МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ «КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Міжнародна науково-технічна конференція

Матеріали конференції

СТАЛИЙ РОЗВИТОК ПРОМИСЛОВОСТІ ТА СУСПІЛЬСТВА

Том 2

22-25 травня 2013 року

Кривий Ріг

УДК 550.831
П. О. МІНЕНКО,
д.ф.-м.н., професор
Криворізький педагогічний інститут
ДВНЗ «Криворізький національний університет»

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ РІШЕНЬ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розроблено ітераційний метод регуляризації з двома ітераційними коефіцієнтами.

Запишемо регуляризуючий функціонал (2) із попередньої доповіді в більш простому вигляді $\Phi = \sum_j ((a_{ij}, x_i) - b_j)^2 + \alpha \sum_i (x_i - x_{si})^2 = min(x_i, \alpha);$ (1)

Оскільки другий доданок тотожно не дорівнює нулю, то (1) не має додаткових рівнянь з невідомими x_i, а тому є критерієм безумовної оптимізації (БО) з параметром регуляризації (ПР) α>0. Для оптимізації (1) візьмемо похідні по всіх x_i і прирівняємо їх до нуля

$$\Phi'_{x_{i'}} = \sum_j ((a_{ij}, x_i) - b_j) a_{i'j} + \alpha (x_{i'} - x_{si'}) = 0. \quad (2)$$

Виконаємо в (2) перестановки та перетворення і отримаємо

$$\sum_i x_i \sum_j (a_{ij} a_{ji'} + \alpha \delta_{ii'}) = \sum_j b_j a_{ji'} + x_{si'}. \quad (3)$$

Введемо позначення $c_{ii'} = \sum_j (a_{ij} a_{ji'} + \alpha \delta_{ii'}),\quad d_{i'} = \sum_j b_j a_{ji'} + x_{si'}$ і отримаємо СЛАР в стандартному для розв'язку прямими методами (ПМ) вигляді $(x_i, c_{ii'}) = d_{i'}$ або

$$Cx=D \quad (4)$$

В новій СЛАР (3)-(4) всі діагональні елементи мають вигляд $c_{ii} = (a_{ij}, a_{ji}) + \alpha$ і, дійсно, вони збільшуються за рахунок параметра α>0, причому дуже суттєво, якщо всі a_{ij} дуже малі. Таким чином, з одного боку, цей параметр забезпечує стійкість розв'язку СЛАР, але його, як і опорний вектор x_{si}, треба ще знайти. А з іншого боку, параметр α є узгоджуючим між сумою квадратів нев'язок поля (СК НП)

$$r_j = (a_{ij}, x_i) - b_j \quad (5)$$

та сумою квадратів різниць $(x_{i'} - x_{si'})$. Для знаходження α домножимо (2) на ці різниці, просумуємо їх по індексу i', а після цього отримаємо рівняння $(r_j, r_j - r_{js}) + \alpha \sum_i (x_i - x_{si})^2 = 0$, із якого знаходимо ПР

$$\alpha = -(r_j, r_j - r_{js}) / (x_i - x_{si}, x_i - x_{si}) = 0. \quad (6)$$

При $x_i - x_{si} = 0$ ПР є обмеженною величиною, а вектор $x_i = x_{si}$ є рішенням системи рівнянь *Ax=B*. Таким чином, напрошується висновок, що метод рішення системи (2) повинен бути ітераційним, оскільки простим підбором знайти опорний вектор x_{si}, який дорівнює дійсному вектору x_i, неможливо. Згодом академік НАНУ В. І. Старостенко знайшов прийнятну ітераційну поправку (ІП)

$$H_i = (a_{ij}, r_j / \lambda_j \lambda_i); \lambda_j = (a_{ij}, 1); \lambda_i = (a_{ij}, 1) \quad (7)$$

і використав її в неоптимізованому методі простої ітерації. З цією поправкою автором даної статті розроблено ряд оптимізованих ітераційних методів (ІМ) рішення СЛАР для оберненої лінійної задачі гравіметрії (ОЛЗГ) із різними критеріями БО та умовної оптимізації (УО), з метою порівняння різних розв'язків. Але це не були методи регуляризації (МР) у вигляді (1), бо була використана схема відбору рівнянь по функціональній ознаці: всі точки виміру поля (ТВП) повинні лежати над збурюючими об'єктами (ЗО) і над кожним ЗО повинна знаходитися хоча б однаТВП. Це слідує із аналізу інтегрального рівняння першого роду. Область існування невідомих ЗО з дійсними параметрами x_i повинна співпадати з областю ТВП b_j (права частина рівняння). Але таких задач в геофізиці майже не існує. А тому переважна більшість обернених задач геофізики є некоректно поставленими (НКП), бо ЗО знаходяться під поверхнею Землі, а створені ними фізичні поля вимірюються над поверхнею Землі, в різних шарах атмосфери і навіть у космосі. Якщо під кожною ТВП буде тільки один ЗО, то відповідна цій моделі СЛАР буде повністю регуляризована, а ОЛЗГ буде коректно поставленою (КП). Якщо ж під кожною ТВП буде два і більше ЗО, то ОЛЗГ буде вже НКП, а відповідна цій моделі СЛАР буде нерегуляризованою. В останньому випадку із некоректної задачі треба вилучити її корректну частину, використовуючи методи підбору верхньої частини геологічного розрізу, а потім послідовно, етапами, те ж саме робити із залишковим після кожного етапу полем. Таким чином, ІП та критеріїй оптимізації для регуляризованого ітераційного методу (РІМ) вже є, а тому, використовуючи для (1) ітераційні формули (ІФ) з 2-ма ітераційними коефіцієнтами (ІК) $\tau_{1,n+1}$ та $\tau_{2,n+1}$:

$$x_{i,n+1} = x_{i,n} - \tau_{1,n+1} H_{i,n}; \; x_{is,n+1} = x_{is,n} - \tau_{2,n+1} H_{is,n}; \tag{8}$$

складемо критерій оптимізації (КО)

$$\Phi_{n+1} = \sum_j ((a_{ij}, x_{i,n} - \tau_{1,n+1} H_{i,n}) - b_j)^2 + \alpha \sum_i (x_{i,n} - \tau_{1,n+1} H_{i,n} - \tag{9}$$

$$- x_{is,n} + \tau_{2,n+1} H_{is,n})^2 = min(\tau_{1,n+1}, \tau_{2,n+1});$$

де $n+1$ – номер наступної ітерації; α та інші параметри обчислюються за формулами (5)-(7) по значенням $x_{i,n}$ та $x_{is,n}$, обчисленним на попередній ітерації.

Візьмемо похідні від (9) по $\tau_{1,n+1}$ та $\tau_{2,n+1}$ і прирівняємо їх до нуля. Розв'язуючи отриману систему двох рівнянь, обчислимо ІК, а по (8) нові значення невідомих $x_{i,n+1}$ та $x_{is,n+1}$. Автором розроблені критерії УО з наближенням $x_{i,n}$ та $x_{is,n}$ до дійсного розв'язку задачі x_i, причому, як на базі мінімуму СК НП, так і по мінімуму СК поправок (7) до x_i. Якщо відомі частина компонент вектора $x_{is,n}$ (апріорні дані (АД)), то розв'язок ОЛЗГ повинен бути більш наближеним до x_i. Але справа в тому, що АД є точковими, а тому вони визначені ще з більшими похибками, ніж саме поле. Через це в багатьох випадках МР не може конкурувати з методами УО та БО. Але для ОЛЗГ з моделлю багатьох горизонтальних шарів, розміщених на різних глибинах, метод (8)-(9) є найбільш перспективним із усіх на сьогодні відомих. Як бачимо, МР має багато аспектів, частина з яких послідовно вирішуються і реалізуються на практиці, а інші є об'єктами подальших досліджень та перевірок на вимірюваних полях.

Ще треба зазначити, що чисто математичний підхід до МР давав різну якість результатів не тільки в різних галузях науки і техніки, але і в межах однієї галузі науки чи її розділу. Так для магнітного, електричного та других і третіх похідних гравітаційного потенціалу переважна більшість обернених задач (ОЗ) були КП. Для сили тяжіння майже всі руднопошукові ОЗ були НКП, бо рудні зони в плані мали завжди меншу площу, ніж площа карти поля. Структурні ОЗ в нафто-газоносних районах були НКП тільки на половину, бо, навпаки, субгоризонтальні шари змінної потужності простягалися часом далеко за межі карти поля, і майже над усіма ЗО були ТВП, але деякі ЗО виходили частково або майже повністю за її межі, і над ними не було ТВП. Ці особливості суттєво заважали встановленню істинних причин некоректності ОЗ.