

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

О. А. Коновал

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

**Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих педагогічних навчальних закладів**

**Кривий Ріг
«Видавничий дім»
2008**

УДК 538.3 (075.8)

ББК 22.33

К 64

Коновал О. А.

К64 Основи електродинаміки : навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл. ISBN 978-966-2915-15-0

Зміст посібника охоплює основні теми курсу «Класична та релятивістська електродинаміка». Значна увага приділяється обґрунтуванню й інтерпретації рівнянь Максвелла в локальній та інтегральній формах. Обговорюються наслідки та приклади їх використання. Детально пояснюються засадні положення релятивістської електродинаміки. У посібнику наголос робиться на якісній і фізичній стороні електродинамічних явищ, а адекватний математичний апарат використовується для ознайомлення з методами теоретичної фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Інституту фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України **Є. Я. Глушко**

доктор педагогічних наук, професор кафедри загальної фізики НПУ ім. М. П. Драгоманова **А. В. Касперський**

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Криворізького технічного університету **Є. О. Несмашний**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих педагогічних навчальних закладів
(лист № 1.4/18-Г-365 від 08.02.2008)**

**Рекомендовано до видання вченою радою
Криворізького державного педагогічного університету
(протокол № 3 від 12.10.2006)**

ISBN 978-966-2915-15-0

© Коновал О. А., 2007.

ЗМІСТ

Передмова	7
Розділ 1. Рівняння Максвелла у вакуумі як узагальнення дослідних фактів	10
Частина 1. Стаціонарні електричне та магнітне поля у вакуумі.....	10
1.1. Електромагнітна взаємодія. Предмет і методи класичної електродинаміки. Елементи диференційного та інтегрального числення векторів.....	10
1.2. Закон Кулона. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції.....	14
1.3. Теорема Гаусса в інтегральній формі. Локальна форма теореми Гаусса. Рівняння Пуассона	18
1.4. Закон Ампера-Грассмана. Закон Біо-Савара-Лапласа та приклади застосування його. Сила Лорентца, сила Ампера.....	21
1.5. Принцип суперпозиції для магнітних полів. Магнітне поле, що створюється рівномірно рухомою зарядженою частинкою. Взаємодія двох струмів. Різні способи означення одиниці магнітної індукції	24
1.6. Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} . Приклади, що ілюструють застосування теореми про циркуляцію \vec{B} . Рівняння Максвелла $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$	27
1.7. Приклади розв'язування задач.....	33
Частина 2. Нестационарне електромагнітне поле у вакуумі	61
1.8. Заряд і його властивості. Рівняння неперервності. Струми зміщення, різні способи об'ґрунтування. Рівняння Максвелла $rot\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	61
1.9. Властивості струмів зміщення. Приклади застосування рівняння Максвелла для струмів зміщення	66
1.10. Закон електромагнітної індукції і рівняння Максвелла для вихору вектора \vec{E}	71
1.11. Соленоїдальність магнітного поля, дивергенція вектора \vec{B} , $div\vec{B} = 0$	74
1.12. Система рівнянь Максвелла у вакуумі в локальній та інтегральній формах	76
1.13. Приклади розв'язування задач.....	79
Контрольні запитання і завдання	98

Розділ 2. Електромагнітне поле в середовищі..... 100

2.1. Основні положення електронної теорії. Мікро- та макрополя.....	100
2.2. Поляризація діелектриків. Властивості вектора поляризації. Електричне поле в діелектрику. Теорема Гаусса для електричного поля в діелектрику. Вектор електричного зміщення.....	102
2.3. Намагнічування магнетиків. Властивості вектора намагнічування. Рівняння Максвелла для стаціонарного магнітного поля в магнетиках. Вектор напруженості магнітного поля в середовищі.....	110
2.4. Система рівнянь Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі.....	116
2.5. Граничні умови для векторів поля.....	118
2.6. Приклади розв'язування задач.....	124
Контрольні запитання і завдання.....	150

Розділ 3. Закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу в системі «заряджені частинки – електромагнітне поле»..... 151

3.1 Закон збереження енергії в електродинамічній системі «заряджені частинки – електромагнітне поле». Вектор Пойнтінга.....	151
3.2. Тепло Джоуля-Ленца і робота сторонніх сил. Потік енергії електромагнітного поля в колі постійного струму.....	156
3.3. Закон збереження імпульсу та моменту імпульсу в системі «заряджені частинки – електромагнітне поле». Густина потоків енергії та імпульсу в електромагнітному полі, тиск світла.....	162
3.4. Приклади розв'язування задач.....	167
Контрольні запитання та завдання.....	178

Розділ 4. Електромагнітне поле, яке створюється довільно рухомими зарядженими частинками 179

4.1. Потенціали електромагнітного поля, калібрувальна інваріантність потенціалів. Умова Лорентца. Рівняння Даламбера для скалярного та векторного потенціалів.....	179
4.2. Розв'язок рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що зазіплюються. Фізичний зміст зазіпнення. Принцип причинності в класичній електродинаміці.....	183
4.3. Потенціали Ліснара-Віхерта. Електромагнітне поле зарядженої частинки, яка рухається з постійною швидкістю.....	188
4.4. Електромагнітне поле довільно рухомої зарядженої частинки.....	196
4.5. Приклади розв'язування задач.....	205
Контрольні запитання і завдання.....	215

Розділ 5. Електромагнітні хвилі та дипольне випромінювання 216

5.1. Хвильові рівняння для векторів поля \vec{E} та \vec{B} , механізм поширення електромагнітних хвиль.....	216
--	-----

5.2. Розв'язок хвильових рівнянь у вигляді плоских хвиль. Швидкість поширення електромагнітних хвиль	218
5.3. Плоскі монохроматичні хвилі, та зв'язок між векторами \vec{E} і \vec{H} в плоскій ЕМ хвилі, що поширюється в однорідному та ізотропному діелектрику	222
5.4. Хвильовий пакет, групова та фазова швидкості. Співвідношення невизначеностей	226
5.5. Заломлення та відбивання ЕМ хвиль на межі поділу двох середовищ. Формули Френеля	233
5.6. Потенціали, що запізнюються у хвильовій зоні. Поняття про хвильову зону	242
5.7. Електромагнітне поле у хвильовій зоні	247
5.8. Інтенсивність дипольного випромінювання. Дипольне випромінювання простих систем	249
5.9. Межі застосування класичної електродинаміки. Електродинаміка та неспроможність планетарної моделі атома. Класичний радіус електрона	253
5.10. Розсіювання електромагнітних хвиль	257
5.11. Приклади розв'язування задач	261
Контрольні запитання і завдання	269

Розділ 6. Основи релятивістської електродинаміки

6.1. Попередні зауваження	271
6.2. 4-вимірний струм. Закон збереження заряду в коваріантній формі. Відносність розбиття джерел поля на заряди та струми. Явище виникнення об'ємної густини заряду в рухомому провіднику зі струмом	273
6.3. Пояснення явища виникнення об'ємної густини заряду в рухомому металевому провіднику зі струмом за допомогою діаграм Мінковського та на основі елементарних релятивістських уявлень	276
6.4. Релятивістська інтерпретація взаємодії струму та зарядженої частинки, яка рухається відносно струму	278
6.5. 4-вимірний потенціал. Умова Лорентца та рівняння Даламбера в коваріантній формі. Електромагнітне поле зарядженої частинки, яка рухається рівномірно і прямолінійно	282
6.6. Електромагнітне поле як антисиметричний 4-вимірний тензор. Рівняння Максвелла в тензорній формі	286
6.7. Перетворення компонент тензора електромагнітного поля при зміні системи відліку	290
6.8. Відносність електричного та магнітного полів	293
6.9. Інваріанти електромагнітного поля. Приклади	300
6.10. Приклади розв'язування задач	304
Контрольні запитання та завдання	316

Додатки	317
<i>Додаток А. Основні формули векторного аналізу.....</i>	317
А.1. Скалярне поле.....	317
А.2. Векторне поле.....	321
А.3. Дельта-функція Дірака та її властивості.....	328
<i>Додаток Б. Співвідношення між формулами електродинаміки, поданими в SI та в системі одиниць Гаусса</i>	332
<i>Додаток В. Основні формули електродинаміки в системі Гаусса та SI.....</i>	335
<i>Додаток Г. Співвідношення між одиницями вимірювання електромагнітних величин в системах Гаусса та SI</i>	338
<i>Додаток Д. Основні фізичні константи</i>	340
Предметний покажчик	342
Список використаних джерел	345
Основні	345
Додаткові	346

ПЕРЕДМОВА

Основна задача посібника полягає в обґрунтуванні та поясненні фізичних засад класичної та релятивістської електродинаміки.

Як відомо, електродинаміка вивчає властивості електромагнітного поля (ЕМП), чим і як породжується та поширюється ЕМП, поведінку рухомих і нерухомих заряджених частинок (ЗЧ) і заряджених тіл в ЕМП.

В «Основах...» розглянуті найзагальніші положення та висновки теорії ЕМП. Так, в основу курсу покладені рівняння Максвелла у вакуумі. Рівняння ЕМП в однорідному та ізотропному середовищі виводяться на основі класичної електронної теорії. Тому значна увага приділена обґрунтуванню рівнянь Максвелла (Розділ 1).

Огляд навчально-методичної літератури показує, що, в основному, використовуються такі методи обґрунтування рівнянь Максвелла (РМ):

А) традиційний, заснований на узагальненні фундаментальних експериментальних законів [4, 9, 11, 12];

Б) рівняння Максвелла формулюються як постулати, справедливості яких підтверджується наслідками, що одержуються при їх застосуванні до реальних електродинамічних ситуацій [13];

В) конструювання (постулювання) функції дії S для системи, що складається з електромагнітного поля і заряджених частинок у цьому полі; далі з принципу найменшої дії одержують і рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП, і рівняння електромагнітного поля [1, 14, 15].

На наш погляд, останній з названих метод обґрунтування РМ неприйнятний з огляду на його абстрактність, формальність і деяку відірваність від тих фізичних уявлень, які формуються в студентів-фізиків педагогічних університетів.

З методичної точки зору також очевидно, що й метод постулювання РМ при вивченні електродинаміки не є кращим.

Найбільш придатний для засвоєння й розуміння максвеллівської теорії при її початковому вивченні, на нашу думку, є спосіб обґрунтування рівнянь Максвелла, заснований на експериментальних законах.

Вважається при цьому, що в основі рівнянь Максвелла лежить сукупність фундаментальних експериментальних законів: закон Кулона, закон Біо-Савара-Лапласа, закон електромагнітної індукції, закон збереження заряду та інші.

Традиційний метод обґрунтування рівнянь Максвелла є найбільш прийнятний при вивченні електродинаміки з огляду і на принцип наступності в навчанні, і на безпосередній зв'язок з експериментальними даними. Він також дозволяє, до певної міри, ознайомити студентів з методами та методологією одержання наукових результатів. З іншого боку, і

сам процес наукового відкриття – як саме з експериментальних фактів одержують чи формулюють фундаментальний фізичний закон – є повчальним та цікавим.

Такий шлях обґрунтування рівнянь Максвелла хоча і є наочним і досить прямолінійним – експериментальні закони → теорія – по суті не відповідає ні реальному стану речей, ні історичному розвитку теорії ЕМП.

У той же час А. Ейнштейн стверджував, що «не існує жодного індуктивного методу, який міг би вести до фундаментальних понять фізики» [21, с. 213], «...пізнання не може розцвісти з голої емпірії. Такий розквіт можливий тільки з порівняння того, що придумане, з тим, що спостерігається» [21, с. 124], «Фізика є логічною системою мислення, що розвивається, основи якої можна одержати не виділенням їх якими-небудь індуктивними методами з досліду, а лише вільною вигадкою» [21, с. 226].

У другому розділі детально обґрунтовуються рівняння Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі.

Третій розділ посібника присвячений одержанню та поясненню ряду важливих наслідків системи рівнянь Максвелла. У цьому розділі обґрунтовуються закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу для системи, що складається із заряджених частинок і ЕМП.

У четвертому розділі розглядається один з найзагальніших методів розв'язку РМ – метод електромагнітних потенціалів, з допомогою потенціалів Лієнара-Віхерта знаходиться ЕМП довільно рухомої ЗЧ.

П'ятий розділ посібника присвячений одержанню й аналізу інших наслідків рівнянь Максвелла: існування та властивостей електромагнітних хвиль, обґрунтування формул Френеля для коефіцієнтів відбиття та пропускання електромагнітних хвиль. Також досить детально описані властивості дипольного випромінювання та межі застосування класичної електродинаміки.

Релятивістське, 4-вимірне подання електродинаміки зі значним числом прикладів наведено в шостому розділі посібника. Причому наголос робиться на поясненні та описі явища відносності електричного й магнітного полів.

У кінці кожного розділу наведені приклади розв'язування типових задач з посиланням на основні рівняння та формули теорії ЕМП. З метою оволодіння методами класичної й релятивістської електродинаміки та формування цілісних уявлень про структуру електродинаміки часто пропонується розв'язувати одну й ту ж задачу різними методами.

Зміст і розв'язок більшості задач ілюструють та конкретизують основні положення теорії, причому наголос робиться на якісній і фізичній стороні явища, а адекватний математичний апарат використовується для ознайомлення з методами теоретичної фізики. В основному пропо-

нуються задачі, для розв'язання яких необхідні розуміння основних теоретичних положень і принципів, а не складні математичні розрахунки. Так, умови багатьох задач характеризуються деякими симетріями, що вимагає фізичного аналізу при розв'язку в більшій мірі, ніж математичних розрахунків.

Зміст задач також перегукується зі шкільним і загальним курсом фізики. Це дає можливість більш цілеспрямовано готувати учителя фізики.

Особлива увага приділяється темам та задачам, які пов'язані з безпосереднім використанням й інтерпретацією рівнянь Максвелла в локальній та інтегральній формах.

Автор намагався показати, як з рівнянь Максвелла випливає спектр наслідків, які мають відношення практично до всіх розділів класичної фізики, показати красу й практичну значущість як РМ, так і всієї низки їх наслідків.

У посібнику використовується система одиниць СІ. Але в Додатках подані основні формули електродинаміки й у системі одиниць Гаусса, рекомендації щодо переведення формул з однієї системи одиниць в іншу, а також зв'язок між одиницями вимірювання електродинамічних величин в СІ та системі Гаусса.

У посібнику прийняті такі скорочення

ВЕП – вихрове електричне поле

ВСВ – власна система відліку

ЕМ – електромагнітний (електромагнітне)

ЕМП – електромагнітне поле

ЕП – електричне поле

ЗЧ – заряджена частинка

КЕТ – класична електронна теорія

ЛСВ – лабораторна система відліку

МП – магнітне поле

ПВ – принцип відносності

ППС – провідник з постійним струмом

РЗЧ – рухома заряджена частинка

СВ – система відліку

СЕППС – стаціонарне електричне поле постійного струму

СК – система координат

СН – співвідношення невизначеностей

СТВ – спеціальна теорія відносності

ФПКЕМП – формули перетворення компонент електромагнітного поля

\hat{f} – похідна за часом функції f .

Розділ 1. Рівняння МАКСВЕЛЛА у ВАКУУМІ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ДОСЛІДНИХ ФАКТІВ

Частина 1. Стаціонарні електричне та магнітне поля у вакуумі

1.1. Електромагнітна взаємодія. Предмет і методи класичної електродинаміки. Елементи диференційного та інтегрального числення векторів

Електромагнітна взаємодія – це особливий вид силової взаємодії між частинками, що несуть електричний заряд. Оскільки електромагнітна взаємодія найбільш повно описується в термінах електричного та магнітного полів, які створені зарядженими частинками, то електромагнітна взаємодія – це силова взаємодія між ЗЧ та електромагнітним полем, яке створено цими та іншими зарядженими частинками.

Електромагнітне поле – це особливий вид матерії, який характеризується взаємопов'язаними та взаємозумовленими електричними й магнітними полями.

Основним змістом і завданням класичної електродинаміки є формулювання основних законів електромагнітного поля (рівнянь Максвелла) в локальній формі та застосування цих законів для аналізу електромагнітних явищ. Локальний закон – це така математична форма (алгебраїчне чи диференційне рівняння) фізичного принципу або закону, у яку входять величини, що відносяться до однієї й тієї ж точки простору і до одного і того ж моменту часу. Наприклад, закон (1.17) – це інтегральна форма закону Кулона, а (1.19) – локальна форма цього ж закону.

В основі класичної електродинаміки, з точки зору ортодоксальної методики, лежать фундаментальні дослідні факти: закон Кулона, закон Ампера-Грассмана, закон Біо-Савара-Лапласа, закон збереження заряду, закон електромагнітної індукції. Закон, принцип, дослідний факт називають фундаментальним, якщо він не впливає як логічний наслідок з інших положень, принципів або експериментів.

Предметом вивчення електродинаміки є ЕМП та взаємодія ЕМП із зарядженими частинками.

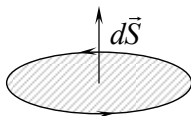
До методів класичної електродинаміки слід віднести векторний і тензорний аналіз, методи математичної фізики, математичний аналіз, а також експериментальні методи дослідження ЕМП.

В основі означення характеристик електричного та магнітного полів лежить силова дія електромагнітного поля на нерухомі ЗЧ та струми. Напруженість електричного та індукція магнітного полів $\vec{E}(\vec{r}, t)$,

$\vec{B}(\vec{r}, t)$ можуть змінюватись у просторі й у часі. І оскільки це векторні величини, то для опису цих змін використовується векторна алгебра і диференціальне й інтегральне числення векторів. При цьому дуже важливими величинами є циркуляція та потік векторного поля. Коротко нагадаємо означення цих та інших величин.

Означення: Потік векторного поля \vec{a} через нескінченно малу поверхню $d\vec{S}$ дорівнює скалярному добутку вектора \vec{a} на $d\vec{S}$:

$$dN = \vec{a} d\vec{S}, \quad (1.1)$$



де $d\vec{S}$ – вектор елементарної площадки – він чисельно $|d\vec{S}|$ дорівнює величині нескінченно малої поверхні dS , а за напрямком $d\vec{S}$ перпендикулярний до цієї елементарної поверхні. Причому, напрямком обходу контуру, що обмежує елементарну площадку, і вектор $d\vec{S}$ утворюють правий гвинт.

Означення: Циркуляцією векторного поля \vec{a} по замкненому контуру L називається інтеграл

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l}. \quad (1.2)$$

Приклад 1.1. Знайти циркуляцію вектора напруженості однорідного поля тяжіння по контуру 1234, рис. 1.1.

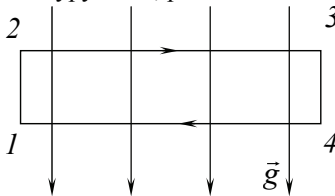


Рис. 1.1. Циркуляція однорідного поля \vec{g} по контуру 1234 дорівнює нулю

Розв'язання: Виходячи із взаємної орієнтації елемента довжини контуру $d\vec{l}$ і вектору \vec{g} в кожній точці контуру 1234 одержуємо

$$\oint_L \vec{g} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{g} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{g} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{g} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{g} d\vec{l} = -gl_{12} + gl_{34} = 0. \quad (1.3)$$

Якщо циркуляція векторного поля дорівнює нулю, то це поле є потенційним. Застосування теореми Стокса до результату (1.3) дає диференційну умову потенційності векторного поля

$$\text{rot}\vec{g} = 0. \quad (1.4)$$

Теорема 1. Якщо в просторі задане скалярне поле $\varphi(\vec{r})$ (наприклад деяке температурне поле t^0 , поле електричного потенціалу, тиску і т. д.), то похідна цього скалярного поля за деяким напрямком $\vec{\tau}$ у просторі дорівнює проекції градієнта цього поля на вибраний напрямок $\vec{\tau}$.

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \text{grad}_{\tau}\varphi \quad (1.5)$$

Дійсно, оскільки $d\vec{\tau} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, а повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ дорівнює

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

то повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ можна подати у вигляді

$$d\varphi = \text{grad}\varphi d\vec{\tau} = \text{grad}_{\tau}\varphi d\tau, \quad (1.6)$$

де

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.7)$$

Тоді з (1.6) одержуємо (1.5).

Таким чином, фізичний зміст градієнту скалярного поля: це вектор, у напрямку якого скалярне поле зростає найшвидше.

Може бути показано, що нескінченно малий потік довільного векторного поля \vec{a} через поверхню нескінченно малого кубика об'ємом $dV = dxdydz$ дорівнює (див. Приклади розв'язування задач, **Задача 1.1**)

$$dN = \vec{a}d\vec{S} = \text{div}\vec{a}dV, \quad (1.8)$$

де диференційна операція $\text{div}\vec{a}$ в декартовій системі координат визначається так

$$\text{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Якщо просумувати всі елементарні потоки dN через поверхню, яка охоплює деякий макроскопічний об'єм, то одержимо теорему Гаусса

$$\oint_V \vec{a}d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{a}dV. \quad (1.10)$$

Виходячи з теореми Гаусса, можна надати фізичного змісту операції $\text{div} \vec{a}$. Якщо взяти елементарний об'єм dV настільки малим, що в його межах величина $\text{div} \vec{a}$ залишається незмінною, то з (1.10) одержуємо

$$\text{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{a} d\vec{S}}{\Delta V}. \quad (1.11)$$

Дивергенція довільного вектора \vec{a} , $\text{div} \vec{a}$, – це межа, до якої прямує в даній точці поля відношення потоку векторного поля \vec{a} через довільну поверхню S , що охоплює цю точку, до величини об'єму ΔV , обмеженого цією поверхнею S при $\Delta V \rightarrow 0$.

Величину $\text{div} \vec{a}$ ще називають потужністю потоку векторного поля \vec{a} .

Теорема 2. Циркуляція векторного поля по нескінченно малому контуру C_1 дорівнює потоку ротора векторного поля \vec{a} через поверхню, яка спирається на цей контур (*Задача 1.2*):

$$\oint_{C_1} \vec{a} d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot} \vec{a} d\vec{S}. \quad (1.12)$$

Застосуємо тепер теорему (1.12) до кожної елементарної поверхні S_1, S_2, S_3, \dots , на які можна розбити будь-яку поверхню S , обмежену макроскопічним контуром L (рис. 1.2), і просумуємо.

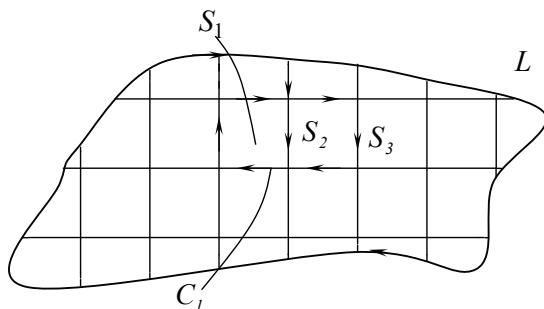


Рис. 1.2. До обґрунтування теореми Стокса

У результаті одержимо, що циркуляція векторного поля \vec{a} за цим контуром L визначається теоремою Стокса

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S}, \quad (1.13)$$

де $rot\vec{a}$ в декартовій системі координат дорівнює

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.14)$$

З теореми Стокса одержуємо величину нормальної складової $rot\vec{a}$

$$rot_n \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (1.15)$$

Диференційні операції другого порядку з допомогою оператора «набла» ∇ (Додаток А) подаються так:

$$\begin{aligned} div grad \varphi &= \nabla \cdot \nabla \varphi \\ rot rot \vec{a} &= [\nabla, [\nabla, \vec{a}]]. \\ div rot \vec{a} &= \nabla \cdot [\nabla, \vec{a}] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Більш детальний перелік формул векторного аналізу та коментарі до них наведені в Додатку А.

1.2. Закон Кулона. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції

Виявляється, що напруженість електричного та індукція магнітного полів $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ характеризуються певними властивостями і закономірностями. Ці властивості формулюються шляхом узагальнення деяких результатів і наслідків, що впливають з вищезазначених фундаментальних дослідних законів. Тому зупинимось на обґрунтуванні ряду закономірностей, які є наслідками фундаментальних законів.

Закон Кулона визначає силу взаємодії між двома точковими зарядженими частинками

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.17)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, який визначає положення однієї ЗЧ відносно іншої.

Якщо ввести напруженість електричного поля \vec{E}_1

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.18)$$

то сила, що діє на другий заряд, може бути подана так:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E}_1. \quad (1.19)$$

Поки ми залишаємося в рамках статички (електростатички, магнітостатички, гравістатички), поняття поля носить умовний, формальний характер. Це формальне поняття, як і означення величин, з допомогою яких його описують. Це поле та його характеристики (напруженість поля, потенціал поля) уводять тільки з міркувань зручності опису взаємодій між частинками. Наприклад, стан системи та її енергія в електростатичці однозначно визначається величинами зарядів ЗЧ та їх розташуванням в даний момент часу. Тому, зокрема в електростатичці, й можна вводити поняття потенціальної енергії, значення якої залежить від миттєвої конфігурації ЗЧ.

Це означає, що взаємодія в рамках будь-якої статички передається з нескінченною швидкістю. Тобто ЗЧ взаємодіють на відстані, без проміжного агента, «посередника», який передає взаємодію. Виявляється, що мовою таких формальних величин (потенціали) вдається сформулювати надзвичайно загальний і ефективний метод розв'язування відповідних задач (диференційні рівняння в частинних похідних).

Таким чином, введення понять напруженості поля, потенціалу поля в електростатичці ще не означає, що ми повністю реалізували концепцію поля (теорія близькодії). У рамках електростатички, магнітостатички всі закони й формули записуються, формулюються, насправді, на уявленнях дальності. І тільки при переході до змінних полів виявляється, що поняття поля, введені таким чином, адекватно відображають фізичну реальність.

Тобто саме поле є фізичною реальністю. Тому електромагнітне поле, у загальному випадку, уже не може трактуватися як математичний образ.

Принцип суперпозиції: Сумарна напруженість електричного поля в деякій точці простору дорівнює сумі напруженостей електричних полів, що створюються в цій точці окремими точковими зарядженими частинками,

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i.$$

Якщо електричне поле створене не сукупністю ЗЧ, а деяким розподілом зарядів, то сумарне поле визначається за

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (1.20)$$

де $d\vec{E}$ – напруженість поля, що створюється в деякій точці простору зарядом dq , який знаходиться в нескінченно малому об'ємі dV . Розподіл зарядів описується з допомогою поверхневої, лінійної, об'ємної густин зарядів, σ, τ, ρ , які, відповідно, визначаються:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}; \tau = \frac{dq}{dl}; \rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1.21)$$

Приклад 1.2. Використовуючи закон Кулона та принцип суперпозиції записати вираз для вектора \vec{E} , що створюється неперервним розподілом зарядів, рис. 1.3.

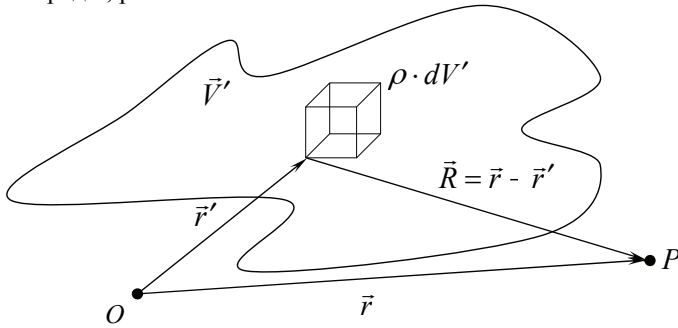


Рис. 1.3. Напруженість електричного поля, яке створюється неперервним розподілом зарядів, у довільній точці простору P визначається на основі закону Кулона та принципу суперпозиції

Розв'язання: Виділимо нескінченно малий об'єм dV' , тоді $dq = \rho \cdot dV'$ – величина заряду в об'ємі dV' , рис. 1.3.

На рис 1.3 \vec{R} – радіус-вектор, проведений від об'єму dV' до точки поля P , \vec{r} – радіус-вектор, проведений від початку координат системи відліку до точки поля, \vec{r}' – радіус-вектор, що визначає положення джерела поля $dq = \rho \cdot dV'$.

Згідно із законом Кулона (1.18) можемо записати

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R},$$

або

$$d\vec{E} = \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.22)$$

З урахуванням *принципу суперпозиції* для неперервного розподілу зарядів, сумарна напруженість електричного поля в точці P , набуває вигляду

$$\vec{E}_P = \int \frac{\rho(\vec{r}) dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.23)$$

У конкретних задачах знаходять спочатку компоненти векторних полів E_x, E_y, E_z , а потім і вектор поля \vec{E} .

Приклад 1.3. Нехай заряд рівномірно розподілений по кільцю, радіус якого R_0 , рис. 1.4. Лінійна густина заряду τ . Знайти напруженість електричного поля на осі кільця.

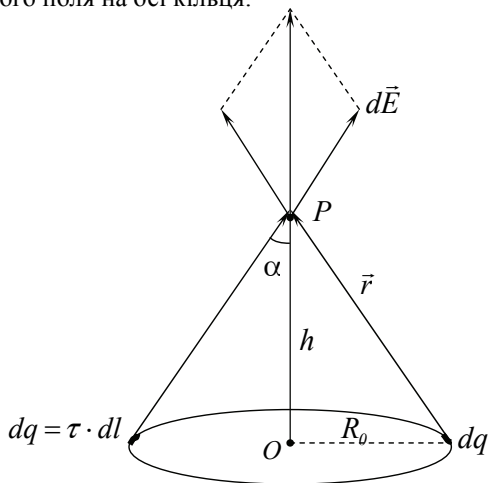


Рис. 1.4. Знаходження напруженості електричного поля на осі зарядженого кільця

Розв'язання: Використаємо закон Кулона і принцип суперпозиції.

Очевидно, що вектор напруженості електричного поля в точці P направлений по осі кільця. А величина його dE_h від елемента заряду $dq = \tau dl$ дорівнює

$$dE_h = dE \cdot \cos \alpha = dE \cdot \frac{2h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}},$$

де

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0(R_0^2 + h^2)},$$

тому

$$dE_h = \frac{2h\tau dl}{4\pi\epsilon_0(R_0^2 + h^2)^{3/2}}.$$

І, нарешті, сумарне поле знайдемо шляхом інтегрування за довжиною кільця:

$$E_h = \int dE_h = \frac{2h\tau \cdot \overbrace{2\pi R_0}^l}{4\pi\epsilon_0(R_0^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{2hq}{4\pi\epsilon_0(R_0^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (1.24)$$

де $q = \tau \cdot 2\pi R_0$ – величина розподіленого на кільці заряду.

1.3 Теорема Гаусса в інтегральній формі. Локальна форма теореми Гаусса. Рівняння Пуассона

Знайдемо потік вектора напруженості електричного поля \vec{E} , що створюється точковою зарядженою частинкою, величина заряду якої q , через довільну замкнену поверхню S , яка охоплює цей заряд. Для цього на поверхні S виберемо елементарну поверхню $d\vec{S}$, рис. 1.5. Тоді очевидно, що цей потік дорівнює

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = q \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\vec{S}.$$

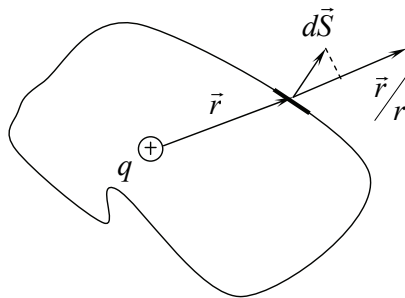


Рис. 1.5. Знаходження потоку вектора \vec{E} через довільну замкнену поверхню S

Тоді сумарний потік вектора \vec{E} дорівнює

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = q \oint_S \frac{dS'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0},$$

де $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = dS'$ – це величина проекції елементарної площадки $d\vec{S}$ на

площину, що перпендикулярна \vec{r} , а $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$ – елемент тілесного кута.

Принцип суперпозиції дозволяє узагальнити цей результат на заряд будь-якої величини та розподілу. І тоді одержуємо теорему Гаусса:

Потік вектора напруженості електричного поля \vec{E} через будь-яку замкнену поверхню, що охоплює довільний заряд, дорівнює величині цього заряду, поділеній на ϵ_0 .

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.25)$$

Наслідки теореми (1.25).

1. Якщо поверхня S не охоплює заряд q , то потік вектора напруженості електричного поля \vec{E} , яке створюється цим зарядом, через цю поверхню дорівнює нулю.

2. На сумарну величину потоку вектора \vec{E} не впливає рух зарядів у об'ємі, що обмежується поверхнею S .

3. Оскільки потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню визначається сумарною величиною заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні, то при переміщенні ЗЧ всередині поверхні напруженість електричного поля зміниться в кожній точці поверхні, а потік вектора \vec{E} залишиться незмінним.

Теорема Гаусса використовується для знаходження напруженості полів, які створюються симетричним розподілом зарядів.

Наприклад таких: поле заряду рівномірно розподіленого нескінченною плоскою поверхнею, поле зарядженої нитки, поле рівномірно зарядженої по поверхні або по об'єму кулі, рівномірно зарядженого по об'єму або по поверхні циліндра і т. п.

Використовуючи математичну теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV,$$

сформулюємо одне з рівнянь Максвелла в локальній формі:

$$\int \text{div} \vec{E} \cdot dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$$\int \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

де $q = \int_V \rho dV$, ρ – об'ємна густина заряду.

Оскільки об'єм інтегрування довільний, то рівність інтегралів означає і рівність підінтегральних виразів.

Тобто, теорема Гаусса в локальній формі (диференціальній формі) має вигляд

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (1.26)$$

Методика застосування теореми Гаусса (1.25) для знаходження поля, що створюється симетрично розподіленими зарядами.

1. Виходячи із симетрії задачі треба вибрати замкнену поверхню.
2. Знайти потік вектора \vec{E} через цю поверхню.

3. Знайти величину заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.

4. Розв'язати відповідне алгебраїчне рівняння та знайти значення напруженості електричного поля.

Електростатичне поле потенційне. Тобто, циркуляція вектора \vec{E} по будь-якому замкненому контуру в такому полі дорівнює нулеві:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.27)$$

Відомо, що для будь-якого потенційного векторного поля можна ввести скалярну функцію (потенціал $\varphi(\vec{r})$), градієнт якої визначає це векторне поле в довільній точці простору:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.28)$$

Формула (1.28) впливає також із співвідношень векторного аналізу. Дійсно, якщо застосувати теорему Стокса до інтегральної умови потенційності електростатичного поля (1.27), то одержуємо диференційну умову потенційності електростатичного поля

$$\text{rot}\vec{E} = 0. \quad (1.29)$$

І оскільки ротор градієнта скалярної функції завжди дорівнює нулю, то розв'язок рівняння (1.29) можна записати у вигляді (1.28). Знак мінус у (1.28) вибирають з фізичних міркувань. Якщо заряджені частинки знаходяться в обмеженій частині простору, то потенціал $\varphi(\vec{r})$, який створюється ними на нескінченності, приймається рівним нулю (калібровка скалярного потенціалу). І тоді потенціалу й різниці потенціалів можна надати простого фізичного змісту.

Тобто у випадку стаціонарного розподілу зарядів електричне поле можна описувати також і скалярним потенціалом $\varphi(\vec{r})$.

Після підстановки (1.28) в рівняння Максвелла (1.26) одержуємо рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.30)$$

Рівняння Пуассона дозволяє знайти потенціал електростатичного електричного поля за відомим розподілом зарядів у просторі $\rho(\vec{r})$.

Розв'язок (1.30) має вигляд (див також рис. 1.3)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (1.31)$$

у чому можна впевнитися після підстановки (1.31) в (1.30) та використавши при цьому властивості δ -функції (див. А.56).

Очевидно, що кожний з «точкових» зарядів $\rho(\vec{r}')dV'$ створює в точці P диференційно мале значення потенціалу $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$. Тому розв'язок (1.31) слід розуміти також як результат сумування внесків у потенціал $\varphi(\vec{r})$ в точці P від всіх «точкових» зарядів розподілу $\rho(\vec{r}')$, рис. 1.3.

Таким чином, ми маємо чотири способи знаходження напруженості електростатичного поля:

1) безпосереднє знаходження вектора \vec{E} на основі закону Кулона та принципу суперпозиції;

2) використання теореми Гаусса (1.25) у випадку симетрично розподілених зарядів; спочатку знаходиться потенціал електростатичного поля довільно розподілених зарядів:

3) з допомогою принципу суперпозиції та виразу для потенціалу, який створюється квазіточковим зарядом $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0 R}$, де $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – віддаль точки поля від квазіточкового заряду $\rho(\vec{r}')dV'$, рис. 1.3;

4) шляхом інтегрування рівняння Пуассона (розподіл зарядів у просторі $\rho(\vec{r})$ відомий).

А вже потім з допомогою (1.28) знаходиться напруженість електричного поля $\vec{E}(\vec{r})$.

1.4. Закон Ампера-Грассмана. Закон Біо-Савара-Лапласа та приклади застосування його. Сила Лорентца, сила Ампера

Переходимо тепер до опису властивостей магнітного поля постійних струмів.

Як стверджується в навчально-методичній літературі з електродинаміки, у результаті узагальнення дослідів Ампера з визначення сил взаємодії між елементами струмів було одержано такий результат:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi r_{12}^3} \cdot [d\vec{l}_2, [d\vec{l}_1, r_{12}]], \quad (1.32)$$

де $i_1 d\vec{l}_1$ – елемент 1-го струму; $i_2 d\vec{l}_2$ – елемент 2-го струму, \vec{r}_{12} – радіус-вектор, що визначає положення другого елемента струму відносно першого (рис. 1.6).

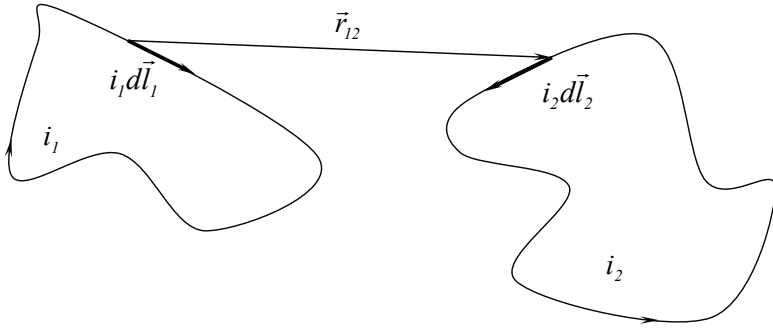


Рис. 1.6. Розташування двох елементів струму, взаємодія між якими визначається формулою Ампера-Грассмана

Формула Ампера-Грассмана (1.32), як бачимо, визначає силу взаємодії двох елементів струму. $d\vec{F}_{12}$ – сила, що діє на другий елемент струму з боку першого.

А сила, що діє на перший елемент струму з боку другого $d\vec{F}_{21}$, очевидно дорівнює

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi r_{21}^3} \cdot \left[d\vec{l}_1, \left[d\vec{l}_2, \vec{r}_{21} \right] \right].$$

Взаємодія відбувається через магнітне поле, тому закон Ампера-Грассмана в польовому трактуванні (локальна форма закону (1.32)) набуває вигляду

$$d\vec{F}_{12} = i_2 \left[d\vec{l}_2, d\vec{B}_1 \right], \quad (1.33)$$

де $d\vec{B}_1$ – магнітне поле, що створене першим елементом струму в точці знаходження другого елемента струму. З порівняння (1.32) та (1.33) випливає вираз для $d\vec{B}_1$

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi r_{12}^3} \cdot \left[d\vec{l}_1, \vec{r}_{12} \right]. \quad (1.34)$$

Узагальнюючи (1.34) на довільний елемент постійного лінійного струму, одержуємо закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \cdot \left[d\vec{l}, \vec{r} \right], \quad (1.35)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений від елемента струму $i d\vec{l}$ в дану точку поля.

Закон Біо-Савара (1.35) визначає величину та напрямок індукції магнітного поля, що створюється елементом струму $i d\vec{l}$ в довільній точці простору.

Але спочатку повернемося до формули (1.33).

Якщо будь-який елемент струму $i d\vec{l}$ знаходиться в довільному магнітному полі з індукцією \vec{B} , то узагальнюючи результат (1.33), приходимо до формули Ампера

$$d\vec{F} = i \cdot [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (1.36)$$

Може бути показано, що для металевих лінійних провідників має місце співвідношення

$$i \cdot d\vec{l} = q \vec{v} N, \quad (1.37)$$

де N – це кількість зарядів q , які реалізують елемент струму $i d\vec{l}$, \vec{v} – дрейфова швидкість цих позитивних зарядів.

Тоді сила, що діє на окрему ЗЧ, величина заряду якої q ,

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{N} = q [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.38)$$

Це сила Лорентца, сила, що діє на окрему ЗЧ, яка рухається зі швидкістю \vec{v} в магнітному полі з індукцією \vec{B} .

Розглянемо задачу на використання закону Біо-Савара.

Приклад 1.4. Розглянемо довгий прямолінійний провідник зі струмом i . Знайдемо магнітне поле, яке створюється цим провідником в довільній точці поля, рис. 1.7.

Розв'язання: Нескінченно мале значення індукції магнітного поля, що створюється нескінченно малим елементом струму $i d\vec{l}$ в точці P , згідно із законом Біо-Савара, дорівнює:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \cdot dl \cdot r \cdot \sin \theta.$$

Враховуючи, що $\frac{R}{r} = \sin \theta$ (див. рис. 1.7), маємо

$$\frac{dS}{dl} = \sin \theta,$$

а з іншого боку $dS = r \cdot d\theta$, і тоді з допомогою принципу суперпозиції одержуємо

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 i \cdot dl \cdot r \cdot \sin \theta}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}. \quad (1.39)$$

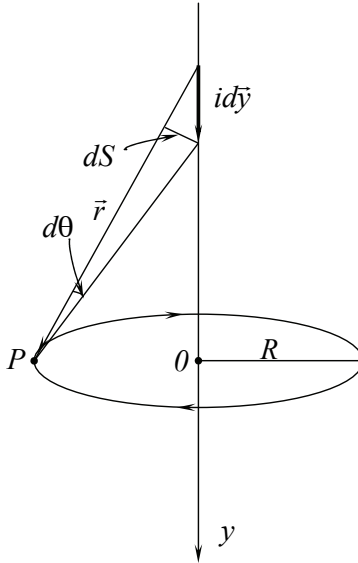


Рис. 1.7. По лінійному довгому провіднику протікає струм i .

Магнітне поле в точці P являється суперпозицією $d\vec{B}$, що породжуються всіма елементами струму

1.5. Принцип суперпозиції для магнітних полів. Магнітне поле, що створюється рівномірно рухомою зарядженою частинкою. Взаємодія двох струмів. Різні способи означення одиниці магнітної індукції

Оскільки закон Біо-Савара визначає магнітне поле, що створюється елементом струму. Припускаючи, що всі заряди, які реалізують елемент струму, рухаються з однаковою швидкістю \vec{v} (рис. 1.8), ми можемо знайти, користуючись принципом суперпозиції, магнітне поле, що створюється однією ЗЧ, яка рухається зі швидкістю \vec{v} . Закон (1.35) запишемо у вигляді

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 q N}{4\pi r^3} \cdot [\vec{v}, \vec{r}] = \vec{B}_1 \cdot N. \quad (1.40)$$

Тоді індукція магнітного поля, яке створюється однією рухомою ЗЧ визначається формулою

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \cdot q}{4\pi r^3} \cdot [\vec{v}, \vec{r}] = \mu_0 \varepsilon_0 \left[\vec{v}, \frac{q\vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \right] = \mu_0 \varepsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}], \quad (1.41)$$

де \vec{E} напруженість електричного поля, що створюється зарядом q в даній точці поля.

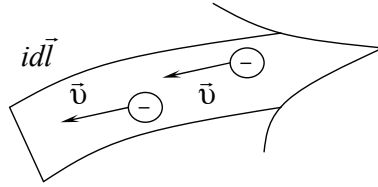


Рис. 1.8. Елемент струму $id\vec{l}$ реалізують рухомі ЗЧ в межах провідника довжиною dl , $i \cdot d\vec{l} = q\vec{v}N = \vec{j}dV$

Крім всього іншого, формулу (1.41) слід розуміти так, що магнітне поле створюється «рухомим» електричним полем, яке переміщується в просторі зі швидкістю \vec{v} :

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (1.42)$$

Ця формула справедлива також і для зарядів, що рухаються з релятивістськими швидкостями. Але для таких швидкостей напруженість електричного поля ЗЧ буде визначатись не співвідношенням

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

справедливим при $v \ll c$ ($\beta \ll 1$), а наступним:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.43)$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, θ – кут між вектором швидкості \vec{v} і радіус-вектором \vec{r} , проведеним від миттєвого положення ЗЧ у відповідну точку поля.

Рисунки, що наведені нижче, пояснюють деякі властивості векторів \vec{E} та \vec{B} електромагнітного поля РЗЧ: вектор \vec{E} за напрямком збігається з радіус-вектором \vec{r} , вектор \vec{B} перпендикулярний і радіус-вектору \vec{r} , і вектору \vec{E} .

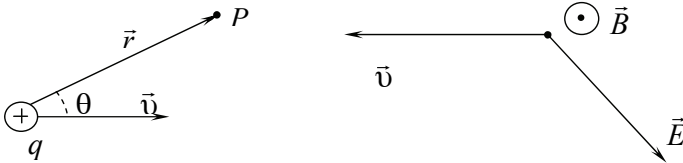


Рис. 1.9. Взаємна орієнтація векторів поля \vec{E} та \vec{B} електромагнітного поля рухомої ЗЧ

Тобто із закону Біо-Савара-Лапласа та виразу для індукції магнітного поля РЗЧ випливає, як наслідок, так зване правило бравучика.

Одиниці та розмірність індукції магнітного поля. Розглянемо два паралельні лінійні провідники зі струмами і знайдемо силу магнітної взаємодії між ними, що приходить на одиницю довжини.

Згідно з (1.36) та (1.39) ця сила дорівнює (рис. 1.10)

$$\Delta \vec{F} = i_2 \cdot [\Delta \vec{l}, \vec{B}_1] = i_2 \cdot \left[\Delta \vec{l}, \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} \vec{n} \right],$$

де \vec{n} – орт в напрямку вектора \vec{B}_1 .

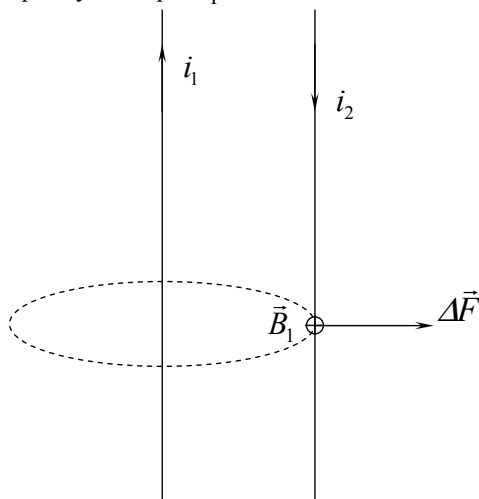


Рис. 1.10. Взаємодія паралельних лінійних провідників зі струмами

Тоді сила, яка приходить на одиницю довжини одного з провідників, дорівнює

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 \cdot i_1 \cdot i_2}{2\pi R}. \quad (1.44)$$

Ця формула використовується для означення одиниці сили струму в системі одиниць СІ: якщо по паралельним лінійним провідникам, що знаходяться на віддалі 1 м один від одного, протікає однаковий за величиною струм і сила магнітної взаємодії, яка припадає на 1 м довжини одного з них, дорівнює $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$, то по провідникам протікає струм силою в 1 А.

Одиниця індукції магнітного поля може бути введена на основі будь-якої формули, у яку входить величина \vec{B} . Наприклад використовуючи одну з формул (1.35), (1.36), (1.38), (1.39).

Зокрема, використовуючи (1.36), можна сказати, що коли на відрізок $\Delta l = 1\text{м}$ провідника зі струмом $i = 1\text{А}$ в магнітному полі діє максимальна сила $\Delta F = 1\text{Н}$, то індукція цього магнітного поля дорівнює 1Тл :

$$1\text{Тл} = \frac{1\text{Н}}{1\text{А} \cdot 1\text{м}}.$$

Визначальною формулою може бути також означення магнітного потоку

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= B \cdot \Delta S, \\ 1\text{Вб} &= 1\text{Тл} \cdot 1\text{м}^2. \end{aligned}$$

1.6. Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} . Приклади, що ілюструють застосування теореми про циркуляцію \vec{B} . Рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Знайдемо циркуляцію вектора \vec{B} по контуру довільною форми, який лежить в площині, перпендикулярній струму й охоплює цей струм, рис. 1.11.

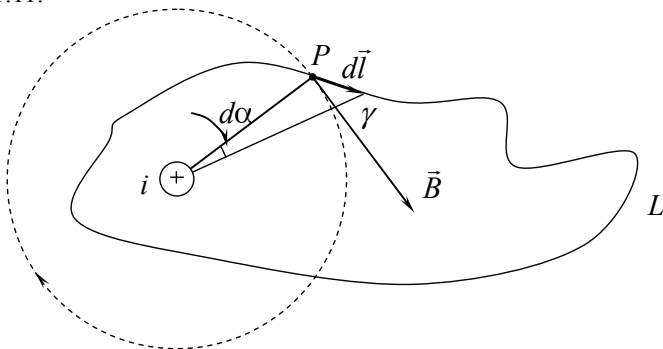


Рис. 1.11. Знаходження циркуляції вектора \vec{B} по контуру довільної форми

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{n} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_L \frac{\vec{n} \cdot d\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 i,$$

де \vec{n} – одиничний вектор у напрямку \vec{B} , $d\alpha = \frac{\vec{n} \cdot d\vec{l}}{R} = \frac{dl \cdot \cos \gamma}{R}$ – нескінченно малий кут, під яким видно елементарний відрізок $d\vec{l}$ контуру L (див. рис. 1.11).

Узагальнюючи цей результат на постійні струми довільної конфігурації, одержуємо *теорему про циркуляцію вектора \vec{B}* :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i. \quad (1.45)$$

Циркуляція вектора магнітної індукції по довільному замкненому контуру дорівнює μ_0 , помноженому на алгебраїчну суму сил струмів, які протікають через поверхню, що спирається на цей контур.

Як приклад розглянемо контур L , що охоплює три нескінченно довгі провідники зі струмами i_1, i_2, i_3 , рис. 1.12. Алгебраїчна сума сил струмів, що протікають через поверхню, яка спирається на контур L , дорівнює $i = i_1 - i_2 + i_3$. І тому циркуляція вектора \vec{B} по контуру довільною форми L дорівнює $\mu_0 i = \mu_0 (i_1 - i_2 + i_3)$, хоча значення вектора \vec{B} в кожній точці контуру різне і є сумою $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$.

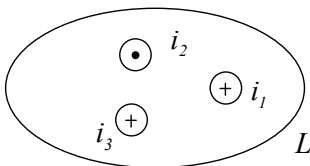


Рис. 1.12. Циркуляцію вектора \vec{B} по контуру довільної форми визначається тільки алгебраїчною сумою сил струмів, що протікають через поверхню, яка спирається на контур L

Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} означає, що циркуляція \vec{B} визначається тільки алгебраїчною сумою сил струмів, що охоплюються контуром L .

Теорема про циркуляцію використовується для знаходження магнітних полів, що створюються симетричними розподілами струмів.

Методика використання теореми про циркуляцію вектора для знаходження індукції магнітного поля.

1. Виходячи із симетрії задачі, вибираємо форму й розташування контуру L .

2. Знаходимо циркуляцію вектора \vec{B} : $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$.

3. Знаходимо алгебраїчну суму сил струмів i , що проходять через поверхню, обмежену цим контуром.

4. Розв'язуємо алгебраїчне рівняння, що відповідає теоремі (1.45).

Розглянемо тепер декілька способів обґрунтування рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (1.46)$$

яке є локальною формою теореми (1.45).

А. Найбільш розповсюджений в навчально-методичній літературі та простий спосіб одержання (1.46) полягає у використанні теореми про циркуляцію вектора \vec{B} , $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$ та поширенні її на випадок довільного розподілу об'ємних струмів, які характеризуються об'ємною густиною струму $\vec{j}(\vec{r})$. Тобто, теорема (1.45) у такому випадку набуває вигляду

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (1.47)$$

Перепишемо (1.47), використовуючи теорему Стокса,

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \\ \int_S (\operatorname{rot} \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) \cdot d\vec{S} &= 0, \end{aligned}$$

звідки і одержуємо, унаслідок довільності поверхні S , рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Слід зауважити, що сама теорема (1.45) аналітично виводиться на основі класичного закону Біо-Савара-Лапласа для лінійних струмів (при застосуванні (1.35), як правило, тільки для достатньо довгого провідника, по якому протікає постійний струм силою i).

Б. Другий спосіб обґрунтування (1.46) полягає в безпосередньому знаходженні операції ротора від індукції магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$, яке обчислюється згідно із законом Біо-Савара-Лапласа для довільного розподілу об'ємних струмів в інтегральній формі,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (1.48)$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \operatorname{rot} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (1.48a)$$

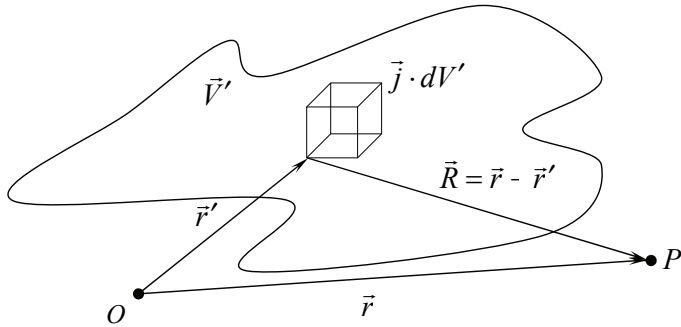


Рис. 1.13. До пояснення способу обґрунтування рівняння $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ в довільній точці простору

При використанні формули векторного аналізу

$$\text{rot}(u\vec{a}) = u\text{rot}\vec{a} + [\text{grad}u, \vec{a}]$$

підінтегральний вираз (1.48a) набуває вигляду

$$\text{rot} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{R^3} \text{rot}[\vec{j}, \vec{R}] + \left[\text{grad} \frac{1}{R^3}, [\vec{j}, \vec{R}] \right].$$

Ураховуючи, що в останній формулі операції ротора градієнта обчислюються за координатами точки поля, після нескладних, але кропітких перетворень одержуємо рівняння (1.46).

Обґрунтування рівняння $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ таким способом носить досить непереконливий і формальний характер.

Вважається, що густина струму $\vec{j}(\vec{r}')$ в кожному елементарному об'ємі dV' не залежить від магнітного поля, яке створюється іншими елементами струму $\vec{j}(\vec{r}')dV'$ даного розподілу струмів. Але як закон

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'$$

можна вважати узагальненням дослідних фактів, якщо з об'ємними струмами не проводилися експерименти?!

І по-друге, лінійний елемент струму $id\vec{l}$ як окремий і незалежний об'єкт, як окрему фізичну структуру неможливо реалізувати. Як же вдалося сформулювати закон Біо-Савара на базі такого скромного й неточного експериментального матеріалу? Складається враження, що закон Біо-Савара просто так сформульований, щоб несуперечливо пояснити хоча б взаємодію в нерелятивістському наближенні двох рухомих заряджених частинок [8, 219].

В. Спосіб, реалізований в підручнику академіка І. С. Тамма [16].

Шляхом математичних перетворень закон (1.48) можна подати у вигляді (*Задача 1.18*)

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.49)$$

де $A(\vec{r}, t)$ векторний потенціал постійних струмів і

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}. \quad (1.50)$$

Порівнюючи далі вираз для векторного потенціалу (1.50) з виразом для скалярного потенціалу електростатичного поля

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R},$$

який є розв'язком рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

можна припустити, що і вектор-потенціал (1.50) є розв'язком подібного диференційного рівняння:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (1.51)$$

Далі, використовуючи формулу векторного аналізу $\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \nabla \cdot \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ та умову калібровки вектор-потенціалу стаціонарного МП $\text{div} \vec{A} = 0$ (*Задача 1.19.*), одержуємо

$$\text{rot} \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (1.52)$$

і нарешті, порівнюючи (1.51) та (1.52), приходимо до рівняння (1.46).

Можна запропонувати й інший спосіб, який заснований на певній комбінації способів **Б** і **В**.

Г. Дійсно, неважко показати, що $\frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = \text{rot}_P \left(\frac{\vec{j}}{R} \right)$, де індекс P

означає, що операція ротора береться за координатами точки поля. Тоді маємо для підінтегрального виразу (1.48):

$$\text{rot} \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = \text{rot} \text{rot}_P \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \nabla \cdot \text{div}_P \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) - \nabla^2 \frac{\vec{j}}{R}, \quad (1.53),$$

а інтеграл за об'ємом струмів від величини (1.53) дорівнює

$$-\int_{V'} \vec{j} \nabla^2 \frac{1}{R} dV' - \int_{V'} \nabla_P \cdot \text{div}_Q \frac{\vec{j}}{R} dV' =$$

$$= 4\pi \int_{V'} \vec{j} \cdot \delta(R) dV' - \nabla_P \int_{V'} \operatorname{div}_Q \frac{\vec{j}}{R} dV',$$

де операція $\operatorname{div}_Q \frac{\vec{j}}{R}$ знаходиться за координатами точки, у якій розташовані струми.

А далі, враховуючи співвідношення $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(R)$ (див. Дода-

ток А) та $\int_{V'} \operatorname{div}_Q \frac{\vec{j}}{R} dV' = 0$ (*Задача 1.1.*), невимушено отримуємо (1.46).

Складається враження, що всі способи обґрунтування рівняння $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ носять надто формальний, штучний, а інколи й непереконливий характер. Усі вони потребують значної кількості формул векторного аналізу та векторної алгебри, за якими важко простежити фізичну сторону явища. Єдиним і, можливо, вирішальним фактором прийнятності цих способів є експериментальне підтвердження висновків математичного формалізму магнітостатики.

Зокрема розв'язок рівняння Пуассона (1.51) в області простору поза межами струмів провідності дає значення $\vec{B}(\vec{r})$, які відповідають дійсності. У цих точках $\vec{B}(\vec{r}) \neq 0$, а $\vec{j} = 0$. Так чим же і як створюється там магнітне поле?!

Як це може бути, що струми провідності не рівні нулю в одній частині простору, а магнітне поле з'являється в тих точках простору, де відсутні струми? Відповіді на подібні питання математичний формалізм не дає. Можливо, бездоганного способу обґрунтування (1.46) і не існує, оскільки відсутній логічний шлях від дослідних фактів якісного рівня до теоретичного рівняння. «Рівняння Максвелла є прикладом фундаментального закону, явно вгаданого, а не «виведеного» в ригористичному сенсі цього слова, з експериментальних даних» [20, 319].

Таким чином, маємо наступні способи розрахунку індукції магнітного поля стаціонарних струмів.

1. Безпосереднє знаходження вектора \vec{B} на основі закону Біо-Савара та принципу суперпозиції.

2. Використання теореми про циркуляцію вектора \vec{B} (1.45) у випадку симетрично розподілених стаціонарних струмів.

Спочатку знаходиться векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r})$ магнітного поля довільно розподілених стаціонарних струмів $\vec{j}(\vec{r}')$.

3. З допомогою принципу суперпозиції та виразу для диференційно малого векторного потенціалу $d\vec{A}$, який створюється елементом струму $\vec{j}(\vec{r}') \cdot dV'$, $d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}') dV'}{4\pi R}$, де $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – віддаль точки поля від елементом струму $\vec{j}(\vec{r}') \cdot dV'$, рис. 1.13.

4. Шляхом інтегрування рівняння Пуассона для векторного потенціалу (1.51) (розподіл струмів $\vec{j}(\vec{r}')$ у просторі відомий).

А вже потім з допомогою (1.49) знаходиться індукція магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$.

Методи знаходження характеристик стаціонарних електричного і магнітного полів шляхом інтегрування рівнянь Пуассона (1.30) та (1.51) відповідно для скалярного і векторного потенціалів розглянуті в Розділі 4.

1.7. Приклади розв'язування задач

Задача 1.1. Знайти потік вектора \vec{a} через поверхню нескінченно малого кубика $dV = dxdydz$, рис. 1.14.

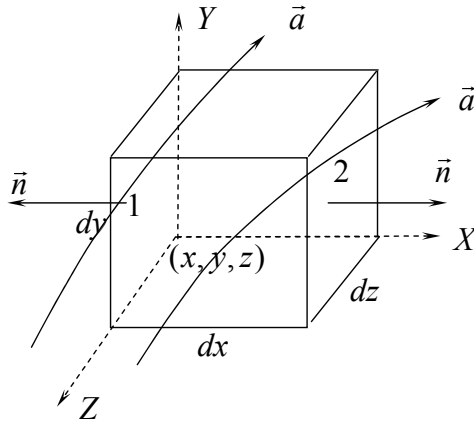


Рис. 1.14. Знаходження потоку векторного поля \vec{a} через грані кубика, об'єм якого дорівнює $dV = dxdydz$

Розв'язання: Очевидно, що сумарний потік вектора \vec{a} через поверхню кубика дорівнює сумі потоків через кожну з шести граней кубика:

$$dN = \oint \vec{a} d\vec{S} = dN_1 + dN_2 + dN_3 + dN_4 + dN_5 + dN_6.$$

Так, потоки через грані 1 та 2 дорівнюють відповідно

$$dN_2 = a_{2x} \cdot dydz = a_{2x}(x + dx, y, z) dydz,$$

$$dN_1 = -a_{1x} dydz = -a_{1x}(x, y, z) dydz,$$

де $a_{2x}(x + dx, y, z)$ – іксова компонента вектора \vec{a} в кожній точці грані 2, а $a_{1x}(x, y, z)$ – іксова компонента вектора \vec{a} в кожній точці грані 1.

Тому потік вектора \vec{a} через дві грані, першу та другу, дорівнює

$$dN_1 + dN_2 = (a_{2x} - a_{1x}) dydz.$$

З іншого боку, оскільки різниця $a_{2x} - a_{1x}$ є приростом вектора a_x при зміні координати x на dx , то з точністю до другого порядку цей приріст дорівнює

$$a_{2x} - a_{1x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot dx, \text{ тому } dN_1 + dN_2 = \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz,$$

аналогічно має бути показано, що

$$dN_3 + dN_4 = \frac{\partial a_y}{\partial y} dy dx dz,$$

$$dN_5 + dN_6 = \frac{\partial a_z}{\partial z} dz dx dy.$$

А отже, для сумарного потоку вектора \vec{a} через всі шість граней кубика одержуємо

$$dN = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div} \vec{a} \cdot dV. \quad (1.54)$$

Узагальнимо цю формулу для поверхні довільної форми й розмірів. Для цього розіб'ємо обмежений замкнутою поверхнею S об'єм V системою взаємно перпендикулярних площин на сукупність малих кубів. Підрахуємо за допомогою одержаної нами формули (1.54) потік довільного вектора \vec{a} через поверхню кожного з кубиків, які знаходяться всередині замкнутої поверхні S і додамо. У результаті одержуємо

$$\sum dN = \sum \text{div} \vec{a} dV \rightarrow \sum dN = \int \text{div} \vec{a} dV.$$

Оскільки в суму $\sum dN$ потік вектора \vec{a} через кожен внутрішній кубик входить двічі, причому з протилежними знаками, тому всі доданки в сумі $\sum dN$, які відносяться до внутрішніх граней кубиків, скоротяться. і залишаться тільки сумарний потік через зовнішню поверхню S

$$\sum dN = \oint_S \vec{a} d\vec{S}.$$

Тобто ми обґрунтували теорему Гаусса

$$\sum dN = \oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

Задача 1.2. Знайти циркуляцію вектора \vec{a} по нескінченно малому контуру.

Розв'язання: Нехай контур 1234, рис. 1.15, знаходиться в площині XOY . Тоді, очевидно, що циркуляція вектора \vec{a} по нескінченно малому контуру дорівнює:

$$\begin{aligned} dC(XOY) &= \oint_{XOY} \vec{a} d\vec{l} = a_{1x} dx + a_{2y} dy - a_{3x} dx - a_{4y} dy = \\ &= \frac{\partial a_y}{\partial x} dx \cdot dy - \frac{\partial a_x}{\partial y} dy \cdot dx = dxdy \cdot \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = dxdy \cdot \operatorname{rot}_z \vec{a}, \end{aligned}$$

де $a_{2y} - a_{4y} = \frac{\partial a_y}{\partial x} dx$ – приріст ігрекової компоненти вектора \vec{a} при зміні координати x на dx , $a_{3x} - a_{1x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} dy$ – приріст іксової компоненти вектора \vec{a} при зміні координати y на dy , див. рис. 1.15.

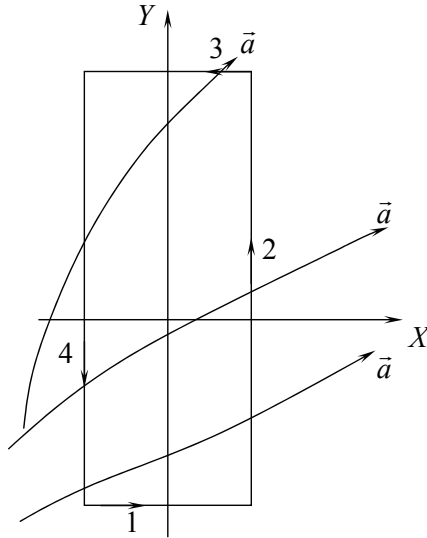


Рис. 1.15. Знаходження циркуляції векторного поля \vec{a} по нескінченному малому контуру, що лежить в площині XOY

Якщо ж зорієнтувати вектор площадки dS , яка охоплена контуром, уздовж осі OX , $\vec{n} \parallel x$ (тобто контур розмістити в площині YOZ), то для циркуляції вектора \vec{a} одержуємо

$$dC(YOZ) = \oint_{YOZ} \vec{a} d\vec{l} = dydz \cdot \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) = dydz \cdot \text{rot}_x \vec{a}.$$

Якщо ж уявити нескінченно малий контур, який розміщений в площині XOZ , $\vec{n} \uparrow \uparrow y$, то аналогічно одержуємо

$$dC(XOZ) = \oint_{XOZ} \vec{a} d\vec{l} = dx dz \cdot \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) = dx dz \cdot \text{rot}_y \vec{a}.$$

Таким чином, при довільній орієнтації нескінченного малого контуру циркуляцію вектора \vec{a} по цьому контуру можна подати тоді так:

$$\begin{aligned} dC &= \oint \vec{a} d\vec{l} = dydz \cdot \text{rot}_x \vec{a} + dx dz \cdot \text{rot}_y \vec{a} + dx dy \cdot \text{rot}_z \vec{a} = \\ &= \text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \text{rot}_n \vec{a} \cdot dS, \end{aligned}$$

де \vec{n} – додатна нормаль до $d\vec{S}$.

Тобто, циркуляція векторного поля \vec{a} по нескінченному малому контуру, який охоплює площадку $d\vec{S}$, дорівнює скалярному добутку $d\vec{S}$ і $\text{rot} \vec{a}$:

$$dC = \oint \vec{a} d\vec{l} = \text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}. \quad (1.55)$$

н.м.кон.

Задача 1.3. Обчислити циркуляцію вектора $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ по колу радіуса r_0 , розташованому в площині, перпендикулярній постійному вектору $\vec{\omega}$. Початок координат знаходиться в центрі кола. Обчислення провести безпосередньо і використовуючи теорему Стокса.

Розв'язання: Вектор $[\vec{\omega}, \vec{r}_0]$ згідно з умовами задачі в кожній точці кола направлений за дотичною до цього кола.

Тому

$$\oint_L [\vec{\omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{l} = \omega r_0 \int_L dl = 2\pi \omega r_0^2 \quad (1.56)$$

А з допомогою теореми Стокса шукана циркуляція дорівнює

$$\oint_L [\vec{\omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} [\vec{\omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{S},$$

де S – поверхня, що обмежена контуром L .

Знаходження $rot[\vec{\omega}, \vec{r}]$ з допомогою (A.5) дає $rot[\vec{\omega}, \vec{r}] = 2\vec{\omega}$.

Тому одержуємо

$$\int_S rot[\vec{\omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{S} = 2 \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 2\omega \int_S dS = 2\pi\omega r_0^2, \quad (1.57)$$

що збігається з (1.56).

Зазначимо ще раз, що поверхня S в теоремі Стокса може бути будь-якою поверхнею, але важливо, щоб вона спиралася на контур L . Припустимо, що в (1.57) ми інтегруємо за деякою поверхнею S_1 , яка не збігається з поверхнею круга радіуса r_0 . Тоді маємо

$$\int_{S_1} rot[\vec{\omega}, \vec{r}] \cdot d\vec{S} = 2 \int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 2\vec{\omega} \int_{S_1} d\vec{S}.$$

Уявимо собі замкнену поверхню, яка складається з S_1 та поверхні круга S : $S' = S_1 + S$. Очевидно, що $\oint_{S'} d\vec{S} = 0$, але тоді $\oint_{S'} d\vec{S} = \int_{S_1} d\vec{S} + \int_S d\vec{S} = 0$.

Але оскільки $\int_S d\vec{S} = \pi r_0^2 \vec{n}$, то $\int_{S_1} d\vec{S} = -\vec{n} \pi r_0^2$, де \vec{n} – одиничний

орт, перпендикулярний площині круга, і ми врахували, що в інтегралі $\oint_{S'} d\vec{S} = 0$ елемент поверхні $d\vec{S}$, як завжди, направлений за зовнішньою

нормаллю. Тому інтегрування за довільною поверхнею S_1 дає той же результат.

Задача 1.4. Обчислити потік радіус-вектора \vec{r} через поверхню круглого циліндра, рис. 1.16, безпосередньо та використовуючи теорему Гауса.

Розв'язання: Очевидно, що повний потік вектора \vec{r} через поверхню круглого циліндра дорівнює сумі потоків через бічну поверхню та його основи

$$\oint_S \vec{r} d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{r} d\vec{S}_0 + \int_{S_2} \vec{r} d\vec{S}_2 + \int_{S_1} \vec{r} d\vec{S}_1.$$

З означення елементарного потоку, та як видно з рис. 1.16, впливає, що потік через нижню основу дорівнює нулеві. А потік через бічну поверхню та верхню основу циліндра дорівнює

$$\oint_S \vec{r} d\vec{S} = \int_{S_0} R_0 \cdot dS_0 + \int_{S_2} h \cdot dS_2 = R_0 \cdot 2\pi R_0 h + h \cdot \pi R_0^2.$$

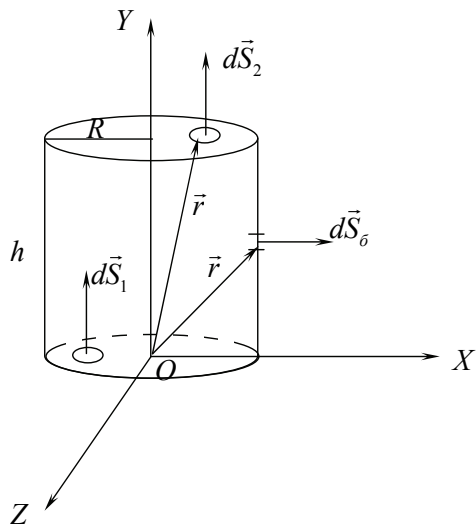


Рис. 1.16.

Тому сумарний потік вектора \vec{r} через поверхню циліндра дорівнює

$$\oint_S \vec{r} d\vec{S} = 3\pi R_0^2 h.$$

З іншого боку, згідно з теоремою Гаусса ми можемо записати

$$\oint_S \vec{r} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{r} \cdot dV.$$

Оскільки $\operatorname{div} \vec{r} = 3$, тому

$$\int_V \operatorname{div} \vec{r} \cdot dV = 3V = 3\pi R_0^2 h.$$

Таким чином, на конкретному прикладі ми впевнилися в справедливості теореми Гаусса і проілюстрували один зі способів знаходження потоків векторних полів.

Задача 1.5. Знайти потік вектора напруженості електричного поля ЗЧ через поверхню круглого циліндра. ЗЧ знаходиться в центрі основи циліндра, рис. 1.17, висота циліндра h , радіус R_0 .

Розв'язання: Оскільки $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$, то знаходження потоку вектора

\vec{E} зводиться до знаходження інтегралу $\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}$.

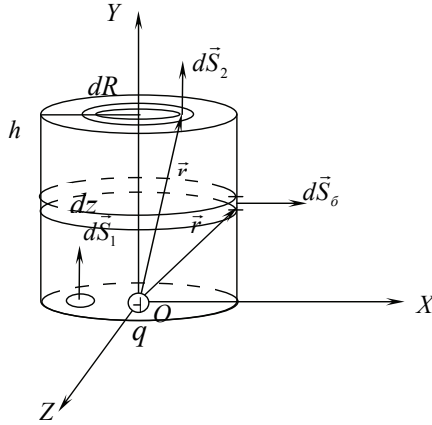


Рис. 1.17. Заряджена частинка знаходиться в центрі нижньої основи циліндра

Аналогічно до розв'язку попереднього прикладу маємо послідовність співвідношень:

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \int_{S_6} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_6 + \int_{S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_2 + \int_{S_1} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_1,$$

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \int_{S_6} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_6 + \int_{S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_2,$$

$$\int_{S_6} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_6 + \int_{S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}_2 = \int_{S_6} \frac{R_0 \cdot dS_6}{r^3} + \int_{S_2} \frac{h \cdot dS_2}{r^3}.$$

Щоб знайти потік вектора $\frac{\vec{r}}{r^3}$ через бічну поверхню, елементарну поверхню dS_6 вибираємо у вигляді циліндричного пояса, ширина якого dz і радіус R_0 . А елемент поверхні dS_2 на верхній основі циліндра вибираємо у вигляді кільця шириною dR та радіусом R . І тоді потік дорівнює

$$\int_{S_6} \frac{R_0 \cdot dS_6}{r^3} + \int_{S_2} \frac{h \cdot dS_2}{r^3} = \int_0^h \frac{R_0 \cdot 2\pi R_0 \cdot dz}{(z^2 + R_0^2)^{3/2}} + \int_0^{R_0} \frac{2\pi R \cdot dR \cdot h}{(h^2 + R^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2\pi R_0^2 \cdot h}{R_0^2 (h^2 + R_0^2)^{1/2}} + \left[2\pi - \frac{2\pi h}{(h^2 + R_0^2)^{1/2}} \right] = 2\pi.$$

У результаті інтегрування ми одержали по суті майже очевидний результат.

Дійсно, на основі властивостей інтегралів та означення потоку векторного поля потік вектора $\frac{\vec{r}}{r^3}$ через сферу радіуса r з центром в початку координат очевидно дорівнює

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \oint_S \frac{r}{r^3} dS = \oint_S \frac{dS}{r^2} = \oint_{\Omega} d\Omega = 4\pi,$$

де $d\Omega$ – елементарний тілесний кут.

А потік через будь-яку поверхню (наприклад, через півсферу), що знаходиться в половині простору, який виділяється площиною XOZ буде вдвічі менший. Тобто цей потік дорівнює 2π .

І нарешті, потік вектора \vec{E} через поверхню циліндра дорівнює

$$\oint_S \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi = \frac{q}{2\epsilon_0}.$$

Задача 1.6. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса r_0 . Користуючись рівнянням Максвелла (1.25) знайти напруженість електричного поля в будь-якій точці простору.

Розв'язання: Із симетрії задачі випливає, що поле буде централь-носиметричним, а тому замкнену поверхню S треба взяти у вигляді концентричної сфери радіуса r .

А. Розглянемо спочатку випадок, коли $r < r_0$. Тоді, використовуючи теорему Гаусса, маємо

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Величина заряду, що знаходиться всередині сфери радіуса r , дорівнює

$$q = \int \rho dV = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \int dV = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{Тому теорема Гаусса дає } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi r_0^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{Звідси одержуємо } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r.$$

Б. При $r > r_0$ $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, оскільки величина заряду,

який знаходиться всередині сфери радіуса r ($r > r_0$), дорівнює повному заряду кулі q .

Тому напруженість електричного поля в просторі поза межами кулі обернено пропорційна квадрату віддалі від центру кулі

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Залежність $E(r)$ зображена на рис. 1.18.

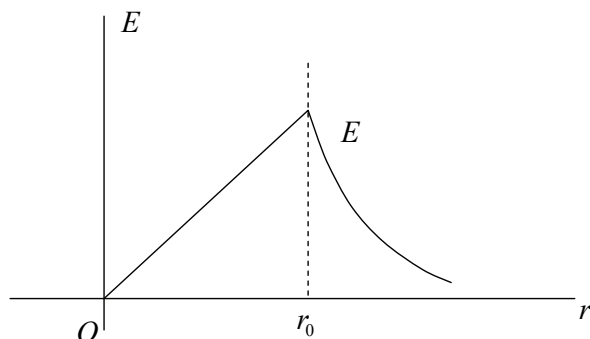


Рис. 1.18. Залежність напруженості електричного поля рівномірно зарядженої по об'єму кулі від r , $E(r)$

Задача 1.7. Упевнитися, що теорема Гаусса (1.25) справедлива і для напруженості електричного поля рівномірно та прямолінійно рухомої зарядженої частинки.

Розв'язання: Як відомо [1, 2, 7] (див. також Розділ 4), напруженість електричного поля рівномірно та прямолінійно рухомої ЗЧ визначається

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = \frac{q\vec{r}(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля, $\beta = \frac{v}{c}$, v – швидкість руху ЗЧ, θ – кут між напрямком руху ЗЧ і вектором \vec{r} .

Тому потік вектора \vec{E} через сферичну поверхню в ту мить, коли ЗЧ знаходиться в центрі цієї сфери, дорівнює

$$\begin{aligned}
 N &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint Er^2 d\Omega = \oint Er^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \\
 &= \frac{q(1-\beta^2)}{2\varepsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

де елементарна поверхня dS вибрана у вигляді сферичного пояса, причому вісь OZ сферичної системи координат збігається з вектором швидкості ЗЧ.

Оскільки $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, а $\sin\theta \cdot d\theta = -d\cos\theta$, то при введенні нової змінної $x = \cos\theta$ інтеграл в попередньому виразі дорівнює:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1-\beta^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{2}{\beta^3} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \right]_0^1 = \frac{2}{1-\beta^2},
 \end{aligned}$$

де $a^2 = (1-\beta^2)/\beta^2$.

Таким чином, ми одержали, що сумарний потік вектора \vec{E} , який породжується рівномірно рухомою ЗЧ дорівнює $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

Тобто, якщо величину заряду в деякому об'ємі визначати з допомогою теореми Гауса (тобто, $q = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S}$), то цей результат означає, що величина заряду – інваріантна величина.

Задача 1.8. Знайти напруженість електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженої ниткою. Довжина нитки l , лінійна густина заряду τ .

Розв'язання: Використаємо закон Кулона та принцип суперпозиції. Виділимо на нитці нескінченно малий відрізок dy . Тоді компоненти напруженості поля в довільній точці P , рис. 1.19, дорівнюють

$$\begin{aligned}
 dE_x &= \frac{\tau dy \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + d^2)} = \frac{d\tau \cdot dy}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + d^2)^{3/2}}, \\
 dE_y &= \frac{\tau dy \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + d^2)} = \frac{\tau y \cdot dy}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + d^2)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

звідси

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}, \quad E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{y dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

У результаті інтегрування одержуємо

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{d^2 \sqrt{d^2 + y^2}} \Big|_{-(l-a)}^a = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{d^2 + (l-a)^2}} \right),$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2}} \right) \Big|_{-(l-a)}^a = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} \left(-\frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} + \frac{d}{\sqrt{d^2 + (l-a)^2}} \right).$$

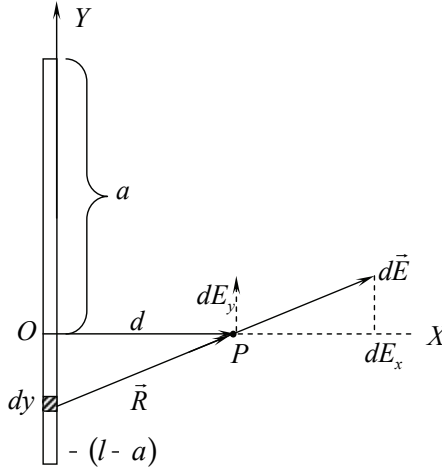


Рис. 1.19. Визначення напруженості електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженої ниткою

Або, якщо ввести кути α_1 та α_2 , $\sin \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}}$,

$\sin \alpha_2 = \frac{l-a}{\sqrt{d^2 + (l-a)^2}}$, то

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1), \quad E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Якщо нитка нескінченно довга, то $E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 d}$, а $E_y = 0$.

Задача 1.9. Виходячи із закону Кулона і принципу суперпозиції знайти напруженість електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженою по поверхні сферою та циліндром. Поверхнева густина заряду σ , радіус сфери та циліндра a .

Розв'язання: Знову використаємо закон Кулона і принцип суперпозиції. Напруженість поля в точці простору P , яке створюється елементом поверхні dS , вибраної у вигляді сферичного кільця, рис. 1.20, дорівнює

$$dE = \cos \alpha \cdot \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0\rho^2} = \cos \alpha \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0\rho^2 \cdot 4\pi a^2} \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a \cdot d\theta,$$

де $\cos \alpha = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho}$, $b = a \sin \theta$, $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$,

$$\cos \alpha = \frac{r - a \cos \theta}{\rho}, \quad \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta} = r - a \cos \theta.$$

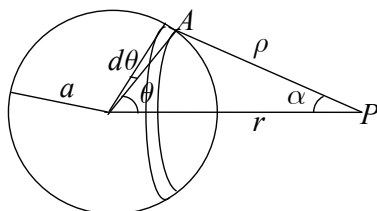


Рис. 1.20. Знаходження напруженості електричного поля рівномірно зарядженої сфери

Тоді, сумарне поле згідно з принципом суперпозиції дорівнює

$$E = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{\rho^2} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta}}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta \cdot d\theta =$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{1}{|r-a|} - \frac{1}{r+a} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{|r-a|} + \frac{1}{r+a} \right) + \frac{1}{ar^2} (r+a - |r-a|) \right\},$$

де $\sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta} = r - a \cos \theta$.

Таким чином, при $r > a$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а при $r < a$

$$E = 0$$

Знайдемо тепер поле, що створюється зарядженою циліндричною поверхнею.

Елементарному куту $d\theta$, рис. 1.21, відповідає нескінченно довга та вузька смужка зарядженої циліндричної поверхні. Поле, яке вона створює в точці P , визначається співвідношенням

$$dE = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \tau_n = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\rho} \cdot \frac{ad\theta \cdot \tau}{2\pi a},$$

де τ_n – лінійна густина заряду цієї смужки, $\tau = 2\pi a \cdot \sigma$ – лінійна густина заряду циліндру.

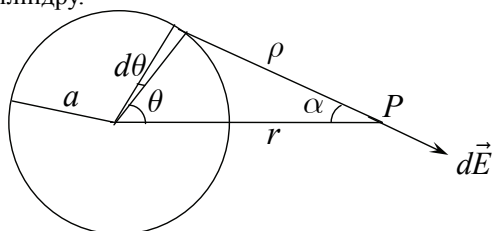


Рис. 1.21. Знаходження напруженості електричного поля рівномірно зарядженої циліндричної поверхні

Тоді результуюче поле направлене вздовж радіусу циліндра, а величина його

$$E = \frac{\tau}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha \cdot d\theta}{\rho},$$

де $\cos\alpha = \frac{r - a\cos\theta}{r}$, $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$, див. рис. 1.21.

Інтегрування дає

$$E = \frac{\tau}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(r - a\cos\theta) \cdot d\theta}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{|r^2 - a^2|} \right).$$

Проаналізуємо одержаний результат.

Поза межами циліндру, ($r > a$)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

А всередині циліндру ($r < a$)

$$E = 0$$

Задача 1.10. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} в області перетину двох куль, рівномірно заряджених протилежними з знаками зарядами з об'ємною густиною ρ і $-\rho$, якщо відстань між центрами куль визначається вектором \vec{l} [4].

Розв'язання: Електричне поле в області перетину куль слід розглядати як суперпозицію електричних полів, які створюються в певній точці P в області перетину куль позитивно та негативно зарядженими кулями, рис. 1.22.

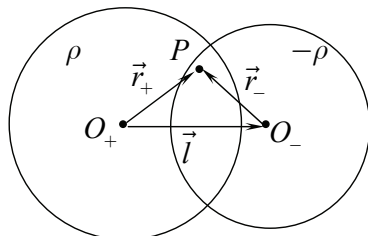


Рис. 1.22.

Напруженість електричного поля *всередині* рівномірно зарядженої кулі (**Задача 1.6**)

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений з центру кулі в дану точку поля.

Таким чином, у деякій точці P такої області напруженість електричного поля дорівнює

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}.$$

Тобто, поле в такій області є однорідним. Крім того, цей висновок справедливий незалежно від радіусів куль та віддалі між їх центрами, і зокрема тоді, коли одна з куль знаходиться всередині іншої, рис. 1.23.

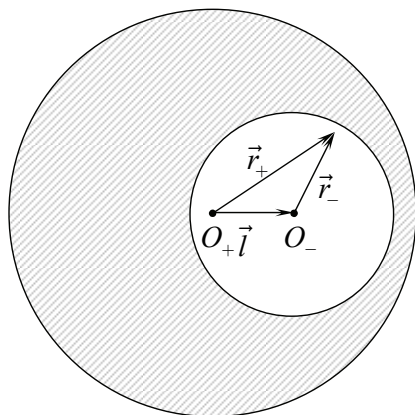


Рис. 1.23

Задача 1.11. Показати, що електричне поле в області перетину двох куль однакового радіусу (див. **Задачу 1.10**), якщо вектор зміщення центрів куль $\vec{l} = \Delta\vec{r} \ll$ радіусу кулі a , збігається з полем, що утворюється всередині кулі зарядом розподіленим з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. σ_0 – постійна, θ – полярний кут.

Розв'язання: Розглянемо дві кулі радіусу a , рівномірно заряджені по об'єму однаковими за модулями, але протилежними за знаками, зарядами. Якщо центри куль змістити на $\vec{l} = \Delta\vec{r}$, то згідно з розв'язком попередньої задачі напруженість електричного поля в області перетину двох куль

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{l}}{3\epsilon_0}, \quad \rho l = 3\epsilon_0 E.$$

Якщо $\vec{l} = \Delta\vec{r} \ll a$, то заряд, не рівний нулю, буде розташований тільки в поверхневих шарах серповидної форми, рис. 1.24. Максимальна товщина їх дорівнює $|\vec{l}| = |\Delta\vec{r}|$ і може бути зробленою нескінченною малою. Таким чином, при $|\vec{l}| = |\Delta\vec{r}| \ll a$ ми приходимо до уявлення про поверхневу густину заряду в цих серповидних областях. Товщина зарядженого серповидного тоненького шару, очевидно, залежить від полярного кута θ і дорівнює $l \cos\theta$.

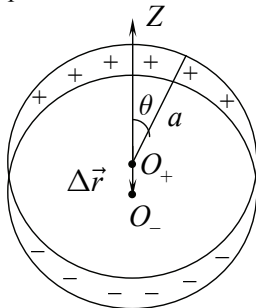


Рис. 1.24. Знаходження напруженості електричного поля в області перетину двох однакових куль при умові $|\vec{l}| = |\Delta\vec{r}| \ll a$

Якщо на поверхні серповидного шару вибрати елемент поверхні dS , то величина заряду на цьому елементі може бути подана, як

$$\sigma \cdot dS = \rho \cdot dS \cdot l \cos\theta.$$

Тобто поверхнева густина заряду в областях утворення полярних «шапок», які зображені на рис. 1.24, дорівнює

$$\sigma = \rho l \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta = 3\epsilon_0 E \cos\theta.$$

Таким чином, можна стверджувати, що поверхневий розподіл заряду $\sigma = \rho l \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$ створює всередині кулі довільного радіуса поле, що визначається формулою

$$\vec{E} = -\frac{\rho l \vec{k}}{3\epsilon_0} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{k},$$

де \vec{k} – одиничний орт осі OZ , від якої відраховується кут θ .

Задача 1.12. Знайти потенціал і напруженість електричного поля, які створюються електричним диполем, рис. 1.25.

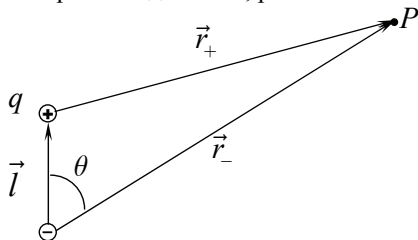


Рис. 1.25. Знаходження потенціалу диполя

Розв'язання: Очевидно, що потенціал дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_+ r_-}.$$

Оскільки $r \gg l$, $r_- - r_+ = l \cos \theta$, $r_+ r_- \approx r^2$, то

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3},$$

де $\vec{p} = ql\vec{l}$ – дипольний момент, \vec{r} – радіус-вектор від диполя в дану точку поля.

А напруженість електричного поля диполя дорівнює

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right].$$

Як бачимо розподіл потенціалу в просторі аксіально симетричний. Тому скористаємося циліндричною СК для знаходження компонент напруженості електричного поля диполя. Згідно з формулами (А.35) маємо

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Тоді модуль вектора \vec{E} дорівнює

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}.$$

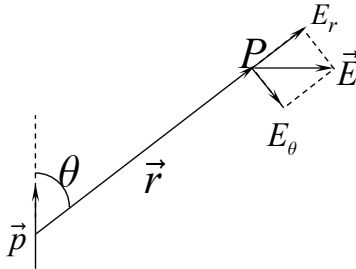


Рис. 1.26.

Задача 1.13. Металева куля радіуса R знаходиться в однорідному електричному полі E_0 . Знайти електричне поле поза межами кулі. Чому дорівнює дипольний момент кулі? Як розподілений по поверхні кулі індукований заряд?

Розв'язання: Виходячи із симетрії задачі введемо сферичну систему координат з початком в центрі кулі, рис. 1.27.

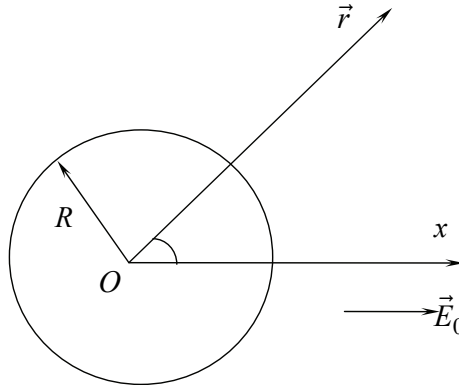


Рис. 1.27. До визначення потенціалу поля металевої кулі, що знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі E_0

Тоді потенціал в довільній точці простору поза кулею дорівнює

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

де φ_0 потенціал зовнішнього поля ($\varphi_0 = -E_0 x + C$), а φ_1 – потенціал, викликаний індукованими зарядами на поверхні кулі. Таким чином, можна записати

$$\varphi = -E_0x + \varphi_1 + C.$$

Потенціал φ_1 повинен визначатися так, щоб він задовольняв таким умовам:

1) φ_1 є розв'язком рівняння Лапласа $\nabla^2\varphi_1 = 0$;

2) $\varphi_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, що рівносильне вимозі

$$\varphi \rightarrow (-E_0x + C) \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

іншими словами, на великих відстанях від кулі зовнішнє поле практично залишається незбуреним;

3) $\varphi_1 = E_0x$ при $r = R$; ця умова означає, що потенціал $\varphi = -E_0x + \varphi_1 + C$ є постійним на поверхні кулі.

Оскільки потенціал φ_1 пропорційний густині заряду індукованого на поверхні кулі, а, очевидно, $\sigma \sim E_0$, то через симетрію задачі випливає, що потенціал φ_1 може залежати тільки від одного постійного вектора \vec{E}_0 . Крім того, потенціал φ_1 у всіх точках сфери, яка проходить через точку поля і яка концентрична поверхні кулі, однаковий.

Може бути показано, що єдиним таким розв'язком рівняння Лапласа, який прямує до нуля $\varphi_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, є

$$\varphi_1 = -\alpha E_0 \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \alpha \frac{\vec{E}_0 \vec{r}}{r^3},$$

де α – деяка константа.

З іншого боку, перерозподіл електронів металеві кулі в полі \vec{E}_0 приводить до виникнення дипольного моменту перерозподілених зарядів кулі. Але потенціал, що створюється диполем, дорівнює

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Тобто можна стверджувати, що дипольний момент металеві кулі, яка знаходиться в полі \vec{E}_0 , дорівнює

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \alpha \vec{E}_0.$$

На основі третьої граничної умови маємо

$$\frac{\alpha E_0}{R^2} \cos\theta = E_0 R \cos\theta.$$

Звідси $\alpha = R^3$, і для дипольного моменту отримуємо

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0.$$

Тоді вираз для потенціалу $\varphi = -E_0 x + \varphi_1 + C$ з урахуванням попереднього набуває вигляду

$$\varphi = -E_0 r \cos\theta \cdot \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) + C.$$

А розподіл зарядів визначається як

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \quad (1.58)$$

Але повний заряд дорівнює нулеві:

$$q = \int \sigma dS = 0.$$

А напруженість електричного поля біля поверхні металевої кулі

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3E_0 \cos\theta.$$

Видно, що величина напруженості поля змінюється від нуля до $3E_0$. Звичайно, у будь-якій точці кулі вектор \vec{E} направлений по нормалі до поверхні.

Раніше ми показали (*Задача 1.11*), що такий розподіл зарядів, (1.58), може бути зумовлений зсунутими одною відносно іншої зарядженими різними за знаком заряду сферами однакового радіусу.

Задача 1.14. По довгому циліндричному провіднику, радіус поперечного перерізу якого r_0 , протікає рівномірно розподілений струм i . Знайти магнітне поле в будь-якій точці простору.

Розв'язання: Виходячи із симетрії задачі контур L , уздовж якого будемо знаходити циркуляцію $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$, виберемо у формі концентричного

кола радіуса r , яке лежить в горизонтальній площині (провідник зі струмом i розташований у вертикальній площині).

Якщо $r \leq r_0$, то теорема (1.45) дає

$$\oint_{2\pi r} \vec{B} d\vec{l} = B \oint_{2\pi r} dl = B 2\pi r.$$

А сила струму, що протікає через площу круга обмеженого колом радіуса r , дорівнює

$$i = j\pi r^2 = \frac{i}{\pi r_0^2} \pi r^2.$$

Тому $B2\pi r = \frac{i}{\pi r_0^2} \pi r^2 \mu_0$,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_0^2} r.$$

Таким чином, при $r \leq r_0$ величина індукції магнітного поля пропорційна r .

Якщо $r \geq r_0$, то з допомогою (1.45) одержуємо

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = i\mu_0,$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Тобто, величина індукції магнітного поля B поза межами циліндричного провідника пропорційна $\frac{1}{r}$. Одержаний результат графічно зображений на рис. 1.28.

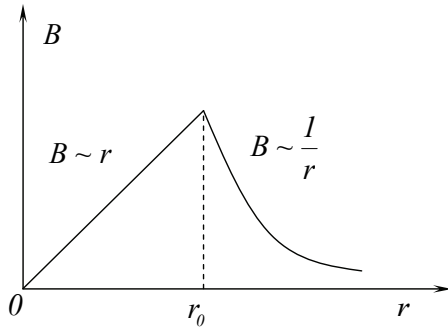


Рис. 1.28. Залежність індукції МП провідника зі струмом від r , $B(r)$

Задача 1.15. Знайти магнітне поле (і виразити через магнітний момент \vec{p}_m), що утворюється кільцевим струмом i на його осі. Обчислити $\int \vec{H} d\vec{l}$ уздовж осі.

Розв'язання: Векторна сума $d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$ індукцій магнітних полів, які створюються в точці P діаметрально протилежними елементами струмів idl_1 та idl_2 , направлена за віссю OZ , рис. 1.29.

Тому й результуючий вектор \vec{B} колового струму, очевидно, направлений за віссю OZ .

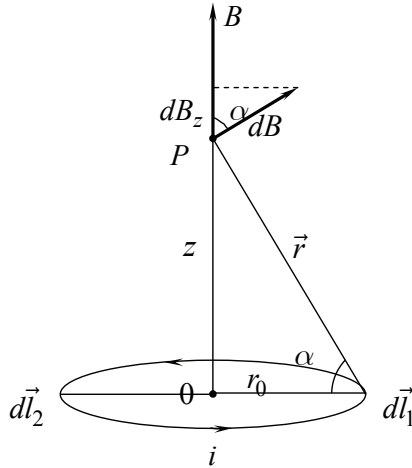


Рис. 1.29. Магнітне поле кільцевого струму

Його величина дорівнює

$$B = \int dB_z,$$

де $dB_z = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 \cdot idl \cdot \cos \alpha}{4\pi r^2}$. Ураховуючи, що $\cos \alpha = \frac{r_0}{r}$, а

$r^2 = z^2 + r_0^2$, після інтегрування одержуємо

$$B = \frac{\mu_0 2\pi r_0^2 \cdot i}{4\pi (z^2 + r_0^2)^{3/2}}.$$

Магнітний момент згідно з означенням дорівнює

$$\vec{p}_m = iS\vec{n}, \quad p_m = iS = i \cdot \pi r_0^2.$$

Тому індукція магнітного поля на осі кільцевого струму, як функція магнітного моменту, визначається

$$B = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi (z^2 + r_0^2)^{3/2}}.$$

Якщо $r_0 \ll z$, то

$$B = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi \cdot z^3}.$$

Остання формула є наслідком більш загального способу знаходження індукції МП, яке створюється магнітним моментом

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right\}, \quad (1.59)$$

де $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{p}_m, \vec{r}]$ – векторний потенціал елементарного струму, магнітний момент якого \vec{p}_m ; \vec{r} – радіус-вектор, проведений від «центру» елементарного струму (від магнітного моменту) в дану точку поля.

Знайдемо тепер циркуляцію вектора \vec{H} вздовж осі кільцевого струму.

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi r_0^2 \cdot i}{4\pi (z^2 + r_0^2)^{3/2}} dz = \frac{r_0^2 i}{2} \cdot \frac{z}{r_0^2 \sqrt{z^2 + r_0^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = i.$$

Задача 1.16. Використовуючи закон Біо-Савара, знайти магнітне поле, що утворюється прямолінійним струмом:

- довжини l ;
- нескінченної довжини.

Розв'язання: Виберемо вісь OY вздовж провідника з постійним струмом, рис. 1.30.

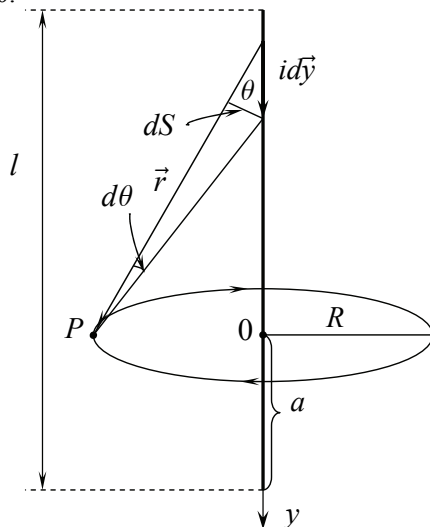


Рис. 1.30. Знаходження індукції МП прямолінійного провідника зі струмом

Тоді елемент струму $i d\vec{y}$ породжує згідно із законом Біо-Савара МП в точці P , вектор $d\vec{B}$ якого перпендикулярний і вектору $i d\vec{y}$, і вектору \vec{r} .

З рис. 1.30 видно, що і сумарний вектор \vec{B} має такий же напрямок. Величина індукції МП дорівнює

$$B = \int dB,$$

$$\text{де } dB = \frac{\mu_0 i dy}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad r^2 = y^2 + R^2, \quad \sin \theta = \frac{R}{r}.$$

У результаті інтегрування одержуємо

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \int \frac{\mu_0 i dy}{4\pi r^2} \sin \theta = \\ &= \int_{-(l-a)}^a \frac{\mu_0 i dy \cdot R}{4\pi (y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \left(\frac{y}{R^2 \sqrt{R^2 + y^2}} \right) \Big|_{-(l-a)}^a, \\ B &= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{R^2 + (l-a)^2}} \right). \end{aligned}$$

Якщо провідник достатньо довгий ($a, (l-a) \gg R$), то дужки в попередньому виразі дорівнюють 2, а для індукції МП нескінченного довгого ППС маємо

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

Задача 1.17. Намоткою довгого соленоїда служить тонка стрічка-провідник шириною h , яка намотана щільно в один шар по циліндру з радіусом перерізу a . Вздовж стрічки протікає струм I . Знайти магнітне поле \vec{B} всередині й зовні соленоїду [4].

Розв'язання: Очевидно, що вектор лінійної густини струму, який протікає вздовж стрічки, можна подати у вигляді векторної суми

$$\vec{i} = \vec{i}_\perp + \vec{i}_\parallel$$

З рис. 1.31 випливає, що

$$i_\perp = i \cos \alpha = i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{I}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2a\pi} \right)^2},$$

$$\text{а } i_\parallel = i \sin \alpha = \frac{I}{2a\pi}.$$

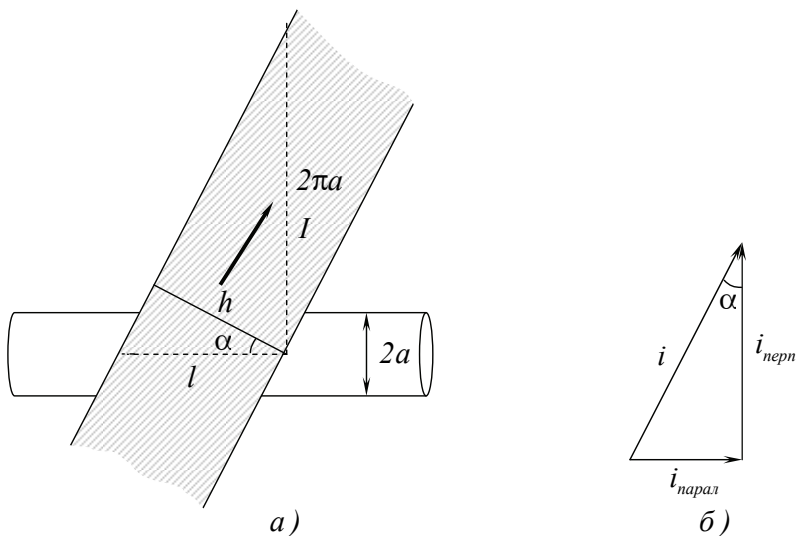


Рис. 1.31. Намоткою довгого соленоїда з радіусом перерізу a служить тонка стрічка-провідник шириною h

Значить МП буде існувати і всередині, і зовні соленоїда. МП зовні соленоїду визначається струмом, що протікає вздовж нього. Оскільки цей струм дорівнює $I_{\uparrow} = 2a\pi \cdot i_{\uparrow}$, то згідно з теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} , маємо при ($r > a$)

$$B_{\text{зовн}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

При ($r < a$), тобто всередині соленоїда, індукція МП дорівнює

$$B_{\text{всеп}} = \mu_0 i_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{h} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2a\pi}\right)^2}.$$

Задача 1.18. Показати, що закон Біо-Савара-Лапласа для об'ємних струмів (1.48) може бути поданий у вигляді $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, де

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}.$$

Розв'язання: Оскільки $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$, то векторний добуток

$\frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3}$, що входить у закон Біо-Савара (1.48), можна подати у вигляді

$$\frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right), \vec{j} \right].$$

З іншого боку, з допомогою формули векторного аналізу

$$\text{rot}(u\vec{a}) = u\text{rot}\vec{a} + [\text{gradu}, \vec{a}]$$

попередня формула переписеться так:

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{rot}\vec{j}(\vec{r}') + \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right), \vec{j} \right].$$

Оскільки $\text{rot}\vec{j}(\vec{r}') = 0$, то

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) = \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right), \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3}.$$

Підставляємо цей вираз у (1.48):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \text{rot} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) dV',$$

та враховуючи, що інтегрування за об'ємом V' не залежить від диферен-

ційної операції знаходження ротора $\text{rot} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right)$ за координатами точки

поля, одержуємо

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R} \right) = \text{rot}\vec{A},$$

де $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}$, що й треба було довести.

До речі, якщо розглядаються поля лінійних струмів, то вектор-потенціал лінійних струмів знаходять за формулою

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{id\vec{l}}{R}. \quad (1.60)$$

Задача 1.19. Упевнитися, що для довільного розподілу постійних струмів $\vec{j}(\vec{r}') = \text{const}$ дивергенція вектора $\vec{A}(\vec{r})$ завжди дорівнює нулю.

Розв'язання:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{div}_p \int \frac{\vec{j}}{R} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_p \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV,$$

$$\text{div}_p \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{div}_p \vec{j} + \vec{j} \nabla_p \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{j} \cdot \text{grad}_p \left(\frac{1}{R} \right),$$

бо $\text{div}_p \vec{j}(\vec{r}') = 0$.

Але $\vec{j} \nabla_p \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{j} \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right) = -\text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) + \frac{1}{R} \text{div}_q \vec{j}$, оскільки

$$\text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{div}_q \vec{j} + \vec{j} \nabla_q \left(\frac{1}{R} \right),$$

$\text{div}_q \vec{j} = 0$ як дивергенція густини постійного струму.

Тому $\text{div}_p \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = -\text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right)$, а $\text{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV$.

За теоремою Гаусса

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_q \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j} \cdot d\vec{S}}{R} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{j_n}{R} dS,$$

а інтегрування повинне виконуватися за поверхнею, яка охоплює провідники з постійним струмом. Але на поверхні будь-якого провідника зі струмом $j_n = 0$.

Таким чином $\text{div} \vec{A} = 0$.

Задача 1.20. Знайти магнітне поле в центрі кулі радіуса R , поверхня якої рівномірно покрита N паралельними досить тонкими витками зі струмом i .

Розв'язання: Розглянемо сукупність витків AB , які знаходяться на віддалі z від центру кулі, рис. 1.32.

Індукція МП, створена цими витками, в центрі кулі дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0 r_0^2 \cdot di}{2(z^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r_0^2 \cdot di}{2R^3},$$

де $d\vec{i} = in \cdot dz$, $n = \frac{N}{2R}$ – густина намотки, $r_0^2 = R^2 - z^2$.

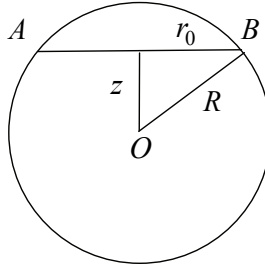


Рис. 1.32. Поверхня кулі радіуса R рівномірно покрита N паралельними досить тонкими витками зі струмом i

Тоді результуюче МП в центрі кулі згідно з принципом суперпозиції дорівнює

$$B = \int_{-R}^R \frac{\mu_0 r_0^2 \cdot ni}{2R^3} dz = \frac{\mu_0 ni}{2R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{\mu_0 ni}{2R^3} \cdot \frac{4R^3}{3} = \frac{\mu_0 N \cdot i}{3R}.$$

Задача 1.21. Проволока утворює плоску спіраль, рівняння якої в полярній СК має вигляд $r = \frac{l\varphi}{2\pi N}$, де N – число всіх витків, l – довжина радіус-вектора, проведеного від центру спіралі до її зовнішнього кінця, див. рис. 1.33. Сила струму в проволочі i . Знайти аксіальну складову магнітної індукції на осі спіралі.

Розв'язання: Згідно із законом Біо-Савара індукція МП, яке породжується елементом струму $i d\vec{l}$, в точці P дорівнює

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} [d\vec{l}, \vec{R}].$$

Якщо вибрати систему декартових і циліндричних координат, рис. 1.33, то

$$\begin{aligned} [d\vec{l}, \vec{R}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ -r \cos \varphi & -r \sin \varphi & z \end{vmatrix} = \\ &= z dx \vec{i} - z dy \vec{j} + (r \cos \varphi \cdot dy - r \sin \varphi \cdot dx) \vec{k}. \end{aligned}$$

Звідси для аксіальної складової вектора $d\vec{B}$ в точці P одержуємо:

$$dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} (r \cos \varphi \cdot dy - r \sin \varphi \cdot dx),$$

де $dx = d(r \cos \varphi)$, $dy = d(r \sin \varphi)$.

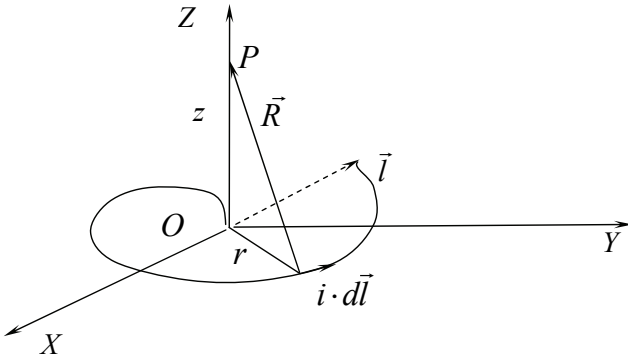


Рис. 1.33. Плоска спіраль зі струмом i

З урахуванням цього попередній вираз приймає форму

$$dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{r^2 d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Оскільки $d\varphi = \frac{2\pi N}{R} dr$, то інтегрування по r в межах від 0 до

R дає кінцевий результат

$$B_z = \int_0^R dB_z = \frac{\mu_0 N i}{2R} \left(\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

Частина 2. Нестационарне електромагнітне поле у вакуумі

1.8. Заряд і його властивості. Рівняння неперервності. Струми зміщення, різні способи обґрунтування. Рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Розглянемо об'єм V , обмежений замкненою поверхнюю S . Нехай у цьому об'ємі рухаються ЗЧ, розподіл яких у просторі задається густиною заряду $\rho(\vec{r})$, рис. 1.34.

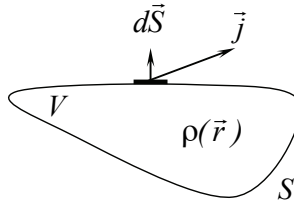


Рис. 1.34. Через замкнену поверхню S
в дану мить пройде заряд величиною $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Очевидно, що через елементарну поверхню $d\vec{S}$ за одиницю часу пройде заряд величиною $\vec{j} \cdot d\vec{S}$, де \vec{j} – густина струму, що пов'язана з рухом ЗЧ. Тоді через усю замкнену поверхню S за одиницю часу, а точніше в дану мить, пройде заряд величиною $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Це миттєве значення величини заряду, що проходить через цю поверхню.

Згідно закону збереження заряду миттєве зменшення величини заряду в об'ємі V дорівнює $-\frac{\partial q}{\partial t}$. Тобто інтегральна форма закону збереження заряду має вигляд

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1.61)$$

Використовуючи математичну теорему Гауса, перепишемо попереднє рівняння

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV,$$

де $\rho(\vec{r})$ – густина заряду.

Оскільки останнє рівняння справедливе для довільного об'єму V , то одержимо диференціальну форму закону збереження заряду

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.62)$$

Це закон збереження заряду в локальній формі або рівняння неперервності.

Деякі наслідки закону (1.62):

1. Для постійних струмів $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Тоді закон збереження заряду для постійних струмів має вигляд

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.63)$$

Тобто, лінії вектора \vec{j} замкнені.

Рівняння $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ – це I закон Кірхгофа в диференціальній формі.

Приклад 1.5. Упевнитися, що традиційне формулювання I-го закону Кірхгофа випливає з рівняння $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Розв'язання: В інтегральній формі I закон Кірхгофа (1.63) має вигляд

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \quad (1.64)$$

Дійсно, нехай у деякому вузлі сходяться три струми i_1, i_2, i_3 , рис. 1.35. Оточимо цей вузол замкненою поверхнею. Оскільки в даному прикладі заряджені частинки, які реалізують струми, перетинають тільки площі поперечного перерізу S_1, S_2, S_3 , тоді сила струму, що протікає через всю замкнену поверхню дорівнює

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{j}_2 d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{j}_3 d\vec{S} = i_1 - i_2 + i_3 = 0.$$

Рівняння Максвелла $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ та закон збереження заряду

$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ суперечать один одному.

Дійсно, знайшовши дивергенцію від обох частин рівняння $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ одержуємо, що ліва частина дорівнює нулю, оскільки $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$ завжди дорівнює нулю. А права частина рівняння при цьому дорівнює $\mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$.

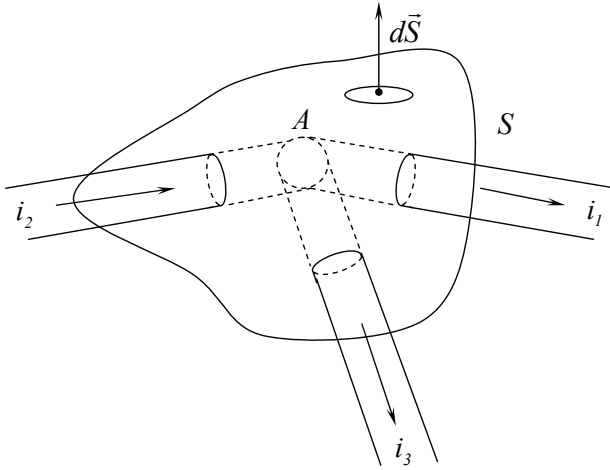


Рис. 1.35. Перший закон Кірхгофа являється наслідком закону збереження заряду (1.63)

Тобто для змінних струмів, коли $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, рівняння Максвелла $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ несправедливе.

Значить праву частину рівняння $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ слід доповнити таким доданком, щоб дивергенція від обох частин зміненої таким чином рівності була рівна нулеві. Максвелл прийняв гіпотезу, що крім струмів провідності \vec{j} , існують так звані струми зміщення $\vec{j}_{зм}$, такі, що $div(\vec{j} + \vec{j}_{зм}) = 0$. Тому використовуючи закон збереження заряду одержуємо

$$div \vec{j} = -div \vec{j}_{зм} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Похідну $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ знайдемо, використовуючи рівняння Максвелла

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \text{ Тоді } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 div \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ і попереднє рівняння набуває вигляду}$$

$$div \vec{j}_{зм} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 div \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Тобто густина струмів зміщення дорівнює

$$\vec{j}_{зм} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.65)$$

Таким чином, щоб два фундаментальних рівняння (1.46) і (1.62) були несуперечливі між собою, слід праву частину рівняння Максвелла $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ доповнити доданком $\mu_0 \vec{j}_{зм} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. І тоді одержуємо рівняння Максвелла для вихору магнітного поля

$$rot \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{зм}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.66)$$

Використовуючи теорему Стокса, знаходимо інтегральну форму цього рівняння Максвелла:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (1.67)$$

Має сенс розглянути ще один спосіб обґрунтування виразу для густини струмів зміщення.

Розглянемо конденсатор, який розряджається через опір R (див. рис. 1.36), і застосуємо теорему про циркуляцію вектора \vec{B} по плоскому контуру L , що охоплює струм i .

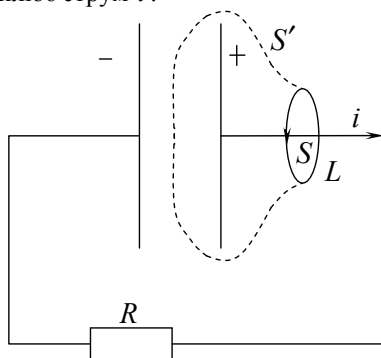


Рис. 1.36. Плоский конденсатор розряджається через опір R

На цей контур можна натягнути будь-які поверхні, і зокрема S та S' . Через S протікає струм провідності, а через S' струм провідності не протікає. Тобто виходить, що циркуляція вектора \vec{B} $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ начебто залежить від того, яка поверхня спирається на контур L . Але згідно із загальними положеннями теорії поля (положеннями векторного аналізу) цього не повинно бути. Як уникнути такої неясності та суперечності?

Оскільки поверхню S' перетинають тільки лінії вектора \vec{E} , то при використанні теореми Остроградського-Гаусса одержуємо

$$\oint_{S'+S} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}' = \frac{\partial q}{\partial t},$$

з іншого боку, згідно закону збереження заряду

$$\oint_{S'+S} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Додавши ліві та праві частини цих рівнянь маємо

$$\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0. \quad (1.68)$$

Висновки:

а) величина $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ має таку ж розмірність, як і густина струмів провідності; тому густина повного струму у вакуумі $\vec{j}_{нов} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$;

б) $\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$ означає, крім іншого, що лінії вектора

$\vec{j}_{нов} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ є замкнутими, неперервними;

в) означення повного струму знімає указану суперечність.

Дійсно, покажемо, що повна сила струму

$\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = i + i_{зм}$ буде мати одне і те ж значення як через

поверхню S , так і через поверхню S' , які спираються на один і той же

контур. Рівняння $\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$ можна записати й так:

$$\int_S \vec{j}_n d\vec{S} + \int_{S'} \vec{j}_n d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_{S'} \vec{j}_{зм} d\vec{S} = i_n(S) + i_n'(S') = 0.$$

Але, якщо на поверхні S' нормаль вибрати внутрішню, то доданок $i_n'(S')$ змінить знак на протилежний, і тоді маємо, рис. 1.37,

$$\begin{aligned} i_n(S) + i_n'(S') &= i_n(S) - i_n(S') = 0, \\ i_n(S) &= i_n(S'). \end{aligned}$$

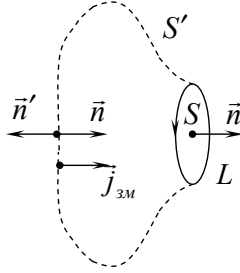


Рис. 1.37. Повна сила струму $\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = i + i_{zm}$

і через поверхню S , і через поверхню S' , які спираються на один і той же контур L , залишається незмінною.

Тобто теорему про циркуляцію вектора \vec{B} для довільного випадку (не тільки для постійних струмів) необхідно записати у вигляді

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (1.69)$$

1.9. Властивості струмів зміщення. Приклади застосування рівняння Максвелла для струмів зміщення

Приклад 1.6. Спираючись на концепцію струмів зміщення та одержані результати (теорема про циркуляцію вектора \vec{B} (1.69)) знайти величину індукції МП рухомої ЗЧ.

Розв'язання: Розглянемо точковий заряд q , який рухається з постійною швидкістю \vec{v} .

Відомо із закону Біо-Савара, що в точці P в дану мить буде створюватись цим зарядом магнітне поле, індукція якого визначається (1.41), (1.42):

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \left[\vec{v}, \vec{E} \right] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} \left[\vec{v}, \vec{r} \right]. \quad (1.70)$$

Обґрунтуємо цю формулу, спираючись на концепцію струмів зміщення.

Метод А. Для цього, виходячи із симетрії задачі, контур L виберемо у вигляді кола радіуса $r \sin \theta_0$, рис. 1.38.

Для того, щоб спростити знаходження струму зміщення

$$\int_S \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

через поверхню, яка спирається на цей контур, поверхню

цю виберемо у вигляді сферичного сегменту радіуса r . На його поверхні виділимо вузький «поясочок». Знайдемо елементарний потік через поверхню цього «поясочка»:

$$\vec{E}d\vec{S} = EdS = \frac{q}{2\varepsilon_0} \sin\theta d\theta,$$

де величина поверхні поясочка $dS = 2\pi \cdot r \sin\theta \cdot r d\theta$. А потік вектора \vec{E} через поверхню сегменту

$$\int \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos\theta_0).$$

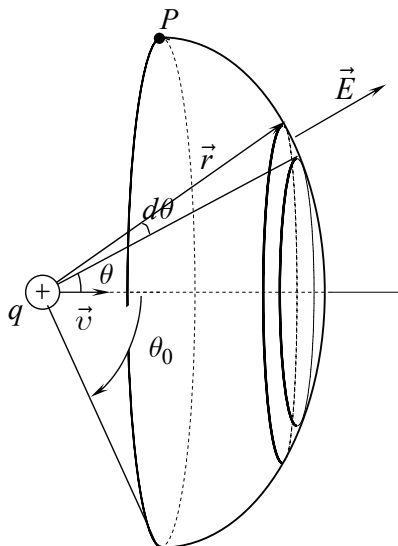


Рис. 1.38. Знаходження струму зміщення через поверхню сферичного сегменту

Знайдемо тепер $\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}d\vec{S}$, щоб потім скористатися теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} . Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{2\varepsilon_0} \sin\theta_0 \frac{d\theta_0}{dt}. \quad (1.71)$$

Для знаходження $\frac{d\theta_0}{dt}$ розглянемо рис. 1.39. З рис. 1.39 видно, що при переміщенні ЗЧ на $\vec{v}dt$ кут θ_0 зріс на $d\theta_0$. Причому

$$dl = d\theta_0 \cdot r, \quad r \cdot d\theta_0 = v \cdot dt \cdot \sin\theta_0.$$

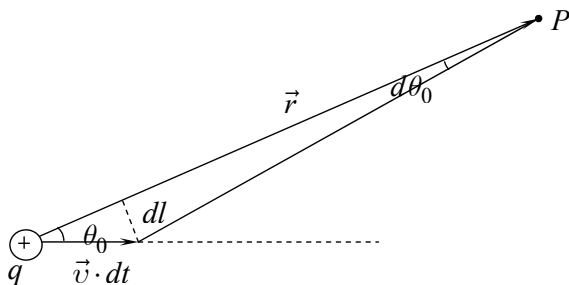


Рис. 1.39. Ілюстрація одного зі способів знаходження величини $\frac{d\theta_0}{dt}$

$$\text{Тобто } \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \sin \theta_0.$$

Тому сила струму зміщення через поверхню сферичного сегменту дорівнює

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{qv \cdot \sin^2 \theta_0}{2r}. \quad (1.72)$$

Виходячи із симетрії задачі, ми можемо стверджувати, що $B = \text{const}$ у кожній точці контуру L , на який спирається наш сегмент.

І тоді теорема про циркуляцію вектора \vec{B} набуває вигляду

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 2\pi R \cdot B = 2\pi r \cdot \sin \theta_0 \cdot B = \mu_0 \frac{qv}{2r} \sin^2 \theta_0,$$

звідки для індукції МП знаходимо

$$B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{qv \cdot \sin \theta_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 qv \cdot \sin \theta_0}{4\pi r^2}. \quad (1.73)$$

Або у векторній формі

$$\vec{B} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення ЗЧ в точку поля P .

Тобто спираючись на концепцію струмів зміщення, ми одержали вірний результат для індукції магнітного поля рівномірно рухомої ЗЧ

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}].$$

Таким чином, при русі ЗЧ магнітне поле в кожній точці простору створюється струмами зміщення. У даному випадку струми зміщення зумовлені рухом ЗЧ зі швидкістю \vec{v} .

Приклад 1.7. Плоский конденсатор з обкладками у вигляді дисків радіуса a і ємністю C підключений до змінної напруги $U = U_0 \sin \omega t$. Знайти:

- струм, що протікає через конденсатор;
- магнітне поле між пластинами конденсатора
- ємнісний опір конденсатора.

Розв'язання: Будемо вважати, що між пластинами знаходиться немагнітний діелектрик ($\mu = 1$) з діелектричною проникністю ε , рис. 1.40. Оскільки $U(t) = U_0 \sin \omega t$, то електричне поле між пластинами конденсатора змінюється за гармонічним законом

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

де ω – циклічна частота, E_0 – амплітудне значення напруженості електричного поля між пластинами конденсатора.

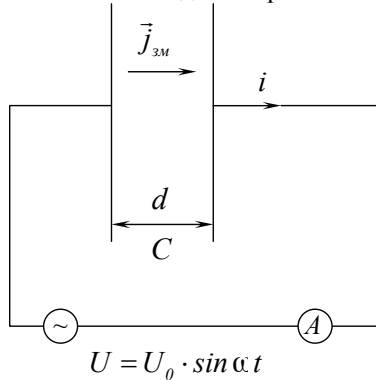


Рис. 1.40. Явище протікання змінного струму через конденсатор зумовлене повністю струмами зміщення. Амперметр вимірює силу струму зміщення

Тоді густина струму зміщення в кожній точці простору між пластинами конденсатора дорівнює

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega \cos \omega t.$$

А сила струму зміщення, який протікає через конденсатор, дорівнює

$$i_{zm} = \int_S \vec{j}_{zm} \cdot d\vec{S} = \varepsilon \cdot E_0 \varepsilon_0 \omega \cdot \cos \omega t \cdot \pi a^2 \frac{d}{d} = d \cdot E_0 C \omega \cos \omega t =$$

$$= \frac{U_0}{1/\omega C} \cos \omega t = \frac{U_0}{R_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (1.74)$$

де d – відстань між пластинами конденсатора, $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi a^2}{d}$ – ємність плоского конденсатора.

Значить, на основі (1.74) $R_C = \frac{1}{\omega C}$ є ємнісним опором конденсатора, а струм, що протікає через конденсатор, випереджає напругу на ньому на кут $\frac{\pi}{2}$.

Для знаходження напруженості МП використаємо рівняння Максвелла для струмів зміщення:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (1.75)$$

Контур L виберемо у вигляді кола, що лежить у площині, паралельній обкладинкам, і концентричного круговим обкладинкам ($r \leq a$).

Тоді циркуляція вектора \vec{B} по коловому контуру радіуса r дорівнює

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 i_{зм}.$$

Таким чином $B \cdot 2\pi r = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{d} \mu_0 \omega \cdot \pi r^2 \cdot \cos \omega t$.

Тобто, індукція магнітного поля в точці простору, що знаходиться на віддалі r від осі конденсатора, пропорційна r і випереджає прикладену напругу на кут $\frac{\pi}{2}$:

$$B = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 U_0 \cdot \omega r}{2d} \cdot \cos \omega t.$$

Тобто змінний струм протікає через конденсатор тільки завдяки струмам зміщення.

Таким чином, на основі поняття струму зміщення ми одержали:

а) вираз для ємнісного опору $R_C = \frac{1}{\omega C}$ та амплітудне значення сили струму, що протікає через конденсатор;

б) значення зсуву фаз $\frac{\pi}{2}$ між струмом і напругою на конденсаторі, причому, як бачимо, струм, який протікає через конденсатор, випереджає напругу на кут $\frac{\pi}{2}$;

в) фізичне пояснення механізму протікання змінного струму через конденсатор;

г) що струм зміщення $i_{зм} = \int_S \vec{j}_{зм} d\vec{S}$ між пластинами конденсатора замикається струмом провідності, який вимірюється амперметром. Тобто амперметр вимірює, власне кажучи, величину струму зміщення.

1.10. Закон електромагнітної індукції і рівняння Максвелла для вихору вектора \vec{E}

Явище електромагнітної індукції полягає у виникненні індукційного струму в замкненому колі при зміні магнітного потоку через поверхню, що опирається на цей контур (коло).

Закон електромагнітної індукції, або «правило потоку»,

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.76)$$

Величина ЕРС, що виникає в будь-якому контурі, чисельно дорівнює швидкості зміни магнітного потоку через довільну поверхню, яка опирається на цей контур.

Виходячи з означення ЕРС індукції та магнітного потоку, цей закон можна подати у вигляді (вважаємо при цьому, що форма контуру, а також поверхні, яка спирається на цей контур, не змінюються)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (1.77)$$

Цей закон електромагнітної індукції в інтегральній формі.

Якщо магнітний потік змінюється в часі, а контур залишається недеформованим і нерухомим, то $\frac{d\Phi}{dt}$ зумовлене тільки зміною вектора магнітної індукції в часі. І тоді закон ЕМІ набуває вигляду

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (1.78)$$

Використавши теорему Стокса, запишемо цей закон в локальній формі

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.79)$$

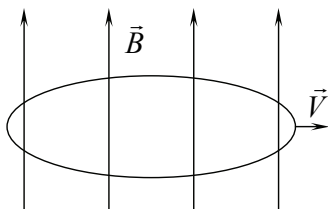
Це одне з рівнянь Максвелла в диференціальній формі

Хоча ЕРС індукції в довільному проволочному контурі визначається зміною магнітного потоку в часі, в основі цього явища лежать дві фізичні причини, різні за своєю природою:

1) індукційний струм в контурі може виникати за рахунок вихрового електричного поля при зміні індукції магнітного поля в часі;

2) індукційний струм у контурі може виникати за рахунок дії сили Лорентца на ЗЧ, що входять до складу провідників і рухаються разом з цими провідниками замкненого кола в стаціонарному або нестаціонарному магнітному полі.

Приклад 1.8. Однорідне магнітне поле. Коловий виток рухається перпендикулярно силовим лініям. При цьому виток перетинається лініями магнітного поля, але внаслідок того, що поле однорідне та стаціонарне, ЕРС індукції витку не буде виникати.



Приклад 1.9. Магнітне поле локалізоване в циліндричній області переріз якої на рис. 1.41 показаний у вигляді диска з крапками. Вектор $\vec{B} = const$ перпендикулярний площині рисунка. Ця циліндрична область охоплюється металевим кільцем K . Щупи гальванометра спочатку з'єднані в точці 1 кільця, а потім їх не відриваючи від кільця переводять в точку 2. Які будуть покази гальванометра?

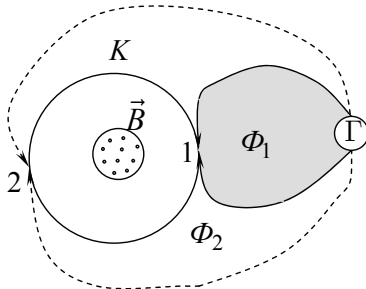


Рис. 1.41. Ілюстрація винятку із «правила потоку»:

$$\frac{d\Phi}{dt} \neq 0, \text{ але ЕРС індукції дорівнює нулю}$$

Розв'язання: Якщо не аналізувати фізичні причини виникнення ЕРС в контурі й формально застосувати «правило потоку» (1.76), то приходимо до висновку, що гальванометр зареєструє певний імпульс струму. Дійсно, у першому положенні щупів магнітний потік через поверхню контуру, який утворений двома щупами та гальванометром, дорівнює нулю, $\Phi_1 = 0$. А в положенні щупів 2, рис 1.41, магнітний потік через поверх-

ню контуру вже не дорівнює нулю, $\Phi_2 = \int_S \vec{B} d\vec{S} \neq 0$. При формальній

інтерпретації (1.76) ЕРС індукції виникає завжди, коли $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$.

У нашому випадку зміна магнітного потоку $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \neq 0,$$

але ЕРС індукції в контурі дорівнює нулеві, бо **жодна з двох причин виникнення ЕРС індукції не реалізується**.

Зміна вектора індукції МП в часі дорівнює нулю, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, оскільки

$\vec{B} = const$. Оскільки щупи при переміщенні їх з положення 1 в положення 2 рухаються в просторі, де відсутнє магнітне поле, то і сила Лорентца, яка повинна діяти на електрони провідності провідників, з яких зроблені щупи, щоб з'явився індукційний струм, теж дорівнює нулю, $\vec{F}_{Лор} = 0$. Наш замкнений контур переміщується в області, де немає магнітного поля.

Отже, цей приклад показує, що існують винятки з правила потоку (1.76).

Приклад 1.10. Розглянемо ще один приклад, який ілюструє виняток з «правила потоку». Нехай через однорідне стаціонарне магнітне поле протягують металеву стрічку зі швидкістю \vec{V} , рис. 1.42. Знайти ЕРС індукції в контурі, що показаний на рис. 1.42.

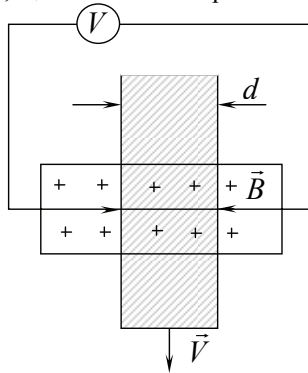


Рис. 1.42. У цій експериментальній ситуації $\frac{d\Phi}{dt} = 0$,

але ЕРС індукції не дорівнює нулю

Розв'язання: Вектор індукції магнітного поля перпендикулярний площині рисунку та площині стрічки. Очевидно, що магнітний потік через поверхню, обмежену контуром, у який включений вольтметр, дорівнює нулю, $\frac{d\Phi}{dt} = 0$.

Але ЕРС індукції не дорівнює нулю, $\varepsilon_i \neq 0$, оскільки на електроні металевої стрічки діє сила Лорентца. Ця ЕРС індукції якраз і зумовлена дією сили Лорентца на електрони, які рухаються разом зі стрічкою.

При цьому сила Лорентца відіграє роль сторонньої сили, яка при електричному контакті шупів вольтметра з металевою стрічкою виконує роботу

$$\int_0^d \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = qVBd. \quad (1.80)$$

Тому $\varepsilon_i = VBd$.

Таким чином, у кожній електродинамічній ситуації слід спочатку аналізувати фізичні причини (або дія сили Лорентца, або виникнення вихрового електричного поля), які можуть привести до появи ЕРС індукції, а вже потім знаходити величину ЕРС індукції.

Але більш детальний аналіз явища ЕМІ покаже, що вихрове електричне поле завжди визначається повною похідною вектора індукції МП за часом [25]:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (1.81)$$

де повна, або субстанціональна похідна за часом, $\frac{d\vec{B}}{dt}$, дорівнює (Додаток А)

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\text{grad})\vec{B}.$$

1.11. Соленоїдальність магнітного поля, дивергенція вектора \vec{B} , $\text{div}\vec{B} = 0$

Згідно з принципом суперпозиції та законом Біо-Савара індукція магнітного поля, що створюється довільним розподілом постійних струмів, визначається:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV'.$$

Використовуючи формулу векторного аналізу,

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$$

Перепишемо вираз для дивергенції індукції магнітного поля:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \operatorname{rot} \vec{j} - \vec{j} \cdot \operatorname{rot} \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV'.$$

Безпосереднім обчисленням можна впевнитися, що $\operatorname{rot} \vec{j}(\vec{r}') = 0$.

Дійсно густина струму $\vec{j}(\vec{r}')$ залежить від координат області V' $\vec{j}(x', y', z')$, де зосередженні струми, а ротор від $\vec{j}(\vec{r}')$ береться за координатами $\vec{r}(x, y, z)$ точки поля, тому $\operatorname{rot} \vec{j}(\vec{r}') = 0$. Безпосереднім

обчисленням може бути показано, що $\operatorname{rot} \frac{\vec{R}}{R^3} = 0$, оскільки $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

А операція ротора знаходиться за координатами точки поля $\vec{r}(x, y, z)$.

Тобто, магнітне поле соленоїдальне:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.82)$$

II спосіб доведення рівності $\operatorname{div} \vec{B} = 0$:

Використаємо закон електромагнітної індукції

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Знайдемо дивергенцію від обох частин цього рівняння:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}(t). \end{aligned}$$

Тобто $\operatorname{div} \vec{B}(t) = \text{const}$.

Цей результат слід розуміти таким чином.

При даному магнітному полі $\operatorname{div} \vec{B}$ така сама, як і $\operatorname{div} \vec{B}$ при будь-якому іншому значенні магнітного поля, і зокрема коли $\vec{B} = 0$. Але тоді $\operatorname{div} \vec{B} = \text{const} = 0$. Значить і при будь-якому іншому значенні індукції магнітного поля ми маємо $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

III спосіб доведення рівності $\operatorname{div} \vec{B} = 0$:

Розглянемо прямолінійний струм і знайдемо магнітний потік через поверхню круглого циліндра, вісь якого збігається з прямолінійним провідником зі струмом, рис. 1.43.

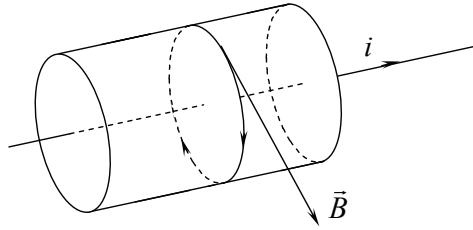


Рис. 1.43. Потік вектора індукції магнітного поля \vec{B} , що створюється прямолінійним струмом, через поверхню круглого циліндра дорівнює нулю

Силкові лінії вектора \vec{B} не перетинають основи циліндра, тому магнітний потік через основи циліндра дорівнює нулю. Силкові лінії \vec{B} не перетинають і бічну поверхню циліндра, тому магнітний потік через бічну поверхню теж дорівнює нулю. І як результат отримуємо $\text{div}\vec{B} = 0$.

1.12. Система рівнянь Максвелла у вакуумі в локальній та інтегральній формах

Таким чином, аналізуючи фундаментальні закони електродинаміки (закон Кулона, закон Ампера-Грассмана, закон Біо-Савара-Лапласа, закон збереження заряду, закон електромагнітної індукції) ми одержали рівняння Максвелла.

Якщо провідники, діелектрики, магнетики в ЛСВ не рухаються, то система рівнянь Максвелла-Лорентца у вакуумі в локальній та інтегральній формах у лабораторній системі відліку має такий вигляд.

Локальна форма рівнянь Максвелла-Лорентца:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I})$$

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{зм}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{II})$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{IV})$$

Інтегральна форма рівнянь Максвелла-Лорентца:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I})$$

$$\int_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(i + i_{zm}) = \mu_0 \left(i + \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \right) \quad (\text{II})$$

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (\text{III})$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (\text{IV}')$$

Це система рівнянь Максвелла у вакуумі.

Рівняння (I) є узагальненням закону Кулона і локальною формою цього закону, і йому можна надати таку інтерпретацію.

Оскільки div будь-якого вектора дорівнює потоку цього вектора з нескінченно малого об'єму, майже з точки, то:

1) у тих точках, у яких знаходяться позитивні заряди, $\rho > 0$, і $div \vec{E} > 0$. Тобто, з цих диференційно малих областей простору «витікає» вектор \vec{E} ; іншими словами, силові лінії електричного поля починаються на позитивно заряджених частинках;

2) у тих точках поля, де знаходяться негативні заряди, $\rho < 0$, силові лінії електричного поля закінчуються. У точках простору, у яких $div \vec{E} > 0$, знаходяться джерела електричного поля (тобто позитивні заряди виступають джерелами електричного поля). У точках поля, де $div \vec{E} < 0$, знаходяться стоки вектора \vec{E} (тобто негативно заряджені частинки є стоками вектора \vec{E}).

Потужність потоку вектору напруженості електричного поля дорівнює $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Фізично $div \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ визначає потужність джерел або стоків. Це локальна форма теореми Гаусса (I').

Рівняння (II) є узагальненням закону Біо-Савара та гіпотези Максвелла про струми зміщення. Це рівняння визначає величину і напрямок індукції магнітного поля, яке може породжуватись струмами провідності та струмами зміщення. З цього рівняння також слідує, що вихрове магнітне поле утворює правий гвинт з напрямком \vec{j} , якщо це струми провідно-

сті, і правий гвинт з напрямком $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, якщо це струми зміщення, рис. 1.44.

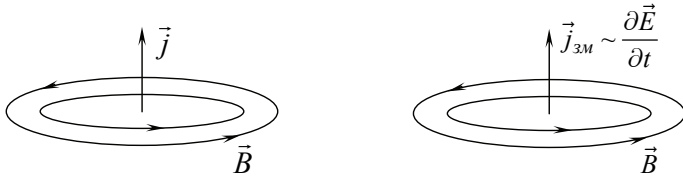


Рис. 1.44. Напрямок силових ліній вихрового магнітного поля

утворює правий гвинт з векторами \vec{j} та $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Таким чином, магнітне поле може створюватися:

- 1) постійними магнітами, намагніченість яких зумовлена спінами електронів (спін пов'язаний з власним магнітним моментом електрона);
- 2) струмами провідності;
- 3) змінним у часі електричним полем.

Самі властивості магнітного поля можна описати так:

- а) в однорідному постійному магнітному полі на магнітний диполь діє момент сил;
- б) у постійному магнітному полі викривляється траєкторія заряду (дія сили Лорентца);
- в) якщо магнітне поле неоднорідне, то на магнітний диполь (магнітний момент) діє сила;
- г) якщо магнітне поле змінюється в часі, то виникає вихрове електричне поле.

За цими 4 ефектами можна говорити про наявність та властивості магнітного поля

Рівняння (III) є узагальненням закону електромагнітної індукції Фарадея і означає, що при зміні магнітного поля в часі виникає вихрове електричне поле, силові лінії якого утворюють лівий гвинт з напрямком

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Але якщо проволочний контур рухається в магнітному полі $\vec{B}(\vec{r}, t)$,

то в кожній точці його ВЕП визначається повною похідною $\frac{d\vec{B}}{dt}$.

Знак мінус у рівнянні (III) якраз і відображає лівогвинтову орієнтацію вектора $\frac{d\vec{B}}{dt}$ та напрямку силових ліній вихрового електричного поля, рис. 1.45.

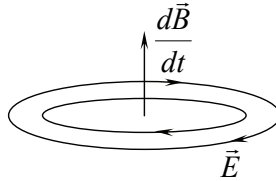


Рис. 1.45. Силві ліній вихрового електричного поля

утворюють лівий гвинт з вектором $\frac{d\vec{B}}{dt}$

Тому правило Ленца, яке використовується для знаходження напрямку індукційного струму, є по суті наслідком цієї лівогвинтової орієнтації (або, іншими словами, наслідком знаку мінус у рівнянні (III)). Як показує досвід, використання правила Ленца для знаходження напрямку індукційного струму (а значить і напрямку силових ліній вихрового електричного поля) зумовлює певні труднощі в студентів і учнів. І по друге, використання правила Ленца в традиційному формулюванні невимусно формі уявлення про первинність індукційного струму. Тому при аналізі подібних явищ слід дотримуватися вихідних принципів.

Виникнення індукційного струму в замкненому металевому контурі є вторинним ефектом, наслідком, а першопричиною – виникнення вихрового електричного поля.

Рівняння (IV) означає, що силові лінії магнітного поля замкнені. Тобто джерел магнітного поля в розумінні електростатики не існує (магнітні заряди в макросвіті не спостерігалися).

1.13. Приклади розв'язування задач

Задача 1.22. Точкова ЗЧ рухається у вакуумі рівномірно та прямолінійно вздовж вісі OX зі швидкістю $v \ll c$. Знайти магнітне поле в будь-якій точці простору, користуючись уявленням про струми зміщення,

тобто використовуючи рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, де $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$.

Розв'язання: При малих швидкостях руху ЗЧ напруженість електричного поля визначається:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

де $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор, проведений із миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля (точка P), $\rho^2 = y^2 + z^2$, див. рис. 1.46.

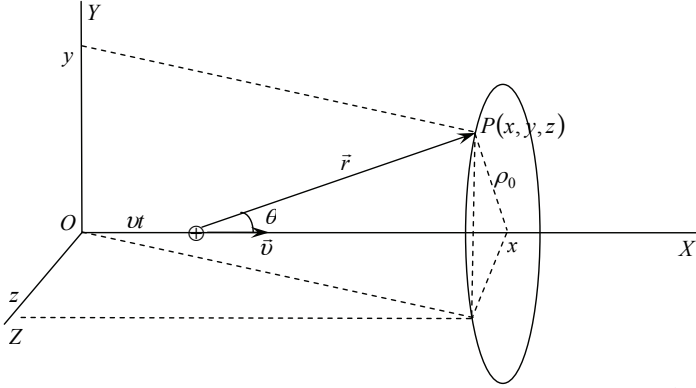


Рис. 1.46. ЗЧ рухається з постійною швидкістю вздовж вісі OX .
Густина струму зміщення в довільній точці простору
внаслідок руху ЗЧ визначається співвідношенням (1.83)

Тоді густина струму зміщення в довільній точці простору внаслідок руху ЗЧ дорівнює

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left[\frac{3qv(x-vt)^2}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + \rho^2 \right\}^{5/2}} - \frac{qv}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + \rho^2 \right\}^{3/2}} \right] \vec{i} + \frac{3qvy(x-vt)}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + \rho^2 \right\}^{5/2}} \vec{j} + \frac{3qvz(x-vt)}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + \rho^2 \right\}^{5/2}} \vec{k}. \quad (1.83)$$

Характеристики МП в точці $P(x, y, z)$ можна знайти двома шляхами. Перший подібний до методу розв'язання **Прикладу 1.6**. Тобто необхідно скористатися теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} .

Тому знайдемо величину струму зміщення через плоску поверхню круга радіуса ρ_0 :

$$i_{зм} = \int_{S_0} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_0^{\rho_0} \left[\frac{3qv \cdot (x-vt)^2}{\left\{ (x-vt)^2 + \rho^2 \right\}^{5/2}} - \frac{qv}{\left\{ (x-vt)^2 + \rho^2 \right\}^{3/2}} \right] \cdot \rho \cdot \partial \rho = \frac{qv \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x-vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}}.$$

Тоді використання рівняння Максвелла (II') або (1.75), та враховуючи, що струм провідності $i = 0$, одержуємо

$$2\pi\rho_0 \cdot H = \frac{qv \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}}.$$

Звідси,

$$H = \frac{qv \cdot \rho_0}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}}.$$

Другий шлях полягає в інтегруванні диференційного рівняння (1.66). Таким чином, з огляду на локальний характер основних законів класичної та релятивістської електродинаміки знайдемо тепер напруженість магнітного поля в точці $P(x, y, z)$, користуючись відповідним рівнянням Максвелла в диференційній формі $\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

Для нашого випадку ($H_x = 0$) вихор вектора \vec{H} дорівнює

$$\text{rot}\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{k}.$$

Тоді, враховуючи (1.83), одержуємо систему диференційних рівнянь у частинних похідних відносно невідомих $H_y(x, y, z, t)$ та $H_z(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{3qv \cdot (x - vt)^2}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho^2 \right\}^{5/2}} - \frac{qv}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho^2 \right\}^{3/2}},$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{3qv \cdot y \cdot (x - vt)}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho \right\}^{5/2}}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{3qv \cdot z \cdot (x - vt)}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho^2 \right\}^{5/2}}.$$

Інтегруючи два останніх рівняння знаходимо H_y та H_z :

$$H_z(x, y, z, t) = \frac{qv \cdot y}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho^2 \right\}^{3/2}},$$

$$H_y(x, y, z, t) = -\frac{qv \cdot z}{4\pi \cdot \left\{ (x - vt)^2 + \rho^2 \right\}^{3/2}}.$$

Останні дві формули дають вираз для вектора напруженості МП,

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi r^3} [\vec{v}, \vec{r}], \quad (1.84)$$

що збігається з результатом, одержаним шляхом узагальнення закону Біо-Савара (1.41).

Задача 1.23. Знайти магнітне поле рівномірно та прямолінійно рухомої ЗЧ, користуючись рівнянням Максвелла $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

Розв'язання: Результат, який ми отримали при розв'язку **Прикладу 1.6** та **Задачі 1.22** можна одержати також, виходячи безпосередньо з рівняння Максвелла

$$rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)), \quad (1.85)$$

де густину струмів провідності подано через дельта-функцію Дірака $\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$, $\vec{j} = q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t))$, $\vec{r}'(t)$ – радіус-вектор, що визначає положення ЗЧ в довільний момент часу.

Очевидно, що в тих точках простору, де $\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = 0$ (ЗЧ не знаходиться в дану мить в точці \vec{r}), похідна $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \neq 0$.

З іншого боку похідну $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ можна подати так (Додаток А):

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial\vec{E}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial\vec{E}}{\partial z} \cdot v_z \right) = -(\vec{v}\nabla)\vec{E}$$

А диференційну операцію $(\vec{v}\nabla)\vec{E}$ знайдемо з наступної формули векторного аналізу

$$rot[\vec{v}, \vec{E}] = (\vec{E}\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{E} + \vec{v} \cdot div\vec{E} - \vec{E} \cdot div\vec{v}.$$

Тому

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = rot[\vec{v}, \vec{E}] - (\vec{E}\nabla)\vec{v} - \vec{v} \cdot div\vec{E} + \vec{E} \cdot div\vec{v},$$

але при $\vec{v} = const$, $(\vec{E}\nabla)\vec{v} = 0$, $\vec{E} \cdot div\vec{v} = 0$.

Тобто, для частинної похідної $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ знаходимо

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = rot[\vec{v}, \vec{E}] - \vec{v} \cdot div\vec{E}.$$

Ураховуючи рівняння Максвелла

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)),$$

попередньому виразу надамо вигляду

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = rot[\vec{v}, \vec{E}] - \vec{v} \cdot \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)). \quad (1.86)$$

І нарешті, з (1.85) одержуємо

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = \\ &= \varepsilon\varepsilon_0 \left(rot[\vec{v}, \vec{E}] - \vec{v} \cdot \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \right) + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = \\ &= \varepsilon\varepsilon_0 \cdot rot[\vec{v}, \vec{E}] \end{aligned}$$

Тобто локальний зв'язок у довільній точці простору в довільний момент часу між індукцією магнітного поля та напруженістю електричного поля рухомої ЗЧ визначається формулою, що збігається з (1.84), (1.41),

$$\vec{B} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0[\vec{v}, \vec{E}] = \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}].$$

Задача 1.24. Показати, що при релаксації зарядів в однорідному провідному середовищі струм зміщення компенсує струм провідності, так, що в процесі релаксації зарядів магнітне поле не утворюється.

Розв'язання: Закон збереження заряду $div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ разом із законом Ома $\vec{j} = \lambda\vec{E}$ приводять до наступного диференційного рівняння

$$div\vec{E} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Ураховуючи закон Кулона в локальній формі

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

одержуємо диференційне рівняння, яке визначає закон зміни густини заряду в процесі розсмоктування заряду в провідному середовищі,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\lambda \rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Розв'язок його очевидний:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\lambda t}{\varepsilon_0 \varepsilon}}.$$

Тому густина струму провідності

$$\vec{j} = \lambda \vec{E} = \lambda \left(\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t) \vec{R}}{R^3} dV' \right)$$

та густина струму зміщення

$$\vec{j}_{zm} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \left(-\frac{\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} \right) \left(\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t) \vec{R}}{R^3} dV' \right)$$

у будь-який момент часу однакові за величиною, але протилежні за напрямком

$$\vec{j} = -\vec{j}_{zm}.$$

Тобто рівняння Максвелла (1.66) для вихору вектора \vec{B} у довільний момент часу в довільній точці простору для даних умов має вигляд

$$\text{rot} \vec{B} = 0,$$

що говорить про відсутність джерел магнітного поля. Значить $\vec{B} = 0$.

Задача 1.25. Прийнято вважати, що коли відношення амплітуд сили струму зміщення і сили струму провідності в речовині менше 0,01, то середовище – провідник; якщо ж це відношення більше 100, то середовище – діелектрик. Яким є середовище з параметрами $\varepsilon = 3$, $\lambda = 0,1 \frac{\text{См}}{\text{м}}$ для частот електромагнітної хвилі $\nu_1 = 10^5 \text{ Гц}$, $\nu_2 = 10^2 \text{ МГц}$ і $\nu_3 = 10 \text{ ГГц}$?

Розв'язання: Густина струму провідності дорівнює $j = \lambda E_0$, а густина струму зміщення дорівнює $j_{zm} = \varepsilon_0 \varepsilon 2\pi \nu E_0$, де E_0 – амплітудне значення електричного поля електромагнітної хвилі.

Отже, відношення амплітуд струму зміщення й струму провідності дорівнює $\frac{j_{zm}}{j} = \frac{2\pi \nu \varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda}$. Підставивши дані задачі, одержуємо відпо-

відь: для частот ν_1, ν_2, ν_3 відношення $\frac{j_{зм}}{j}$ послідовно приймає значення $\approx 10^{-3}; 1; 10^2$.

Значить, при зміні частоти від ν_1 до ν_3 середовище можна послідовно розглядати як провідник, напівпровідник і діелектрик.

Задача 1.26. Визначте частоту ν електромагнітної хвилі, при якій амплітуди струму зміщення і струму провідності рівні. Хвиля поширюється в середовищі з параметрами: а) $\varepsilon = 80, \lambda = 4 \frac{C_M}{M}$ (морська вода); б) $\varepsilon = 6, \lambda = 10^{-13} \frac{C_M}{M}$.

Розв'язання: З попередньої задачі випливає, що відношення амплітудних значень густин струму зміщення і струму провідності дорівнює $\frac{j_{зм}}{j} = \frac{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$. Оскільки $\frac{j_{зм}}{j} = 1$, то частота ν електромагнітної хвилі буде дорівнювати $\nu = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}$.

Відповідь: а) $\nu = 9 \cdot 10^8 \text{ Гц}$; б) $\nu = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$.

Задача 1.27. Заряджена частинка рухається з постійною швидкістю \vec{V} . Упевнитися, що струм зміщення через плоску поверхню круга радіуса $O'P$, рис. 1.47, дорівнює струму зміщення через поверхню сферичного сегменту, який спирається на цей круг.

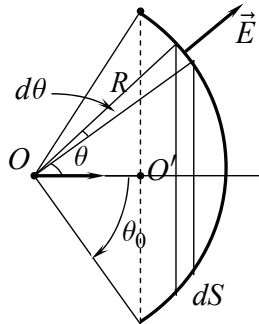


Рис. 1.47

Розв'язання: Для розв'язку задачі виберемо взаємне розташування ЗЧ і сферичного сегменту в той момент часу, коли ЗЧ знаходиться в центрі уявної сфери радіуса $R = OP$, частиною поверхні якої є наш сферичний сегмент.

Знайдемо спочатку потік вектора \vec{E} через поверхню сферичного сегменту, (див. розв'язання **Прикладу 1.6**, а також рис. 1.38)

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \theta_0).$$

Оскільки (див. також (1.71))

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{2\varepsilon_0} \sin \theta_0 \frac{d\theta_0}{dt},$$

де $\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{V}{R} \cdot \sin \theta_0$, то величина струму зміщення, що протікає в цей момент часу через поверхню сегменту, дорівнює

$$I_{зм} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{qV \cdot \sin^2 \theta_0}{2R}.$$

Інший спосіб знаходження $\frac{d\theta_0}{dt}$ випливає з означення кута $\theta_0(t)$, рис. 1.47 та рис. 1.48.

$$\theta_0(t) = \arcsin \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + (x - Vt)^2}}.$$

$$\text{Тому } \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{\frac{du}{dt}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{V}{R} \cdot \sin \theta_0, \text{ де } u = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + (x - Vt)^2}}.$$

Знайдемо тепер потік вектора $\vec{j}_{зм}$ через поверхню круга радіуса $O'P$. Елементарний потік вектора $\vec{j}_{зм}$ через поверхню кільця шириною $d\rho$, рис. 1.48 дорівнює $\vec{j}_{зм} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \vec{i}$.

Тому повний потік через поверхню круга одержуємо як результат інтегрування. Ураховуючи (1.83), маємо:

$$I_{зм} = \int_0^{\rho_0} \vec{j}_{зм} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{qV \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x - Vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}},$$

де введене позначення $\rho_0 = O'P$, а $x - Vt$ у нашому випадку дорівнює $OO' = R \cos \theta_0$.

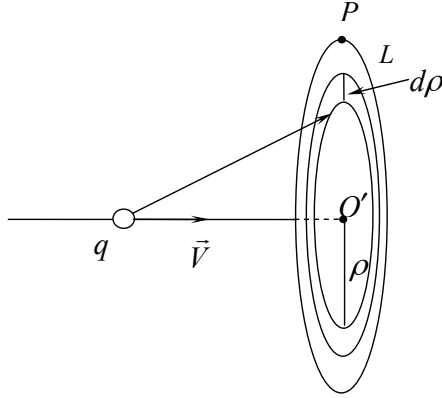


Рис. 1.48. Знаходження потоку вектора \vec{j}_{zm} через поверхню круга радіуса $O'P$

Таким чином, для I_{zm} одержуємо

$$I_{zm} = \frac{qV \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x - Vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}} = \frac{qV \cdot R^2 \sin^2 \theta_0}{2 \cdot \left\{ (R \cos \theta_0)^2 + (R \sin \theta_0)^2 \right\}^{3/2}} = \frac{qV \cdot \sin^2 \theta_0}{2 \cdot R}.$$

Тобто потік вектора \vec{j}_{zm} (струм зміщення) через плоску поверхню круга радіуса $O'P$ дорівнює струму зміщення через поверхню сферичного сегменту, який спірається на цей круг.

Задача 1.28. Знайти густину струму зміщення в довільній точці площини, яка перпендикулярна швидкості руху ЗЧ, $\vec{V} = const$, і яку в дану мить перетинає ЗЧ. Знайти також повний струм зміщення через цю площину. Величина заряду q .

Розв'язання: Згідно з розв'язком **Задачі 1.22** для \vec{j}_{zm} , урахувавши умову даної задачі, маємо:

$$\vec{j}_{zm} = - \frac{qV}{4\pi \left\{ (x - Vt)^2 + \rho^2 \right\}^{3/2}} \cdot \vec{i} = - \frac{qV}{4\pi \rho^3} \vec{i}.$$

Тобто в кожній точці цієї площини вектор \vec{j}_{zm} направлений в сторону від'ємних значень осі OX . Вектор \vec{j}_{zm} , іншими словами, у кожній

точці такої площини направлений протилежно швидкості руху ЗЧ.

При знаходженні сили струму зміщення через площу круга довільного радіусу ρ_0 , який лежить на цій площині, нижня межа в інтегралі

$$\int_0^{\rho_0} \vec{j}_{зм} \cdot 2\pi\rho d\rho$$

не може дорівнювати нулеві, як це було в попередній за-

дачі. Бо тоді ми одержуємо фізично безглуздий результат:

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_0} \vec{j}_{зм} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \vec{i} &= \int_0^{\rho_0} \left(-\frac{qV}{4\pi\rho^3} \right) 2\pi\rho d\rho = -\frac{qV}{2} \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho^2} = \\ &= \frac{qV}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{0} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Очевидно, що нижня межа в інтегралі визначається розмірами зарядженої частинки. Припустимо, що ЗЧ є рівномірно зарядженою за об'ємом кулькою радіусу r_0 . Тоді слід враховувати не тільки струм зміщення через поверхню круга, рис. 1.48, а й струм переносу, зумовлений проходженням ЗЧ через центр цього круга,

$$I_{пер} = \frac{qV}{2r_0},$$

$$I_{зм} = \int_{r_0}^{\rho_0} \vec{j}_{зм} \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \vec{i} = \frac{qV}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Тому сумарний струм через поверхню круга радіуса ρ_0 в ту мить, коли ЗЧ знаходиться в точці O' , рис. 1.48, визначається алгебраїчною сумою двох попередніх формул:

$$I = I_{пер} + I_{зм} = \frac{qV}{2r_0} + \frac{qV}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{qV}{2\rho_0}.$$

До речі, якщо розглянути контур L , що обмежує круг радіусу ρ_0 , то застосування теореми про циркуляцію вектора \vec{B} приводить до результату

$$2\pi\rho_0 B = \mu_0 I = \mu_0 \frac{qV}{2\rho_0},$$

$$B = \frac{\mu_0 qV}{4\pi\rho_0^2}.$$

Вираз для індукції МП в довільній точці площини через яку в дану мить пролітає ЗЧ, збігається з тим, який ми одержуємо із закону Біо-Савара-Лапласа.

Задача 1.29. Проаналізувати залежність струму зміщення через поверхню диска радіусу ρ_0 від часу для проміжку часу, який включає момент проходження ЗЧ через цю поверхню. Центр диску лежить на лінії руху ЗЧ. Швидкість ЗЧ $\vec{V} = const$, її заряд q .

Розв'язання: Залежність струму зміщення через поверхню круга радіусу ρ_0 від часу, швидкості руху ЗЧ, згідно з розв'язком **Задачі 1.25** має вигляд

$$I_{зм} = \int_0^{\rho_0} \vec{j}_{зм} 2\pi\rho d\rho = \frac{qV\rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x - Vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}}.$$

Очевидно, що при незмінних параметрах задачі, $I_{зм} = (I_{зм})_{\max}$ коли $x - Vt = 0$.

Тобто, з цієї залежності видно, що максимального значення струму зміщення набуває в ту мить, коли ЗЧ пролітає через поверхню диска.

На рис. 1.49 та рис. 1.50 зображені графіки функції $I_{зм}(t)$ при різних значеннях швидкості руху ЗЧ та при різних розмірах круга, відповідно.

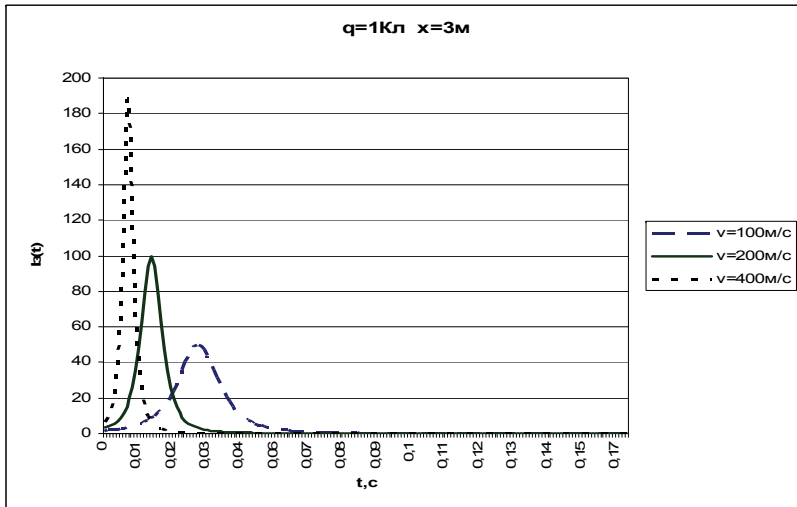


Рис. 1.49. Залежність струму зміщення $I_{зм}$ від часу при різних значеннях швидкості руху ЗЧ

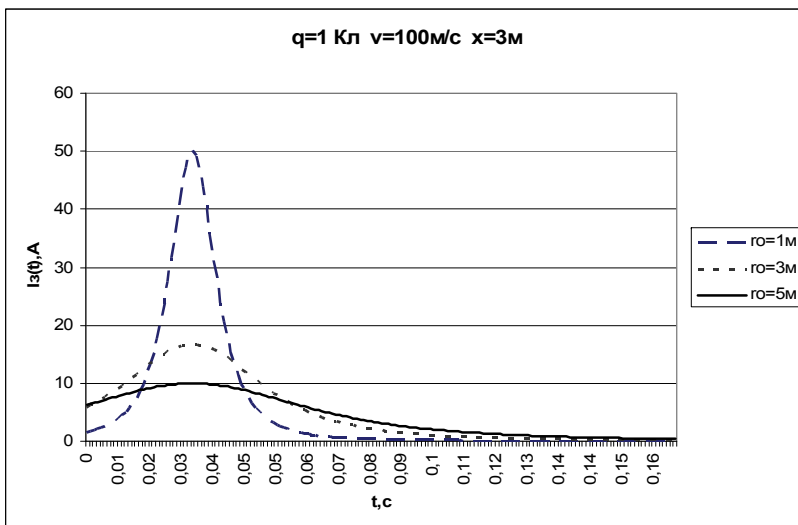


Рис. 1.50. Залежність струму зміщення $I_{зМ}$ від часу при різних розмірах круга

Задача 1.30. Рівномірно заряджена дуже довга нитка рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж своєї осі. Виходячи з концепції струмів зміщення та користуючись виразом (1.83) для $\vec{j}_{зМ}$, знайти магнітне поле, що утворюється рухомою ниткою.

Розв'язання: При розв'язанні **Прикладу 1.6**, **Прикладу 1.7**, а також **Задачі 1.22**, **Задачі 1.28** ми впевнилися, що магнітне поле рухомої зарядженої частинки породжується струмами зміщення.

Постійний струм, який протікає по металевому прямолинійному провіднику є нічим іншим, як процесією електронів провідності, які рухаються з дрейфовою швидкістю.

Природно припустити, що і сумарне магнітне поле ППС в будь-якій точці простору поза межами ППС породжується тільки струмами зміщення.

Рух електронів провідності можна охарактеризувати переміщенням лінійної густини зарядів τ . Така модель ППС зображена на рис. 1.51 Довжина ППС l_0 , дрейфова швидкість електронів провідності \vec{V} .

Згідно з розв'язком **Задачі 1.22** і **Задачі 1.27** миттєве значення потоку вектора $\vec{j}_{зМ}$ від елементарного заряду $\tau \cdot dx$ через площу круга дорівнює

$$dI_{\text{зм}} = \int_0^{\rho_0} \vec{j}_{\text{зм}} 2\pi\rho d\rho \cdot \vec{i} = \frac{dq \cdot V\rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x-Vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}},$$

де $\vec{j}_{\text{зм}}$ визначається формулою (1.83), у якій $dq = \tau \cdot dx$

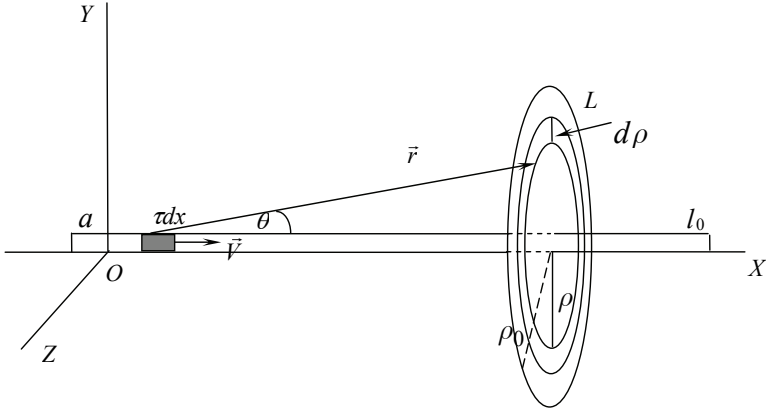


Рис. 1.51. Рівномірно заряджена нитка рухається зі швидкістю $\vec{V} = \text{const}$ вздовж осі OX

Кожен з елементарних зарядів $\tau \cdot dx$ ППС дає свій внесок в сумарний струм зміщення через поверхню круга радіуса ρ_0 . Тому сумарний струм зміщення через цю площу круга визначається інтегралом

$$I_{\text{зм}} = \int_{-a}^{l_0-a} \frac{dq \cdot V \cdot \rho_0^2}{2 \cdot \left\{ (x-Vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}} = \frac{V\tau \cdot \rho_0^2}{2} \cdot \int_{-a}^{l_0-a} \frac{dx}{\left\{ (x-Vt)^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}}.$$

Якщо ввести нову змінну $u = x - Vt$, то для струму зміщення ППС довжиною l_0 одержуємо

$$\begin{aligned} I_{\text{зм}} &= \frac{V\tau \cdot \rho_0^2}{2} \cdot \int_{-a}^{l_0-a} \frac{du}{\left\{ u^2 + \rho_0^2 \right\}^{3/2}} = \frac{V\tau \cdot \rho_0^2}{2} \cdot \left[\frac{u}{\rho_0^2 \cdot \left\{ u^2 + \rho_0^2 \right\}^{1/2}} \right]_{-a}^{l_0-a} = \\ &= \frac{V\tau}{2} \cdot \left[\frac{l_0 - a}{\sqrt{(l_0 - a)^2 + \rho_0^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho_0^2}} \right]. \end{aligned}$$

Якщо розглядати нескінченно довгий постійний струм, то $I_{зм} = I_{пер}$, де струм переносу $I_{пер} = \frac{dq}{dt} = \frac{\tau \cdot dx}{dt} = \tau \cdot V$.

З теореми про циркуляцію вектора \vec{B} по контуру L , який охоплює круг радіуса ρ_0 , знаходимо індукцію магнітного поля відрізка постійного струму

$$B = \frac{\mu_0 \cdot V \tau}{4\pi \rho_0} \cdot \left\{ \frac{l_0 - a}{\sqrt{(l_0 - a)^2 + \rho_0^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho_0^2}} \right\}.$$

При $l_0 \gg \rho_0$, $l_0 - a \gg \rho_0$ (нескінченно довгий ППС) для індукції МП маємо формулу (порівняти з розв'язанням **Прикладу 1.4**)

$$B = \frac{\mu_0 \cdot V \tau}{2\pi \rho_0}.$$

Таке ж саме значення для \vec{B} ми знаходимо, використовуючи як і закон Біо-Савара-Лапласа (**Задача 1.15**), і формули перетворення компонент ЕМП (Розділ 6), так і теорему про циркуляцію вектора \vec{B} . Одержання однакових результатів різними методами (методами, різними, як за своєю природою, за їх фізичним змістом, так і відповідно за математичним наповненням) щодо значення \vec{B} говорить про несуперечність і внутрішню єдність основ електродинаміки.

Таким чином, оскільки постійний струм у лінійному провіднику створюється дрейфовим рухом електронів провідності й кожен з них породжує МП в навколишньому просторі тільки струмами зміщення, то можна вважати, що і все магнітне поле ППС породжується струмами зміщення.

Тобто можна стверджувати, що з'ясований механізм створення магнітного поля рухомими ЗЧ і струмами. Якщо ЗЧ при своєму русі не перетинає поверхню S_0 , то магнітне поле в усіх точках поверхні S_0 створюється тільки струмами зміщення; якщо заряд перетинає відповідну поверхню, то поле \vec{B} індукується і струмом зміщення, і струмом переносу цього заряду через цю поверхню (**Задача 1.28**).

Магнітне поле як відрізка так і нескінченно довгого постійного чи квазістаціонарного струму породжується тільки струмами зміщення – це фізична причина виникнення МП. Струм зміщення, а не струм переносу $\tau \cdot V$, є фізичним джерелом магнітного поля. Така концепція фізично більш прийнятна й адекватно відображає суть електромагнітних процесів.

Задача 1.31. Простір між обкладками циліндричного конденсатора заповнений діелектриком з провідністю λ і діелектричною постійною ε , рис. 1.52. У початковий момент на внутрішній обкладинці є заряд q_0 . Знайти:

- А) закон зміни в часі величини заряду q на внутрішній обкладинці;
- Б) магнітне поле всередині конденсатора;
- В) кількість теплоти, що виділяється при протіканні струму.

Вважати, що заряд розподіляється рівномірно по обкладкам, а довжина конденсатора h .

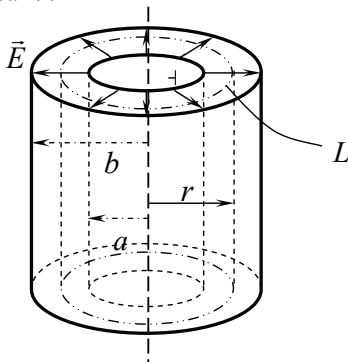


Рис. 1.52. Простір між обкладками циліндричного конденсатора заповнений речовиною з провідністю λ і діелектричною постійною ε

Розв'язання: А. Використаємо закон збереження заряду в інтегральній формі (1.61)

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

де $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, E – напруженість електричного поля між пластинами конденсатора, $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$, τ – лінійна густина заряду на внутрішній об-

кладинці конденсатора, $\tau = \frac{q}{h}$.

Інтегрування проводиться за циліндричною поверхнею радіусу r , рис. 1.52.

Тоді ліва частина (1.61) дорівнює

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda q}{h 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \cdot \int dS = \frac{\lambda q}{h 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Закон збереження заряду приводить до диференційного рівняння

$$\frac{\lambda q}{\varepsilon \varepsilon_0} = -\frac{dq}{dt},$$

інтегрування якого дає залежність заряду на внутрішній пластині конденсатора від часу

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} t}.$$

Б. Неважко впевнитися, що в кожній точці простору між обкладками конденсатора густина струму зміщення чисельно дорівнює струму провідності, але

$$\vec{j}_{3M} = -\vec{j}_{np}$$

Тому магнітне поле між обкладками конденсатора дорівнює нулю (див. також *Задачу 1.24*).

В. Згідно із законом Джоуля-Ленца в одиницю часу, в одиниці об'єму провідного середовища виділяється кількість теплоти λE^2 . Тому в об'ємі dV за проміжок часу dt між пластинами конденсатора виділиться така кількість теплоти –

$$dQ = \lambda E^2 \cdot dV dt$$

Значить, за весь час розрядки конденсатора у всьому об'ємі конденсатора виділиться кількість теплоти

$$\begin{aligned} Q &= \int dQ = \int_0^\infty dt \cdot \int_a^b \lambda E^2 dV = \int_0^\infty dt \cdot \int_a^b \lambda \left(\frac{q}{h2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \right)^2 \cdot 2\pi r h dr = \\ &= \frac{\lambda q_0^2}{2\pi h (\varepsilon \varepsilon_0)^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} t} dt \cdot \int_a^b \left(\frac{dr}{r} \right) = \frac{\lambda q_0^2}{2\pi h (\varepsilon \varepsilon_0)^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} t} dt \cdot \ln \frac{b}{a} = \\ &= \frac{\lambda q_0^2 \cdot \ln \frac{b}{a}}{2\pi h (\varepsilon \varepsilon_0)^2} \cdot \left(\left[-\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2\lambda} \right] \cdot e^{-\frac{2\lambda}{\varepsilon \varepsilon_0} t} \right)_0^\infty = \frac{\lambda q_0^2 \cdot \ln \frac{b}{a}}{2\pi h (\varepsilon \varepsilon_0)^2} \cdot \left(0 + \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2\lambda} \right) = \frac{q_0^2 \cdot \ln \frac{b}{a}}{4\pi h \varepsilon \varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Оскільки ємність циліндричного конденсатора визначається формулою

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}},$$

то кількість теплоти, яка виділилася в об'ємі конденсатора, чисельно дорівнює якраз енергії зарядженого конденсатора:

$$Q = \frac{q_0^2}{2C} = W_E.$$

Тобто закон збереження енергії в даній електродинамічній системі має місце.

Задача 1.32. Провідник у вигляді параболи, яка описується рівнянням $y = kx^2$, знаходиться у постійному магнітному полі, вектор індукції якого перпендикулярний площі, обмеженої параболою. З вершини параболи в початковий момент часу почали переміщувати перемичку. Знайти ЕРС в контурі як залежність $\varepsilon(y)$, якщо перемичку переміщують:

- А) з постійною швидкістю;
- Б) з постійним прискоренням;

Розв'язання: Задачу можна розв'язати декількома шляхами.

1. Використовуючи закон електромагнітної індукції в інтегральній формі

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$$

Для цього розглянемо наступний рисунок (Рис. 1.53).

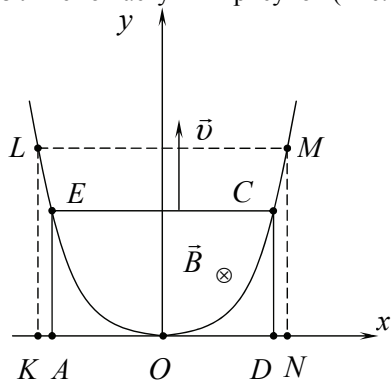


Рис. 1.53. В однорідному магнітному полі знаходиться парабола LOM , а перемичка EC рухається вздовж вісі OY

За означенням магнітного потоку $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS \cos \alpha$, де \vec{B} – вектор магнітної індукції, \vec{S} – нормаль до S , S – площа, що обмежена параболою та перемичкою, α – кут між \vec{B} та нормаллю до S . У даному випадку ці вектори паралельні, тому $\cos \alpha = 1$, а отже $\Phi = BS$. Оскільки магнітне поле постійне, то \vec{B} не змінюється, отже,

$$\varepsilon = B \frac{dS}{dt}.$$

Зміну площі dS можна виразити двома способами.

А. dS – це за рис. 1.53 площа фігури $LECM$, яку можна знайти як різницю площ LOM та EOC . Знайдемо ці площі:

$$S_{LOM} = S_{LKNM} - 2S_{LKO} = MN \cdot 2ON - 2S_{LKO}$$

$$S_{EOC} = S_{EADC} - 2S_{EAO} = DC \cdot 2OD - 2S_{EAO}$$

Вважаючи, що $OD = x$, $ON = x + dx$, $DC = y$, $MN = y + dy$,

а також приймаючи, що $y = kx^2$, отримаємо

$$\begin{aligned} dS &= S_{LKNM} - 2S_{LKO} - (S_{EADC} - 2S_{EAO}) = \\ &= 2(y + dy)(x + dx) - 2 \int_0^{x+dx} y dx - 2xy + 2 \int_0^x y dx = \\ &= 2xy + 2ydx + 2xdy + 2dxdy - 2 \int_0^{x+dx} kx^2 dx - 2xy + 2 \int_0^x kx^2 dx. \end{aligned}$$

Оскільки dx та dy – нескінченно малі величини, то добуток $2dxdy = 0$. Тепер розпишемо вирази для інтегралів:

$$\int_0^{x+dx} kx^2 dx = \frac{k}{3}(x^3 + 3x^2 dx + 3xdx^2 + dx^3 - 0^3) \approx \frac{k}{3}(x^3 + 3x^2 dx),$$

$$\int_0^x kx^2 dx = \frac{k}{3}(x^3 - 0^3) = \frac{k}{3}x^3.$$

Якщо підставити останні рівності у вираз для dS , то отримаємо

$$\begin{aligned} dS &= 2xy + 2ydx + 2xdy - \frac{2}{3}k(x^3 + 3x^2 dx) - 2xy + \frac{2}{3}kx^3 = \\ &= 2kx^2 dx + 2xdy - \frac{2}{3}kx^3 - 2kx^2 dx + \frac{2}{3}kx^3 = 2xdy. \end{aligned}$$

Б. Розглянемо інший варіант знаходження dS . Для цього розглянемо, той же в принципі рисунок, рис. 1.54.

У даному випадку dS – це значення площі криволінійної трапеції $AKCD$, яку наближено можна вважати прямокутником зі сторонами $AK = dy$, $KC = 2x$. Таким чином, виходячи з означення площі прямокутника, маємо

$$dS = 2xdy.$$

Як бачимо, в обох випадках $dS = 2xdy$. Підставимо отримане співвідношення у вираз для ε , отримаємо для ЕРС

$$\varepsilon = B \frac{dS}{dt} = B \frac{2xdy}{dt} = 2Bx \frac{dy}{dt}.$$

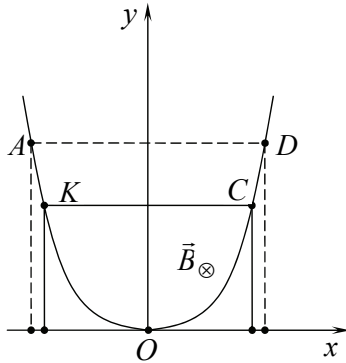


Рис. 1.54.

За умовою задачі $y = kx^2$, тому $x = \sqrt{\frac{y}{k}}$. Отже,

$$\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

У тому випадку, коли перемичку переміщують з постійною швидкістю, відношення $\frac{dy}{dt}$ – це є швидкість v переміщення перемички

вздовж вісі y , і в даному випадку $\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}v$. Якщо ж перемичку рухають рівноприскорено з прискоренням a , то $v = \sqrt{2ay}$, і в результаті

отримаємо рівність

$$\varepsilon = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}v = 2B\sqrt{\frac{y}{k}}\sqrt{2ay} = 2By\sqrt{\frac{2a}{k}}.$$

2. За означенням електрорушійної сили

$$\varepsilon = \frac{A}{q},$$

де A – робота з переміщення заряду, q – величина цього заряду.

У даному випадку роботу виконує сила Лорентца, яка діє на ЗЧ, які переміщуються в магнітному полі з індукцією \vec{B} разом з перемичкою. Тоді $F_L = qvB \sin \beta$, де β – кут між \vec{B} та \vec{v} , у даній задачі рівний 90° . Таким чином $F_L = qvB$.

З рис. 1.53 видно, що $l = 2x$, отже,

$$A = \int_0^l F_L dx = qvBl = qvB2x = 2qxB \frac{dy}{dt}.$$

Для електрорушійної сили маємо вираз то же вираз, який ми одержали методом 1,

$$\varepsilon = 2xB \frac{dy}{dt}.$$

Враховуючи, що $x = \sqrt{\frac{y}{k}}$ отримаємо

$$\varepsilon = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} \frac{dy}{dt}.$$

У тому випадку, коли перемичку переміщують з постійною швидкістю v , маємо вираз $\varepsilon = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} v$. Якщо ж перемичку рухають рівноприскорено з прискоренням a , то $v = \sqrt{2ay}$, і в результаті отримаємо співвідношення

$$\varepsilon = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} v = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} \sqrt{2ay} = 2By \sqrt{\frac{2a}{k}}.$$

Відповіді:

А) $\varepsilon = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} v,$

Б) $\varepsilon = 2By \sqrt{\frac{2a}{k}}$

Контрольні запитання і завдання

1. Обґрунтувати теорему Гаусса для вектора \vec{E} .
2. Яке фізичне явище лежить в основі закону Біо-Савара-Лапласа?
3. Показати, що означення одиниці індукції магнітного поля, основані на різних визначальних формулах, не суперечать одне одному.
4. Пояснити способи обґрунтування рівняння Максвелла $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.
5. Обґрунтувати рівняння Максвелла для струмів зміщення та описати властивості струмів зміщення.
6. Упевнитися в тому, що магнітне поле рухомої зарядженої частинки зумовлене струмами зміщення.

7. Пояснити Ваше розуміння двох фізичних причин, які лежать в основі явища електромагнітної індукції.
8. Які експериментальні закони лежать в основі теорії електромагнітного поля?
9. У чому полягає фізичний зміст рівнянь Максвелла?
10. Охарактеризуйте властивості соленоїдальних та потенційних полів.
11. Що є джерелами електричного та магнітного полів?
11. Якими властивостями характеризуються струми зміщення?
12. Обґрунтувати рівняння неперервності.
13. Обґрунтувати вираз для густини струмів зміщення, виходячи з рівняння неперервності та рівняння $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.
14. Показати, що традиційне формулювання I-го закону Кірхгофа випливає із закону збереження заряду $\text{div}\vec{j} = 0$ для постійних струмів.
15. Користуючись результатом (1.83), знайти $\vec{j}_{\text{зм}}$ в точці простору на віддалі r від миттєвого положення ЗЧ при $\theta = 0$ і при $\theta = \frac{\pi}{2}$.
16. Показати, що з рівнянь Максвелла випливає закон збереження заряду.
17. Упевнитися, що рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ і $\text{div}\vec{B} = 0$ не суперечать одне одному.
18. Показати, що при розрядці плоского конденсатора на його обкладинках струм провідності замикається струмом зміщення.
19. Показати, що при розрядці циліндричного та сферичного конденсаторів на їх обкладинках струм провідності замикається струмом зміщення.
20. Показати, що в **Прикладі 1.6** $\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}d\vec{S} = \int \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S}$.
21. Показати, що функція $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'$ є розв'язком рівняння Пуассона $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Розділ 2. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В СЕРЕДОВИЩІ

2.1. Основні положення електронної теорії. Мікро- та макрополя

Основна мета вивчення цієї теми полягає в обґрунтуванні та поясненні рівнянь Максвелла в речовині. Рівняння Максвелла в середовищі можуть бути одержані шляхом узагальнення експериментальних фактів, подібно тому, як відбувалося обґрунтування рівнянь Максвелла у вакуумі на основі узагальнення дослідних законів Кулона, Біо-Савара-Лапласа, електромагнітної індукції Фарадея, збереження заряду, тобто феноменологічним шляхом.

Але при вивченні цієї теми ми виведемо рівняння електромагнітного поля в середовищі, виходячи з модельних уявлень класичної електронної теорії.

Такий шлях обґрунтування рівнянь поля в середовищі уявляється кращим, ніж феноменологічний, з огляду на наступні міркування:

- а) чітко простежується поява додаткових доданків в рівняннях поля;
- б) стає зрозумілим фізичний зміст того чи іншого доповнення в рівняннях поля;
- в) показується роль і значення модельних уявлень при обґрунтуванні рівнянь Максвелла в середовищі;
- г) уявлення та моделі КЕТ широко використовуються не тільки в навчальному процесі при поясненні багатьох фізичних явищ, а й у наукових працях.

Згідно з КЕТ усі тіла складаються з позитивних та негативних заряджених частинок. У просторі між зарядженими частинками електромагнітне поле описується мікроскопічними рівняннями поля, рівняннями Максвелла-Лорентца. Ці поля породжуються рухом ЗЧ, що входять до складу речовини.

У класичній електричній теорії всі властивості речовини пояснюються рухом та взаємодією заряджених частинок, що входять до складу речовини, між собою та із зовнішніми полями. Припускається, що для мікроскопічних полів справедливі рівняння Максвелла у вакуумі:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{e} &= \frac{\rho_{\text{мікро}}}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{b} &= \mu_0 \vec{j}_{\text{мікро}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{b} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

де \vec{e} – мікроскопічна напруженість електричного поля, \vec{b} – мікроскопічне значення індукції магнітного поля, $\rho_{\text{мікро}}$ – мікроскопічна густина заряду, $\vec{J}_{\text{мікро}}$ – мікроскопічна густина струму.

Єдина сила, що може діяти на ЗЧ речовини, – це сила Лоренца (густина сили Лоренца)

$$\vec{f} = \rho(\vec{e} + [\vec{v}, \vec{b}]). \quad (2.2)$$

Якщо в електромагнітне поле помістити діелектрик чи магнетик, то діелектрик поляризується, а магнетик намагнічується. Якщо діелектрик неоднорідний, то в результаті поляризації і на поверхні, і в об'ємі його виникає зв'язаний надлишковий поляризаційний заряд. Якщо діелектрик однорідний, то зв'язаний заряд (як ми впевнимосся далі) з'являється тільки на його поверхні, і тоді об'ємна густина зв'язаного заряду дорівнює нулю, $\rho' = 0$.

Явище поляризації можна описати шляхом уведення вектора поляризації. Вектор поляризації \vec{P} – це, згідно з означенням, дипольний електричний момент одиниці об'єму діелектрика.

Якщо магнетик знаходиться в магнітному полі, то він намагнічується. Явище намагнічування описується вектором намагнічування \vec{I} .

Вектор намагнічування \vec{I} – це магнітний момент одиниці об'єму магнетика.

Очевидно, що зв'язані заряди теж створюють електричне поле. Електричне поле в діелектрику створюється як зв'язаними зарядами, так і вільними зарядами. Таке сумарне електричне поле в діелектрику, поміщеному в зовнішнє електричне поле, дуже швидко змінюється в часі внаслідок руху заряджених частинок, які створюють ці поля. До того ж це поле швидко змінюється також і від точки до точки в просторі, рис. 2.1. Аналогічні висновки можна зробити й відносно мікроскопічного магнітного поля.

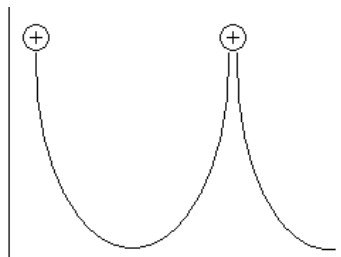


Рис. 2.1. Напруженість мікроскопічного електричного поля швидко змінюється і від точки до точки в просторі

Але і в експериментальних дослідженнях, і в теорії ЕМП користуються середніми значеннями електричних і магнітних полів в середовищі. У теорії це згладжування (усереднення) полягає у визначенні середніх значень напруженості електричного поля та середніх значень індукції магнітного поля в таких інтервалах простору і часу, у яких зникають неоднорідності, пов'язані з атомарною (молекулярною) структурою речовини. Але враховують часові та просторові неоднорідності макроскопічних масштабів. Тобто проводиться усереднення за фізичним нескінченно малим об'ємом.

Усереднені значення мікроскопічних напруженості електричного та індукції магнітного полів називаються, відповідно, напруженістю електричного та індукцією магнітного полів в середовищі:

$$\vec{e} = \vec{E} \text{ – напруженість електричного поля в речовині,}$$

$$\vec{b} = \vec{B} \text{ – індукція магнітного поля в речовині.}$$

Таким чином, щоб записати рівняння Максвелла в середовищі, треба знайти середнє значення мікроскопічної густини заряду та середнє значення мікроскопічної густини струму в речовині. Тобто знайти величини $\bar{\rho}_{\text{мікро}}$ і $\bar{j}_{\text{мікро}}$.

Середнє значення мікроскопічної густини заряду дорівнює сумі густини вільних зарядів і густини зв'язаних зарядів,

$$\bar{\rho}_{\text{мікро}} = \rho + \rho' \quad (2.3)$$

Середнє значення мікроскопічної густини струмів дорівнює сумі густини вільних струмів провідності, густини молекулярних струмів і густини струмів поляризації,

$$\bar{j}_{\text{мікро}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{пол}} + \vec{j}_{\text{мол}} \quad (2.4)$$

2.2. Поляризація діелектриків. Властивості вектора поляризації. Електричне поле в діелектрику. Теорема Гаусса для електричного поля в діелектрику. Вектор електричного зміщення.

Виділимо в діелектрику об'єм V , що обмежується деякою поверхнею S . Нехай концентрація ЗЧ в об'ємі V дорівнює $n = \frac{N}{V}$.

Виділимо елемент поверхні $d\vec{S}$. Унаслідок поляризації заряджена частинка зміщується на величину \vec{r} . Тому через поверхню $d\vec{S}$ протече заряд величиною dq :

$$\vec{r}d\vec{S} \cdot nq = dq,$$

де q – величина заряду частинки, переміщення якої внаслідок поляризації дорівнює \vec{r} .

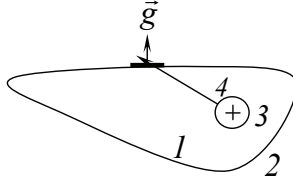


Рис. 2.2. Поляризація діелектрика означає, що ЗЧ його зміщуються на величину \vec{r}

Дипольний момент одиниці об'єму, згідно з означенням, дорівнює вектору поляризації:

$$\vec{r} \cdot q \cdot n = \vec{P}.$$

Тоді величина заряду, який витік через замкнену поверхню S в результаті поляризації, дорівнює

$$q = \oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Згідно із законом збереження заряду в об'ємі V , що обмежується поверхнею S , з'явиться надлишковий зв'язаний заряд $-q'$. Тобто, цей зв'язаний, або поляризаційний заряд дорівнює

$$q' = -\oint_S \vec{P} d\vec{S} \quad (2.5)$$

Ми одержали так звану теорему Гаусса для вектора поляризації \vec{P} . Використовуючи математичну теорему Гаусса, з (2.5) ми одержимо вираз для об'ємної густини зв'язаного поляризаційного заряду:

$$\rho' = -\text{div} \vec{P}. \quad (2.6)$$

Співвідношенню $\rho' = -\text{div} \vec{P}$ можна надати такої наочності. Уявимо в середовищі дві паралельні площини, які знаходяться достатньо близько одна від одної. Якщо поляризація речовини неоднорідна, то одну з площин перетне більше число ЗЧ, ніж другу. У результаті з об'єму, що знаходиться між площинами, виходить більше заряду, ніж входить із сусіднього об'єму. І в просторі між площинами з'являється об'ємний заряд ρ' .

Приклад 2.1. Користуючись теоремою (2.5), знайти граничні умови для вектора \vec{P} .

Розв'язання: Розглянемо межу поділу двох середовищ (див. рис. 2.3) і знайдемо потік вектора \vec{P} через поверхню нескінченного малого циліндра, зображеного на рисунку 2.3.

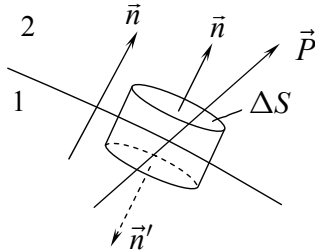


Рис. 2.3. Знаходження потоку вектора \vec{P} з метою обґрунтування граничної умови для вектора \vec{P}

Якщо висота циліндра дуже маленька, то потік вектора \vec{P} дорівнює (нехтуємо потоком вектора \vec{P} через бічну поверхню циліндру)

$$P_{2n}\Delta S + P_{1n'}\Delta S = -\sigma'\Delta S,$$

де σ' – поверхнева густина поляризаційних зарядів.

Оскільки $P_{1n'} = -P_{1n}$, то:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \quad (2.7)$$

Тобто нормальна складова вектора \vec{P} терпить розрив на межі поділу двох діелектриків. У тому випадку, коли середовище 2 – вакуум, то $P_{2n} = 0$, а

$$P_n = \sigma'. \quad (2.7a)$$

Тобто, поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' дорівнює P_n – проекції вектора поляризації в діелектрику \vec{P} на зовнішню нормаль до поверхні цього діелектрика.

Експериментальні дослідження показали, що для багатьох діелектриків у широкому інтервалі значень напруженості електричного поля \vec{E} вектор поляризації пропорційний напруженості електричного поля \vec{E} в діелектрику

$$\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}, \quad (2.8)$$

де α – діелектрична сприйнятливість.

Тому з урахуванням (2.7a) отримуємо

$$\sigma' = \alpha\varepsilon_0 E_n, \quad (2.9)$$

де E_n – проекція вектора \vec{E} (поле всередині діелектрика біля його поверхні) на зовнішню нормаль.

Приклад 2.2. Знайти умови, при яких об'ємна густина зв'язаних зарядів в діелектрику дорівнює нулю, $\rho' = 0$.

Розв'язання: Використовуючи (2.8) і основну властивість вектора поляризації \vec{P} , $\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q'$, одержуємо

$$\oint_S \alpha \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -q' \quad (2.10)$$

Будемо вважати спочатку, що діелектрик однорідний, $\alpha = const$.

Але $\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S}$ згідно з електростатичною теоремою Гаусса дорівнює алгебраїчній сумі всіх зарядів – і вільних, і зв'язаних – усередині замкнутої поверхні S . Тобто $\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q + q'$, і тоді з попередньої рівності маємо

$$\alpha \cdot (q + q') = -q'.$$

Звідки отримуємо

$$q' = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} q.$$

Таким чином, переходячи до нескінченно малих об'ємів, одержуємо об'ємну густина поляризаційних зарядів.

$$\rho' = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} \rho \quad (2.11)$$

У тому випадку, коли діелектрик неоднорідний об'ємна густина поляризаційних зарядів знаходиться таким чином. Оскільки $\rho' = -div \vec{P}$, а $\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$, то

$$\rho' = -div(\alpha \varepsilon_0 \vec{E}) = -\varepsilon_0 div(\alpha \vec{E}) = -\varepsilon_0 (\vec{E} \cdot grad \alpha + \alpha \cdot div \vec{E}). \quad (2.11a)$$

Але, згідно рівняння Максвелла $div \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$. Тому підставивши це рівняння Максвелла в (2.11a), знайдемо залежність ρ' від ρ та від α :

$$\begin{aligned} \rho' &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot grad \alpha - \alpha \rho - \alpha \rho' \\ \rho' &= -\frac{1}{1 + \alpha} (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot grad \alpha + \alpha \rho) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким чином, в об'ємі поляризованого діелектрика густина зв'язаних зарядів $\rho' = 0$ при одночасному виконанні таких умов:

а) діелектрик повинен бути однорідним ($\text{grad}\alpha = 0$);

б) усередині діелектрика не повинно бути сторонніх зарядів ($\rho = 0$).

Якщо ж сторонніх (вільних) зарядів в діелектрику немає, але діелектрик неоднорідний, то об'ємна густина зв'язаних зарядів визначається

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0 \vec{E} \nabla \alpha}{1 + \alpha}.$$

Теорема Гаусса для електричного поля в діелектрику. Вектор електричного зміщення. Джерелом електричного поля в діелектрику є і сторонні, і поляризаційні заряди. Тому електричне поле в діелектрику створюється і вільними (сторонніми), і зв'язаними (поляризаційними) зарядами.

Виходячи з електростатичної теореми Гаусса та формули (2.5), одержуємо рівності

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q + q'}{\varepsilon_0}, \\ \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}, \\ \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} &= q. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Вектор, що стоїть під знаком інтеграла в (2.13), $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$, називається вектором електричної індукції.

Таким чином, теорема Гаусса для діелектриків, або теорема Гаусса для поля вектора \vec{D} має вигляд

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad (2.14)$$

Вектор \vec{D} не має фізичного змісту, просто це додатковий, але зручний при підрахунках величин, які характеризують поле в середовищі, вектор.

Так, наприклад, в експериментальних дослідженнях і в теорії, зручніше спочатку знаходити вектор \vec{D} , а потім і напруженість електричного поля в середовищі.

Ураховуючи зв'язок вектора поляризації з напруженістю електричного поля в середовищі (2.8), для вектора \vec{D} можемо записати:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} (1 + \alpha) = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.15)$$

де $\varepsilon = 1 + \alpha$ – діелектрична стала (проникність) речовини.

Приклад 2.3. Описати електричне поле діелектричної кулі, яка однорідно поляризована. Радіус кулі a , Вектор поляризації (поляризованість) – $\vec{P} = const$.

Розв'язання. Однорідно поляризовану кулю ми можемо уявити собі як таку, що вирізана з однорідної поляризованої пластини діелектрика.

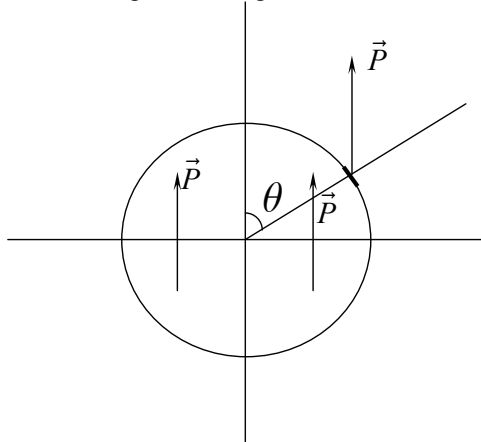


Рис. 2.4. Поверхнева густина зв'язаних зарядів на поверхні однорідно поляризованої кулі

Оскільки $\vec{P} = const$, то об'ємна густина зв'язаних зарядів дорівнює нулю, $\rho' = -div\vec{P} = 0$. Тобто поле, яке ми шукаємо, створене тільки поверхневими зв'язаними зарядами. Причому згідно з (2.7а) $\sigma' = P_n = P \cos \theta$, рис. 2.4.

Але відомо, що такий розподіл зарядів $\sigma' \approx \cos \theta$ виникає, якщо дві кулі однакового радіусу з рівномірно розподіленими по об'єму зарядами ρ і $-\rho$ зміщені одна відносно другої на малий вектор \vec{l} (*Задача 1.11*). У той же час поле будь-якого сферичного розподілу зарядів (і зокрема рівномірного в межах будь-якої кулі) таке, начебто весь заряд кулі зосереджений у центрі кулі. Тобто поле зовні поляризованої кулі буде таким же, як і поле, що створюється двома точковими зарядами, зміщеними на малий вектор \vec{l} . Іншими словами, **зовнішнє поле однорідно поляризованої кулі повністю еквівалентне полю диполя.**

Очевидно, що дипольний момент однорідно поляризованої діелектричної кулі дорівнює

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P}.$$

Тоді потенціал (зовнішнього по відношенню до діелектричної кулі) поля визначається (*Задача 1.12*):

$$\varphi_{зов}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} = \frac{a^3(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0 r^3}.$$

А потенціал поля всередині кулі дорівнює

$$\varphi_{внутр}(\vec{r}) = \frac{(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0}.$$

Тоді напруженість електричного поля в зовнішньому просторі дорівнює

$$\vec{E}_{зов} = -grad\varphi_{зов} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right].$$

Напруженість електричного поля у внутрішніх точках діелектричної кулі

$$\vec{E}_{внутр} = -\nabla\varphi_{вн} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Тобто всередині кулі поле однорідне, і вектор $\vec{E}_{внутр}$ направлений протилежно вектору поляризації \vec{P} .

Картина силових ліній електричного поля поляризованої кулі зображена на рис. 2.4а.

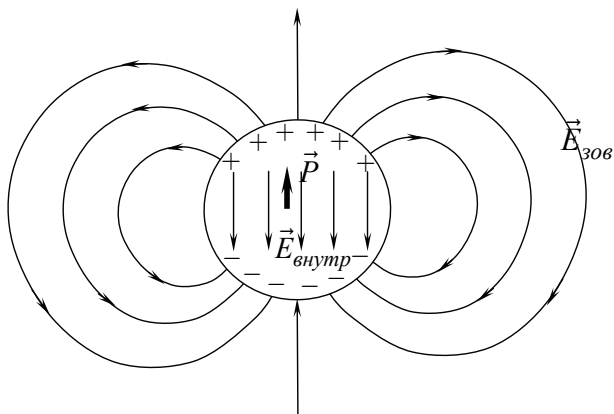


Рис. 2.4а. Зовнішнє поле однорідно поляризованої діелектричної кулі є точно таким же, як і поле диполя, що розташований у центрі кулі

Відсутність вільних зарядів у нашій задачі означає, що немає джерел поля \vec{D} : лінії вектора \vec{D} не мають ні початку ні кінця. Зовні кулі лінії векторів \vec{E} та \vec{D} збігаються, а всередині напрямки їх протилежні (вектор \vec{E} породжується і зв'язаними зарядами), рис. 2.4б. Усередині кулі формула $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ несправедлива, але формулу $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ застосовувати можна.

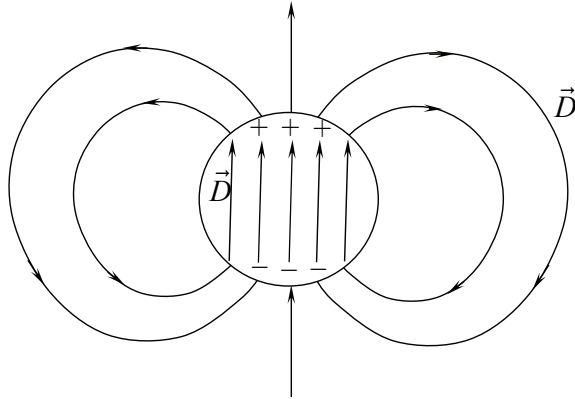


Рис. 2.4б. Лінії вектора \vec{D} не мають ні початку ні кінця. Зовні кулі лінії векторів \vec{E} та \vec{D} збігаються, а всередині напрямки їх протилежні

З метою якісної ілюстрації останніх висновків наведемо картину ліній вектора \vec{E} всередині та зовні однорідно поляризованого стержня, рис. 2.5.

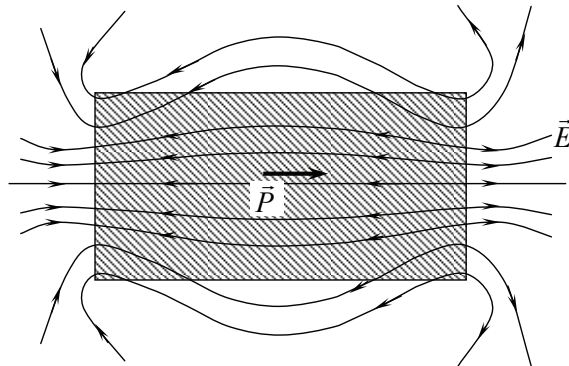


Рис. 2.5. Приблизна картина ліній вектора \vec{E} всередині та зовні однорідно поляризованого стержня

2.3. Намагнічування магнетиків. Властивості вектора намагнічування. Рівняння Максвелла для стаціонарного магнітного поля в магнетиках. Вектор напруженості магнітного поля в середовищі

Намагнічування речовин, які знаходяться в зовнішньому магнітному полі, зумовлене орієнтацією магнітних моментів атомів, молекул і електронів у напрямку поля \vec{B} (парамагнетики, феромагнетики). У діамagnetиках намагнічування пояснюється індукуванням магнітних моментів у атомах і молекулах при внесенні речовини (магнетика) в магнітне поле. Переважна орієнтація магнітних моментів у певному напрямку приводить до виникнення макроскопічних струмів намагнічування i' .

Якщо уявити собі однорідний циліндричний магнетик, рис. 2.6, вектор намагнічування якого $\vec{I} = const$, то молекулярні струми в будь-якій точці всередині магнетика компенсують один одного. А нескомпенсованими виявляються ті молекулярні струми, що виходять на циліндричну поверхню, рис. 2.6.

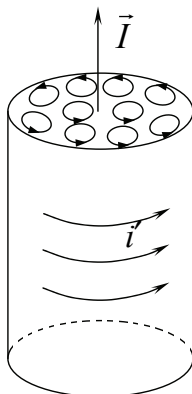


Рис. 2.6. Магнетик у формі циліндра, який намагнічений однорідно

Сукупність таких молекулярних струмів створює макроскопічний поверхневий струм намагнічування i' . Таке уявлення про макроскопічні струми намагнічування, які створюють таке ж магнітне поле, як і молекулярні струми дозволяє зв'язати вектор намагнічування \vec{I} зі струмами намагнічування і потім виразити вектор індукції магнітного поля в середовищі через вектор намагнічування.

Знайдемо зв'язок між струмами намагнічування i' та вектором намагнічування \vec{I} .

Для цього виберемо довільний контур L в магнетик. Нехай на цей контур спирається плоска поверхня S . Цю поверхню перетинають молекулярні струми. Причому є молекулярні струми, що перетинають

поверхню 2 рази (струми 1, 2, 3), а є такі, що перетинають її 1 раз (струми a, b, c), рис. 2.7.

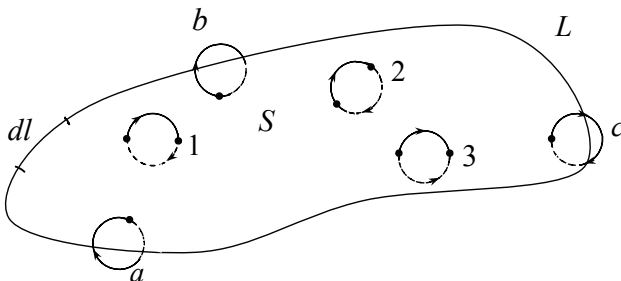


Рис. 2.7. Поверхню, яка обмежена контуром L молекулярні струми можуть перетинати один раз, або двічі

Очевидно, що сумарний внесок в загальний молекулярний струм через поверхню S дають ті струми, що перетинають цю поверхню один раз. Сукупність таких молекулярних струмів створює певний макроскопічний струм намагнічування i' . Виділимо на контурі L невеличкий елемент dl . У збільшеному вигляді він показаний на рис. 2.8.

Знайдемо силу струму намагнічування, що протікає через dS унаслідок попадання молекулярних струмів у нескінченно малий циліндричний об'єм dV . Як видно з рис. 2.8 елемент dl контуру L обплітають (а значить, елементарну поверхню dS перетинають один раз і в результаті дають внесок в повний струм намагнічування) ті молекулярні струми, центри яких попадають усередину косою циліндрика довжиною dl . Об'єм його дорівнює

$$dV = \vec{S}' d\vec{l} = S' dl \cos \alpha,$$

де \vec{S}' – елементарний вектор поверхні, що обмежена молекулярним струмом.

Якщо в одиниці об'єму знаходиться n молекулярних струмів, то через поверхню dS пройде струм, який дорівнює

$$di' = i_M (\vec{S}' d\vec{l}) \cdot \vec{n} = \vec{I} \cdot d\vec{l},$$

де $i_M \cdot \vec{S}' \cdot \vec{n} = \vec{I}$ – вектор намагнічування, $i_M \cdot \vec{S}'$ – магнітний момент елементарного струму. Тоді весь струм намагнічування через поверхню S , яка обмежена контуром L дорівнює

$$\oint_L i_M (\vec{S}' \cdot d\vec{l}) n = \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = i',$$

$$\oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = i'. \quad (2.16)$$

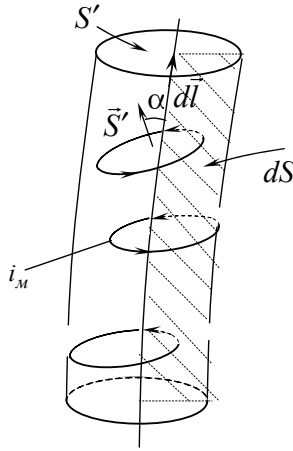


Рис. 2.8. Внесок у повний струм намагнічування через dS дають ті молекулярні струми, що перетинають dS один раз

Але з іншого боку, макроскопічний струм намагнічування дорівнює

$$i' = \int \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S},$$

де $\vec{j}_{\text{мол}}$ – густина молекулярних струмів намагнічування.

Використовуючи теорему Стокса,

$$\oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{I} \cdot d\vec{S}.$$

формулі (2.16)

$$i' = \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S}$$

надаємо такого вигляду

$$\int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{I} \cdot d\vec{S}.$$

Оскільки поверхня S довільна, то одержуємо зв'язок вектора намагнічування з густиною молекулярних струмів

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{I}. \quad (2.17)$$

Таким чином, процес намагнічування (який, нагадаємо, характеризується вектором \vec{I}) речовини в зовнішньому МП можна пояснити з допомогою струмів намагнічування. Тобто в результаті намагнічування в кожній точці простору магнетик створює додаткове до зовнішнього МП, властивості якого описуються макроскопічними струмами намагнічування та густиною молекулярних струмів.

Можна сказати і так: середовище намагнічується тому, що виникають струми намагнічування при внесенні магнетика в зовнішнє МП.

А тому циркуляція вектора \vec{B} буде визначатися не тільки струмами провідності (переносу), але й струмами намагнічування.

Розглядаємо спочатку стаціонарний випадок, тобто магнетик знаходиться в незмінному в часі зовнішньому магнітному полі. Тоді теорема про циркуляцію вектора \vec{B} в магнетикі набуває вигляду

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i + i'). \quad (2.18)$$

Враховуючи основну властивість струмів намагнічування (2.16), одержуємо

$$\oint_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = i + \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} \quad \text{або} \quad \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) \cdot d\vec{l} = i. \quad (2.19)$$

Якщо ввести новий вектор, вектор напруженості магнітного поля \vec{H}

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H},$$

то теорема про циркуляцію вектора \vec{H} записується так:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i. \quad (2.21)$$

Циркуляція вектора \vec{H} по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі тільки струмів провідності, що протікають через довільну поверхню, обмежену цим контуром.

Вектор \vec{H} фізичного змісту не має, це додатковий вектор, який полегшує знаходження магнітного поля в середовищі та визначається тільки струмами провідності.

У випадку колінеарності векторів, що входять в означення (2.20), очевидно, ми можемо проілюструвати (2.20) з допомогою рис. 2.9. Наприклад, картина силових ліній вектора \vec{B} однорідно намагніченого стержня показана на рис. 2.10.

Причому співвідношення між векторами, які характеризують магнітне поле всередині магнетика в точці P та його намагніченість, $\vec{B}, \vec{H}, \vec{I}$, ілюструється на рисунку 2.11.

У локальній формі закон (2.21) має вигляд

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (2.22)$$

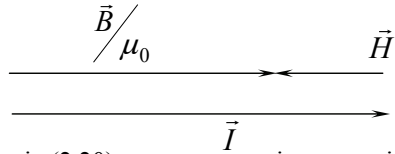


Рис. 2.9. Ілюстрація (2.20) у випадку колінеарності векторів $\vec{I}, \vec{H}, \vec{B}$

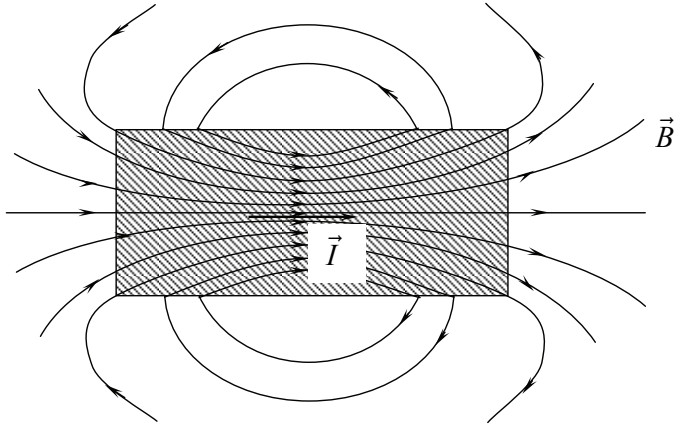


Рис. 2.10. Лінії вектора \vec{B} всередині й зовні однорідно намагніченого стержня

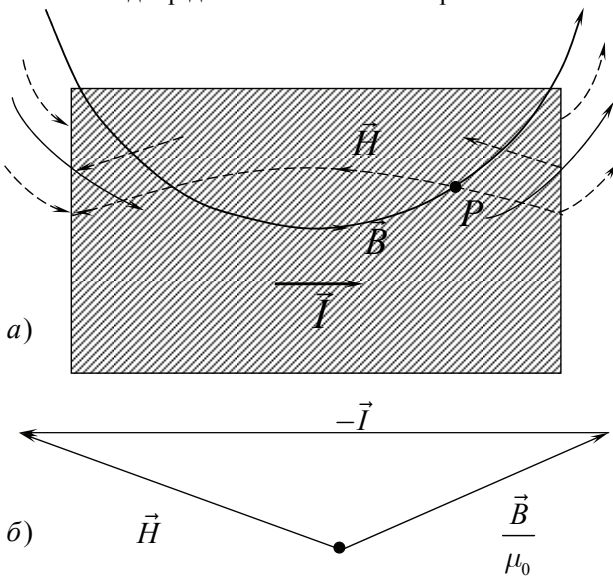


Рис. 2.11. Взаємна орієнтація векторів поля всередині магнетика в точці P

Якщо врахувати експериментальну залежність між намагніченістю та полем \vec{H}

$$\vec{I} = \chi \vec{H}, \quad (2.23)$$

де χ – магнітна сприйнятливість, то знайдемо зв'язок між індукцією магнітного поля \vec{B} та напруженістю поля \vec{H} в однорідному магнетикі

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{I}) = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (2.24)$$

де μ – магнітна проникність середовища,

$$\mu = (1 + \chi). \quad (2.25)$$

Знайдемо тепер густину струму поляризації $\vec{j}_{пол}$. Якщо речовина знаходиться в змінному електричному полі, то вектор поляризації буде залежати від часу. Але тоді й густина зв'язаних (поляризаційних) зарядів теж буде функцією часу. Оскільки $\rho' = -div \vec{P}$, то частина похідна ρ' за часом дорівнює

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} div \vec{P} = -div \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Порівнюючи далі це співвідношення з рівнянням неперервності

$$-\frac{\partial \rho'}{\partial t} = div \vec{j}',$$

знаходимо, що зміна вектора \vec{P} у часі еквівалентна появі деякої густини струму

$$\vec{j}' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Тобто густина струму поляризації $\vec{j}' = \vec{j}_{пол} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ визначається швидкістю зміни в часі дипольного моменту одиниці об'єму тіла.

Зміна в часі поляризації даного об'єму означає, що з нього виходять (або входять) зв'язані заряди. Але переміщення зв'язаних зарядів з точки зору переносу ними електрики еквівалентне деякому електричному струму, який характеризується густиною струму (2.26). Тобто в результаті зміни в часі поляризації речовини виникає ще одне джерело МП у середовищі.

2.4. Система рівнянь Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі

Таким чином, використовуючи модельні уявлення КЕТ, ми знайшли усереднене значення мікроскопічної густини заряду

$$\bar{\rho}_{мікро} = \rho + \rho' = \rho - \text{div}\vec{P} \quad (2.27)$$

та сумарне середнє значення мікроскопічної густини струму

$$\overline{\vec{j}_{мікро}} = \vec{j} + \vec{j}_{пол} + \vec{j}_{мол} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \text{rot}\vec{I}, \quad (2.28)$$

де $\vec{j}_{пол}$ – густина струму поляризації.

Ураховуючи формули (2.27) та (2.28), рівняння Максвелла в нерухомому середовищі набувають вигляду

$$\text{div}\varepsilon_0\vec{E} = \rho - \text{div}\vec{P}, \quad (2.29)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B} &= \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{зм} + \vec{j}_{пол} + \vec{j}_{мол}) = \\ &= \mu_0\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}) \cdot \mu_0 + \mu_0 \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \text{rot}\vec{I}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

Використовуючи означення вектора електричного зміщення, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, рівнянню (2.29) надамо вигляду

$$\text{div}\vec{D} = \rho.$$

Спростимо тепер рівняння (2.31)

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\varepsilon_0 + \vec{P}) = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

і одержуємо

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

де густина поляризаційного струму $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ та «чистого» струму зміщення

$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E})$ в сумі дають повну густину струму зміщення

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\epsilon_0 + \vec{P}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ в речовині.}$$

Таким чином, якщо ввести два допоміжні вектори, які фізичного змісту не мають, вектор електричного зміщення \vec{D}

$$\vec{D} = \vec{E}\epsilon_0 + \vec{P}$$

та вектор напруженості магнітного поля \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$$

і врахувати середні значення мікроскопічних густин зарядів та струмів (2.27) та (2.28), тоді система рівнянь Максвелла в середовищі в локальній формі в однорідному та ізотропному нерухомому в СВ K середовищі (разом з матеріальними рівняннями $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ і $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

В інтегральній формі ці рівняння такі:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Надалі, описуючи електромагнітні явища в довільній інерційній СВ, будемо використовувати рівняння Максвелла в формі (2.33) та (2.34).

2.5. Граничні умови для векторів поля

При переході від одного середовища до іншого напрямом і величина векторів поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{I}$ та інших, взагалі кажучи, змінюється. Граничні умови для векторів поля якраз і описують поведінку векторів поля при переході через межу поділу двох середовищ.

Граничні умови для векторів поля одержують у результаті аналізу рівнянь Максвелла в інтегральній формі в околі поверхні поділу двох речовин.

Будемо вважати, що на поверхні поділу двох однорідних та ізотропних діелектриків є розподілений вільний заряд, поверхнева густина якого σ .

Тоді, згідно з теоремою Гаусса для вектора \vec{D} , потік вектора \vec{D} через поверхню циліндра нескінченно малої висоти, рис. 2.12, дорівнює

$$D_{2n}\Delta S + D_{1n'}\Delta S = \sigma \cdot \Delta S.$$

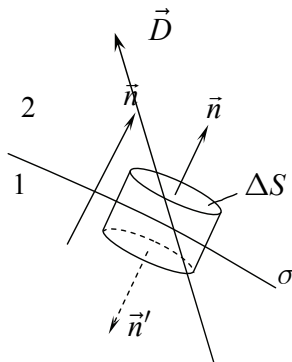


Рис. 2.12. До обґрунтування граничних умов вектора \vec{D}

Оскільки $D_{1n} = -D_{1n'}$, то попереднє рівняння набуває вигляду

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (2.35)$$

Тобто в загальному випадку нормальна складова вектора \vec{D} при переході через межу поділу двох середовищ терпить розрив. Але якщо на межі поділу відсутні сторонні (вільні) заряди, то нормальна складова вектора \vec{D} має однакове значення в обох речовинах:

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (2.36)$$

Використання теореми про циркуляцію вектора \vec{E} вздовж прямокутного контуру нескінченно малої ширини, рис. 2.13, дає результат

$$E_{2\tau} \cdot l + E_{1\tau'} \cdot l = 0,$$

де $E_{2\tau}$, $E_{1\tau'}$ – проекції вектора \vec{E} на напрямок обходу контуру $\vec{\tau}$ та $\vec{\tau}'$ в кожному діелектрику.

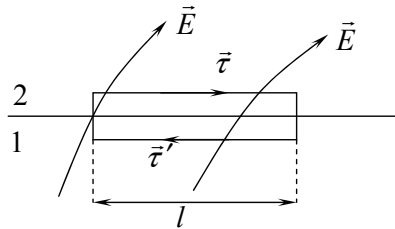


Рис. 2.13. Тангенційна складова вектора \vec{E} не змінюється при переході через межу поділу двох діелектриків

При цьому ми вважаємо, що в межах довжини контуру l вектор \vec{E} в кожному з діелектриків мав однакове, але своє значення.

Але очевидно, що $E_{1\tau'} = -E_{1\tau}$, тому з попереднього співвідношення одержуємо

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}. \quad (2.37)$$

Тобто, тангенційна складова вектор \vec{E} не змінюється при переході через межу поділу двох діелектриків.

Таким чином, якщо на межі поділу двох однорідних та ізотропних діелектриків відсутні вільні заряди ($\sigma = 0$), то, при переході через таку межу поділу двох діелектриків, складові E_{τ} і D_n не змінюються, а складові E_n і D_{τ} змінюються «стрибком». Така поведінка складових векторів полів \vec{E} і \vec{D} приводить до того, що силові лінії цих векторів на межі поділу двох середовищ заломлюються.

Дійсно, згідно граничних умов (2.37) та (2.36)

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

тангенційна складова вектор \vec{E} не змінюється при переході через межу поділу двох діелектриків, а нормальна складова вектора \vec{E} в другому діелектрику менша ніж нормальна складова вектора \vec{E} в першому діелектрику (якщо тільки $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Це означає, що картина силових ліній вектора \vec{E} має вигляд зображений на рис. 2.14.

І тоді із рис. 2.14 випливає:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau} / E_{2n}}{E_{1\tau} / E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (2.38)$$

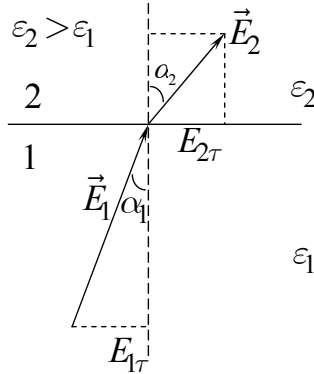


Рис. 2.14. Заломлення вектора \vec{E} при переході від першого до другого діелектрика

Тобто, в діелектрику з більшим значенням діелектричної проникності лінії векторів полів \vec{E} і \vec{D} утворюють з нормаллю до межі поділу двох середовищ більший кут ($\alpha_2 > \alpha_1$).

Приклад 2.4. На межі поділу діелектрик-провідник розподілений сторонній заряд з поверхневою густиною σ . Знайти поле в діелектрику та поверхневу густину зв'язаних зарядів.

Розв'язання: Застосовуючи умову (2.35) і вважаючи, що середовище 1 – це провідник, а середовище 2 – діелектрик, одержуємо:

$$D_n = \sigma,$$

де \vec{n} – зовнішня по відношенню до провідника нормаль.

Тому в діелектрику біля його поверхні маємо напруженість електричного поля

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.39)$$

Далі, під дією електричного поля зарядженого провідника біля поверхні однорідного діелектрика на межі поділу провідник-діелектрик з'являються зв'язані поверхневі заряди σ' . Сумарна густина зарядів на межі поділу, очевидно, дорівнює $\sigma + \sigma'$.

Застосовуючи електростатичну теорему Гаусса (тобто знаходячи потік вектора \vec{E} через поверхню циліндра нескінченної малої висоти, рис. 2.15) для нормальної складової напруженості електричного поля одержуємо:

$$E_n = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (2.40)$$

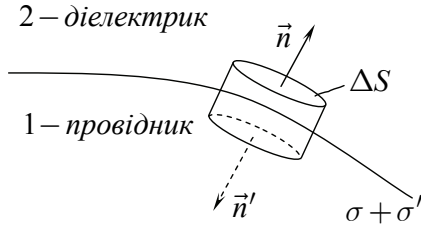


Рис. 2.15. Знаходження поверхневої густини зв'язаних зарядів σ'

Прирівнюючи (2.39) та (2.40), для σ' одержуємо вираз

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \sigma. \quad (2.41)$$

Приклад 2.5. Зобразити графічно поля \vec{E} та \vec{D} біля межі поділу двох однорідних діелектриків, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Вільних зарядів на поверхні поділу немає.

Розв'язання: Згідно (2.38) $\alpha_2 > \alpha_1$. З умови неперервності тангенційної складової вектора \vec{E} видно (див. рис. 2.14), що $E_2 < E_1$; тобто лінії вектора \vec{E} в діелектрику 1 слід проводити густіше, ніж в діелектрику 2.

А з умови (2.36) приходимо до висновку, що $D_2 > D_1$, тобто лінії вектора \vec{D} повинні проводитися більш густо в другому середовищі.

Таким чином, підсумовуючи, можна сказати, що лінії вектора \vec{E} не тільки заломлюються, але (у зв'язку з наявністю зв'язаних зарядів) і терплять розрив. У той час, як лінії вектора \vec{D} тільки заломлюються, а розрив відсутній. Ці висновки показані на рис. 2.16.

Граничні умови для векторів поля \vec{B} та \vec{H} одержуються, відповідно, з допомогою рівняння Максвелла

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.42)$$

та теореми про циркуляцію вектора \vec{H}

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i \quad (2.43)$$

Виберемо замкнену поверхню у вигляді круглого циліндра з дуже малою висотою в околі межі поділу двох однорідних магнетиків, рис. 2.17.

Тоді сумарний потік вектора \vec{B} через поверхню цього циліндрика дорівнює згідно з (2.42)

$$B_{2n} \Delta S + B_{1n'} \Delta S = 0.$$

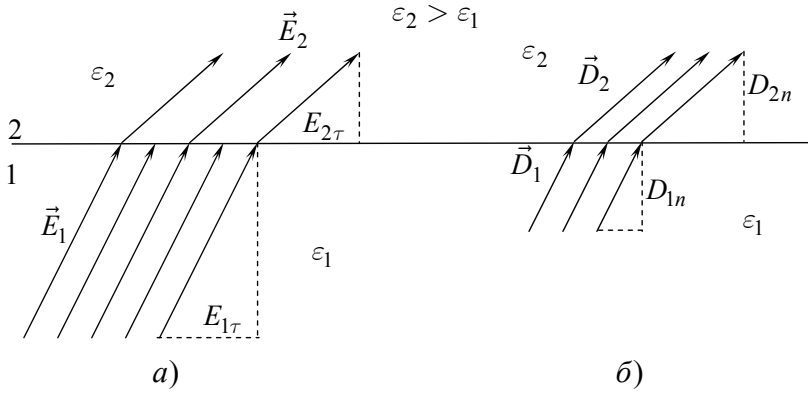


Рис. 2.16. Картина силових ліній векторів \vec{E} та \vec{D} при переході через межу поділу двох діелектриків

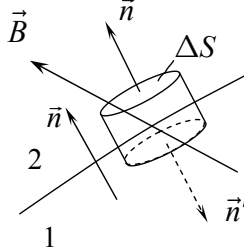


Рис. 2.17. До обґрунтування граничної умови для нормальної складової вектора \vec{B} (2.44)

Оскільки $B_{1n} = -B_{1n'}$, то

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.44)$$

Гранична умова для тангенційної складової вектора \vec{H} знаходиться з допомогою рис. 2.18. та теореми (2.43).

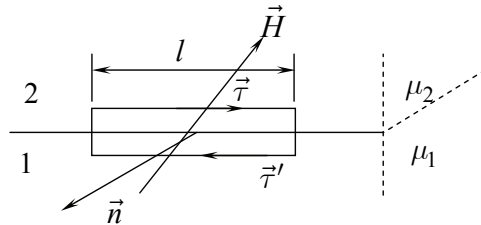


Рис. 2.18. До обґрунтування граничної умови для тангенційної складової вектора \vec{H}

Але припустимо, що вздовж поверхні поділу магнетиків протікає поверхневий струм провідності, лінійна густина якого \vec{i} .

Тоді при виборі контуру так, як це показано на рис. 2.18, циркуляція вектора \vec{H} дорівнює

$$H_{2\tau} \cdot l + H_{1\tau'} \cdot l = l \cdot i_n,$$

де i_n – проекція вектора \vec{i} на нормаль до контуру \vec{n} .

Спроектуємо вектор \vec{H} в першому та другому магнетикі на орт $\vec{\tau}$, тобто $H_{1\tau} = -H_{1\tau'}$. Попереднє рівняння набуває граничної умови для дотичної до поверхні поділу складової вектора \vec{H} :

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_n. \quad (2.45)$$

Якщо ж на межі поділу відсутні струми провідності, то тангенційна складова вектора \vec{H} є неперервною:

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}. \quad (2.46)$$

Аналогічно до способу знаходження кута заломлення ліній векторів \vec{E} та \vec{D} при переході від одного діелектрику до іншого, одержуємо співвідношення тангенсів кутів α_1 і α_2 на межі поділу двох магнетиків, рис. 2.19,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_{2\tau} / B_{2n}}{B_{1\tau} / B_{1n}}. \quad (2.47)$$

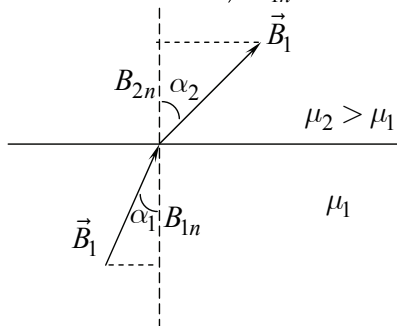


Рис. 2.19. Заломлення ліній вектора \vec{B} при переході через поверхню поділу двох магнетиків

Коли ж немає поверхневих струмів провідності, то згідно з (2.46) і (2.44), з (2.47) одержуємо

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (2.48)$$

Приклад 2.6. Зобразити картину ліній векторів \vec{B} та \vec{H} біля межі поділу двох магнетиків, $\mu_2 > \mu_1$. Поверхневих струмів провідності на межі поділу немає.

Розв'язання: З граничних умов (2.44) і (2.46) та рис. 2.19 приходимо до висновку, що $B_2 > B_1$, $H_2 < H_1$. Лінії вектора \vec{B} не мають розриву, а лінії вектора \vec{H} терплять розрив, див. рис. 2.20.

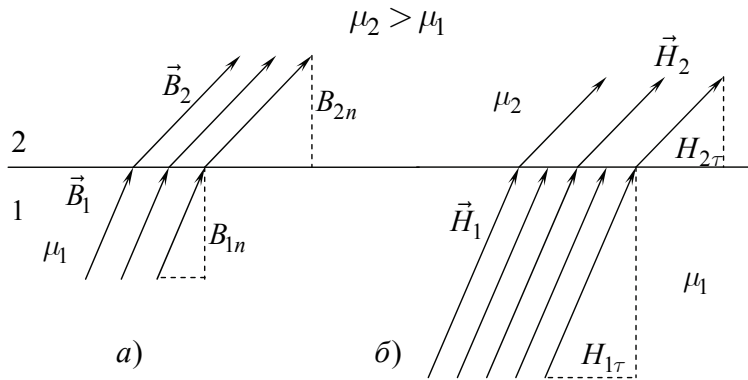


Рис. 2.20. Картина ліній векторів \vec{B} та \vec{H} в околі поверхні поділу двох магнетиків, $\mu_2 > \mu_1$

2.6. Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Знайти поверхневу густину сили, що діє на поверхню зарядженого провідника з боку електричного поля зарядів цього провідника.

Розв'язання: На елемент поверхні зарядженого провідника dS діє сила

$$d\vec{F} = \sigma \cdot dS \cdot \vec{E}_0,$$

де \vec{E}_0 – напруженість поля, яке створюється всіма останніми зарядами (крім заряду σdS) у місці знаходження цього заряду σdS .

Слід зауважити, що \vec{E}_0 не дорівнює напруженості електричного поля \vec{E} поблизу даного елемента поверхні dS . Але між ними існує певний зв'язок. Тому виразимо \vec{E}_0 через \vec{E} .

Якщо \vec{E}_σ – напруженість електричного поля, що створюється зарядом σdS поблизу елемента dS , то $E_\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$. Оскільки поле все-

редині провідника поблизу елемента dS дорівнює нулеві, і воно, згідно з принципом суперпозиції дорівнює $\vec{E}_0 + \vec{E}_\sigma = 0$, то (див. рис. 2.21.)

$$\vec{E}_0 = -\frac{\vec{E}_\sigma}{2}.$$

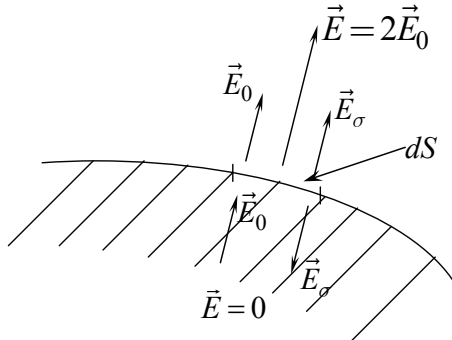


Рис. 2.21. Знаходження поверхневої густини сили, що діє на поверхню зарядженого провідника

Значить, поверхнева густина сили, що діє на поверхню зарядженого провідника з боку електричного поля зарядів цього провідника, виражається формулою

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma \vec{E}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0\epsilon} \vec{n} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \vec{n}. \quad (2.49)$$

Задача 2.2. Металеву сферичну поверхню радіуса a помістили в однорідне електричне поле \vec{E}_0 , а потім розрізали на дві половин площиною, яка перпендикулярна вектору \vec{E}_0 . Знайти силу відштовхування цих двох півсфер.

Розв'язання: Унаслідок електростатичної індукції на поверхні металевої сфери з'являється певним чином розподілені заряди. Напрямок напруженості вектора \vec{E}_0 та знаки індукованих зарядів показані на рис. 2.22. Усередині сфери електричне поле відсутнє. Тобто напруженість електричного поля, яке створюється індукованими зарядами всередині сфери повністю (в кожній точці об'єму сфери) компенсує зовнішнє однорідне електричне поле напруженістю \vec{E}_0 . Але раніше ми знайшли, що однорідне електричне поле в об'ємі кулі може створюватися розподіленими по її поверхні зарядами. Причому поверхнева густина повинна дорівнювати (*Задача 1.11*)

$$\sigma = \rho l \cos\theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta,$$

де величина ρl знаходиться з формули $E_0 = \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}$.

Зауважимо, що напруженість електричного поля біля самої поверхні нашої металевої сфери

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3E_0 \cos \theta,$$

звідки видно, що вона змінюється від нуля до $3E_0$.

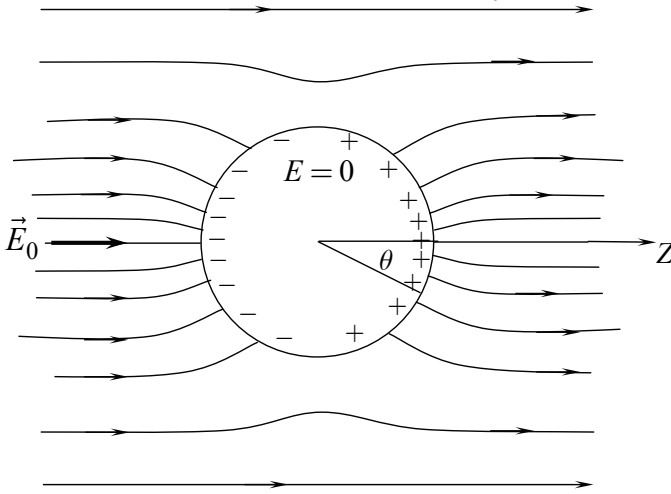


Рис. 2.22. Металева сфера в однорідному електричному полі

Поле $E = \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}$ всередині сфери створюється розподіленими по поверхні сфери поверхневими зарядами $\sigma = \rho l \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$, або, що те ж саме, зсунутими одна відносно іншої на малий вектор \vec{l} різнойменно зарядженими кулями. Поле поза межами сфери (чи кулі), очевидно, дорівнює векторній сумі напруженості зовнішнього поля \vec{E}_0 та поля, що породжується зсунутими одна відносно іншої на малий вектор \vec{l} різнойменно зарядженими кулями (або, ще раз повторимо, що те ж саме, відповідними поверхневими зарядами).

Із попереднього (див. Розділ 1) відомо, що електричне поле поза рівномірно зарядженою кулею таке, начебто весь заряд кулі зосереджений в її центрі. Тобто електричне поле, яке створюється поверхневим зарядом $\sigma = \rho l \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$ на кінцевій віддалі від зарядженої таким чином сфери еквівалентне полю двох точкових ЗЧ, коли положення одної

відносно другої визначається вектором \vec{l} . Іншими словами, електричне поле, що створюється індукованими на поверхні сфери зарядами $\sigma = \rho l \cos \theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ у навколишньому просторі еквівалентне полю диполя.

Електричний момент нашого еквівалентного диполя дорівнює (порівняти з розв'язанням **Задачі 1.13**):

$$\vec{p} = q\vec{l} = \frac{4\pi R^3}{3} \rho\vec{l} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0,$$

де $\rho\vec{l} = 3\epsilon_0 \vec{E}_0$.

Ми одержали важливий в усіх відношеннях результат. Використовуючи в основному принцип суперпозиції, ми знайшли дипольний момент індукованих зарядів на поверхні металевої кулі, яка знаходиться у зовнішньому полі. І цей момент визначається напруженістю зовнішнього однорідного поля \vec{E}_0 .

Тепер можемо перейти до знаходження сили відштовхування півсфер. Будемо вважати, що металева сфера знаходиться у вакуумі, і розглянемо позитивно заряджену півсферу, рис. 2.23.

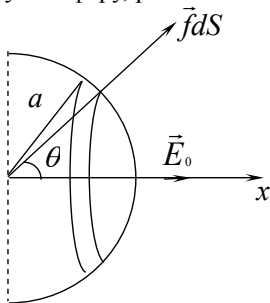


Рис. 2.23. До визначення сили відштовхування, яка діє на півсферу

На одиницю поверхні сфери діє сила (див. **Задачу 2.1** та формулу (2.49))

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0},$$

де $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$.

Із симетрії задачі випливає, що сумарна сила, яка діє на півсферу, паралельна зовнішньому полю \vec{E}_0 і дорівнює:

$$F_x = \int f \cdot \cos \theta \cdot dS,$$

де dS – елемент поверхні сферичного пояса, який у сферичній системі координат рівний $dS = 2\pi a^2 \sin \theta \cdot d\theta$.

Інтегруємо і знайдемо силу відштовхування

$$F_x = 9\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2.$$

Задача 2.3. Один з методів експериментального визначення поляризованості (діелектричної сприйнятливості) діелектриків полягає в наступному. Зразок у вигляді тонкого циліндра довжиною l зрівноважують на вагах, рис. 2.24. Потім його розміщують в електричному полі двох різнойменно заряджених сфер і знову зрівноважують. Знайти поляризованість діелектрика, якщо заряд сфери q , віддаль між сферами $2a$, площа поперечного перерізу зразка S , вага зразка P , а вага його в електричному полі P_1 .

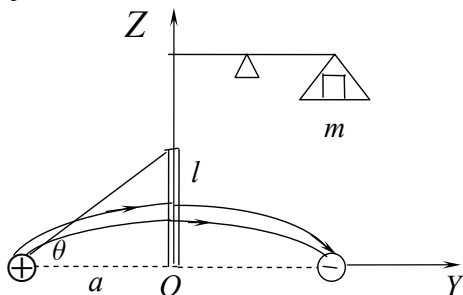


Рис. 2.24. Циліндричний діелектрик довжиною l в неоднорідному електростатичному полі заряджених сфер

Розв'язання: Сила, що діє на одиницю об'єму діелектрика в неоднорідному електричному полі визначається [16]:

$$\vec{f} = \frac{\alpha}{2} \text{grad}(E^2),$$

де α – діелектрична сприйнятливість діелектрика.

У нашому випадку сила, яка діє на зразок в електростатичному полі заряджених сфер, паралельна осі OZ і дорівнює

$$F_z = \frac{\alpha}{2} \int \text{grad}_z E^2 dV = \frac{\alpha S}{2} \int_0^l \frac{dE^2}{dz} dz = \frac{\alpha S}{2} (E^2(l) - E^2(0)).$$

З рис. 2.24. знаходимо

$$E(l) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l_1^2} \cos \theta = \frac{aq}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + l^2)^{3/2}}, \quad E(0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2},$$

де r_1 – віддаль від зарядженої сфери до відповідної точки зразка.

Тобто сила з боку електричного поля дорівнює

$$F_z = -\frac{\alpha S \cdot a^2 q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0^2} \left[\frac{1}{a^6} - \frac{1}{(a^2 + l^2)^3} \right].$$

З іншого боку $F_z = -(P_1 - P)$. Таким чином, порівнюючи останні два вирази для сприйнятливості α знаходимо

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \varepsilon_0^2 (P_1 - P)}{S a^2 q^2} \left[\frac{1}{a^6} - \frac{1}{(a^2 + l^2)^3} \right]^{-1}.$$

Задача 2.4. Мильна кулька, що висить на трубці, при відкритій трубці стягується під впливом сил поверхневого натягу ($\alpha = 0,05 \frac{\text{Джс}}{\text{м}^2}$).

Чи можна шляхом електричного заряджання оберегти її від повного стищення? При цьому слід мати на увазі обмежену діелектричну міцність повітря, рівну $2 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Якщо так, то який діаметр матиме кулька в стані рівноваги?

Розв'язання: Шляхом електричного заряджання сили поверхневого натягу мильної кульки можна зрівноважити силами електростатичного відштовхування зарядів, які будуть розподілені на кульці. Сили електростатичного відштовхування зарядів і поверхневого натягу (які відносяться до одиниці площі поверхні кульки) рівні відповідно:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{див. Задача 2.1}),$$

$$\frac{4\alpha}{d},$$

де d – діаметр мильної кульки, E – напруженість електричного поля на поверхні кульки, α – коефіцієнт поверхневого натягу.

Тоді при рівновазі

$$\frac{4\alpha}{d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Але кулька може бути заряджена тільки до такого E , при якому не виникає пробій повітря. З умови рівноваги знаходимо:

$$d = \frac{8\alpha}{\varepsilon_0 E^2} = 1,13 \text{ см.}$$

Задача 2.5. Точкова ЗЧ знаходиться в центрі кулі з однорідного ізо-
тропного діелектрика. Радіус кулі r_0 , діелектрична стала ε , заряд q .
Знайти напруженість та індукцію електричного поля в довільній точці
простору.

Розв'язання: Оскільки зв'язаний заряд нам невідомий, то теорему
Гаусса для вектора \vec{E} , $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}$, використати неможливо. То-
му виходячи із симетрії задачі, використання теореми Гаусса для векто-
ра \vec{D} , (2.14), дає

$$4\pi r^2 \cdot D = q,$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

А величина напруженості електричного поля ($D = \varepsilon\varepsilon_0 E$) при
 $r < r_0$ та при $r > r_0$, відповідно, дорівнює

$$E(r < r_0) = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \quad E(r > r_0) = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Графіки залежностей $D(r)$ та $E(r)$ зображені на рис. 2.25.

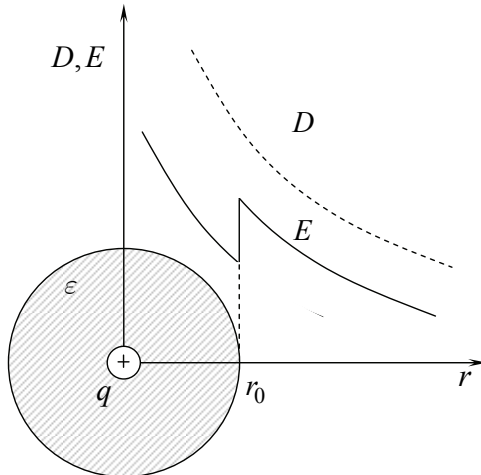


Рис. 2.25. Залежності $D(r)$ та $E(r)$

Задача 2.6. Уздовж осі циліндричного магнетика радіусу r_0 протікає постійний струм i . Магнітна проникність магнетика μ . Знайти напруженість та індукцію магнітного поля в довільній точці простору.

Розв'язання: Оскільки струми намагнічування нам невідомі, то теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} скористатися ми не можемо. Тому виходячи із симетрії задачі використання теореми про циркуляцію вектора \vec{H} , (2.21), маємо

$$H \cdot 2\pi r = i.$$

Звідси, одержуємо

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 i}{2r\pi}$$

Бачимо, що при переході через межу поділу магнетик–вакуум індукція магнітного поля змінюється на відміну від H стрибком, див. рис. 2.26.

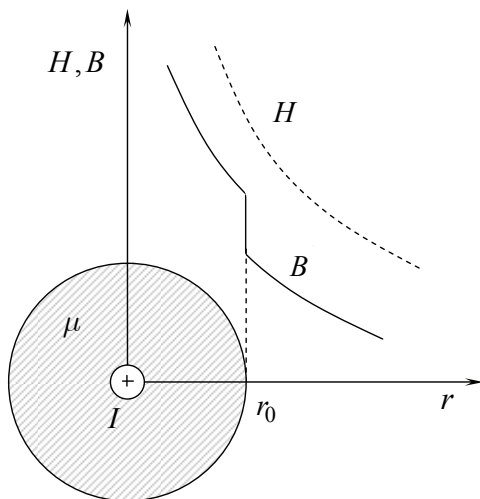


Рис. 2.26. Залежності $B(r)$ та $H(r)$

Збільшення B в магнетик зумовлене появою поверхневих струмів намагнічування: **біля провідника зі струмом, що на осі магнетика, ці струми намагнічування співпадають з напрямком i .** Ззовні циліндричного магнетика поверхневий струм намагнічування направлений в протилежну сторону. І тому він не впливає на поле всередині магнетика, а поза межами магнетика магнітні поля обох струмів намагнічування компенсують один одного.

Задача 2.7. Постійний струм i проходить по довгому циліндричному проводу із магнетика. Радіус поперечного перерізу проводу r_0 , магнітна сприйнятність χ . Знайти: 1) індукцію та напруженість магнітного поля в кожній точці простору; 2) густину струму намагнічування j' всередині проводу [4].

Розв'язання: 1) Теорема про циркуляцію вектора \vec{H} , (2.21), по колу радіуса r дозволяє знайти як H , так і B :

при $r < r_0$ $2\pi r \cdot H = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cdot i$, звідси одержуємо

$$H = \frac{ir}{2\pi r_0^2}, \quad B = \mu_0(1 + \chi) \cdot \frac{ir}{2\pi r_0^2},$$

при $r > r_0$, аналогічним шляхом для значень векторів магнітного поля знаходимо

$$2\pi r \cdot H = i, \quad H = \frac{i}{2\pi r}, \quad B = \mu_0(1 + \chi) \cdot \frac{i}{2\pi r}.$$

Графіки залежностей $B(r)$ та $H(r)$ показані на рис. 2.27.

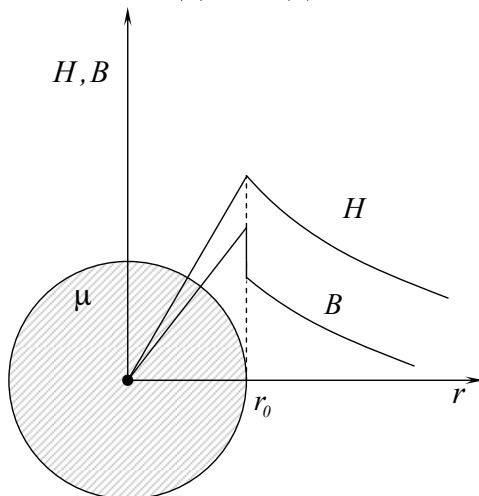


Рис. 2.27. Залежності $B(r)$ та $H(r)$

2) Для знаходження густини струму намагнічування j' всередині проводу скористаємося теоремою про циркуляцію вектора намагнічування \vec{I} , (2.17а), по колу радіуса r ,

$$2\pi r \cdot I = i'.$$

Знайдемо спочатку диференціал цього виразу

$$2\pi \cdot d(r \cdot I) = di'.$$

Очевидно, що di' – це нескінченне мале значення сили струму намагнічування, який протікає через поверхню обмежену колами радіусами r та $r + dr$ (поверхня вузького колового поясокка). Тому $di' = j' \cdot 2\pi r \cdot dr$, і попереднє рівняння набуває вигляду

$$j' = \frac{I}{r} + \frac{dI}{dr},$$

а з урахуванням $I = \chi H = \chi \cdot \frac{ir}{2\pi r_0^2}$, нарешті одержуємо

$$j' = \frac{\chi I}{\pi r_0^2}.$$

Цей струм намагнічування протікає в тому ж напрямку, що і струм провідності. А от поверхневий струм намагнічування протікає в протилежному напрямку.

Задача 2.8. Постійний магніт виготовлений у вигляді кільця з вузьким зазором між полюсами, рис. 2.28. Знайти модулі векторів \vec{H} та \vec{I} всередині кільця, якщо магнітна індукція в зазорі дорівнює \vec{B} , ширина зазору b [4].

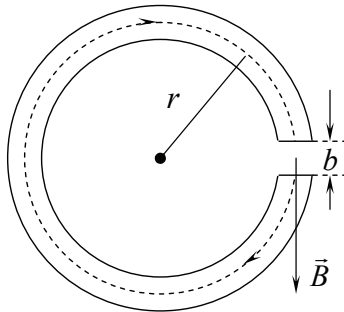


Рис. 2.28. Знаходження напруженості магнітного поля в зазорі кільцевого магніту

Розв'язання: Використовуючи теорему (2.21), вздовж кола радіуса r , див. рис. 2.28, та враховуючи, що струми провідності відсутні, маємо

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\pi d - b)H + \frac{bB}{\mu_0} = 0.$$

Звідси для H одержуємо

$$H = -\frac{bB}{\mu_0(\pi d - b)} \approx -\frac{bB}{\mu_0 \pi d}.$$

Бачимо, що при $b \rightarrow 0$ напруженість магнітного поля в зазорі теж прямує до нуля, $H \rightarrow 0$, що зрозуміло, бо наш коловий контур не охоплює будь-який струм провідності. А знак мінус у виразі для H означає, що вектор \vec{H} всередині магнетика направлений протилежно вектору \vec{B} у тій же точці.

Користуючись означенням вектора \vec{H} , $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H}$, та поперед-

нім результатом, для модуля вектора намагнічування всередині магнетика одержуємо

$$I = \frac{B}{\mu_0(1 - b/2\pi r)} \approx \frac{B}{\mu_0}.$$

Тобто всередині кільцевого магніту вектор намагнічування приблизно дорівнює $I \approx \frac{B}{\mu_0}$, що можна проілюструвати з допомогою рис. 2.29.

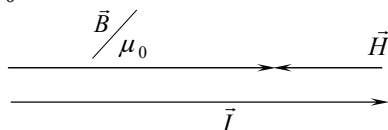


Рис. 2.29. Співвідношення між векторами \vec{I} , \vec{H} та $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

у будь-якій точці речовини кільцевого магніту

Задача 2.9. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого $\chi = ar^2$, де a – постійна, r – віддал від осі соленоїду. Знайти залежність від r : 1) намагніченості $\vec{I}(r)$; 2) густини струму намагнічування $j'(r)$, якщо на осі соленоїду магнітна індукція дорівнює \vec{B}_0 , рис. 2.30 [4].

Розв'язання: Намагніченість магнетика $I = \chi H$, але в нашому випадку H не залежить від r . Дійсно, згідно з теоремою (2.21) про циркуляцію вектора \vec{H} по контуру L_1 , $H \neq f(r)$. Тому $H = H_0$, і для намагніченості маємо

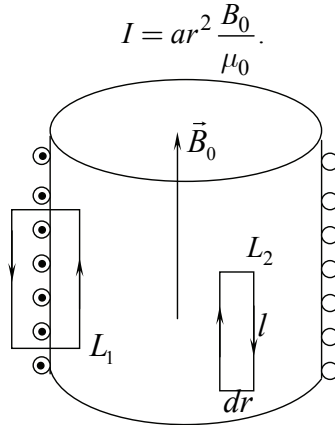


Рис. 2.30. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком.
На осі соленоїду магнітна індукція дорівнює \vec{B}_0

2. Розглянемо контур L_2 . З основної властивості вектора намагнічування, (2.17а), $i' = \oint_l \vec{I} \cdot d\vec{l}$ впливає

$$I - (I + dI) \cdot l = j'_n \cdot l dr,$$

де l – довжина контуру, dr – його ширина.

Тому з останнього виразу отримуємо

$$j'_n = -\frac{dI}{dr} = -\frac{2aB_0}{\mu_0} r.$$

Знак мінус показує, що вектор густини струму намагнічування $\vec{j}'(r)$ направлений протилежно вектору нормалі \vec{n} . Цей вектор нормалі \vec{n} утворює з напрямком обходу контуру l правий гвинт. Тому вектор $\vec{j}'(r)$ в межах контуру l направлений перпендикулярно рис. 2.30, «до нас». Іншими словами, об'ємні струми намагнічування утворюють з вектором \vec{B}_0 лівогвинтову систему.

Задача 2.10. В однорідному електричному полі знаходиться діелектрична куля радіусу R . Діелектрична проникність середовища ϵ_2 , а діелектрика кулі ϵ_1 . Знайти електричне поле всередині кулі [3].

Розв'язання: Виберемо сферичну СК, причому полярну вісь направимо по осі OZ , див. рис. 2.31. Щоб знайти електричне поле необхідно спочатку розв'язати рівняння Пуассона для скалярного потенціалу.

Рівняння Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0$ у сферичній СК має вигляд

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

де α – аксіальний кут, θ – полярний кут (див. Розділ 4).

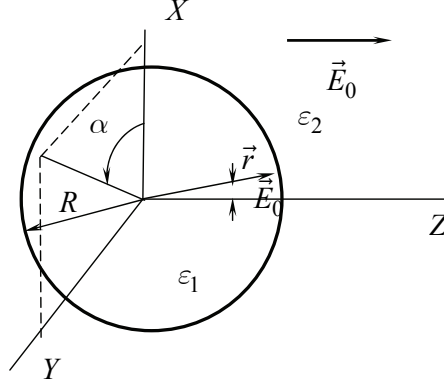


Рис. 2.31. Однорідна діелектрична куля в постійному однорідному електричному полі

Унаслідок аксіальної симетрії $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$, і оскільки вільні заряди відсутні ($\rho = 0$), то задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Розв'язок цього рівняння повинен задовольняти таким умовам:

- А) потенціал φ у всьому просторі має бути неперервним і кінцевим;
- Б) нормальні компоненти вектора $\vec{D} = -\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \nabla \varphi$ неперервні на межі поділу двох середовищ, тобто на поверхні кулі;
- В) тангенційні складові вектора напруженості електричного поля $\vec{E} = -\nabla \varphi$ на поверхні кулі також неперервні.

Далі ми будемо позначати величини, що відносяться до внутрішньої області кулі індексом 1, а до зовнішньої – індексом 2.

Загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичній СК, відомий з теорії диференційних рівнянь в частинних похідних, у вигляді сферичних функцій такий:

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) (A e^{im\alpha} + B e^{-im\alpha}),$$

де $P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ – приєднані поліноми Лежандра,

$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$ – поліноми Лежандра, $m = 0, 1, 2, \dots, l$, кожному значенню l відповідає $l + 1$ приєднаних поліномів Лежандра; кожному значенню l відповідає $2l + 1$ сферичних функцій

$$Y_l^{(m)}(\theta, \alpha) = V(\theta) \cdot \Phi(\alpha) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \cdot e^{\pm im\alpha}.$$

Але в нашому випадку вигляд сферичних функцій суттєво спрощується, і прямою перевіркою можна впевнитися, що функції

$$\varphi_1 = A_1 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta,$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta$$

задовольняють диференційному рівнянню (2.50), де A_1, A_2, B_2 – постійні, E_0 – модуль напруженості електричного поля.

З вимоги А) випливає, що $A_2 = 0$. А умова неперервності потенціалу на межі поділу має вигляд

$$A_1 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + B_2 R^{-2} \cos \theta, \quad (2.51)$$

звідки отримуємо

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0.$$

Дотична компонента вектора \vec{E} на поверхні кулі дорівнює

$$E_\tau = E_\theta = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{r=R}.$$

Умова $E_{1\theta} = E_{2\theta}$ задовольняється, якщо виконується умова (2.51), тобто між постійними A_1 та B_2 існує співвідношення

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0.$$

Нормальні складові вектора \vec{E} дорівнюють

$$E_{1n} = E_{1r} = -(\partial \varphi_1 / \partial r)_{r=R} = -A_1 \cos \theta,$$

$$E_{2n} = E_{2r} = -(\partial \varphi_2 / \partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2B_2 R^{-3} \cos \theta.$$

З умови $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$ випливає

$$A_1 = - \left(E_0 + 2B_2 R^{-3} \right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Розв'язуючи далі систему алгебраїчних рівнянь

$$A_1 = -\left(E_0 + 2B_2R^{-3}\right)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$A_1 = B_2R^{-3} - E_0$$

знаходимо постійні A_1 та B_2

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}R^3E_0.$$

Таким чином, потенціал електричного поля всередині діелектричної кулі та зовні неї, відповідно, рівний

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0r \cos \theta,$$

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right)E_0r \cos \theta,$$

Тоді напруженість електричного поля всередині кулі

$$E_{1z} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial (r \cos \theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0. \quad (2.52)$$

І, як бачимо, електричне поле всередині кулі є однорідним.

Поле всередині кулі ми можемо розглядати як суперпозицію поля зовнішнього й електричного поля, яке створене зв'язаними зарядами, що виникли на поверхні кулі.

Тобто напруженість електричного поля зв'язаних зарядів дорівнює

$$E_{3g} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2). \quad (2.53)$$

Проаналізуємо одержані результати.

По-перше, напруженість результуючого електричного поля всередині кулі та поля зв'язаних зарядів постійна й направлена по осі OZ .

По-друге, з розв'язків *Задачі 1.10* та *Задачі 1.11* ми знаємо, що розподіл зарядів на поверхні кулі, який приводить до однорідного поля всередині кулі, дається формулою

$$\sigma = \rho l \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

Тому можна стверджувати, що поле зв'язаних зарядів $E_{3g} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$ створюється поверхневими зарядами розподіленими згідно з попередньою формулою.

По-третє, з виразу (2.53) видно, що при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ вектор \vec{E}_{3g} направлений протилежно вектору напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 . Значить, величина напруженості поля всередині кулі менша, ніж E_0 , рис. 2.32.

При $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ вектор $\vec{E}_{3\theta}$ збігається за напрямком з вектором напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 , а значить, підсилює величину поля всередині кулі. На рис. 2.33 зображені силові лінії вектора \vec{D} , а не вектора \vec{E} , оскільки саме вектор \vec{D} неперервний у відсутності вільних зарядів.

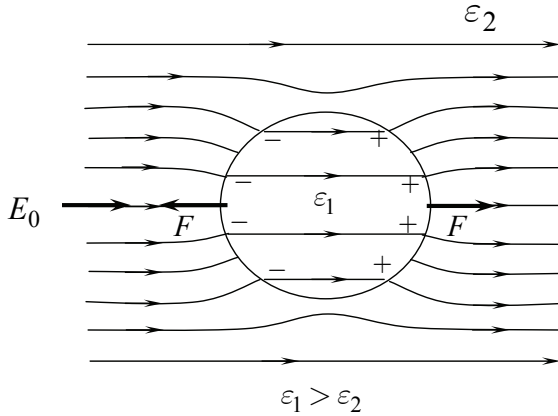


Рис. 2.32. Лінії напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 та вектора \vec{D} всередині кулі при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

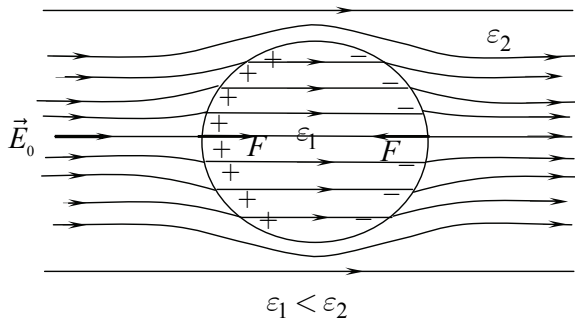


Рис. 2.33. Лінії вектора \vec{D} всередині й зовні діелектричної кулі при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Задача 2.11. Знайти зв'язані заряди, вектор поляризації та напруженість електричного поля, яке породжується точковою ЗЧ, що знаходиться в центрі двох концентричних сфер. Радіуси цих сфер a_1 та a_2 ,

рис. 2.34. Діелектрична проникність сферичного шару товщиною $a_2 - a_1$ дорівнює ε .

Розв'язання: З теореми Гаусса для вектора \vec{D} знаходимо величину його в усьому просторі

$$D_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}.$$

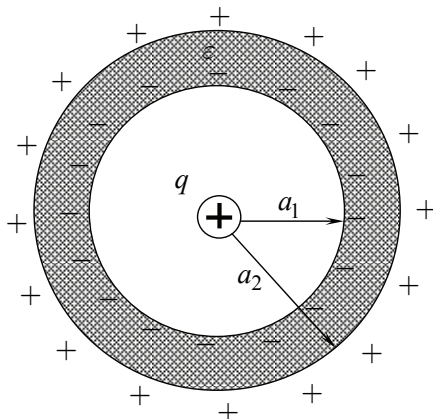


Рис. 2.34. Точкова ЗЧ знаходиться в центрі сферичного шару діелектрика

Тоді напруженість електричного поля

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad r < a_1,$$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2} \quad \text{при } a_1 < r < a_2,$$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad a_2 < r,$$

терпить розрив на поверхнях сферичного шару при $r = a_1$ та $r = a_2$.

Згідно з означенням вектора \vec{D} , $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, для величини вектора поляризації одержуємо

$$P_r = D_r - \varepsilon_0 E_r = \begin{cases} 0 & r < a_1, \\ \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon r^2} & \text{при } a_1 < r < a_2. \\ 0 & a_2 < r. \end{cases}$$

Тому поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює

$$\sigma_{зв1} = -P_r(r = a_1) = -(\varepsilon - 1)q / (4\pi\varepsilon a_1^2),$$

$$\sigma_{зв2} = P_r(r = a_2) = (\varepsilon - 1)q / (4\pi\varepsilon a_2^2),$$

Величина зв'язаних зарядів на внутрішній і зовнішній поверхнях сферичного шару дорівнює, відповідно,

$$q_{1зв} = 4\pi a_1^2 \cdot \sigma_{зв1} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q,$$

$$q_{2зв} = 4\pi a_2^2 \cdot \sigma_{зв2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q.$$

Як бачимо, вони однакові за величиною і протилежні за знаком.

Об'ємна густина зв'язаних зарядів дорівнює нулеві:

$$\rho_{зв} = -\operatorname{div}\vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0.$$

Таким чином, ослаблення поля всередині шару можна пояснити тим, що електричне поле всередині шару створюється точковою ЗЧ і зв'язаним зарядом $q_{1зв}$, який знаходиться на внутрішній поверхні шару. А заряд $q_{2зв}$ електричного поля всередині шару не створює.

Задача 2.12. Користуючись формулами (2.7) (2.8), знайти знаки зв'язаних зарядів на поверхні поділу двох діелектриків.

Розв'язання: Розглянемо нормальні складові вектора поляризації та напруженості електричного поля на плоскій границі поділу двох діелектриків.

Тоді згідно з (2.7) (2.8) маємо:

$$\sigma' = -(P_{2n} - P_{1n}),$$

$$P_{2n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - 1) E_{2n},$$

$$P_{1n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) E_{1n}.$$

А для поверхневої густини зв'язаних зарядів одержуємо

$$\sigma' = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}).$$

У тому випадку коли на межі поділу відсутні вільні заряди, то $\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}$ і попередня формула спрощується

$$\sigma' = -\varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \quad (2.54)$$

Проаналізуємо одержаний результат. Будемо вважати, як і при обґрунтуванні формули (2.7), що вектор \vec{E} направлений з першого діелек-

трика в другий, і нехай $\epsilon_2 > \epsilon_1$, а за позитивний напрямок нормалі вибраний напрямок з першого середовища в друге, рис. 2.35а.

Тоді у формулі (2.54) E_{1n} і E_{2n} позитивні, причому $E_{1n} > E_{2n}$, а значить зв'язаний заряд на межі поділу негативний. Величини P_{1n} і P_{2n} теж позитивні, але $P_{2n} > P_{1n}$.

Якщо ситуація склалася так, що вектор \vec{E} направлений в сторону діелектрика з меншою діелектричною сталою, то знак поверхневого заряду й орієнтація векторів поля будуть такі, як це зображено на рис. 2.35б.

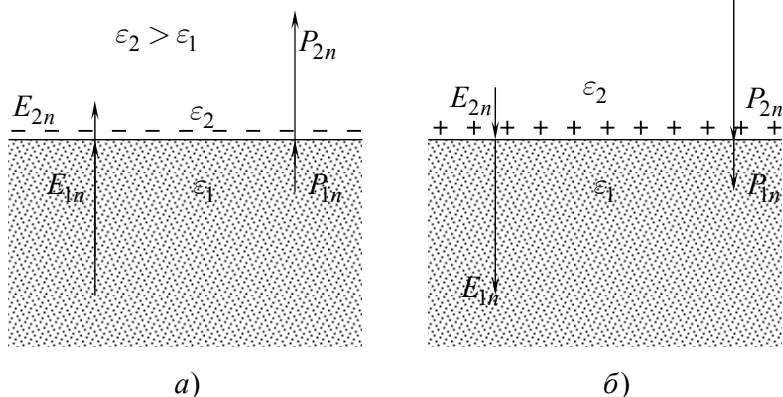


Рис. 2.35. Нормальні складові векторів \vec{E} і \vec{P} та знак поверхневого зв'язаного заряду при переході через межу поділу двох діелектриків

Задача 2.13. На основі принципу суперпозиції визначити електричне поле всередині та зовні рівномірно поляризованої діелектричної кулі. Радіус кулі a , вектор поляризації кулі \vec{P} .

Розв'язання: Задача може бути розв'язана трьома способами.

А. Потенціал електричного поля, що створюється зв'язаними в діелектрику зарядами, має вигляд

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \frac{\rho_{зв'яз}}{R} dV + \int_S \frac{\sigma_{зв'яз}}{R} dS \right).$$

У нашому випадку $\rho_{зв'яз} = -\text{div}\vec{P} = 0$ (оскільки $\vec{P} = \text{const}$), і тому

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_{зв'яз}}{R} dS. \quad (2.55)$$

Щоб проінтегрувати (2.55), початок сферичної СК (r, α, ψ) розмістимо в центрі кулі. Полярну вісь направимо в точку поля A , а площину

векторів \vec{r} і \vec{P} прийемо за координатну площину XOZ , рис. 2.36. Тоді в точці B , що лежить на площадці

$$dS = a^2 \sin \alpha d\alpha d\psi \quad (2.56)$$

на віддалі

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha} \quad (2.57)$$

від точки поля A , поверхнева густина зв'язаного заряду дорівнює

$$\sigma_{\text{связ.}} = P_n = P(\sin \alpha_0 \sin \alpha \cos \psi + \cos \alpha_0 \cos \alpha). \quad (2.58)$$

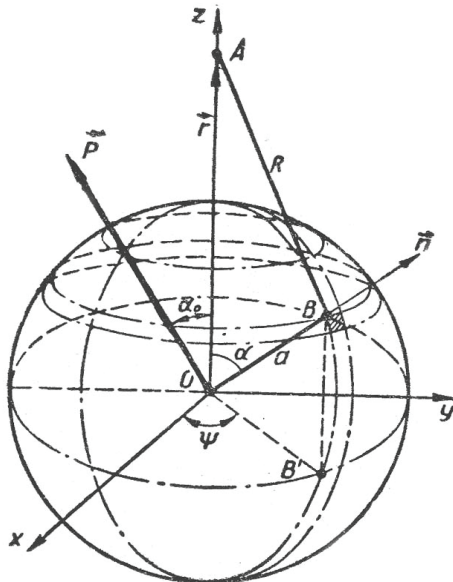


Рис. 2.36. До знаходження поля, що створюється рівномірно поляризованою кулею

Співвідношення (2.58) обґрунтовується таким чином. Необхідно розкласти вектори \vec{P} та \vec{n} (див. рис. 2.36) за осями декартової СК і знайти $\vec{P}\vec{n} = P_n$. Після підстановки (2.56)–(2.58) в (2.55) та інтегрування за кутами α і ψ одержуємо:

$$\varphi = \frac{aP}{2\epsilon_0 r} \cos \alpha_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3ar} \left[(r+a)^3 - (r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{3}{2}} \right] - \\ - (r-a) - (r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\}. \quad (2.59)$$

Ураховуючи, що

$$(r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} r - a & \text{при } r > a \\ a - r & \text{при } r < a \end{cases},$$

для потенціалу поля всередині й зовні кулі маємо

$$\varphi_e = \frac{a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{P \cos \alpha_0}{r^2}, \quad \varphi_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} Pr \cos \alpha_0$$

або

$$\varphi_e = \frac{a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{P}\vec{r})}{r^3}, \quad \varphi_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} (\vec{P}\vec{r})$$

А напруженість електричного поля, очевидно, дорівнює

$$\vec{E}_e = -\text{grad} \varphi_e = \frac{a^3}{3\varepsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right],$$

$$\vec{E}_i = -\nabla \varphi_i = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Б. Оскільки $\vec{P} = \text{const}$, то об'ємна густина зв'язаних зарядів дорівнює нулю, $\rho' = -\text{div} \vec{P} = 0$. Тобто поле, яке ми шукаємо, створене тільки поверхневими зв'язаними зарядами. Причому, $\sigma' = P_n = P \cos \theta$, рис. 2.37.

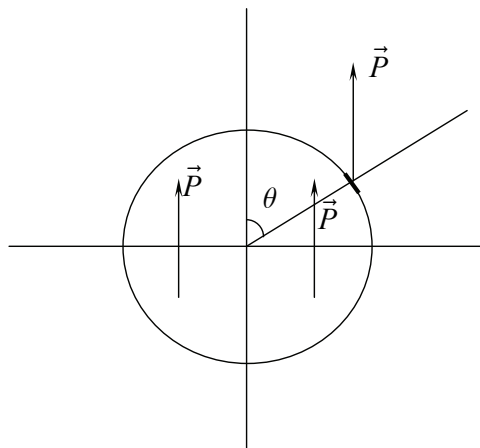


Рис. 2.37

Але відомо, що такий розподіл зарядів $\sigma' \approx \cos \theta$ виникає, якщо дві кулі однакового радіуса з рівномірно розподіленими по об'єму зарядами ρ і $-\rho$ зміщені на малий вектор \vec{l} . У той же час поле будь-якого сферичного розподілу зарядів (і зокрема рівномірного в межах будь-якої кулі) таке, начебто весь заряд кулі зосереджений в центрі кулі. Тобто поле зовні поляризованої кулі буде таким же, як і поле, що створюється двома точковими зарядами, зміщеними на малий вектор \vec{l} .

Іншими словами, зовнішнє поле поляризованої кулі повністю еквівалентне полю диполя.

Очевидно, що дипольний момент однорідно поляризованої діелектричної кулі дорівнює

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P}.$$

Тоді потенціал (зовнішнього по відношенню до діелектричної кулі) поля визначається

$$\varphi_{зов}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} = \frac{a^3(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0 r^3}.$$

Як же знайти на цьому шляху потенціал і поле всередині кулі? Для цього скористаємося теоремою про єдиність рішення.

Потенціал дипольного моменту поляризованої кулі в будь-якій точці на сферичній поверхні радіуса a , тобто на поверхні кулі, набуває значення

$$\varphi(a) = \frac{Pa \cos \theta}{3\epsilon_0} = \frac{P \cdot z}{3\epsilon_0}.$$

Усередині кулі потенціал повинен задовольняти рівняння Лапласа. Але згідно з теоремою про єдиність розв'язку, якщо знайдено будь-який розв'язок, то він є вірним і єдиним. Оскільки на поверхні кулі потенціал рівний $\frac{P \cdot z}{3\epsilon_0}$, то й у довільній точці всередині кулі потенціал буде таким же.

Таким чином, усередині кулі

$$\varphi_{внутр}(\vec{r}) = \frac{(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0}.$$

А напруженість електричного поля в зовнішньому просторі дорівнює

$$\vec{E}_{зов} = -grad \varphi_{зов} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right].$$

Напруженість електричного поля у внутрішніх точках діелектричної кулі

$$\vec{E}_{внутр} = -\nabla\varphi_{вн} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Тобто всередині кулі поле однорідне і вектор $\vec{E}_{внутр}$ направлений протилежно вектору поляризації \vec{P} .

В. Отже, згідно з попереднім, однорідно поляризована куля створює таке ж поле, як і ледь зсунуті одна відносно одної дві кулі такого ж радіусу з рівномірно розподіленими по об'єму зарядами ρ і $-\rho$. Тому якщо центри таких куль зсунуті на невеличкий вектор \vec{l} , то в довільній точці всередині кулі (*Задача 1.10*)

$$\vec{E}_{внутр} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}.$$

Але $\rho\vec{l} = -\vec{P}$ згідно з означенням. Тому $\vec{E}_{внутр} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

Поведінка вектора \vec{E} в даній задачі при переході через поверхню кулі підтверджує загальні граничні умови для векторів поля. Дійсно, біля верхнього полюса кулі (рис. 2.38) вектор $\vec{E}_{зов}$ направлений вгору і за величиною рівний

$$E_z = \frac{P}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{4\pi a^3 \vec{P}}{3 \cdot 2\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{2P}{3\varepsilon_0},$$

що в два рази більше внутрішнього поля.

Поле \vec{E} зазнає розриву в околі поверхні поляризованого середовища точно так, як і це відбувалося б і біля зарядженої поверхні з густиною заряду $\sigma' = P_n$ у вакуумі. Біля північного полюса нашої кулі скачок E_z дорівнює

$$\frac{2P}{3\varepsilon_0} - \left(-\frac{P}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Але можна впевнитися, що компонента вектора \vec{E} , яка дотична до поверхні залишається неперервною в будь-якій точці на сфері при переході через її поверхню.

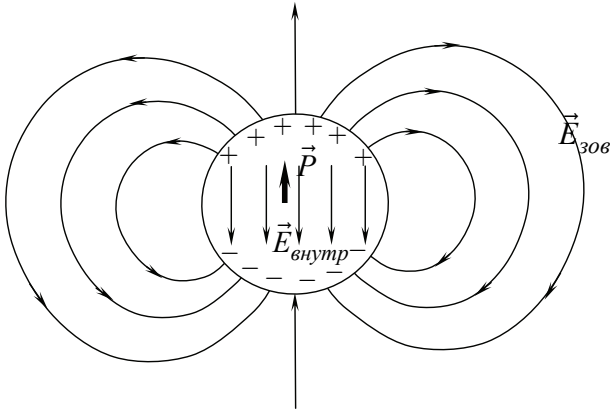


Рис. 2.38. Зовнішнє поле однорідно поляризованої діелектричної кулі є точно таким же, як і поле диполя, розташованого в центрі кулі, а внутрішнє поле є однорідним, причому вектор $\vec{E}_{внутр}$ антипаралельний вектору \vec{P}

Задача 2.14. Визначити вектор поляризації однорідної діелектричної кулі, яка знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі \vec{E}_0 . Знайти також потенціали поля в довільній точці простору. Діелектрична проникність речовини ε .

Розв'язання: А. Поле всередині й зовні кулі, згідно з принципом суперпозиції, дорівнює сумі зовнішнього поля \vec{E}_0 та поля, що створюється поверхневими зв'язаними зарядами однорідно поляризованої кулі. Якщо ввести сферичну СК, рис. 2.39, то для потенціалу результуючого поля можемо записати:

$$\varphi_e = -E_0 x + \frac{a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{P}\vec{r})}{r^3}, (r \geq a),$$

$$\varphi_i = -E_0 x + \frac{1}{3\varepsilon_0} (\vec{P}\vec{r}), (r \leq a),$$

де $\varphi_0 = -E_0 x$ – потенціал зовнішнього однорідного поля.

Щоб записані вище вирази для потенціалів були розв'язками нашої задачі, необхідне виконання двох граничних умов:

$$1) \varphi_i = \varphi_e \text{ при } r = a, \quad 2) D_{in} = D_{en} \text{ при } r = a,$$

$$\text{або } \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right)_{r=a} = \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

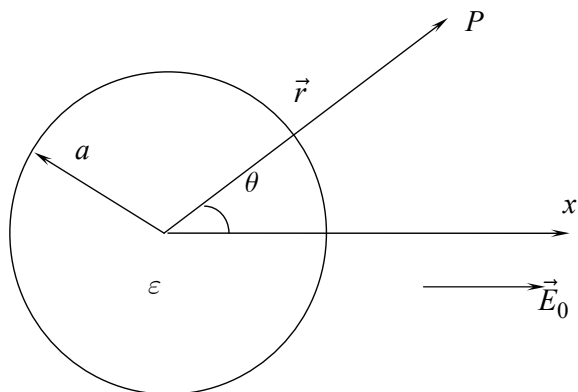


Рис. 2.39. До знаходження вектора поляризації однорідної діелектричної кулі, яку внесли в зовнішнє електричне поле \vec{E}_0

Видно одразу, що перша умова виконується автоматично. Для цього достатньо переписати вирази потенціалів φ_e та φ_i :

$$\varphi_e = -E_0 r \cos \theta + \frac{a^3 (\varepsilon - 1)}{3r^2} E_i \cos \theta,$$

$$\varphi_i = -E \cos \theta + \frac{\varepsilon - 1}{3} E_i r \cos \theta,$$

де враховано, що $x = r \cos \theta$, $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_i$.

Друга гранична умова дає

$$E_0 + \frac{2(\varepsilon - 1)}{3} E_i = \varepsilon E_0 - \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{3} E_i.$$

Звідки знаходимо

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0,$$

$$E_i = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2}.$$

І нарешті, шукані потенціали поля мають вигляд

$$\varphi_e = -E_0 x \left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right), (r \geq a),$$

$$\varphi_i = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} x, (r \leq a).$$

Б. Вектор поляризації \vec{P} знайдемо, використовуючи принцип суперпозиції. Якщо однорідну діелектричну кулю внести в поле \vec{E}_0 , то внаслідок поляризації сумарне поле всередині кулі дорівнює

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{внутр}},$$

де $\vec{E}_{\text{внутр}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

Як відомо, поле $\vec{E}_{\text{внутр}}$ залежить від поляризації \vec{P} , яка у свою чергу залежить від поля всередині кулі \vec{E} :

$$\vec{P} = \alpha\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}.$$

Таким чином, з попередніх формул маємо

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{(\epsilon - 1)\vec{E}}{3}.$$

Звідси знаходимо поле всередині кулі

$$\vec{E} = \frac{3}{2 + \epsilon}\vec{E}_0.$$

Оскільки $\epsilon > 1$, то $\frac{3}{2 + \epsilon} < 1$, і тому поле \vec{E} всередині діелектричної кулі менше за величиною, ніж \vec{E}_0 .

А вектор поляризації дорівнює

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon - 1) \cdot \frac{3}{2 + \epsilon}\vec{E}_0 = \frac{3\epsilon_0(\epsilon - 1)}{2 + \epsilon} \cdot \vec{E}_0,$$

що збігається з результатом, знайденим способом А.

Контрольні запитання і завдання

1. Які основні положення класичної електронної теорії?
2. Обґрунтувати теорему Гаусса для вектора поляризації.
3. При яких умовах в об'ємі поляризованого діелектрика об'ємна густина зв'язаного заряду дорівнює нулю?
4. Вивести теорему Гаусса для вектора \vec{D} .
5. Описати електричне поле, яке створюється однорідно поляризованою кулею і пояснити його властивості.
6. Знайти вирази для густини струму поляризації, густини струму зміщення, густини молекулярних струмів.
7. Обґрунтувати теорему про циркуляцію вектора \vec{H} .
8. Вивести рівняння Максвелла в середовищі.
9. Вивести граничні умови для векторів поля.
10. Знайти закон заломлення векторів поля при переході через межу поділу двох середовищ.
11. Пояснити, чому зовнішнє електричне поле, яке створюється однорідно поляризованою кулею, еквівалентне полю диполя.
12. Показати, що рівняння $div D = \rho$ може бути отримане з рівняння

$$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

закону збереження заряду та допоміжної умови, яку треба встановити.

РОЗДІЛ 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ, ІМПУЛЬСУ ТА МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ В СИСТЕМІ «ЗАРЯДЖЕНІ ЧАСТИНКИ – ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ»

3.1 Закон збереження енергії в електродинамічній системі «заряджені частинки – електромагнітне поле». Вектор Пойнтінга

Розглянемо електродинамічну систему, яка складається з рухомих і нерухомих заряджених частинок та електромагнітного поля, створеного цими ЗЧ, рис. 3.1. Виділимо елементарний об'єм dV і знайдемо роботу, яку виконують сили електромагнітного поля з переміщення заряджених частинок у цьому елементарному об'ємі.

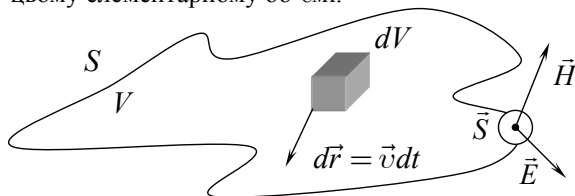


Рис. 3.1. Довільна електродинамічна система – «заряджені частинки + електромагнітне поле»

Очевидно, що ця робота дорівнює

$$dA = \vec{f} \cdot dV \cdot d\vec{r},$$

де \vec{f} густина сили Лорентца

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho [\vec{v}, \vec{B}],$$

ρ – густина заряду, $d\vec{r} = \vec{v} dt$ – елементарне переміщення заряджених частинок.

Припустимо, що в елементарному об'ємі dV всі заряджені частинки рухаються з однаковою швидкістю \vec{v} . Тоді елементарна робота дорівнює

$$dA = (\rho \vec{E} + \rho [\vec{v}, \vec{B}]) \cdot dV \cdot \vec{v} \cdot dt. \quad (3.1)$$

А робота, яка виконується в одиницю часу (а точніше, у дану мить) в усій електродинамічній системі дорівнює

$$\frac{dA}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} \vec{v} + \rho \vec{v} [\vec{v}, \vec{B}]) dV = \int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \vec{j} \vec{E} \cdot dV, \quad (3.2)$$

де $\vec{j} = \rho \vec{v}$ – густина струму провідності (струму переносу).

Перепишемо цей результат у термінах величин, які характеризують електромагнітне поле. Для цього скористаємося рівнянням Максвелла $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, і знайдемо густину струму \vec{j}

$$\vec{j} = rot\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

Підставимо (3.3) у вираз для потужності сил електромагнітного поля і одержимо

$$\frac{dA}{dt} = \int_V (\vec{E} \cdot rot\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.4)$$

Для подальшого перетворення останнього виразу для $\frac{dA}{dt}$ використаємо формулу векторної алгебри $div[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot rot\vec{E} - \vec{E} \cdot rot\vec{H}$, з допомогою якої знайдемо $\vec{E} \cdot rot\vec{H}$, а потім підставимо в (3.4). У результаті маємо

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= - \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} dV + \int_V (\vec{H} \cdot rot\vec{E} - div[\vec{E}, \vec{H}]) dV = \\ &= - \int_V div[\vec{E}, \vec{H}] \cdot dV - \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} dV - \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Користуючись теоремою Гауса, 1-й інтеграл в виразі (3.5) перетворимо в поверхневий, і тоді для миттєвого значення роботи одержуємо

$$\frac{dA}{dt} = - \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV. \quad (3.6)$$

Проаналізуємо формулу (3.6). Спочатку розглянемо все електромагнітне поле. Це означає, що замкнену поверхню S (рис. 3.1) ми беремо настільки далеко від електродинамічної системи, що в кожній точці цієї замкненої поверхні напруженості електричного та магнітного полів дуже малі.

Тобто будемо вважати, що $\vec{E}, \vec{H} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, оскільки на великих відстанях від електродинамічної системи напруженості полів обернено пропорційні квадрату відстані між системою та далекими точками поля

$$E \approx \frac{1}{r^2}, \quad H \approx \frac{1}{r^2}.$$

Тоді в цьому граничному випадку з формули (3.6) одержуємо

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = \frac{dA}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV.$$

Згадаємо, що робота – це міра макроскопічної форми передачі енергії. Робота повинна виконуватися за рахунок зменшення певного виду енергії.

Тобто у випадку повного поля робота сил електромагнітного поля, $\int_V \vec{j} \vec{E} dV$, виконується за рахунок зменшення енергії електромагнітного поля

$$W = \int w \cdot dV,$$

де w – густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (3.7)$$

Якщо поверхня S не охоплює все поле, то з (3.6) одержуємо закон збереження енергії для системи «електромагнітне поле – заряджені частинки:

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S \vec{S} d\vec{S}. \quad (3.8)$$

де \vec{S} – вектор Пойнтінга

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (3.8a)$$

Формулу (3.8) – закон збереження енергії для системи «електромагнітне поле – заряджені частинки» – перепишемо у вигляді

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV + \oint_S \vec{S} d\vec{S}. \quad (3.9)$$

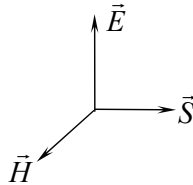
Закон (3.9) слід розуміти так: *енергія електромагнітного поля зменшується ($-\frac{\partial W}{\partial t}$) тому, що сили електромагнітного поля виконують роботу з переміщення зарядів у електродинамічній системі,*

$\int_V \vec{j} \vec{E} dV$, а також це зменшення відбувається за рахунок ще й того,

що частина енергії електромагнітного поля ($\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$) витікає через

поверхню S , яка обмежує електродинамічну систему. У такому формулюванні закон збереження енергії ЕМ поля називається теоремою Пойнтінга.

З (3.9) випливає фізичний зміст вектора Пойнтінга \vec{S} : абсолютне значення вектора Пойнтінга $|\vec{S}|$ – це величина потоку енергії електромагнітного поля в одиницю часу через одиницю поверхні, що орієнтована перпендикулярно вектору Пойнтінга \vec{S} . Тобто $|\vec{S}|$ – це густина потоку енергії електромагнітного поля. Наприклад, якщо в деякій точці простору вектори \vec{E} та \vec{H} мають таку орієнтацію:



то тоді вектор \vec{S} направлений вправо перпендикулярно площині, у якій лежать вектори поля \vec{E} та \vec{H} .

Інколи теорему Пойнтінга формулюють так: через поверхню S , що обмежує об'єм V , у якому рухаються довільно заряджені частинки, витікає в одиницю часу електромагнітна енергія $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$. Тобто цей ін-

теграл – $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$ – характеризує потік енергії електромагнітного поля через довільну замкнену поверхню S , яка охоплює об'єм V . Іншими словами, $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$ – це повна кількість енергії ЕМП, яка втікає в об'єм, або витікає з нього.

Доречно зіставити за аналогією інтегральну формулу закону збереження заряду $\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

Зазначимо, нарешті, що поняття вектора Пойнтінга \vec{S} використовується для знаходження густини потоку енергії поля випромінювання. Але теорема Пойнтінга справедлива і для стаціонарних електромагнітних полів. Тобто і для сукупності постійних електричного та магнітного полів вектор \vec{S} характеризує густину потоку енергії поля в кожній точці простору. Для ілюстрації останнього розглянемо приклад.

Приклад 3.1. Циліндричний заряджений конденсатор знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор \vec{H} якого паралельний осі конденсатора, рис. 3.2. Зобразити лінії вектора Пойнтінга.

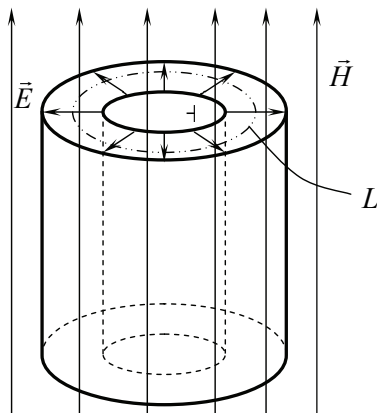


Рис. 3.2. Циркуляція вектора \vec{S} між пластинами зарядженого циліндричного конденсатора, який знаходиться в зовнішньому магнітному полі

Розв'язання: Виходячи з означення вектора Пойнтінга \vec{S} та взаємної орієнтації векторів поля \vec{E} та \vec{H} , див. рис. 3.2, знаходимо, що між пластинами зарядженого циліндричного конденсатора, який знаходиться в зовнішньому магнітному полі, циркулює енергія ЕМП, причому силові лінії вектора Пойнтінга \vec{S} концентричні пластинам циліндричного конденсатора, рис. 3.2.

Енергія поля начебто «тече» в просторі між пластинами, так би мовити, крутиться навколо осі конденсатора. Така циркуляція енергії поля може бути описана моментом імпульсу електромагнітного поля.

Неможливо, наприклад, дати пояснення механізму розповсюдження (міграції) енергії в колі постійного чи квазістаціонарного струму без уявлення про вектор Пойнтінга \vec{S} , див. нижче **пункт 3.2** даної теми.

Ще один приклад.

Приклад 3.2. Уявимо постійний магніт циліндричної форми, що висить на нитці, рис. 3.3. Якщо його зарядити, то навколо магніту буде циркулювати енергія поля. Зобразити лінії вектора \vec{S} .

Лінії вектора \vec{S} утворюють сукупність концентричних кіл, які лежать в горизонтальній площині.

Розв'язання: Оскільки силові лінії векторів поля \vec{E} та \vec{B} направлені так, як це вибрано на рис. 3.3, то, згідно з означенням (3.8а), лінії вектора \vec{S} будуть утворювати сукупність концентричних кіл, які лежать в горизонтальній площині.

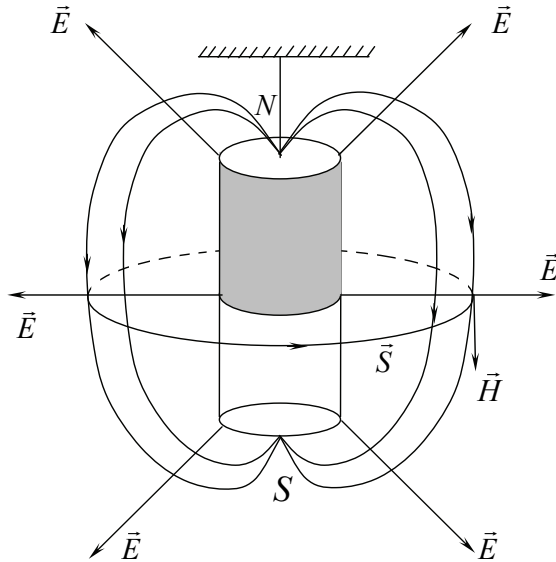


Рис. 3.3. У просторі навколо зарядженого магніту циркулює енергія ЕМП.

3.2. Тепло Джоуля-Ленца і робота сторонніх сил. Потік енергії електромагнітного поля в колі постійного струму

Розглянемо електродинамічну систему в якій знаходяться сторонні ЕРС. Відомо, що закон Ома при наявності сторонніх сил має вигляд

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^{cm.})$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\lambda} - \vec{E}^{cm.}, \quad (3.10)$$

де $\vec{E}^{cm.}$ – напруженість електричного поля сторонніх сил, \vec{E} – напруженість електричного поля струмів, що протікають в середовищі з питомою електропровідністю λ .

Підставимо в закон збереження енергії електромагнітного поля (3.9) вираз для напруженості електричного поля постійного струму. Тоді одержимо

$$\int_V \vec{j} \vec{E}^{cm} dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \oint_S \vec{s} d\vec{S} + \int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda} dV. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) – закон збереження енергії для електродинамічної системи в якій є ЕРС. Ми бачимо, що перший доданок в правій частині (3.11) – це збільшення енергії електромагнітного поля в часі; другий доданок – сумарний потік енергії електромагнітного поля через поверхню

S ; третій доданок $\int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda} dV = Q$ – тепло Джоуля-Ленца, яке виділяється в електродинамічній системі.

Таким чином, закон збереження (3.11) читається так.

Робота сторонніх сил іде на збільшення енергії електромагнітного поля, покриття джоулевих витрат і частина енергії витікає через поверхню, що обмежує об'єм, у якому знаходиться електродинамічна система.

Наступний рисунок ілюструє зміст закону збереження енергії (3.11) для електродинамічної системи з ЕРС.

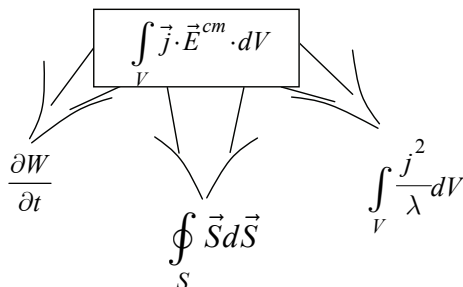


Рис. 3.4. Робота сторонніх сил іде на збільшення енергії електромагнітного поля, покриття джоулевих витрат і частина енергії витікає через поверхню, яка обмежує цей об'єм

Приклад 3.3. Дати пояснення мовою теорії поля процесам розповсюдження енергії ЕМП та нагрівання провідників в колі постійного струму.

Розв'язання: Лінії вектора \vec{j} замкнені, $div \vec{j} = 0$. Джерело постійного струму виконує певну роботу $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} \cdot dV$.

Оскільки $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \oint_S \lambda \cdot \vec{E} d\vec{S} = 0$, то з урахуванням електроста-

тичної теореми Гаусса, приходимо до висновку, що при протіканні постійного струму в провіднику, надлишковий заряд усередині однорідного провідника дорівнює нулю. Тобто надлишковий заряд, той заряд, що створює стаціонарне електричне поле постійного струму (СЕППС), може з'явитися на поверхні, а також в місцях неоднорідності провідника.

Може бути показано, що явище протікання постійного струму по металевому провіднику зумовлене появою на його поверхні стаціонарних електричних зарядів.

Ці, певним чином розподілені по поверхні провідника заряди, створюють СЕППС як всередині, так і зовні провідника зі струмом.

Тому зовні, на поверхні провідника з постійним струмом, нормальна складова вектора \vec{E} відмінна від нуля і визначається поверхневою густиною стаціонарних зарядів. Про напруженість електричного поля на поверхні провідника можна стверджувати, що

$$E_n^{зов} - E_n^{внут} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3.12)$$

У силу основної властивості потенціального електричного поля тангенціальна складова вектора \vec{E} на поверхні провідника залишається неперервною:

$$E_\tau^{вн} = E_\tau^{зов}, \quad (3.13)$$

а нормальна складова вектора \vec{E} зазнає розриву, оскільки всередині провідника $E_n^{вн} = 0$.

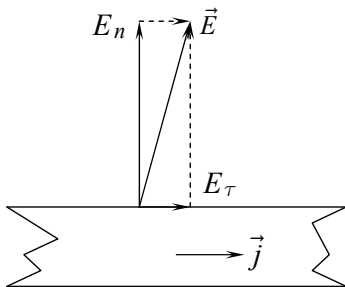


Рис. 3.5. Нахил вектора \vec{E} біля поверхні провідника з постійним струмом визначає потік енергії ЕМП як вздовж ППС, так і всередину його

Для металевого провідника $E_\tau \ll E_n$ тому, що електропровідність λ металу велика, а отже, силові лінії зовнішнього СЕППС направлені до поверхні провідника майже нормально, і це поле мало відрізняється від електростатичного.

Але нахил вектора \vec{E} біля поверхні провідника, який зумовлений E_τ , має принципове значення: тангенційна складова E_τ разом з напруженістю магнітного поля визначає величину електромагнітної енергії, що вливається всередину ППС і перетворюється в тепло Джоуля-Ленца. Нормальна складова напруженості зовнішнього СЕППС, $E_n^{зовн}$, визначає міграцію електромагнітної енергії вздовж ППС.

Сторонні сили всередині джерела струму виконують певну роботу $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} \cdot dV$. Еквівалентна цій роботі кількість електромагнітної енергії витікає з джерела струму $\oint_{S_{дж}} \vec{S} \cdot d\vec{S}$, потім ця енергія

мігрує, розповсюджується в просторі, і нарешті, «втікає» в провідники зовнішнього кола і там виділяється в формі джоулевого тепла. Енергія електромагнітного поля витікає з акумулятора і втікає в зовнішнє електричне коло (цей потік характеризується вектором Пойнтінга), рис. 3.6.

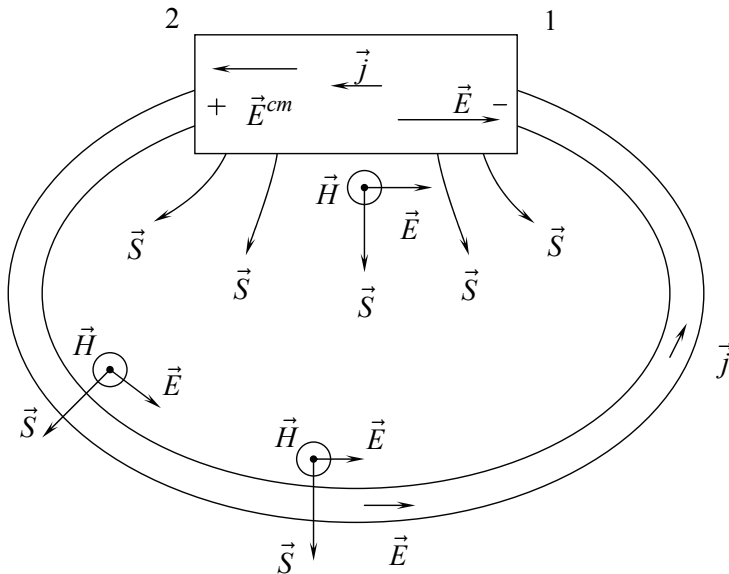


Рис. 3.6. Міграція енергії електромагнітного поля в колі постійного струму та в просторі навколо нього

Таке уявлення про міграцію електромагнітної енергії в довільній електродинамічній системі повністю відповідає реальності.

Може бути показано, що кількість енергії, яка втікає в провідник зовнішнього кола дорівнює Джоулеву теплу Q , що виділяється в цьому провіднику

$$\oint_S \vec{S} d\vec{S} = Q = \int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda} dV. \quad (3.14)$$

Таким чином, енергія ЕМП в колі постійного чи квазістаціонарного струму, яка може бути використана, наприклад, як кількість теплоти, або з допомогою електродвигуна перетворена в механічну енергію, переноситься нерухомими зарядженими частинками вздовж проводів.

Ця енергія переноситься від джерела струму до споживачів самим електромагнітним полем в просторі, що оточує провідники зі струмом.

Робота сторонніх сил виконується в джерелі напруги, з якого енергія витікає назовні, далі вона переміщується в просторі вздовж провідника.

У рамках феноменологічного опису, на електротехнічному рівні, цей процес пояснюється так.

У випадку неоднорідної ділянки кола теплова потужність, що виділяється між точками 1 та 2 (рис. 3.7), дорівнює сумі потужностей електричного поля та поля сторонніх сил:

$$R_a i^2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i + \left(\int_1^2 \vec{E}^{cm} \cdot d\vec{l} \right) \cdot i,$$

$$R_a i^2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i + \varepsilon_{12} \cdot i,$$

де ε_{12} – електрорушійна сила на ділянці кола 12.

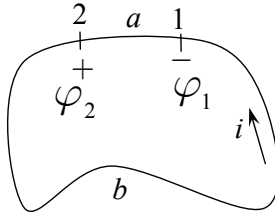


Рис. 3.7. Коло постійного струму з ЕРС на ділянці a

Якщо цей результат застосувати до всього кола, то $\varphi_1 = \varphi_2$, і тоді повна теплова потужність дорівнює

$$Q = i \cdot \varepsilon_{12}.$$

Тобто кількість теплоти, що виділяється за одну секунду в усьому колі, дорівнює потужності тільки сторонніх сил. Робота сторонніх сил

виконується на ділянці a , а кількість теплоти виділяється в усьому колі. Це означає, що ця кількість теплоти є продуктом роботи тільки сторонніх сил. А роль електричного поля (СЕППС, що органічно пов'язане з магнітним полем, і в рамках феноменологічного опису, існування якого є однією зі сторін електромагнітного процесу, в результаті чого відбувається перенесення енергії «по проводах») зводиться (як ми тепер знаємо з теорії ЕМП) до того, що воно переносить і перерозподіляє цю теплоту по різним ділянкам кола.

Робота кулонівських сил (сил з боку СЕППС), $i(\varphi_1 - \varphi_2)$, на ділянці a буде від'ємною, а на ділянці b додатною, а в сумі робота кулонівських сил у всьому колі дорівнює нулю. На ділянці a буде виділятися кількість теплоти $i^2 R_a$, яка еквівалентна алгебраїчній сумі позитивної роботи ЕРС та від'ємної роботи кулонівських сил $i(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$i^2 R_a = Q_a = (\varphi_1 - \varphi_2)i + \varepsilon_a \cdot i.$$

Надлишок роботи ЕРС над кількістю цього тепла $i^2 R_a$ буде виділятися струмом на ділянці b :

$\varepsilon_a \cdot i - i^2 R_a = \varepsilon_a i - \varepsilon_a i - i(\varphi_1 - \varphi_2) = i(\varphi_2 - \varphi_1) = i \cdot i R_b = i^2 R_b$,
оскільки

$$iR = i(R_a + R_b) = \varepsilon = \varepsilon_a,$$

тому різниця потенціалів між точками 2 та 1 дорівнює

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_a - iR_a = iR_b = R_b \frac{\varepsilon_a}{R_b + R_a} > 0.$$

Тобто такий електротехнічний опис, у принципі, не може пояснити механізм і природу явища, але він дає опис, який підтверджується дослідами та досвідом мовою величин, які експериментально безпосередньо вимірюються: сили струмів, напруги, активних опорів. І тому в значній кількості фізиків, які мають справу з таким приладами та задачами, які формулюються в термінах виключно феноменологічних, електротехнічних величин, складається враження, що фізика суто експериментальна наука. І в цьому випадку (як і в інших, розглянутих раніше, наприклад протікання струму через конденсатор чи розрядка зарядка його, породження магнітного поля струмами зміщення) ми знову бачимо, що тільки теорія може сказати, що ж вимірюється чи спостерігається в досліді.

У локальній формі закон збереження енергії (3.11) має вигляд

$$\vec{j} \cdot \vec{E}^{cm.} = \frac{j^2}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2} \right) + div [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (3.15)$$

Робота сторонніх сил, яка виконується в джерелі струму в одиницю часу в одиниці об'єму іде на покриття джоулевих витрат, на збільшення енергії електромагнітного поля і на покриття витрат енергії, яка витікає кожної секунди з цього одиничного об'єму через поверхню.

Ще раз підкреслимо, що носієм енергії струму є електромагнітне поле, локалізоване як в провіднику, так і в оточуючому його просторі, а не носії струму (ЗЧ). У полі постійних струмів розподіл зарядів в просторі повинен бути стаціонарним. Але якщо поле є стаціонарним, то воно повинне бути тотожним з полем електростатичним. А та обставина, що в даній точці провідника зі струмом одні носії заряду змінюються іншими, унаслідок існування струму, не може (нехтуючи флуктуаціями) позначатися на напруженості електричного поля, бо макроскопічна густина заряду в кожній точці провідника залишається незмінною. Сили поля виконують роботу, а еквівалентне цій роботі тепло виділяється в провіднику. Оскільки ситуація стаціонарна, уся енергія, яка виділяється в колі, повинна неперервно компенсуватися за рахунок інших видів енергії.

Еквівалентна цій енергії робота виконується, як вже відзначалося, сторонніми силами в джерелі ЕРС.

3.3. Закон збереження імпульсу та моменту імпульсу в системі «заряджені частинки – електромагнітне поле». Густина потоків енергії та імпульсу в електромагнітному полі, тиск світла

Розглянемо електродинамічну систему, у якій є заряджені частинки, що рухаються довільно. Знайдемо зміну в часі імпульсу заряджених частинок

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} = \int_V \frac{d\vec{P}_1}{dt} \cdot dV, \quad (3.16)$$

де величина $\frac{d\vec{P}_1}{dt}$ – швидкість зміни в часі імпульсу заряджених частинок в одиниці об'єму.

Але ця величина, згідно з рівнянням руху, дорівнює

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]. \quad (3.17)$$

Тоді зміна імпульсу частинок системи в часі дорівнює

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} = \int_V (\rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]) dV. \quad (3.18)$$

Використаємо рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{aligned}$$

для того щоб $\frac{d\vec{P}_q}{dt}$ подати через величини, які характеризують електромагнітне поле. Для цього з рівнянь Максвелла знайдемо густину заряду ρ та густину струму \vec{j} й підставимо в рівняння (3.18)

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} = \int_V (\vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \left[(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}), \vec{B} \right]) dV.$$

Симетризуємо підінтегральний вираз, додавши вирази $\vec{H} \cdot \operatorname{div} \vec{B}$ та $\left[(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}), \vec{D} \right]$, які очевидно дорівнюють нулеві. У результаті одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_q}{dt} &= \\ &= \int_V \left\{ \vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \cdot \operatorname{div} \vec{B} + \left[(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}), \vec{B} \right] + \left[(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}), \vec{D} \right] \right\} dV. \end{aligned}$$

А після деяких перетворень можемо записати

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_q}{dt} &= \\ &= \int_V (\vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \cdot \operatorname{div} \vec{B} - [\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{H}] - [\vec{D}, \operatorname{rot} \vec{E}]) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V [\vec{D}, \vec{B}] dV. \end{aligned}$$

Перший інтеграл можна перетворити в інтеграл за поверхнею, яка обмежує електродинамічну систему, і з допомогою тензора напруг Максвелла цей поверхневий інтеграл можна звести до поверхневих сил, що діють на поверхні, яка обмежує об'єм V [11, 57], [17, 212].

Таким чином, маємо

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V [\vec{D}, \vec{B}] \cdot dV = \vec{F}_{нов}. \quad (3.19)$$

Якщо розглянути все електромагнітне поле, то в точках на поверхні S , яка охоплює все поле, напруженості електричного та магнітного полів прямують до нуля.

$$E \approx \frac{1}{r^2} \rightarrow 0 \qquad H \approx \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$$

Тому $\vec{F}_{\text{пов.}} = 0$, і попередня рівність набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_q + \int_V [\vec{D}, \vec{B}] \cdot dV) = 0. \quad (3.20)$$

Таким чином, ми одержуємо закон збереження імпульсу для системи, яка складається із заряджених частинок та електромагнітного поля:

$$\vec{P}_q + \int_V [\vec{D}, \vec{B}] \cdot dV = \text{const}. \quad (3.21)$$

Сумарний імпульс заряджених частинок та імпульс електромагнітного поля для замкненої електродинамічної системи зберігається.

Тобто кожна одиниця об'єму простору, у якій існує електромагнітне поле, характеризується об'ємною густиною імпульсу \vec{g} :

$$\vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}]. \quad (3.22)$$

Таким чином, імпульс електромагнітного поля сам по собі не зберігається, а зберігається сума механічного імпульсу та імпульсу електромагнітного поля.

Якщо розглянути неповне поле, то зміна сумарного імпульсу заряджених частинок та імпульсу електромагнітного поля дорівнює потоку імпульсу через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, \end{aligned}$$

знайдемо зв'язок між густиною імпульсу \vec{g} та вектором Пойнтінга \vec{S}

$$\vec{g} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{\vec{S} \cdot \varepsilon \cdot \mu}{c^2} = \frac{\vec{S}}{v^2}, \quad (3.23)$$

де v – швидкість поширення електромагнітних хвиль у середовищі,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Оскільки електромагнітне поле характеризується густиною імпульсу, то можна говорити і про густину моменту імпульсу електромагнітного поля

$$\vec{l} = [\vec{r}, \vec{g}].$$

Тому слід чекати, що в електродинамічній системі буде мати місце закон збереження моменту імпульсу

$$\vec{L}_{\text{mex}} + \int_V \vec{l} \cdot dV = \text{const}. \quad (3.24)$$

Тобто векторна сума механічного моменту імпульсу системи та моменту імпульсу ЕМП залишається незмінною для замкненої електродинамічної системи.

Експериментальні дослідження поведінки електродинамічних систем підтверджують закон (3.24).

Дійсно, у прикладі, що ілюструє циркуляцію енергії поля між пластинами зарядженого циліндричного конденсатора, рис. 3.2., сумарний момент імпульсу ЕМП та механічного моменту імпульсу буде зберігатися.

Приклад 3.4. Знайти потік енергії та імпульсу плоскої електромагнітної хвилі через плоску поверхню ΔS орієнтовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, рис. 3.8.

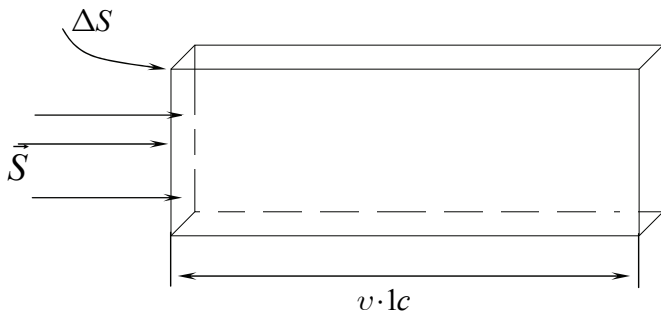


Рис. 3.8. Знаходження потоку енергії електромагнітного поля

Розв'язання. Як відомо, зв'язок між напруженістю електричного і магнітного полів плоскої хвилі такий:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H$$

Розглянемо площадку ΔS , нормально до якої падає електромагнітна хвиля. Очевидно, що за 1 секунду ця електромагнітна хвиля пройде шлях, що дорівнює

$$v \cdot 1 \text{ сек}$$

Тоді через ΔS за одну секунду протече електромагнітна енергія, яка дорівнює

$$w \cdot \Delta V = w \cdot \Delta S \cdot v \cdot 1.$$

Оскільки для електромагнітної хвилі густина енергії дорівнює

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

то через одиницю поверхні за одну секунду протече енергія, що чисельно дорівнює

$$w \cdot v = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0\mu}} \cdot E^2. \quad (3.25)$$

З іншого боку, вектор Пойнтінга дорівнює (оскільки $H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E$)

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot \vec{n}, \quad (3.26)$$

де \vec{n} – одиничний орт в напрямку розповсюдження хвилі.

Порівнюючи ці два останні вирази знаходимо зв'язок густини потоку енергії електромагнітного поля з густиною енергії електромагнітного поля:

$$S = I = w \cdot v. \quad (3.27)$$

Аналогічно можна впевнитись, що потік густини імпульсу електромагнітного поля чисельно дорівнює тиску електромагнітного поля при умові, що вся енергія електромагнітного поля поглинається поверхнею:

$$p = g \cdot v = \frac{S}{v^2} v = \frac{S}{v}, \quad (3.28)$$

і тому з урахуванням (3.27) одержуємо

$$p = w. \quad (3.29)$$

Або по іншому. Дійсно, для плоскої електромагнітної хвилі маємо, оскільки $\vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}]$,

$$g = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot \mu\mu_0 H = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot \mu\mu_0 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0\mu}} \cdot E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\mu},$$

а швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\mu}},$$

тому $p = g \cdot v = w$

Якщо електромагнітна хвиля відбивається від деякої поверхні, то тиск дорівнює

$$p = (1 + \alpha) \cdot g \cdot v = (1 + \alpha) \cdot w, \quad (3.30)$$

де α – коефіцієнт відбивання.

3.4. Приклади розв'язування задач

Задача 3.1. Плоска електромагнітна хвиля

$\sqrt{\varepsilon_0} \cdot E_y = \sqrt{\mu_0} \cdot H_z = \sqrt{\varepsilon_0} \cdot a \sin \omega(t - \frac{x}{c})$ падає при $x = 0$ на нормальну до вісі OX плоску нескінчену поверхню провідника. Знайти створений хвилею тиск, якщо знехтувати відбиттям хвилі.

Розв'язання: Провідник, який розташований вправо від координатної площини YOZ , буде повністю поглинати енергію електромагнітної (ЕМ) хвилі. Тобто, такий провідник – приклад абсолютно чорного тіла. Тому величина світлового тиску на поверхню провідника дорівнює

$$p = \frac{\bar{S}}{c},$$

де \bar{S} – середнє за період ЕМ хвилі значення вектора Пойнтінга, яке визначається при $x = 0$. Оскільки

$$S(x = 0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2 \sin^2 \omega t,$$

а значить,

$$\bar{S}(x = 0) = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2 \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2,$$

тому світловий тиск дорівнює

$$p = \frac{\bar{S}}{c} = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot a^2 = \frac{1}{2} a^2 \cdot \varepsilon_0.$$

Задача 3.2. Довести, що Джоулеве тепло, що виділяється в прямому провіднику зі струмом i , дорівнює енергії електромагнітного поля, яка поступає в провідник ззовні.

Розв'язання: Розглянемо відрізок циліндричного ППС, рис. 3.9. Нехай його довжина l , площа поперечного перерізу ΔS , електропровідність матеріалу провідника λ .

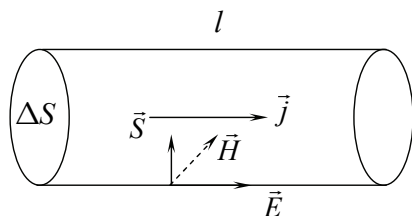


Рис. 3.9.

Очевидно, що в кожній точці циліндричної поверхні провідника вектор Пойнтінга \vec{S} направлений всередину провідника перпендикулярно його поверхні. Тоді повний потік вектора \vec{S} через цю поверхню дорівнює:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{S} d\vec{S} &= \oint_{2\pi r_0 l} [\vec{E}, \vec{H}] \cdot d\vec{S} = \oint_{2\pi r_0 l} EH \cdot dS = \\ &= \oint_{2\pi r_0 l} \frac{j}{\lambda} \cdot \frac{i}{2\pi r_0} \cdot dS = \frac{j}{\lambda} \cdot \frac{i}{2\pi r_0} \oint_{2\pi r_0 l} dS, \end{aligned}$$

де j – густина струму, r_0 – радіус поперечного перерізу провідника.

$$\oint_S \vec{S} d\vec{S} = \frac{j}{\lambda} \cdot \frac{i}{2\pi r_0} \cdot 2\pi r_0 l = \frac{i^2}{\Delta S \cdot \lambda} l = i^2 R,$$

де $R = \frac{l}{\Delta S \cdot \lambda}$ – опір відрізка провідника.

Таким чином, кожен секунду через поверхню провідника «вливається» енергія ЕМП, яка в точності дорівнює кількості теплоти, що виділяється в провідника зі струмом i .

Задача 3.3. Показати, що при квазістатичній зарядці конденсатора його енергія збільшується за рахунок притоку ззовні електромагнітної енергії.

Розв'язання: Будемо вважати, що радіус дисків конденсатора r_0 , віддаль між дисками d .

При зарядці конденсатора напруженість електричного поля між пластинами його зростає. Тому вектор густини струму зміщення направлений від нижньої пластини конденсатора до верхньої. Значить, згідно з рівнянням Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, силові лінії вектора \vec{H} направлені так, як це показано на рис. 3.10.

Тоді в кожній точці циліндричної поверхні, яка обмежує простір між дисками конденсатора, вектор Пойнтінга \vec{S} направлений всередину (до центру) конденсатора. Щоб знайти потік вектора \vec{S} необхідно знати в кожен мить напруженість електричного і магнітного полів у точках цієї циліндричної поверхні. Якщо знехтувати крайовими ефектами, то електричне поле між пластинами конденсатора в кожен мить можна вважати однорідним.

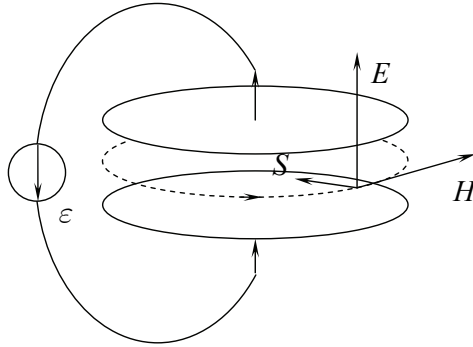


Рис. 3.10. При зарядці конденсатора електромагнітна енергія «вливається» із зовнішнього простору в об'єм конденсатора

Ураховуючи вказані наближення, напруженість магнітного поля можна знайти з інтегральної форми рівняння Максвелла $rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (теорема про циркуляцію вектора \vec{H})

$$2\pi r_0 H = \pi r_0^2 \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$H = \frac{r_0}{2} \cdot \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (3.31)$$

Значить миттєве значення потоку вектора \vec{S} через циліндричну поверхню ($S = 2\pi r_0 d$) дорівнює

$$\oint_S \vec{S} d\vec{S} = EH \cdot 2\pi r_0 d = E \frac{r_0}{2} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} 2\pi r_0 d = \pi r_0^2 E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \cdot d.$$

Тоді за проміжок часу dt енергія конденсатора збільшиться на величину

$$d \cdot \pi r_0^2 E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dt = V \cdot E \cdot dD = dW_{ел},$$

де $V = \pi r_0^2 \cdot d$ – об'єм конденсатора.

За весь час зарядки енергія ЕМП, яка вилітється в конденсатор, дорівнює

$$W_{ел} = \int dW_{ел} = V \varepsilon \varepsilon_0 \int E dE = \frac{V \varepsilon \varepsilon_0}{2} E^2 = V \frac{ED}{2} = V W_{ел}.$$

Ця величина якраз і дорівнює енергії зарядженого конденсатора.

Задача 3.4. Пластини (диски) плоского конденсатора, зарядженого до високої різниці потенціалів, з'єднанні довгим циліндричним дротом (радіус поперечного перерізу дроту r_0), який проходить поза конденсатором. Довести, що повний потік електромагнітної енергії з конденсатора дорівнює повному потоку електромагнітної енергії, яка втікає в провідник із зовнішнього простору. Пояснити явище з точки зору уявлень про рух, перетворення й збереження енергії. Ємність конденсатора C , величина початкового заряду на конденсаторі q_0 .

Розв'язання: У процесі розрядки конденсатора електричне поле між пластинами його зменшується. Тому вектор $\vec{j}_{зМ}$ направлений від негативно зарядженої пластини до позитивно зарядженої. Причому вектор $\vec{j}_{зМ}$ антипаралельний вектору \vec{E} , рис. 3.11.

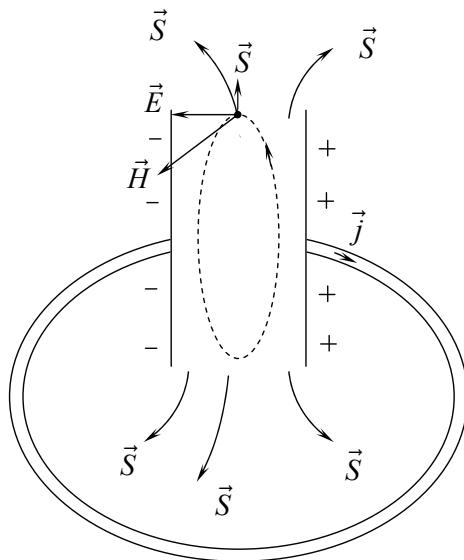


Рис. 3.11. При розрядці конденсатора енергія ЕМП витікає з конденсатора, розповсюджується в просторі і «вливається» в провідник, яким з'єднані диски конденсатора

Силкові лінії вектора \vec{H} утворюють правий гвинт з вектором $\vec{j}_{зМ}$. Тому в кожній точці циліндричної поверхні, яка обмежує простір між дисками конденсатора, вектор Пойнтинга \vec{S} направлений зовні і перпендикулярно цій поверхні. Тобто, енергія ЕМП витікає із конденсатора.

Аналогічно до розв'язку **Задачі 3.3** можна впевнитися, що потік вектора Пойнтінга через цю поверхню (кількість енергії, яка витече) дорівнює початковій енергії зарядженого конденсатора

$$W_{el} = V w_{el} = \frac{q_0^2}{2C},$$

де $w_{el} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$ – об'ємна густина енергії електричного поля, $V = S \cdot d$ – об'єм конденсатора.

Щоб підрахувати кількість енергії ЕМП, що віллється за весь час розрядки в довгій провідник, яким закоротичені диски конденсатора, необхідно знати залежність миттєвого значення вектора Пойнтінга (а значить, напруженості електричного й магнітного полів) у кожній точці поверхні цього провідника (дроту).

$$E(t) = \frac{j}{\lambda} = \frac{i(t)}{\pi r_0^2 \lambda}, \quad H(t) = \frac{i(t)}{2\pi r_0},$$

де $i(t)$ – сила струму, який протікає по провіднику, λ – питома електропровідність матеріалу провідника.

Але $i(t) = -\frac{dq}{dt}$. Для знаходження залежність величини заряду на конденсаторі від часу, $q(t)$, запишемо другий закон Кірхгофа для кола, зображеного на рис. 3.12,

$$\frac{q}{C} - iR = 0, \quad \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = 0.$$

Інтегрування диференційного рівняння

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{CR}$$

дає залежність $q(t)$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

Зрозуміло, що на рис. 3.12 R – це опір дроту, яким з'єднані диски конденсатора на рис. 3.11, $R = \frac{l}{\pi r_0^2 \cdot \lambda}$.

Таким чином, миттєве значення вектора Пойнтінга дорівнює

$$S = EH = \frac{j}{\lambda} \cdot \frac{i}{2\pi r_0} = \frac{i^2(t)}{2\pi r_0 \lambda \pi r_0^2},$$

$$\text{де } i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

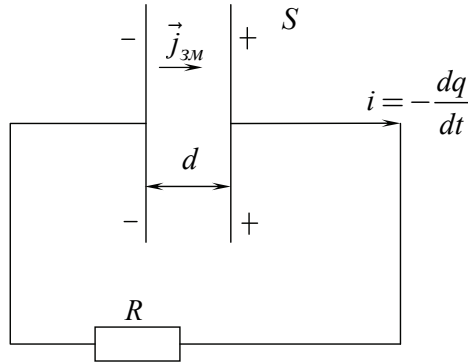


Рис. 3.12. До знаходження залежності $q(t)$ при розрядці конденсатора

Оскільки, миттєве значення вектора Пойнтінга однакове в кожній точці поверхні циліндричного провідника, яким закорочені диски конденсатора, то потік енергії ЕМП середину дроту за час dt дорівнює

$$\begin{aligned} dW_{em}(t) &= S \cdot 2\pi r_0 l \cdot dt = \frac{i^2(t)}{2\pi r_0 \lambda \pi r_0^2} \cdot 2\pi r_0 l \cdot dt = \\ &= \frac{i^2(t) \cdot l}{\lambda \pi r_0^2} \cdot dt = i^2 R \cdot dt. \end{aligned}$$

Нарешті, для повного потоку вектора Пойнтінга через поверхню дроту за весь час розрядки конденсатора одержуємо

$$\begin{aligned} W_{em} &= \int_0^{\infty} dW_{em}(t) = \int_0^{\infty} \frac{i^2(t) \cdot l}{\lambda \pi r_0^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{q_0}{CR} e^{-\frac{t}{CR}} \right)^2 \cdot l}{\lambda \pi r_0^2} dt = \\ &= \frac{\left(\frac{q_0}{CR} \right)^2}{\lambda \pi r_0^2} l \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{CR}} \cdot dt = \frac{\left(\frac{q_0}{CR} \right)^2}{\lambda \pi r_0^2} l \cdot \left(-\frac{RC}{2} \cdot e^{-\frac{t}{CR}} \right)_0^{\infty} = \frac{q_0^2}{2C}. \end{aligned}$$

Висновок: Енергія зарядженого конденсатора $W_{el} = \frac{q_0^2}{2C}$ у процесі його розрядки витікає з конденсатора розповсюджується в просторі й «вливається» в провідник, яким з'єднані диски конденсатора. Причому в кожному мить у провіднику виділяється кількість теплоти $i^2(t)R$, яка дорівнює потоку енергії ЕМП (потоку вектора \vec{S}) через поверхню дроту. А сумарний потік енергії ЕМП, що вливається в провідник, за час розрядки конденсатора дорівнює початковій енергії зарядженого конденсатора.

Таким чином, по-перше, маємо закон збереження енергії. По-друге, енергія ЕМП, як свідчать аналіз задачі та розрахунки, розповсюджується не по провіднику, а в просторі.

Задача 3.5. Циліндричний заряджений конденсатор (заряд q_0 на внутрішній обкладинці) розміщений в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого паралельний його вісі, навколо якої він може вільно обертатись. Довжина конденсатора l , інші параметри його вказані на рис. 3.13. Будемо також вважати, що обкладки конденсатора мають товщину h і зроблені з металу з електропровідністю λ . Простір між обкладками циліндричного конденсатора заповнений діелектриком з діелектричною постійною ε та магнітною проникністю μ .

1. Знайти, з якою кутовою швидкістю буде обертатися конденсатор після його розрядки.

2. Описати явище у випадку, коли конденсатор не розряджається, а магнітне поле вимикається.

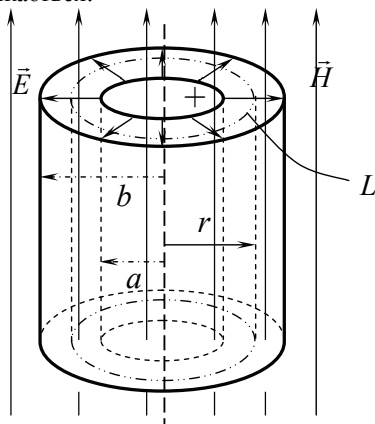


Рис. 3.13. Циліндричний заряджений конденсатор знаходиться в однорідному магнітному поля

Розв'язання: 1. ЕМП, яке існує між «пластинами» конденсатора, характеризується об'ємною густиною енергії ЕМП (3.7), густиною імпульсу ЕМП (3.22), об'ємною густиною моменту імпульсу $\vec{l} = [\vec{r}, \vec{g}]$, де $\vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}]$.

Якщо конденсатор розрядити, то зникне електричне поле між пластинами його, а значить момент імпульсу ЕМП стане рівним нулю. Але згідно з (3.24) сумарний момент імпульсу електродинамічної системи не зміниться. Тобто після розрядки конденсатора механічний момент імпульсу конденсатора як механічної системи, що складається з двох коаксіальних циліндрів, стане рівним моменту імпульсу ЕМП.

Нехай момент інерції конденсатора дорівнює I . Тоді, якщо в початковий момент часу конденсатор знаходився в спокої, то після його розрядки, згідно із законом збереження (3.24)

$$\vec{L}_{\text{мех}} + \int_V \vec{l} \cdot dV = \text{const},$$

кутова швидкість обертання конденсатора знаходиться з рівняння

$$I\vec{\omega} = \int_V \vec{l} \cdot dV.$$

З означення $\vec{l} = [\vec{r}, \vec{g}]$ та рис. 3.13 видно, що вектор моменту імпульсу ЕМП направлений протилежно вектору \vec{H} (на рис. 3.13 вертикально вниз).

Тому величина кутової швидкості дорівнює

$$\omega = \frac{\left| \int_V \vec{l} \cdot dV \right|}{I}.$$

Знайдемо моменту імпульсу ЕМП.

Оскільки напруженість електричного поля між пластинами конденсатора

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r},$$

де $\tau = \frac{q_0}{l}$ – лінійна густина заряду, то момент імпульсу ЕМП дорівнює

$$L_{\text{ем}} = \left| \int_V \vec{l} \cdot dV \right| = \int_V r \cdot g \cdot dV = \int_V r \cdot \epsilon\epsilon_0 E \cdot \mu\mu_0 H \cdot 2\pi r l dr =$$

$$= \int_a^b q_0 \mu \mu_0 H \cdot r dr = \frac{q_0 \mu \mu_0 H}{2} (b^2 - a^2),$$

де $dV = 2\pi r l \cdot dr$ – елементарний об'єм циліндричного шару товщиною dr .

Тоді для кутової швидкості обертання знаходимо

$$\omega = \frac{q_0 \mu \mu_0 H}{2I} (b^2 - a^2). \quad (3.31a)$$

2. Якщо вимкнути магнітне поле, то, згідно із законом електромагнітної індукції (1.79)

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

виникне вихрове електричне поле (ВЕП), силові лінії якого лежать в площині, перпендикулярній \vec{H} .

Напруженість цього вихрового електричного поля в кожній точці простору між обкладками конденсатора визначається із закону електромагнітної індукції, поданого в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} 2\pi r \cdot E &= \mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \pi r_0^2, \\ E &= \frac{\mu \mu_0 r}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

У цьому ВЕП на заряджені обкладки конденсатора будуть діяти механічні моменти сил, дія яких і зумовить обертання конденсатора з певною кутовою швидкістю.

На внутрішню обкладку буде діяти момент сили, який повертає її проти ходу годинникової стрілки. А зовнішня обкладка буде повертатися за годинниковою стрілкою (у відповідності до напрямку силових ліній вихрового електричного поля).

Оскільки напруженість ВЕП пропорційна віддалі від осі конденсатора, очевидно, що величина моменту сили, який діє на зовнішню обкладку буде більша, ніж величина моменту сили, який діє на внутрішню обкладку. З урахуванням (3.32) для величини сумарного моменту сил, що діє на конденсатор, одержуємо

$$\begin{aligned} M(t) &= M_-(t) - M_+(t) = bq_0 E(b) - aq_0 E(a) = \\ &= \frac{q_0 \mu \mu_0}{2} (b^2 - a^2) \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Тоді, згідно з основним рівнянням обертового руху твердого тіла, можемо записати для довільного моменту часу упродовж виключення магнітного поля

$$I \frac{d\omega}{dt} = M(t).$$

Звідси знаходимо

$$d\omega = \frac{q_0 \mu \mu_0}{2I} (b^2 - a^2) \cdot dH.$$

І нарешті, кутова швидкість обертання конденсатора дорівнює

$$\omega = \frac{q_0 \mu \mu_0 H}{2I} (b^2 - a^2).$$

Це та ж величина кутової швидкості, яку ми знайшли при розв'язку першого питання задачі, (3.31а).

Цікаво відзначити, що кутова швидкість обертання конденсатора не залежить від діелектричної проникності діелектрика між обкладинками.

Задача 3.6. Сферичний заряджений конденсатор, який знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого паралельний вісі Z , може вільно обертатися навколо цієї вісі. З якою кутовою швидкістю буде обертатись конденсатор після його розрядки, якщо момент інерції конденсатора I . Радіуси внутрішньої та зовнішньої обкладинок конденсатора дорівнюють, відповідно, a та b , рис. 3.14.

Розв'язання: Аналогічно до розв'язання попередньої задачі, знайдемо момент імпульсу ЕМП між обкладинками сферичного конденсатора.

Для розв'язання виберемо сферичну систему координат, полярна вісь якої Z направлена вертикально вгору, рис. 3.14.

Очевидно, що силові лінії вектора $\vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}]$ лежать в площині, перпендикулярній осі Z , і є колами радіусів $R = r \cdot \sin \theta$, де \vec{r} – радіус-вектор, проведений із центру сферичного конденсатора в дану точку ЕМП між обкладинками конденсатора. Якщо дивитися з осі Z , то лінії вектора \vec{g} направлені за рухом годинникової стрілки.

У кожному елементі об'єму $dV = r^2 dr \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ вектор нескінченно малого моменту імпульсу ЕМП $d\vec{l} = [\vec{r}, d\vec{g}]$ перпендикулярний і \vec{r} і $d\vec{g}$ й утворює кут θ з віссю Z , де $d\vec{g} = \vec{g} \cdot dV$ рис. 3.14.

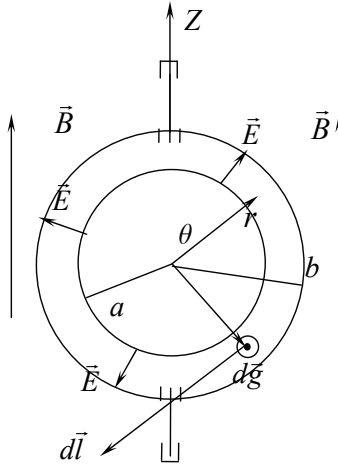


Рис. 3.14. Сферичний заряджений конденсатор знаходиться в однорідному магнітному полі

Тому проекція вектора моменту імпульсу всього ЕМП на вісь Z дорівнює

$$\begin{aligned}
 (\vec{L})_z &= - \int (\vec{dl})_z = - \int r \cdot DB \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \cdot dV = \\
 &= - \int \frac{rq \cdot B}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \cdot r^2 dr \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \\
 &= - \frac{qB}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \cdot \int_a^b r dr = - \frac{qB}{3} (b^2 - a^2).
 \end{aligned}$$

Після розрядки конденсатора кутова швидкість обертання його буде дорівнювати

$$\omega = \frac{(\vec{L})_z}{I} = \frac{qB}{3I} (b^2 - a^2),$$

причому конденсатор буде обертатися за годинниковою стрілкою.

Контрольні запитання та завдання

1. Вивести з рівнянь Максвелла закон збереження енергії для довільної електродинамічної системи.
2. Який фізичний зміст вектора Пойнтінга?
3. Обґрунтувати й пояснити закон збереження енергії в електродинамічній системі, у якій є ЕРС.
4. Пояснити міграцію енергії електромагнітного поля в колі постійного струму.
5. Обґрунтувати закон збереження імпульсу в електродинамічній системі.
6. Знайти зв'язок між вектором Пойнтінга та вектором густини імпульсу електромагнітного поля.
7. Навести приклади, у яких проявляються закони збереження енергії імпульсу, моменту імпульсу для систем з електромагнітним полем і частинками.
8. З якою кутовою швидкістю буде обертатись конденсатор у *Задачі 3.6*, якщо сферичний конденсатор не розряджається, а магнітне поле вимикається?
9. Знайти імпульс електромагнітного поля ЗЧ, що рухається рівномірно зі швидкістю V . Розглянути випадок $V \ll c$.
10. Показати, що складова моменту імпульсу ЕМП, перпендикулярна осі Z , у *Задачі 3.6* дорівнює нулю.
11. Пояснити, чому нахил вектора \vec{E} біля поверхні провідника з постійним струмом визначає потік енергії ЕМП як уздовж ППС, так і всередину його.

Розділ 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ, ЯКЕ СТВОРЮЄТЬСЯ ДОВІЛЬНО РУХОМИМИ ЗАРЯДЖЕНИМИ ЧАСТИНКАМИ

4.1. Потенціали електромагнітного поля, калібрувальна інваріантність потенціалів. Умова Лорентца. Рівняння Даламбера для скалярного та векторного потенціалів

Рівняння Максвелла, які є узагальненням ряду експериментальних фактів, див. Розділ 1, дозволяють знайти електромагнітне поле, створюване довільним розподілом зарядів та струмів. Тобто знаючи розподіли $\rho(\vec{r}, t)$ і $\vec{j}(\vec{r}, t)$ у довільній електродинамічній системі, можна знайти напруженості полів $\vec{E}(\vec{r}, t)$ і $\vec{B}(\vec{r}, t)$ і, таким чином, розв'язати будь-яку задачу в межах компетентності електродинаміки.

Одним із найзагальніших методів знаходження напруженості електричного та індукції магнітного полів довільного електромагнітного поля, яке породжується певними розподілами $\rho(\vec{r}, t)$ і $\vec{j}(\vec{r}, t)$, є метод електромагнітних потенціалів.

Розглянемо суть і особливості цього методу. Спочатку з'ясуємо, як вводяться електромагнітні потенціали. Для цього запишемо одне з рівнянь Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4.1)$$

На підставі формули векторного аналізу $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ ми можемо відразу записати розв'язок цього рівняння Максвелла у вигляді:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (4.2)$$

де $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – векторний потенціал або вектор-потенціал поля. Тобто векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – це деяка допоміжна векторна функція, яка не має особливого фізичного змісту, але з допомогою якої знаходиться індукція магнітного поля. Єдине виправдання в необхідності введення додаткової функції $\vec{A}(\vec{r}, t)$ полягає в тому, що знаходження її за відомим розподілом струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$ шляхом інтегрування відповідного диференційного рівняння виявляється порівняно простим.

Далі, рівняння Максвелла $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ разом з означенням векторного потенціалу $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ набуває вигляду

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

або

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Оскільки ротор градієнта будь-якої скалярної функції завжди дорівнює нулю, то скалярний потенціал $\varphi(\vec{r}, t)$ уводиться так:

$$\nabla \varphi = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

і тоді напруженість електричного поля дорівнює

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Таким чином, знаючи скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля, можна знайти напруженості \vec{E} та \vec{B} за формулами (4.2) та (4.4). Але самі електромагнітні потенціали за відомими розподілами зарядів $\rho(\vec{r}, t)$ та струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$ знаходяться шляхом розв'язку відповідних диференціальних рівнянь.

Для того, щоб знайти диференціальні рівняння, при інтегруванні яких знаходять потенціали $\vec{A}(\vec{r}, t)$ і $\varphi(\vec{r}, t)$, використаємо наступні два рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad (4.6)$$

де $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$.

Підставимо в рівняння Максвелла (4.5) і (4.6) напруженості полів, виражені через потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ і $\varphi(\vec{r}, t)$, і одержимо

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot} \text{rot} \vec{A} = \vec{j} - \varepsilon\varepsilon_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \mu \cdot \vec{j} - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \quad (4.7)$$

$$\text{div} \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = -\varepsilon\varepsilon_0 \text{div} \nabla \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\varepsilon\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = \rho,$$

$$-\varepsilon\varepsilon_0\nabla^2\varphi - \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = \rho. \quad (4.8)$$

Розв'язуючи ці два останні, (4.7) і (4.8), диференційні рівняння можна знайти потенціали $\vec{A}(\vec{r}, t)$ і $\varphi(\vec{r}, t)$. Але, як бачимо, рівняння складні й взаємопов'язані – у кожне з них входить і $\varphi(\vec{r}, t)$, і $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Ці рівняння значно спрощуються, якщо використати умову калібровки Лорентца:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div}\vec{A} &= -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тоді з урахуванням виразу для градієнту від умови Лорентца (4.9)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

та похідної по часу формули (4.9)

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

останні диференційні рівняння для електромагнітних потенціалів, (4.7) і (4.8), набувають вигляду

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j}, \quad (4.10)$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (4.11)$$

Це рівняння Даламбера відповідно для векторного та скалярного потенціалів.

Ця система рівнянь разом з умовою Лорентца дозволяє однозначно знайти \vec{A} і φ , а потім і саме електромагнітне поле по відомим розподілам зарядів $\rho(\vec{r}, t)$ та струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$. З математичної точки зору рівняння Даламбера простіші, ніж рівняння Максвелла. Ця обставина і є, власне, обґрунтуванням доцільності введення в електромагнітну теорію допоміжних величин \vec{A} і φ .

Суттєво, що електромагнітні потенціали характеризуються калібрувальною, або градієнтною, інваріантністю. Це означає, що існує деяка свобода в їх визначенні.

Дійсно, якщо визначити нове значення векторного потенціалу \vec{A}' , додавши до старого \vec{A} градієнт будь-якого скаляру $\nabla\tau$,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\tau,$$

а нове значення скалярного потенціалу φ' визначити як суму старого потенціалу φ та $-\frac{\partial\tau}{\partial t}$:

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\tau}{\partial t},$$

то напруженість електричного та індукція магнітного полів залишаються без змін:

$$\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}' = \vec{B},$$

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}.$$

Різні способи вибору електромагнітних потенціалів, які залишають незмінними індукцію МП \vec{B} та напруженість ЕП \vec{E} , називають різними калібровками.

А інваріантність індукції МП \vec{B} та напруженості ЕП \vec{E} при різних калібровках називають градієнтною, або калібрувальною, інваріантністю.

Узагалі кажучи, електромагнітні потенціали \vec{A}' і φ' не мають фізичного змісту. Ці величини не визначаються однозначно. Користуючись деякою свободою у визначенні потенціалів, їх і вибирають з дотриманням додаткових умов (умова Лорентца).

Але якщо заряджені частинки нерухомі (стаціонарне поле, $\varphi(\vec{r}, t) \neq f(t)$), тоді потенціалу $\varphi(\vec{r})$ можна надати фізичного змісту:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Якщо й струми постійні (густина струмів не залежить від часу: $\vec{j}(\vec{r})$), то умова калібровки набуває вигляду

$$\text{div}\vec{A} = 0.$$

При цьому в обидва рівняння Даламбера (4.10) і (4.11) не входять доданки, що залежать від часу. Тобто у стаціонарному випадку рівняння Даламбера перетворюються в рівняння Пуассона для векторного $\vec{A}(\vec{r})$ потенціалу та скалярного $\varphi(\vec{r})$ потенціалу:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} &= -\mu\mu_0 \vec{j}, \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},\end{aligned}\tag{4.12}$$

Розв'язки цих рівнянь Пуасона, відповідно, мають вигляд (див. Розділ 1, формули (1.50) та (1.31)):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R},\tag{4.12a}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R},\tag{4.12б}$$

де $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – віддаль точки поля P від елементарних джерел поля $\vec{j}(\vec{r}') dV'$, $\rho(\vec{r}') dV'$, рис. 4.1.

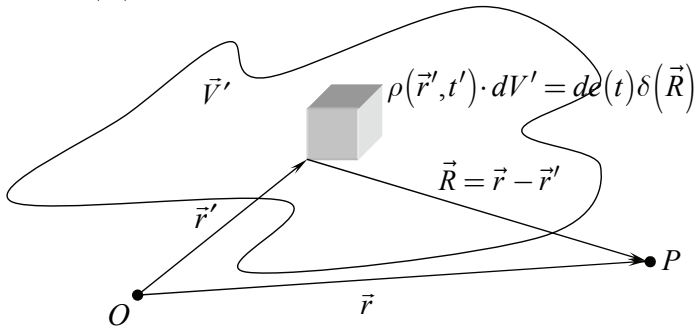


Рис. 4.1. Скалярне поле $\varphi(\vec{r}, t)$ в точці простору $P(\vec{r})$ визначається суперпозицією полів, які створюються квазіточковими зарядами $de(t)\delta(\vec{R})$

4.2. Розв'язок рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються. Фізичний зміст запізнення. Принцип причинності в класичній електродинаміці

Як відомо, розв'язок неоднорідного диференційного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Знайдемо частинний розв'язок рівняння Даламбера для $\varphi(\vec{r}, t)$, користуючись наближеним фізичним методом, оснований на принципі суперпозиції.

Нехай є деякий розподіл зарядів. Розіб'ємо область, у якій певним чином розподілені заряди, на нескінченно малі об'ємчики й будемо вва-

жати, що в кожному з них знаходиться квазіточковий заряд. Визначимо потенціал, що створюється нескінченно малим зарядом в деякій точці поля, рис. 4.1. Якщо \vec{R} – радіус-вектор, проведений від такого квазіточкового заряду в дану точку поля, то величина заряду в цьому об’ємнику визначається так:

$$de(t)\delta(\vec{R}),$$

де $\delta(\vec{R})$ – дельта функція. Одна з основних властивостей її (див. Додаток А) полягає в тому, що при $R \neq 0$ $\delta = 0$, а якщо $R \approx 0$, то $\delta(\vec{R} \approx 0) = 1$.

Оскільки скалярний потенціал $\varphi(\vec{r}, t)$ створюється цим і тільки цим квазіточковим зарядом $de(t)\delta(\vec{R})$, то це скалярне поле буде характеризуватися сферичною симетрією, а сумарний потенціал буде дорівнювати, згідно з принципом суперпозиції, інтегралу за об’ємом V' від потенціалів, які створюються квазіточковими зарядами $de(t)\delta(\vec{R})$.

Рівняння Даламбера у сферичній системі координат для скалярного потенціалу φ , який створюється квазіточковим зарядом $de(t)\delta(\vec{R})$, має вигляд:

$$\left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right] \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{de(t)\delta(\vec{R})}{\epsilon_0},$$

де θ – полярний кут, а γ – азимутальний кут.

Оскільки потенціал φ в просторі навколо квазіточкового заряду $de(t)\delta(\vec{R})$ характеризується сферично симетричним розподілом, то $\varphi(\vec{r}, t)$ не залежить від θ і γ , тому третій та другий доданки в квадратних дужках попереднього диференційного рівняння дорівнюють нулю.

Тому маємо

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{\partial}{\partial R} \right) \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{de(t)\delta(\vec{R})}{\epsilon_0}. \quad (4.13)$$

Для тих точок простору, для яких $R \neq 0$, $\delta = 0$ (в усіх точках крім початку координат), рівняння (4.13) набуває вигляду

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{\partial}{\partial R} \right) \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.14)$$

Розв'язок цього рівняння дає потенціал в точці P , що створюється зарядом, який знаходиться в одному з таких об'ємів dV' . А оскільки рівняння Даламбера лінійне, то сумарний потенціал поля, що створюється всім розподілом зарядів, буде дорівнювати, як уже відзначалося, сумі потенціалів, породжуваних зарядами всіх об'ємчиків.

Якщо шукати розв'язок (4.14) у вигляді $\varphi = \frac{\chi}{R}$, то останнє рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.15)$$

Це хвильове рівняння для функції χ , і його розв'язок відомий (див. Розділ 5):

$$\chi \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (4.16)$$

До речі, у цьому можна впевнитися, якщо підставити (4.16) в рівняння (4.15)

Тому розв'язок рівняння Даламбера (4.14) в точках, віддалених від $de(t)$, буде такий:

$$\varphi = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}.$$

Розв'язок рівняння Даламбера (4.13) в довільних точках і навіть в точках, дуже близьких до $de(t)$ (початок координат), повинен бути таким, що неперервно переходить до розв'язку

$$\varphi(R, t) = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (4.17)$$

Тому функцію $\chi(R, t)$ необхідно вибрати так, щоб одержати вірний розв'язок в просторі біля початку координат. Тобто χ необхідно вибрати так, щоб (4.17) неперервно переходило в розв'язок рівняння (4.13) поблизу початку координат.

Розглянемо дуже близькі до квазіточкового заряду de точки: при $R \rightarrow 0$ потенціал φ прямує до нескінченності $\varphi \rightarrow \infty$, а тому його похідні за координатами ростуть швидше, ніж похідні за часом в околі

$$R \approx 0: \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \gg \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Іншими словами: у дуже близьких до початку координат точках у рівнянні Даламбера (4.13) другим доданком у порівнянні з першим можна знехтувати.

У точках, дуже близьких до заряду de , потенціал буде визначатись диференціальним рівнянням без другого доданку в лівій частині (4.13). Тобто рівняння Даламбера в таких точках простору набуває вигляду (рівняння Пуассона)

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{de}{\varepsilon_0} \delta(\vec{R}).$$

Але розв'язок такого рівняння відомий:

$$\varphi_{R \rightarrow 0} = \frac{de}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

І відповідно, у це значення потенціалу повинен переходити розв'язок (4.17) рівняння Даламбера в точках простору, дуже близьких до заряду de . Іншими словам, функція χ повинна дорівнювати

$$\chi = \frac{de}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Таким чином, потенціал, що створюється зарядом $de(t)$ в усіх точках простору, без урахування поля інших зарядів нашого розподілу, визначається так:

$$\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (4.18)$$

Це і є розв'язок рівняння Даламбера (4.13).

З іншого боку, оскільки $de = \rho dV'$, тоді на основі принципу суперпозиції ми можемо записати розв'язок рівняння Даламбера (4.11) для скалярного потенціалу, проінтегрувавши за об'ємом V' вираз (4.18)

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'. \quad (4.19)$$

Аналогічно, розв'язок рівняння Даламбера (4.10) для векторного потенціалу має вигляд

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (4.20)$$

Вирази (4.19) та (4.20) – це розв’язки рівнянь Даламбера (4.11) та (4.10) у вигляді потенціалів, що запізнюються.

Прокоментуємо особливості розв’язків (4.19) та (4.20).

У момент часу t в точці, що визначається радіус-вектором \vec{r} , значення потенціалів $\varphi(\vec{r}, t)$ та $\vec{A}(\vec{r}, t)$ визначається відповідно густиною заряду ρ та густиною струму \vec{j} , *взятими не в цей момент часу, а в попередній (більш ранній) момент час. У такий момент часу, який визначається проміжком часу, необхідним для розповсюдження електромагнітних збурень від точок, де знаходяться заряди й струми (які визначаються радіус-вектором \vec{r}'), до точок поля, що визначаються \vec{r} , відстань між цими точками дорівнює $|\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$, а $\frac{R}{c}$ – час необхідний для поширення електромагнітних збурень від областей простору, де знаходяться заряди та струми, до відповідних точок поля.*

Розв’язки рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються, мають принципове значення, бо такий розв’язок відповідає певним уявленням про характер причинних зв’язків у фізиці та електродинаміці зокрема.

Дійсно, у класичній механіці принципу причинності відповідав однозначний зв’язок між станами системи й уявлення про дальнодію.

У класичній електродинаміці ситуація корінним чином змінюється. Якщо заряджені частинки змінили своє положення, то наслідок таких

змін буде спостерігатись не відразу, а через проміжок часу $\frac{R}{c}$, необхід-

ний для поширення електромагнітної взаємодії. При цьому електромагнітні збурення передаються зі швидкістю c (у середовищі зі швидкістю

$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$) від однієї точки до іншої нескінченно близької точки поля.

Не покидає враження якоїсь містичності, загадковості при обґрунтуванні останніх результатів. І закон Кулона, і закон Біо-Савара, та і рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$ сформульовані мовою дальнодії. У принципі вони не можуть бути іншими з огляду на процес пізнання фізичної реальності макроскопічними суб’єктами.

Як від дальнодіючих законів ми прийшли до близькодіючих?

Рівняння Даламбера взаємопов’язані, див. (4.7) та (4.8). І тільки завдяки умові Лорентца ми одержали незалежні одне від одного рівняння (4.10) і (4.11). На традиційному шляху викладання електродинаміки (шляху опису класичної електродинаміки) значна частина принципів понять залишається без фізичного пояснення.

Таким чином, уявлення про дальнюдію в класичній механіці замінюється в електродинаміці уявленням про близькодію та про кінцеву швидкість розповсюдження електромагнітних взаємодій.

Але й у класичній електродинаміці залишається однозначний зв'язок між станами електродинамічної системи.

4.3. Потенціали Ліснара-Віхерта. Електромагнітне поле зарядженої частинки, яка рухається з постійною швидкістю

Для знаходження потенціалів електромагнітного поля, що створюється окремою рухомою ЗЧ, використовують вирази для потенціалів, що запізнюються,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t') dV'}{R},$$

де $t' = t - \frac{R}{c}$, та наступні міркування.

Для знаходження потенціалів $\varphi(\vec{r}, t)$ та $\vec{A}(\vec{r}, t)$, що створюються окремою рухомою ЗЧ, у точці поля, яка визначається радіус-вектором \vec{r} у момент часу t , уявимо собі сферичну поверхню з центром у даній точці поля.

Будемо далі уявляти собі, що ця сферична поверхня стискається з швидкістю, яка дорівнює швидкості світла c . Причому стискається так, що в момент t ця сфера стиснеться в точку P , рис. 4.2.

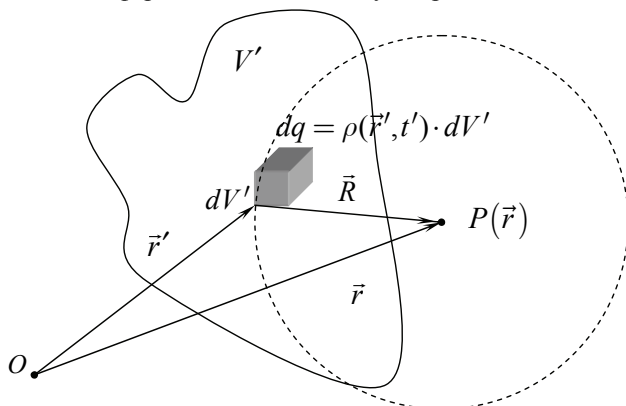


Рис. 4.2. Уявлювана сферична поверхня радіуса R «збирає» внесок від усіх зарядів, що знаходяться в об'ємі V' , у величину потенціалів φ та \vec{A} в точці поля P

Тоді очевидно, що сферична поверхня при своєму стисканні перетне об'єм dV' в той момент часу $t - \frac{R}{c}$, для якого й слід підставити густини струму $\vec{j}(\vec{r}', t')$ та заряду $\rho(\vec{r}', t')$ у вирази для потенціалів, що запізнюються. Таким чином, кожен dV' множиться на ті значення $\vec{j}(\vec{r}', t')$ та $\rho(\vec{r}', t')$, котрі сфера перетне в цьому dV' в момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$. Віддаль R вимірюється в той момент часу, коли через заряд $\rho(\vec{r}', t')dV'$ проходить сфера, що стиснеться в точку P .

Таким чином, ця сферична поверхня начебто збирає внесок від усіх зарядів в об'ємі V' у величину потенціалів φ та \vec{A} в точці поля P .

Якщо ЗЧ в об'ємі dV' нерухомі, то за проміжок часу dt' елемент сферичної поверхні dS перетне заряд величиною

$$\rho(\vec{r}', t') \cdot dS \cdot dR. \quad (4.21)$$

Але якщо заряджені частинки певним чином рухаються, то величина заряду, що буде перетинатись цією поверхнею, буде або більшою, або меншою виразу (4.21). Цей висновок пояснюється тим, що ці заряди будуть або втікати в цей сферичний шар товщиною dR , або витікати з нього внаслідок руху самих ЗЧ.

Унаслідок руху заряджених частинок через dS вийде (вितече) заряд величиною (див. рис. 4.3.)

$$\rho \cdot dS \cdot v dt' \cdot \cos\theta = \rho \cdot dS \cdot \frac{dR}{c} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} \right), \quad (4.22)$$

$$\text{де } dt' = \frac{dR}{c}, \quad v \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R}$$

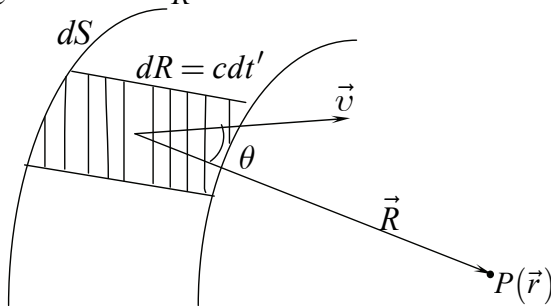


Рис. 4.3. Знаходження величини заряду, який перетинається уявлюваною сферичною поверхнею, при її стисканні в точку P

Тоді внаслідок такого руху ЗЧ сферична поверхня при своєму сти-
сканні перетне меншу величину заряду, тобто сфера збере інформацію
про заряди величиною

$$\begin{aligned} dq &= \rho(\vec{r}', t') \cdot dS \cdot dR - \rho \cdot dS \cdot v \cdot dt' \cdot \cos \theta = \\ &= \rho \cdot dS \cdot dR - \rho \cdot dS \cdot \frac{dR}{c} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} \right) = \\ &= \rho(\vec{r}', t') \cdot dV' \cdot \left(1 - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{R})}{c \cdot R} \right) = \frac{\rho(\vec{r}', t') \cdot dV'}{R} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t'} \end{aligned} \quad (4.23)$$

*Таким чином, ця сферична поверхня збере інформацію про ве-
личину заряду, меншу ніж у випадку нерухомих ЗЧ. Але оскільки ЗЧ
будуть довше знаходитись усередині сфери, що стискається, то і
внесок цих зарядів у потенціали φ та \vec{A} буде більшим, ніж у випадку
нерухомих заряджених частинок.*

Із (4.23) одержуємо підінтегральний вираз потенціалу $\varphi(\vec{r}, t)$, що
запізнюється,

$$\frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV' = \frac{dq}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t'}}$$

А сам скалярний потенціал, що запізнюється, створований рухо-
мою ЗЧ, дорівнює тоді

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t') dV'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{dq}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t'}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t - \frac{R}{c}}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Відповідно, для векторного потенціалу маємо

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v}}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t'}} \quad (4.25)$$

Формули (4.24) та (4.25) – **потенціали Лієнара-Віхерта.**

Це потенціали поля, що створене окремою ЗЧ, яка рухається зі швидкістю \vec{v} . Значення величини $\left(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)_{t'}$ необхідно знаходити в момент $t' = t - \frac{R}{c}$.

Приклад 4.1. Користуючись потенціалами Лієнара-Віхерта, знайти напруженість електричного $\vec{E}(\vec{r}, t)$ та індукцію $\vec{B}(\vec{r}, t)$ магнітного полів, що створюються зарядженою частинкою, яка рухається з постійною швидкістю $\vec{v} = const$.

Розв'язання: Нехай ЗЧ рухається з постійною швидкістю $\vec{v} = const$ вздовж осі OX , рис. 4.4.

Оскільки ЗЧ рухається зі швидкістю \vec{v} , то в момент t (положення 2) вона буде знаходитись в точці з координатою vt на вісі OX . Очевидно, що в момент $t = 0$ ЗЧ знаходиться у точці O .

Оскільки потенціали в точці поля $P(x, y, z, t)$ в момент t створюються положенням та значенням заряду в попередній момент часу (момент t' , положення 1 зарядженої частинки), то положення нашого заряду в моменти t' та t будуть такими, як показано на рис. 4.4.

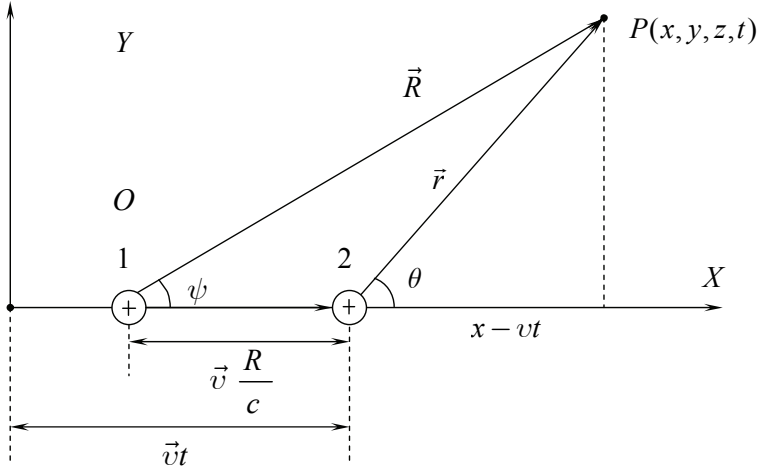


Рис. 4.4. Знаходження електромагнітного поля ЗЧ, що рухається з $\vec{v} = const$

З рис. 4.4 видно, що зв'язок між радіус-вектором \vec{r} , проведеним з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля, та \vec{R} такий:

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{R}{c} \cdot \vec{v},$$

де \vec{R} – радіус-вектор, проведений від того положення ЗЧ, в якому вона знаходилася в попередній момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$.

Тому радіус-вектор \vec{r} виражається через R та \vec{R} так:

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{v} \cdot \frac{R}{c} \quad r^2 = \left(\vec{R} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)^2$$

Знайдемо r^2 :

$$r^2 = R^2 - \frac{2R}{c} (\vec{R} \cdot \vec{v}) + \frac{v^2 \cdot R^2}{c^2}. \quad (4.26)$$

Щоб скористатися потенціалами Лієнара-Віхерта (4.24) та (4.25) для знаходження ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ необхідно перш за все визначити величину $\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t - \frac{R}{c}}$ через параметри задачі. Тому ми і робимо всі ці перетворення.

Далі використаємо очевидне співвідношення

$$\begin{aligned} [\vec{r}, \vec{v}]^2 &= [\vec{R}, \vec{v}]^2 = R^2 v^2 \sin^2 \psi = \\ &= R^2 v^2 (1 - \cos^2 \psi) = R^2 \cdot v^2 - (\vec{R} \cdot \vec{v})^2. \end{aligned}$$

З допомогою (4.26) та останнього співвідношення знайдемо вираз

$$r^2 - \frac{[\vec{r}, \vec{v}]^2}{c^2} = R^2 - \frac{2R}{c} (\vec{R} \cdot \vec{v}) + \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 = \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)^2. \quad (4.27)$$

Тоді величину $\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t'}$, що входить в означення скалярного (4.24)

та векторного (4.25) потенціалів Лієнара-Віхерта, знайдемо з (4.27):

$$\begin{aligned} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) &= \sqrt{r^2 - \frac{[\vec{r}, \vec{v}]^2}{c^2}} = r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \sqrt{(x - v \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot (y^2 + z^2)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

У формулі (4.28) радіус-вектор, проведений з миттєвого положення ЗЧ в точку поля $P(x, y, z, t)$, рис. 4.4, визначається так:

$$\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

У результаті скалярний та векторний потенціали Лієнара-Віхерта рівномірно рухомої ЗЧ дорівнюють

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2) \cdot (y^2 + z^2)}} \quad (4.29)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \varphi \quad (4.30)$$

Тепер ми можемо знайти електромагнітне поле в точці $P(x, y, z, t)$.

Магнітне поле в точці $P(x, y, z, t)$ дорівнює

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{1}{c^2} \text{rot}(\varphi\vec{v}) = \frac{1}{c^2} [\nabla, (\varphi\vec{v})] = \frac{1}{c^2} [\nabla\varphi, \vec{v}], \quad (4.31)$$

де використана формула векторного аналізу

$$[\nabla, (\varphi \cdot \vec{v})] = \varphi [\vec{\nabla}, \vec{v}] + [(\nabla\varphi), \vec{v}]$$

та враховано, що $[\nabla, \vec{v}] = 0$, оскільки $\vec{v} = \text{const}$.

Знайдемо напруженість електричного поля використовуючи формулу

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

де $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \dot{\vec{A}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \dot{\varphi}$.

З іншого боку, може бути показано, що

$$\dot{\varphi} = -(\vec{v} \cdot \nabla\varphi).$$

Дійсно, якщо довільна функція $f(x, y, z, t)$ є функцією поля, то значення цієї величини буде таким самим, як і в попередній точці, у попередній момент часу

$$f(x, y, z, t) = f(x - v_x \cdot dt, y - v_y \cdot dt, z - v_z \cdot dt, t - dt),$$

тому $\frac{df}{dt} = \dot{f} = -(\vec{v} \cdot \nabla f)$.

Тобто, похідна за часом векторного потенціалу дорівнює

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \dot{\varphi} = \frac{\vec{v}}{c^2} (-(\vec{v} \cdot \nabla\varphi)).$$

І нарешті,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\vec{v}}{c^2}(-\vec{v} \cdot \nabla\varphi).$$

З останньої рівності знайдемо градієнт скалярного потенціалу

$$-\nabla\varphi = \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v} \cdot \nabla\varphi). \quad (4.32)$$

і підставимо (4.32) у формулу для індукції магнітного поля (4.31). Тоді маємо

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{c^2}[\nabla\varphi, \vec{v}] = -\frac{1}{c^2}[\vec{v}, \nabla\varphi] = \\ &= \frac{1}{c^2}\left[\vec{v}, \left(\vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v} \cdot \nabla\varphi)\right)\right] = \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}]. \end{aligned}$$

Ми одержали зв'язок між напруженістю електричного та індукцією магнітного поля ЗЧ, що рухається з постійною швидкістю. По-перше, вектор \vec{B} перпендикулярний векторам \vec{v} та \vec{E} , що ще раніше ми отримали з аналізу закону Біо-Савара-Лапласа. По-друге, можна стверджувати, узагальнюючи результат, що будь-яке «рухоме» електричне поле, яке характеризується напруженістю електричного поля \vec{E} , породжує в тій самій просторово-часовій точці магнітне поле індукції \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}]. \quad (4.33)$$

Повертаємося до знаходження напруженості електричного поля рухомої ЗЧ.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v} \cdot \nabla\varphi). \quad (4.34)$$

Згідно з (4.34) компоненти вектора \vec{E} дорівнюють

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1 - \beta^2) = (1 - \beta^2) \cdot \frac{q(x - vt)}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}, \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1 - \beta^2) \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}, \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (1 - \beta^2) \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}, \end{aligned} \quad (4.34a)$$

де $s = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} = r \left\{ 1 - \beta^2 \sin^2 \theta \right\}^{1/2}$, якщо враховувати, що $\vec{r} = (x - vt) \cdot \vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Тоді на підставі (4.34а) для вектора напруженості електричного поля ЗЧ, яка рухається з постійною швидкістю, одержуємо

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \beta^2) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3 (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.35)$$

або

$$\vec{E} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \left[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2) \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.35a)$$

де \vec{r} – це радіус-вектор, який визначає положення точки поля відносно заряду в даний момент часу, θ – кут між векторами \vec{r} і \vec{v} .

Основні наслідки розв'язку цього прикладу:

1. Вектор \vec{E} рухомої ЗЧ в кожному напрямку уздовж радіус-вектора \vec{r} , проведеного з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля, рис. 4.5.

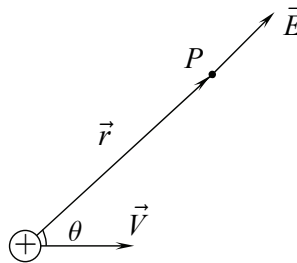


Рис. 4.5. Вектор напруженості електричного поля \vec{E} в кожному напрямку уздовж радіус-вектора \vec{r} , проведеного з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля P

2. Напруженість електричного поля в напрямку руху ЗЧ,

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2) < E_{n,z}, \quad (4.36)$$

менша ніж напруженість поля нерухомої зарядженої частинки в точках, віддалених від ЗЧ на таку ж саму відстань r ,

$$E_{n,z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}.$$

Отже, напруженість поля \vec{E} в напрямку руху ЗЧ зменшується.

3. У напрямку, що визначається кутом $\theta = \frac{\pi}{2}$, тобто в будь-якій точці, що лежить в площині, перпендикулярній \vec{v} , напруженість електричного поля більша, ніж поле нерухомої ЗЧ при тій же віддалі точки поля від ЗЧ,

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} > E_{н,з}. \quad (4.37)$$

4. При значеннях \vec{v} порядку швидкості світла все поле зосереджене біля площини, перпендикулярній \vec{v} .

Таким чином електромагнітне поле ЗЧ, що рухається, «сплющується» в напрямку руху.

5. Електричне поле рухомої ЗЧ не потенційне, $rot\vec{E} \neq 0$.

4.4. Електромагнітне поле довільно рухомої зарядженої частинки

Дуже важливою задачею класичної електродинаміки є знаходження електромагнітного поля, яке породжується довільно рухомою зарядженою частинкою.

При цьому доцільно зупинитися ще на одному способі обґрунтування потенціалів Лієнара-Віхерта. У дидактичному сенсі вивчення чи навіть знайомство з різними способами обґрунтування тієї чи іншої формули допомагає кращому розумінню як самого фізичного явища, так і змісту величин, які входять у цю формулу.

Знайдемо потенціали ЕМП, що створюються у вакуумі довільно рухомою точковою зарядженою частинкою, використовуючи методи СТВ. Нехай ЗЧ рухається за певним законом $\vec{r}(t)$, рис. 4.6.

Потенціали ЕМП в момент часу t в т. $P(\vec{r})$, положення якої визначається \vec{r} , створюються положенням та швидкістю ЗЧ не в момент часу t (t – момент часу вимірювання, спостереження ЕМП в $P(\vec{r})$), а в більш ранній момент часу t_B , $t_B < t$, і в тій точці траєкторії, віддалі від якої до точки $P(\vec{r})$ електромагнітне збурення проходить за час запізнення $t - t_B$.

Нехай в момент часу t_B ЗЧ знаходиться в деякій точці A на траєкторії руху ЗЧ, рис. 4.6.

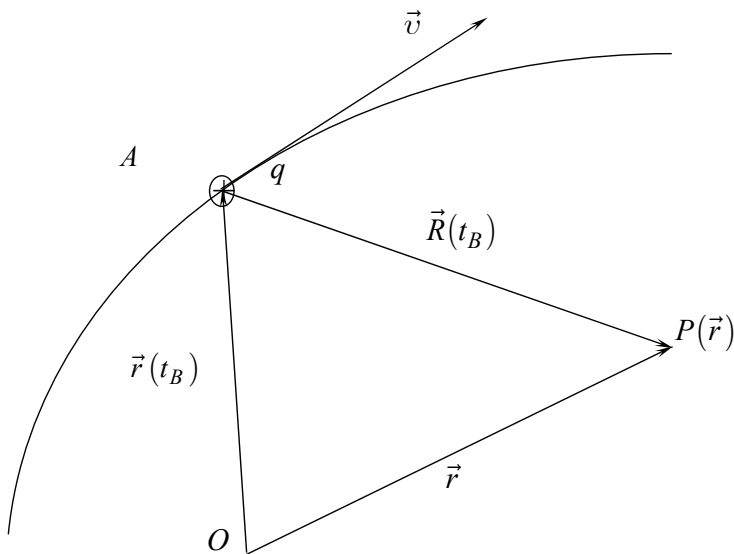


Рис. 4.6. Заряджена частинка рухається згідно закону $\vec{r}(t)$.

У момент часу t_B ЗЧ знаходиться в точці A

Час запізнення визначається кінцевою швидкістю поширення електромагнітної взаємодії. Це той проміжок часу, який необхідний, щоб електромагнітне збурення (чи електромагнітна хвиля) дійшло від т. A до т. P , $R(t_B) = |\vec{r} - \vec{r}(t_B)| = c(t - t_B)$.

Ще раз нагадаємо, що $R(t_B) = |\vec{r} - \vec{r}(t_B)| = c(t - t_B)$ – це віддаль точки поля P від ЗЧ у момент випромінювання t_B .

Очевидно, що рух ЗЧ по довільній траєкторії не є рівномірним і прямолінійним. Тому протягом достатньо великого проміжку часу із ЗЧ неможливо пов'язати інерційну систему відліку. Але протягом певного dt , нескінченно малого інтервалу часу, рух по траєкторії $\vec{r}(t)$ можна вважати рівномірним і прямолінійним. Тобто ми можемо використати методи СТВ, увівши миттєво супутні інерційні СВ K' .

У кожному мить у такій СВ K' ЗЧ нерухома, і її електромагнітні потенціали, очевидно, дорівнюють:

$$\varphi'(t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R'(t'_B)}, \quad \vec{A}' = 0,$$

де $R'(t'_B)$ – віддаль між ЗЧ в момент випромінювання t'_B та т. P з «точки зору» миттєво супутньої СВ K' ,

$$R'(t'_B) = c(t' - t'_B),$$

де t' – момент спостереження (вимірювання) параметрів електромагнітного поля в т. P з «точки зору» СВ K' .

Тому в лабораторній системі відліку потенціали в т. P такі (див. детальніше Розділ 6):

$$\varphi(\vec{r}, t) = \Gamma\varphi' = \frac{\Gamma \cdot q}{4\pi\epsilon_0 c(t' - t'_B)}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\Gamma \cdot \vec{v} \cdot \varphi'}{c^2},$$

$$\text{де } \Gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Оскільки вимірювання і спостереження проводяться в лабораторній системі відліку (СВ K), то нам необхідно перейти від часу t' за годинником СВ K' до лабораторного часу. Але згідно з перетвореннями Лорентца,

$$t' = \Gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right).$$

Тоді для проміжку часу $(t' - t'_B)$ маємо

$$t' - t'_B = \Gamma \left\{ (t - t_B) - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}(t_B)) \right\} = \frac{\Gamma}{c} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right),$$

$$\text{де } t - t_B = \frac{R(t_B)}{c} = \frac{R}{c}, \quad \vec{r} - \vec{r}(t_B) = \vec{R}(t_B) = \vec{R}.$$

І нарешті для потенціалів Лієнара-Віхерта одержуємо

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\Gamma \cdot q}{4\pi\epsilon_0 c \cdot \frac{\Gamma}{c} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t_B}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t_B}}, \quad (4.38)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{v}}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t_B} \cdot c^2}, \quad (4.39)$$

де швидкість \vec{v} , а також відстань між ЗЧ і точкою поля P слід брати в момент випромінювання t_B , а не в момент спостереження t поля в т. P .

Як бачимо (4.38) і (4.39) збігаються, відповідно, з формулами (4.24) та (4.25), одержаними іншим методом.

Приклад 4.2. Знайти напруженості електричного та індукції магнітного полів, породжуваних ЗЧ, яка рухається довільно.

Розв'язання: Для обчислення векторів поля \vec{E} та \vec{B} за формулами (4.2) та (4.4), вираз для потенціалів (4.38) і (4.39) необхідно диференціювати за координатами т. P і часу спостереження t . Тобто необхідно

знаходити похідні $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$, де x_i координати точки поля P , A_k – декартові компоненти вектор-потенціалу.

Оскільки $\varphi(\vec{r}, t)$ і $\vec{A}(\vec{r}, t)$ залежать від x, y, z, t через $t_B = f(x, y, z, t)$ то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_B} \frac{\partial t_B}{\partial x_i}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} \frac{\partial t_B}{\partial t}, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_k}{\partial t_B} \frac{\partial t_B}{\partial x_i}, \quad (4.42)$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t_B} \nabla t_B. \quad (4.43)$$

Для знаходження похідних t_B за просторовими і часовими координатами виразимо момент часу випромінювання t_B як функцію x, y, z, t

$$\begin{aligned} t_B = t - \tau = t - \frac{R(t_B)}{c} &= t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t_B)|}{c} = \\ &= t - \frac{\left\{ [x - x(t_B)]^2 + [y - y(t_B)]^2 + [z - z(t_B)]^2 \right\}^{1/2}}{c}, \end{aligned}$$

де $R = \left\{ \sum [x_i - x_i(t_B)]^2 \right\}.$

Останнє співвідношення подамо в такій формі:

$$t - t_B - \tau = F(x, y, z, t, t_B) = 0,$$

$$F(x, y, z, t, t_B) = t - t_B - \frac{\left\{ \sum [x_i - x_i(t_B)]^2 \right\}^{1/2}}{c} = 0, \quad (4.44)$$

яку слід розглядати як неявний вираз залежності $t_B = f(x, y, z, t)$.

Знайдемо всі похідні, які входять у праві частини співвідношень (4.40)–(4.43).

Згідно з правилами диференціювання неявних функцій маємо

$$\frac{\partial t_B}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial t_B}, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial t_B}{\partial t} = -\frac{\partial F / \partial t}{\partial F / \partial t_B}, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_B} = -1 + \frac{\sum (x_i - x_i(t_B)) \cdot \frac{\partial x_i(t_B)}{\partial t_B}}{c \cdot R}. \quad (4.47)$$

Оскільки $x_i - x_i(t_B) = R_i$, то похідна $\frac{\partial x_i(t_B)}{\partial t_B} = v_i(t_B)$ визначає

i -ту компоненту швидкості ЗЧ в момент часу t_B , тому для похідних $\frac{\partial F}{\partial t_B}$

та $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t_B} &= -1 + \frac{\vec{R}\vec{v}(t_B)}{cR} = -\frac{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= -\frac{R_i}{cR}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= 1 \end{aligned}$$

Аналогічно знаходяться наступні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_B}{\partial x_i} &= \frac{R_i \cdot cR}{cR(\vec{R}\vec{v} - cR)} = -\frac{R_i}{c\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)}, \\ \frac{\partial t_B}{\partial t} &= \frac{R}{R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}}, \end{aligned}$$

$$a \nabla t_B = - \frac{\vec{R}}{c \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)}.$$

При вираховуванні виразу для скалярного потенціалу Лієнара-Віхерта (4.38) похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial t_B}$ дорівнює

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_B} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^2} \left(\frac{\partial R}{\partial t_B} - \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_B} \cdot \frac{\vec{v}}{c} - \vec{R} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_B} \right).$$

Оскільки $R = c(t - t_B)$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}(t_B)$, то

$$\frac{\partial R}{\partial t_B} = -c, \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_B} = - \frac{\partial \vec{r}(t_B)}{\partial t_B} = -\vec{v}(t_B), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_B} = \dot{\vec{v}}(t_B),$$

і тому кінцевий вираз для похідної скалярного потенціалу за часом випромінювання дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_B} &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^2} \left(-c + \frac{\vec{v}^2}{c} - \frac{\vec{R}}{c} \cdot \dot{\vec{v}} \right) = \\ &= \frac{qc}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^2} \left(1 - \beta^2 + \vec{R} \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Оскільки векторний потенціал \vec{A} в будь-який момент часу пов'язаний зі скалярним потенціалом $\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi$, то

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_B} \frac{\vec{v}}{c^2} + \varphi \cdot \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}.$$

Підставляємо (4.38) та (4.48) в попередній вираз і одержуємо для похідної векторного потенціалу за часом випромінювання

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2} \left(1 - \beta^2 + \vec{R} \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{c^2} + \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2} \cdot \frac{q \cdot c}{c4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)}.$$

Після спрощення маємо

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} = \frac{qc \left[\frac{\vec{v}}{c^2} \left(1 - \beta^2 + \vec{R} \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\right) + \frac{\dot{\vec{v}}}{c^3} \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right) \right]}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2}. \quad (4.49)$$

Нарешті, для напруженості електричного поля довільно рухомої ЗЧ одержуємо результат

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t_B} \nabla t_B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} \frac{\partial t_B}{\partial t} = \\ &= -\frac{qc}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} + \frac{\vec{R}}{c^2} \dot{\vec{v}}\right) \cdot \left(-\frac{\vec{R}}{c \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)} \right) - \\ &\quad - \frac{qc \left[\frac{\vec{v}}{c^2} \left(1 - \beta^2 + \vec{R} \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\right) + \frac{\dot{\vec{v}}}{c^3} \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right) \right]}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2} \cdot \frac{R}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)}. \end{aligned}$$

який можна привести до такого вигляду

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q(1 - \beta^2) \left(\vec{R} - \frac{\vec{v} \cdot R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} + \frac{q \left[\vec{R} \cdot \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}R}{c}\right) - \frac{R\dot{\vec{v}}}{c^2} \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right) \right]}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} = \\ &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (4.50) \end{aligned}$$

У формулі (4.50) перший доданок \vec{E}_1 – це напруженість електричного поля, що не залежить від прискорення ЗЧ,

$$\vec{E}_1 = \frac{q(1-\beta^2)\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3}, \quad (4.51)$$

а \vec{E}_2 – частина напруженості електричного поля, що залежить не тільки від швидкості руху ЗЧ, а й від її прискорення,

$$\vec{E}_2 = \frac{q\left[\vec{R} \cdot \frac{\dot{\vec{v}}}{c}\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}R}{c}\right) - \frac{R\dot{\vec{v}}}{c^2}\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)\right]}{4\pi\epsilon_0\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} = \frac{q\left[\vec{R}, \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}R}{c}\right), \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2}\right]\right]}{4\pi\epsilon_0\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3}. \quad (4.52)$$

Формула (4.51) для напруженості електричного поля рівномірно рухомої ЗЧ та формула (4.35) начебто відрізняються одна від одної. У формулі (4.51) вектор \vec{E}_1 виражений через віддаль від ЗЧ до даної точки поля, яка визначається в момент часу $t_B = t - \tau = t - \frac{R(t_B)}{c}$. А у формулі (4.35) поле виражене через віддаль від ЗЧ до нашої точки поля, визначену не в момент випромінювання, а в момент спостереження (вимірювання) ЕМП в точці P .

Але можна впевнитися, що $\left(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)_{t_B}^3 = r^3(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}$, де

$\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор, проведений з миттєвого положення (у момент спостереження) ЗЧ в точку поля.

З іншого боку, співмножник в чисельнику виразу для \vec{E}_1 , $\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}R}{c}\right)$, дорівнює радіус-вектору, проведеному з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля, див. також рис. 4.4.

І тому для напруженості електричного поля \vec{E}_1 одержуємо знайомий вже результат (**Приклад 4.1**) (4.35)

$$\vec{E} = \frac{q(1-\beta^2) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3 (1-\beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Знайдемо тепер індукцію магнітного поля

$$\begin{aligned} \vec{B} = \text{rot} \vec{A}(t(t_B)) &= \left[\nabla t(t_B), \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial t}{\partial t_B} \nabla t_B, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} \frac{\partial t_B}{\partial t} \right] = \left[\nabla t_B, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t_B} \right] = \\ &= \left[\frac{\vec{R}}{c \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)}, \frac{qc \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \left(1 - \beta^2 + \vec{R} \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2} \right) + \frac{\dot{\vec{v}}}{c^3} \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right) \right)}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Якщо до другого співмножника в чисельнику додати $\vec{R} \left(1 + \beta^2 + \vec{R} \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2} \right)$, то загальний вираз не зміниться, оскільки $[\vec{R}, \vec{R}] = 0$, але другий співмножник тоді буде дорівнювати напруженості електричного поля \vec{E} .

Тобто

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \left[\frac{\vec{R}}{R}, \frac{q \left(-R \frac{\vec{v}}{c} \left(1 - \beta^2 + \frac{\vec{R}\dot{\vec{v}}}{c^2} \right) - \frac{R\dot{\vec{v}}}{c^2} \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right) + \vec{R} \left(1 - \beta^2 + \vec{R} \cdot \frac{\dot{\vec{v}}}{c^2} \right) \right)}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^3} \right] = \\ &= \left[\frac{\vec{R}}{R}, \vec{E} \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Нагадаємо, що у формулі (4.53) $\vec{R} = \vec{R}(t_B)$. Тому в кожній точці простору вектор індукції магнітного поля \vec{B} перпендикулярний і до вектора \vec{E} , так і до вектора $\vec{R} = \vec{R}(t_B)$, проведеного з положення ЗЧ в момент t_B в точку поля $P(\vec{r})$.

4.5. Приклади розв'язування задач

Задача 4.1. Нескінченно довгий круглий циліндр радіуса a рівномірно заряджений по об'єму. Визначити φ та \vec{E} всередині та зовні циліндра.

Розв'язання: Виходячи із симетрії задачі, її розв'язок слід шукати в циліндричній системі координат. Рівняння Пуассона має вигляд

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Оскільки потенціал залежить тільки від r то дія оператора Лапласа на φ дорівнює

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

Таким чином, рівняння Пуассона набуває вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\rho/\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad (0 < r < a), \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 \quad \text{при} \quad (r > a). \quad (4.56)$$

Інтегрування (4.55) і (4.56) дає:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1,$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2,$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 – постійні інтегрування.

Очевидно, що потенціал φ_1 в усіх точках повинен мати кінцеве значення, тому слід прийняти $A_1 = 0$ (бо при $r \rightarrow 0, \ln r \rightarrow \infty$). Зручно далі потенціал усередині циліндра нормувати умовою $\varphi_1(0) = 0$, а тоді $B_1 = 0$.

За умовою задачі на поверхні циліндру відсутні заряди, тому напруженість електричного поля на поверхні циліндра неперервна.

Умови неперервності потенціалу та першої похідної від φ по r при $r = a$ дають два алгебраїчних рівняння для знаходження констант A_2, B_2 :

$$A_2 \ln a + B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2, \quad \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a,$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2,$$

$$B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 - A_2 \ln a = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 \ln a.$$

Тому потенціал у довільній точці простору визначається такими функціями:

$$\text{при } (0 < r \leq a) \quad \varphi_1(r) = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2, \quad (4.57)$$

$$\text{при } (r \geq a) \quad \varphi_2(r) = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\varepsilon_0} a^2. \quad (4.58)$$

Тоді напруженість електричного поля

$$\text{при } (0 < r \leq a) \quad E_r = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r,$$

$$\text{при } (r \geq a) \quad E_r = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{a^2}{r}.$$

Якщо врахувати, що $\rho \pi a^2 = \tau$ є лінійною густиною заряду, то напруженість електричного поля поза межами циліндру можна записати

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (4.59)$$

Задача 4.2. Дві металеві пластини утворюють кут α_0 , рис 4.7. Довжина пластин в напрямку, перпендикулярному рисунку, нескінченна. Різниця потенціалів між пластинами U_0 . Знайти напруженість електричного поля між пластинами та ємність, що приходить на одиницю довжини, ширина пластин $b - a$. У точці O пластини не доторкуються, але знаходяться досить близько одна від одної, і тому крайовими ефектами слід знехтувати [3].

Розв'язання: Поле між пластинами характеризується аксиальною симетрією. Тому вибираємо циліндричну систему координат, вісь Z якої направлена перпендикулярно до площини рисунку. У нас α – аксиальний кут, r – віддаль від осі. Тоді рівняння Лапласа для нашого випадку має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (4.60)$$

де враховано, що $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$.

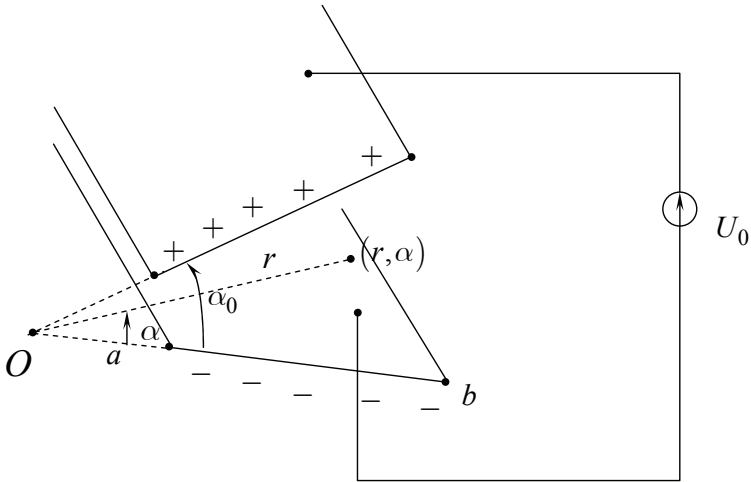


Рис. 4.7. До визначення поля конденсатора з непаралельними пластинами

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$\varphi(r, \alpha) = R(r)\Phi(\alpha). \quad (4.61)$$

Підставляємо (4.61) в (4.60), і помноживши потім обидві частини рівності на $\frac{r^2}{R\Phi}$, одержуємо

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}.$$

Ліва та права частина рівності, як бачимо, залежать від різних і незалежних величин. Тому обидві вони дорівнюють одній і тій же константі. Тобто

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = -n^2. \quad (4.62)$$

Розв'язок для Φ очевидний:

$$\Phi = \begin{cases} B_1\alpha + B_2 & \text{при } n = 0 \\ A_1 \sin n\alpha + A_2 \cos n\alpha & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$

Розв'язок для R будемо шукати у вигляді $R = Ar^\beta$ причому $\beta \neq 0$. Підставляючи такий розв'язок в перше з рівнянь (4.62), одержуємо

$$\beta^2 = n^2.$$

Тобто

$$\beta = \pm n$$

При $n = 0$ перше з рівнянь (4.62) спрощується

$$r \frac{dR}{dr} = \text{const}$$

і може бути задоволене функцією

$$R = D_1 \ln r + D_2.$$

Таким чином, функція R має вигляд

$$R = \begin{cases} D_1 \ln r + D_2 & n = 0 \\ C_1 r^n + C_2 r^{-n} & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$

Знайдемо розв'язання задачі, яке не залежить від r , тобто при $n = 0$. Тоді $D_1 = 0$, а $\varphi(\alpha) = B_1 \alpha + B_2$. Використасмо граничні умови задачі

$$\varphi(0) = 0, \varphi(\alpha_0) = U_0.$$

І одержуємо $B_2 = 0, U_0 = B_1 \alpha_0$. Таким чином, для $\varphi(\alpha)$ маємо

$$\varphi(\alpha) = U_0 \alpha / \alpha_0.$$

Тоді напруженість електричного поля між пластинами конденсатора дорівнює

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -U_0 / (r \alpha_0).$$

Поверхнева густина заряду на пластинах

$$\sigma_1 = \varepsilon \cdot E_\alpha(\alpha = 0) = -\varepsilon \cdot U_0 / (r \alpha_0),$$

$$\sigma_2 = -\varepsilon \cdot E_\alpha(\alpha = \alpha_0) = \varepsilon \cdot U_0 / (r \alpha_0).$$

Заряд кожної з пластин (за модулем) на довжині l виражається формулою:

$$Q = l \int_a^b \sigma dr = (l \varepsilon_0 U_0 / \alpha_0) \ln(b/a).$$

Тому ємність на довжині l дорівнює

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{l \varepsilon_0 \ln(b/a)}{\alpha_0}.$$

Задача 4.3. Струм I протікає по лінійному провіднику. Знайти векторний потенціал \vec{A} та напруженість магнітного поля \vec{H} у випадках:

- нескінченно довгого провідника;
- провідника довжиною L .

Розв'язання: Початок координат розмістимо в центрі відрізка провідника зі струмом, рис. 4.8. Вісь OZ направлена вздовж ППС. І оскільки МП прямолінійного струму аксіально симетричне, то для наших цілей достатньо знайти векторний потенціал та індукцію МП в точках площини YOZ .

Тоді згідно з формулою (4.12а), яка для лінійних струмів набуває вигляду

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot d\vec{l}}{R}, \quad (4.63)$$

де R – віддаль точки поля від елемента струму $I d\vec{l}$, для A_z одержуємо

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\left[(z-z')^2 + r^2\right]^{1/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{-z + L/2 + \left[(z - L/2)^2 + r^2\right]^{1/2}}{-(z + L/2) + \left[(z + L/2)^2 + r^2\right]^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$

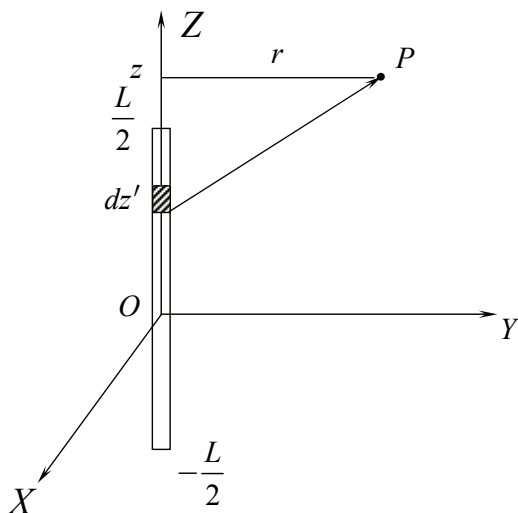


Рис. 4.8. Знаходження вектор-потенціалу та індукції МП відрізка струму

Індукція МП знаходиться за формулою (4.2). У циліндричній СК, виходячи із симетрії нашої задачі, не рівна нулеві тільки одна компонента поля B_φ :

$$B_\varphi = -\partial A_z / \partial r,$$

$$B_\varphi = \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{-z + L/2}{\left[r^2 + (z - L/2)^2 \right]^{1/2}} + \frac{z + L/2}{\left[r^2 + (z + L/2)^2 \right]^{1/2}} \right].$$

У випадку дуже довгого ППС для вектор-потенціалу та B_φ маємо

$$A_z(L \rightarrow \infty) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + const,$$

$$B_\varphi(L \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Задача 4.4. Знайти векторний потенціал \vec{A} та напруженість магнітного поля \vec{H} , які створюються струмом I , що протікає по коаксіальному кабелю, рис. 4.9.

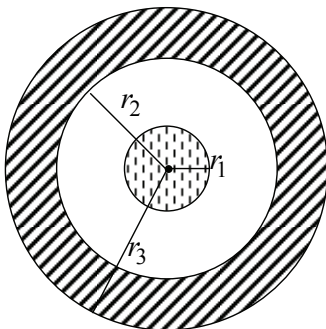


Рис. 4.9. Знаходження вектор-потенціалу та індукції МП, які створюються коаксіальним кабелем із струмом I

Розв'язання: Задача, як бачимо, характеризується аксіальною симетрією. Тому використовуємо циліндричну СК. $\vec{A} = \vec{A}(r)$, векторний потенціал не залежить від z та від полярного кута φ . Якщо вісь OZ направлена вздовж ППС, то не рівна нулеві буде лише одна компонента \vec{A} , а саме A_z .

Далі цю компоненту ми позначатимемо просто A . І тоді рівняння Пуассона в чотирьох областях простору мають вигляд

$$\text{при } 0 < r < r_1 \quad \nabla^2 A_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2},$$

$$\text{при } r_1 < r < r_2 \quad \nabla^2 A_2 = 0,$$

$$\text{при } r_2 < r < r_3 \quad \nabla^2 A_3 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi (r_3^2 - r_2^2)},$$

$$\text{при } r_3 < r < \infty \quad \nabla^2 A_4 = 0,$$

$$\text{де } j_1 = I / (\pi r_1^2), \quad j_2 = 0, \quad j_3 = I [r_3^2 - r_2^2], \quad j_4 = 0.$$

Розв'язки цих рівнянь такі:

$$A_1 = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2} + C_1 \ln r + C_2 \quad (0 < r < r_1),$$

$$A_2 = C_3 \ln r + C_4 \quad (r_1 < r < r_2),$$

$$A_3 = \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)} + C_5 \ln r + C_6 \quad (r_2 < r < r_3),$$

$$A_4 = C_7 \ln r + C_8 \quad (r_3 < r < \infty).$$

Значення констант інтегрування знаходимо з граничних умов. Тоді вектор-потенціал та магнітна індукція в першій області

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} - \frac{C_1}{r}.$$

Очевидно, що при $r = 0$ значення B_1 повинно бути кінцевим. Тобто $C_1 = 0$. Далі прийнемо значення вектор-потенціалу A_1 при $r = 0$ рівним нулеві, $A_1(0) = 0$. Це дає нам $C_2 = 0$. Тому, для A_1 та B_1 одержуємо

$$A_1 = -\mu_0 I r^2 / (4\pi r_1^2), \quad B_1 = \mu_0 I r / (2\pi r_1^2)$$

Для області $r_1 < r < r_2$ отримуємо

$$B_2 = -C_3 / r$$

З граничної умови для вектора \vec{B} ,

$$B_2(r_1) = B_1(r_1) = -\frac{C_3}{r_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad \text{знаходимо значення константи}$$

$$C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

А з умови неперервності векторного потенціалу при $r = r_1$ знаходимо C_4 :

$$C_4 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_1$$

Тому для векторного потенціалу та індукції МП в області $r_1 < r < r_2$ маємо

$$A_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Індукція в оболонці кабелю ($r_2 < r < r_3$) дорівнює

$$B_3 = -\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} - \frac{C_5}{r}.$$

З граничних умов $B_2(r_2) = B_3(r_2)$ знаходимо

$$C_5 = \frac{\mu_0 I r_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)},$$

$$C_6 = \frac{\mu_0 I r_3^2}{4\pi(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{\mu_0 I r_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Звідси

$$A_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r}{r_2} + 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right],$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}.$$

Використовуючи граничні умови при $r = r_3$ знаходимо векторний потенціал та індукцію магнітного поля в області ($r_3 < r < \infty$)

$$A_4 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = const, \quad B_4 = 0.$$

Задача 4.5. Знайти векторний потенціал та індукцію МП, які створюються елементарним струмом i [3].

Розв'язання: Виберемо форму елементарного струму у вигляді прямокутника зі сторонами l_1, l_2, l_3, l_4 , рис. 4.10.

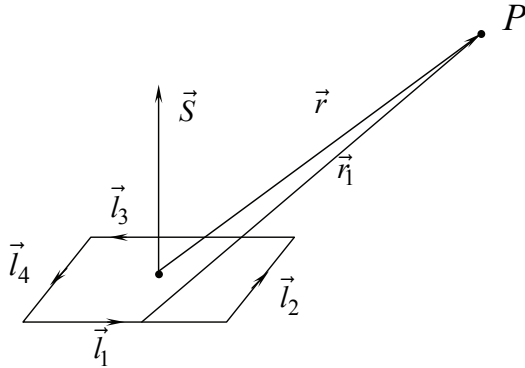


Рис. 4.10. Знаходження векторного потенціалу елементарного струму

Тоді, згідно з означенням (див. формулу (4.12а)),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{l_1 l_2 l_3 l_4} \frac{d\vec{l}}{r},$$

Сторони паралелограма (елементарного струму) набагато менші віддалі точки поля від відповідних сторін. Тому при інтегруванні одержуємо:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\frac{1}{r_1} \int_{l_1} d\vec{l} + \frac{1}{r_2} \int_{l_2} d\vec{l} + \frac{1}{r_3} \int_{l_3} d\vec{l} + \frac{1}{r_4} \int_{l_4} d\vec{l} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\frac{\vec{l}_1}{r_1} + \frac{\vec{l}_2}{r_2} + \frac{\vec{l}_3}{r_3} + \frac{\vec{l}_4}{r_4} \right), \end{aligned}$$

де r_1, r_2, r_3, r_4 – відділі від точки поля до середини відповідних сторін елементарного струму.

Враховуючи, що $\vec{l}_1 = -\vec{l}_3$, $\vec{l}_2 = -\vec{l}_4$ знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\vec{l}_1}{r_1} + \frac{\vec{l}_3}{r_3} &= \vec{l}_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right) = \vec{l}_1 \left(\frac{r_3 - r_1}{r_1 r_3} \right) \approx \frac{\vec{l}_1 (-\vec{l}_2 \cdot \vec{r})}{r^3} = -\frac{\vec{l}_1 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r})}{r^3} \\ \frac{\vec{l}_2}{r_2} + \frac{\vec{l}_4}{r_4} &= \vec{l}_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \vec{l}_2 \left(\frac{r_4 - r_2}{r_2 r_4} \right) = \frac{\vec{l}_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r})}{r^3} \end{aligned}$$

Рис. 4.11. пояснює ці обчислення

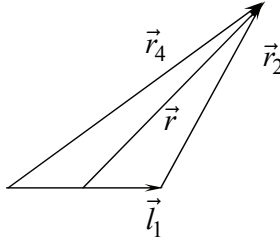


Рис. 4.11.

На основі очевидних перетворень

$$\begin{aligned} \vec{r}_4 &= \vec{l}_1 + \vec{r}_2, \\ r_4^2 &= l_1^2 + r_2^2 + 2\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2, \\ r_4^2 - r_2^2 &= (r_4 - r_2)(r_4 + r_2) = l_1^2 + 2\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2. \end{aligned}$$

Тому, нехтуючи доданками другого порядку малості по l_1 , знаходимо

$$\begin{aligned} r_4 - r_2 &= \frac{2\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2 + l_1^2}{r_4 + r_2} \approx \vec{l}_1 \cdot \vec{r} / r, \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} \cdot \left(\vec{l}_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}) - \vec{l}_1 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}) \right), \end{aligned}$$

З урахуванням формули (А.17)

$$\vec{l}_2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}) - \vec{l}_1 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}) = [\vec{r}, [\vec{l}_2, \vec{l}_1]] = [[\vec{l}_1, \vec{l}_2], \vec{r}],$$

та приймаючи до уваги, що $[\vec{l}_1, \vec{l}_2] = \vec{S}$ є вектором елементарної поверхні, яка охоплена струмом для векторного потенціалу, одержуємо

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i [\vec{S}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.64)$$

Величина $i\vec{S} = \vec{p}_m$ називається магнітним моментом елементарного струму.

Відтак для векторного потенціалу та індукції магнітного поля, які створюються магнітним моментом, маємо вирази:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m, \vec{r}]}{r^3}, \quad (4.65)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right\}. \quad (4.66)$$

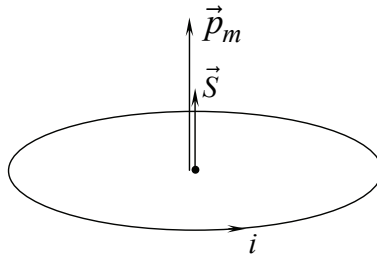


Рис. 4.12. Напрямок магнітного моменту утворює правий гвинт з напрямком струму в контурі

Формула (4.66) показує, що величина індукції магнітного поля магнітного моменту обернено пропорційна кубу віддалі точки поля від магнітного моменту. А величина індукції магнітного поля елемента струму, згідно із законом Біо-Савара, обернено пропорційна квадрату цієї віддалі.

Контрольні запитання і завдання

1. Як уводяться поняття векторного і скалярного потенціалів електромагнітного поля?
2. Обґрунтуйте рівняння Даламбера для векторного та скалярного потенціалів.
3. Що означає калібрувальна інваріантність полів?
4. Дати фізичну інтерпретацію розв'язку рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються.
5. Пояснити принцип причинності в класичній механіці та класичній електродинаміці.
6. Обґрунтувати вирази для потенціалів Ліенара-Віхерта, використовуючи метод параграфа 4.3.
7. З допомогою потенціалів Ліенара-Віхерта знайти електромагнітне поле рівномірно рухомої ЗЧ.
8. Проаналізувати властивості електромагнітного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки.
9. Обґрунтувати вирази для потенціалів Ліенара-Віхерта, базуючись на принципах теорії відносності.
10. Показати, що електричне поле рівномірно рухомої ЗЧ є непотенційним.
11. Які способи знаходження характеристик ЕМП Ви знаєте?
12. Детально опишіть відомі Вам способи знаходження характеристик ЕМП.

Розділ 5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ ТА ДИПОЛЬНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

5.1. Хвилеві рівняння для векторів поля \vec{E} та \vec{B} , механізм поширення електромагнітних хвиль

Розглянемо область простору, в якій відсутні вільні заряди та струми

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0$$

і скористаємося наступними двома рівняннями Максвелла для того, щоб знайти диференціальне рівняння, яке описує процес поширення електромагнітного поля в просторі й у часі:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\}. \quad (5.1)$$

Знайдемо спочатку похідну за часом від 2-го рівняння Максвелла системи (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (5.2)$$

Підставляючи в (5.2) похідну $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ з першого рівняння системи (5.1), одержуємо

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} \right). \quad (5.3)$$

Використовуючи формулу векторного аналізу $[\nabla, [\nabla, \vec{E}]] = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$, перепишемо (5.3)

$$-\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Оскільки густина заряду $\rho = 0$, то $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, і тоді з останнього одержуємо

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.4)$$

Це хвилеве рівняння для вектора напруженості електричного поля \vec{E} .

Аналогічно можна впевнитись, що хвильове рівняння для вектора \vec{B} має вигляд

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.5)$$

Ці хвильові рівняння (5.4) і (5.5) описують поширення електромагнітного поля в просторі й часі, зокрема розв'язком цих рівнянь є плоска електромагнітна хвиля.

Хвильове рівняння можна записати так:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

де $v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$, і як ми далі впевнимися, v – швидкість поширення електромагнітних хвиль у середовищі з діелектричною та магнітною проникністю ε і μ відповідно.

Система рівнянь Максвелла (5.1) дозволяє надати наглядної фізичної інтерпретації механізму поширення в просторі ЕМП.

Для цього розглянемо деяку точку поля, у якій створено певним чином електричне поле \vec{E}_1 . Оскільки в просторі немає вільних зарядів, електричне поле буде зменшуватись (бо немає зарядів, які б підтримували це поле).

Тоді вектор похідної $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ направлений протилежно \vec{E}_1 . Але згід-

но з рівнянням Максвелла для струмів зміщення, вектор $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ породжує магнітне поле, силові лінії якого утворюють правий гвинт з вектором $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$.

Значить, буде виникати вихрове магнітне поле з індукцією \vec{B}_1 , рис. 5.1. Силові лінії магнітної індукції \vec{B}_1 лежать в площині, перпенди-

кулярній вектору $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$. Поле \vec{B}_1 в околі початкової точки буде зменшу-

ватися, тому $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ направлено так, як показано на рис. 5.1. Але $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$, згідно із законом електромагнітної індукції, у свою чергу породжує ви-

хрове електричне \vec{E}_2 , силові лінії якого утворюють лівий гвинт з вектором $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$. Тому це поле \vec{E}_2 згідно з рівнянням $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ компенсує (зменшує) поле \vec{E}_1 в попередній точці простору.

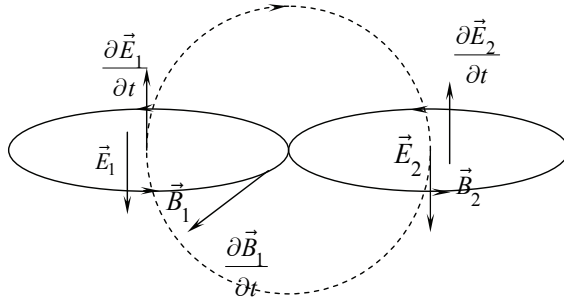


Рис. 5.1. Механізм поширення електромагнітних хвиль

Тобто в сусідній точці, що знаходиться нескінченно близько до першої, породжується поле \vec{E}_2 , а в попередній точці простору поле \vec{E}_1 знищується і т. д. Таким чином, на основі рівнянь Максвелла (5.1) стає зрозумілим механізм розповсюдження електромагнітних збурень (електромагнітних хвиль). У моделі, що ілюструється рисунком 5.1, поле розповсюджується в усіх напрямках. І у вакуумі цей процес нескінченний.

5.2. Розв'язок хвильових рівнянь у вигляді плоских хвиль. Швидкість поширення електромагнітних хвиль

Знайдемо розв'язок хвильового рівняння у вигляді плоскої хвилі. Хвильове рівняння для вектора напруженості електричного поля в декартовій системі координат має вигляд

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.6)$$

Якщо вважати, що електромагнітне поле поширюється тільки в одному напрямку, то попереднє рівняння спрощується:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Очевидно, що останнє рівняння еквівалентне формі

$$-v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.7)$$

Хвилеве рівняння (5.7) можна подати у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{E} = 0. \quad (5.8)$$

Для знаходження його розв'язку введемо нові змінні величини

$$\xi = t - \frac{x}{v}, \quad \eta = t + \frac{x}{v}. \quad (5.9)$$

Тоді старі змінні (величини x, t) зв'язані з новими ξ та η співвідношеннями

$$t = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad x = \frac{(\eta - \xi)v}{2}. \quad (5.10)$$

А оператори частинних похідних за новими змінними з урахуванням (5.10) дорівнюють

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(-\frac{v}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{v}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тобто з допомогою нових змінних одновимірне хвилеве рівняння (5.8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Як бачимо, у нових змінних хвилеве рівняння (5.7) має простіший вигляд; і, що важливо, одразу маємо очевидний розв'язок цього рівняння:

$$\vec{E}(\xi, \eta) = \vec{E}_1(\xi) + \vec{E}_2(\eta). \quad (5.12)$$

Більш детально розглянемо 1-й доданок

$$\vec{E}_1\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Виявляється, що цей розв'язок описує поширення ЕМ хвилі (або будь-якого електромагнітного збурення) у додатному напрямку вісі OX .

А розв'язок $\vec{E}_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ описує поширення хвилі у від'ємному напрямку вісі OX , причому \vec{E}_1 і \vec{E}_2 – довільні функції. Суттєво тут те, що вони залежать від x і t в такій комбінації, $\left(t - \frac{x}{v}\right)$ і $\left(t + \frac{x}{v}\right)$, як від аргументів.

Залежність деякої функції від комбінації змінних t , x як $(t - \frac{x}{v})$ – це теж саме, що і залежність від $(x - vt)$. Дійсно,

$$\vec{E}_1(t - \frac{x}{v}) = \vec{E}_1(-\frac{x - vt}{v}) = \psi(x - vt). \quad (5.13)$$

Щоб не виникало непорозумінь і недовіри до розв'язку хвильового рівняння у вигляді (5.13) розглянемо приклад.

Приклад 5.1. Безпосередньо впевнитись, що функція $\psi(x - vt)$ є розв'язком відповідного хвильового рівняння (5.7).

Розв'язання: Дійсно, друга похідна функції $\psi(x - vt)$ за координатою x дорівнює

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial(x - vt)} \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = \psi'(x - vt),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi''(x - vt),$$

а друга похідна за часом

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial(x - vt)} \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = \psi'(x - vt) \cdot (-v),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \psi''(x - vt) \cdot v^2.$$

Тобто, ми бачимо, що функція $\psi(x - vt)$ є розв'язком рівняння (5.7):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Таким чином, будь-яка функція, що залежить від комбінації t і x як від $(x - vt)$ або як $(t - \frac{x}{v})$, буде розв'язком хвильового рівняння.

Із розв'язку $\vec{E}_1(t - \frac{x}{v})$ очевидно, що для деякої фіксованої точки простору напруженість ЕП з часом змінюється.

З іншого боку, в довільний фіксований момент часу характеристика поля (наприклад, напруженість поля) в різних точках простору буде різна за величиною. Але вона буде мати теж саме значення для таких комбінацій t і x , для яких

$$t - \frac{x}{v} = \text{const}$$

або, що теж саме, коли комбінація змінних t та x задовольняє співвідношенню

$$x = vt + \text{const}.$$

Цей висновок можна сформулювати по-іншому: якщо в довільний момент часу t_1 в точці x_1 напруженість поля мала деяке значення E_1 , то таке саме значення поля буде спостерігатись в точці x_2 в наступний момент часу $t_2 = t_1 + \Delta t$, якщо тільки

$$x_2 - x_1 = \Delta x = v\Delta t,$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Таким чином, усі значення поля переміщуються вздовж вісі OX зі швидкістю v , рис. 5.2. Це означає, що сама функція $\vec{E}_1(t - \frac{x}{v})$ переміщується в просторі зі швидкістю v , тобто це – хвиля.

Тому можна дати таке означення хвилі.

Хвиля – це довільний фізичний процес, який описується фізичною величиною, яка залежить від таких комбінацій t і x : $(x - vt)$ або $(t - \frac{x}{v})$, – як від аргументу.

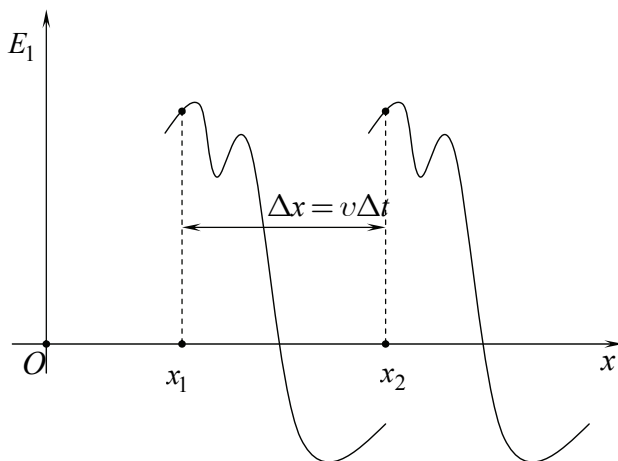


Рис. 5.2. Значення поля в точці x_2 в момент часу t_2 буде таким же, як і значення поля в точці x_1 в попередній момент часу $t_1 = t_2 - \Delta t$ в попередній точці простору $x_1 = x_2 - \Delta x$

Повертаючись до хвильових рівнянь (5.4), (5.7) або (5.11) можемо сказати, що їх розв'язок у вигляді $\vec{E}_1(t - \frac{x}{v})$ описує хвильовий процес, причому швидкість поширення дорівнює квадратному кореню із знаменника коефіцієнта, що стоїть перед $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ у хвильовому рівнянні (5.6).

Тобто $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ – це швидкість поширення електромагнітної хвилі в однорідному та ізотропному середовищі.

Тобто якщо ми маємо диференціальне рівняння вигляду

$$\nabla^2 \vec{E} - b^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

то відразу можна стверджувати, що розв'язком його може бути плоска хвиля, швидкість поширення якої дорівнює $v = \frac{1}{b}$.

Нагадаємо аналогію, коли тільки за виглядом диференційного рівняння можна визначити особливості руху фізичної системи. Так, якщо деякий процес описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} + ax = 0$, то його розв'язком будуть гармонічні незатухаючі коливання $x = A \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot t + \alpha)$, причому частота коливань $\omega = \sqrt{a}$.

5.3. Плоскі монохроматичні хвилі, та зв'язок між векторами \vec{E} і \vec{H} в плоскій ЕМ хвилі, що поширюється в однорідному та ізотропному діелектрику

Нехай у напрямку, що визначається ортом \vec{n} (вісь OX'), поширюється плоска монохроматична хвиля, рис. 5.3.

Згадаємо, що плоска хвиля це така хвиля, в якій вектор фізичної величини (вектор хвилі), наприклад \vec{E} , має одне і теж саме значення в будь-якій площині перпендикулярній швидкості \vec{v} хвилі. Тобто, хвильова поверхня являє собою площину. І згідно попереднього, вектор \vec{E} залежить від $t - \frac{x'}{v}$ як від аргументу, $\vec{E}(t - \frac{x'}{v})$.

Таким чином, вектор напруженості електричного поля плоскої монохроматичної ЕМ хвилі, \vec{E} , дорівнює

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \omega(t - \frac{x'}{v}) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \frac{\omega x'}{v}), \quad (5.14)$$

де ω – частота хвилі, \vec{E}_0 – амплітудне значення вектора напруженості монохроматичної хвилі.

Запишемо, чому дорівнює значення вектора \vec{E} в довільній точці A нашої системи координат XOY . Точка простору A визначається радіус-вектором \vec{r} .

Якщо ввести хвилевий вектор

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \cdot \vec{n}, \quad (5.15)$$

і оскільки $x' = \vec{n} \cdot \vec{r} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma$, де x, y, z – координати точки A , а α, β, γ – кути, що утворює напрямок розповсюдження хвилі (\vec{n}) відповідно з осями OX, OY, OZ , то фаза хвилі, яка розповсюджується вздовж напрямку \vec{n} , у точці A визначається так:

$$\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x'}{v} = \omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

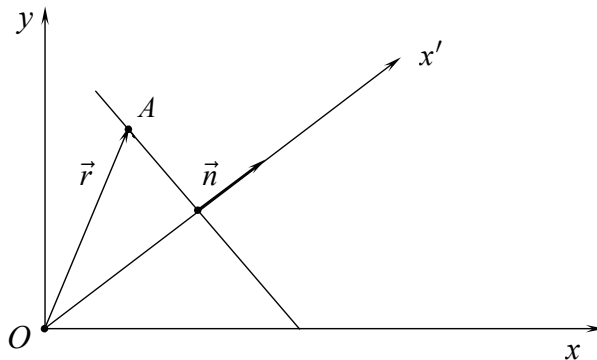


Рис. 5.3. Плоска хвиля поширюється в напрямку \vec{n}

Тоді для рівняння плоскої хвилі, яка поширюється в довільному напрямку \vec{n} , одержуємо

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$$

Дуже зручно подавати рівняння цієї плоскої монохроматичної хвилі для вектора \vec{E} у вигляді

$$\vec{E} = \text{Re} \left(\vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right).$$

Знак Re , як правило, не пишуть, вважаючи, що розглядається якраз реальна частина цього виразу. І тоді (5.14) переписеться так:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (5.16)$$

Це плоска монохроматична хвиля для вектора \vec{E} .

Тепер, користуючись рівняннями Максвелла, знайдемо зв'язок між векторами поля в плоскій монохроматичній хвилі. Оскільки хвильове рівняння для вектора \vec{B} має такий самий вигляд, як і для вектора \vec{E} , то розв'язком хвильового рівняння для \vec{B} (5.5) буде

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (5.17)$$

Знайдемо дивергенцію поля \vec{D} . Знаходження дивергенції зводиться до знаходження частинних похідних, і, враховуючи, що

$$\operatorname{div} \vec{a}(\psi) = \frac{d\vec{a}}{d\psi} \operatorname{grad} \psi,$$

одержуємо, якщо взяти за скалярну функцію ψ фазу хвилі $\psi = i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \\ &= \varepsilon \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0 e^{i \cdot \omega t} \cdot (-i \vec{k}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} = \varepsilon \varepsilon_0 (-i \vec{k} \vec{E}) = 0 \end{aligned}$$

Тобто, рівняння Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ дає таке співвідношення між хвильовим вектором \vec{k} та вектором \vec{E} :

$$-i(\vec{k} \vec{E}) = 0. \quad (5.18)$$

Аналогічно, використання рівняння $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ приводить до рівності

$$-i(\vec{k} \vec{B}) = 0. \quad (5.19)$$

А знаходження $\operatorname{rot} \vec{E}$ з використанням формули векторного аналізу

$$\operatorname{rot} \vec{a}(\psi) = [\nabla, \vec{a}(\psi)] = \left[\nabla \psi, \frac{d\vec{a}}{d\psi} \right]$$

дає

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -i \cdot [\vec{k}, \vec{E}].$$

Тобто, одержуємо

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i \cdot [\vec{k}, \vec{E}], \quad (5.20)$$

аналогічно, для ротора напруженості магнітного поля маємо

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i \cdot [\vec{k}, \vec{H}]. \quad (5.21)$$

Але згідно із законом електромагнітної індукції $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, а

$rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, тому після знаходження похідних за часом $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ та $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

векторів поля \vec{B} та \vec{D} , які визначаються формулами (5.16) (5.17), одержуємо алгебраїчні рівняння

$$-i[\vec{k}, \vec{E}] = -\mu\mu_0 i\omega\vec{H}, \quad (5.22)$$

$$-i[\vec{k}, \vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 i\omega\vec{E}. \quad (5.23)$$

Тоді з цих рівнянь отримуємо співвідношення між векторами поля в плоскій електромагнітній хвилі:

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k}, \vec{E}]}{\mu\mu_0\omega}, \quad \vec{E} = -\frac{[\vec{k}, \vec{H}]}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}. \quad (5.24)$$

Висновки.

1. В електромагнітній хвилі вектор напруженості електричного поля перпендикулярний хвильовому вектору ($\vec{E} \perp \vec{k}$):

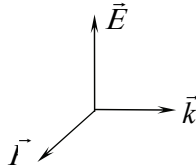
$$(\vec{k}\vec{E}) = 0,$$

де $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$.

2. Вектор \vec{H} також перпендикулярний хвильовому вектору \vec{k} ($\vec{B} \perp \vec{k}$):

$$(\vec{k}\vec{B}) = 0.$$

3. Вектор \vec{H} перпендикулярний \vec{E} , причому трійка векторів \vec{k} , \vec{E} та \vec{H} утворюють правий гвинт:



4. Зв'язок між значеннями напруженості електричного та магнітного полів електромагнітної хвилі знаходимо, використовуючи останню формулу (5.24),

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k}, \vec{E}]}{\mu_0\mu\omega},$$

$$H = \frac{1}{\mu\mu_0\omega} \frac{\omega}{v} E.$$

Але, оскільки $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, то

$$H = \frac{E\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu\mu_0 c} = E\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}},$$

і нарешті, маємо шуканий зв'язок

$$\sqrt{\mu\mu_0}H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E. \quad (5.25)$$

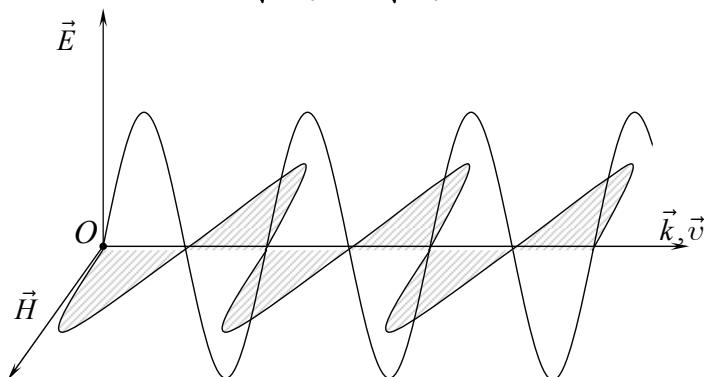


Рис. 5.4. Миттєве зображення («фотографія») плоскої гармонічної електромагнітної хвилі у вакуумі

Якщо хвиля поширюється у вакуумі, то

$$\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H.$$

Зауважимо ще раз: усі ці результати були отримані на основі рівнянь Максвелла.

5.4. Хвильовий пакет, групова та фазова швидкості. Співвідношення невизначеностей

Знайдемо результат суперпозиції плоских хвиль, хвильові вектори яких лежать в інтервалі $2\Delta k$ від $k_0 - \Delta k$ до $k_0 + \Delta k$, де k_0 – центральне значення хвильового вектора.

Іншими словами, нам необхідно знати значення такого інтегралу

$$\psi = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} C(k) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dk, \quad (5.26)$$

де $C(k)$ – амплітуда хвилі, хвильовий вектор якої дорівнює k .

У більшості фізичних явищ, у яких проявляється взаємодія електромагнітних хвиль з речовиною, частота є функцією хвильового вектора. Ця залежність частоти від k , $\omega(k)$ (або залежність фазової швидкості хвилі від довжини хвилі, $v_{\phi}(\lambda)$) називається законом дисперсії.

Розкладемо цю функцію в ряд в околі центрального значення хвильового вектора k_0

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \cdot \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \cdot \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_0} + \dots$$

і обмежимося у цьому розкладі двома доданками. Підставимо такий закон дисперсії $\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}$ в (5.26). А надалі будемо

вважати, що амплітуди сукупності хвиль приблизно однакові, а хвиля розповсюджується в напрямку вісі OX . У результаті (5.26) набуває вигляду

$$\psi = C \cdot \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i \left(\omega_0 \cdot t + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \cdot t - kx \right)} \cdot dk. \quad (5.27)$$

Уведемо нову змінну $k - k_0 = \xi$ та позначення $\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = g$.

Тоді після інтегрування виразу (5.27) одержуємо

$$\begin{aligned} \psi &= C(k) \cdot \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)} \cdot e^{i \cdot \xi \cdot (g \cdot t - x)} d\xi = \\ &= C(k) \cdot e^{i(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i \cdot \xi \cdot (g \cdot t - x)} d\xi = \\ &= C \cdot e^{i(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)} \left. \frac{e^{i \cdot \xi \cdot (g \cdot t - x)}}{i(g \cdot t - x)} \right|_{-\Delta k}^{\Delta k}. \end{aligned}$$

Скориставшись формулами

$$\begin{aligned} shz &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \sin z &= -i \cdot sh(iz), \end{aligned}$$

одержуємо результат суперпозиції сукупності плоских «монохроматичних» ЕМ хвиль, хвилеві вектори яких лежать в дуже вузькому інтервалі $2\Delta k \ll k_0$:

$$\psi(x, t) = 2C \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{\sin[\Delta k(gt - x)]}{\Delta k(gt - x)} \cdot \Delta k. \quad (5.28)$$

Результат, що ми одержали розуміють так. Множник $2C \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$ слід розглядати як монохроматичну хвилю частоти ω_0 , а співмножник

$$\frac{\sin(\Delta k \cdot (gt - x))}{\Delta k \cdot (gt - x)} \cdot \Delta k \quad (5.29)$$

– це амплітуда хвилі, яка, як видно з означення (5.29), залежить і від координат, і від часу.

Тобто в результаті суперпозиції дуже великого числа плоских монохроматичних хвиль, хвилеві вектори яких лежать в інтервалі $2\Delta k$, отримано «монохроматичну» хвилю $2C\Delta k \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$ з модульованою певним законом амплітудою.

З метою більш детального аналізу одержаного результату введемо позначення

$$u = \Delta k \cdot (gt - x).$$

Виявляється, що амплітуда хвилі, одержаної в результаті суперпозиції, (5.28), модульована функцією

$$\frac{\sin u}{u},$$

що залежить від u .

Відзначимо перш за все властивості функції $\frac{\sin u}{u}$:

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1, \text{ якщо } u \rightarrow 0;$$

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 0, \text{ якщо } u \rightarrow \pm\pi; \pm 2\pi \dots$$

Тобто, модульована законом $\frac{\sin u}{u}$ «монохроматична хвиля» (5.28)

– результат суперпозицій монохроматичних хвиль, хвилеві вектори яких лежать у вузькому інтервалі $\Delta k \ll k_0$. Результат суперпозицій (5.28) якісно можна подати з допомогою рис. 5.5.

Всередині огинаючої $\frac{\sin u}{u}$ спостерігається з частотою ω_0 хвиля, що біжить.

Фаза цієї хвилі $\omega_0 t - k_0 x$ буде мати певне, одне і те ж значення в різних точках простору й у різні моменти часу, але тільки при таких значеннях x і t , що задовольняють умові $\omega_0 t - k_0 x = \text{const}$.

Тобто, швидкість з якою «біжить» фаза цієї хвилі визначається з умови $\omega_0 t - k_0 x = \text{const}$.

Нагадаємо, що фазовою швидкістю хвилі називається швидкість переміщення деякого значення фази.

Звідси отримуємо значення фазової швидкості

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}. \quad (5.30)$$

Оскільки $\Delta k \ll k_0$, то в межах інтервалу Δk можна вважати, що $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Розв'язок показує, що в результаті суперпозиції монохроматичних хвиль, хвильові вектори яких лежать в інтервалі $\Delta k \ll k_0$, утворюється так званий хвильовий пакет, рис. 5.5.

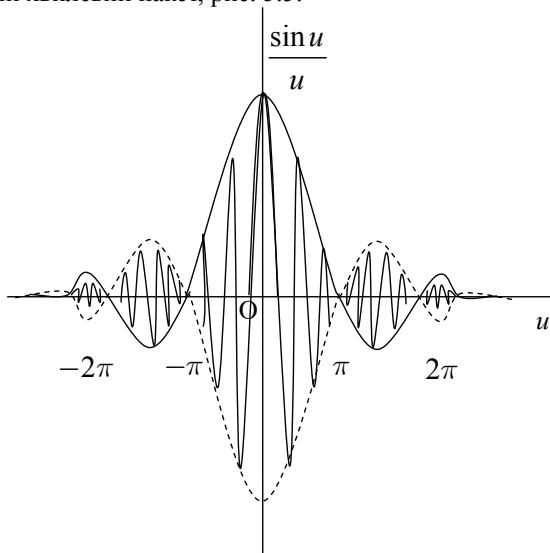


Рис. 5.5. У результаті суперпозиції монохроматичних хвиль утворюється хвильовий пакет, якщо $\Delta k \ll k_0$

Але швидкість переміщення хвильового пакету (швидкість переміщення огинаючої $\frac{\sin u}{u}$) визначається тепер з умови

$$u = \Delta k(gt - x) = \text{const}.$$

Тобто швидкість групи хвиль, або групова швидкість, дорівнює

$$v_{gp.} = \frac{dx}{dt} = g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}.$$

Знайдемо зв'язок між груповою та фазовою швидкостями:

$$v_{gp.} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{d}{dk}(v_\phi \cdot k) = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk}.$$

Оскільки $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$\frac{dv_\phi}{dk} = \frac{\frac{dv_\phi}{d\lambda}}{\frac{d\lambda}{dk}} = \frac{\frac{dv_\phi}{d\lambda}}{\frac{-2\pi}{\lambda^2}},$$

І таким чином, формулу для групової швидкості подають у вигляді

$$v_{gp.} = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}. \quad (5.31)$$

Якщо в деякому середовищі залежність фазової швидкості від довжини хвилі така, що $\frac{dv_\phi}{d\lambda} > 0$ ($\frac{dv_\phi}{d\nu} < 0$, $\frac{dn}{d\nu} > 0$, $\frac{dn}{d\lambda} < 0$, де n – показник заломлення ЕМ хвилі, ν – частота ЕМ хвилі), то говорять що спостерігається нормальна дисперсія.

Як видно з формули (5.31), групова швидкість може бути більша або менша за фазову швидкість, або ж дорівнювати нулю.

Якщо другий доданок в (5.31) $-\lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}$ більший за величину фазової швидкості v_ϕ , то $\vec{v}_{gp.} \uparrow \downarrow \vec{v}_\phi$ і $v_{gp.} < 0$.

При від'ємному значенню групової швидкості пакет (група хвиль) рухається в сторону, протилежну напрямку поширення хвиль, які власне й утворюють хвильовий пакет. Середовища, у яких $\vec{v}_{gp.} \uparrow \downarrow \vec{v}_\phi$, називаються лівими.

Існує графічний спосіб знаходження групової швидкості за кривою дисперсії $v_\phi(\lambda)$. З рис. 5.5а видно, що відрізок, який відсікається

на осі ординат дотичною до кривої $v_\phi(\lambda)$, проведеною в будь-якій точці цієї кривої, якраз і дорівнює $v_{gp} = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}$ [28, 422].

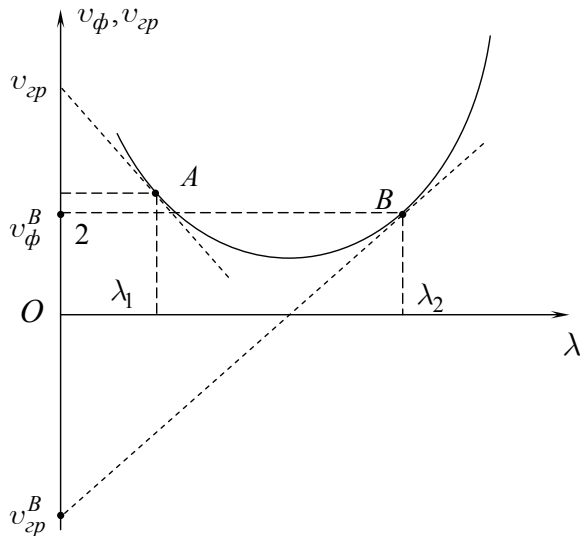


Рис. 5.5а. Ілюстрація способу знаходження групової швидкості по графіку $v_\phi(\lambda)$

Таким чином, з аналізу рис. 5.5 видно, що довжина хвильового пакету Δx може бути утворена суперпозицією гармонічних хвиль суцільного спектру, якщо інтервал хвильових векторів цих хвиль дорівнює Δk . За повздовжні розміри хвильового пакету (його просторові розміри) візьмемо його розміри між першими мінімумами (див. рис. 5.5.).

Зв'язок між розмірами пакету Δx і довжиною інтервалу Δk

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi. \quad (5.32)$$

Це співвідношення випливає з наступних очевидних рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta k(gt - x_1) &= \pi \\ \Delta k(gt - x_2) &= -\pi' \end{aligned}$$

де $\Delta x = x_2 - x_1$.

Таким чином, не можна побудувати чи створити хвильове поле так, щоб воно мало обмежені розміри в просторі й у той же час характеризувалось точним значенням довжини хвилі ($\Delta k = 0$).

Якщо монохроматичні хвилі взяті з дуже малого інтервалу Δk , то виходить, що просторові розміри хвильового пакету Δx дуже великі:

$$\Delta x \approx \frac{2\pi}{\Delta k}.$$

Чим вузкий хвилевий пакет (менші розміри Δx), тим з більшого інтервалу Δk слід брати сукупність монохроматичних хвиль, щоб створити таку вузьку групу хвиль.

Монохроматична хвиля – це хвиля, яка має точно визначену частоту (довжину хвилі) та безмірну протяжність в просторі:

$$\Delta k \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow \infty.$$

Якщо тепер ми зафіксуємо якусь точку простору, то пакет буде спостерігатися нами протягом певного проміжку часу. Виявляється, що тривалість у часі хвильового пакету пов'язана з інтервалом частот монохроматичних хвиль, з яких утворюється цей пакет, таким співвідношенням:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi, \quad (5.33)$$

яке отримуємо з таких рівнянь:

$$\Delta k(gt_2 - x) = \pi$$

$$\Delta k(gt_1 - x) = -\pi'$$

тут $\Delta t = t_2 - t_1$.

Тривалість Δt хвильового пакету й інтервал частот монохроматичних хвиль, з яких складається пакет, пов'язані обернено пропорційною залежністю:

$$\Delta t \approx \frac{2\pi}{\Delta \omega}. \quad (5.34)$$

Тобто чим менша тривалість пакету, тим більший інтервал частот монохроматичних хвиль необхідно взяти для створення усього пакету. Тому для створення короткого радіолокаційного імпульсу необхідно мати дуже широку полосу пропускання підсилювачів.

Іншими словами, для того, щоб спостерігати хвилевий пакет дуже короткий інтервал часу, треба взяти суперпозицію дуже широкого спектру частот монохроматичних хвиль, і навпаки.

Зв'язок між тривалістю збурення Δt та шириною спектра частот $\Delta \omega$

$$\Delta \omega \approx \frac{2\pi}{\Delta t}$$

особливо просто ілюструється спостереженням наслідків комутаційних процесів в електротехнічних або радіотехнічних пристроях. Наприклад, при вмиканні чи вимиканні споживачів електроенергії в мережі в широкому інтервалі радіочастот прослухується результат такого вимикання.

Співвідношення (5.32) (5.33)

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi$$

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi$$

називаються **класичними співвідношеннями невизначеностей**.

Звертає на себе цікавий спосіб одержання співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Для цього обидва класичних співвідношення (5.32) і (5.33) слід помножити на постійну Планка \hbar . У зв'язку з цим можна зробити висновок, що, можливо, квантовий опис фізичних систем зумовлений якраз безальтернативним способом пізнання, способами та засобами вимірювання, використанням ідеалізованих об'єктів (монохроматична хвиля, точкова частинка тощо).

5.5. Заломлення та відбивання ЕМ хвиль на межі поділу двох середовищ. Формули Френеля

Розглянемо відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі на межі поділу двох діелектриків, які характеризуються діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 . Будемо вважати, що ці речовини не магнітні ($\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Нехай на межу поділу падає плоска електромагнітна хвиля

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

тоді відбита хвиля описується напруженістю електричного поля \vec{E}^r :

$$\vec{E}^r = \vec{E}_0^r \cdot e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})},$$

а заломлена хвиля описується вектором \vec{E}^d :

$$\vec{E}^d = \vec{E}_0^d \cdot e^{i(\omega_d t - \vec{k}_d \cdot \vec{r})},$$

де ω , ω_r , ω_d – частоти падаючої, відбитої та заломленої електромагнітної хвилі, а $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$; $\vec{k}_r = \frac{\omega_r}{v_r} \vec{n}_r$; $\vec{k}_d = \frac{\omega_d}{v_d} \vec{n}_d$ – хвильові вектори, від-

повідно, падаючої, відбитої та заломленої електромагнітних хвиль.

Будемо вважати, що радіус-вектор, який визначає точку падіння променя, лежить у площині поділу 2-х середовищ, рис. 5.6.

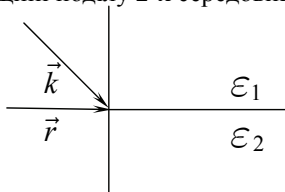


Рис. 5.6. Радіус-вектор, \vec{r} , який визначає точку падіння променя, лежить у площині поділу 2-х середовищ

Для обґрунтування законів заломлення та відбивання використовують граничні умови для векторів поля. Зокрема відомо (Розділ 2), що тангенціальна складова вектора \vec{E} зберігається при переході через межу поділу 2-х середовищ:

$$E_{\tau} + E_{\tau}^r = E_{\tau}^d,$$

що приводить до співвідношення

$$E_{0\tau} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + E_{0\tau}^r \cdot e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = E_{0\tau}^d \cdot e^{i(\omega_d t - \vec{k}_d \cdot \vec{r})}. \quad (5.35a)$$

Щоб його проаналізувати, тобто знайти умови, при яких попереднє співвідношення має місце, розглянемо подібну алгебраїчну рівність

$$a \cdot e^{i\omega t} + b \cdot e^{i\omega_r t} = c \cdot e^{i\omega_d t},$$

де a, b, c – деякі константи

Знайдемо похідну за часом

$$i \cdot \omega \cdot a \cdot e^{i\omega t} + i \cdot \omega_r \cdot b \cdot e^{i\omega_r t} = i \cdot \omega_d \cdot c \cdot e^{i\omega_d t}$$

і підставимо в цю рівність значення $c e^{i\omega_d t}$:

$$i \cdot \omega \cdot a \cdot e^{i\omega t} + i \cdot \omega_r \cdot b \cdot e^{i\omega_r t} = i \cdot \omega_d \cdot a \cdot e^{i\omega t} + i \cdot \omega_d \cdot b \cdot e^{i\omega_r t},$$

перепишемо останню рівність так:

$$i \cdot a \cdot e^{i\omega t} (\omega - \omega_d) = i \cdot b \cdot e^{i\omega_r t} (\omega_d - \omega_r)$$

Як бачимо, при довільному t рівність (5.35a) буде мати місце лише при умові

$$\omega = \omega_r.$$

Аналогічно можна показати, що (5.35a) буде справедливим тільки при $\omega = \omega_d$.

Таким чином, з граничної умови для тангенційної складової вектора \vec{E} , одержуємо наступне.

1. Частота заломленої та відбитої хвилі збігається з частотою падаючої хвилі: $\omega = \omega_r = \omega_d$

$$2. \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_d \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

Це означає, що вектори \vec{k} , \vec{k}_r , \vec{k}_d лежать в одній площині.

Розглянемо більш детально останнє співвідношення, але при цьому (для очевидності результату) радіус-вектор \vec{r} виберемо перпендикулярним \vec{k} , тоді $\vec{k} \cdot \vec{r} = 0$. Тому $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_d \cdot \vec{r} = 0$. Значить і хвилеві вектори відбитої та заломленої хвилі перпендикулярні \vec{r} .

Тобто падаючий, відбитий та заломлений промені лежать в одній площині.

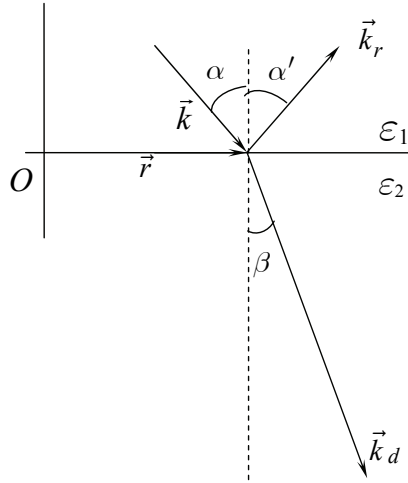


Рис. 5.7. Відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі на межі поділу двох середовищ

Якщо радіус-вектор \vec{r} вибрати в напрямку вісі OX (дивись рис. 5.7), то маємо низку рівнянь:

$$\begin{aligned}
 k^x \cdot r_x &= k_r^x \cdot r_x = k_d^x \cdot r_x, \\
 k \cdot \sin \alpha &= k_r \cdot \sin \alpha' = k_d \cdot \sin \beta, \\
 \frac{\omega}{v} \cdot \sin \alpha &= \frac{\omega_r}{v_r} \cdot \sin \alpha' = \frac{\omega_d}{v_d} \cdot \sin \beta. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

З останнього рівняння одержуємо ряд законів геометричної оптики:

$$v = v_r, \quad \alpha = \alpha'.$$

Тобто швидкість поширення відбитої ЕМ хвилі збігається зі швидкістю падаючої хвилі. Оскільки $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, то $v = v_r = v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$.

Кут падіння дорівнює куту відбивання: $\alpha = \alpha'$.

І, нарешті, з (5.35) впливає закон заломлення світла:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v_d} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}, \quad (5.36)$$

де n_{21} – це відносний показник заломлення, а $v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}$ – швидкість поширення заломленої хвилі.

Таким чином, ми одержали закон відбивання та заломлення світла як наслідок рівнянь Максвелла.

Співвідношення (5.35) і (5.36) ми одержали з умови $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_d \cdot \vec{r}$. Але ця умова, якщо уважно подивитися на неї, задовольняється не тільки $k \cdot \sin \alpha = k_d \cdot \sin \beta$, а і рівністю

$$k \cdot \sin \alpha = k_d \cdot \sin(\pi - \beta). \quad (5.36a)$$

Це означає, що хвильовий вектор заломленої хвилі \vec{k}_d може бути направлений так, як це показано на рис. 5.7а.

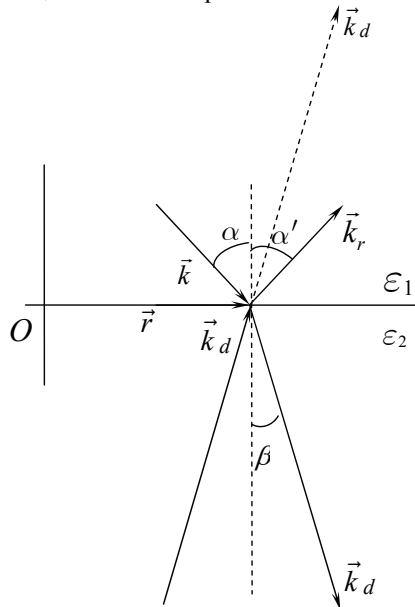


Рис. 5.7а. Умови (5.35а) і (5.35) у принципі допускають існування «заломленої» ЕМ хвилі, фазова швидкість якої направлена з другого середовища до межі поділу двох діелектриків

Тобто класична електродинаміка не заперечує можливого існування ходу заломленого променя, як це зображено на рис. 5.7а. Це означає, що заломлена хвиля поширюється в другому середовищі в напрямку до межі поділу, а не від межі поділу цих двох діелектриків.

«Звідки ми знаємо, що заломлена хвиля йде вниз, а не вгору? Це теж привноситься в рішення задачі ззовні й пов'язане з інтуїтивним переконанням, що групова швидкість направлена так само, як і фазова» [28, 394].

Середовища, або речовини, у яких фазова і групова швидкості ЕМ хвилі направлені протилежно одна одній, називаються «лівими». Їх ще називають середовищами з від'ємним показником заломлення.

Оскільки напрям переносу енергії ЕМ хвилі визначається вектором Пойнтінга, а згідно з теоремою Леонтовича швидкість переносу енергії будь-якої хвилі залежить від групової швидкості, то в лівому середовищі напрям хвильового вектора прямо протилежний вектору Пойнтінга.

Тобто характерною особливістю поширення хвиль у лівих середовищах є те, що вектори \vec{k} , \vec{E} і \vec{H} утворюють ліву трійку, або, що те ж саме, групова швидкість у будь-якій точці лівого середовища антипаралельна фазовій швидкості [29].

Поняття від'ємного показника заломлення виникло з наступних міркувань.

Потік енергії, що переноситься хвилею, визначається вектором Пойнтінга \vec{S} , формула (3.8а). Вектор \vec{S} у відповідності до (3.8а) утворює з векторами \vec{E} і \vec{H} праву трійку.

Виходячи з рівнянь Максвелла, ми покажемо, що вектори \vec{k} , \vec{E} і \vec{H} пов'язані співвідношеннями (5.24)

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k}, \vec{E}]}{\mu\mu_0\omega}, \quad \vec{E} = -\frac{[\vec{k}, \vec{H}]}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}.$$

З цих рівнянь видно, що при $\varepsilon > 0$ і $\mu > 0$ вектори \vec{k} , \vec{E} і \vec{H} утворюють праву трійку векторів.

Якщо припустити, що $\varepsilon < 0$ і $\mu < 0$, то \vec{k} , \vec{E} і \vec{H} , згідно з формулами (5.24), утворюють ліву трійку векторів, тобто **напрямок фазової швидкості, що за напрямком збігається з напрямком хвильового вектора \vec{k} , буде протилежним напрямку поширення енергії (сигналу) електромагнітної хвилі**. Це означає, що в таких середовищах групова швидкість електромагнітної хвилі антипаралельна фазовій.

Тому в правих речовинах вектори \vec{S} і \vec{k} направлені в один бік, а в лівих – у взаємопротилежні. Оскільки вектор \vec{k} збігається за напрямком з фазовою швидкістю, то ясно, чому ліві речовини мають показник заломлення $n < 0$. Однак не слід розуміти це буквально. Якщо і $\varepsilon < 0$, і $\mu < 0$, то $n^2 = \varepsilon\mu > 0$, а значить, і показник заломлення $n = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}$. Але все одно вважається, що ми маємо справу з лівим середовищем, для якого показник заломлення від'ємний. Суть не в знаку n , а в тому, що в лівих середовищах $\vec{v}_{gp} \uparrow \downarrow \vec{v}_\phi$.

Щоб уникнути цієї термінологічної непослідовності В. Веселаго [29] запропонував ліві середовища, для яких $\vec{S} \uparrow \downarrow \vec{k}$ ($\vec{v}_{gp} \uparrow \downarrow \vec{v}_\phi$), характеризувати правизною $p = -1$.

На рис. 5.76 показаний напрям хвильового вектора \vec{k}_d та вектора Пойнтинга \vec{S} в лівому середовищі при падінні ЕМ хвилі на межу поділу правого та лівого діелектрика.

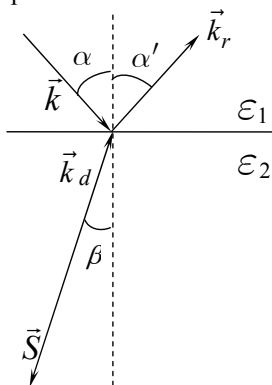


Рис. 5.76. Хід заломленого променя при переході від правого до лівого середовища

Тоді звичайний закон заломлення (формула Снеліуса) (5.36) потребує уточнення, якщо n_1 та n_2 мають різні знаки.

На межі поділу будь-яких двох середовищ формула Снеліуса має вигляд [29]:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v_d} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = \frac{p_2}{p_1} \sqrt{\left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right|}, \quad (5.366)$$

де p_2 і p_1 – правизна другого й першого середовищ відповідно, $p = +1$ для правої речовини і $p = -1$ – лівої.

Оскільки при обґрунтуванні геометричних законів ми не робили ніяких припущень відносно амплітуд електромагнітних хвиль і значень їх фаз, то ці геометричні закони відбивання й заломлення мають місце для електромагнітної хвилі довільної поляризації. Але амплітудні значення заломленої та відбитої хвилі залежать від поляризації падаючої хвилі.

Тому обґрунтуємо зараз формули Френеля, які визначають коефіцієнт відбивання та пропускання електромагнітної хвилі при падінні її на межу поділу двох діелектриків.

Нехай на межу поділу середовища падає плоска електромагнітна хвиля, поляризована в площині падіння (p -поляризація), рис. 5.8.

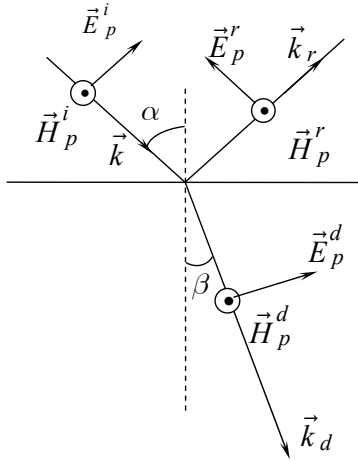


Рис. 5.8. Відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі p -поляризації

Виходячи з граничних умов для векторів поля \vec{E} і \vec{H} ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $H_{1n} = H_{2n}$), знаходимо

$$E_p^i \cdot \cos \alpha - E_p^r \cdot \cos \alpha = E_p^d \cdot \cos \beta.$$

Оскільки $\sqrt{\mu\mu_0} \cdot H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E$, то з граничної умови для вектора \vec{H} , $H_{1n} = H_{2n}$, маємо

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_p^i + \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_p^r = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_p^d.$$

З другої умови знаходимо

$$E_p^d = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} (E_p^i + E_p^r).$$

Підставимо в першу умову

$$\cos \alpha (E_p^i - E_p^r) = \cos \beta \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} (E_p^i + E_p^r),$$

$$E_p^r \cdot \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \cos \beta + \cos \alpha \right) = E_p^i \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \cos \beta + \cos \alpha \right).$$

Тому амплітудний коефіцієнт відбиття дорівнює

$$R_p = \frac{E_p^r}{E_p^i} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}}{\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cdot \cos \beta + \cos \alpha}.$$

Ураховуючи геометричний закон заломлення $\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ і тригонометричні формули подвійного кута та різниці й суми синусів кутів α і β , одержуємо вираз для амплітудного коефіцієнту відбиття:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}. \quad (5.37)$$

Аналогічно знаходимо й амплітудний коефіцієнт заломлення (пропускання)

$$D_p = \frac{E_p^d}{E_p^i} = \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}. \quad (5.38)$$

Для електромагнітної хвилі s – поляризації знаходимо (**Задача 5.1**) вирази для коефіцієнтів відбиття та пропускання (формули Френеля):

$$R_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (5.39)$$

$$D_s = \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Висновки.

1. Як видно з виразу для коефіцієнтів D_p і D_s , при довільному значенні кутів α і β ці коефіцієнти залишаються додатними.

Це означає, що падаюча й заломлена хвилі мають однакову фазу (немає зміни фаз при заломленні хвилі).

2. Навпаки, для хвилі s -поляризації амплітудний коефіцієнт відбиття при $\alpha > \beta$ ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), знак R_s від'ємний, **тобто фаза відбитої хвилі відрізняється від фази падаючої хвилі на π (втрата півхвилі)**.

3. Графіки залежності амплітудних коефіцієнтів відбиття R_s та R_p від величини кута падіння мають вигляд, зображений на рис. 5.9.

4. Амплітудний коефіцієнт відбиття $R_p \rightarrow 0$ при $(\alpha + \beta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

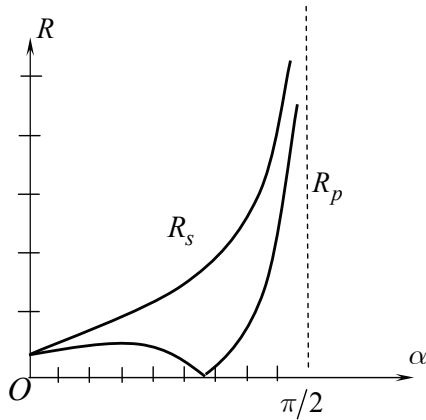


Рис. 5.9. Приблизна залежність амплітудних коефіцієнтів відбиття R_s та R_p від величини кута падіння

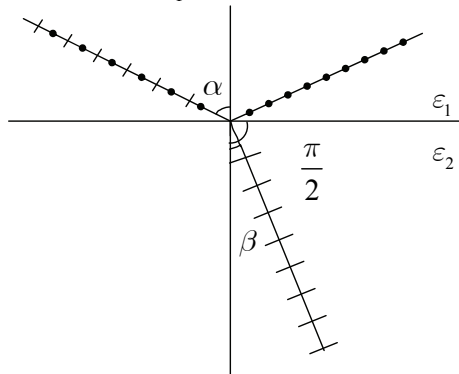


Рис. 5.10. Ілюстрація і пояснення закону Брюстера

Це означає, що коли на межу поділу 2-х середовищ падає хвиля p -поляризації і умова $(\alpha + \beta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ має місце, то практично відбитий промінь не спостерігається.

У цьому випадку, якщо на межу поділу двох середовищ падає неполяризоване світло, то у відбитому промені будемо спостерігати поляризоване світло (s -поляризація).

Кут падіння, при якому в ідеальному варіанті відбите світло повністю поляризоване, називається кутом Брюстера. Неважко впевнитися, що при цьому, рис. 5.10, маємо закон Брюстера:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n. \quad (5.40)$$

5.6. Потенціали, що запізнюються у хвильовій зоні. Поняття про хвильову зону

Знайдемо потенціали, що запізнюються, $\varphi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ в точках, значно віддалених від заряджених частинок та струмів. Розглянемо об'єм V' , у якому рухаються заряджені частинки, рис. 5.11.

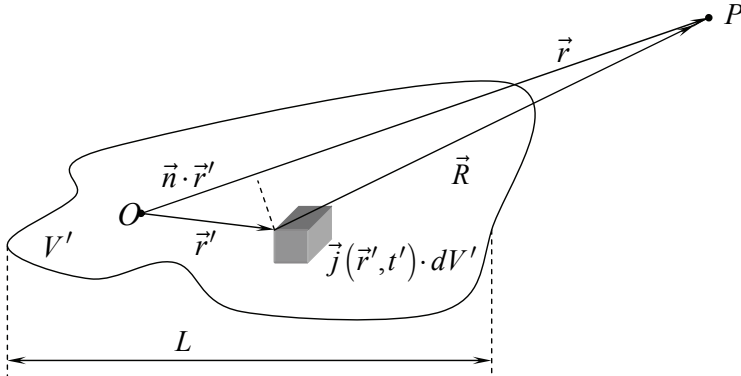


Рис. 5.11. Пояснення щодо знаходження потенціалів у хвильовій зоні

З розв'язку рівняння Даламбера випливає, що векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ в точці поля, що визначається радіус-вектором \vec{r} , у момент часу t дорівнює

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV', \quad (5.41)$$

де \vec{r}' – радіус-вектор, що визначає положення об'ємчика dV' , у якому густина струму в попередній момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$ дорівнює \vec{j} , $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – віддаль точки поля P від об'ємчика dV' .

Уведемо для одиничного орта в напрямку \vec{r} позначення $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$.

З рис. 5.11 видно, що на великих відстанях точок поля від об'єму V' , $R \approx r - \vec{n} \cdot \vec{r}'$.

У тому випадку, коли \vec{r} набагато більше розмірів системи (розміри електродинамічної системи мають величину порядку $L \approx \vec{n} \cdot \vec{r}'$), тобто коли $r \gg \vec{n} \cdot \vec{r}'$, або коли $r \gg L$, величиною $\vec{n} \cdot \vec{r}'$ можна знехтувати порівняно з r в знаменнику підінтегрального виразу (5.41). Тоді $R \approx r$, а вираз для векторного потенціалу набуває вигляду

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - r/c + \vec{n} \cdot \vec{r}'/c)}{r} \cdot dV'. \quad (5.42)$$

Але в чисельнику підінтегрального виразу (5.42) величиною $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$, взагалі кажучи, знехтувати ми не можемо, тому що має значення не відносна величина $\frac{r}{c}$ чи $\frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$, а те, наскільки змінюються самі ρ та \vec{j} за час $\frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$.

Величина

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} = \tau$$

називається власним часом запізнення, а величина r/c називається часом запізнення всієї системи. Як бачимо, власний час запізнення – це час, який необхідний електромагнітним збуренням (сигналу) для поширення їх через усю електродинамічну систему.

Власним часом запізнення в (5.42) можна знехтувати тільки тоді, коли за цей час розподіл зарядів і струмів в електродинамічній системі суттєво не зміниться.

Очевидно, що розподіл зарядів і струмів у системі зміниться суттєво, коли за час власного запізнення заряди пройдуть віддаль, за величиною співрозмірну з розмірами самої системи L .

І тому величиною $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ можна знехтувати тільки тоді, коли за цей час заряди змістяться на віддаль, дуже малу порівняно з розмірами електродинамічної системи L .

Коли ж реалізується така умова? Якщо ЗЧ рухаються зі швидкістю \vec{v} , то за час власного запізнення τ вони пройдуть відстань $v \frac{L}{c}$ (оскільки $\frac{L}{c} \approx \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$). Тому конфігурація системи суттєво не зміниться при умові

$$v \frac{L}{c} \ll L, \text{ або при } \frac{L}{v} c \gg L. \quad (5.43)$$

Тобто, якщо за час власного запізнення заряди пройдуть шлях, набагато менший за розміри самої системи (умова квазістаціонарності),

величиною $\frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$ можна знехтувати у виразі (5.42).

Умову (5.43) також можна інтерпретувати наступним чином:

1) швидкість руху ЗЧ значно менша швидкості світла, $v \ll c$;

2) якщо ж рух ЗЧ в системі V' квазіперіодичний, а період руху (коливань) дорівнює T ($T \approx \frac{L}{v}$), то доданком $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ можна знехтувати,

тоді, коли $T \gg \tau$, $\left(\frac{L}{v} \gg \frac{L}{c}\right)$, де τ – власний час запізнення, T – час

за який розподіл зарядів і струмів змінюється суттєво (період коливань, змін);

3) остання умова – $T \gg \tau$, або, що те ж саме, $\frac{L}{v} \gg \frac{L}{c}$, може бути записана у вигляді

$$\lambda \gg L,$$

де $\lambda \sim T \cdot c$ $\left(\lambda \sim \frac{L}{v} \cdot c\right)$ – довжина хвилі, що відповідає квазіперіодичному процесові в системі.

Таким чином, по суті, ми маємо **чотири різні формулювання умови квазістаціонарності** і умов, коли можна знехтувати величиною $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ в підінтегральному виразі для потенціалів, що запізнюються. Нагадаємо ще раз ці формулювання умови квазістаціонарності:

1) $v \frac{L}{c} \ll L$ – віддаль, яку проходять ЗЧ за власний час запізнення **набагато менша ніж розміри системи;**

2) $v \ll c$, швидкість руху ЗЧ в електродинамічній системі **набагато менша швидкості світла;**

3) $\left(\frac{L}{v} \gg \frac{L}{c}\right)$, або $T \gg \tau$ – **період квазіперіодичного руху ЗЧ набагато більший, ніж власний час запізнення;**

4) $\lambda \gg L$ – **довжина хвилі, що пов'язана з квазіперіодичним процесом в системі, набагато більша, ніж розміри електродинамічної системи.**

Область простору, що визначається нерівностями

$$\lambda \gg L, r \gg L, \quad (5.44)$$

називається **хвилевою зоною**.

Таким чином, векторний потенціал у хвилевій зоні буде мати вигляд

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV'. \quad (5.45)$$

Коли умова квазістаціонарності виконується, тоді в усіх точках системи в дану мить величина струму майже одна й та сама.

Якщо розподіл ЗЧ уявляти собі як квазидискретний, то вираз для векторного потенціалу (5.45) можна подати у вигляді

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \int_{V'} \rho(\vec{r}', t') \vec{v}' dV' \cong \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \sum_i q_i \vec{v}_i = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \frac{d}{dt} \left(\sum_i q_i \vec{r}'_i \right),$$

де $q_i = \rho(\vec{r}', t') \cdot dV'$, $t' = t - \frac{r}{c}$.

При враховуванні означення дипольного моменту системи ЗЧ

$$\sum q_i \vec{r}'_i = \vec{p} \quad (5.46)$$

кінцева формула для векторного потенціалу у хвилевій зоні має вигляд

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}. \quad (5.47)$$

Вираз $\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$ у формулі (5.47) означає, що похідну за часом від

дипольного моменту системи необхідно брати в момент часу $t' = t - \frac{r}{c}$.

Приклад 5.2. За допомогою умови калібровки Лорентца знайти скалярний потенціал у хвильовій зоні.

Розв'язання: З умови калібровки Лорентца для поля у вакуумі

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

одержуємо диференційне рівняння для скалярного потенціалу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \text{div} \left(\frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}}{4\pi \cdot r} \right).$$

Для спрощення математичних перетворень будемо вважати, що вектор $\dot{\vec{p}}$ направлений по осі OZ , тоді

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial z} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right].$$

Використовуючи далі очевидні співвідношення

$$\dot{\vec{p}} = \dot{p}_{t'}; \quad \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \ddot{\vec{p}} \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3},$$

а $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{z}{r}$, де $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$,

для дивергенції векторного потенціалу знаходимо

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{z}}{cr^2} - \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{z}}{r^3} \right\}, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \cdot \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \left\{ \frac{\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{z}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{z} \cdot c}{r^3} \right\}. \quad (5.49)$$

А інтегрування останнього рівняння дає вираз для скалярного потенціалу у хвилевій зоні

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{z}}{r \cdot r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{z} \cdot c}{r^3} \right).$$

У загальному випадку, коли дипольний момент \vec{p} електродинамічної системи орієнтований довільно, то

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \frac{\mu_0 c^2 \vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (5.50)$$

Другий доданок у (5.50) являє собою потенціал, що створюється стаціонарним дипольним моментом:

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \varphi_{\text{ст.дипол.}},$$

значення якого обернено пропорційні r^2 .

Тобто, на великих відстанях цим доданком у (5.50) можна знехтувати.

І тоді, оскільки $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}$, скалярний потенціал хвилевій зоні дорівнює

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{n} \vec{A} c, \quad (5.51)$$

Таким чином, електромагнітні потенціали у хвильовій зоні дорівнюють

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{n} \vec{A} c,$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \dot{\vec{p}}_{t'}.$$

Таким чином, за відомим потенціалами $\varphi(\vec{r}, t)$ і $\vec{A}(\vec{r}, t)$ у хвильовій зоні можна знайти напруженість електричного та індукцію магнітного полів у цих віддалених від системи зарядів точках:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A},$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

5.7. Електромагнітне поле у хвильовій зоні

Таким чином, ми розглядаємо електродинамічну систему, у якій ЗЧ рухаються в деякому об'ємі V' . Вони створюють у хвильовій зоні потенціали електромагнітного поля φ і \vec{A} , які визначаються (5.47) та (5.51). Знайдемо напруженість електричного поля та індукцію магнітного поля у хвильовій зоні.

Індукція магнітного поля ЕМП у хвильовій зоні дорівнює:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \text{rot}\dot{\vec{p}}(t'), \quad (5.52)$$

де $t' = t - \frac{r}{c}$.

Використовуючи формулу векторного аналізу

$$\text{rot}\vec{a}(u) = \left[\nabla u, \frac{d\vec{a}}{du} \right],$$

де $\vec{a}(u)$ вектор, що залежить від скаляру u , для ротора вектора $\dot{\vec{p}}(t')$ знаходимо

$$\text{rot}\dot{\vec{p}}(t') = \left[\nabla t', \frac{d\dot{\vec{p}}}{dt'} \right] = \left[\nabla t', \ddot{\vec{p}} \right].$$

Тому (5.52) має вигляд

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\nabla t', \ddot{\vec{p}} \right]. \quad (5.53)$$

Спростимо вираз для індукції магнітного поля (5.53). Може бути показано, що $\nabla u(\eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta} \nabla \eta$. Тобто, для градієнта часу $t' = t - \frac{r}{c}$ одержуємо

$$\nabla t' = \frac{\partial t'}{\partial r} \nabla r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{n}}{c}.$$

Тому для індукції магнітного поля у хвильовій зоні одержуємо остаточно

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} [\ddot{\vec{p}}, \vec{n}]. \quad (5.54)$$

Напруженість електричного поля знайдемо, використовуючи формулу

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Скориставшись наступними перетвореннями

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t'} \nabla t' = \dot{\varphi} \frac{\partial t'}{\partial r} \nabla r = \dot{\varphi} \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{c} \vec{n} \dot{\varphi} = -\frac{1}{c} \vec{n} (c\vec{n}\dot{A}),$$

бо $\dot{\varphi} = c\vec{n}\dot{A}$, для вектора напруженості електричного поля \vec{E} одержуємо

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \vec{n} (\vec{n}c\dot{A}) - \dot{A} = -\left[\vec{n}, \left[\dot{A}, \vec{n} \right] \right] = c [\vec{B}, \vec{n}],$$

де враховано, що

$$\dot{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} [\ddot{\vec{p}}, \vec{n}].$$

Остаточно для поля \vec{E} у хвилевій зоні отримуємо

$$\vec{E} = c \cdot [\vec{B}, \vec{n}] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[[\ddot{\vec{p}}, \vec{n}], \vec{n} \right]. \quad (5.55)$$

Висновки.

1. У хвилевій зоні вектори \vec{E} , \vec{B} , та \vec{n} взаємоперпендикулярні й утворюють у хвилевій зоні праву трійку векторів.

2. Напруженість електричного та магнітного полів у хвилевій зоні обернено пропорційна r :

$$\vec{E}, \vec{B} \sim \frac{1}{r},$$

що є характерним для поля випромінювання.

Згадаємо, що коли поле квазістатичне, то вектори поля обернено пропорційні квадрату віддалі точок поля від системи зарядів і струмів,

$$\vec{E}, \vec{B} \sim \frac{1}{r^2}.$$

3. Оскільки дипольний момент системи зарядів визначається так:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i,$$

то друга похідна за часом дипольного моменту системи, як бачимо, пропорційна прискоренню частинок $\ddot{\vec{r}}$:

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_i q_i \ddot{\vec{v}}_i = \sum_i q_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Але, згідно з (5.54) і (5.55), компоненти ЕМП у хвилевій зоні пропорційні $\ddot{\vec{p}}$.

Таким чином, випромінювання електромагнітних хвиль відбувається тоді, коли ЗЧ рухаються прискорено.

5.8. Інтенсивність дипольного випромінювання. Дипольне випромінювання простих систем

Знайдемо інтенсивність дипольного випромінювання. Для цього введемо сферичну систему координат, по осі Z якої направимо вектор другої похідної за часом від дипольного моменту системи заряджених частинок.

Електромагнітне поле довільної системи ЗЧ у хвилевій зоні визначається згідно з формулами (5.54) і (5.55), див. також рис. 5.12:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} [\ddot{\vec{p}}, \vec{n}], \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi r c} [\ddot{\vec{p}}, \vec{n}]$$

$$\vec{E} = c \cdot [\vec{B}, \vec{n}] = c\mu_0 [\vec{H}, \vec{n}] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [[\ddot{\vec{p}}, \vec{n}], \vec{n}].$$

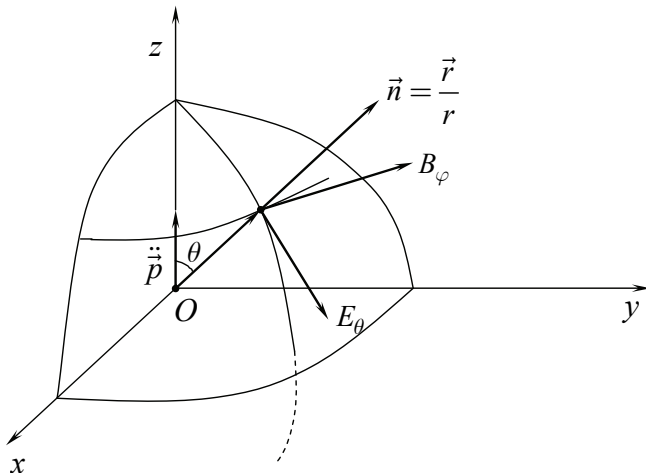


Рис. 5.12. Орієнтація векторів \vec{E} та \vec{B} ЕМП дипольного випромінювання у хвилевій зоні

Тому азимутальна H_ϕ складова напруженості магнітного поля та полярна складова E_θ напруженості електричного поля у хвилевій зоні чисельно дорівнюють

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p} \cdot \sin \theta = \mu_0 H_\phi,$$

$$H_{\varphi} = \frac{1}{4\pi r c} \ddot{p} \cdot \sin \theta, \quad (5.56)$$

$$E_{\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \cdot \sin \theta, \quad (5.57)$$

Щоб знайти інтенсивність дипольного випромінювання, тобто кількість енергії, яка проходить через деяку поверхню в одиницю часу, необхідно знайти вектор Пойнтінга в кожній точці цієї поверхні.

Розрізняють інтенсивність випромінювання в певному напрямку, інтенсивність випромінювання в межах тілесного кута $d\Omega$, який спирається на елементарну площадку dS , та повну інтенсивність випромінювання.

Вектор Пойнтінга визначає інтенсивність випромінювання в певному напрямку (\vec{n}) у будь-якій точці простору:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{n} \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \cdot \sin^2 \theta. \quad (5.58)$$

Як бачимо, інтенсивність дипольного випромінювання в деякому напрямку залежить від самого напрямку (кут θ). Ця залежність пояснюється діаграмою спрямованості випромінювання, рис. 5.13. Зокрема при $\theta = \pi/2$ одержуємо максимальну інтенсивність.

Інтенсивність випромінювання в елементарному тілесному куті $d\Omega$, який стягується площадкою dS , визначається так:

$$dI = \vec{S} \cdot d\vec{S} = S r^2 d\Omega = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c} d\Omega, \quad (5.59)$$

або

$$dI = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{p}, \vec{n}]^2 d\Omega, \quad (5.59a)$$

де $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

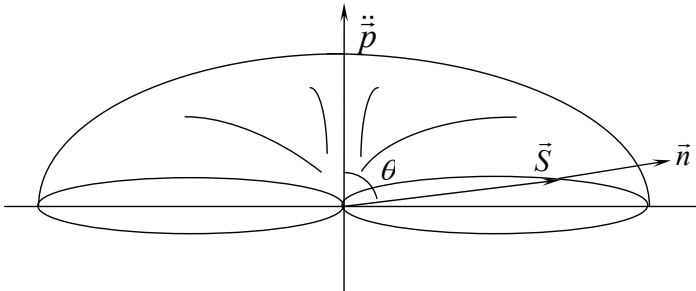


Рис. 5.13. Діаграма спрямованості випромінювання диполя

Знайдемо повну інтенсивність випромінювання диполя: для цього обчислимо повний потік енергії через всю замкнену поверхню, що охоплює собою систему ЗЧ.

Замкнену поверхню виберемо у вигляді сферичної поверхні радіуса r . А елементарну площадку dS виберемо у вигляді сферичного пояса шириною $r \cdot d\theta$ (див. рис. 5.14). Тоді підставляючи значення вектора Пойнтінга (5.58) й інтегруючи, одержуємо

$$I = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot dS =$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \int_0^\pi \frac{\ddot{p}^2}{r^2} \sin^2 \theta \cdot 2\pi r \cdot \sin \theta \cdot r \cdot d\theta = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{(4\pi)^2 c} \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi c} \cdot \mu_0,$$

де враховано, що

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta = \frac{4}{3}.$$

Таким чином, повна кількість енергії ЕМП дипольного випромінювання в одиницю часу за всіма напрямками у вакуумі дорівнює

$$I = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi c} \cdot \mu_0. \quad (5.60)$$

Розглянемо приклади та особливості дипольного випромінювання простих систем.

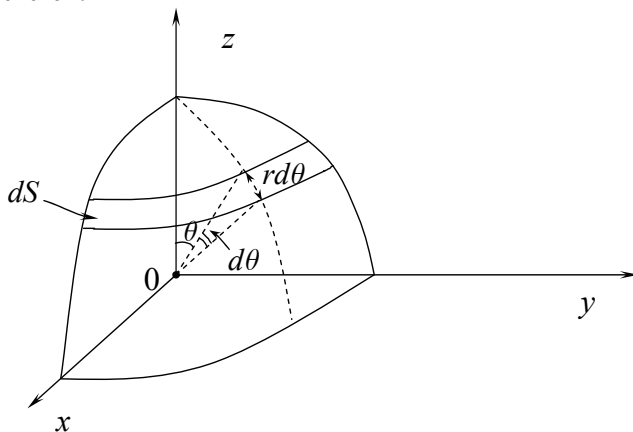


Рис. 5.14. До визначення повної інтенсивності випромінювання диполя

Приклад 5.3. Знайти повну інтенсивність дипольного випромінювання ЗЧ, що рухається з постійним прискоренням.

Розв'язання: Величина дипольного моменту в цьому випадку

$$\vec{p} = q\vec{r},$$

тому

$$\dot{\vec{p}} = q\dot{\vec{r}} = q\vec{v}, \ddot{\vec{p}} = q\dot{\vec{v}},$$

і тоді повна інтенсивність випромінювання ЗЧ, що рухається з прискоренням \dot{v} , згідно з (5.60) дорівнює

$$I = \frac{q^2 \dot{v}^2 \mu_0}{6\pi c}. \quad (5.63)$$

Це так звана формула Лармора.

Приклад 5.4. ЗЧ (величина заряду q) рухається зі швидкістю \vec{v} перпендикулярно силовим лініям однорідного магнітного поля, індукція якого \vec{B} . Знайти інтенсивність дипольного випромінювання.

Розв'язання: Оскільки прискорення ЗЧ дорівнює

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q[\vec{v}, \vec{B}]}{m},$$

то інтенсивність випромінювання визначається формулою Лармора (5.63)

$$I = \frac{q^2 \dot{v}^2 \mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{q^2 v^2 B^2}{m^2} = \frac{\mu_0 q^4 v^2 B^2}{m^2 6\pi c}. \quad (5.64)$$

Приклад 5.5. Показати, що інтенсивність дипольного випромінювання замкненої системи заряджених частинок, які мають однакове відношення величин заряду до маси частинки, дорівнює нулю.

Розв'язання: Дійсно, дипольний момент системи ЗЧ визначається:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i \vec{r}_i \frac{m_i}{m_i} = \frac{q}{m} \sum_i q_i \vec{r}_i.$$

І тоді виявляється, що друга похідна за часом дипольного моменту системи частинок пов'язана зі зміною в часі механічного імпульсу системи:

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{q}{m} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{q}{m} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \vec{P}_{\text{част.}}$$

Але імпульс замкненої системи частинок зберігається

$$\vec{P}_{\text{част.}} = \text{const},$$

тому $\ddot{\vec{p}} = 0$, а значить, й інтенсивність випромінювання $I = 0$.

5.9. Межі застосування класичної електродинаміки. Електродинаміка та неспроможність планетарної моделі атома. Класичний радіус електрона

Затухання коливаль. Осцилятор випромінює енергію. Значить, зменшення енергії в часі самого осцилятора внаслідок вимірювання ним (*Задача 5.4*) електромагнітних хвиль визначається рівнянням

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \omega^4 r_0^2 \mu_0}{12\pi c}. \quad (5.65)$$

Але з механіки відомо, що повна енергія осцилятора дорівнює

$$E = \frac{m}{2} r_0^2 \omega^2.$$

Тобто диференціальне рівняння, яке визначає зміну енергії осцилятора з часом має вигляд

$$\frac{dE}{E} = -\frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{q^2 \omega^2}{m} dt.$$

Розв'язок його очевидний

$$E = E_0 e^{-\gamma t}, \quad (5.66)$$

де коефіцієнт затухання

$$\gamma = \frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q^2 \omega^2}{mc} = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 mc^3} q^2 \omega^2. \quad (5.67)$$

Таким чином, енергія осцилятора зменшується внаслідок випромінювання за експоненціальним законом (5.66).

Це значить, що за час $T \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{6\pi \epsilon_0 mc^3}{q^2 \omega^2}$ енергія атома (якщо ос-

новною особливістю планетарної моделі атома вважати рух електрона по «орбіті» навколо ядра), що випромінює, зменшиться в e раз.

Використавши (5.67), оцінимо час життя атому:

$$T \sim \frac{6\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-30} \cdot 27 \cdot 10^{24}}{(1,6)^2 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{30}} \sim$$

$$\sim 1,8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-30} \cdot 10^{24} \cdot 10^8 \sim 10^{35} \cdot 10^{-42} \sim 10^{-7} \div 10^{-9} \text{ сек}.$$

Таким чином, згідно із законами класичної електродинаміки електрон за час $\tau \sim 10^{-9}$ сек впаде на ядро. Тому планетарна модель атома або не відповідає реальності, або закони класичної електродинаміки не можна застосовувати на віддальх порядку атомних розмірів.

Сила променистого тертя. Випромінювання електромагнітних хвиль рухомою ЗЧ приводить до втрати нею енергії. Зворотний вплив такої втрати енергії на рух ЗЧ в класичній електродинаміці описується шляхом уведення в рівняння руху ЗЧ відповідних «сил тертя». Уявляємо собі ситуацію таким чином, що коливання, наприклад осцилятора, затухають нібито внаслідок дії деякої дисипативної сили. Її називають силою променистого тертя, силою тертя випромінювання, або силою реакції випромінювання.

Підберемо силу тертя випромінюванням \vec{F}_s таким чином, щоб втрата енергії внаслідок дипольного випромінювання могла бути подана як середнє значення роботи таких сил променистого тертя в одиницю часу:

$$\overline{\vec{F}_s \cdot \vec{v}} = -\frac{\ddot{\vec{p}}^2 \mu_0}{6\pi c}, \quad (5.68)$$

бо $\frac{\ddot{\vec{p}}^2 \mu_0}{6\pi c}$ – це повна інтенсивність дипольного випромінювання.

Цій вимозі, як не важко впевнитися, задовольняє сила

$$\vec{F}_s = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \dot{q}.$$

Дійсно,

$$\vec{F}_s \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0 q}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{v}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left\{ \frac{d}{dt} (\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}^2 \right\}.$$

Тоді, при усередненні за достатньо великий проміжок часу, перший доданок, що містить повну похідну за часом дає 0:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

і оскільки $f(t)$ змінюється в певних межах, то при $T \rightarrow \infty$ $\overline{\frac{df}{dt}} = 0$.

Баланс енергії між полем випромінювання і силою променистого тертя повинен мати місце в середньому за деякий проміжок часу. Тобто робота сил променистого тертя за цей проміжок часу повинна дорівнювати зменшенню енергії ЗЧ, яка випромінює,

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_s \cdot \vec{v} \cdot dt = - \int_{t_0}^t \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}^2}{6\pi c} dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_0}^t \dot{v}^2 dt.$$

Уведення сили променистого тертя дозволяє записати в явному вигляді рівняння руху ЗЧ, яка коливається,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_s + \vec{F}_l.$$

Якщо будемо вважати, що прискорення зумовлене дією періодичної сили з частотою ω , наприклад $\vec{F}_l = F_l^0 \sin \omega t$, то прискорення дорівнює

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_l}{m},$$

і для сили променистого тертя одержуємо

$$\vec{F}_s = \frac{\mu_0}{6\pi c} q \ddot{\vec{p}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{\vec{a}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{\dot{\vec{F}}}{m} \approx \frac{\mu_0 q^2 \omega}{6\pi c m} \vec{F}_l.$$

Але необхідно, щоб $F_s \ll F_l$. Бо якщо навпаки, наприклад $F_s \gg F_l$, то рівняння руху набуває вигляду

$$ma \approx \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{a},$$

а інтегрування його приводить до фізично абсурдного результату: енергія випромінюється, а прискорення ЗЧ зростає з часом

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m} \right)^{-1} dt \rightarrow a = a_0 e^{\frac{6\pi c m}{\mu_0 q^2} t}.$$

Тобто обов'язково повинна мати місце нерівність $F_s \ll F_l$, що може бути виконане лише при умові

$$\frac{\mu_0 q^2 \omega}{6\pi c m} \ll 1. \quad (5.69)$$

Ця нерівність має фундаментальне значення для визначення умов застосування теорії випромінювання та законів класичної теорії ЕМ поля. Класична теорія ЕМ поля приводить до розумних (фізично прийнятних) результатів лише тоді, коли

$$\frac{6\pi m c}{\mu_0 q^2} \gg \omega,$$

або, оскільки $\frac{c}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^3$,

$$\frac{6\pi m \varepsilon_0 c^3}{q^2} \gg \omega$$

Попередню нерівність перепишемо таким чином:

$$\frac{c}{\omega} \gg \frac{q^2}{mc^2 \cdot 6\pi\epsilon_0}. \quad (5.70)$$

Права частина цієї нерівності за порядком величин дорівнює класичному радіусу електрона r_0 (**Приклад 5.6**), а ліва частина нерівності – це довжина електромагнітної хвилі:

$$\lambda \gg r_0 \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (5.70a)$$

Тобто класична електродинаміка приводить до розумних наслідків, які відповідають дослідним даним, лише при умові $\lambda \gg r_0$.

Приклад 5.6. Оцінити чисельно величину класичного радіусу електрону.

Розв'язання: Класичний радіус електрону r_0 уводиться таким чином. Якщо ми будемо вважати, що електрон – це кулька радіусом r_0 , то енергія заряду q у власному електростатичному полі дорівнює

$$W = q\varphi,$$

де $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ – потенціал електричного поля на поверхні кульки (на поверхні електрона).

Припустимо, що енергія спокою електрона за порядком величини дорівнює його електростатичній енергії:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sim mc^2.$$

Тому класичний радіус електрону r_0 дорівнює

$$r_0 \sim \frac{q^2}{mc^2 4\pi\epsilon_0} \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (5.71)$$

Оскільки при $r_0 \rightarrow 0$ точкова ЗЧ буде мати нескінченно велику власну електричну енергію, то ми повинні вважати, що елементарні заряджені частинки мають певні розміри. Тобто уявлення про елементарні заряджені частинки як точкові об'єкти приводить до неприйняттого з точки зору фізики висновку.

З іншого боку уявлення про протяжні елементарні частинки (тобто такі, що мають кінцеві розміри) несумісні з принципами теорії відносності. Дійсно, якби елементарна частинка мала кінцеві розміри (наприклад, кулька радіусом r_0), тобто була б протяжною, то вона не могла б деформуватися, оскільки поняття деформації пов'язане з можливістю

незалежного руху окремих частин тіла. Але теорія відносності показує неможливість існування абсолютно твердих тіл.

Іншим словами, або точкових зарядів не існує, або закони класичної електродинаміки не можуть бути застосовані на відстанях порядку атомних розмірів.

5.10. Розсіювання електромагнітних хвиль

Нехай на вільну ЗЧ падає плоска монохроматична електромагнітна хвиля

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Впливом магнітного поля ЕМ хвилі на рух ЗЧ нехтуємо, оскільки $\frac{v}{c} \ll 1$, де v – швидкість ЗЧ під дією хвилі.

Оскільки рівняння руху ЗЧ в нерелятивістському наближенні, $m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$, а дипольний момент, згідно з означенням, дорівнює $\vec{p} = q\vec{r}$, тоді для другої похідної дипольного моменту маємо

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{q^2 \vec{E}}{m}.$$

Як відомо, диференційний ефективний переріз розсіювання визначається як відношення інтенсивності розсіяного випромінювання в тілесному куті $d\Omega$ до інтенсивності падаючого випромінювання

$$d\sigma = \frac{dI}{I},$$

$$\text{де } dI = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{\vec{p}}, \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{\mu_0 q^4}{16\pi^2 m^2 c} [\vec{E}, \vec{n}]^2 d\Omega \text{ (див. (5.59a)).}$$

А інтенсивність падаючого випромінювання I , очевидно, визначається так:

$$I = |\vec{S}| = EH = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \quad (5.72)$$

Тому диференційний ефективний переріз розсіювання дорівнює

$$d\sigma = \frac{\mu_0 q^4 E^2 \sin^2 \theta \cdot d\Omega}{E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot 16\pi^2 m^2 c} = \left(\frac{q^2}{4\pi m c^2 \varepsilon_0} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (5.73)$$

де кут θ – це кут між напрямом поширення (\vec{n}) розсіяної електромагнітної хвилі та вектором \vec{E} падаючої хвилі, див рис. 5.15.

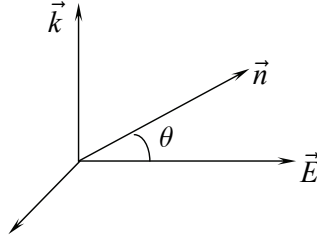


Рис. 5.15. Падаюча ЕМ хвиля,

яка поширюється в напрямку \vec{k} , розсіюється в напрямку \vec{n}

Виберемо полярну вісь у напрямку вектора \vec{E} ЕМ хвилі. Тоді

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

А для повного перерізу розсіювання одержуємо

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2 \varepsilon_0} \right)^2 \cdot \sin^3\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2 \varepsilon_0} \right)^2 \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} r_0^2,$$

де $r_0 \sim \frac{q^2}{mc^2 4\pi\varepsilon_0}$ – класичний радіус електрона.

Ми одержали так звану формулу Томсона, яка визначає переріз розсіювання ЕМ хвиль на електронах будь-яких систем, якщо знехтувати силами, що зв'язують ці електрони в деякій фізичній системі.

Розсіювання електромагнітних хвиль зв'язаними зарядженими частинками розглянемо на прикладі лінійного осцилятора. Нехай плоска електромагнітна хвиля падає на осцилятор. Тоді рівняння його руху має вигляд

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m} - \frac{\mu_0 q^2 \dot{\vec{a}}}{6\pi c m}, \quad (5.74)$$

де $\frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{\vec{a}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} q \ddot{\vec{p}} = \vec{F}_s$ – сила променистого тертя.

Якщо затухання слабе, то $\dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{r}} \approx -\omega_0^2 \vec{r}$, і тоді відношення сили променистого тертя до маси ЗЧ можна подати так:

$$\frac{\vec{F}_s}{m} = \frac{-\mu_0}{6\pi c m} q^2 \omega_0^2 \vec{r} = -\gamma \cdot \dot{\vec{r}},$$

де $\gamma = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m}$.

А рівняння руху (5.74) тоді набуває вигляду

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \gamma \dot{\vec{r}} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m}.$$

Як нам уже відомо, розв'язком цього рівняння є

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (5.75)$$

Знайдемо тепер інтенсивність випромінювання осцилятора. Оскільки $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}}$, а

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m} \left(\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right),$$

то інтенсивність випромінювання в межах тілесного кута $d\Omega$, у напрямку \vec{n} дорівнює

$$dI = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left[\ddot{\vec{p}}, \vec{n} \right]^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{q^4 E_0^2 \omega^4 \cdot \cos^2(\omega t - \delta) \cdot \sin^2 \theta}{m^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)} d\Omega,$$

де $\delta = \arctg \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ – зсув фаз між коливаннями вектора \vec{E} ЕМ хвилі та вимушеними коливаннями осцилятора, θ – кут між напрямком спостереження \vec{n} і напрямком вектора поляризації \vec{E}_0 .

А диференційний ефективний переріз розсіювання дорівнює

$$d\sigma = \frac{dI}{I} = \frac{\sqrt{\mu_0} \cdot \mu_0 q^4 E_0^2 \omega^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\Omega \cdot \cos^2(\omega t - \delta)}{(4\pi)^2 cm^2 E_0^2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)}, \quad (5.76)$$

де $I = S = \left\| \left[\vec{E}, \vec{H} \right] \right\| = E \cdot H = E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} = E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \frac{\mu_0}{c} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^3}$.

Після усереднення \overline{dI} маємо

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{I}} = r_0^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega$$

Інтегрування за всім тілесним кутом дає повний переріз розсіювання електромагнітних хвиль на зв'язаних електронах:

$$\sigma = \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2 \varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot \int \sin^2 \theta d\Omega =$$

$$= \left(\frac{q^2}{4\pi mc^2 \varepsilon_0} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot \frac{8\pi}{3}. \quad (5.77)$$

Формулу (5.77) для повного перерізу розсіювання називають **дисперсійною формулою класичної електродинаміки**.

Розглянемо граничні випадки. При $\omega \ll \omega_0$ переріз розсіювання дорівнює

$$\sigma \sim \frac{8\pi}{3} r_0^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (5.78)$$

При таких частотах спостерігаємо релеевське розсіювання, що реалізується, коли довжина хвилі $\lambda \gg$ розмірів розсіюючих об'єктів.

При $\omega \gg \omega_0$, переріз розсіювання визначається формулою Томсона

$$\sigma_{Томс.} = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (5.79)$$

Переріз розсіювання при $\omega \gg \omega_0$ не залежить ні від частоти падаючої хвилі, ні від властивостей осцилятора. Результат (5.79) – це наслідок того, що при високих частотах сила, що діє на заряд з боку поля, дуже велика порівняно з квазіупругою силою, і електрон розсіює як вільна заряджена частинка.

Результати експериментальної перевірки формули (5.79) показані на рис. 5.16.

Досліди показали, що $\frac{\sigma_{експ}}{\sigma_{Томс}} \approx 1$ для довжин хвиль, більших 2 Ангстрем. При менших довжинах ЕМ хвиль класична теорія розсіювання приводить до результатів, які не підтверджуються експериментами.

Із самої класичної електродинаміки слід чекати, що межа застосування її, а значить, і теорії розсіювання, визначається довжинами хвиль

$$\lambda \geq r_0 \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см} \sim 10^{-5} \text{ \AA}.$$

Але з рис. 5.16 видно, що ця невідповідність між дослідом і висновками класичної теорії розсіювання ЕМ хвиль проявляється при

$\lambda < 0,2 \text{ \AA}$, тобто при довжинах хвиль у 10^4 разів більших. Виявляється,

що при $\lambda \sim 0,2 \text{ \AA}$ слід враховувати квантові ефекти, причому квантова теорія розсіювання повністю пояснює експериментальну залежність

квантова теорія розсіювання повністю пояснює експериментальну залежність $\frac{\sigma_{експ}}{\sigma_{Томс}}(\lambda)$ зображену на рис. 5.16.

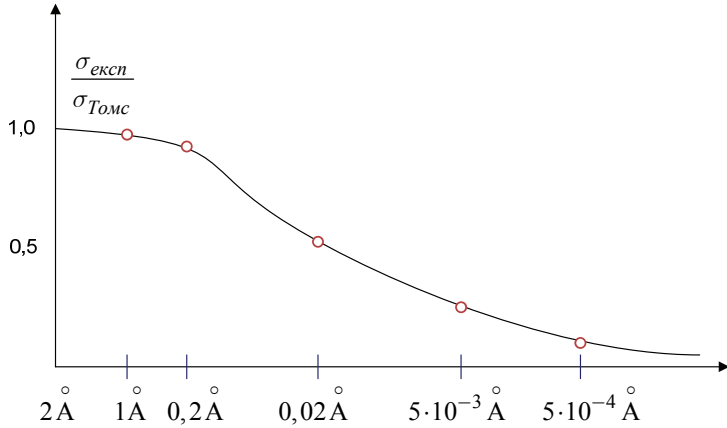


Рис. 5.16. Залежність відношення $\frac{\sigma_{експ}}{\sigma_{Томс}}$ від довжини ЕМ хвилі

5.11. Приклади розв'язування задач

Задача 5.1. Користуючись граничними умовами для вектора \vec{E} та \vec{H} знайти амплітудні коефіцієнти відбиття та заломлення для електромагнітної хвилі S -поляризації.

Розв'язання: Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, що падає на межу поділу двох середовищ, але яка поляризована в площині, перпендикулярній площині падіння, (S -поляризація), рис. 5.17.

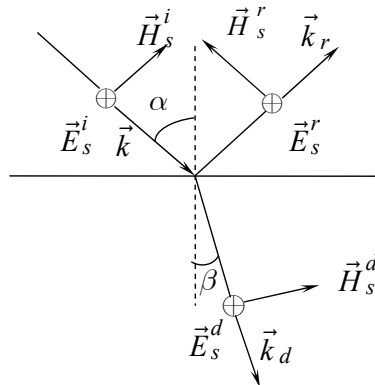


Рис. 5.17. Відбиття та заломлення електромагнітної хвилі S -поляризації

З граничної умови для тангенціальної складової вектора \vec{E} ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$), яка для нашого випадку (див. рис. 5.17) набуває вигляду

$$E_s^i + E_s^r = E_s^d,$$

та з граничної умови для вектора \vec{H} ($H_{1\tau} = H_{2\tau}$, $\sqrt{\mu\mu_0} \cdot H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E$) одержуємо

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_s^i \cdot \cos \alpha - \sqrt{\varepsilon_1} \cdot E_s^r \cdot \cos \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \cdot E_s^d \cdot \cos \beta.$$

Ураховуючи граничну умову $E_s^i + E_s^r = E_s^d$, перепишемо останню рівність так:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha (E_s^i - E_s^r) = (E_s^i + E_s^r) \cos \beta.$$

Тоді для амплітудних коефіцієнтів відбиття ($R_s = \frac{E_s^r}{E_s^i}$) та заломлення ($D_s = \frac{E_s^d}{E_s^i}$) одержуємо (формули Френеля)

$$\begin{aligned} R_s &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \\ D_s &= \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Задача 5.2. Перпендикулярно до поверхні провідника з провідністю λ та постійними μ і ε падає плоска електромагнітна хвиля з частотою ω . Нехтуючи струмами зміщення порівняно зі струмами провідності, визначити, на якій глибині всередині провідника поле зменшиться в e разів?

Розв'язання: Якщо вибрати систему координат так, як показано на рис. 5.18, для ЕМП хвилі можна записати:

$$\begin{aligned} E_x = E_z = 0, \quad E_y = E(x) \cdot e^{i\omega t}, \\ H_x = H_y = 0, \quad H_z = H(x) \cdot e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Електромагнітне поле в провіднику визначається рівняннями

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \lambda \vec{E} \quad (5.81)$$

(якраз в цьому рівнянні ми струмами зміщення $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ нехтуємо в порівнянні зі струмами провідності \vec{j}),

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.82)$$

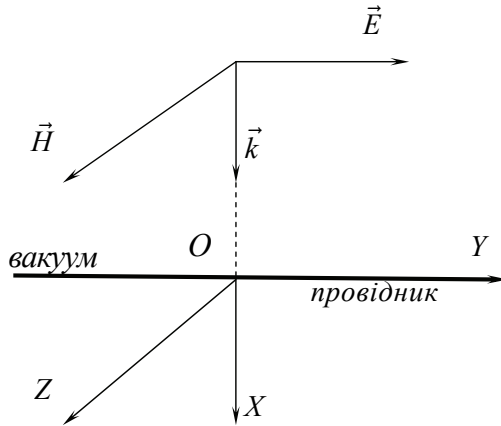


Рис. 5.18. На поверхню провідника падає плоска електромагнітна хвиля

Згідно з умовами задачі

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{j} e^{i\omega t} \frac{dH}{dx}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{k} e^{i\omega t} \frac{dE}{dx}.$$

І тоді рівняння (5.81) та (5.82) слід переписати у вигляді

$$\frac{dH}{dx} = -\lambda E, \quad (5.83)$$

$$\frac{dE}{dx} = -i\omega\mu H. \quad (5.84)$$

Знайдемо похідну за x рівняння (5.83) і, підставивши в нього $\frac{dE}{dx}$ з (5.84), одержимо диференціальне рівняння для визначення амплітуди магнітного поля хвилі

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - i\lambda\omega\mu H = 0. \quad (5.85)$$

Подібне рівняння одержуємо і для амплітуди вектора \vec{E} . Розв'язуємо (5.85). Корені характеристичного рівняння $k^2 - i\lambda\omega\mu = 0$, яке відповідає (5.85), такі:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda\omega\mu} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Умові задачі відповідає лише другий корінь, k_2 , (бо кореню k_1 відповідає хвиля, амплітуда якої збільшується при поширенні хвилі вглиб провідника).

Таким чином, розв'язок рівнянь (5.83) та (5.84) слід записати так:

$$\begin{cases} E(x) = E(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\lambda\omega\mu}{2}} x} \cos\sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x \\ H(x) = H(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x} \cos\sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x \end{cases}, \quad (5.86)$$

де $E(0)$ та $H(0)$ – амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів хвилі при $x = 0$, тобто на поверхні провідника.

Із розв'язків (5.86) випливає, що електромагнітна хвиля зменшується в e разів на глибині

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda\mu\omega}}.$$

Задача 5.3. На прицільній відстані b повз нерухому ЗЧ Q пролітає заряд q , рис. 5.19. Знайти інтенсивність дипольного випромінювання.

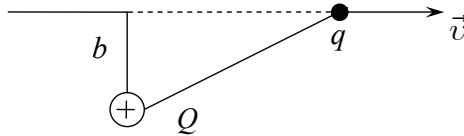


Рис. 5.19.

Розв'язання: Миттєве значення інтенсивності випромінювання дорівнює

$$I = \frac{q^2 v^2 \cdot \mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \cdot \left(\frac{F}{m}\right)^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c \cdot m^2} \frac{(Qq)^2}{(b^2 + v^2 t^2)},$$

а повна інтенсивність дорівнює

$$I = \frac{q^2 v^2 \cdot \mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \cdot \left(\frac{F}{m}\right)^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c \cdot m^2} \frac{(Qq)^2}{(b^2 + v^2 t^2)}.$$

Задача 5.4. Знайти середнє за часом значення інтенсивності випромінювання гармонічного осцилятора.

Розв'язання: Нехай ЗЧ рухається згідно із законом

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot \cos \omega_0 t,$$

де \vec{r}_0 – амплітуда коливань, ω_0 – власна частота коливань осцилятора.

До речі, нагадаємо, що осцилятором називають систему, яка описується

функцією Гамільтона $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$, де q – узагальнена координата, а p – узагальнений імпульс. Оскільки $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}}$, то

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= -\vec{r}_0 \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t, \\ \ddot{\vec{r}} &= -\vec{r}_0 \omega_0^2 \cdot \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 \cdot \vec{r},\end{aligned}$$

тобто

$$\ddot{\vec{p}} = -q\omega_0^2 \vec{r}.$$

І тоді інтенсивність випромінювання в межах тілесного кута $d\Omega$ дорівнює

$$dI = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 c} d\Omega \cdot q^2 \omega_0^4 r_0^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

Якщо частота коливань осцилятора ω_0 дуже велика, то при будь-яких експериментальних вимірах інтенсивності випромінювання, що реєструється макроскопічними приладами, ми одержуємо деяке середнє значення інтенсивності. Тому будемо цікавитися середнім значенням інтенсивності за період коливань.

$$\overline{dI} = \frac{1}{T} \int_0^T dI \cdot dt,$$

тоді повна середня інтенсивність випромінювання осцилятора дорівнює

$$\overline{I} = \frac{q^2 \omega_0^4 r_0^2 \mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{q^2 \omega_0^4 r_0^2 \mu_0}{c \cdot 12\pi}, \quad (5.87)$$

$$\text{де } \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

Як бачимо, інтенсивність випромінювання пропорційна квадрату дипольного моменту, який у свою чергу пропорційний довжині диполя. На якісному рівні це пояснює використання довгих антен у радіопередавачах. $\overline{I} \sim \omega_0^4$, з цієї залежності випливає висновок: для ефективного радіозв'язку слід використовувати короткі хвилі.

Задача 5.5. Плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля падає на рамочну антену. Визначити ЕРС індукції, яка виникає в антені. Антена має форму квадрата зі стороною a і лежить в площині коливань вектора \vec{E} , рис. 5.20.

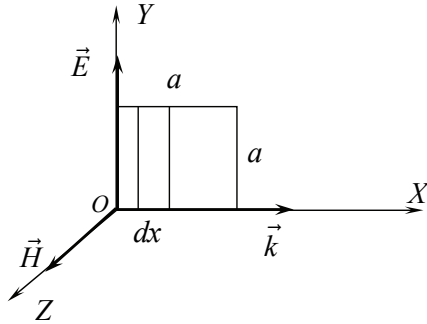


Рис. 5.20. На квадратну рамочну антену падає плоска ЕМ хвиля

Розв'язання: Згідно з умовою задачі (див. також рис. 5.20) ЕМ хвиля визначається рівняннями

$$E = E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad H = H_z = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

ЕРС індукції, що наводиться в антені, може бути знайдена такими способами:

А) використовуючи «правило потоку»

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt};$$

Б) на основі закону електромагнітної індукції

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

В) безпосередньо через пошук циркуляції вектора \vec{E} по контуру антени

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}.$$

Реалізуємо кожний з цих способів.

А. Магнітний потік через площу, яка обмежена квадратною антенною

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} d\vec{S} = \int_0^a \mu_0 H \cdot a dx = \mu_0 H_0 \cdot a \cdot \int_0^a \cos(\omega t - kx) dx = \\ &= a H_0 \mu_0 \cdot \frac{2}{k} \sin \frac{ak}{2} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{ak}{2} \right). \end{aligned}$$

Тому ЕРС індукції дорівнює

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = -\omega a H_0 \mu_0 \cdot \frac{2}{k} \sin \frac{ak}{2} \cdot \sin \left(\omega t - \frac{ak}{2} \right).$$

Б. Очевидно, що вектор похідної $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ перпендикулярний площині XOY і за величиною дорівнює

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu_0 \omega H_0 \sin(\omega t - kx) = -|\text{rot} \vec{E}|.$$

Але згідно з теоремою Стокса $\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$. Тобто ЕРС

індукції $\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$ знаходиться шляхом інтегрування $|\text{rot} \vec{E}|$ за поверх-

нею площі, обмеженої антеною, де \vec{E} у цій формулі – це напруженість вихрового електричного поля, зумовленого змінною вектора \vec{B} в часі.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot dS = \\ &= \int_S \mu_0 \omega H_0 \sin(\omega t - kx) \cdot dS = \int_0^a \mu_0 \omega H_0 \sin(\omega t - kx) \cdot adx = \\ &= \frac{\mu_0 \omega H_0 a}{k} (\cos \omega t - \cos(\omega t - ka)) = -\frac{2\mu_0 \omega H_0 a}{k} \sin \left(\omega t - \frac{ak}{2} \right) \cdot \sin \frac{ak}{2}. \end{aligned}$$

В. ЕРС у рамочній антені може бути знайдена як циркуляція вектора напруженості електричного поля по контуру антени:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \cdot d\vec{l}$$

Вектор \vec{E} ЕМ хвилі перпендикулярний двом сторонам антени, які паралельні вісі OX . Тому циркуляція вектора \vec{E} , що визначається попередньою формулою, зводиться до суми двох лінійних інтегралів уздовж сторін квадрата, паралельних осі OY .

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_0^a E_0 (\cos(\omega t - kx))_{x=0} \cdot dy + \int_a^0 E_0 (\cos(\omega t - kx))_{x=a} \cdot dy = \\ &= E_0 \cos \omega t \cdot y \Big|_0^a + E_0 \cos(\omega t - ka) \cdot y \Big|_a^0 = \end{aligned}$$

$$= a \cdot E_0 \cos \omega t - a \cdot E_0 \cos(\omega t - ka) = a \cdot E_0 \left(-2 \sin \left(\omega t - \frac{ak}{2} \right) \cdot \sin \frac{ak}{2} \right).$$

Ураховуючи зв'язок величин поля в плоскій ЕМ хвилі $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$ та означення величини хвильового вектору $k = \frac{\omega}{c}$ знайдемо, що $E_0 = \frac{\mu_0 \omega H_0}{k}$.

Таким чином, усі три способи знаходження ЕРС індукції дають однаковий результат.

Задача 5.6. Оцінити «час життя» атома згідно з уявленнями класичної електродинаміки та класичної механіки.

Розв'язання: Уявимо собі планетарну модель атома.

Повна енергія електрона, що рухається по орбіті навколо ядра, дорівнює

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

А швидкість втрати енергії атома внаслідок дипольного випромінювання визначається

$$\frac{dE}{dt} = -I$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c} = -\frac{\mu_0 (e\ddot{r})^2}{6\pi c}.$$

Але згідно з другим законом Ньютона $\ddot{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2}$, де r – ра-

діус «орбіти» електрону ($\sim 10^{-10}$ м). Тому

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 \mu_0}{6\pi c} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2} \right)^2 = -\frac{\mu_0 e^2 Z^2 c^4 r_0^2}{6\pi \varepsilon_0 r^4},$$

де r_0 – так званий класичний радіус електрона

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}.$$

Тоді «час життя» атому

$$\tau \sim \frac{E}{dE/dt} = \frac{Ze^2 / 8\pi\epsilon_0 r}{\mu_0 e^2 Z^2 c^4 r_0^2 / 6\pi c r^4} \sim \frac{3r^3}{4Zcr_0^2},$$

$$\tau \sim \frac{10^{-30}}{3 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 10^{-30}} \sim 10^{-9} \text{ с.}$$

Контрольні запитання і завдання

1. Одержати хвильові рівняння для векторів поля \vec{E} та \vec{B} .
2. Пояснити механізм розповсюдження електромагнітних хвиль.
3. Показати, що зв'язком хвильового рівняння є плоска хвиля.
4. Як довести, що швидкість поширення електромагнітних хвиль в однорідному та ізотропному середовищі дорівнює $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$?
5. Виходячи з рівнянь Максвелла, довести, що трійка векторів \vec{k} , \vec{E} та \vec{H} утворюють правий гвинт.
6. Показати, що для плоскої ЕМ хвилі в однорідному та ізотропному діелектрику має місце таке співвідношення між величинами векторів \vec{E} і \vec{H} : $\sqrt{\mu\mu_0} \cdot H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} \cdot E$.
7. Як і при яких умовах утворюється хвильовий пакет?
8. Поняття групової та фазової швидкості. Знайти зв'язок між цими швидкостями у випадку нормальної дисперсії.
9. Одержати та пояснити класичні співвідношення невизначеностей.
10. Обґрунтувати геометричні закони заломлення та відбивання ЕМ хвилі.
11. Використовуючи граничні умови для векторів поля, обґрунтувати формули Френеля.
13. Основні наслідки рівнянь Максвелла.
14. Обґрунтувати співвідношення (5.24).
15. Виходячи з рівнянь Максвелла, одержати формули, які визначають амплітудні коефіцієнти відбиття та пропускання (5.37), (5.38), (5.39).
16. Ґрунтуючись на рівняннях Максвелла, пояснити закон Брюстера.
17. Обґрунтувати та пояснити зв'язок рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, які запізнюються.
18. Пояснити умову квазістаціонарності.
19. Обґрунтувати та пояснити чотири різні формулювання умови квазістаціонарності.
20. Знайти ЕМП у хвильовій зоні й описати його властивості.

21. Пояснити картину електромагнітного поля дипольного випромінювання у хвилевій зоні.
22. Вивести формулу Лармора (5.60).
23. Показати, що потенціали, які запізнюються, задовольняють умові калібровки Лорентца.
24. Знайти інтенсивність дипольного випромінювання.
25. Як можна визначити межі застосування класичної електродинаміки?
26. Обґрунтувати дисперсійну формулу класичної електродинаміки.
27. Які особливості лівих середовищ Ви знаєте?
28. Пояснити та показати хід заломленого променя при переході ЕМ хвилі через межу поділу правого й лівого середовищ.

Розділ 6. ОСНОВИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

6.1. Попередні зауваження

Згідно з принципом відносності всі основні рівняння фізики не повинні змінювати свою математичну форму при переході від однієї системи відліку до іншої.

Безпосередньо можна впевнитися, що рівняння Максвелла не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої, тобто, вони є коваріантними при перетвореннях Лорентца. Але при цьому всі величини, що входять до системи рівнянь Максвелла, повинні перетворюватися за певними законами при переході від однієї СВ до іншої.

Дійсно, у системі рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (6.1a)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (6.1б)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (6.1в)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \quad (6.1г)$$

перейдемо від координат події x, y, z, t в СВ K до координат тієї ж події, але в СВ $K' - x', y', z', t'$.

Оскільки, згідно з перетвореннями Лорентца $x' = x'(x, t)$, $t' = t'(x, t)$, і $x = x(x', t')$, $t = t(x', t')$, то враховуючи явний вигляд прямих та обернених перетворень Лорентца:

$$x'_i = \alpha'_{ik} \cdot x_k,$$

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k,$$

де α'_{ik} , α_{ik} – це матриці прямого й оберненого перетворень Лорентца:

$$\alpha'_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix},$$

для операторів частинних похідних одержуємо:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad (6.3)$$

аналогічно:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (6.3a)$$

де $B = \frac{V}{c}$, V – швидкість руху СВ K' відносно системи відліку K ,

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

У системі рівнянь Максвелла (6.1) зробимо заміну змінних з допомогою (6.2), (6.3).

Закон ЕМІ, рівняння (6.1a), після нескладних алгебраїчних перетворень, перегрупування доданків і введення позначення

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \Gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \Gamma(E_z + VB_y), \quad (6.4)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \Gamma\left(B_y + \frac{VE_z}{c^2}\right), \quad B'_z = \Gamma\left(B_z - \frac{VE_y}{c^2}\right) \quad (6.5)$$

набуває вигляду

$$\text{rot}' \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}. \quad (6.6)$$

Таким чином, локальна форма закону електромагнітної індукції і в СВ K' має таку ж форму, як і в СВ K , лише при умові (6.4) та (6.5).

Подібно до перетворення рівняння Максвелла (6.1a) зробимо аналогічні перетворення рівняння (6.1в). Тоді з урахуванням (6.2), (6.3) та рівняння Максвелла $\text{div} \vec{D} = \rho$, а також при умовах

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \Gamma(H_y + VD_z), \quad H'_z = \Gamma(H_z - VD_y), \quad (6.7)$$

$$D'_x = D_x, \quad D'_y = \Gamma\left(D_y - \frac{V}{c^2} H_z\right), \quad D'_z = \Gamma\left(D_z + \frac{V}{c^2} H_y\right), \quad (6.8)$$

$$j'_x = \Gamma(j_x - V\rho), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z \quad (6.9)$$

одержуємо

$$\text{rot}' \vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'}. \quad (6.10)$$

Тепер рівняння Максвелла $div\vec{D} = \rho$ з урахуванням операторів похідних (6.2) і (6.3) та рівняння $rot'\vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t'}$ набуває вигляду

$$div'\vec{D}' = \rho'$$

при умові, що густина заряду в СВ K' пов'язана з густиною заряду в СВ K співвідношенням

$$\rho' = \Gamma \left(\rho - \frac{V}{c^2} j_x \right), \quad (6.10a)$$

де j_x – x -ва компонента густини струму в СВ K .

Аналогічно до попередніх перетворювань упевнюємося, що і рівняння $div\vec{B} = 0$ в СВ K' має коваріантну форму

$$div'\vec{B}' = 0.$$

Таким чином, коваріантність рівнянь Максвелла (6.1) має місце:

А) якщо компоненти напруженості електричного та індукції магнітного полів перетворюються згідно з формулами (6.4) та (6.5);

Б) коли вектори індукції електричного і напруженості магнітного полів перетворюються при переході від СВ K до СВ K' за формулами (6.7) і (6.8);

В) і на кінець, ще й коли густини зарядів і струмів (джерела поля) перетворюються при переході від СВ K до СВ K' за формулами (6.9) і (6.10a).

6.2. 4-вимірний струм. Закон збереження заряду в коваріантній формі. Відносність розбиття джерел поля на заряди та струми. Явище виникнення об'ємної густини заряду в рухомому провіднику зі струмом

Але набагато простіше можна впевнитися в лорентц-коваріантності основних рівнянь електродинаміки, якщо вдасться записати їх в 4-вимірній формі.

Основними рівняннями електродинаміки можна вважати рівняння Даламбера для векторного та скалярного потенціалів, умову калібровки Лорентца та закон збереження заряду. Можна показати (див. Розділ 4), що вони еквівалентні системі рівнянь Максвелла.

Тобто, якщо вдасться надати рівнянням Даламбера для векторного та скалярного електромагнітних потенціалів, умові калібровки Лорентца та закону збереження заряду 4-вимірної форми, то автоматично доводиться лорентц-коваріантність рівнянь Максвелла, оскільки система рівнянь (6.11) та (6.12) еквівалентна рівнянням Максвелла.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (6.11)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (6.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Компоненти 4-вимірної густини струму в деякій СВ визначаються так:

$$\vec{s}(\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, ic\rho), \quad (6.13)$$

де u_x, u_y, u_z – проєкції швидкості руху в даній СВ деякого розподілу зарядів, ρ – густина заряду.

Ураховуючи, що 4-вимірний радіус-вектор визначається, як відомо з теорії відносності, наступним чином:

$$\vec{\mathfrak{R}}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict),$$

закон збереження заряду в 4-вимірній формі набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6.14)$$

Знайдемо правила, за якими змінюються компоненти 4-струму при переході від однієї СВ до іншої. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 6.1. Нехай в СВ K' знаходиться в спокої деякий розподіл зарядів. Тоді компоненти 4-струму в СВ K' дорівнюють

$$s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0, s'_4 = ic\rho'.$$

Знайти компоненти 4-струму в СВ K .

Розв'язання: Оскільки компоненти 4-струму утворюють 4-вимірний вектор, то його компоненти при переході від системи K' до системи відліку K перетворюються згідно з такими формулами:

$$s_1 = \frac{(s'_1 - iBs'_4)}{\sqrt{1 - B^2}}$$

$$s_2 = s'_2$$

$$s_3 = s'_3$$

$$s_4 = \frac{(s'_4 + iBs'_1)}{\sqrt{1 - B^2}},$$

а компоненти 4-струму в СВ K будуть

$$s_1 = \rho u_x = j_x = -\frac{iBic\rho'}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{V\rho'}{\sqrt{1-B^2}},$$

$$s_4 = ic\rho = \frac{ic\rho'}{\sqrt{1-B^2}},$$

тобто $\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-B^2}}$.

Висновки.

А. Якщо деякий розподіл зарядів рухається відносно лабораторної системи відліку, то густина заряду збільшиться в тій системі відліку, відносно якої цей розподіл зарядів рухається,

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (6.15)$$

Б. Якщо розподіл зарядів рухається зі швидкістю V , то в СВ K відповідна густина струму дорівнює

$$j_x = -\frac{iBic\rho'}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{V\rho'}{\sqrt{1-B^2}} = \rho V. \quad (6.20)$$

Приклад 6.2. Припустимо, що в СВ K' уздовж осі $O'X'$ знаходиться в спокої провідник зі струмом. Знайти компоненти 4-струму в СВ K .

Розв'язання: Компоненти 4-струму в СВ K' , згідно з умовою задачі, дорівнюють

$$s'_1 = j'_x, s'_2 = s'_3 = 0, s'_4 = ic\rho' = 0.$$

Тоді в СВ K маємо такі компоненти 4-струму:

$$s_1 = j_x = \frac{j'_x}{\sqrt{1-B^2}},$$

$$s_4 = ic\rho = \frac{iBj'_x}{\sqrt{1-B^2}},$$

або для густини заряду одержуємо

$$\rho = \frac{V}{c^2} \cdot \frac{j'_x}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{j}).$$

Тобто, провідник зі струмом в СВ K характеризується об'ємною густиною заряду,

$$\rho = \frac{V}{c^2} \cdot \frac{j'_x}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{j}), \quad (6.21)$$

а густина струму в СВ K зростає:

$$j_x = \Gamma \cdot j'_x. \quad (6.22)$$

Якщо струм направлений протилежно напрямку руху системи K' , то величина об'ємної густини заряду ρ характеризується від'ємним значенням.

6.3. Пояснення явища виникнення об'ємної густини заряду в рухомому металевому провіднику зі струмом за допомогою діаграм Мінковського та на основі елементарних релятивістських уявлень

Явище виникнення об'ємної густини заряду (6.21) в рухомому металевому провіднику зі струмом, ми одержали в результаті аналізу формул перетворення компонент 4-струму. Але цей результат можна подати також як наслідок релятивістського закону додавання швидкостей руху електронів провідності та іонів при розгляді моделі провідника зі струмом, зображеної на рис. 6.1.

Уздовж осі OX знаходиться металевий циліндричний провідник з постійним струмом. Дрейфова швидкість електронів провідності дорівнює \vec{v} .

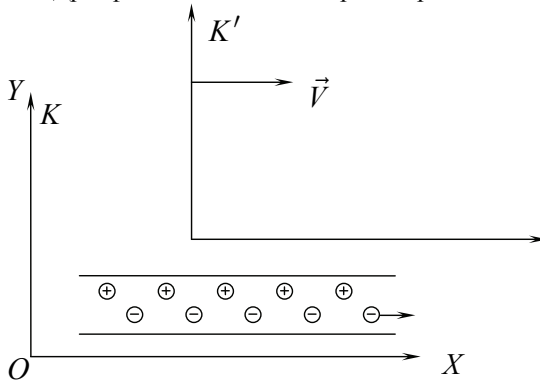


Рис. 6.1. Провідник зі струмом паралельний осі OX . Дрейфова швидкість електронів провідності дорівнює \vec{v}

Нехай густину заряду позитивних іонів і густину заряду електронів провідності у власних системах відліку позначимо ρ_+^0 і ρ_-^0 відповідно.

Тоді у системі відліку K густина заряду електронів провідності, згідно (6.15) дорівнює

$$\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}.$$

Для спрощення розрахунків виберемо швидкість руху СВ K' $V = v$. Тоді в СВ K' , де електрони провідності будуть нерухомі, об'ємна густина їх заряду дорівнює

$$\rho'_- = \rho_-^0 = \rho_- \cdot \sqrt{1-\beta^2}.$$

А густина заряду іонів відносно СВ K'

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Оскільки в СВ K загальноприйнятою умовою нейтральності провідника зі струмом у такій моделі є співвідношення

$$|\rho_+^0| = \frac{|\rho_-^0|}{\sqrt{1-\beta^2}} = |\rho_-|, \quad (6.23)$$

то сумарна густина заряду провідника зі струмом в СВ K'

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_-,$$

$$\rho' = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \rho_- \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\rho_+^0 \cdot \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j_x \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

де використано: $v \cdot \rho_+^0 = v \cdot \rho_- = j_x$. Тобто ми одержали результат (6.21).

Аналогічний висновок, про появу об'ємної густини заряду в рухомому провіднику зі струмом, випливає з аналізу явища протікання струму в металевому провіднику методом діаграм Мінковського, рис. 6.2.

Дійсно, нехай в СВ K вздовж осі OX знаходиться провідник зі струмом, довжина якого OA (рис. 6.2.). Світові лінії позитивно заряджених іонів зображені пунктирними лініями. Світові лінії електронів провідності – суцільні лінії, паралельні часовій вісі СВ K' . На одиничній довжині OA знаходиться 12 іонів і 12 електронів. Тобто з точки зору СВ K провідник зі струмом нейтральний. Але з точки зору СВ K' на його довжині OA' ($OA' < OA = 1\text{ м}$) буде одночасно знаходитися 12 позитивних іонів і приблизно 8 електронів.

Таким чином, у СВ K' провідник зі струмом характеризується некомпенсованим електронами провідності позитивним зарядом.

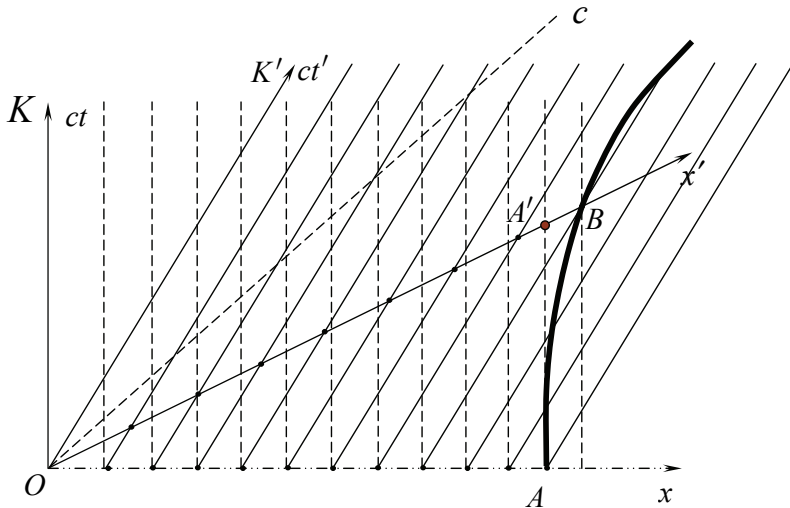


Рис. 6.2. Пояснення виникнення об'ємної густини заряду в рухомому ППС з допомогою діаграм Мінковського

6.4. Релятивістська інтерпретація взаємодії струму та зарядженої частинки, яка рухається відносно струму

Розглянемо взаємодію прямолінійного провідника зі струмом і зарядженої частинки, яка рухається вздовж провідника з точки зору 2-х систем відліку: СВ K і СВ K' .

Приклад 6.3. У СВ K' знаходиться нерухомий провідник, по якому протікає постійний струм I' . Уздовж провідника в площині $X'O'Y'$ в сторону від'ємних значень осі $O'X'$ рухається зі швидкістю \vec{v}' електрон (рис. 6.3.). Знайти силу взаємодії між електроном і провідником зі струмом I' в СВ K . Пояснити явище виникнення об'ємного заряду в рухомому провіднику зі струмом.

Розв'язання. Індукція магнітного поля в точці знаходження електрону визначається згідно з формулою

$$B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r'}, \quad (6.24)$$

де r' – віддаль електрону від проводу, $I' = j' \cdot S'$, $j' = \frac{n_-^0 \cdot v' q}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ – гу-

стина струму в ППС з точки зору СВ K' , S' – площа поперечного пе-

перізу провідника, n_-^0 – концентрація електронів провідності у ВСВ,
 $\beta' = \frac{v'}{c}$, v' – дрейфова швидкість руху цих електронів.

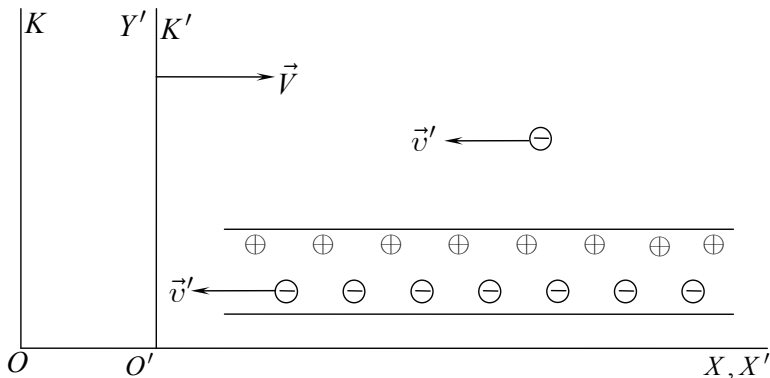


Рис. 6.3. Взаємодія електрона і провідника зі струмом

Тоді величина сили Лорентца, яка діє на електрон в СВ K' дорівнює

$$F'_l = F'_y = qv' \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'}. \quad (6.25)$$

Якщо СВ K' разом з провідником і електроном рухаються зі швидкістю $V = v'$, то в СВ K електрон буде нерухомий, і тому при визначенні сили до уваги в цій СВ слід брати тільки силу з боку електричного поля напруженістю

$$E_y = \Gamma V B'_z$$

Це електричне поле в СВ K виникає внаслідок руху відносно СВ K магнітного поля B'_z . І тоді сила, що діє на ЗЧ в СВ K ,

$$F = q\Gamma V B'_z. \quad (6.26)$$

Порівнюючи (6.25) і (6.26) бачимо, що $F'_l = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Але ця задача з такою моделлю ППС дає можливість для наочного фізичного пояснення явища виникнення електричного поля в СВ K . Це електричне поле напруженістю $E_y = \Gamma V B'_z$ створюється різною за величиною густиною об'ємного заряду електронів провідності та об'ємною густиною заряду позитивних іонів кристалічної ґратки. Часто говорять, що провідник з струмом, який рухається в лабораторній СВ

вздовж своєї довжини, у цій СВ характеризується деякою об'ємною густиною заряду (провідник з струмом є «заряджений»).

Дійсно, нехай густину заряду позитивних іонів та електронів провідності у власній СВ позначимо ρ_+^0 і ρ_-^0 відповідно.

Очевидно, що в системі відліку K' густина заряду електронів провідності дорівнює

$$\rho'_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}}, \quad (6.27)$$

де v' – дрейфова швидкість електронів провідності в СВ K' , $\beta' = \frac{v'}{c}$.

Тоді, якщо перейти в систему відліку K (знову для простоти розглянемо випадок, коли $V = v'$), де електрони нерухомі, то об'ємна густина заряду їх дорівнюватиме

$$\rho_- = \rho_-^0 = \rho'_- \cdot \sqrt{1-\beta'^2}. \quad (6.28)$$

А густина заряду іонів відносно СВ K

$$\rho_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.29)$$

Сумарна густина заряду в СВ K

$$\rho = \rho_+ - \rho_-,$$

$$\rho = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \rho'_- \cdot \sqrt{1-\beta'^2} = \frac{\rho_+^0 \cdot \frac{v'^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot v'}{\sqrt{1-\beta'^2}}, \quad (6.29a)$$

оскільки в СВ K' загальноприйнятою умовою нейтральності провідника зі струмом в такій моделі є співвідношення (порівняйте з (6.23))

$$|\rho_+^0| = \frac{|\rho_-^0|}{\sqrt{1-\beta'^2}} = |\rho'_-|, \quad (6.30)$$

ми використали тут: $v' \cdot \rho_+^0 = v' \cdot \rho'_- = j'_x$.

Тобто, ми одержали результат (6.21).

Таким чином, лінійний провідник з струмом у СВ, відносно якої він рухається, при геометрії задачі, показаній на рис. 6.3., характеризується лінійною густиною заряду $\tau = \rho \cdot S$ і тому створює електричне поле напруженістю

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\rho_+^0 v'^2 \cdot S}{2\pi\epsilon_0 \cdot r c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma v' \cdot \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = \Gamma V B'_z, \quad (6.31)$$

де $I' = j'S = v'\rho'_+ S$, що збігається з напруженістю поля (6.26) і яка може бути знайдена також іншими шляхами.

А сила, що діє на електрон в СВ K , тоді дорівнює

$$F_y = qE_y = q\Gamma V B'_z = \frac{F'_y}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{F'_l}{\sqrt{1 - \beta'^2}}. \quad (6.32)$$

Здавалося б, ми одержали майже ідентичний опис взаємодії ЗЧ та ППС: $F_y \cong F'_y$. Але насправді ми маємо в СВ K точно таке ж значення сили, яка діє на ЗЧ, як і в СВ K' . Дійсно, необхідно врахувати формули перетворення поперечних компонент сили при переході від СВ K' до СВ K , $F_y = \frac{F'_l}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$. Тобто, ми одержали абсолютно еквівалентний

опис взаємодії ЗЧ та ППС.

Приклад 6.4. Дати елементарне обґрунтування формули

$$F = \frac{F'}{\sqrt{1 - \beta'^2}}.$$

Розв'язання: Якщо в СВ K' є якась сила, то при переході до будь-якої іншої системи ця сила в принципі зникнути не може.

Дійсно, нехай в СВ K' на частинку діє деяка сила, але ця частинка в системі відліку K' рухається вздовж осі $O'Y'$ у площині, перпендикулярній V . Тобто рівняння руху в СВ K' має вигляд

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'},$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt},$$

де p_y і p'_y – складові релятивістського імпульсу.

Ураховуючи формули додавання швидкостей

$$v^2 = V^2 + v_y'^2 = V^2 + \left(v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}\right)^2,$$

для складових релятивістського імпульсу в СВ K та в СВ K' маємо

$$p'_y = \frac{m_0 \cdot v'_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'_y}{c}\right)^2}} \quad p_y = \frac{m_0 \cdot v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \cdot v'_y \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p'_y$$

Тобто $F_y = \frac{dp'_y}{dt}$, але $dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ при умові, коли тіло в СВ

K' нерухоме відносно вісі $O'X'$.

Тому співвідношення між силами в СВ K' та в СВ K , якщо тільки в СВ K' тіло не рухається вздовж осі $O'X'$,

$$F_y = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \sqrt{1 - B^2} = F'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}.$$

Така формула має місце, коли сила F'_y «нерухома» відносно СВ K' (відносно вісі $O'X'$). У нашій задачі частинка нерухома відносно СВ K , і тоді слід записати

$$F'_y = F_y \cdot \sqrt{1 - B^2},$$

що ми й отримали, розв'язуючи **Приклад 6.3**, (6.32).

6.5. 4-вимірний потенціал. Умова Лорентца та рівняння Даламбера в коваріантній формі. Електромагнітне поле зарядженої частинки, яка рухається рівномірно і прямолінійно

Якщо ввести 4-вимірний потенціал, просторові компоненти якого дорівнюють проекціям вектор-потенціалу відповідно на вісі x, y, z , а четверта компонента (часова компонента) $\Phi_4 = i \frac{\varphi}{c}$, де φ – скалярний потенціал електромагнітного поля,

$$\Phi \left(\Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i \cdot \frac{\varphi}{c} \right), \quad (6.33)$$

то умова калібровки Лорентца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

набуває вигляду

$$\sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6.34)$$

А рівняння Даламбера (нагадаємо, що кожна подія визначається радіус-вектором події $\vec{R}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$) в 4-вимірній формі набуває коваріантного вигляду

$$\tilde{\Delta}\Phi_i = -\mu_0 \cdot s_i. \quad (6.35)$$

де $\tilde{\Delta} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Даламбера, s_i – компонента 4-струму.

Таким чином, визначивши 4-вимірні вектори s_i , Φ_i , нам вдалося записати рівняння Максвелла в коваріантній формі. Тобто класична електродинаміка є релятивістськи коваріантною теорією.

Приклад 6.5. Знайти 4-потенціал та електромагнітне поле, що створюється рівномірно і прямолінійно рухомою зарядженою частинкою.

Розв'язання: Будемо вважати, що в СВ K' в початку системи координат (т. O') знаходиться заряджена частинка q (див. рис. 6.4.), де \vec{r}' – радіус-вектор, який визначає положення точки поля в СВ K' .

Компоненти 4-потенціалу в СВ K' згідно з означенням дорівнюють

$$\begin{aligned} \Phi'_1 &= \Phi'_2 = \Phi'_3 = 0, \\ \Phi'_4 &= \frac{i}{c} \cdot \varphi' = \frac{i}{c} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}. \end{aligned}$$

Щоб знайти електричне і магнітне поля в лабораторній системі відліку необхідно в цій системі відліку знайти компоненти 4-потенціалу. Ці компоненти знаходяться згідно з формулами перетворення для проекцій 4-векторів при переході від СВ K' до СВ K . Вони мають вигляд

$$\Phi_1 = \Gamma(\Phi'_1 - iB\Phi'_4)$$

$$\Phi_2 = \Phi'_2$$

$$\Phi_3 = \Phi'_3$$

$$\Phi_4 = \Gamma(\Phi'_4 + iB\Phi'_1)$$

І тоді компоненти 4-потенціалу в СВ K дорівнюють

$$\Phi_1 = -\Gamma iB \frac{i\varphi'}{c} = \Gamma \frac{\varphi'}{c^2} V$$

$$\frac{i\varphi}{c} = \Gamma \frac{i\varphi'}{c}, \quad \varphi = \Gamma\varphi'$$

Тобто $A_x = \frac{\varphi}{c^2} \cdot V$, де $\varphi = \Gamma \cdot \varphi'$ – значення скалярного потенціалу в СВ K .

Таким чином, електромагнітні потенціали РЗЧ в СВ K мають вигляд

$$\vec{A} = \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot \varphi, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \Gamma \quad (6.36)$$

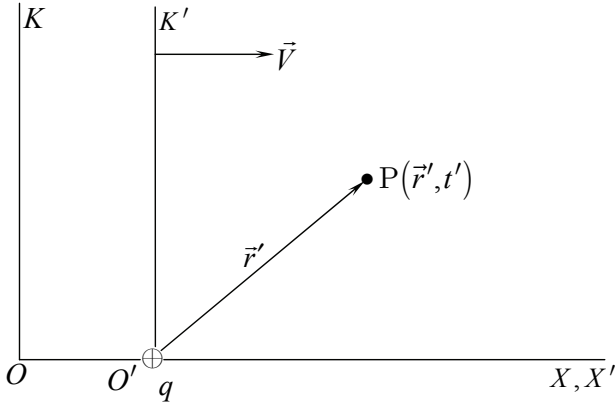


Рис. 6.4. Знаходження 4-потенціалу та ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ

А електромагнітне поле в СВ K згідно зі стандартною процедурою тоді буде визначатися

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{V} \cdot \varphi) = \frac{1}{c^2} [\nabla, (\varphi \vec{V})] = \frac{1}{c^2} \cdot [\Delta \varphi, \vec{V}] \quad (6.36a)$$

оскільки

$$[\nabla, (\varphi \vec{V})] = \varphi [\vec{\nabla}, \vec{V}] + [(\nabla \varphi), \vec{V}],$$

а $[\nabla, \vec{V}] = 0$, тому що $\vec{V} = \text{const}$.

І тому

$$[\nabla, (\varphi \vec{V})] = [\nabla \varphi, \vec{V}].$$

Напруженість електричного поля рухомої ЗЧ дорівнює

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\vec{V}}{c^2} \dot{\varphi} = -\nabla \varphi + \frac{\vec{V}}{c^2} (\vec{V} \cdot \nabla \varphi),$$

де $\dot{\varphi} = -(\vec{V} \cdot \nabla \varphi)$.

З попередньої формули знайдемо $-\nabla \varphi$

$$-\nabla\varphi = \vec{E} - \frac{\vec{V}}{c^2}(\vec{V} \cdot \nabla\varphi)$$

і підставимо в вираз (6.36a). Тому індукція магнітного поля дорівнює

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\nabla\varphi, \vec{V}] = -\frac{1}{c^2}[\vec{V}, \nabla\varphi] = \frac{1}{c^2}\left[\vec{V}, \left(\vec{E} - \frac{\vec{V}}{c^2}(\vec{V} \cdot \nabla\varphi)\right)\right] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}],$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}].$$

Знайдемо тепер конкретний вираз для напруженості електричного поля

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\vec{V}}{c^2}\dot{\varphi} = -\nabla\varphi + \frac{\vec{V}}{c^2}(\vec{V} \cdot \nabla\varphi).$$

Оскільки радіус-вектор, проведений з миттєвого положення ЗЧ в точку поля в СВ K , дорівнює

$$\vec{r} = (x - Vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то враховуючи перетворення Лорентца та вираз для $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, знаходимо, що в СВ K у цій же самій просторо-

рово-часовій точці скалярний потенціал $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}$ дорівнює

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot (y^2 + z^2)}}. \quad (6.37)$$

Тому для компонент напруженості електричного поля маємо

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{V^2}{c^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = (1 - B^2) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = (1 - B^2) \frac{q \cdot (x - Vt)}{4\pi\epsilon_0 s^3},$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1 - B^2) \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 s^3},$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (1 - B^2) \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 s^3},$$

де $s = \sqrt{(x - Vt)^2 + \left(1 - B^2\right) \cdot (y^2 + z^2)} = r\sqrt{1 - B^2 \sin^2 \theta}$,

$x - Vt = r \cdot \cos \theta$, $\frac{y^2 + z^2}{r^2} = \sin^2 \theta$ (див. рис. 6.5.).

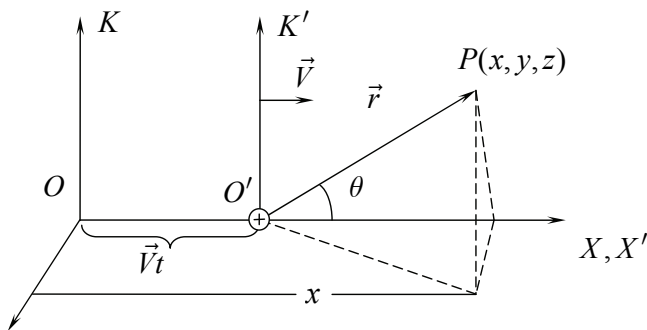


Рис. 6.5. ЗЧ рухається відносно системи відліку K з постійною швидкістю \vec{V}

І нарешті, ЕМП ЗЧ, що рухається рівномірно і прямолінійно, визначається

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{q \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2) \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (6.38)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (6.39)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}]. \quad (6.40)$$

Ми одержали точно такий же результат, як і з допомогою потенціалів Лієнара-Віхерта (Розділ 4).

6.6. Електромагнітне поле як антисиметричний 4-вимірний тензор. Рівняння Максвелла в тензорній формі

Використовуючи означення 4-потенціалу і координат події та формули, які визначають електромагнітне поле через векторний та скалярний потенціал, виразимо проекції векторів поля $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ через компоненти 4-потенціалу.

Оскільки вектор індукції магнітного поля довільного ЕМП, яке описується векторним потенціалом $\vec{A}(x, y, z, t)$, дорівнює

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

то декартові компоненти індукції магнітного поля в термінах 4-потенціалу мають вигляд

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (6.41)$$

А компоненти напруженості електричного поля $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

в термінах 4-потенціалу дорівнюють

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \cdot \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - i \cdot c \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = i \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right) \\ E_y &= i \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right) \\ E_z &= i \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Таким чином, усі компоненти електромагнітного поля можуть бути виражені через деякі комбінації похідних компонент 4-потенціалу за координатами 4-радіус-вектора події.

Очевидна симетрія в цих виразах (6.41) та (6.42) за індексами дозволяє ввести єдиний принцип побудови компонент поля через 4-потенціали в 4-вимірному просторі:

$$F_{\mu\nu} = c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) \quad (6.43)$$

$$\mu, \nu = 1..4$$

16 величин $F_{\mu\nu}$ називаються *компонентами 4-вимірного тензора електромагнітного поля*.

Таким чином, тензор електромагнітного поля має такий явний вигляд

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Тобто, виходячи з рівнянь Максвелла та принципу відносності, два вектора електромагнітного поля \vec{E} і \vec{B} можуть бути виражені за допомогою деякого єдиного алгоритму через похідні за координатами події від 4-потенціалу (6.41) та (6.42), з одного боку, та через компоненти тензора ЕМП (6.44), з іншого.

Можна, таким чином, розглядати всі ці компоненти (16 величин, які пропорційні декартовим проєкціям векторів ЕМП \vec{E} і \vec{B}) як окремі «проєкції» більш загального фізико-математичного об'єкта – тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$.

Найбільш цікавими є формули перетворення компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої.

Оскільки при переході від однієї системи відліку до іншої координати події перетворюються за формулами

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k,$$

де α_{ik} – матриця перетворень Лорентца (див. параграф 6.1), то компоненти 4-вимірного тензора другого рангу при переході від СВ K' , до СВ K , перетворюються згідно з формулами

$$F_{ik} = \alpha_{im} \cdot \alpha_{kl} \cdot F'_{ml}. \quad (6.45)$$

При цьому ми бачимо, що електричне та магнітне поля, які були незалежні одне від одного в системі координат, у системі відліку перестають бути незалежними.

До речі, можна дати й таке означення тензору II рангу: тензором електромагнітного поля II-го рангу називається сукупність 16-ти компонент (6.44), які при переході від однієї системи відліку до іншої перетворюються згідно з формулами (6.45).

Можна також ввести тензор електромагнітного поля в середовищі, компоненти якого визначаються таким чином:

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Тензор (6.46) одержують з (6.44), замінюючи компонент $c\vec{B}$ на компоненти \vec{H} , а компонент $-i\vec{E}$ на компоненти $-ic\vec{D}$

Використовуючи зв'язок вектора поляризації \vec{P} та вектора намагнічування \vec{I} з векторами поля, відповідно, \vec{E} та \vec{D} і \vec{B} та \vec{H} :

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H},$$

а також тензори ЕМП у вакуумі (6.44) і в середовищі (6.46), уводимо і тензор електричного та магнітного моментів:

$$m_{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot F_{ik} - f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & I_z & -I_y & icP_x \\ -I_z & 0 & H_x & icP_y \\ I_y & -I_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.47)$$

Запишемо рівняння Максвелла в тензорній формі. Так, перша пара рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

набуває вигляду

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (6.48)$$

А друга пара рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho$$

в тензорній формі записується наступним чином:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = s_\mu. \quad (6.49)$$

Закон Ома в диференціальній формі $\vec{j} = \lambda \cdot \vec{E}$ через тензор електромагнітного поля записується таким чином:

$$s_\mu = \frac{\lambda}{c} \cdot \sum_\nu F_{\mu\nu} \cdot v_\nu, \quad (6.50)$$

де λ – питома електропровідність, s_μ – компонента 4-струму, v_ν – компонента 4-швидкості: $v_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}$.

6.7. Перетворення компонент тензора електромагнітного поля при зміні системи відліку

Щоб знайти формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої, використаємо формули, що визначають правила перетворення компонент тензора та явний вигляд тензора електромагнітного поля

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Наприклад, компонента F_{12} тензора ЕМП в СВ K пов'язана наступним чином з компонентами F'_{ml} тензора ЕМП в СВ K' (див. (6.45)):

$$F_{12} = \alpha_{1m} \cdot \alpha_{2l} \cdot F'_{ml}$$

Таким чином, кожна компонента тензора електромагнітного поля в СВ K є лінійною комбінацією всіх інших компонент тензора, взятих в СВ K' .

Тобто електричне та магнітне поля виявляються пов'язані органічно, нерозривно:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \alpha_{11}\alpha_{2l}F'_{1l} + \alpha_{12}\alpha_{2l}F'_{2l} + \alpha_{13}\alpha_{2l}F'_{3l} + \alpha_{14}\alpha_{2l}F'_{4l} = \\ &= \Gamma cB'_z + (-iB\Gamma) \cdot iE'_y = \Gamma cB'_z + B\Gamma E'_y = c\Gamma \left(B'_z + \frac{1}{c^2}VE'_y \right). \end{aligned}$$

Таким чином, для проекції індукції магнітного поля B_z маємо такий зв'язок з компонентами ЕМП в СВ K' :

$$B_z = \Gamma \left(B'_z + \frac{1}{c^2}VE'_y \right). \quad (6.51)$$

Таким же способом можна одержати формули перетворення для всіх інших компонент електромагнітного поля при переході від СВ K' до СВ K (порівняйте з формулами (6.4) та (6.5)):

$$E_x = E'_x, E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y) \quad (6.52)$$

$$B_x = B'_x, B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right), B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right) \quad (6.53)$$

Формули перетворення компонент ЕМП в середовищі одержимо, використовуючи тензор (6.46). Ці формули раніше були також обґрунтовані іншим способом (див. (6.7) та (6.8)).

З означень тензора електричного та магнітного моментів, (6.47), компоненти електричного та магнітного моментів перетворюються при переході від СВ K' до СВ K за такими формулами:

$$P_x = P'_x, P_y = \Gamma\left(P'_y - \frac{V}{c^2}I'_z\right), P_z = \Gamma\left(P'_z + \frac{V}{c^2}I'_y\right) \quad (6.54)$$

$$I_x = I'_x, I_y = \Gamma(I'_y + VP'_z), I_z = \Gamma(I'_z - VP'_y) \quad (6.55)$$

Проілюструємо використання (6.54) і (6.55) на конкретному прикладі.

Припустимо, що в СВ K' магнітний момент дорівнює нулеві, $\vec{I}' = 0$, а вектор поляризації не дорівнює нулю, $\vec{P}' \neq 0$.

Тоді на основі формул (6.54) і (6.55) у СВ K з'явиться як електричний, так і магнітний моменти

$$P_y = \Gamma P'_y,$$

$$I_z = \Gamma V P'_y.$$

Якщо в СВ K' існує тільки намагнічене середовище $\vec{P}' = 0, \vec{I}' \neq 0$, то в системі відліку K це ж середовище буде спостерігатися не тільки намагніченим, але і поляризованим:

$$I_y = \Gamma I'_y, \quad I_z = \Gamma I'_z,$$

$$P_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} I'_z; \quad P_z = \Gamma \frac{V}{c^2} I'_y.$$

Остання ситуація реалізується, наприклад, якщо в СВ K' в площині $X'O'Y'$ знаходиться рамка зі струмом, рис. 6.6. Нехай довжина і ширина рамки дорівнюють, відповідно, l' та b' . Очевидно, що в СВ K' рамка зі струмом має магнітний момент \vec{I}' , значення якого дорівнює $I' = i'S' = i'l'b'$.

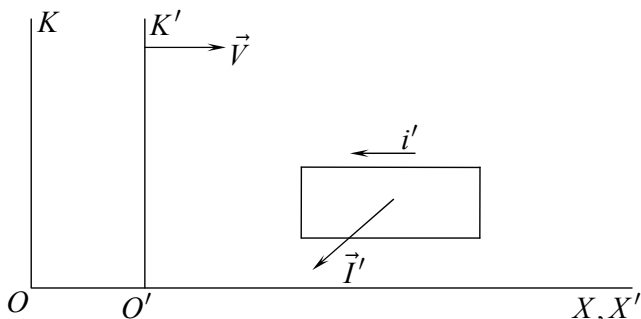


Рис. 6.6. Рамка зі струмом i' нерухома в СВ K' в площині $X'O'Y'$

Оскільки рухомий провідник зі струмом з точки зору СВ K характеризується об'ємною густиною заряду (6.29а):

$$\rho = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot V}{\sqrt{1 - B^2}},$$

то дипольний момент цієї рамки буде рівним величині

$$\begin{aligned} P_y &= q \cdot b' = \rho \pi r_0^2 \cdot l' \sqrt{1 - B^2} \cdot b' = \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot V}{\sqrt{1 - B^2}} \pi r_0^2 \cdot l' \sqrt{1 - B^2} \cdot b' = \Gamma \frac{V}{c^2} I'_z. \end{aligned}$$

Рис. 6.7. ілюструє співвідношення між дипольним та магнітним моментами в цій задачі.

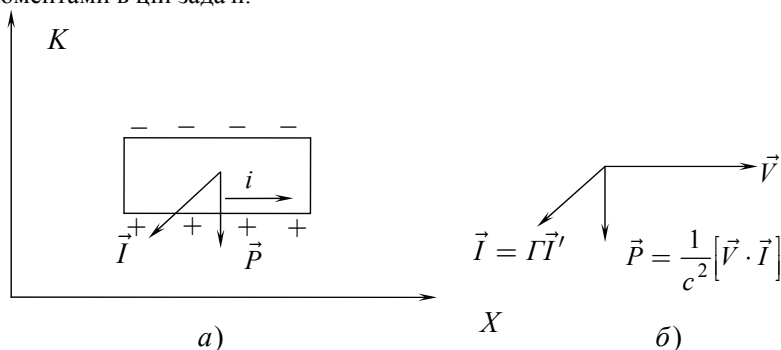


Рис. 6.7. Рамка зі струмом в СВ K має і магнітний момент і дипольний момент

Тобто, рухоме намагнічене тіло з точки зору лабораторної системи відліку буде виглядати поляризованим. Цей релятивістський ефект лежить в основі явища уніполярної індукції та основі роботи уніполярних генераторів.

6.8. Відносність електричного та магнітного полів

Формули перетворення компонент електромагнітного поля (6.52) (6.53) відображають та ілюструють явище відносності електричного та магнітних полів. Дійсно, якщо в СВ K' існує тільки електричне поле, а магнітне поле відсутнє, то в СВ K будемо мати і електричне поле, поперечні компоненти якого зростають в Γ разів, і магнітне поле, компоненти індукції якого B_y і B_z .

І навпаки, якщо в СВ K' існує тільки магнітне поле, а електричне поле відсутнє, то в СВ K , крім збільшення магнітного поля в Γ разів, виникне й електричне поле, поперечні компоненти якого визначаються рівняннями

$$E_y = \Gamma(VB'_z), \quad E_z = \Gamma(-VB'_y).$$

Оскільки будь-яка компонента тензора ЕМП в СВ K є лінійною комбінацією всіх компонент тензора в СВ K' , то при переході від однієї СВ до іншої електричне поле може «з'явитися», наприклад, за рахунок того, що в другій СВ було тільки магнітне поле, і навпаки.

Саме цей фізичний факт неможливо відобразити в математичному апараті, якщо спробувати подати вектори \vec{E} та \vec{B} як компоненти деякого 4-вектора. Якби кожний з векторів \vec{E} чи \vec{B} входив у «свій», так би мовити, 4-вектор, то при перетвореннях Лорентца кожен з векторів \vec{E} чи \vec{B} в СВ K виражався б тільки через компоненти «свого» 4-вектора в СВ K' .

І при цьому ми бачимо, що електричне та магнітне поля, які були незалежними одне від одного в довільній системі координат, у системах відліку, що знаходяться у відносному русі, перестають бути незалежними.

Властивості поля, що відображені в законах його перетворення, є локальними властивостями. Значення \vec{E} та \vec{B} в деякій просторово-часовій точці СВ K однозначно визначають компоненти поля в СВ K' у тій самій просторово-часовій точці.

Дослідимо більш детально ФПКЕМП (6.52) (6.53).

Напруженість електричного та індукцію магнітного полів ми можемо розкласти на два взаємно перпендикулярні складові компоненти поля, паралельні до вісі OX та перпендикулярні до вісі OX . Наприклад, $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$.

Тоді формули перетворення (6.52) та (6.53) можна записати наступним чином:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}]), \quad (6.60)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}] \right). \quad (6.61)$$

Оскільки \vec{B}'_{\parallel} та \vec{V} колінеарні, то

$$[\vec{V}, \vec{B}'] = [\vec{V}, \vec{B}'_{\parallel}] + [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] = [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}],$$

Аналогічно

$$[\vec{V}, \vec{E}'] = [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}].$$

Тому останні формули набувають вигляду

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'] \right). \quad (6.62)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'] \right). \quad (6.63)$$

Деякі наслідки формул (6.62) та (6.63).

Нехай в СВ K' магнітне поле відсутнє ($\vec{B}' = 0$), а електричне поле описується вектором \vec{E}' . Тоді в СВ K напруженість електричного поля визначається

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \vec{E}_{\perp} = \Gamma \vec{E}'_{\perp}$$

Тому сумарне електричне поле в СВ K буде

$$\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \Gamma \vec{E}'_{\perp}. \quad (6.64)$$

А індукція магнітного поля дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \Gamma \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'] = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \Gamma \vec{E}'_{\perp}],$$

оскільки $[\vec{V}, \vec{E}'_{\parallel}] = 0$, то останній результат можна подати у вигляді

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, (\vec{E}'_{\parallel} + \Gamma \vec{E}'_{\perp})] = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}]. \quad (6.65)$$

Тобто вектор індукції магнітного поля в СВ K буде перпендикулярний вектору \vec{E} .

Іншими словами, у тому випадку, коли електричне поле \vec{E}' переміщується відносно СВ K' , у системі відліку K виникає індукція магнітного поля \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}], \quad (6.65a)$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля в СВ K . Причому вектор індукції магнітного поля в СВ K буде перпендикулярний вектору \vec{E} .

Рис. 6.8 ілюструє взаємну орієнтацію векторів поля \vec{E}, \vec{B} та «швидкості руху поля \vec{E}' », \vec{V} .

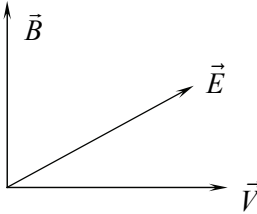


Рис. 6.8. Взаємна локальна орієнтація векторів $\vec{V}, \vec{E}, \vec{B}$ у СВ K , якщо в СВ K' існує лише одне електричне поле \vec{E}'

Результат (6.65а) можна сформулювати і так: рухоме електричне поле породжує магнітне поле. Слід зауважити, що коли ми говоримо про «рух поля», то маємо на увазі рух джерел поля.

Нехай тепер у СВ K' відсутнє електричне поле ($\vec{E}' = 0$), а магнітне поле не дорівнює нулю, $\vec{B}' \neq 0$. Використовуючи ФПКЕМП (6.63) та (6.62), знайдемо вектори \vec{E} та \vec{B} в СВ K .

По перше, індукція магнітного поля в СВ K дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp}$$

А напруженість електричного поля в СВ K , згідно з (6.60) і (6.62), визначається

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'] \right) = -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'] = \\ &= -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V}, \Gamma \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V}, (\vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp})]. \end{aligned}$$

Тобто, якщо в СВ K' $\vec{E}' = 0$, тоді в СВ K виникає електричне поле, напруженість якого

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}], \quad (6.66)$$

де \vec{B} – вектор індукції магнітного поля в СВ K .

Наслідок (6.66) прокоментувати можна і так. При переміщенні магнітного поля \vec{B}' зі швидкістю \vec{V} в СВ K виникає електричне поле напруженістю $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$. Тобто рухоме магнітне поле породжує електричне поле, причому вектори $\vec{V}, \vec{B}, \vec{E}$ утворюють ліву трійку векторів, рис. 6.9.

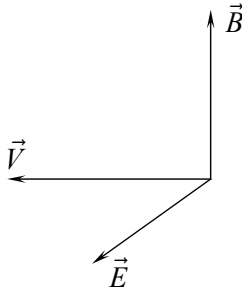


Рис. 6.9. Взаємна локальна орієнтація векторів $\vec{V}, \vec{B}, \vec{E}$ в СВ K , якщо в СВ K' існує лише одне магнітне поле \vec{B}'

Тобто, якщо в системі K' існує тільки електричне, або тільки магнітне поле, то в системі відліку K з'являється магнітне і електричне поле відповідно, вектори індукції та напруженості яких перпендикулярні, відповідно, вектору \vec{E} та \vec{B} . Можна сказати і так: у всіх інших системах відліку вектори \vec{E} та \vec{B} перпендикулярні один одному.

Має місце **q обернене твердження**: якщо в системі відліку K' вектор напруженості електричного поля \vec{E}' перпендикулярний вектору індукції магнітного поля \vec{B}' , то тоді завжди можна знайти систему відліку, у якій буде існувати виключно електричне або виключно магнітне поле.

Як же знайти напрямок і величину швидкості такої системи відліку? Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 6.6. Нехай у системі відліку K' є взаємно перпендикулярні напруженість електричного поля \vec{E}' і вектор індукції \vec{B}' магнітного поля. Як повинна рухатися СВ K' відносно СВ K , щоб в СВ K напруженість електричного поля $\vec{E} = 0$?

Розв'язання: Орієнтацію осей СВ K' слід вибрати так, щоб вісь $O'X'$ була перпендикулярна площині, у якій лежать вектори \vec{E}' та \vec{B}' . Тоді $\vec{E}'_{\parallel} = 0$, а значить, і $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} = 0$, (тобто в СВ K повздовжня компонента електричного поля дорівнює нулеві), а $\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}'$.

Але згідно з умовою задачі повинне бути $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} = 0$. Очевидно, що це буде при умові, коли (див. (6.62))

$$\vec{E}_\perp = \Gamma(\vec{E}'_\perp - [\vec{V}, \vec{B}']) = 0$$

Тобто з попередньої рівності одержуємо

$$\vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'] = 0,$$

$$\vec{E}' = [\vec{V}, \vec{B}'].$$

Але нам треба знайти величину швидкості СВ K' . Помножимо останню рівність векторно на \vec{B}' і врахуємо, що $\vec{B}' \perp \vec{V}$:

$$[\vec{B}', \vec{E}'] = [\vec{B}', [\vec{V}, \vec{B}']] = \vec{V} \cdot (B'^2) - \vec{B}' \cdot (\vec{B}' \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (B'^2).$$

Звідси одержуємо, що при умові $cB' > E'$ СВ K' повинна рухатися зі швидкістю (див. рис. 6.10.)

$$\vec{V} = \frac{[\vec{B}', \vec{E}']}{B'^2}. \quad (6.67)$$

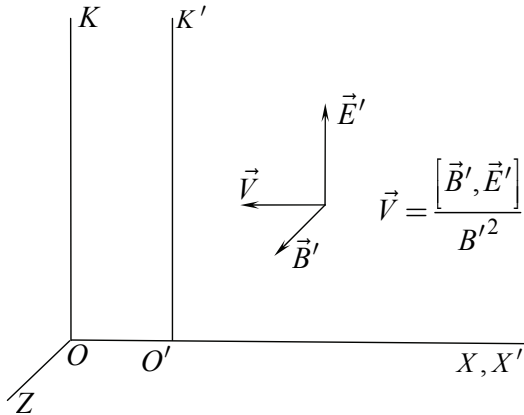


Рис. 6. 10. Щоб у СВ K напруженість електричного поля $\vec{E} = 0$ СВ K' повинна рухатися зі швидкістю, яка визначається формулою (6.67)

Умова $cB' > E'$ впливає з наявності інваріанту $I_1 = c^2 \cdot B^2 - E^2$ в довільному ЕМП (див. нижче) та очевидної вимоги СТВ $V < c$.

Результат (6.67) можна пояснити і таким чином.

СВ K' повинна рухатися так, щоб електричне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{E}_{B'} = -\Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}']$, компенсувало те електричне поле, що виникає в СВ K внаслідок руху поля \vec{E}' , $\vec{E}_{E'} = \Gamma \vec{E}'$, рис. 6.11.

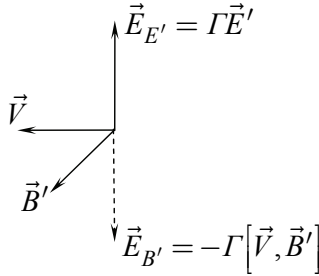


Рис. 6.11. Електричне поле буде відсутнє в СВ K , якщо електричне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{E}_{B'} = -\Gamma[\vec{V}, \vec{B}']$, компенсується електричним полем, яке виникає внаслідок руху поля \vec{E}' , $\vec{E}_{E'} = \Gamma\vec{E}'$

Тобто

$$\begin{aligned}\vec{E}_{E'} &= -\vec{E}_{B'} \quad , \\ \vec{E} &= \Gamma\vec{E}' - \Gamma[\vec{V}, \vec{B}'] = 0.\end{aligned}$$

І ми приходимо до результату (6.67). Електричне поле в СВ K може зникнути при умові, що $cB' > E'$.

Приклад 6.7. Знайдемо напрямок і величину швидкості системи відліку K' , при якій в СВ K буде відсутнє магнітне поле, якщо в СВ K' вектор напруженості електричного поля \vec{E}' перпендикулярний вектору \vec{B}' .

Розв'язання: Аналогічно до розв'язання попереднього прикладу, орієнтацію осей СВ K' слід вибрати так, щоб вісь $O'X'$ була перпендикулярна площині, в якій лежать вектори \vec{E}' та \vec{B}' . Тоді згідно з умовою задачі можна записати:

$$\vec{B}'_x = 0, \quad \vec{B}_x = \vec{B}'_x = 0, \quad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}'$$

А в СВ K повинно бути $\vec{B}_{\perp} = \vec{B} = 0$.

Умова $\vec{B}_{\perp} = \vec{B} = 0$ буде мати місце тільки тоді, коли згідно з формулою перетворення (6.63),

$$\vec{B}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}']\right) = 0.$$

Звідки одержуємо

$$\vec{B}'_{\perp} = \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'].$$

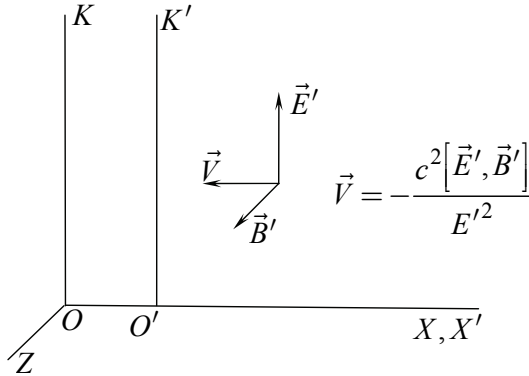


Рис. 6.12. Щоб в СВ K напруженість магнітного поля $\vec{B} = 0$ СВ K' повинна рухатися зі швидкістю, яка визначається формулою (6.68)

Помножимо попередню формулу зліва векторно на \vec{E}' :

$$[\vec{E}', \vec{B}'] = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{E}', [\vec{V}, \vec{E}']] = -\frac{1}{c^2} \vec{V} (E'^2).$$

Тобто швидкість СВ K' , при якій в СВ K відсутнє магнітне поле, дорівнює, рис. 6.12,

$$\vec{V} = -\frac{c^2 \cdot [\vec{E}', \vec{B}']}{E'^2}, \quad V = \frac{c^2 \cdot B'}{E'} \quad (6.68)$$

при умові, що в системі відліку K' $E' > cB'$.

Знаходження величини та напрямку швидкості руху такої СВ K' наочно можна пояснити і так: в СВ K ми повинні мати тільки електричне поле, бо магнітне поле повинне зникнути. Але магнітне поле в СВ K створюється рухом магнітного поля \vec{B}' ($\vec{B}_{B'} = \Gamma \vec{B}'$) і рухом електричного поля \vec{E}' ($\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$).

А в сумі ми повинні отримати нуль. Тобто на основі умови цього прикладу слід записати

$$\vec{B}_{B'} = \Gamma \vec{B}' = -\vec{B}_{E'} = -\frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'],$$

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'].$$

Звідки й отримуємо (6.68) (див. рис. 6.13).

Аналогічні висновки і наслідки можна отримати і з формул (6.54) та (6.55), (6.7) та (6.8), якщо їх подати у формах, подібних до (6.62) та (6.63).

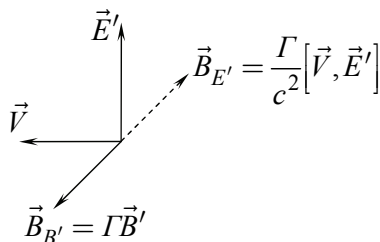


Рис. 6.13. Магнітне поле буде відсутнє в СВ K якщо магнітне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{B}_{B'} = \Gamma \vec{B}'$, компенсується магнітним полем, яке виникає внаслідок руху \vec{E}' , $\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$

6.9. Інваріанти електромагнітного поля. Приклади

Може бути показано безпосередньою перевіркою, що в будь-якій інерційній системі відліку залишаються інваріантними такі комбінації напруженості електричного та індукції магнітного полів:

$$I_1 = c^2 \cdot B^2 - E^2, \quad (6.69)$$

$$I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (6.70)$$

З цих двох інваріантів впливає ряд **висновків**.

1. Якщо в деякій системі відліку вектор індукції магнітного поля \vec{B}' перпендикулярний вектору напруженості електричного поля \vec{E}' , то ця перпендикулярність, взагалі кажучи, залишається і в будь-якій іншій системі відліку.

2. Якщо в деякій системі відліку $cB' = E'$ і поле \vec{B}' перпендикулярне \vec{E}' , то такі ж співвідношення мають місце для будь-якої іншої системи відліку. Приклад – плоска електромагнітна хвиля.

3. Якщо в деякій системі відліку є тільки електричне або тільки магнітне поля, то в будь-якій іншій системі відліку спостерігається і електричне, і магнітне поля, причому вектори \vec{B} і \vec{E} перпендикулярні між собою.

4. Якщо в системі відліку K' $\vec{E}' > c \cdot \vec{B}'$, то і в будь-якій іншій системі відліку ця нерівність зберігається.

5. Якщо в СВ K' існують довільні за величиною і напрямком напруженість електричного та індукція магнітного полів, то можна завжди знайти систему відліку K , в якій $\vec{E} \parallel \vec{B}$. Швидкість СВ K' відносно такої системи відліку визначається формулою (**Задача 6.5**):

$$\vec{V} = \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{c^2 \cdot B'^2 + E'^2} \cdot [\vec{B}', \vec{E}']. \quad (6.71)$$

Таким чином, електричне та магнітне поля, які описуються векторами \vec{E} та \vec{B} , не незалежні одне від одного. Вектори \vec{E} та \vec{B} окремо – це дві сторони прояву в 3-вимірному просторі об'єкта більш складної природи, тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$. У реальності, що існує незалежно від нас, спостерігається електромагнітна взаємодія, яка адекватно описується тензором електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$. А поділ цього поля на електричне з напруженістю \vec{E} та магнітне з індукцією \vec{B} є умовним, залежним від СВ. Можна сказати, що електричне і магнітне поля – це «проекції» тензора $F_{\mu\nu}$ на довільну СВ. «Електрика і магнетизм – дві різні сторони однієї й тієї ж суті» [5].

Нагадаємо, що всі попередні результати цього розділу ми отримали, виходячи з 4-вимірного формалізму. Тобто 4-вимірне формулювання законів фізики є більш глибоким, хоча і менш наочним. Одна з особливостей такого формулювання полягає в тому, що при цьому об'єднуються здавалося б зовсім різні за своєю фізичною природою (в 3-вимірному просторі) величини в 4-вимірні об'єкти: 4-вектори, 4-тензори.

Наприклад, 3-вимірний релятивістський імпульс та енергія утворюють 4-вектор енергії-імпульсу.

3-вимірний вектор поляризації \vec{P} та 3-вимірний вектор намагнічування \vec{I} є насправді, при 4-вимірному поданні електродинаміки, компонентами тензора m_{ik} (6.47).

Ці приклади можна продовжувати, говорячи про 4-вимірний хвильовий вектор, 4-радіус-вектор, 4-силу Мінковського, 4-швидкість, 4-прискорення, 4-потенціал, 4-струм.

Аналіз трансформаційних та інших властивостей цих 4-вимірних об'єктів і формулювання законів мовою цих об'єктів дають нові фізичні закономірності, пояснюють і проливають світло на давно відомі співвідношення, наповнюють ці, здавалося б різні за природою величини новим і глибоким фізичним змістом. Ці фізичні величини, які залежать від СВ і в цьому сенсі відносні, є своєрідними «проекціями» більш загальних величин, які від СВ вже не залежать.

Розглянемо ряд прикладів, що ілюструють застосування та властивості формул перетворення (6.52), (6.62), (6.63) і (6.53).

Приклад 6.8. Нехай в СВ K' в магнітному полі B'_y знаходиться нерухома заряджена частинка (протон). Знайти силу, що діє на протон в СВ K .

Розв'язання. Протон в СВ K' знаходиться в спокої, тому на нього в цій системі відліку не діє сила Лорентца. З ПВ випливає, що і в СВ K сила, що діє на протон, повинна дорівнювати нулю.

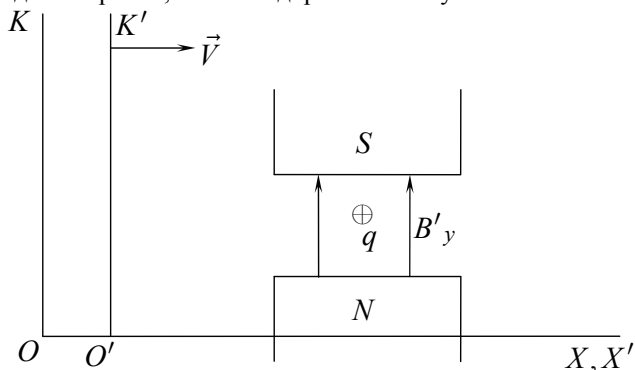


Рис. 6.14. У СВ K' в магнітному полі B'_y знаходиться нерухоми протон

Але в СВ K будуть існувати і електричне, і магнітне поля з напруженістю та індукцією, відповідно, $E_z = -\Gamma V B'_y$, $B_y = \Gamma B'_y$. З точки зору СВ K протон рухається в магнітному полі B_y зі швидкістю \vec{V} .

Тому на нього діє і сила Лорентца $F_L = qV B_y = q\Gamma V B'_y$, і сила з боку електричного поля $F_z^E = qE_z = -q\Gamma V B'_y$, які направлені протилежно одна одній, але однакові за величиною (рис. 6.15).

Тому результуюча сила, яка діє на протон дорівнює нулю, як того і вимагає ПВ.

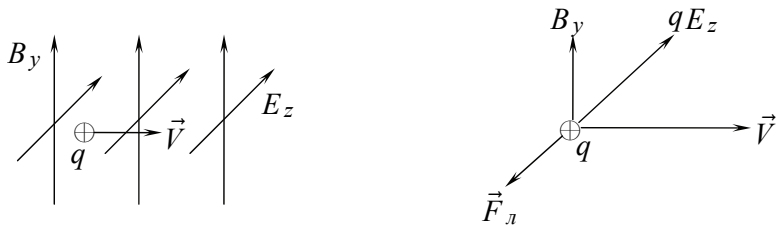


Рис. 6.15. Електромагнітне поле в СВ K та сили, які діють на заряджену частинку

Хоч протон відносно джерела магнітного поля не рухається, у K -системі магнітна сила, що діє на нього, не дорівнює нулю. *Суттєво тут те, що протон рухається відносно СВ K в певному магнітному полі.*

Приклад 6.9. Уявимо, що між пластинами нерухомого в СВ K' зарядженого конденсатора знаходиться в спокої протон. Чому дорівнює сила, що діє на нього в СВ K ? (рис. 6.16).

Розв'язання. Знаходимо спочатку за формулами (6.52) і (6.53) компоненти ЕМП в СВ K :

$$E_y = \Gamma E'_y, \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (6.72)$$

Тому сумарна сила, що діє на протон, з урахуванням напрямку векторів поля та напрямку його швидкості дорівнює

$$F_y = F_y^E - F_y^L = \Gamma q E'_y - q V B_z = q E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (6.73)$$

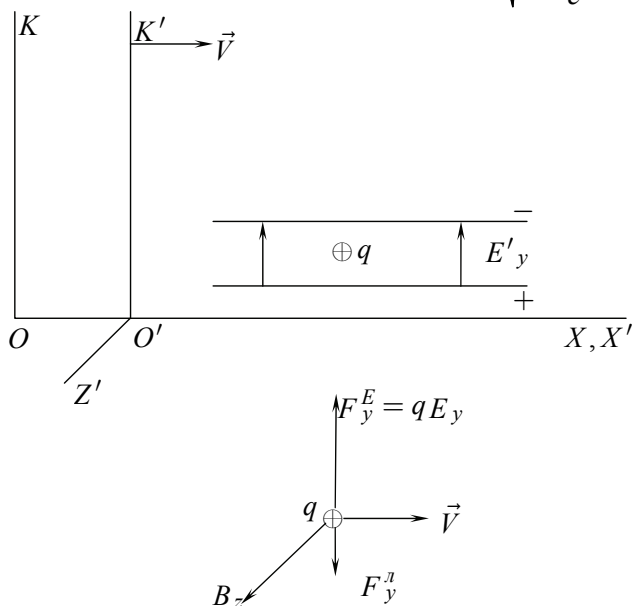


Рис. 6.16. Електромагнітні сили, що діють на протон в СВ K' та в СВ K .

Тобто, в СВ K сила зменшилася в Γ^{-1} раз у відповідності з вимогами СТВ (оскільки в СВ K' протон нерухомий, то повинне мати місце таке

співвідношення між поперечними складовими сили $F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$).

Зауважимо, що при бажанні аналіз електромагнітних сил, які діють на протон у цих двох прикладах, можна покласти в основу доведення співвідношень (останнє можна розглядати як самостійне завдання учням чи як тему науково-оглядового реферату)

$$E_z = -\Gamma V B'_y \text{ та } B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y.$$

6.10. Приклади розв'язування задач

Задача 6.1. У СВ K' у магнітному полі з індукцією B'_z знаходиться заряджений конденсатор разом з нерухомим протоном у ньому (Рис. 6.17.). Як повинна рухатися СВ K' , щоб в СВ K існувало:

А) тільки електричне поле, ($\vec{B} = 0$);

Б) тільки магнітне поле ($\vec{E} = 0$)?

Знайти також силу, що діє на протон у СВ K у випадках А) і Б).

Розв'язання: А. СВ K' повинна рухатися так, щоб індукція B_z в СВ K дорівнювала нулю. Тоді з формул перетворення (6.52) та (6.53) одержуємо

$$B_z = \Gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) = 0, \text{ звідси } V = -\frac{c^2 B'_z}{E'_y}, \quad (6.74)$$

де знак « \leftarrow » означає, що СВ K' повинна рухатися в сторону від'ємних значень осі OX , порівняти з формулою (6.68).

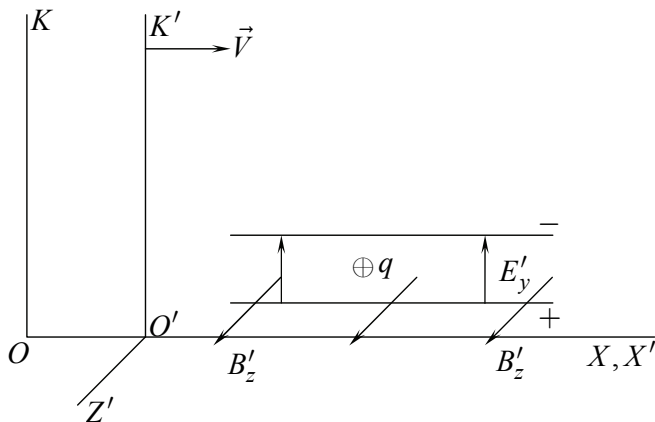


Рис. 6.17. Електромагнітне поле в СВ K'

Цей же результат можна отримати на основі таких фізичних міркувань. Очевидно, що СВ K' повинна рухатися так, щоб магнітне поле, яке породжується в СВ K рухомим електричним полем E'_y ($B_z = \frac{V}{c^2} \Gamma E'_y$) повністю компенсувало магнітне поле $B_z = \Gamma B'_z$.

З рис. 6.17 видно, що складова магнітного поля, яке породжується рухомим електричним полем E'_y , повинна бути направлена протилежно B'_z (у бік від'ємних значень осі OZ), див. також **Приклад 6.7**.

Це може бути тільки в тому випадку, коли швидкість руху СВ K' направлена в сторону від'ємних значень осі OX (оскільки вектори швидкості \vec{V} , напруженості електричного поля \vec{E} , яке рухається, та вектор індукції магнітного поля, яке виникає внаслідок руху цього електричного поля, утворюють правовинтову систему).

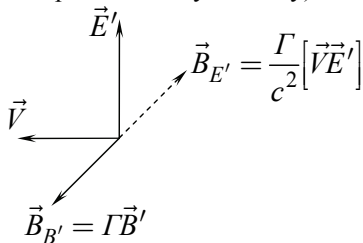


Рис. 6.18. Магнітне поле буде відсутнє в СВ K , якщо магнітне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{B}_{B'} = \Gamma \vec{B}'$, компенсується магнітним

полем, яке виникає внаслідок руху \vec{E}' , $\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$

Тому чисельне значення швидкості руху СВ K' знаходимо із співвідношення

$$\Gamma B'_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y,$$

що підтверджує (6.74). Таким чином в СВ K буде існувати тільки електричне поле, напруженість якого дорівнює (з формули (6.52)):

$$E_y = \Gamma (E'_y + VB'_z),$$

де V визначається формулою (6.74).

Знайдемо тепер силу, яка діє на протон. Ураховуючи вираз (6.74) для швидкості \vec{V} , одержуємо для значення сили, що діє на протон в СВ K ,

$$F_y = qE_y = q\Gamma E'_y \left(1 - \frac{c^2 \cdot B_z'^2}{E_y'^2} \right) = q\Gamma E'_y \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (6.75)$$

у відповідності з вимогами СТВ.

Б. Щоб в K -системі було відсутнє електричне поле, K' -система повинна рухатися зі швидкістю, величина і напрямок якої визначається з другого співвідношення формули (6.52):

$$E_y = \Gamma \left(E'_y + VB'_z \right) = 0, \text{ тоді } V = -\frac{E'_y}{B'_z}, \quad (6.76)$$

що зрозуміло і з наступних фізичних міркувань.

Напруженість електричного поля в СВ K складається з двох доданків: $\Gamma E'_y$ – напруженості поля, зумовленого перетворенням поперечної складової поля E'_y , при переході з СВ K' до СВ K , і доданка, який зумовлений породженням електричного поля рухомих магнітним полем B'_z , $\Gamma VB'_z$. А результуюче електричне поле в СВ K , згідно з умовою задачі, дорівнює нулю.

Значить, складова напруженості електричного поля $\Gamma VB'_z$ повинна бути направлена протилежно $\Gamma E'_y$, і оскільки вектори \vec{V} , \vec{B} , \vec{E} при русі магнітного поля (і виникненні електричного поля напруженістю \vec{E}) утворюють лівогвинтову систему, то необхідно, щоб СВ K' рухалася вліво (у напрямку від'ємних значень осі OX) зі швидкістю, яку знаходимо з рівності

$$\Gamma E'_y = -\Gamma VB'_z,$$

що еквівалентно (6.76), порівняти також із **Прикладом 6.6** та формулою (6.67).

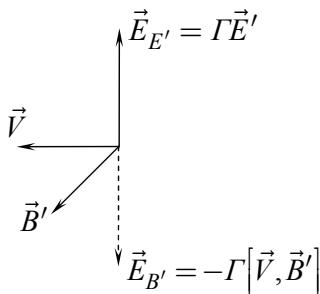


Рис. 6.19. Електричне поле в СВ K дорівнює нулю, якщо поля $\vec{E}_{E'}$ і $\vec{E}_{B'}$ компенсують одне одного.

Чому ж дорівнює сила, що діє на протон у саме такій СВ? Із загальних міркувань ясно, що ця сила буде менша від qE'_y в Γ разів. Упевнімося в цьому безпосередньо, урахувавши (6.53) і те, що на протон буде діяти тільки магнітна сила в СВ K :

$$F_y = qVB_z = qV \left(\Gamma B'_z - \frac{\Gamma VE'_y}{c^2} \right) = qE'_y \Gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

У загальному випадку, при довільному електромагнітному полі в СВ K' і довільній швидкості руху зарядженої частинки, для знаходження значення сили, яка діє на неї в СВ K , треба знайти за формулами (6.52) і (6.53) складові поля, а швидкість частинки в СВ K знайти по релятивістським формулам додавання швидкостей.

Задача 6.2. Природа сили Лорентца. Нехай в СВ K є магнітне поле \vec{B} , і в ньому зі швидкістю \vec{V} рухається ЗЧ. Показати, що сила Лорентца, яка діє на ЗЧ в СВ K , – це сила з боку електричного поля, що існує у власній СВ зарядженої частинки.

Розв'язання: Дійсно, у СВ K' , що пов'язана із ЗЧ, згідно з ФПКЕМП, спостерігаємо електричне поле:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \Gamma(E_y - VB_z) = -\Gamma VB_z \\ E'_z &= \Gamma(E_z + VB_y) = \Gamma VB_y. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Урахувавши, що

$$[\vec{V}, \vec{B}] = \vec{i}(V_y B_z - V_z B_y) + \vec{j}(V_z B_x - V_x B_z) + \vec{k}(V_x B_y - V_y B_x),$$

та згідно з умовами задачі $\vec{V} = \vec{i}V$ напруженість електричного поля в СВ K' можна подати у вигляді

$$\vec{E}' = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}],$$

і таким чином, записати вираз для сили, що діє в СВ K' на ЗЧ

$$\vec{F}' = q\vec{E}'.$$

При вимірюваннях цієї електричної сили в СВ K ми повинні знайти (оскільки заряд у СВ K' нерухомий)

$$\vec{F} = \vec{F}' \sqrt{1 - B^2}.$$

Іншими словами з точки зору СВ K сила дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E}' \cdot \sqrt{1 - B^2} = q\Gamma[\vec{V}, \vec{B}] \cdot \sqrt{1 - B^2} = q[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (6.78)$$

Тобто, ми одержали вираз для сили Лорентца.

Таким чином, сила Лорентца – це сила з боку електричного поля \vec{E}' , яке існує у ВСВ зарядженої частинки, але ця сила вимірюється приладами, що нерухомі в лабораторній системі відліку (СВ K).

Задача 6.3. Знайти електромагнітне поле рівномірно та прямолінійно рухомої зарядженої частинки.

Розв'язання: Сумістимо початок декартової системи відліку K' з точковим зарядом q . У цій системі напруженість електричного поля в довільній точці простору, що визначається радіус-вектором \vec{r}' , описується законом Кулона, а магнітне поле відсутнє:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; \quad E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; \quad E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad (6.79)$$

де $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

У СВ K заряд q рухається зі швидкістю V в напрямку додатних значень вісі OX . Вісі координат K' орієнтовані таким чином, що в момент часу $t' = t = 0$ вони збігаються з відповідними осями СВ K . Використовуючи формули перетворення компонент електромагнітного поля одержуємо

$$E_x = E'_x; \quad E_y = E'_y \cdot \Gamma; \quad E_z = E'_z \cdot \Gamma, \quad (6.80)$$

$$B_x = B'_x = 0; \quad B_y = -\Gamma \cdot \frac{V}{c^2} \cdot E'_z; \quad B_z = \Gamma \cdot \frac{V}{c^2} \cdot E'_y. \quad (6.81)$$

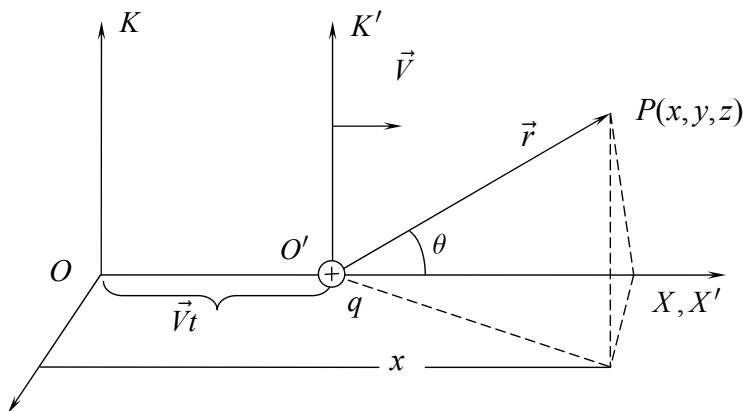


Рис. 6.20. До знаходження ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ

Виразимо тепер радіус-вектор r' , що визначає положення точки в СВ K' , через радіус-вектор \vec{r} проведений з миттєвого положення заряду q в СВ K у ту ж саму просторово-часову точку поля, рис. 6.20.

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \Gamma^2 \left[(x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2} \right], \\ r' &= \Gamma \cdot \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \Gamma \cdot \sqrt{(x - Vt)^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\Gamma^2}}. \end{aligned}$$

Але оскільки $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, див. рис. 6.20, то вираз для r' можна подати так:

$$\begin{aligned} r' &= \Gamma \cdot \left[(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \left(1 - \frac{V^2(y^2 + z^2)}{c^2 r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= r \cdot \Gamma \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

тобто

$$\left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} = r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6.82)$$

де $\sin^2 \theta = \frac{y^2 + z^2}{r^2}$.

І тоді на основі (6.80) одержуємо:

$$E_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q(x - Vt)\Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 r^3 \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$E_y = \frac{qy\Gamma}{4\pi\epsilon_0\Gamma^3 r^3 \left[(x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}};$$

$$E_z = \frac{qz\Gamma}{4\pi\epsilon_0\Gamma^3 r^3 \left[(x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}};$$

Ураховуючи формулу (6.82), для вектора напруженості електричного поля рухомої зарядженої частинки одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left[(x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}} = \\ &= \frac{q\vec{r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Індукція магнітного поля визначається за допомогою формул (6.81). Результат краще записати у векторній формі:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}], \quad (6.84)$$

де \vec{E} визначається формулами (6.83).

Нагадаємо, що формула (6.84) була обґрунтована декількома способами.

1. На основі інтерпретації закону Біо-Савара-Лапласа.
2. Використовуючи потенціали Лієнара-Віхерга.
3. Користуючись формулами перетворення 4-потенціалу.
4. І на кінець, з допомогою формул перетворення компонент електромагнітного поля.

Видно, що лінії \vec{B} утворюють концентричні кола з центром на вісі OX , уздовж якої рухається заряд q .

Конфігурація поля заряду, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат K , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом з ЗЧ.

Але для будь-якої фіксованої точки простору в СВ K вектори поля \vec{E} і \vec{B} є функціями часу.

Причому для ЕМП, яке визначається векторами поля (6.83) та (6.84), у будь-який момент часу в будь-якій точці простору мають місце фундаментальні співвідношення

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt}, \\ \text{rot}\vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt}. \end{aligned}$$

Перше з цих рівнянь дозволяє зробити висновок: **як явище електромагнітної індукції, так і закон ЕМІ є наслідком принципу відносності та закону Кулона.**

Задача 6.4. Знайти та проаналізувати ЕМП, яке виникає в немагнітному провіднику при його поступальному русі в однорідному магнітному полі.

Розв'язання: Проведемо аналіз традиційної фізичної моделі: відносно лабораторної СВ K в однорідному магнітному полі з постійною швидкістю рухається відрізок провідника (див. рис. 6.21).

Тобто в СВ K маємо поля $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = \vec{B}_\perp$.

СВ K' ми зв'яжемо із самим провідником. Спочатку проаналізуємо ЕМП у СВ K' та СВ K в точках простору, віддалених від металеві пластини.

Тоді, використовуючи обернені ФПКЕМП

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \Gamma(\vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}]), \quad (6.85)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}]\right), \quad (6.86)$$

для ЕМП в системі відліку K' одержуємо

$$\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}] \quad (6.87)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \Gamma\vec{B}_{\perp} \quad (6.88)$$

Тому при переході знову в СВ K із СВ K' на основі точних ФПКЕМП (6.60) та (6.61), одержуємо для ЕМП в просторі зовні провідника

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\perp} &= \Gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v}, \vec{B}'_{\perp}]) = \Gamma(\Gamma[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] - [\vec{v}, \Gamma\vec{B}_{\perp}]) = 0, \\ \vec{B}'_{\perp} &= \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}'_{\perp}]\right) = \Gamma\left(\Gamma\vec{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \Gamma[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]]\right) = \\ &= \Gamma^2\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{V^2}{c^2}\vec{B}_{\perp}\right) = \vec{B}_{\perp}.\end{aligned}$$

Тобто ми одержали вихідні значення ЕМП в СВ K .

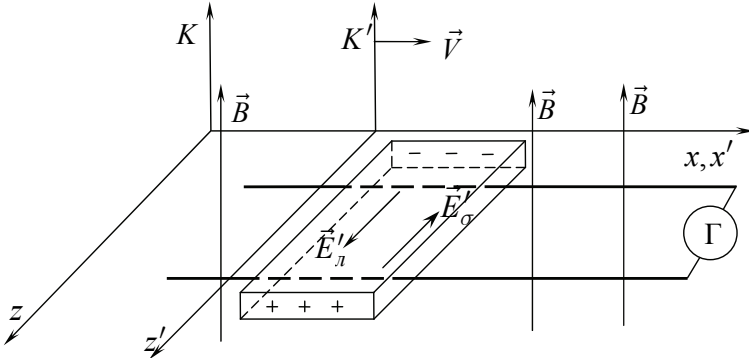


Рис. 6.21. Виникнення електричних полів в металевій пластині при її русі в однорідному магнітному полі

Тепер порівняємо процедуру та результат знаходження ЕМП в металевій пластині в СВ K' за вихідними даними в СВ K , а потім при переході від СВ K' до СВ K за точними ФПКЕМП.

У СВ K' в точках простору, достатньо віддалених від провідника, як уже відзначалося, ЕМП характеризується величинами

$$\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] \text{ та } \vec{B}'_{\perp} = \Gamma\vec{B}_{\perp}.$$

Електричне поле $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]$ викликає перерозподіл зарядів на поверхні металевієї пластини, які всередині цієї металевієї пластини повністю компенсують поле $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]$.

Тобто поле розділених зарядів у ВСВ пластини дорівнює

$$\vec{E}'_{\sigma} = -\Gamma[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]. \quad (6.89)$$

До речі, ситуація точно така ж, коли в однорідне електричне поле внести металевий провідник.

І тому з точки зору СВ K' в металевій пластині електричне поле дорівнює нулю.

До такого ж результату ми приходимо, аналізуючи явище з точки зору СВ K .

Як відомо, на ЗЧ при русі її із швидкістю \vec{V} в МП з індукцією \vec{B} діє сила $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}] = q[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$. Цей вираз в електродинаміці розглядаються як результат узагальнення сукупності дослідних даних [7, 9], або як наслідок ПВ (**Задача 6.2**).

Тому в СВ K під дією сили Лорентца $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ вільні заряди, які рухаються разом з пластиною, у самій пластині розділяються, і всередині неї, з точки зору СВ K , виникає електричне поле напруженістю

$$\left(\vec{E}_\perp\right)_{всрд} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]. \quad (6.90)$$

Іншими словами, поле сили Лорентца $\vec{E}_\perp = [\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ в СВ K повністю компенсується всередині пластини електричним полем розділених силою Лорентца вільних зарядів.

Таким чином, у СВ K' , що пов'язана з металевією пластиною існує ЕМП, яке всередині пластини, згідно з формулою (6.85), характеризується напруженістю електричного поля

$$\vec{E}'_{всрд} = \Gamma\left(\left(\vec{E}_\perp\right)_{всрд} + [\vec{V}, \vec{B}_\perp]\right) = \Gamma\left(\vec{E}_\sigma + [\vec{V}, \vec{B}_\perp]\right) = 0.$$

Тобто, з точки зору СВ K' , електричне поле всередині пластини $\vec{E}'_{всрд} = 0$, а з точки зору СВ K , електричне поле всередині пластини не дорівнює нулю, а рівне $\left(\vec{E}_\perp\right)_{всрд} = \vec{E}_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$.

Тоді, згідно з формулами перетворення поперечних компонент сил $\vec{E}_\sigma = \vec{E}'_\sigma \cdot \sqrt{1 - B^2}$, поле розділених зарядів у ВСВ пластини дорівнює

$$\vec{E}'_\sigma = -\Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp].$$

Тобто ми прийшли майже із незалежних міркувань, найбільш прозорих мовою сили Лорентца, до висновку, що з точки зору СВ K , електричне поле всередині пластини дорівнює $\left(\vec{E}_\perp\right)_{всрд} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$, а у ВСВ E'_σ визначається (6.89).

Тепер знайдемо індукцію магнітного поля всередині пластини з точки зору СВ K' . Очевидно слід скористатися формулою (6.86).

При цьому ми повинні розглядати поле $(\vec{E}_\perp)_{\text{сррд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ як просто існуюче в СВ K , а не таке, що рухається відносно СВ K .

Тобто в СВ K всередині пластини ЕМП визначається: \vec{B}_\perp , $(\vec{E}_\perp)_{\text{сррд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$.

Тоді це поле \vec{E}_σ рухається відносно СВ K' , а значить, у ВСВ пластини індукція МП дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{B}'_\perp &= \Gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}_\sigma]) = \Gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{V}, (-[\vec{V}, \vec{B}_\perp])]\right) = \\ &= \Gamma\vec{B}_\perp\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Тобто при такому розумінні в СВ K' всередині пластини $\vec{E}' = 0$, $\vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma}$.

Чи одержимо ми узгоджене рішення для ЕМП в СВ K за знайденими всередині пластини $\vec{E}' = 0$, $\vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma}$ полями в СВ K' ? Згідно з (6.60) та (6.61) одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= \Gamma(\vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'_\perp]) = \Gamma\left(0 - \left[\vec{V}, \frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma}\right]\right) = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp], \\ \vec{B}_\perp &= \Gamma\left(\vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}']\right) = \Gamma\left(\frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma} + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, 0]\right) = \vec{B}_\perp. \end{aligned}$$

Тобто маємо вихідні значення ЕМП всередині пластини в СВ K .

Задача 6.5. У СВ K' вектори поля \vec{E}' та \vec{B}' орієнтовані довільно один відносно одного. Якою повинна бути швидкість СВ K' , щоб в СВ K вектор напруженість електричного та вектор індукції магнітного поля були паралельні між собою?

Розв'язання. Припустимо, що поля в СВ K паралельні, тобто $[\vec{E}, \vec{B}] = 0$. Направимо швидкість СВ K' перпендикулярно полям \vec{E} і \vec{B} , причому напрямком \vec{V} виберемо за вісь OX , рис. 6.22.

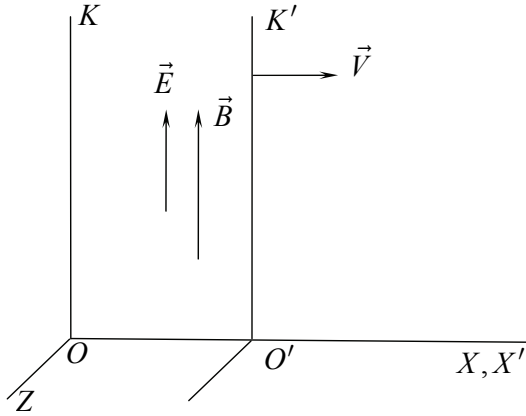


Рис. 6.22. До знаходження такої швидкості руху електродинамічної системи з полями \vec{E}' та \vec{B}' , при якій в ЛСВ ці поля будуть паралельні

Тоді $E_x = B_x = 0$, і умова $[\vec{E}, \vec{B}] = 0$ еквівалентна рівності $E_y B_z - E_z B_y = 0$.

Після підстановки в цю рівність компонент поля з формул (6.52) (6.53) одержимо наступне алгебраїчне рівняння:

$$\Gamma(E'_y + VB'_z) \cdot \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right) = \Gamma(E'_z - VB'_y) \cdot \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right). \quad (6.92)$$

Згідно з формулами (6.52) (6.53), $E'_x = B'_x = 0$, тому $[\vec{E}', \vec{B}'] = (E'_y B'_z - E'_z B'_y) \cdot \vec{i}$. Але ж і швидкість $\vec{V} = \vec{i} \cdot V$.

З (6.92) знаходимо швидкість руху СВ K'

$$\frac{\vec{V}}{c^2} = \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{c^2 \cdot B'^2 + E'^2} \cdot [\vec{B}', \vec{E}'] \quad (6.93)$$

Напрямок швидкості визначається вектором $[\vec{B}', \vec{E}']$, а величина швидкості є одним з коренів квадратного рівняння (6.93).

Контрольні запитання та завдання

1. Упевнитися, що закон електромагнітної індукції і в СВ K' має таку ж форму, як і в СВ K , при умовах (6.4) та (6.5).
2. Знайти формули перетворення компонент 4-струму та проаналізувати їх наслідки.
3. Пояснити явище виникнення об'ємної густини заряду в рухомому металевому провіднику зі струмом.
4. Дати релятивістську інтерпретацію взаємодії струму та ЗЧ, що рухається відносно струму.
5. Знайти об'ємну густину заряду ρ' в ППС з точки зору СВ K' , якщо $V \neq v$ (див. рис. 6.1).
6. Знайти об'ємну густину заряду ρ в ППС з точки зору СВ K , якщо $V \neq v'$ (див. рис. 6.3).
7. Знайти силу, що діє на електрон в СВ K і в СВ K' у **Прикладі 6.3**, якщо $V \neq v'$.
8. Одержати вираз для тензора ЕМП у вакуумі та в середовищі.
9. Використовуючи 4-вимірний формалізм, показати, що основні рівняння електродинаміки залишаються коваріантними при переході від однієї СВ до іншої.
10. Обґрунтувати формули перетворення компонент ЕМП та компонент електричного і магнітного моментів при переході від однієї СВ до іншої.
11. Як Ви розумієте вислів «відносність електричного і магнітного полів»?
12. Прокоментувати наслідки формул (6.62) та (6.63).
13. Візьміть довільне ЕМП і доведіть, що (6.69) і (6.70) є інваріантами.
14. Опишіть способи, з допомогою яких можна знайти ЕМП рухомої ЗЧ.
15. Запишіть рівняння Максвелла в тензорній формі та впевніться, що при переході до 3-вимірних позначень вони збігаються з рівняннями Максвелла в традиційній формі.
16. Упевнитися, що (6.14) є коваріантною формою закону збереження заряду.

17. Показати, що тензорною формою закону Ома $\vec{j} = \lambda \cdot \vec{E}$ є вираз

$$s_{\mu} = \frac{\lambda}{c} \cdot \sum_{\nu} F_{\mu\nu} \cdot v_{\nu}.$$

18. Упевнитися, що для ЕМП РЗЧ справедливе фундаментальне рівняння

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

19. Упевнитися, що для ЕМП РЗЧ справедливе фундаментальне рівняння

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

ДОДАТКИ

Додаток А. Основні формули векторного аналізу

А.1. Скалярне поле

1. Теорема. Якщо в просторі задане скалярне поле $\varphi(\vec{r})$ (наприклад деяке температурне поле t^0 , поле електричного потенціалу, тиску і т. д.), то похідна цього скалярного поля за деяким напрямком \vec{l} у просторі дорівнює проекції градієнта цього поля на вибраний напрямок \vec{l} :

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad}_l \varphi \quad (\text{A.1})$$

Доведення. Оскільки $d\vec{l} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, а повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ дорівнює

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz,$$

то повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ можна подати у вигляді:

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{l} = \text{grad}_l \varphi \cdot dl,$$

де

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (\text{A.2})$$

Таким чином, фізичний зміст градієнту скалярного поля: **це вектор, у напрямку якого скалярне поле зростає найшвидше.**

Теорему (А.1) можна записати також і в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial l} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, \vec{i}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, \vec{j}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, \vec{k}) = \\ &= |\text{grad}\varphi| \cdot \cos(\vec{l}, \text{grad}\varphi). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Очевидно, що величина вектора $\text{grad}\varphi$ дорівнює

$$|\text{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (\text{A.4})$$

Якщо ввести оператор Гамільтона (оператор «набла»)

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.5})$$

то означення (A.2) набуває вигляду

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

З означення (A.5) випливають співвідношення:

$$\nabla r = \vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{grad} \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \text{grad} \cdot r = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (\text{A.8})$$

де $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ – віддаль між двома точками з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0) .

І взагалі, якщо є функція $f(\varphi)$, де φ у свою чергу залежить від просторових координат, то

$$\text{grad} f(\varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \text{grad} \varphi. \quad (\text{A.9})$$

Властивості градієнта скалярної функції:

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad} \varphi + \text{grad} \psi, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{grad} \varphi \psi = \psi \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \psi \quad (\text{A.11})$$

2. Повна (або субстанціональна, матеріальна) похідна за часом t характеризує зміну певної величини в точці, що рухається в довільному неоднорідному, нестационарному полі, тоді як частинна (або локальна) похідна описує зміну цієї величини в даному місці. Тобто матеріальна похідна описує швидкість повної зміни величини в точці (інколи цю точку називають «точкою спостереження»), яка рухається разом із середовищем. При цьому вважається, що ця величина залежить і від часу, і від миттєвого положення точки.

Обгрунтуємо вираз для повної похідної трьома різними способами.

1. Повна похідна векторного поля $A(x, y, z, t)$ за часом, згідно з означенням, дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A}. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

2. Нехай деяка скалярна функція $u(\vec{r}, t)$ залежить від чотирьох змінних x, y, z, t , де $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор, який характеризує положення точки в момент часу t . Тоді приріст функції $u(\vec{r}, t)$ за проміжок часу Δt дорівнює:

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t) - u(t) &= u(\vec{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - u(\vec{r}(t), t) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \Delta \vec{r} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Delta t = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \text{gradu} \right) \right] \Delta t, \end{aligned}$$

де $\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial \vec{r}}$.

До речі, у фізичній літературі (див., наприклад [1]) часто зустрічається вираз $\frac{\partial u}{\partial \vec{r}}$, який слід розуміти як вектор, компоненти якого дорівнюють похідним функції u за відповідними складовими вектора \vec{r} .

Далі, якщо поділити обидві частини цієї рівності на Δt та знайти границю при $\Delta t \rightarrow 0$, то одержимо формулу, подібну до (A.12),

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \text{gradu} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{gradu}) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u$$

3. Розглянемо деяке векторне поле $\vec{B}(x, y, z, t)$. У лабораторній СВ зміна вектора поля визначається двома доданками:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_l + d\vec{B}_k,$$

де $d\vec{B}_l$ – локальна зміна вектора \vec{B} , що характеризує зміну його в даному місці (точці простору), $d\vec{B}_k$ – конвективна (або переносна) зміна вектора \vec{B} , яка визначається неоднорідністю поля \vec{B} . Тобто при переході від однієї точки простору до іншої, нескінченно близької точки поле \vec{B} зміниться на величину, яка визначається похідною за напрямом переміщення (тобто за напрямом швидкості \vec{V}):

$$d\vec{B}_k = \frac{d\vec{B}}{dl} \cdot dl = dl (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{B}, \quad (\text{A.12a})$$

де $\vec{l} = \frac{\vec{V}}{V}$, $dl = |\vec{V}| dt$.

Тому $d\vec{B}_k = |\vec{V}| dt \cdot \left(\frac{\vec{V}}{V} \cdot \nabla \right) \vec{B} = dt (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}$.

Як бачимо, $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ дорівнює миттєвому приросту вектора \vec{B} при переміщенні «точки спостереження» на відрізок, який рівний за величиною та напрямком вектора \vec{V} . І нарешті, обґрунтуємо (A.12):

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{B}.$$

3. Зупинимось більш детально на властивостях скалярного диференційного оператора $(\vec{a} \cdot \text{grad}) \equiv (\vec{a}\nabla)$:

$$(\vec{a}\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.13})$$

Виконання операції $(\vec{a}\nabla)$ над довільною функцією точки еквівалентне добутку похідної цієї функції, узятій за напрямком вектора \vec{a} , на чисельну величину вектора \vec{a} :

$$(\vec{a}\nabla) = a \frac{\partial}{\partial a}.$$

Дійсно, знайдемо спочатку операцію $(\vec{a}\nabla)$ над скаляром φ

$$(\vec{a}\nabla) \cdot \varphi = a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \vec{a} \cdot \nabla \varphi.$$

Але на основі $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \text{grad}_\tau \varphi$ маємо

$$(\vec{a}\nabla) \cdot \varphi = \vec{a} \cdot \nabla \varphi = a \frac{\partial \varphi}{\partial a},$$

де $\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \text{grad}_a \varphi$ – похідна скаляру φ за напрямом \vec{a} (див. також (A.1)).

Операцію $(\vec{a}\nabla)$ над вектором \vec{b} дає вектор

$$(\vec{a}\nabla) \cdot \vec{b} = a_x \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}, \quad (\text{A.14})$$

компонента якого, наприклад за віссю OX , дорівнює

$$\left((\vec{a}\nabla) \cdot \vec{b} \right)_x = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} = (\vec{a}\nabla) \cdot b_x$$

З іншого боку, похідна вектора \vec{b} за напрямком \vec{a} визначається (порівняйте з (A.3) та (A.12a)):

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial a} = \cos(x, \vec{a}) \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + \cos(y, \vec{a}) \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + \cos(z, \vec{a}) \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}.$$

Якщо помножити останню рівність на a та порівняти з (A.14), то впевнимися, що дійсно

$$(\vec{a}\nabla) \cdot \vec{b} = a_x \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} = a \frac{\partial \vec{b}}{\partial a}.$$

Таким чином, якщо вектор \vec{a} досить малий, то з точністю до величин другого порядку малості $(\vec{a}\nabla) \cdot \vec{b}$ і $(\vec{a}\nabla) \cdot \varphi$ дорівнюють, відповідно, приросту вектора \vec{b} і скаляру φ при переміщенні «точки спостереження» на відрізок, який дорівнює за величиною і напрямком вектору \vec{a} .

A.2. Векторне поле

1. Векторним полем називають область простору, у кожній точці якого задане значення довільного вектору $\vec{a}(\vec{r})$.

Векторний добуток двох векторів \vec{a} і \vec{b} визначається

$$[\vec{a}, \vec{b}] \equiv \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

як вектор, що перпендикулярний векторам \vec{a} і \vec{b} та утворює з ними праву трійку векторів, а за величиною дорівнює

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = ab \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b}). \quad (\text{A.16})$$

Подвійним векторним добутком називається вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, він дорівнює

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \quad (\text{A.17})$$

(ця формула читається «бац мінус цаб»).

2. Диференціювання вектора, який залежить від скалярного аргументу, за цим аргументом:

$$\frac{d\vec{a}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \vec{a}_0(x) a(x) = \vec{a}_0 \frac{da}{dx} + a \frac{d\vec{a}_0}{dx} = \vec{a}_0 \frac{da}{dx} + \vec{b}, \quad (\text{A.18})$$

де \vec{a}_0 – одиничний орт в напрямку вектора \vec{a} , $\vec{b} = a\omega\vec{b}_0$, $\vec{b}_0 \perp \vec{a}_0$ та

$\omega = \left| \frac{d\vec{a}_0}{dx} \right|$ – швидкість зміни кута φ , що визначає орієнтацію вектора \vec{a} .

Наприклад, другий доданок у (A.18) можна пояснити так.

Якщо скалярний аргумент в (A.18) – це час, то зміна в часі постійного по величині вектора означає, очевидно, зміну його орієнтації в просторі. Тобто похідна за часом постійного за величиною вектора \vec{a} , $\frac{d\vec{a}}{dt}$, зумовлена приростом його внаслідок повороту вектора \vec{a} навколо певної осі.

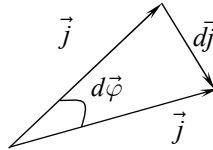


Рис. А.1. Приріст у часі (а значить, і зміна в часі) одиничного орту \vec{j} зумовлений його поворотом

Оскільки приріст, наприклад одиничного орта \vec{j} , визначається

$$d\vec{j} = [d\varphi, \vec{j}], \quad (\text{A.19})$$

то похідна по часу вектора \vec{j} дорівнює

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}]. \quad (\text{A.20})$$

3. Диференційна операція $div\vec{a}$ в декартовій системі координат визначається так:

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (\text{A.21})$$

Деякі властивості дивергенції векторного поля:

$$\begin{aligned} div(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) &= div\vec{a}_1 + div\vec{a}_2 \\ div(c\vec{a}) &= c \cdot div\vec{a}, \text{ де } c = const \end{aligned}$$

Якщо скористатися векторним оператором «набла» ∇ , то диференційні операції дивергенції та ротора векторного поля можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \nabla \cdot \vec{a} \\ \operatorname{rot} \vec{a} &= [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

А диференційні операції другого порядку з допомогою оператора «набла» подаються так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla \cdot \nabla \varphi \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} &= [\nabla, [\nabla, \vec{a}]] \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= \nabla \cdot [\nabla, \vec{a}] \end{aligned} \quad (\text{A.22a})$$

Якщо вектор $\vec{a}(u)$ залежить тільки від скаляра u , то

$$\operatorname{div} \vec{a}(u) = (\nabla \vec{a}(u)) = \left(\frac{d\vec{a}}{du} \cdot \nabla u \right) = \left(\dot{\vec{a}} \cdot \operatorname{grad} u \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\operatorname{rot} \vec{a}(u) = \left[\nabla u, \frac{d\vec{a}}{du} \right] = \left[\operatorname{grad} u, \dot{\vec{a}} \right]. \quad (\text{A.24})$$

4. Обчислення похідних від добутку та знаходження повторних похідних з допомогою оператора «набла» проводиться з урахуванням двох таких правил [11].

1. Оператор «набла» ∇ повинен діяти по черзі на кожен скалярну чи векторну величину, що розташована за ним.

2. З оператором «набла» ∇ слід поводитися як зі звичайним вектором, але його не можна переставляти місцями з величиною, на яку він діє, і виносити цю величину за знак ∇ . При виконанні операцій з оператором «набла» ∇ будемо індексом внизу показувати на яку саме величину діє оператор «набла». Наприклад:

$$\begin{aligned} 1. \quad \operatorname{grad}(\varphi\psi) &= \nabla \varphi\psi = \varphi \cdot \nabla_{\psi} \psi + \psi \cdot \nabla_{\varphi} \varphi = \\ &= \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$2. \quad \operatorname{div} \varphi \vec{a} = \nabla \varphi \vec{a} = \vec{a} \cdot \nabla_{\varphi} \varphi + \varphi \cdot \nabla_a \vec{a} = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{a}, \quad (\text{A.26})$$

де φ, ψ – скалярні функції.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} &= \operatorname{div} \vec{n} = \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{div} \vec{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \\ \operatorname{rot}(\varphi \vec{a}) &= [\nabla, \varphi \vec{a}] = \varphi [\nabla_a, \vec{a}] + [\nabla_\varphi \varphi, \vec{a}] = \\ &= \varphi \cdot \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Таким чином,

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - [\vec{a}, \nabla \varphi].$$

3. Дивергенція векторного добутку двох векторів:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{a}, \vec{b}] &= \nabla [\vec{a}, \vec{b}] = \nabla_a [\vec{a}, \vec{b}] + \nabla_b [\vec{a}, \vec{b}] = \\ &= \vec{b} [\nabla_a, \vec{a}] - \nabla_b [\vec{b}, \vec{a}] = \vec{b} [\nabla_a, \vec{a}] - \vec{a} [\nabla_b, \vec{b}] = \\ &= \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Таким чином,

$$\operatorname{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$$

При обґрунтуванні цієї формули зроблена циклічна перестановка векторів, а в другому доданку змінений порядок векторного множення. Якби останнє ми не зробили, то при циклічній перестановці було б порушене правило 2 – вектор \vec{b} був би пересунутий за знак оператора ∇_b .

4. Користуючись формулою (A.17) знайдемо ротор векторного добутку двох векторів:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [\vec{a}, \vec{b}] &= [\nabla, [\vec{a}, \vec{b}]] = [\nabla_a, [\vec{a}, \vec{b}]] + [\nabla_b, [\vec{a}, \vec{b}]] = \\ &= (\nabla_a \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\nabla_a \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\nabla_b \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\nabla_b \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \nabla_a) \vec{a} - \vec{b} (\nabla_a \cdot \vec{a}) + \vec{a} (\nabla_b \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \nabla_b) \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \cdot \operatorname{grad}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \vec{b} + \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a}, \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\operatorname{rot} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b} \cdot \operatorname{grad}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a}. \quad (\text{A.29})$$

В останньому виразі $(\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \equiv (\vec{a} \nabla)$ – скалярний диференціальний оператор (A.13)

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

5. Знайдемо градієнт скалярного добутку двох векторів:

$$\begin{aligned}
\text{grad}(\vec{a}\vec{b}) &= \nabla_a(\vec{a}\vec{b}) + \nabla_b(\vec{a}\vec{b}) = \\
&= (\vec{b}\nabla_a)\vec{a} + [\vec{b}, [\nabla_a, \vec{a}]] + (\vec{a}\nabla_b)\vec{b} + [\vec{a}, [\nabla_b, \vec{b}]] = \\
&= (\vec{b} \cdot \text{grad})\vec{a} + [\vec{b}, \text{rot}\vec{a}] + (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{b} + [\vec{a}, \text{rot}\vec{b}], \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

де подвійний векторний добуток, наприклад $[\vec{b}, [\nabla_a, \vec{a}]]$, ми розписали за допомогою правила «бац мінус цаб» – $[\vec{b}, [\nabla_a, \vec{a}]] = \nabla_a(\vec{b}\vec{a}) - (\vec{b}\nabla_a)\vec{a}$.

6. Використовуючи формулу (A.30), одержуємо

$$\text{grad} \frac{a^2}{2} = (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{a} + [\vec{a}, \text{rot}\vec{a}]. \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned}
7. \quad \text{div grad} \varphi &= \nabla \cdot \nabla \varphi = (\nabla \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi, \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

8. Використовуючи формулу «бац мінус цаб», знаходимо

$$\text{rot rot} \vec{a} = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla \cdot (\nabla \vec{a}) - (\nabla \nabla) \vec{a} = \text{grad div} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}. \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
9. \quad (\nabla \vec{a})\vec{b} &= (\nabla_a \vec{a})\vec{b} + (\nabla_b \vec{a})\vec{b} = \\
&= \vec{b} \cdot \text{div} \vec{a} + (\vec{a}\nabla_b)\vec{b} = \vec{b} \cdot \text{div} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{b}. \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

5. Вираз диференціальних операцій градієнта скалярної функції, дивергенції та ротора довільного вектора в різних системах координат:

а) декартові координати

градієнт складної функції $\varphi(x, y, z)$:

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

дивергенція вектора $\vec{a}(x, y, z)$:

$$\text{div} \vec{a} = \nabla \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

ротор довільного векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

б) циліндричні координати

складові градієнта скалярної функції $\varphi(r, \psi, z)$:

$$\operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \operatorname{grad}_\psi \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}, \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{A.35})$$

дивергенція вектора $\vec{a}(r, \psi, z)$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{A.36})$$

складові ротора $\vec{a}(r, \psi, z)$:

$$\operatorname{rot}_r \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}_\psi \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \quad (\text{A.37})$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \psi}$$

оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.38})$$

в) сферичні координати

складові градієнта скалярної функції $\varphi(r, \theta, \psi)$:

$$\operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \operatorname{grad}_\theta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \operatorname{grad}_\psi \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \quad (\text{A.39})$$

дивергенція $\vec{a}(r, \theta, \psi)$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} \quad (\text{A.40})$$

складові ротора $\vec{a}(r, \theta, \psi)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\psi - \frac{\partial a_\theta}{\partial \psi}) \right\} \\ \operatorname{rot}_\theta \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\psi) \\ \operatorname{rot}_\psi \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.42})$$

6. З інтегрального подання оператора Гамільтона випливає формула

$$(\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \oint (\vec{n} \vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot dS, \text{ при } V \rightarrow 0$$

з якої безпосередньо одержуємо

$$\int (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} dV = \oint (\vec{n} \vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot dS \quad (\text{A.43})$$

або, враховуючи (A.34),

$$\oint (\vec{n} \vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot dS = \int (\vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a}) dV + \int (\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \vec{b} dV \quad (\text{A.44})$$

З інтегрального подання оператора Гамільтона випливає також і наступна формула

$$[[\nabla, \vec{a}], \vec{b}] = \lim_{V \rightarrow 0} \int [[\vec{n}, \vec{a}], \vec{b}] dS \quad (\text{A.45})$$

Звідки маємо

$$\int [[\nabla, \vec{a}], \vec{b}] dV = \oint [[\vec{n}, \vec{a}], \vec{b}] dS \quad (\text{A.46})$$

А далі, використовуючи

$$[[\nabla, \vec{a}], \vec{b}] = [[\nabla_a, \vec{a}], \vec{b}] + [[\nabla_b, \vec{a}], \vec{b}] = -[\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}] - [[\vec{a}, \nabla], \vec{b}],$$

після підстановки в (A.46) одержуємо нарешті другу інтегральну рівність

$$\int [\vec{b}, [\nabla, \vec{a}]] dV + \int [[\vec{a}, \nabla], \vec{b}] dV = -\oint [[\vec{n}, \vec{a}], \vec{b}] \cdot dS \quad (\text{A.47})$$

А.3. Дельта-функція Дірака та її властивості

Як відомо, δ -функція була вперше введена П. Діраком і визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned}\delta(x) &= 0 \text{ при } x \neq 0 \\ \delta(x) &= \infty \text{ при } x = 0\end{aligned}$$

так, що

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \text{ де } a < 0 < b. \quad (\text{A.48})$$

З означення (A.48) одержуємо основну властивість δ -функції:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0) \text{ при } a < 0 < b. \quad (\text{A.49})$$

δ -функція не може входити в будь-які кінцеві фізичні вирази і формули. Завжди, коли пишеться δ -функція, мається на увазі подальше інтегрування за тими змінними, від яких залежить δ -функція.

δ -функцію можна розглядати як межу послідовності аналітичних функцій. Зокрема такими властивостями характеризується вираз

$$F(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha x}{x\pi}, \quad (\text{A.50})$$

який при $\alpha \rightarrow \infty$ поводить себе, як δ -функція.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x\pi} dx = 1 \text{ при будь-якому } \alpha$$

Тобто ми бачимо, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{x\pi} = \delta(x). \quad (\text{A.51})$$

Через δ -функцію часто виражають інтеграли виду $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$,

який слід розуміти так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx} dk = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \sin \alpha x$$

Порівнюючи з (A.51), одержуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x). \quad (\text{A.52})$$

Інші властивості δ -функції:

$$\begin{aligned} \int f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx &= f(x_0) \\ \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta'(-x) &= -\delta'(x) \\ x \cdot \delta(x) &= 0 \\ x \cdot \delta'(x) &= -\delta(x) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{a} \delta(x) \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \\ \int f(x) \cdot \delta'(x - a) dx &= -f'(a) \\ \int \delta(a - x) \cdot \delta(x - b) dx &= \delta(a - b) \\ f(x) \delta(x - a) &= f(a) \delta(x - a) \\ \delta(f) df &= \delta(x) dx \\ \delta[f(x)] &= \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

δ -функція корисна також при розгляді інтегралів Фур'є. Так, якщо ми маємо розклад деякої функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk, \quad (\text{A.54})$$

то з допомогою (A.52) відразу отримаємо вираз для оберненого інтегралу Фур'є. Дійсно, помножимо ліву та праву частину (A.54) на $e^{-ik'x}$ і проінтегруємо за x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik'x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{i(k-k')x} dk \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} c(k) dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} \cdot dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c(k) 2\pi \delta(k-k') dk = 2\pi c(k').
\end{aligned}$$

І тому одержуємо

$$c(k') = \frac{1}{2\pi} \int f(x) \cdot e^{-ik'x} dx \quad (\text{A.55})$$

Обґрунтуємо тепер важливе співвідношення

$$\nabla^2 \frac{1}{r} \equiv \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}), \quad (\text{A.56})$$

де

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Для цього розкладемо функцію $\frac{1}{r}$ у тривимірний інтеграл Фур'є:

$$\frac{1}{r} = \int c(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_y dk_x dk_z. \quad (\text{A.57})$$

Відповідно, для функції $c(\vec{k}) \equiv c(k_x, k_y, k_z)$ маємо на основі (A.55)

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} dV. \quad (\text{A.58})$$

Для знаходження $c(\vec{k})$ в (A.58) інтегруємо спочатку за кутом, вибираючи полярну вісь у напрямку вектора \vec{k} :

$$\begin{aligned}
c(k) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} r^2 dr \int_0^{\pi} e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{k} \int_0^{\infty} (e^{-ikr} - e^{ikr}) dr
\end{aligned}$$

Останній інтеграл знаходиться таким чином. Підінтегральний вираз множиться на $e^{-\alpha \cdot \vec{r}}$, знаходиться інтеграл, а потім в одержаному результаті α спрямовується до нуля ($\alpha \rightarrow 0$).

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2}.$$

Після підстановки в (A.57) маємо

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}.$$

Подіємо оператором Лапласа на попередній вираз і одержимо

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}.$$

Ураховуючи (A.52), нарешті отримуємо

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} (2\pi)^3 \delta(x)\delta(y)\delta(z) = -4\pi\delta(\vec{r}). \quad (\text{A.59})$$

**Додаток Б. Співвідношення
між формулами електродинаміки,
поданими в СІ та в системі одиниць Гаусса**

Назва величини	СІ	Система Гаусса	Назва величини	СІ	Система Гаусса
Сила струму	i	$i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Електричний дипольний момент	p	$p \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$
Густина струму	j	$j \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Магнітний момент струму	p_m	$p_m \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$
Електричний заряд	q	$q \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Скалярний потенціал	φ	$\frac{\varphi}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
Густина заряду	ρ	$\rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Векторний потенціал	A	$A \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$
Питома електропровідність	λ	$4\pi\epsilon_0 \cdot \lambda$	Швидкість світла	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$	c
Електроємність	C	$C \cdot 4\pi\epsilon_0$	Магнітна сприйнятливість	χ	$4\pi\chi$
Напруженість електричного поля	E	$\frac{E}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	Діелектрична сприйнятливість	α	$4\pi\alpha$
Електричне зміщення	D	$D \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$	Діелектрична проникність	ϵ	$\epsilon\epsilon_0$
Напруженість магнітного поля	H	$\frac{H}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$	Магнітна проникність	μ	$\mu\mu_0$
Магнітна індукція	B	$B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$	Відносна діелектрична проникність	ϵ_r	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Потік магнітної індукції	Φ	$\Phi \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$	Відносна магнітна проникність	μ_r	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Індуктивність	L	$\frac{L}{4\pi\epsilon_0}$	Електричний опір	R	$\frac{R}{4\pi\epsilon_0}$
Вектор поляризації	P	$P \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Вектор намагнічування	I	$I \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$

Правила користування цією таблицею. Для того, щоб перевести будь-яку формулу, записану в СІ, у відповідну формулу в системі Гаусса, слід символ, який позначений в колонці «СІ» замінити символом з колонки «Система Гаусса». Наприклад, рівняння Максвелла в СІ

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

переводиться згідно з таблицею заміною векторів \vec{H} на $\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$, \vec{D} на

$\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$, \vec{j} на $\vec{j} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$. І тоді маємо

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}\right) = \vec{j} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0} + \frac{\partial\left(\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}\right)}{\partial t}.$$

У результаті одержуємо рівняння Максвелла в системі Гаусса

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Ще один приклад. Записати формулу $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$, що визначає індукцію магнітного поля довгого провідника зі струмом, в системі Гаусса. Робимо заміни B на $B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$, а i на $i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$ і одержуємо

$$B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} = \frac{\mu_0 i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{2\pi R},$$

$$B = \frac{\mu_0 i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{2\pi R} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = \frac{2i}{R} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{2i}{cR},$$

$$B = \frac{2i}{cR}.$$

Щоб записати рівняння $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ в системі Гаусса, густину заряду ρ замінюємо на $\rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$, а \vec{D} на $\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$ і одержуємо

$$\operatorname{div} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}} \cdot \vec{D} = \rho \cdot \sqrt{4\pi\varepsilon_0},$$
$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

Зауваження. Перехід із СІ в систему Гаусса, згідно з цими правилами, завжди приводить до вірних результатів. Але інколи при переході від системи Гаусса до СІ *виникають помилки, якщо тільки формула в системі Гаусса написана для вакууму*. Тому, перш ніж переводити будь-яку формулу із системи Гаусса в СІ її слід записати у формі, що справедлива для середовища.

**Додаток В. Основні формули електродинаміки
в системі Гаусса та СІ**

Назва формули	Система Гаусса	СІ
Поле \vec{E} в плоскому конденсаторі	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$	$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$
Зв'язок між \vec{E} та φ	$\vec{E} = -\nabla\varphi, \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$	
Зв'язок між \vec{P} та \vec{E}	$\vec{P} = \alpha\vec{E}$	$\vec{P} = \alpha\epsilon_0\vec{E}$
Означення вектора електричного зміщення \vec{D}	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi P = \epsilon\vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + P = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$
Зв'язок між σ', P, E	$\sigma' = P_n = \alpha E_n$	$\sigma' = P_n = \alpha\epsilon_0 E_n$
Ємність плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi h}$	$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{h}$
Густина енергії електромагнітного поля	$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{8\pi}$	$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2}$
Диполь \vec{p} в електричному полі \vec{E}	$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{dl}, \vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}], W = -\vec{p}\vec{E}$	
Закон Біо-Савара	$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{i}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]$
Поле \vec{B} прямого струму	$B = \frac{1}{c} \frac{2i}{r}$	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i}{r}$
Циркуляція вектора намагнічування \vec{I}	$\oint_L \vec{I}d\vec{l} = \frac{I'}{c}$	$\oint_L \vec{I}d\vec{l} = I'$
Означення вектора напруженості магнітного поля \vec{H}	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$
	$\vec{I} = \chi\vec{H}$	$\vec{I} = \chi\vec{H}$
Індуктивність L	$L = \frac{c\Phi}{i}$	$L = \frac{\Phi}{i}$

Назва формули	Система Гаусса	СІ
Індуктивність соленоїду	$L = 4\pi\mu n^2V$	$L = \mu\mu_0 n^2V$
Енергія магнітного поля струму	$W = \frac{1}{c} \frac{Li^2}{2}$	$W = \frac{Li^2}{2}$
Густина струму зміщення	$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Рівняння Максвелла в середовищі в інтегральній формі	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$
	$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV$	$\oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV$
	$\oint \vec{H} d\vec{l} =$ $= \frac{4\pi}{c} \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{4\pi \cdot \partial t} \right) d\vec{S}$	$\oint \vec{H} d\vec{l} =$ $= \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$
	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$
Рівняння Максвелла в середовищі в локальній формі	$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
	$div \vec{D} = 4\pi\rho$	$div \vec{D} = \rho$
	$rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
	$div \vec{B} = 0$	$div \vec{B} = 0$
Вектор Пойнтінга	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$	$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$
Густина імпульсу електромагнітного поля	$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{D}, \vec{B}]$ $\vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2}, v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$\vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}]$ $\vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2}, v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Зв'язок між E та H в електромагнітній хвилі	$\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$	$E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$
Потужність випромінювання диполя	$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3}$	$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}$

Назва формули	Система Гаусса	СИ
Умова калібровки Лорентца	$div \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$div \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
Формули перетворення компонент поля	$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$ $\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}'] \right)$	$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$ $\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v}, \vec{B}'] \right)$
	$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{E}'] \right)$	$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}'] \right)$
Інваріанти електромагнітного поля	$\vec{E}\vec{B} = inv$	$\vec{E}\vec{B} = inv$
	$E^2 - B^2 = inv$	$E^2 - c^2 B^2 = inv$

Додаток Г. Співвідношення між одиницями вимірювання електромагнітних величин в системах Гаусса та СІ

Величина	Одиниця величини		Співвідношення між одиницями
	Система Гаусса	СІ	
Заряд	1СГС_q	Кл	$1\text{СГС}_q = \frac{10}{c} = \frac{10^{-9}}{3} \text{Кл}$
Сила струму	1СГС_i	A	$1\text{СГС}_i = \frac{10}{c} = \frac{10^{-9}}{3} A$
Напруженість електричного поля	1СГС_E	$\frac{B}{m}$	$1\text{СГС}_E = c \cdot 10^{-6} \frac{B}{m} = 3 \cdot 10^4 \frac{B}{m}$
Потенціал, напруга	1СГС_V	B	$1\text{СГС}_V = c \cdot 10^{-8} B = 300B$
Електричний момент	1СГС_p	$\text{Кл} \cdot m$	$1\text{СГС}_p = \frac{1}{3} 10^{-11} \text{Кл} \cdot m$
Вектор поляризації \vec{P}	1СГС_P	$\frac{\text{Кл}}{m^2}$	$1\text{СГС}_P = \frac{1}{3} 10^{-5} \frac{\text{Кл}}{m^2}$
Вектор електричного зміщення \vec{D}	1СГС_D	$\frac{\text{Кл}}{m^2}$	$1\text{СГС}_D = \frac{10^5}{4\pi c} \frac{\text{Кл}}{m^2} = \frac{10^{-5}}{12\pi} \frac{\text{Кл}}{m^2}$
Опір	1СГС_R	Ом	$1\text{СГС}_R = c^2 \cdot 10^{-9} \text{Ом} = 9 \cdot 10^{11} \text{Ом}$
Питома електропровідність	1СГС_λ	$\frac{\text{См}}{m}$	$1\text{СГС}_\lambda = \frac{1}{9} 10^{-9} \text{См} / m$
Електропровідність	1СГС_Σ	См	$1\text{СГС}_\Sigma = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{См}$
Ємність	1СГС_C	Φ	$1\text{СГС}_C = 1\text{см} = \frac{10^9}{c^2} \Phi$
Магнітна індукція	Gc	$Tл$	$1Gc = 10^{-4} Tл$
Потік магнітної індукції	Mkc	$Bб$	$1Mkc = 10^{-8} Bб$

Величина	Одиниця величини		Співвідношення між одиницями
	Система Гаусса	СІ	
Потік вектора \vec{D}	$1CGC_{ND}$	$Кл$	$1CGC_{ND} = \frac{10}{4\pi\epsilon} Кл = \frac{10^{-9}}{12\pi} Кл$
Магнітний момент	$1CGC_m$	$A \cdot м^2$	$1CGC_m = 10^3 A \cdot м^2$
Намагніченість \vec{I}	$1CGC_I$	$\frac{A}{м}$	$1CGC_I = 10^3 \frac{A}{м}$
Вектор \vec{H}	$1E$	$\frac{A}{м}$	$1E = \frac{10^3}{4\pi} \frac{A}{м}$
Індуктивність L	$1см$	$Гн$	$1см = 10^{-9} Гн$

Додаток Д. Основні фізичні константи

Величина	Позначення і числове значення
Гравітаційна стала	$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \frac{Нм^2}{кг^2}$
Прискорення вільного падіння (нормальне)	$g_n = 9.80665 \frac{м}{с^2}$
Нормальний атмосферний тиск	$p_0 = 101325 Па$
Стала Авогадро	$N_a = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов	$V = 22.41383 \cdot 10^{-3} \frac{м^3}{\text{моль}}$
Універсальна газова стала	$R = 8.31441 \frac{Дж}{\text{моль} \cdot К}$
Стала Лошмідта	$n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} м^{-3}$
Стала Больцмана	$k = 1.38662 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м} = 1,25663706144 \cdot 10^{-6} \frac{Гн}{м}$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 0,885418782 \cdot 10^{-11} \frac{Ф}{м}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}$
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 0,9110953410 \cdot 10^{-27} з \\ 5,4858026 \cdot 10^4 а.о.м \\ 0,511 MeV \end{cases}$

Маса протона	$m_p = 1.6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,007276470 a.o.m$
Маса нейтрона	$m_n = 1.6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,008665012 a.o.m$
Атомна одиниця маси	$1 a.o.m. = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (відповідає енергії $\cdot 931,5 \text{ MeV}$)
Елементарний заряд	$e = \begin{cases} 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE} \end{cases}$
Відношення заряду електрона до його маси	$\frac{e}{m_e} = 1.7588047 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$
Стала Фарадея	$F = 9.648456 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$
Стала Віна	$b = 0,00289782 \text{ м} \cdot \text{К}$
Стала Ридберга	$R_\infty = 10973731,77 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	$a_0 = 0,52917706 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

Деякі позасистемні одиниці

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$$

$$1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж} = 4,1868 \cdot 10^7 \text{ ерг} (1 \text{ Дж} = 0,2388 \text{ кал})$$

$$1 \text{ мм.рт.ст.} = 133,3 \text{ Па} = 1333 \text{ дин} / \text{см}^2$$

$$1 \text{ рік} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$$

$$1 \text{ св.рік} = 9,5 \cdot 10^{17} \text{ см}$$

$$1 \text{ eV} = \begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \\ 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \end{cases}$$

$$1 a.o.m. = \begin{cases} 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931,5 \text{ MeV} \end{cases}$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Атома планетарна модель 253
Ампер одиниця струму 26, 338
- Близькодія 15, 32, 187
- Вектор \vec{B} 23, 25, 27, 83, 92, 179, 193, 287
- Вектор \vec{D} 106, 116, 117
- намагнічування \vec{I} 101, 111, 115
 - поляризації \vec{P} 101, 103, 107
 - Пойнтинга \vec{S} 153, 155, 168, 250
- Векторний аналіз 10-14, 317, 321
- Від'ємний показник заломлення 236–238
- Відносність електричного і магнітного полів 293, 296
- Випромінювання дипольне 249, 251
- Гаусса система одиниць 332, 338
- Градїєнт потенціалу 12, 20, 180, 317
- Густина електричних зарядів 15, 62
- енергії ЕМП 153
 - імпульсу ЕМП 164
 - моменту імпульсу ЕМП 164, 174, 176
 - потоку енергії 157, 166
 - потоку імпульсу 166
 - сили Лорентца 151
 - сили поверхневої 125
- Густина струму зміщення 63, 65, 68, 70, 116, 117
- – провідності 29, 32
 - – молекулярних струмів 112, 116
 - – струмів поляризації 115
- Дальнодія 187, 188
- Джерела поля 77, 79
- Дивергенція 13
- Дивергенція поля \vec{B} 74, 76
- Дивергенція поля \vec{E} 19, 76, 77
- Диполь 48, 50, 108, 147, 251
- Дисперсія нормальна 230
- Діаграма випромінювання диполя 250
- Діелектрики 102, 119, 122
- Досліди фундаментальні 7, 10, 14, 21, 22, 62, 71
- Електродинаміки межі застосування 253, 256, 260
- Електроємність 69, 70, 169
- Елемент струму 22, 23
- ЕМП довільно рухомої ЗЧ 199
- ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ 25, 191, 195, 283, 308
- ЕМП у хвилевій зоні 247
- Енергії міграція 159, 160
- ЕРС індукції природа 71, 74, 78, 266
- Заломлення ліній \vec{E} і \vec{D} 119, 122
- ліній \vec{B} і \vec{H} 123, 124
- Заряд зв'язаний 103, 121, 141, 143
- об'ємний 105, 275
 - поверхневий 104, 125, 141
- Заряд ППС, який рухається 275, 277, 280
- Закон Ампера-Грассмана 21, 22
- Біо-Савара-Лапласа 23, 29, 54, 56, 59
 - Брюстера 241
 - Джоуля-Ленца 94, 160, 161, 168
 - дисперсії 227, 230
 - електромагнітної індукції 71, 74, 78, 266, 311
 - збереження заряду 61, 62, 93
 - збереження енергії 153, 161, 173
 - збереження імпульсу 164
 - збереження моменту імпульсу 165, 174, 176
 - Кулона 14, 42, 311

- Закони відбивання та заломлення 234–238
- Зарядка конденсатора 64, 168, 173, 176
- Імпульс ЕМП 164
- Інваріанти ЕМП 320
- Індукція електричного поля 106
 - електромагнітна 71, 266, 311
 - магнітного поля 22
- Інтенсивність випромінювання 249, 251
- Конденсатор плоский** 64, 169, 170
 - сферичний 176
 - циліндричний 155, 173
- Концентрація зарядів 102, 279
- Ліві середовища 236–238
- Лінії силові 77, 79, 109, 198, 310
- Лорентца перетворення 271, 288
- Магнетики** 101, 110, 114
- Магнітний момент 111, 289, 291, 292
- Максвелла теорія 7, 76, 117, *див. зокрема Розділи 3, 4, 5, 6*
- Механізм породження МП 68, 71, 81, 91
- Механізм поширення ЕМ хвиль 217, 218
- Момент дипольний 48, 107, 127, 146
- Моменту імпульсу ЕМП 164, 165
- Намагнічування** 110, 112, 131
- Напруженість електричного поля 14, 15, 21, 91, 138, 180, 195, 295
 - магнітного поля 18, 117, 132, 134
- Одиниці вимірювання електродинамічних величин** 26, 338
- Оператор Даламбера 283
 - Лапласа 325, 327, 330
 - «Набла» 14, 318, 323, 327
- Перетворення калібровочні** 182
 - компонент 4-потенціалу 283
 - – 4-тензора 288
 - – вектора \vec{D} 272, 289
 - – вектора \vec{H} 272, 289
 - – вектора \vec{I} 291, 292
 - – вектора \vec{P} 291
 - – ЕМП 272, 291, 294
- Поляризація 101, 103, 107, 140, 145, 149
- Потенціал векторний 56, 57, 179, 243
 - Ліснара-Віхерта 188, 198
 - скалярний 20, 21, 48, 50, 138, 143, 180, 246
 - чотиривимірний 282, 283
 - що запізнюється 183, 186, 188
- Потенціали ЕМП 179, 180
 - – у хвилевій зоні 245, 246
- Потенціальність електричного поля 20
- Потік вектора 11, 34, 37, 39, 41, 80, 86, 90, 168
- Правило Ленца 78
- Принцип відносності 271, 283, 311
- Причинність в електродинаміці 187
- Радіус електрона класичний** 256, 268
- Рівняння Даламбера** 181
 - Максвелла в середовищі 116, 117
 - Максвелла у вакуумі 76, 77
 - неперервності 62
 - Пуассона 20, 21, 31, 33 182, 183
 - хвилеві 216, 217
- Розсіювання ЕМ хвиль 257, 260
- Ротор поля векторного 14, 323, 324
- Сила Ампера** 23
 - електрорушійна 71, 95, 97, 267
 - Лорентца 23, 74, 307, 313
 - променистого тertia 254, 258
- Соленоїдальність магнітного поля 74, 75
- Сприйнятливість 104, 115, 134
- Струми зміщення 64, 65, 68, 86–91
 - квазістаціонарні 243, 244
 - молекулярні 112
 - намагнічування 111, 112, 132, 134
 - об'ємні 29–31, 116
 - поляризації 115
 - провідності 23, 92, 102

- Тензор електричного і магнітного моментів 289
- електромагнітного поля 288
 - ЕМП в середовищі 289
- Теорема Гаусса 12, 13
- для поля \vec{B} 74, 75
 - для поля \vec{D} 106
 - для поля \vec{E} 19
 - для поля \vec{P} 103
- Пойнтінга 153
 - про циркуляцію вектора \vec{B} 27, 28, 64
 - Стокса 13
- Тиск хвиль електромагнітних 166, 167
- Умова гранична 118, 121, 123
- калібровки Лорентца 181, 245, 275, 282
 - квазістаціонарності 243, 244
- Умови граничні для векторів \vec{E} та \vec{B} 119, 121
- для векторів \vec{D} та \vec{H} 118, 123
 - для векторів \vec{P} та \vec{I} 104
- Формула Ампера-Грассмана 22
- дисперсійна електродинаміки 260
 - Томсона 258, 260
- Формули перетворення компонент ЕМП 278, 291
- Формули Френеля 240, 262
- Хвилева зона 244, 246, 248
- Хвильовий пакет 229, 232
- Хвильовий вектор 223, 227
- Хвилі електромагнітні 218, 225
- монохроматичні 223, 224
 - плоскі 219, 222, 262
- Циркуляція вектора \vec{E} 20, 71, 117, 267
- вектора \vec{H} 113
 - вектора \vec{I} 112
- Час запізнення 243
- Швидкість групова 230, 241
- дрейфова електронів провідності 23, 276
 - електромагнітних хвиль 164, 166, 217
 - фазова 217, 229

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основні

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 352 с.
2. Угаров В. А. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
3. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. – М.: ВШ, 1983. – 463 с.
4. Иродов И. Е. Электromагнетизм. Основные законы. – 4-е изд., испр. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 320 с.: ил.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Т. 5. – М.: Мир, 1966. – 290 с.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Т. 6. – М.: Мир, 1966. – 343 с.
7. Парселл Э. Электричество и магнетизм: Учебное руководство: Пер. с англ. / Под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1983. – (Берклиевский курс физики). – 416 с.
8. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – Т. III: Электричество. – М.: Наука, 1977. – 688 с.
9. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика: Учеб. пособие для студ. физ. спец. университетов. – М.: Высшая шк., 1990. – 352 с.
10. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 432 с.
11. Левич В. Г. Курс теоретической физики. – Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 912 с.: ил.
12. Пеннер Д. И., Угаров В. А. Электродинамика и теория относительности. – М.: Просвещение, 1980. – 271 с.
13. Мултановский В. В., Василевский А. С. Курс теоретической физики. – М.: Просвещение, 1990. – 272 с.
14. Медведев Б. В. Начала теоретической физики. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
15. Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
16. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
17. Савельев И. В. Основы теоретической физики. – Т. 1: Механика и электродинамика. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1957. – 532 с.
19. Меерович Э. А., Мейерович Б. Э. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
20. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла // Успехи физических наук. – 1972. – Т. 108. – Вып. 2. – С. 319-333.
21. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. I. – М.: Наука, 1965. – 700 с.
22. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – Т. II. – М.: Наука, 1966. – 723 с.

Додаткові

23. Коновал О. А. Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. – 202 с.
24. Коновал О. А. Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. – 158 с.
25. Коновал О. А. Принцип відносності і закон електромагнітної індукції // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. Серія: педагогічні науки: Збірник. У 2-х т. – Чернігів: ЧДПУ, 2004. – Вип. 23. – С. 171-177.
26. Жирнов Н. И. Задачник-практикум по электродинамике. – М.: Просвещение, 1970. – 350 с.
27. Векштейн Е. Г. Сборник задач по электродинамике. – М.: Высшая школа, 1966. - 287 с.
28. Манделъштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. – М.: Наука, 1972. – 437 с.
29. В. Г. Веселаго. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // УФН–2003. – Т. 173. – № 7. – С. 790-794.
30. К. Ю. Блюх, Ю. П. Блюх. Что такое левые среды и чем они интересны? // УФН–2004. – Т. 174. – № 4. – С. 440-447.
31. Коновал О. А., Половина Г. П., Тополя І. В. Методика побудови зображень в лівих середовищах // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. Випуск 36(2). Серія: педагогічні науки. – Чернігів: ЧДПУ, 2006. – № 36. – Т. 2. – С. 106-114.

УДК 538.3 (075.8)
ББК 22.33
К 64

Коновал О. А.

К64 Основи електродинаміки : навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл.
ISBN 978-966-2915-15-0

Зміст посібника охоплює основні теми курсу «Класична та релятивістська електродинаміка». Значна увага приділяється обґрунтуванню й інтерпретації рівнянь Максвелла в локальній та інтегральній формах. Обговорюються наслідки та приклади їх використання. Детально пояснюються засадні положення релятивістської електродинаміки. У посібнику наголос робиться на якісній і фізичній стороні електродинамічних явищ, а адекватний математичний апарат використовується для ознайомлення з методами теоретичної фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Навчальне видання

Олександр Андрійович Коновал

Основи електродинаміки

Навчальний посібник для студентів
вищих педагогічних навчальних закладів

Підписано до друку 22.02.2008.
Формат 60х84/16. Ум. др. арк. – 20,5. Обл.-вид. арк. – 19,5.
Тираж – 300 прим.

Видавництво ПП «Видавничий дім»
Свідоцтво ДК № 515 від 03.07.2001.
вул. Тухачевського, 26, м. Кривий Ріг, 50063

Друкарня СПД Щербенок С. Г.
Свідоцтво ДП 126-р від 12.10.2004.
вул. Рокосовського, 5/3, м. Кривий Ріг, 50027

