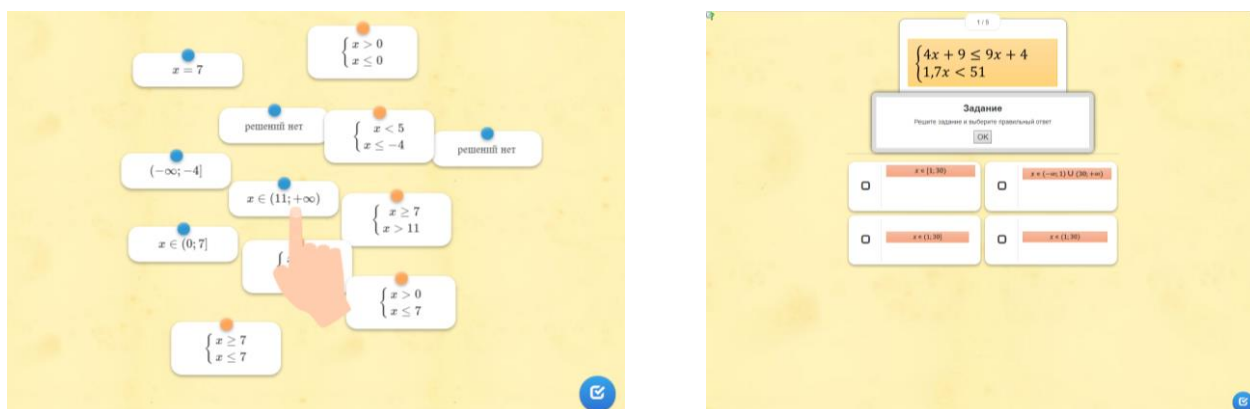


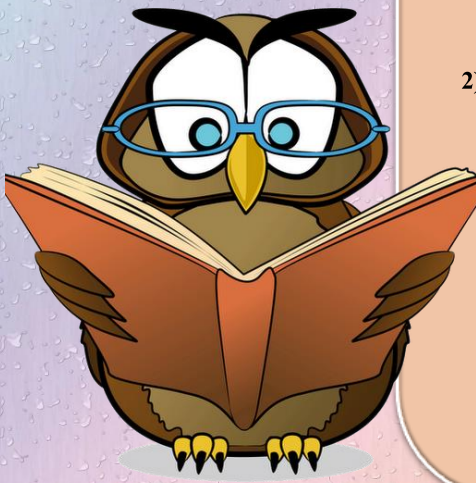
Рис. 2.5. Фрагменти вправ з теми «Системи рівнянь і нерівностей» на LearningApps

Переваги використання сервісу LearningApps у навчанні надають вчителю нових можливостей, дозволяють разом з учнем отримувати задоволення від захопливого процесу пізнання, за допомогою новітніх технологій створюють умови занурення у яскравий світ знань, позбавляють учнів від нудного запам'ятовування і повторення, демонструють способи використання комп'ютерних технологій не тільки за ради розваг, а і як цікавий спосіб навчатися засобами гри.

Таким чином, використання можливостей сервісу LearningApps.org дозволяє різнобічно й цілеспрямовано формувати в учнів освітні компетентності та більш ефективно досягати запланованих результатів завдяки включенню кожного учня в пізнавальну, творчу навчальну діяльність [9].

Програма PowerPoint може бути використана на всіх етапах уроку. Основні тези й весь потрібний ілюстративний матеріал чітко та наочно виконані на слайдах, сприяють концентрації уваги учнів і активізації їх діяльності.


При вивченні теми «Показникові рівняння», на етапі узагальнення та систематизації знань, можна запропонувати учням роботу з навчальними картками (рис. 2.6.,2.7.) [41], які будуть представлені на слайдах презентації. Для того, щоб вона була більш доброзесною, краще, заздалегідь підготувати декілька варіантів.



Варіант 1

- 1) Яке з наведених рівнянь є показниковим?
А) $x^2 = 3$; Б) $2^3 = x$; В) $\sqrt{x^3} = 2$; Г) $2^x = 3$.
- 2) Яке з чисел є розв'язком рівняння $\left(1\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-3x}$?
А) 2; Б) -1; В) 2,5; Г) 3.
- 3) Розв'язком якого з наведених рівнянь є число -4?
А) $16^x = 2$; Б) $2^x = \frac{1}{16}$; В) $8^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$; Г) $16^x = \frac{1}{2}$.
- 4) Знайдіть розв'язки рівняння $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9} = 1$.
А) 1; Б) 0; В) 3; Г) -3; 3.
- 5) Розв'яжіть рівняння $(0,2)^{2-x} = 5^{1-\frac{2}{x}}$.
А) 2; Б) 1; В) 1; 2; Г) -1; 2.

Рис. 2.6. Слайд з навчальною карткою для 1-го варіанту



Варіант 2

- 1) Яке з наведених рівнянь є показниковим?
А) $x^3 = 5$; Б) $3^x = 5$; В) $3x^{-1} = 5$; Г) $\sqrt{x^5} = 3$.
- 2) Яке з чисел є розв'язком рівняння $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x+10}$?
А) $\frac{20}{9}$; Б) 0; В) -2; Г) $\frac{1}{2}$.
- 3) Розв'язком якого з наведених рівнянь є число -2?
А) $4^x = 2$; Б) $2^x = \frac{1}{4}$; В) $4^{\frac{x}{2}} = 2$; Г) $4^x = \frac{1}{2}$.
- 4) Знайдіть розв'язки рівняння $1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-25}$.
А) 0; Б) 1; В) -5; 5; Г) 5.
- 5) Розв'яжіть рівняння $(0,4)^{3-x} = (2,5)^{1-\frac{3}{x}}$.
А) 1; Б) 2; В) 2; 3; Г) 1; 3.

Рис. 2.7. Слайд з навчальною карткою для 2-го варіанту

При вивченні теми «Показникові нерівності», перевірку якості виконання вправ домашньої роботи можна провести у формі гри «Знайди помилку» [8], яка буде висвітлена на слайдах (рис. 2.8.). Також, запропонована гра дає можливість перевірити уважність учнів.



Рис. 2.8. Слайди з грою «Знайди помилку»

Під час вивчення теми «Системи двох рівнянь з двома змінними», на етапі актуалізації опорних знань, для перевірки засвоєння теоретичного матеріалу з попередніх тем, можна запропонувати цікавий кросворд [17] (рис. 2.9.), що буде представлений на слайді. Такий кросворд можна заповнювати разом з учнями поступово, з кожним наступним слайдом відкриваючи нове слово, а можна висвітлити на одному слайді і запропонувати записати відповіді у зошит, а потім звіритися зі вчителем.




Рис. 2.9. Слайд із кросвордом «Система»

Відповіді до кросворду:

1. Підстановка,
2. Гаусс,
3. Ордината,
4. Пряма,
5. Додавання,
6. Абсциса,
7. Декарт.

Також при вивченні даної теми, на етапі узагальнення і систематизації знань, можна запропонувати самостійну роботу за рівнями [17] (рис. 2.10.) та відвести на кожен рівень певну кількість часу, після того, як час сплине, переходити до наступного слайда з новим рівнем (рис. 2.11.). Коли на учнів накладаються певні обмеження в часі, то вони повністю зосереджуються на виконанні поставленого завдання, стають більш уважними та сконцентрованими.




Самостійна робота

І рівень	
І варіант	II варіант
1. Запишіть довільну систему другого степеня. 2. Перевірити, чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 18, \\ xy = 9; \end{cases}$ пари чисел а) (0; 0); б) (3; 3); в) (4,5; 2).	1. Запишіть довільну систему другого степеня. 2. Перевірити, чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 24, \\ xy = 9; \end{cases}$ пари чисел а) (0; 0); б) (5; -1); в) (1; 3).

Рис. 2.10. Слайд із самостійною роботою (І рівень)

Самостійна робота



II рівень	
I варіант	II варіант
1. Розв'язати систему рівнянь аналітичним способом: $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + y = 4. \end{cases}$	1. Розв'язати систему рівнянь аналітичним способом: $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 32. \end{cases}$
2. Розв'язати систему рівнянь графічним способом: $\begin{cases} x + y = 1, \\ y - x = 2. \end{cases}$	2. Розв'язати систему рівнянь графічним способом: $\begin{cases} x + y = 4, \\ y - x = 1. \end{cases}$

Рис. 2.11. Слайд із самостійною роботою (II рівень)

Всі ці форми актуальні під час проведення онлайн-навчання, оскільки завдяки можливостям PowerPoint, можна продемонструвати безліч різноманітних та цікавих завдань.

І взагалі можна провести не лише фрагмент уроку, а цілий урок.

Наведемо приклад уроку на тему «Ірраціональні рівняння» [46] (додаток А).

Також, можна для різноманіття, періодично проводити нестандартні Telegram-уроки, у вигляді невеликих тестових самостійних робіт. Такі роботи дають можливість потренуватися і впевнено почувати себе на ЗНО. Для цього, вчитель створює власний Telegram-канал, для певного класу та може туди викладати різні завдання у цікавих формах. Учні за посиланням, можуть приєднатися до каналу, або вчитель може додати їх самостійно. Telegram-канал, надає безліч можливостей для зацікавлення учнів на уроці. Такі уроки можна проводити дистанційно, оскільки вчитель може записувати короткі відео з певними порадами, а також викладати туди цікаві навчальні картки з завданнями або узагальнюючі таблиці та схеми. Приклад такого фрагменту уроку на тему: «Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей» [29] для 11-го класу, можна переглянути за QR-кодом (рис. 2.12.). Цей урок, ми пропонуємо

провести напочатку розділу «Рівняння і нерівності. Узагальнення і систематизація», щоб учні згадали засвоєний раніше матеріал.



Рис. 2.12. QR-код фрагменту уроку на тему: «Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей»

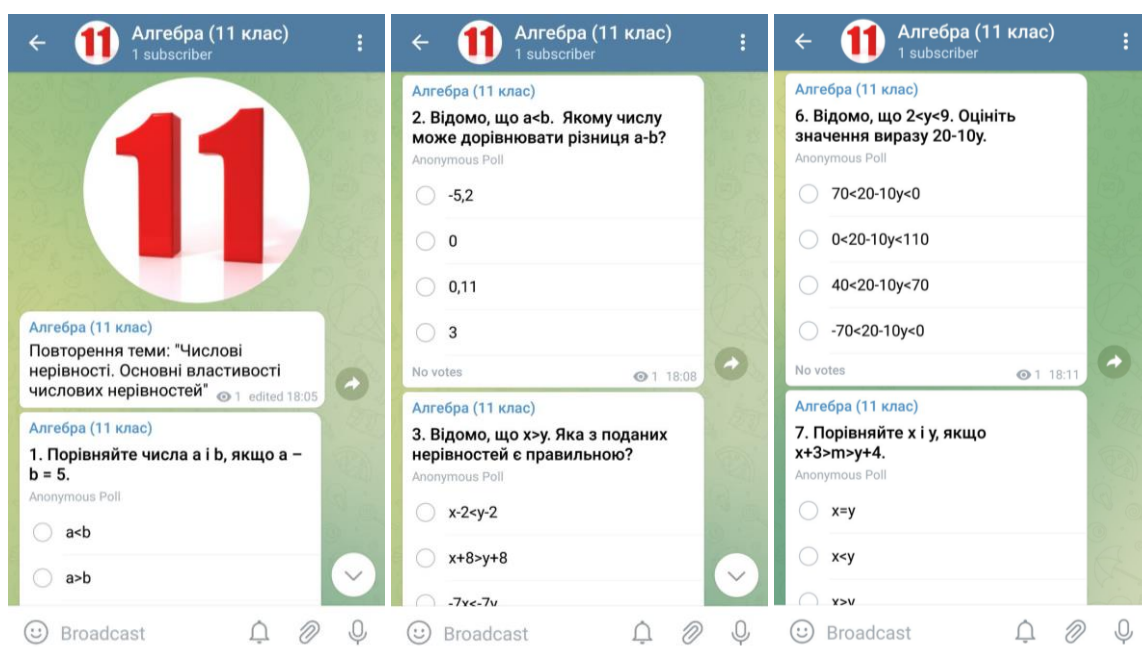


Рис. 2.13. Фрагменти нестандартного Telegram-уроку з самостійною роботою

Для якісної підготовки до ЗНО, ми пропонуємо добірку рекомендацій, які стануть у нагоді при самостійному опрацюванні матеріалу та будуть чудовим помічником при виникненні будь-яких запитань.

Всеукраїнська школа онлайн [31].

Всеукраїнська школа онлайн – це сучасний онлайн-ресурс для змішаного та дистанційного навчання учнів середньої та старшої школи з матеріалами, що пройшли експертизу та відповідають державним освітнім стандартам. ВШО

забезпечує учнів відео поясненнями, конспектом, тестами та можливістю відслідковувати свій навчальний прогрес. А вчителів – необхідними методичними рекомендаціями та прикладами застосування сучасних освітніх технологій. Наразі контент платформи розрахований на два тижні навчання відповідно до календарного плану, та щотижня він буде доповнюватися. Функціонал платформи буде постійно вдосконалюватися та розширюватися.

Освітня платформа Learning passport [37].

На платформі Learning Passport, можна знайти у вільному доступі корисний та якісний цифровий контент – онлайн-курси, відео, текстові та інтерактивні матеріали.

Освітня платформа Learning Passport зможуть застосовувати матеріали з Learning Passport як допоміжні до програм, що створені в межах ВШО. Матеріали можна буде адаптувати, а також створювати на їх базі власні уроки. Це дасть змогу вчителям бути більш гнучкими в організації освітнього процесу, зокрема під час дистанційного навчання, та враховувати потреби учнів.

Освітня платформа EdEra [39].

EdEra — освітня українська платформа, яка створює онлайн-курси та навчальний контент для широкої аудиторії з найрізноманітніших тем.

«Математика: арифметика, рівняння та нерівності» — перший курс з математичного циклу на EdEra. Розрахований на 6 тижнів, кожен тиждень складається з 2-4 лекцій (усього 15 лекцій), великої кількості теоретичних, тестових і домашніх завдань. Орієнтовно кожен тиждень розрахований на 5 годин занять.

Окрім тестових завдань у середині курсу є ще проміжні модулі, тести та фінальний іспит. Успішно пройшовши курс та всі його іспити, можна отримати сертифікат.

Учням викладають як теорію, так і методику розв'язання задач і рівнянь, цьому приділяється найбільше часу. Відеоматеріали курсу цікаві тим, що доповнюються експериментальними відео про те, як у реальному житті працюють ті чи інші теорії.

Освітня платформа Ve smart [38].

Ve smart – безкоштовна платформа для підготовки українських випускників до ЗНО, щоб кожен учень отримав шанс на вступ до кращих університетів. У 2018 році платформою скористалися понад 50 тисяч одинадцятикласників, які в середньому отримали оцінку на 20 балів вищу, ніж середня по країні.

Освітня платформа Prometheus [40].

Prometheus — одна з найбільших освітніх онлайн-платформ України, яка другий рік поспіль допомагає школярам підготуватися до ЗНО, зокрема до тестування з математики.

Курс складається з 9 тижнів і 19 тем від «Алгебра. Початок аналізу» до «Геометрія. Планіметрія. Стереометрія». Навчальні тижні містять теоретичні відеоуроки (з поданням усіх необхідних формул) по 5-15 хвилин та наочні приклади розв’язання задач різної складності. Між лекціями є тестові завдання для закріплення вивченого.

У курсі розглянуті всі розділи математики, що входять до програми ЗНО, а також розібрані всі типи задач та можливості їх рішення.

Окрім завдань з математики, на курсі є допоміжні відео з корисними рекомендаціями для підготовки до ЗНО та конспекти лекцій кожного тижня. Якщо виникають якісь запитання (навчальні або технічні), є можливість обговорити їх на форумі як з викладачем, так і з іншими слухачами курсу.

Портал Akademia [42].

Портал Academia пропонує школярам чи не найбільшу кількість безкоштовних курсів для підготовки до ЗНО, у тому числі курс з математики.

Курс поділений на дві частини — алгебру й геометрію, кожна з яких містить 32 теми (загалом 64). У кожній навчальній темі: матеріал для опрацювання (теоретична текстова частина), словник термінів і понять до теми, тестові завдання для закріплення знань та онлайн-ігри з поданого матеріалу. Після завершення всіх тем можна пройти підсумковий тест.

Курс з алгебри охоплює теми від «Натуральні числа та дії над ними» до «Вступ до статистики». Курс з геометрії передбачає підготовку від «Початкові поняття планіметрії» до «Вектори у просторі».

Додатково на сайті можна знайти завдання (тестові зошити) із ЗНО минулих років, переліки рекомендованої літератури та словники термінів.

Проходити курси можна без реєстрації, у режимі гостьового доступу.

YouTube-канал «Топ Школа» [53].

На каналі «Топ Школа» можна знайти змістовні відеоуроки з математики з 4 по 11 клас. На каналі на цей час вже випущено понад 320 відеоуроків. Всі уроки авторські. Відповідають навчальній програмі. Зроблені у вигляді презентацій, містять теоретичну частину, розв'язання прикладів і проходження тестування на тему, що вивчається.

ВИСНОВКИ

Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволив вивчити, яким чином відбувається узагальнення і систематизація знань в учнів старшої школи. Важливе завдання полягає в залученні учнів до використання рівнянь як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ. У процесі вивчення курсу посилюється роль обґрунтувань математичних тверджень, індуктивних і дедуктивних міркувань, формування різноманітних алгоритмів, що має сприяти розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів. В роботі представлено, як саме відбувається узагальнення методу рівносильних перетворень для лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь. З'ясовано, що важливим узагальненням способів розв'язування нерівностей є метод інтервалів.

У другому завданні дослідження проаналізовано, як в завданнях ЗНО з математики представлені теми: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей». Аналіз завдань ЗНО основної сесії за останні роки дозволив з'ясувати теми і рівень вправ, які найчастіше зустрічаються у ЗНО, а саме: «Логарифмічні рівняння і нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей». Було виявлено, що тема «Рівняння, нерівності і системи з параметром» потребує особливої уваги при підготовці до ЗНО, тому що вона зустрічається кожного року в завданнях відкритої форми з розгорнутою відповіддю. У дослідженні систематизовано завдання за видами рівнянь і нерівностей та за рівнями складності завдання.

У ході виконання третього завдання розроблено методичний матеріал для представлення основних понять і фактів про рівняння і нерівності в курсі алгебри 7-11 класів в узагальненій формі. Всю інформацію, яка необхідна учням з теми «Рівняння, нерівності, системи» було систематизовано та представлено у вигляді узагальнюючих таблиць, які складені на основі діючих підручників і навчальних посібників. Також були наведені приклади того, яким чином вчитель і учні можуть користуватися ними на різних етапах уроку.

У представлених таблицях зібрано той мінімум основних відомостей зі шкільного курсу алгебри і початків аналізу тем: «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей», який дає змогу розв'язувати найскладніші алгебраїчні завдання, що пропонуються при підготовці до ЗНО. Подані схеми полегшують роботу учнів, оскільки, якщо потрібно швидко знайти головний матеріал з теми, не потрібно гортати підручник. При зверненні до таблиць учні швидше запам'ятають матеріал, оскільки вони є досить наочними. Також у схемах наведені приклади розв'язування типових завдань, які можна використовувати, як зразок. Ці таблиці особливо важливі для систематизації знань і умінь у процесі підготовки до ЗНО.

Дібрано методичні прийоми систематизації знань старшокласників з тем «Рівняння», «Нерівності», «Системи рівнянь і нерівностей» на етапі узагальнюючого повторення.

Якісна система вправ з великою кількістю завдань, дає змогу учням добре підготуватися до ЗНО та узагальнити свої знання зі змістової лінії «Рівняння, нерівності, системи». Оскільки лише, при розв'язуванні великої кількості практичних завдань, учні можуть потренуватись і згодом впевнено їх вирішувати. Дібрані вправи досить аналогічні до тих, що були в ЗНО попередніх років, але вони диференційовані таким чином, що учні з будь-яким рівнем підготовки, зможуть знайти приклади для себе. Оскільки завдання складені від початкового до високого рівня навчальних досягнень.

Переваги використання сервісу LearningApps, надає можливість вивчати математику у більш цікавих формах, та за допомогою інтерактивних ігор поглиблювати свої знання з математики та алгебри і початків аналізу зокрема.

Узагальненню знань учнів сприяє використання на уроках, різноманітних форм роботи з ІКТ, таких як: навчальні картки, гра «Знайди помилку», цікавий кросворд, різнорівневі самостійні роботи, а також наведено приклад уроку з використанням програми PowerPoint та нестандартного Telegram-уроку.

Також було розроблено поради, щодо використання різноманітних онлайн-сервісів для самостійної роботи, якими учні можуть користуватися у разі

виникненні будь-яких запитань при підготовці до ЗНО, а вчителі для того, щоб скорегувати діяльність учнів на уроках або в позакласній роботі та факультативах.

Поставлені завдання виконані в повному обсязі, мета дослідження досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Іржавцева В. П., Федченко Л.Я. Систематизація і узагальнення знань учнів в процесі вивчення математики. – Київ : Радянська школа, 1988.
2. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2015. 256 с.
3. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл., Київ : Генеза, 2016. 272 с.
4. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8-го кл. закл. загальн. серед. осв. Київ : Генеза, 2021. 270 с.
5. Бевз Г. П., Бевз. В. Г. Алгебра : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл., Київ: Відродження, 2015. 288 с.
6. Бевз Г. П., Бевз. В. Г. Алгебра: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : Освіта, 2016. 254 с.
7. Бевз Г. П., Бевз. В. Г. Алгебра: підруч. для 8 класу закл. загальн. серед. осв. 2-е вид., перероб. Київ : Освіта, 2021. 255 с.
8. Блага В. Презентація «Показникові нерівності». 2020. URL: <https://naurok.com.ua/prezentaciya-pokaznikovi-nerivnosti-210612.html>.
9. Грідіна О. О. Тези доповідей ІХ міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021). Черкаси : вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2021. С. 136-137.
10. Грідіна О. О. Методика узагальнення і систематизації знань старшокласників з теми «Квадратні рівняння» в умовах підготовки до ЗНО. Наукові записки молодих учених : електронний збірник. Кропивницький : РВВ ЦДПУ ім В. Винниченка, 2021. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/issue/view/54>.
11. Дистервег А. Руководство к образованию немецких учителей: Хрестоматія з зарубіжної педагогіки. Москва, 1981.
12. ЗНО-онлайн. Тести ЗНО онлайн з предмету «Математика» URL: <https://zno.osvita.ua/mathematics/>.

13. Коменський Я. А. Вибрані педагогічні твори. Т. 1 : Велика дидактика. – Москва : Учпедгиз, 1955.
14. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. 224 с.
15. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. 256 с.
16. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. 4-е изд., Москва : Оникс, Мир и Образование, 2008. 416 с.
17. Красьоха О. В. Конспект уроку «Системи рівнянь із двома змінними» для 9 класу. 2021. URL: <https://naurok.com.ua/konspekt-uroku-sistemi-rivnyan-iz-dvoma-zminnimi-dlya-9-klasu-222967.html>.
18. Лернер І. Я. Дидактичні основи методів навчання. Москва, 1981.
19. Локоть В.В. Задачи с параметрами. Применение свойств функции, преобразование неравенств. Москва : Аркти, 2010. 64 с.
20. Мальований Ю. І., Возняк Г. М., Литвиненко Г. М. Алгебра : підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2016. 223 с.
21. Мальований Ю. І., Литвиненко Г. М., Бойко Г. М. Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. 256 с.
22. Математика. Ґрунтовна підготовка до ЗНО. Тригонометричні рівняння, нерівності. URL: https://subject.com.ua/mathematics/zno_2017/21.html.
23. Мерзляк А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
24. Мерзляк А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень. Харків : Гімназія, 2011. 431 с.
25. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підр. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, 2015. 256 с.

26. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підр. для 7 кл. закл. загальн. серед. осв. 2-е вид., перероб. Харків : Гімназія, 2020. 288 с.
27. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підр. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, 2016. 240 с.
28. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підр. для 8 кл. закл. загальн. серед. осв. 2-е вид., перероб. Харків : Гімназія, 2021. 240 с.
29. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підр. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.
30. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика 6 клас : підруч. Харків : Гімназія, 2014. 300 с.
31. Міністерство освіти і науки України. Всеукраїнська школа онлайн. URL: <https://lms.e-school.net.ua>.
32. Міністерство освіти і науки України. Освітні програми. Навчальні програми для 10-11 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>.
33. Міністерство освіти і науки України. Освітні програми. Навчальні програми для 5-9 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>.
34. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях (з додатком): навч. посібник для учнів 7-11-х класів. – Харків : Світ дитинства, 1998. 116 с. (додаток 56 с.).
35. Новосёлов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. 6-е изд., Москва : Высшая школа, 1962. 564 с.
36. Онищук В. О. Узагальнення і систематизація знань учнів (IV— VIII класи). Київ, 1970.
37. Освітня платформа для дітей, молоді, освітян та батьків. Learning passport. URL: <https://ukraine.learningpassport.unicef.org>.
38. Освітня платформа. Be smart. URL: <https://www.youtube.com/channel/UCesEl4E6p25oYvUEhMusFmA>.
39. Освітня платформа. EdEra. URL: <https://www.youtube.com/channel/UCBJx3fpN2SY9W9zY3e2R1RA>.

40. Освітня платформа. Prometheus. URL: <https://prometheus.org.ua/zno/>.
41. Подолян О. М. Урок № 31 Алгебра 11 клас тема «Показникові рівняння». 2019. URL: <https://naurok.com.ua/urok-31-algebra-11-klas-tema-pokaznikovi-rivnyannya-103650.html>.
42. Портал. Akademia. URL: <http://zno.academia.in.ua>.
43. Презентації з алгебри. Презентація на тему: Система лінійних нерівностей з однією змінною. URL: <https://svitppt.com.ua/algebra/sistema-liniynih-nerivnostey-z-odnieyu-zminnoyu.html>.
44. Програма ЗНО з математики 2022 року. Програма ЗНО результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/nakaz-1513_04_12_programa_matematyka.pdf.
45. Середовище LearningApps. URL: <https://learningapps.org/>.
46. Смажелюк Т. Є. Презентація «Ірраціональні рівняння». 2019. URL: <https://naurok.com.ua/prezentaciya-irracionalni-rivnyannya-85221.html>.
47. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : Оріон, 2016. 336 с.
48. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 8 класу закл. загальн. серед. осв. Київ : Оріон, 2021. 293 с.
49. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Математика : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : Освіта, 2015. 288 с.
50. Ткачук В.В. Математика — абитуриенту. Т 48. 18-е изд., стереотип. Москва : МЦНМО, 2018. 944 с.
51. Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений. 4-е изд., испр. и доп. Москва : Наука., 1988. 432 с.
52. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. Москва : Наука, 1989. 576 с.
53. YouTube-канал. Топ Школа. URL: <https://www.youtube.com/channel/UCugp2JTHik6cdFxs1GbEOGg>.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Тема уроку: «Ірраціональні рівняння».

Мета уроку:

а) навчальна: розширити й поглибити знання учнів про методи розв'язування ірраціональних рівнянь;

б) виховна: виховувати розумову культуру учнів, культуру писемного та усного мовлення;

в) розвивальна: розвивати вміння співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі; пізнавальну активність учнів, логічне мислення, пам'ять, увагу.

Тип уроку: урок застосування знань, вмінь, навичок.

Наочність і обладнання: презентація, підручник (Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас (Нелін Є.П)).

Структура уроку:

I. Перевірка виконання домашнього завдання, актуалізація попередніх знань учнів, необхідних для самостійної роботи. (7 хв.)

II. Повідомлення теми, мети, задач уроку та мотивація навчання учнів. (3 хв.)

III. Осмислення змісту й послідовності виконання вправ. (5 хв.)

IV. Самостійне виконання учнями вправ під контролем та за допомогою вчителя (індивідуально, попарно, групами). (12 хв.)

V. Узагальнення та систематизація учнями результатів виконання вправ. (15 хв.)

VI. Звіт учнів про способи та результати роботи. (1 хв.)

VII. Підсумки роботи. Домашнє завдання. (2 хв.)

Етап
уроку

Матеріали до уроку

Перевіримо домашнє завдання:

1 $\sqrt{61 - x^2} = 5$

2 $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$

3 $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$

4 $3\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 7$

5 $\sqrt{3x - 5} = \frac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$

Знайди пару:

А) 3,25 ; 2

Б) 3; 1,5

В) -3; 1,5

Г) 3

Д) 11; 3

Е) 0; 3; 4

Є) 6; -6

Ж) 6

I.

Перевіримо домашнє завдання:

1 $\sqrt{61 - x^2} = 5$

2 $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$

3 $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$

4 $3\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 7$

5 $\sqrt{3x - 5} = \frac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$

Знайди пару:

А) 3,25 ; 2

Б) 3; 1,5

В) -3; 1,5

Г) 3

Д) 11; 3

Е) 0; 3; 4

Є) 6; -6

Ж) 6

Перевіримо домашнє завдання:

1 $\sqrt{61 - x^2} = 5$

2 $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$

3 $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$

4 $3\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 7$

5 $\sqrt{3x - 5} = \frac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$

Знайди пару:

А) 3,25 ; 2

Б) 3; 1,5

В) -3; 1,5

Г) 3

Д) 11; 3

Е) 0; 3; 4

Є) 6; -6

Ж) 6

Перевіримо домашнє завдання:

1 $\sqrt{61 - x^2} = 5$

2 $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$

3 $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$

4 $3\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 7$

5 $\sqrt{3x - 5} = \frac{x - 1}{\sqrt{x - 2}}$

Знайди пару:

А) 3,25 ; 2

Б) 3; 1,5

В) -3; 1,5

Г) 3

Д) 11; 3

Е) 0; 3; 4

Є) 6; -6

Ж) 6

Декарт



Рене Декарт(1596-1650)- французький філософ, фізик, математик, основоположник аналітичної геометрії. У математиці Декарт запровадив Декартову систему координат, дав поняття змінної величини, функції та позначення степенів числа.

II.

Ірраціональні рівняння



Працюємо усно:

Розкладіть на множники

$$1. x^2 + 10xy + 25y^2 =$$

$$(x + 5y)^2$$

$$2. 36x^2 + 0,81 =$$

$$(6x - 0,9)(6x - 0,9)$$

$$3. 9x^2 - 6xy + y^2 =$$

$$(3x - y)^2$$

$$4. x - y =$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$



$$(\sqrt{16})^2 = ?$$

III.

Знайдіть область визначення функції

$$1. y = \sqrt{x - 6}$$

$$x \geq 6$$

$$2. y = \sqrt{\frac{7}{x}}$$

$$x > 0$$

$$3. y = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

$$x > -2$$

$$4. y = \sqrt{x}$$

$$x \geq 0$$



Із останнього проміжка знайдіть
найменше ціле число.

Працюємо усно:

Знайдіть із запропонованих рівнянь ірраціональні:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= 3 \\ y^2 + 3y\sqrt{2} &= 4 \\ x + \sqrt{x^2+9} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} &= \sqrt{2-x} \\ \sqrt{6y} &= 0 \\ \sqrt[3]{x-9} &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}y - 4 &= 5 \\ \sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} &= 3 \\ \sqrt{x} &= x - 2 \end{aligned}$$

IV.

Чи є число x_0 коренем рівняння?

1. $\sqrt[3]{x} = -3$

$x_0 = 27$

2. $\sqrt{x} - 5 = 1$

$x_0 = 36$

3. $\sqrt{x+1} - 2 = 0$

$x_0 = 8$

4. $2 = x^2$

$x_0 = \sqrt{2}$

НІ
ТАК
НІ
ТАК



$\sqrt{2}$ - яке це число?

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дроби $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тест



- 1. Обчислити: $\sqrt[3]{64 \cdot 0,125}$
а) 4; б) 2; в) 0,5; г) 8
- 2. Обчислити: $\sqrt[3]{4-3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4+3\sqrt{2}}$
а) -2; б) -6; в) 34; г) розв'язку немає
- 3. При яких значеннях x вираз має зміст: $\sqrt[3]{x-5}$
а) $[0; \infty)$; б) $(-\infty; 5]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[5; +\infty)$
- 4. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x} = 2$
а) 4; б) 2; в) 16; г) -2
- 5. Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{x+4} = 5$
а) 11; б) 21; в) -16; г) 121
- 6. Розв'язати рівняння: $2 + \sqrt[3]{x-9} = 0$
а) 2; б) 265; в) -265; г) коренів немає
- 7. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+7} = 0$
а) 1; -3,5; б) 1; 3,5; в) -1; г) -1; -3,5.

Тест

Відповіді:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
б	г	в	а	г	г	в



Виберіть метод розв'язування даного ірраціонального рівняння:

1. піднесення до степеня;
2. заміна змінної;
3. розкладання на множники;
4. графічний

Рівняння	Методи розв'язування			
	1	2	3	4
1) $\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x} = 1$				
2) $x^2\sqrt{x+6} - 49\sqrt{x+6} = 0$				
3) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$				
4) $\sqrt{x-2} = \frac{3}{x}$				

Виберіть метод розв'язування даного ірраціонального рівняння:

1. піднесення до степеня;
2. заміна змінної;
3. розкладання на множники;
4. графічний

Рівняння	Методи розв'язування			
	1	2	3	4
1) $\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x} = 1$	+			
2) $x^2\sqrt{x+6} - 49\sqrt{x+6} = 0$			+	
3) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$		+		
4) $\sqrt{x-2} = \frac{3}{x}$				+

Тренування уваги



Питання для уважних:

1. Перерахуйте всі корені які ви бачили?
2. Корінь з якого числа знаходиться у квадраті?
3. Якого кольору квадрат?
4. Яка фігура і якого кольору містить $\sqrt[3]{3}$?
5. В якій фігурі найбільше число?

Розв'язати рівняння методом «пильного погляду»

$$1. \sqrt{x^2 - 5} + 8 = 0$$

$$2. \sqrt[4]{x^2 + 5} + \sqrt[4]{x + 10} = 0$$

$$3. \sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 3} = \frac{9}{x}$$



$$\sqrt{x^2} = ?$$

Робота в групах



Готуємось до ЗНО

Знайти область визначення (область допустимих значень) рівняння $\sqrt{5-x} + \sqrt{x+1} = 2$

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; -1]$	$[5; +\infty)$	$(-1; 5)$	$[-1; 5]$

Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+7} = -1$	$\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} = 2$	$\sqrt{x+5} + \sqrt{2-x} = 0$	$\sqrt{2x-6} + \sqrt{x-3} = 0$	$\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = -2$

Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

А	Б	В	Г	Д
9	-9	3	-3	2

Самостійна робота

Варіант 1

№1. (6 б.) Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{5} + \sqrt{x-1} = 3;$$

№2. (3 б.) Розв'яжіть рівняння

$$x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$$

№3. (3 б.) Розв'яжіть рівняння

$$(\sqrt{x-5})^2 + \sqrt{2x^2 - 15x + 19} = 2x - 10$$

Варіант 2

№1. (6 б.) Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{7} - \sqrt{x+1} = 3;$$

№2. (3 б.) Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[6]{x+1} = 3$$

№3. (3 б.) Розв'яжіть рівняння

$$(\sqrt{x-8})^2 + \sqrt{2x^2 - 24x + 55} = 2x - 16$$

V.

VI.

Самостійна робота

Відповіді:

	№ 1°	№ 2*	№ 3**
Варіант 1	17	-5	6
Варіант 2	3	0	9

VII.

Підсумки уроку

Які способи розв'язування ірраціональних рівнянь ми розглянули на уроці?

При розв'язуванні яких рівнянь можуть з'явитись сторонні корені?

У чому полягає їх суть?

Домашнє завдання

- Вивчити п. 11 ;
- Виконати:
 - Рівень А: № 11.2, № 11.3;
 - Рівень Б: № 11.5(3;4)
 - Рівень В: № 11.6

Лист самоконтролю

Д/з	Тест	Методи розв'язування рівнянь	Робота в групах «метод пильного погляду»	Самост. робота	Сума балів



Рефлексія

- *Сьогодні я дізнався...*
- *Було цікаво...*
- *Було важко...*
- *Я виконував завдання...*
- *Я зрозумів, що...*
- *Тепер я можу...*
- *Мене здивувало...*
- *Урок дав мені для життя...*

Дякую за урок!