

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**О. А. Коновал**

# **ВІДНОСНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО І МАГНІТНОГО ПОЛІВ**

**Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів**

**Кривий Ріг  
«Видавничий дім»  
2008**

УДК 538.3 (075)  
ББК 22.33  
К 64

**Коновал О. А.**

**К64 Відносність електричного і магнітного полів** : монографічний навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 248 с. : іл.  
ISBN 978-966-2915-14-3

В навчальному посібнику поданий ґрунтовний аналіз формул перетворення компонент електромагнітного поля (ФПКЕМП) при зміні системи відліку. Приведений огляд як існуючих в навчально-методичній літературі, так і ряд нових, оригінальних способів обґрунтування цих формул. Детально пояснюється зміст та застосування ФПКЕМП на конкретних електродинамічних прикладах. Фізичний зміст задач також перекликається з шкільним та загальним курсом фізики, що дає можливість більш цілеспрямовано готувати учителя фізики. Значна увага приділяється обґрунтуванню закону електромагнітної індукції.

Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, вчителів та викладачів фізики.

**Рецензенти:**

доктор фізико-математичних наук, професор Інституту фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України **Є. Я. Глушко**  
доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри технічної фізики і математики НПУ ім. М. П. Драгоманова **А. В. Касперський**  
доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Криворізького технічного університету **Є. О. Несмашний**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів  
(лист № 1.4/18-Г-1681 від 08.07.2008)**

**Рекомендовано до видання вченою радою  
Криворізького державного педагогічного університету  
(протокол № 3 від 12.10.2006)**

ISBN 978-966-2915-14-3

© Коновал О. А., 2007.

## ЗМІСТ

<b>Передмова .....</b>	<b>6</b>
<b>Розділ 1. Різні способи обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля.....</b>	<b>9</b>
1.1. Коваріантність рівнянь Максвелла й формули перетворення компонент електромагнітного поля .....	9
1.2. Спосіб, оснований на трансформаційних властивостях компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої.....	14
1.3. Принцип відносності й основні експериментальні закони електродинаміки .....	17
1.4. Спосіб, що ґрунтується на детальному аналізі властивостей електромагнітного поля рівномірно та прямолінійно рухомої ( $v < c$ ) зарядженої частинки .....	26
1.5. Електромагнітне поле рівномірно рухомої зарядженої нитки та ФПКЕМП .....	28
1.6. Вимога релятивістської інваріантності виразу для сили Лорентца і ФПКЕМП .....	31
1.7. Формули перетворення компонент вектора поляризації та вектора намагнічування при зміні системи відліку.....	33
Висновки до розділу 1 .....	37
<b>Розділ 2. Основні наслідки формул перетворення компонент електромагнітного поля .....</b>	<b>38</b>
2.1. Формули перетворення повздовжніх і поперечних проєкцій векторів поля $\vec{E}$ та $\vec{B}$ .....	38
2.2. Комп'ютерна програма для моделювання відносності електричного й магнітного полів.....	46
Висновки до розділу 2 .....	61
<b>Розділ 3. Приклади застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля .....</b>	<b>63</b>
3.1. Приклади застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля для аналізу простих задач .....	63
3.2. Основні властивості та моделювання електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки .....	76
Висновки до розділу 3 .....	85

<b>Розділ 4. Застосування методів релятивістської електродинаміки для аналізу електродинамічних задач.....</b>	<b>86</b>
4.1. Електромагнітне поле в середовищі, яке рухається повільно ( $V \ll c$ ).....	86
4.1.1. Співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в різних системах відліку.....	86
4.1.2. Співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в одній і тій самій системі відліку в нерелятивістському наближенні.....	90
4.1.3. Рівняння Максвелла в рухомому середовищі.....	96
4.1.4. Досліди Вільсона, Рентгена, Роуланда, Ейхенвальда.....	107
4.1.5. Дослід Трoutона-Нобля в системі парадоксів теорії відносності.....	120
4.2. Явище електромагнітної індукції.....	132
4.2.1. Історія відкриття закону електромагнітної індукції і огляд традиційних методик вивчення явища та закону електромагнітної індукції.....	132
4.2.2. Явище електромагнітної індукції в рухомих електричних колах.....	141
4.2.3. Зміна в часі потоку довільного векторного поля через рухому поверхню та субстанціональна похідна за часом векторного поля.....	144
4.2.4. Непотенційність електричного поля рухомої зарядженої частинки та закон електромагнітної індукції.....	156
4.2.5. Рух у магнітному полі діелектричної або провідної рідини.....	178
4.2.6. Поступальний рух немагнітного провідника в однорідному магнітному полі.....	183
4.2.7. Рух однорідного провідного магнетика у вигляді пластини в магнітному полі.....	191
4.2.8. Рух магнетика у формі циліндра в магнітному полі лінійного струму, який розміщений уздовж осі циліндра.....	195
4.2.9. Явище електромагнітної індукції при обертанні магнетиків у стаціонарному магнітному полі.....	198
4.2.10. Обертання постійних магнітів.....	202
4.3. Інші задачі.....	204
4.3.1. Поступальний рух твердого провідника в зовнішньому однорідному електричному полі.....	204
4.3.2. Рух твердого діелектрика, який може намагнічуватися, у магнітному полі (дослід Вільсона).....	205
4.3.3. Електричне поле провідника зі струмом.....	207
4.3.4. Обертання соленоїду зі струмом навколо його осі.....	217
4.3.5. Релятивістський опис взаємодії між двома довгими провідниками зі струмами.....	219
Висновки до розділу 4.....	227

<b>Додатки .....</b>	<b>232</b>
<i>Додаток А. Формули перетворення проєкцій сили при переході від однієї СВ до іншої.....</i>	<i>232</i>
<i>Додаток Б. Деякі формули векторної алгебри та векторного аналізу.....</i>	<i>234</i>
<i>Додаток В. Опис взаємодії двох паралельних ППС у традиційній моделі.....</i>	<i>236</i>
<b>Предметний покажчик .....</b>	<b>238</b>
<b>Список використаних джерел .....</b>	<b>241</b>

## ПЕРЕДМОВА

Як відомо, електромагнітне поле, яке передає взаємодію між зарядженими частинками, адекватно описується тензором електромагнітного поля [1; 2].

У залежності від системи відліку, у якій спостерігається чи описується конкретна електромагнітна взаємодія, електромагнітне поле проявляється або як суто електричне, або як суто магнітне, або як деяка суперпозиція електричного й магнітного полів.

При формуванні поняття електромагнітного поля в існуючих на даний момент посібниках з електродинаміки та методик вивчення електромагнетизму [3–7] спочатку вивчаються електро- та магнітостатичні поля і вважається [9; 10], що «лише при вивченні явища електромагнітної індукції виявляється зв'язок між магнітним та електричним полем» [8, с. 53].

По-перше, на наш погляд, останнє твердження не відповідає фізичній реальності і по суті є помилковим. Взаємозв'язок електричного й магнітного полів, відносність поділу електромагнітного поля на електричне й магнітне достатньо повно, і не тільки на якісному рівні, можуть бути описані при вивченні електромагнітного поля зарядженої частинки, яка рухається прямолінійно з довільною за величиною постійною швидкістю [14; 15].

По-друге, методичний недолік такого висновку полягає ще й у тому, що ілюстрація зв'язку між законами електродинаміки та спеціальною теорією відносності стає можливою (і до того ж тільки якісною) лише при вивченні явища електромагнітної індукції. Класична електродинаміка є за своєю суттю релятивістською. А нехтування при вивченні електродинаміки такою фундаментальною фізичною теорією, якою вважають спеціальну теорію відносності, є порушенням одного з принципів дидактики.

Наш досвід викладання електродинаміки свідчить, що незалежне одне від одного вивчення електро- та магнітостатичних полів призводить до стійких і невірних уявлень про електричне й магнітне поля як окремих сутностей (видів матерії), ніяк не пов'язаних між собою та єдиним електромагнітним полем. На цей недолік у методиці формування поняття електромагнітного поля увага зверталась і раніше [9].

Найбільш повно сукупність уявлень про єдине електромагнітне поле можна сформувати (звичайно разом з поясненням загальноприйнятих якісних прикладів [9; 10; 11]), розглядаючи обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля, наслідки й застосування їх для аналізу різноманітних електродинамічних прикладів.

Ми вважаємо, що в проблемі формування уявлень про електромагнітне поле важливим є розкриття наступних питань:

а) обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля та на основі їх формування поняття про відносність поділу електромагнітного поля на суто магнітне та суто електричне;

б) детальний аналіз електродинамічних прикладів і явищ, у яких проявляються властивості електромагнітного поля (тепло Джоуля-Ленца, процес зарядки та розрядки конденсатора, потік електромагнітної енергії в колі постійного чи квазістаціонарного струму, взаємозв'язок між електричним і магнітним полями, що змінюються в часі, та інше);

в) вивчення властивостей поля випромінювання (електромагнітні хвилі).

У даному посібнику ми зупинимося тільки на розкритті першого й частково другого з-поміж означених вище питань.

Ми ставили за мету зробити детальний огляд деяких питань, пов'язаних з відносністю електричного і магнітного полів, та проілюструвати застосування методів релятивістської електродинаміки для аналізу електродинамічних задач.

І показати таким чином, що значна частина питань навчальних дисциплін «Електромагнетизм» та «Електродинаміка» можуть розглядатись як наслідок формул перетворення компонент електромагнітного поля (вираз для сили Лорентца, формули напруженості електричного й магнітного полів рівномірно рухомої зарядженої частинки, значна частина задач, пов'язаних з явищем електромагнітної індукції та інше).

Перший розділ книги присвячений детальному обґрунтуванню різними способами формул перетворення компонент електромагнітного поля й формул перетворення компонент тензора електричного й магнітного моментів при переході від однієї СВ до іншої. У посібнику розглянуті шість способів, із яких три є оригінальними.

У другому розділі аналізуються наслідки формул перетворення компонент електромагнітного поля й описана комп'ютерна програма для моделювання відносності електричного та магнітного полів.

У третьому розділі посібника на багатьох академічних задачах проілюстровано застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля й особливо детально розглянуті властивості електромагнітного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки. У підрозділі 2.2 цього розділу описана програма, яка моделює електромагнітне поле рівномірно рухомої зарядженої частинки при різних значеннях швидкості руху ЗЧ. При цьому вдалося виявити ряд властивостей електромагнітного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки, які не описані в навчально-методичній літературі.

Четвертий розділ книги присвячений аналізу широкого кола електродинамічних задач, перелік яких можна знайти в „Змісті”. Тому немає сенсу зупинятися на них детально тут. Лише зазначимо, що подані оригінальні обґрунтування й інтерпретація закону електромагнітної індукції та релятивістський опис взаємодії провідників зі струмами.

Слід зауважити також, що і розв’язання ряду задач посібника є оригінальними й поданні тут уперше.

Як умову, так і розв’язання певної кількості задач взято з посібника [12]. Але ці задачі уточнені і, як нам здається, подані мовою фізичних термінів.

Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, учителів і викладачів фізики.

### **У посібнику прийняті такі скорочення**

ВЕР – вихрове електричне поле.

ВЕР – власна система відліку.

ЕМ – електромагнітний (електромагнітне).

ЕМІ – електромагнітна індукція.

ЕМР – електромагнітна поле.

ЕР – електричне поле.

ЗЧ – заряджена частинка.

КЕР – класична електронна теорія.

ЛЕР – лабораторна система відліку.

МР – магнітне поле.

ВР – принцип відносності.

ПР – провідник з постійним струмом.

РЗЧ – рухома заряджена частинка.

МР – рівняння Максвелла.

ВР – система відліку.

СЕР – стаціонарне електричне поле постійного струму.

СР – система координат.

СН – співвідношення невизначеностей.

СНЗ – середній навчальний заклад.

СВР – спеціальна теорія відносності.

ФКЕР – формули перетворення компонент електромагнітного поля.

ЯЕМІ – явище електромагнітної індукції

$\dot{f}$  – похідна за часом функції  $f$ .



## Розділ 1. РІЗНІ СПОСОБИ ОБҐРУНТУВАННЯ ФОРМУЛ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПОНЕНТ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Як показує аналіз науково-методичної літератури з електродинаміки, існує декілька способів обґрунтування ФПКЕМП, які відрізняються один від одного різними за рівнем складності й узагальненням підходами. Так, можна виокремити наступні способи.

1.1. Виходячи з вимоги коваріантності рівнянь Максвелла щодо перетворень Лорентца [12].

1.2. ФПКЕМП найбільш строго й послідовно одержують використовуючи формули перетворення компонент тензора ЕМП при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  [1; 2]. Але цей спосіб надто формальний.

1.3. Аналізуючи за допомогою принципу відносності основні експериментальні закони електродинаміки [14].

1.4. Спосіб, що ґрунтується на детальному аналізі властивостей ЕМП рівномірно та прямолінійно рухомої ( $v < c$ ) зарядженої частинки [15].

1.5. На основі аналізу електромагнітного поля рухомої зарядженої нитки [16].

1.6. ФПКЕМП можна також обґрунтувати з вимоги релятивістської інваріантності виразу для сили Лорентца [3, с. 73–74].

Кожен з цих способів має свої переваги й недоліки при порівнянні з іншими, тому перейдемо до опису й аналізу цих конкретних способів обґрунтування ФПКЕМП.

### 1.1. Коваріантність рівнянь Максвелла й формули перетворення компонент електромагнітного поля

Формули перетворення компонент полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  та  $\vec{H}$ ,  $\vec{P}$  та  $\vec{M}$  при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ , тобто формули, з допомогою яких можна описувати й вивчати електромагнітні процеси в рухомій СВ  $K'$ , можуть бути одержані з умови лорентц-коваріантності рівнянь Максвелла. Проілюструємо суть цього способу обґрунтування ФПКЕМП.

Вважаємо при цьому, що СВ  $K'$  рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж осі  $OX$  СВ  $K$ .

Згідно з принципом відносності всі основні рівняння фізики не повинні змінювати свою математичну форму при переході від однієї системи відліку до іншої.

Безпосередньо можна впевнитися, що рівняння Максвелла не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої, тобто вони є

коваріантними при перетвореннях Лорентца. Але при цьому всі величини, що входять до системи рівнянь Максвелла, повинні перетворюватися за певними законами при переході від однієї СВ до іншої.

Дійсно, в системі рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.1б)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1в)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.1г)$$

перейдемо від координат події  $x, y, z, t$  в СВ  $K$  до координат тієї ж події, але в СВ  $K' - x', y', z', t'$ .

Оскільки, згідно з перетвореннями Лорентца,  $x' = x'(x, t)$ ,  $t' = t'(x, t)$  і  $x = x(x', t')$ ,  $t = t(x', t')$ , то враховуючи явний вигляд перетворень Лорентца

$$x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - x \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}$$

або

$$x'_i = \alpha'_{ik} \cdot x_k,$$

де  $\alpha'_{ik}$  – це матриця перетворень Лорентца, а індекси  $i, k$  пробігають значення  $i, k = 1 \dots 4$ :

$$\alpha'_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix},$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}$ ,  $B = \frac{V}{c}$ ,  $V$  – швидкість СВ  $K'$  відносно

СВ  $K$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  – швидкість світла у вакуумі,  $\varepsilon_0, \mu_0$  – електрична та магнітна постійні, та обернені перетворення Лорентца:

$$x = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}},$$

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k,$$

де  $\alpha_{ik}$  – матриця обернених перетворень Лоренца:

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix},$$

для операторів частинних похідних, які необхідні для запису рівнянь Максвелла в СВ  $K'$  за відомим виглядом цих рівнянь у СВ  $K$ , одержуємо [12]:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad (1.4)$$

аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} = \Gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

У системі рівнянь Максвелла (1.1) зробимо заміну змінних з допомогою (1.3), (1.4). Спочатку рівняння (1.1в) після нескладних алгебраїчних перетворень, перегрупування доданків і введення позначень:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \Gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \Gamma(E_z + VB_y), \quad (1.5)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \Gamma\left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z\right), \quad B'_z = \Gamma\left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y\right) \quad (1.6)$$

набуває вигляду

$$\text{rot}' \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}. \quad (1.7)$$

**Таким чином, локальна форма закону електромагнітної індукції і в СВ  $K'$  має таку ж форму, як і в СВ  $K$ , лише за умов (1.5) та (1.6).**

Подібно до перетворення рівняння Максвелла (1.1в) зробимо аналогічні перетворення рівняння (1.1а). Тоді з урахуванням (1.3), (1.4) рівняння Максвелла  $\text{div} \vec{D} = \rho$  та за умови:

$$H'_x = H_x, H'_y = \Gamma(H_y + VD_z), H'_z = \Gamma(H_z - VD_y), \quad (1.8)$$

$$D'_x = D_x, D'_y = \Gamma\left(D_y - \frac{V}{c^2}H_z\right), D'_z = \Gamma\left(D_z + \frac{V}{c^2}H_y\right), \quad (1.9)$$

$$j'_x = \Gamma(j_x - V \cdot \rho), j'_y = j_y, j'_z = j_z \quad (1.10)$$

одержуємо:

$$\text{rot}'\vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t'}. \quad (1.11)$$

Тепер рівняння Максвелла  $\text{div}\vec{D} = \rho$  з урахуванням операторів похідних (1.3) і (1.4) та  $\text{rot}'\vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial\vec{D}'}{\partial t'}$  набуває вигляду

$$\text{div}'\vec{D}' = \rho'$$

за умови, що густина заряду в СВ  $K'$  зв'язана з густиною заряду в СВ  $K$  співвідношенням

$$\rho' = \Gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}j_x\right), \quad (1.12)$$

де  $j_x$  –  $x$ -ва компонента густини струму в СВ  $K$ .

Аналогічно, рівняння  $\text{div}\vec{B} = 0$  в СВ  $K'$  має коваріантну форму:

$$\text{div}'\vec{B}' = 0.$$

**Таким чином, коваріантність рівнянь Максвелла (1.1) має місце, якщо компоненти напруженості електричного та індукції магнітного полів перетворюються згідно з формулами (1.5) та (1.6); коли вектори індукції електричного і напруженості магнітного полів перетворюються при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  за формулами (1.8) і (1.9), і нарешті, ще й коли густини зарядів та струмів (джерела поля) перетворюються за формулами (1.12) і (1.10).**

Одержані формули перетворення для векторів поля й фізичних величин, що характеризують джерела поля, зручно подавати через повздо-вжні та поперечні (по відношенню до напрямку швидкості руху СВ  $K'$ ) проєкції відповідних векторів.

Якщо будь-який вектор поля записати у вигляді

$$\vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{A}_\parallel,$$

де  $\vec{A}_\parallel$ ,  $\vec{A}_\perp$  – повздо-вжня та відповідно поперечна компоненти вектора  $\vec{A}$  по відношенню до напрямку вектора  $\vec{V}$ , то формули перетворення векторів поля та джерел поля при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  набувають вигляду:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] \right), \quad (1.13)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \vec{B}_{\perp} = \Gamma \left[ \vec{B}'_{\perp} + \frac{[\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}]}{c^2} \right], \quad (1.14)$$

$$\vec{H}_{\parallel} = \vec{H}'_{\parallel}, \vec{H}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{H}'_{\perp} + [\vec{V}, \vec{D}'_{\perp}] \right), \quad (1.15)$$

$$\vec{D}_{\parallel} = \vec{D}'_{\parallel}, \vec{D}_{\perp} = \Gamma \left[ \vec{D}'_{\perp} - \frac{[\vec{V}, \vec{H}'_{\perp}]}{c^2} \right], \quad (1.16)$$

$$\vec{j}_{\parallel} = \Gamma \left( \vec{j}'_{\parallel} + \vec{V} \rho' \right), \vec{j}_{\perp} = \vec{j}'_{\perp}, \rho = \Gamma \rho' + \frac{j' V}{c^2}. \quad (1.17)$$

А при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ :

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \vec{E}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}] \right), \quad (1.18)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \vec{B}'_{\perp} = \Gamma \left[ \vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2} \right], \quad (1.19)$$

$$\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}, \vec{H}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{H}_{\perp} - [\vec{V}, \vec{D}_{\perp}] \right), \quad (1.20)$$

$$\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}, \vec{D}'_{\perp} = \Gamma \left[ \vec{D}_{\perp} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}_{\perp}]}{c^2} \right], \quad (1.21)$$

$$\vec{j}'_{\parallel} = \Gamma \left( \vec{j}_{\parallel} - \vec{V} \rho \right), \vec{j}'_{\perp} = \vec{j}_{\perp}, \rho' = \Gamma \left( \frac{\rho - j V}{c^2} \right). \quad (1.22)$$

**Подання формул перетворення векторів поля та джерел поля у формах (1.13)–(1.22) вигідне ще й тим, що формули в такому поданні будуть справедливі при довільному напрямку  $\vec{V}$  відносно осей координат.**

Якщо ізотропне й однорідне середовище нерухоме відносно СВ  $K'$ , то можна записати матеріальні рівняння:

$$\vec{B}' = \mu_0 \mu \vec{H}', \vec{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}', \vec{j}' = \lambda \vec{E}'. \quad (1.23)$$

Тоді для рухомого відносно СВ  $K$  середовища можемо, згідно з (1.13)–(1.22), записати:

$$\vec{B} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2} = \mu_0 \mu \left( \vec{H} - [\vec{V}, \vec{D}] \right), \quad (1.24)$$

$$\vec{D} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}]}{c^2} = \varepsilon_0 \varepsilon (\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \quad (1.25)$$

$$\Gamma(\vec{j}_{\parallel} - \vec{V}\rho) = \lambda \vec{E}_{\parallel}, \quad (1.26)$$

$$\vec{j}_{\perp} = \Gamma \lambda (\vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]). \quad (1.27)$$

Ці співвідношення зв'язують між собою в рухомому середовищі величини, які вимірюються чи спостерігаються з точки зору СВ  $K$ . Як бачимо, останні чотири формули дають додаткові зв'язки між величинами  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ .

## 1.2. Спосіб, оснований на трансформаційних властивостях компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої

Як відомо, напруженість електричного  $\vec{E}$  й індукція магнітного  $\vec{B}$  полів у вакуумі виражаються через електромагнітні потенціали таким чином:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \\ &= \vec{i} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \vec{j} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \vec{k} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

де  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  та  $\varphi(\vec{r}, t)$  – векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля.

Електромагнітні потенціали вводяться на основі двох рівнянь Максвелла, як розв'язок їх, наступним чином:

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

тому

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A},$$

і, підставивши цей розв'язок у закон електромагнітної індукції

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

одержуємо:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Тому, використовуючи означення 4-потенціалу

$$\Phi \left( \Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i \cdot \frac{\varphi}{c} \right), \quad (1.28)$$

компоненти вектора та  $\vec{B}$  можна подати в такій формі:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \\ B_y &= \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

а компоненти напруженості електричного поля  $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$  в термінах 4-потенціалу [33; 85]

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \cdot \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1} - i \cdot c \cdot \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4} = i \cdot c \cdot \left( \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4} \right), \\ E_y &= i \cdot c \cdot \left( \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_4} \right), \\ E_z &= i \cdot c \cdot \left( \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_4} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Таким чином, усі компоненти електромагнітного поля можуть бути виражені через деякі комбінації похідних компонентів 4-потенціалу за координатами 4-вектора події.

Очевидна симетрія в цих означеннях за індексами дозволяє ввести єдиний принцип побудови компонент поля через 4-потенціали в 4-вимірному просторі:

$$F_{\mu\nu} = c \cdot \left( \frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right), \quad (1.31)$$

$$\mu, \nu = 1..4$$

де  $F_{\mu\nu}$  – **4-вимірний тензор електромагнітного поля**.

Оскільки індекси  $\mu$  і  $\nu$  пробігають значення від 1 до 4, то тензор  $F_{\mu\nu}$  має 16 компонент. Тобто, виходячи з рівнянь Максвелла та подання

їх у 4-вимірному просторі Мінковського (принцип відносності), два вектора електромагнітного поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  можуть бути виражені за допомогою деякого єдиного алгоритму через відповідні просторово-часові похідні від 4-потенціалу  $\Phi_i$ .

Таким чином, тензор електромагнітного поля має такий явний вигляд:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Компоненти векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , як видно з означення тензора ЕМП, є його компонентами.

У 4-просторі вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , якими ми описували електромагнітну взаємодію, уже не вектори. Вони злилися в одну величину, більш складну за свою математичною природою. Поки йдеться про перетворення систем координат у класичній електродинаміці, вектори поля є 3-векторами. Але як тільки ми переходимо до СВ, що знаходяться у відносному русі, опис поля суттєво змінюється. У 4-просторі Мінковського  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  уже не вектори, навіть не 4-вимірні.

Усі ці компоненти (16 величин) є окремими проєкціями більш загального математичного об'єкту – тензора електромагнітного поля.

Найбільш цікавими для нас є формули перетворення компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої.

Оскільки при переході від однієї системи відліку до іншої координати події перетворюються згідно з формулами

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k, \quad (1.33)$$

де  $\alpha_{ik}$  – матриця перетворень Лорентца,

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

то, згідно з означенням тензора, компоненти 4-вимірного тензора другого рангу при переході від системи відліку  $K'$  до  $K$  перетворюються за формулою

$$F_{ik} = \alpha_{im} \cdot \alpha_{kl} \cdot F'_{ml}. \quad (1.35)$$



Нагадаємо, що 4-вимірним тензором другого рангу називається сукупність 16-ти компонент, які при переході від однієї системи відліку до іншої перетворюються згідно з формулою (1.35).

Щоб знайти формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої, використаємо формули, що визначають правила перетворення компонент тензора та явний вигляд тензора електромагнітного поля.

Наприклад, згідно з (1.35),

$$F_{12} = \alpha_{1m} \cdot \alpha_{2l} \cdot F'_{ml}. \quad (1.36)$$

Таким чином, кожна компонента тензора електромагнітного поля є лінійною комбінацією всіх інших компонент тензора, взятих у системі відліку  $K'$ .

Тобто електричне й магнітне поле виявляються пов'язаними органічно, нерозривно:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \alpha_{11}\alpha_{2l}F'_{1l} + \alpha_{12}\alpha_{2l}F'_{2l} + \alpha_{13}\alpha_{2l}F'_{3l} + \alpha_{14}\alpha_{2l}F'_{4l} = \\ &= \Gamma cB'_z + (-iB\Gamma) \cdot iE'_y = \Gamma cB'_z + B\Gamma E'_y = c\Gamma \left( B'_z + \frac{1}{c^2}VE'_y \right). \end{aligned}$$

Тобто для проекції індукції магнітного поля  $B_z$  маємо такий зв'язок з компонентами ЕМП в СВ  $K'$ :

$$B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{1}{c^2}VE'_y \right). \quad (1.37)$$

Таким способом можна одержати формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma \left( E'_y + VB'_z \right), \quad E_z = \Gamma \left( E'_z - VB'_y \right), \quad (1.38)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma \left( B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z \right), \quad B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y \right). \quad (1.39)$$

Очевидно, якщо ми хочемо знайти електромагнітне поле в СВ  $K'$  за відомими в СВ  $K$  полями  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , у формулах (1.38) і (1.39) необхідно штриховані величини замінити на нештриховані та навпаки, а перед швидкістю  $V$  поставити протилежний знак. І тоді ми одержимо такі ж самі ФПКЕМП, як і (1.5) та (1.6).

### 1.3. Принцип відносності й основні експериментальні закони електродинаміки

Дослідження показали визначальну роль СТВ при адекватному поясненні основних положень електромагнетизму [13; 17].

Якщо в довільній точці простору  $(x', y', z')$  і в довільний момент часу  $t'$  інерційної системи відліку  $K'$  відомі напруженість електричного поля  $\vec{E}'$  та магнітна індукція  $\vec{B}'$  електромагнітного поля, то значення полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в тій самій часо-просторовій точці СВ  $K$ , відносно якої СВ  $K'$  рухається вздовж вісі  $OX$  з швидкістю  $\vec{V} = const$ , визначаються (як це показано в підрозділах 1.1 та 1.2) формулами перетворення компонент поля:

$$E_x = E'_x, E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y), \quad (1.38)$$

$$B_x = B'_x, B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right), B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right). \quad (1.39)$$

Нагадаємо, що вираз «та сама просторово-часова точка» означає, що просторові координати цієї точки і час настання подій в якій в СВ  $K$  та в СВ  $K'$  зв'язані перетвореннями Лорентца.

Перетворення (1.38) і (1.39) надзвичайно глибокі за змістом, з їх допомогою ілюструється ряд фундаментальних положень електродинаміки, вони використовуються для аналізу електродинамічних задач з точки зору різних ІСВ [2; 3; 4; 5; 9; 33].

Строго й послідовно формули (1.38) і (1.39) отримують методами теорії відносності з допомогою перетворень компонент тензора електромагнітного поля при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , як це було продемонстровано в попередньому підрозділі.

Тому методично просте обґрунтування, пояснення й застосування цих формул є актуальними з огляду на дидактичні принципи педагогіки вищої та середньої шкіл.

Аналіз відомих учням СНЗ експериментальних фактів (див. нижче) на основі принципів СТВ, обґрунтування й застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку (СВ) до іншої, на наш погляд, дає можливість найбільш повно й адекватно формувати поняття про взаємозв'язок і відносність електричного та магнітного полів.

*Тому обґрунтуємо ФПКЕМП шляхом аналізу з допомогою принципів СТВ дослідних фактів, які вивчаються як у шкільному курсі фізики, так і в загальному курсі фізики ВНЗ.*

**1А.** Нехай СВ  $K'$  є власною СВ плоского зарядженого конденсатора (рис. 1.1).

$$\text{Тут } E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ де } \sigma' = \frac{q'}{S'} - \text{поверхнева густина заряду на пластинах конденсатора. Тоді в СВ } K \text{ напруженість електричного поля } E_y,$$

збільшиться порівняно з  $E'_y$  в  $\Gamma$  разів, оскільки  $\sigma = \sigma' \cdot \Gamma$ , внаслідок лорентцевого скорочення поздовжніх розмірів пластин конденсатора.

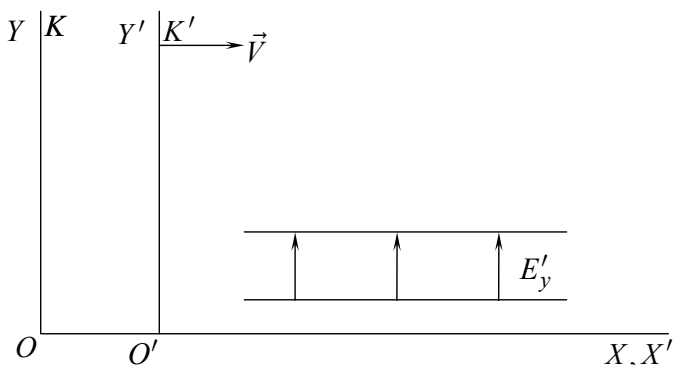


Рис. 1.1. Електричне поле плоского конденсатора в СВ  $K'$  та в СВ  $K$

Якщо пластини конденсатора розмістити в площині  $X'O'Y'$ , то на основі аналогічних міркувань одержимо  $E_z = \Gamma E'_z$ . Коли ж пластини паралельні площині  $Y'O'Z'$ , то  $E_x = E'_x$ , незважаючи на те, що відстань між пластинами в СВ  $K$  зменшилась.

Таким чином, якщо в СВ  $K'$  є тільки електричне поле, то при переході з  $K'$  в  $K$ -систему поперечні складові напруженості електричного поля перетворюються так:

$$E_y = \Gamma E'_y, \quad E_z = \Gamma E'_z, \quad (1.40)$$

а поздовжня складова не змінюється:  $E_x = E'_x$ .

**1Б.** Знайдемо закон, згідно з яким «рухоме» магнітне поле породжує електричне поле.

Для цього розглянемо явище електромагнітної індукції, яке спостерігається при русі прямолінійного відрізка проводу в магнітному полі.

Нехай в СВ  $K'$  існує однорідне магнітне поле з індукцією  $B'_y$  (рис. 1.2). Провідник  $AB$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}' = -\vec{V}$  відносно СВ  $K'$ . Тоді, як відомо, між кінцями провідника  $AB$  виникає ЕРС індукції, що зумовлена дією сили Лорентца на вільні електрони провідника, які рухаються разом з ним,

$$\vec{F}' = q[\vec{v}', \vec{B}'_y].$$

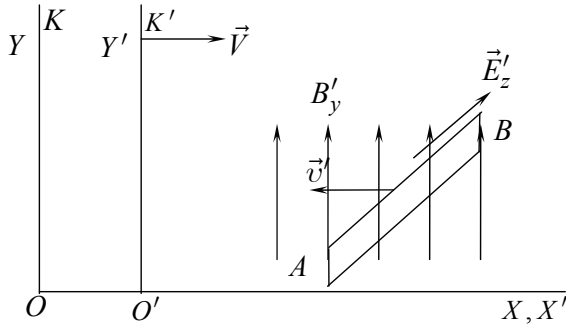


Рис. 1.2. Виникнення електричного поля в СВ  $K$  при русі відносно неї магнітного поля з індукцією  $B'_y$

Тобто напрямок і величина вектора напруженості електричного поля в СВ  $K'$ , яке розділяє електрони в рухомому провіднику, дорівнює (рис. 1.3а)

$$\vec{E}'_z = \frac{\vec{F}'}{q} = [\vec{v}', \vec{B}'_y]. \quad (1.41)$$

Або, урахувуючи напрямок векторів  $\vec{E}'_z$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{B}'_y$ ,

$$E'_z = -v' \cdot B'_y.$$

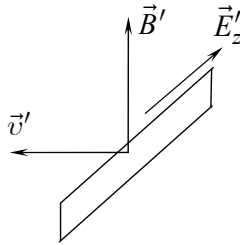


Рис. 1.3а

А величина ЕРС індукції в СВ  $K'$  дорівнює  $\varepsilon'_{ind} = lv' \cdot B'_y$ , де  $l$  – довжина провідника  $AB$ .

Згідно з принципом відносності, в СВ  $K$  (у якій провідник нерухомий) між кінцями провідника  $AB$  буде теж спостерігатися ЕРС індукції.

Цю ЕРС індукції спостерігач, який знаходиться у ВСВ провідника, пояснить появою деякого поля  $E_z$  завдяки руху магнітного поля  $B'_y$  зі

швидкістю  $\vec{V}$  відносно нього («швидкість руху поля» – це швидкість відповідних джерел поля (заряджених частинок, електромагнітів і т. п.)).

Інакше кажучи, у СВ  $K$  буде існувати і магнітне поле (див. нижче) і електричне поле напруженістю  $E_z$  (рис. 1.36). Оскільки величина заряду є інваріантом, то за формулами перетворення поперечних компонент сили при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  [2; 3] (див. також Додаток А) одержуємо

$$E'_z = \frac{E_z}{\Gamma} = E_z \sqrt{1 - B^2}.$$

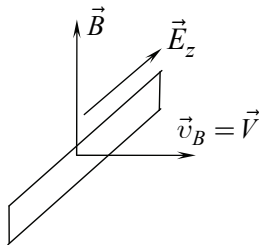


Рис. 1.36

Таким чином, складова напруженості електричного поля  $E_z$ , яке з'явиться в СВ  $K$  внаслідок руху магнітного поля  $B'_y$ , дорівнює

$$E_z = \Gamma E'_z = -\Gamma V B'_y. \quad (1.42)$$

Іншими словами, аналіз явища електромагнітної індукції з урахуванням принципу відносності дозволяє зробити висновок про те, що при русі магнітного поля  $\vec{B}'$  зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$  в ній виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E}$  (рис. 1.36)

$$\vec{E} = -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'] = \vec{E}_z. \quad (1.43)$$

Аналогічно, якщо в СВ  $K'$  існує магнітне поле з індукцією  $B'_z$ , а провідник  $AB$  орієнтований вздовж осі  $O'Y'$ , то внаслідок руху магнітного поля  $B'_z$  в СВ  $K$  виникає електричне поле напруженістю

$$E_y = \Gamma V B'_z. \quad (1.44)$$

Сумуємо висновки п. **1А** і **1Б**:

При наявності в СВ  $K'$  і електричного поля напруженістю  $\vec{E}'(E'_x, E'_y, E'_z)$ , і магнітного поля з індукцією  $\vec{B}'(B'_x, B'_y, B'_z)$  в СВ  $K$  напруженість електричного поля дорівнює

$$E_x = E'_x, E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y). \quad (1.45)$$

Переходимо тепер до обґрунтування формул перетворення компонент вектора магнітної індукції.

2А. Нехай уздовж вісі  $O'X'$  СВ  $K'$  розташований довгий провідник з постійним струмом  $I'$ .

Тоді в СВ  $K'$  складові  $B'_y, B'_z$  магнітної індукції в точках  $A$  і  $C$  чисельно дорівнюють (див. рис. 1.4)

$$B'_z = B'_y = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r'},$$

де  $r'$  – відстань від точок  $A$  і  $C$  до проводу,  $I' = j' \cdot S'$ ,

$j' = \frac{n_-^0 \cdot v' q}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$  – густина струму в СВ  $K'$ ,  $S'$  – площа поперечного перерізу провідника,  $n_-^0$  – концентрація електронів провідності у ВСВ,

$\beta' = \frac{v'}{c}$ ,  $v'$  – дрейфова швидкість руху цих електронів,  $q$  – величина заряду електрона.

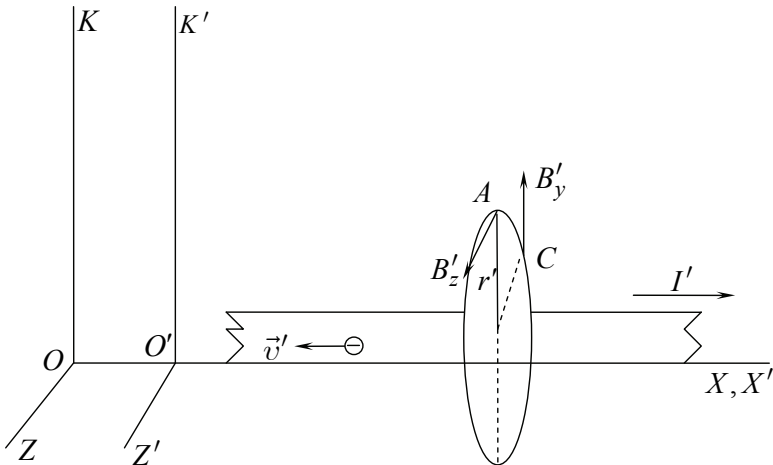


Рис. 1.4. Магнітне поле провідника зі струмом в СВ  $K$  і  $K'$

Знайдемо магнітну індукцію в цих точках поля ( $A$  і  $C$ ) в СВ  $K$ . Очевидно, що  $r' = r$ ,  $S' = S$ , а сила струму  $I$  в СВ  $K$  буде відрізнятися від значення  $I'$ . У  $K$ -системі струм, що протікає по провіднику, зумовлений не тільки рухом електронів зі швидкістю  $v$ , але й рухом по-

зитивних іонів кристалічної ґратки зі швидкістю  $V$ . Тому густина струму в СВ  $K$  дорівнює

$$j = j_+ - j_- = \frac{\rho_+^0 \cdot V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\rho_-^0 \cdot (V - v')}{\left(1 - \frac{v'V}{c^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{j'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (1.46)$$

де  $\beta = \frac{v}{c} = \frac{V - v'}{c \left(1 - \frac{v'V}{c^2}\right)}$  – швидкість руху електронів провідності в СВ  $K$ ,

$\rho_+^0 = n_+^0 q$  – об'ємна густина заряду позитивних іонів у ВСВ,  $\rho_-^0 = n_-^0 q$  – об'ємна густина заряду електронів провідності у ВСВ. При цьому використана умова нейтральності провідника зі струмом СВ  $K'$  [2; 6]:

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}}. \quad (1.47)$$

При уважному аналізі фізичних обставин, що пов'язані з протіканням струму в металевому провіднику, умова (1.47) досить суперечлива [18; 19; 20], але в існуючих навчальних посібниках є загальноприйнятою. Критичний аналіз умови нейтральності (1.47) наведений в п.п. 4.3.3. та 4.3.5. Ряд проблемних питань, пов'язаних з умовою (1.47), обговорюється в [19–22]. Зауважимо, що (1.46) може бути отримано і з допомогою формул перетворення компонент 4-струму [2; 19; 20].

Таким чином,  $I = \Gamma \cdot I'$ , і тому поперечні складові магнітної індукції в СВ  $K$  дорівнюють

$$B_y = \Gamma B'_y, \quad B_z = \Gamma B'_z. \quad (1.48)$$

**2Б.** Знайдемо закон, згідно з яким магнітне поле зв'язане з рухомим електричним полем. Для цього скористаємося результатами опису взаємодії двох заряджених частинок [13].

Коли заряджена частинка рухається в СВ  $K$  зі швидкістю  $\vec{V} = const$ , то вона створює магнітне поле, індукція якого визначається

$$\vec{B} = \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2}, \quad (1.49)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля цієї зарядженої частинки в СВ  $K$ :

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}, \quad (1.50)$$

де  $q$  – величина заряду,  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений із миттєвого положення заряду в дану точку поля  $M$  (рис. 1.5),  $\theta$  – кут між векторами  $\vec{V}$  та  $\vec{r}$ .

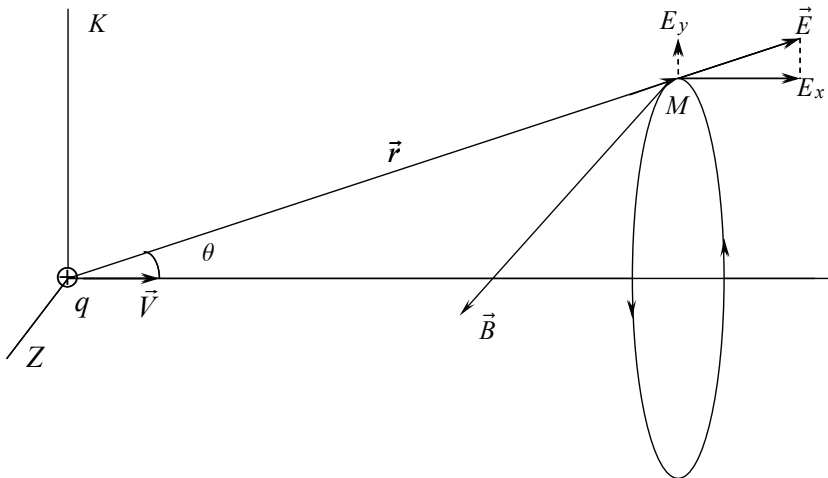


Рис. 1.5. Електричне та магнітне поля рухомої ЗЧ в СВ  $K$

Із виразу (1.50), між іншим, відразу підтверджуються висновки п. **IA**.

$$E_x = E'_x, \text{ бо при } \theta = 0 \quad r = r' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ а при } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma E'_y, \quad E_z = \Gamma E'_z.$$

Очевидно, що

$$B_z = \frac{V}{c^2} E_y, \text{ але } E_y = \Gamma E'_y, \text{ тому } B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (1.51)$$



Якщо т.  $M$  знаходиться в площині  $XOZ$ , то із закону (1.50) одержуємо

$$B_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} E'_z. \quad (1.52)$$

Сумуємо висновки пунктів **2А** та **2Б**.

При наявності в СВ  $K'$  і магнітного поля з індукцією  $\vec{B}'(B'_x, B'_y, B'_z)$ , й електричного напруженістю  $\vec{E}'(E'_x, E'_y, E'_z)$  в СВ  $K$  магнітна індукція дорівнює

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma \left( B'_y - \frac{V \cdot E'_z}{c^2} \right), \quad B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{V E'_y}{c^2} \right). \quad (1.53)$$

Співвідношення (1.45), (1.53), які, як бачимо, збігаються з (1.38) та (1.39).

ФПКЕМП носять локальний характер, хоча й одержані при аналізі нелокальних електродинамічних задач. Чи справедливі вони для будь-якого електромагнітного поля, утвореного довільним розподілом зарядів і струмів?

«Це питання приводить нас до самої суті поняття поля. Якщо поняття електричного поля  $\vec{E}$  в просторово-часовій точці повинне мати однозначний смисл, тоді значення поля  $\vec{E}$  в цій же просторово-часовій точці, але, з точки зору інших СВ, не може залежати від природи джерел, що створюють це поле, якими вони не були б. Іншими словами, спостерігач в СВ  $K$ , який виміряв у деякий момент часу поле біля себе, може передбачити тільки на основі цих вимірів, що ж виміряють в тій же просторово-часовій точці спостерігачі з інших СВ. Якби це було не так, поняття поля було б непотрібне. Дослідні докази справедливості цього твердження і є вирішальними підтвердженнями згоди теорії поля з експериментом» [6].

*Тому, незважаючи на те, що при обґрунтуванні формул (1.38) і (1.39) розглядалися найпростіші конфігурації заряджених тіл і струмів, ми одержали ФПКЕМП (1.45) та (1.53), які мають загальну силу і справедливі для електромагнітного поля, утвореного будь-яким розподілом зарядів і струмів.*

Ще раз відзначимо два важливих наслідки, що впливають із аналізу простих дослідних фактів. При русі зі швидкістю  $\vec{V}$  магнітного поля, індукція якого  $\vec{B}$ , у тій самій просторово-часовій точці виникає електричне поле напруженістю

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (1.54)$$

Якщо ж рухається електричне поле зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно до-  
вільної системи відліку, то в тій самій часово-просторовій точці виникає  
магнітне поле  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2}. \quad (1.55)$$

Але більш детально наслідки ФПКЕМП аналізуються в **Розділі 2**  
та **Розділі 3**.

#### 1.4. Спосіб, що ґрунтується на детальному аналізі властиво- стей електромагнітного поля рівномірно та прямолінійно рухомої ( $v < c$ ) зарядженої частинки

Нижче ми пропонуємо спосіб одержання ФПКЕМП, що ґрунту-  
ється на детальному аналізі властивостей ЕМП рівномірно та прямолі-  
нійно рухомої ( $v < c$ ) зарядженої частинки (протона). Цей спосіб орга-  
нічно випливає з інноваційної методичної концепції вивчення електро-  
динаміки на засадах СТВ [13; 15].

Тобто з самого початку вивчення теми «Магнітне поле», після фо-  
рмування поняття «магнітне поле» й розкриття релятивістської природи  
магнітного поля [13] можна показати, що електричне і магнітне поля  
пов'язані ФПКЕМП (1.38), (1.39).

Нехай у нас є три СВ: СВ  $K$ , СВ  $K'$ , СВ  $K_0$ , (див. рис. 1.6).

СВ  $K_0$  є, як видно з рис. 1.6, власною СВ для зарядженої частин-  
ки. СВ  $K_0$  рухається відносно СВ  $K'$  зі швидкістю  $\vec{v}_0 = const$ , а СВ  
 $K'$  у свою чергу рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно лабораторної СВ  $K$ .

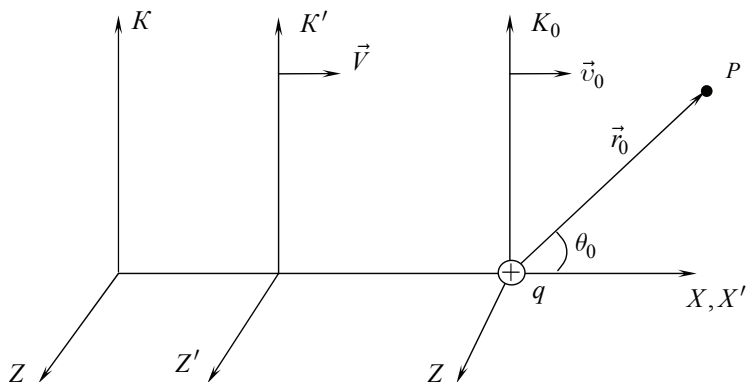


Рис. 1.6. Рух протона відносно СВ  $K$  і СВ  $K'$

Тоді й напруженість електричного, й індукції магнітного полів, які виникають у СВ  $K_0$ , СВ  $K'$ , СВ  $K$ , відповідно, дорівнюють [13; 15]:

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= \frac{q\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}, \\ \vec{E}' &= \frac{q\vec{r}'(1-\beta_0^2)}{4\pi\epsilon_0 r'^3(1-\beta_0^2\sin^2\theta')^{3/2}},\end{aligned}\quad (1.56)$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q\vec{r}(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \\ \vec{B}_0 &= 0, \quad \vec{B}' = \frac{[\vec{v}_0, \vec{E}']}{c^2}, \quad \vec{B} = \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2},\end{aligned}\quad (1.57)$$

де  $v = \frac{V + v_0}{1 + \frac{V \cdot v_0}{c^2}}$  – швидкість руху протона відносно лабораторної сис-

теми відліку,  $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\theta_0$  – кут між радіусом вектором  $\vec{r}_0$  і віссю  $OX$  СВ  $K_0$ ;  $\theta'$  – кут між радіусом вектором  $\vec{r}'$ , який проведений із миттєвого положення заряду в системі  $K'$  в дану точку поля, і вектором  $\vec{v}_0$ ;  $\theta$  – кут між напрямом руху протона ( $\vec{v}$ ) і радіусом вектором  $\vec{r}$ , який проведений з миттєвого положення протона в СВ  $K$  в дану точку поля  $P$ .

З допомогою перетворень Лорентца може бути показано, що

$$r_0 = \gamma_0 \left[ (x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2) \cdot (1 - \beta_0^2) \right]^{1/2}, \quad (1.58)$$

$$r_0 = \gamma \left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right]^{1/2}, \quad (1.59)$$

$$r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2} = \left[ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right]^{3/2}, \quad (1.60)$$

де  $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

І тоді, враховуючи (1.56) та (1.57), (1.58), (1.59), (1.60), одержуємо

$$E_x = E'_x,$$

$$E_y = \frac{qy \cdot (1 - \beta_0^2)}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2)(1 - \beta_0^2) \right]^{3/2}} \cdot \Gamma(1 + B\beta_0) =$$

$$= E'_y \Gamma \left( 1 + \frac{Vv_0}{c^2} \right) = \Gamma \left( E'_y + V \frac{v_0 E'_y}{c^2} \right) = \Gamma(E'_y + VB'_z); \quad (1.61)$$

аналогічно можна одержати формулу перетворення для проекції  $E_z$ :

$$E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y). \quad (1.62)$$

Використовуючи (1.56) та (1.57), (1.58), (1.59), (1.60) для компонент вектора магнітної індукції в СВ  $K$ , одержуємо

$$B_x = B'_x,$$

$$B_y = \Gamma \left( B'_y - \frac{VE'_z}{c^2} \right), \quad (1.63)$$

$$B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{VE'_y}{c^2} \right).$$

Таким чином, на основі запропонованого в [13; 15] підходу, обговорюючи властивості електричного й магнітного полів рухомого протону, вдається довести формули перетворення компонент електромагнітного поля.

### 1.5. Електромагнітне поле рівномірно рухомої зарядженої нитки та ФПКЕМП

Розглянемо спосіб обґрунтування ФПКЕМП, заснований на положеннях фізики, що вивчаються в школі. Уявимо собі дві системи відліку – лабораторну СВ  $K$  та СВ  $K'$ , яка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$  вздовж осі  $OX$ . А в самій СВ  $K'$  – вздовж осі  $O'X'$  рухається зі швидкістю  $v'$  нескінченна довга рівномірно заряджена нитка, причому у власній СВ лінійна густина заряду нитки дорівнює  $\tau_0$  (рис. 1.7).

Тоді, в СВ  $K'$  будемо мати напруженість електричного й індукцію магнітного полів у точках  $A$  і  $P$ , які дорівнюють, відповідно

$$E'_y = \gamma' \cdot E_y^0, \quad B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = \epsilon_0 \mu_0 v' E'_y, \quad (1.64)$$

$$E'_z = \gamma' \cdot E_z^0, \quad B'_y = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = -\epsilon_0 \mu_0 v' E'_z, \quad (1.65)$$

де  $E_y^0 = E_z^0 = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 r}$  – величина напруженості електричного поля, створеного зарядженою ниткою у ВСВ у точках на віддалі  $r$  від нитки;  $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ ,  $\beta' = \frac{v'}{c}$ ,  $I' = \tau'v'$  – сила струму в СВ  $K'$ , який зумовлений рухом нитки зі швидкістю  $v'$ ;  $\tau' = \gamma'\tau_0$ .

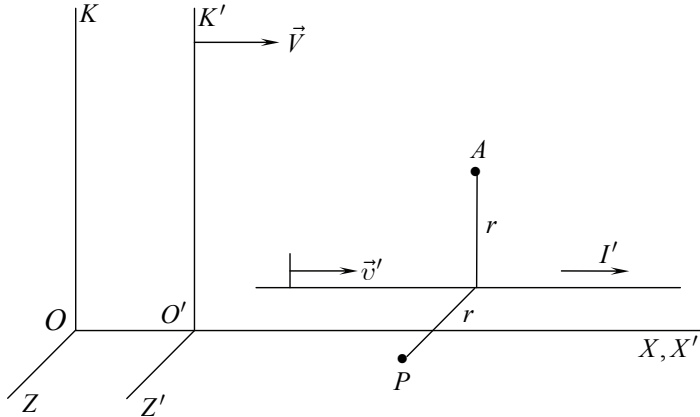


Рис. 1.7. Електромагнітне поле, що створюється рівномірно зарядженою рухомою ниткою в СВ  $K$  та СВ  $K'$

У СВ  $K$  значення напруженості електричного й індукції магнітного полів знаходяться з використанням подібних формул

$$E_y = E_z = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r},$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r},$$

але при цьому необхідно брати до уваги те, що нитка рухається відносно

СВ  $K$ , причому зі швидкістю  $v = \frac{V + v'}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$ .

Тому електромагнітне поле в точках  $A$  і  $P$  СВ  $K$  має такі компоненти (виражені через компоненти електромагнітного поля в СВ  $K'$ ):

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau_0 \gamma}{2\pi\epsilon_0 r} = \Gamma(E'_y + VB'_z), \quad (1.66)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_0 v \tau_0 \gamma}{2\pi \cdot r} = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right), \quad (1.67)$$

$$E_z = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau_0 \gamma}{2\pi\epsilon_0 r} = \Gamma(E'_z - VB'_y), \quad (1.68)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} = -\frac{\mu_0 v \tau_0 \gamma}{2\pi \cdot r} = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right), \quad (1.69),$$

$$\text{де } \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Gamma \gamma' \left(1 + \frac{Vv'}{c^2}\right).$$

Тобто розраховуючи електромагнітне поле ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) такого симетричного й простого розподілу заряду та порівнюючи характеристики цього електромагнітного поля в СВ  $K$  та СВ  $K'$ , вдається вивести формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї СВ до іншої:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y), \quad (1.70)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{VE'_z}{c^2}\right), \quad B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{VE'_y}{c^2}\right). \quad (1.71)$$

Таким чином, ми одержали ФПКЕМП.

Ці формули не пояснюють механізмів породження того чи іншого поля. Для цих формул не має значення, яким чином виникли поля і яка природа (походження) цих полів, які джерела відповідальні за появу полів.

Вдумливий аналіз властивостей ФПКЕМП і застосування їх дають надзвичайно широкий спектр методичних новацій при формуванні уявлень про єдине електромагнітне поле, причому без посилання на взаємозв'язок між електричним і магнітним полями, що змінюються. У традиційних методиках вважається [1; 7–11], що тільки при вивченні нестационарних електромагнітних явищ можна більшою чи меншою мірою успішно формувати поняття про електромагнітне поле. Але, як раніше відзначалося [14; 15], достатньо повно формувати уявлення про ЕМП можна і значно раніше – вивчаючи електромагнітне поле, створене стаціонарним, прямолінійним рухом заряджених частинок.

Зокрема слід звернути увагу на те, що електромагнітне поле не є векторним полем, а в рамках класичної (не квантової) електродинаміки адекватно описується апаратом тензорного числення. Про це свідчать

безліч прикладів і ряд відомих учням експериментальних фактів (явище електромагнітної індукції, розглянутий вище приклад). Дійсно, яки електромагнітне поле як особливий вид матерії, що здійснює взаємодію між зарядженими частинками, не являло собою дещо єдине й особливе, то при переході від однієї СВ до іншої напруженість електричного поля, наприклад, виражалася б тільки через компоненти вектора  $\vec{E}'$ . Можна сказати, що в кожній СВ вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  – це «проекції» на цю систему складного фізичного об'єкту – електромагнітного поля.

### 1.6. Вимога релятивістської інваріантності виразу для сили Лорентца і ФПКЕМП

Виходячи із ПВ, вираз для сили Лорентца повинен бути релятивістськи інваріантним. Тобто вигляд формули сили Лорентца має бути однаковим у всіх СВ. Таким чином, і в СВ  $K$  і в СВ  $K'$  вираз для сили Лорентца матиме такий вигляд [3]:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]\right), \quad (1.72)$$

$$\vec{F}' = q\left(\vec{E}' + [\vec{v}', \vec{B}']\right). \quad (1.73)$$

Підставимо у формулу (А.5) замість  $F_y$  та  $F'_y$  їх вирази з (1.72) та (1.73):

$$E_y + (v_z B_x - v_x B_z) = \frac{1 - V v_x / c^2}{\sqrt{1 - B^2}} \left[ E'_y + (v'_z B'_x - v'_x B'_z) \right]. \quad (1.74)$$

З допомогою формул додавання швидкостей

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - V v_x / c^2}, v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - B^2}}{1 - V v_x / c^2}.$$

Спочатку виключимо з (1.74) величини  $v'_x$  та  $v'_z$ , а потім, перегрупувавши всі доданки в ліву частину, одержуємо

$$\left( E_y - \frac{E'_y}{\sqrt{1 - B^2}} - \frac{V B'_z}{\sqrt{1 - B^2}} \right) \cdot v_x + \left( -B_z + \frac{V E'_y}{c^2 \sqrt{1 - B^2}} + \frac{B'_z}{\sqrt{1 - B^2}} \right) \cdot v_x + (B_x - B'_x) \cdot v_z = 0.$$

Оскільки ця рівність повинна мати місце при будь-яких значеннях  $v_x$  та  $v_z$ , то вирази в круглих дужках цієї рівності дорівнюють нулю. І, як наслідок, одержуємо деякі ФПКЕМП:

$$B_x = B'_x, E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1-B^2}}, B_z = \frac{B'_z + \left(\frac{V}{c^2}\right)E'_y}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (1.75)$$

Аналогічно, підставляючи у формулу

$$F_z = \frac{1 - Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z$$

компоненти сили Лорентца  $F_z$  та  $F'_z$ , одержуємо

$$B_x = B'_x, E_z = \frac{E'_z + VB'_y}{\sqrt{1-B^2}}, B_y = \frac{B'_y + \left(\frac{V}{c^2}\right)E'_z}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (1.76)$$

Для знаходження формули перетворення для поздовжньої компоненти напруженості електричного поля використаємо формулу (А.1):

$$F_x = \frac{1}{1 + Vv'_x/c^2} \left[ F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{v}') \right].$$

Знову таки, аналогічно до попереднього, формулу (А.1) приводимо до такої форми:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) \left[ E_x + (v_y B_z - v_z B_y) \right] - \\ & - \left[ E'_x + (v'_y B'_z - v'_z B'_y) \right] = \frac{V}{c^2} (\vec{E}' \cdot \vec{v}'), \end{aligned} \quad (1.77)$$

де  $\vec{F}' \cdot \vec{v}' = q \vec{E}' \cdot \vec{v}'$ .

Для подальшого спрощення (1.77) скористаємося (1.75) та (1.76) і знайдемо

$$E_x = E'_x. \quad (1.78)$$

Таким чином, одержуємо ФПКЕМП

$$\begin{aligned} & B_x = B'_x, \\ & E_x = E'_x, \\ & E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1-B^2}}, \quad B_y = \frac{B'_y - \left(\frac{V}{c^2}\right)E'_z}{\sqrt{1-B^2}}, \\ & E_z = \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1-B^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \left(\frac{V}{c^2}\right)E'_y}{\sqrt{1-B^2}}. \end{aligned} \quad (1.79)$$



### 1.7. Формули перетворення компонент вектора поляризації та вектора намагнічування при зміні системи відліку

Щоб знайти формули перетворення компонент векторів поляризації  $\vec{P}$  та намагнічування  $\vec{M}$  при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , використаємо зв'язок їх з векторами поля в середовищі згідно з означенням:

$$\begin{aligned}\mu_0 \vec{M}' &= \vec{B}' - \mu_0 \vec{H}', \\ \vec{P}' &= \vec{D}' - \varepsilon_0 \vec{E}'.\end{aligned}$$

А в СВ  $K$

$$\begin{aligned}\mu_0 \vec{M} &= \vec{B} - \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}.\end{aligned}$$

Тоді, використовуючи (1.19) і (1.20) для поперечних компонент векторів  $\vec{M}'_{\perp}$  та  $\vec{P}'_{\perp}$ , маємо

$$\begin{aligned}\mu_0 \vec{M}'_{\perp} &= \Gamma \left[ \vec{B}_{\perp} - \mu_0 \vec{H}_{\perp} - \frac{V \vec{E}_{\perp}}{c^2} + \mu_0 [\vec{V}, \vec{D}_{\perp}] \right] = \\ &= \Gamma \left( \mu_0 \vec{M}_{\perp} + \mu_0 [\vec{V} (\vec{D}_{\perp} - \varepsilon_0 \vec{E}_{\perp})] \right) = \Gamma \mu_0 \left( \vec{M}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{P}_{\perp}] \right).\end{aligned}\quad (1.80)$$

Використовуючи далі (1.18) і (1.21), одержуємо

$$\begin{aligned}\vec{P}'_{\perp} &= \Gamma \left\{ \vec{D}_{\perp} - \varepsilon_0 \vec{E}_{\perp} - \left[ \vec{V}, \left( \varepsilon_0 \vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{H}_{\perp}}{c^2} \right) \right] \right\} = \\ &= \Gamma \left\{ \vec{P}_{\perp} - \left[ \frac{\vec{V}}{c^2}, \left( \frac{\vec{B}_{\perp}}{\mu_0} - \vec{H}_{\perp} \right) \right] \right\} = \Gamma \left\{ \vec{P}_{\perp} - \frac{[\vec{V}, \vec{M}_{\perp}]}{c^2} \right\}.\end{aligned}\quad (1.81)$$

Розглядаючи окремо компоненти векторів, паралельні вектору швидкості, одержуємо

$$\vec{M}_{\parallel} = \vec{M}'_{\parallel}, \quad \vec{P}_{\parallel} = \vec{P}'_{\parallel}.$$

У результаті формули перетворення повздовжніх і поперечних складових векторів поляризації  $\vec{P}$  й намагнічування  $\vec{M}$  при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  мають вигляд

$$\left. \begin{aligned}\vec{M}_{\parallel} &= \vec{M}'_{\parallel} \\ \vec{M}_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{M}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{P}'_{\perp}] \right)\end{aligned} \right\},\quad (1.82)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_{\parallel} &= \vec{P}'_{\parallel} \\ \vec{P}_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{P}'_{\perp} + \frac{[\vec{V}, \vec{M}'_{\perp}]}{c^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (1.83)$$

Якщо у формулах (1.82) і (1.83) штриховані величини замінити на не штриховані і навпаки, а  $\vec{V}$  на  $-\vec{V}$ , то одержимо формули перетворення повздовжніх і поперечних компонент вектора поляризації і вектора намагнічування при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}'_{\parallel} &= \vec{M}_{\parallel} \\ \vec{M}'_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{M}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{P}_{\perp}] \right) \end{aligned} \right\}, \quad (1.84)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}'_{\parallel} &= \vec{P}_{\parallel} \\ \vec{P}'_{\perp} &= \Gamma \left( \vec{P}_{\perp} + \frac{[\vec{V}, \vec{M}_{\perp}]}{c^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (1.85)$$

Ці формули перетворення можна отримати й таким шляхом.

Використовуючи означення векторів поля  $\vec{D}$  та  $\vec{H}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

можна ввести тензор електромагнітного поля в середовищі, компоненти якого  $f_{ik}$  визначаються таким чином:

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

Цей тензор одержується з (1.32) шляхом заміни компонент  $c\vec{B}$  на  $\vec{H}$ , а компоненти  $-i\vec{E}$  на  $-ic\vec{D}$  [2].

Аналогічно вводиться тензор електричного й магнітного моментів:

$$m_{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot F_{ik} - f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icP_x \\ -M_z & 0 & M_x & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.87)$$

де вектор  $\vec{M}$  – вектор намагнічування (магнітний момент одиниці об'єму).

Із означення тензора електричного й магнітного моменту компоненти електричного та магнітного моментів перетворюються таким чином при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ :

$$M_x = M_x, M_y = \Gamma(M_y + VP'_z), M_z = \Gamma(M_z - VP'_y), \quad (1.88)$$

$$P_x = P_x, P_y = \Gamma\left(P_y - \frac{V}{c^2}M_z\right), P_z = \Gamma\left(P_z + \frac{V}{c^2}M_y\right). \quad (1.89)$$

Розглянемо приклад.

**Приклад 1.1.** Припустимо, що  $\vec{P}' \neq 0$ , а  $\vec{M}' = 0$ , тоді, виходячи з формул перетворення (1.88), (1.89), у системі відліку  $K$  з'являться як електричний, так і магнітний моменти

$$P_y = \Gamma P'_y, \\ M_y = \Gamma V P'_z.$$

Якщо в СВ  $K'$  існує намагнічене середовище ( $\vec{P}' = 0$ ,  $\vec{M}' \neq 0$ ), то в системі відліку  $K$  це ж середовище буде спостерігатися не тільки намагніченим, але й поляризованим

$$M_y = \Gamma M'_y, M_z = \Gamma M'_z, \\ P_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} M'_z, P_z = \Gamma \frac{V}{c^2} M'_y.$$

Для наочності спростимо цей приклад. Будемо розглядати рамку зі струмом, яка знаходиться в площині  $X'O'Y'$  (рис. 1.8).

Тоді, згідно з формулами (1.83) та (1.89), в системі відліку  $K$  будемо спостерігати і дипольний момент, яким з точки зору СВ  $K$  характеризується ця рамка зі струмом

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{M}]. \quad (1.90)$$

Цей результат ілюструється рис. 1.9а та 1.9б.

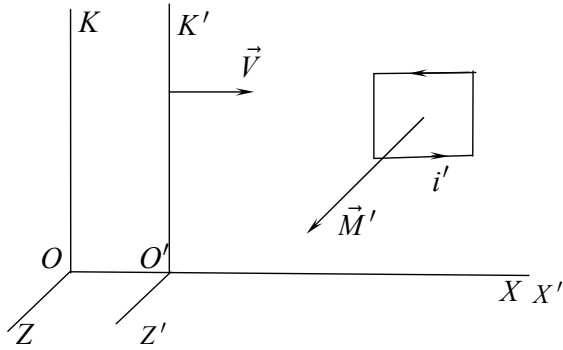
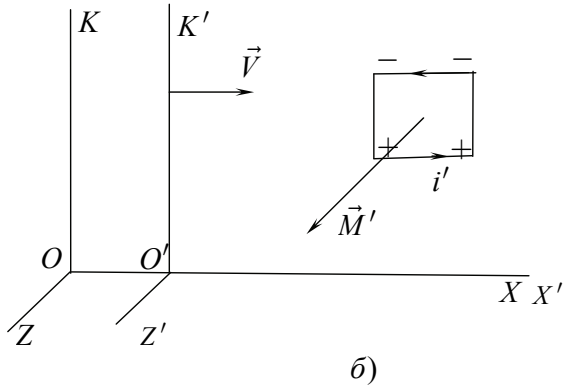


Рис. 1.8. Рамка зі струмом нерухома в СВ \$K'\$

$$\vec{M} = \Gamma \vec{M}' \quad \vec{P} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{M}]$$

а)



б)

Рис. 1.9. У СВ \$K\$ рамка зі струмом має

і магнітний момент  $\vec{M} = \Gamma \cdot \vec{M}'$ , і дипольний момент  $\vec{P} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{M}]$

Узагальнюючи, можна сказати, що рухоме намагнічене тіло з точки зору ЛСВ буде виглядати поляризованим. Цей релятивістський ефект лежить в основі явища уніполярної індукції та в основі роботи уніполярних генераторів. Додаткові приклади див. у пп. 4.2.9 та 4.2.10.

## Висновки до розділу 1

1. Зроблений огляд відомих у науковій і навчально-методичній літературі способів обґрунтування ФПКЕМП (пп. 1.1, 1.2, 1.6).

2. Показано, що коваріантність рівнянь Максвелла (1.1) має місце, якщо компоненти напруженості електричного й індукції магнітного полів перетворюються згідно з формулами (1.5) та (1.6); коли вектори індукції електричного й напруженості магнітного полів перетворюються при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  за формулами (1.8) і (1.9), і, нарешті, це й коли густини зарядів і струмів (джерела поля) перетворюються за формулами (1.12) і (1.10).

3. Таким чином, із огляду шести способів обґрунтування ФПКЕМП випливає, що найбільш строгим і послідовним є спосіб, який ґрунтується на формулах перетворення компонент тензора ЕМП при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  [1; 2] (п. 1.2). Але для реалізації його слід ввести тензор ЕМП.

4. Запропоновані нові способи обґрунтування ФПКЕМП (пп. 1.3, 1.4, 1.5), у яких не використовується поняття тензора ЕМП.

5. Ці три нових способи обґрунтування ФПКЕМП можуть бути використані навіть у навчальному процесі фізико-математичних класів СНЗ, оскільки в математичному відношенні вони основані на алгебрі шкільного курсу математики.

6. Ці способи обґрунтування ФПКЕМП дозволяють не тільки довести формули перетворення, але й більш ґрунтовно пояснити учням і студентам закони електромагнетизму й методику застосування принципу відносності.

7. Ми впевнилися, що електричне й магнітне поля, які описуються векторами  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , не незалежні одне від одного. Вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  окремо – це дві сторони прояву в 3-вимірному просторі об'єкта більш складної природи, тензора електромагнітного поля  $F_{\mu\nu}$ .

8. У реальності, що існує незалежно від нас, спостерігається електромагнітна взаємодія, яка адекватно описується тензором електромагнітного поля  $F_{\mu\nu}$ . А поділ цього поля на електричне й магнітне поля, які характеризуються векторами  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , відповідно, є умовним, залежним від СВ. Можна сказати, що електричне й магнітне поля – це «проекції» тензора  $F_{\mu\nu}$  на довільну СВ. «Електрика і магнетизм – дві різні сторони однієї і тієї ж суті» (Р. Фейнман).

9. Показано, що три проекції дипольного та три проекції магнітного моментів утворюють тензор електричного й магнітного моментів (1.87).

10. Подані два способи обґрунтування формул перетворення компонент тензора електричного й магнітного моментів при переході від однієї системи відліку до іншої.

## Розділ 2. ОСНОВНІ НАСЛІДКИ ФОРМУЛ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПОНЕНТ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 2.1. Формули перетворення повздовжніх і поперечних проєкцій векторів поля $\vec{E}$ та $\vec{B}$

Перш за все слід підкреслити, що ці формули ілюструють відносність електричного й магнітних полів. Дійсно, якщо в СВ  $K'$  існує тільки електричне поле, а магнітне поле відсутнє, то в СВ  $K$  будемо мати й електричне поле, поперечні компоненти якого зростають у  $\Gamma$  разів, й магнітне поле, компоненти індукції якого  $B_y$  і  $B_z$ .

І навпаки, якщо в СВ  $K'$  існує тільки магнітне поле, а електричне поле відсутнє, то в СВ  $K$ , крім збільшення магнітного поля в  $\Gamma$  разів, виникне й електричне поле, поперечні компоненти якого визначаються рівняннями

$$E_y = \Gamma(VB'_z), \quad E_z = \Gamma(-VB'_y).$$

Оскільки будь-яка компонента тензора ЕМП в СВ  $K$  є лінійною комбінацією всіх компонент тензора в СВ  $K'$ , то при переході від однієї СВ до іншої електричне поле, наприклад, може «з'явитися» за рахунок того, що в другій СВ було тільки магнітне поле, і навпаки.

Саме цей фізичний факт неможливо відобразити в математичному апараті, якщо вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  подати як компоненти деякого 4-вектора. Якби кожний з векторів  $\vec{E}$  чи  $\vec{B}$  входив у «свій», так би мовити, 4-вектор, то при перетвореннях Лорентца кожний з векторів  $\vec{E}$  чи  $\vec{B}$  в СВ  $K$  виражався б тільки через компоненти «свого» 4-вектора в СВ  $K'$ .

*І при цьому ми бачимо, що електричне та магнітне поля, які були незалежними одне від одного в довільній системі координат, у системах відліку, що знаходяться у відносному русі, перестають бути незалежними.*

Властивості поля, що відображені в законах його перетворення, є локальними властивостями. Значення  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в деякій просторово-часовій точці СВ  $K$  однозначно визначають компоненти поля в СВ  $K'$  в тій самій просторово-часовій точці.

Дослідимо більш детально формули перетворення компонент ЕМП.

Напруженість електричного й індукцію магнітного полів ми можемо розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові компоненти

поля, паралельні вісі  $OX$  та перпендикулярні до вісі  $OY$ . Наприклад,  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ .

Тоді формули перетворення (1.70) та (1.71) можна записати наступним чином:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] \right), \quad (2.1)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \quad \vec{B}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}] \right). \quad (2.2)$$

Оскільки  $\vec{B}'_{\parallel}$  та  $\vec{V}$  – колінеарні, то  $[\vec{V}, \vec{B}'_{\parallel}] = 0$ , а отже  $[\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] = [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}]$ , аналогічно  $[\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}] = [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}]$ .

Тому останні формули набувають вигляду:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] \right), \quad (2.3)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \quad \vec{B}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}] \right). \quad (2.4)$$

#### Деякі наслідки формул (2.3) та (2.4)

Нехай в СВ  $K'$  магнітне поле відсутнє ( $\vec{B}' = 0$ ), а електричне поле описується вектором  $\vec{E}'$ . Тоді в СВ  $K$  напруженість електричного поля визначається

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma \vec{E}'_{\perp},$$

а сумарне електричне поле

$$\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \Gamma \vec{E}'_{\perp}.$$

А індукція магнітного поля дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \Gamma \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'_{\perp}] = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \Gamma \vec{E}'_{\perp}],$$

оскільки  $[\vec{V}, \vec{E}'_{\parallel}] = 0$ , то останній результат можна подати у вигляді

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, (\vec{E}'_{\parallel} + \Gamma \vec{E}'_{\perp})] = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}]. \quad (2.5)$$

Тобто вектор індукції магнітного поля в СВ  $K$  буде перпендикулярний вектору  $\vec{E}$ .

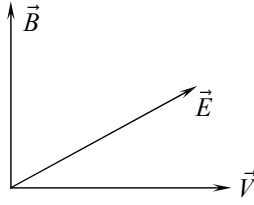


Рис. 2.1. Взаємна локальна орієнтація векторів  $\vec{V}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , в СВ  $K$ , якщо в СВ  $K'$  існує лише одне електричне поле  $\vec{E}'$

Іншими словами, в тому випадку, коли електричне поле  $\vec{E}'$  переміщується відносно СВ  $K$ , у системі відліку  $K$  виникає індукція магнітного поля  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}], \quad (2.5a)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля в СВ  $K$ . Причому вектор індукції магнітного поля в СВ  $K$  буде перпендикулярний вектору  $\vec{E}$ .

Рис. 2.1 якраз і ілюструє взаємну орієнтацію векторів поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  та «швидкості руху поля  $\vec{E}'$ »  $\vec{V}$ . Рухоме електричне поле породжує магнітне поле. Ще раз нагадаємо, що коли йдеться про «рух поля», мається на увазі рух джерел поля.

Нехай тепер у СВ  $K'$  відсутнє електричне поле ( $\vec{E}' = 0$ ), а магнітне поле не дорівнює нулю,  $\vec{B}' \neq 0$ . Використовуючи ФПКЕМП (2.4) та (2.3) знайдемо вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в СВ  $K$ .

По перше, індукція магнітного поля в СВ  $K$  дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}' + \Gamma \vec{B}'_{\perp}.$$

А напруженість електричного поля в СВ  $K$ , згідно з (2.1) і (2.3), дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}, \vec{B}'] \right) = -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'] = \\ &= -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V}, \Gamma \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V}, (\vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp})]. \end{aligned}$$

Тобто, якщо в СВ  $K'$   $\vec{E}' = 0$ , тоді в СВ  $K$  виникає електричне поле напруженість якого

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}], \quad (2.6)$$

де  $\vec{B}$  – вектор індукції магнітного поля в СВ  $K$ .



Наслідок (2.6) прокоментувати можна й так. При переміщені магнітного поля  $\vec{B}'$  зі швидкістю  $\vec{V}$  в СВ  $K$  виникає електричне поле напруженості  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$ . Тобто рухоме магнітне поле породжує електричне поле, причому вектори  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  утворюють ліву трійку векторів (рис. 2.2).

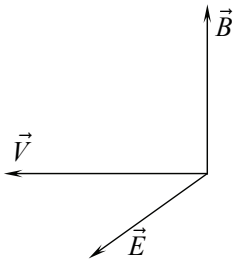


Рис. 2.2. Взаємна локальна орієнтація векторів  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  в СВ  $K$ , якщо в СВ  $K'$  існує лише одне магнітне  $\vec{B}'$

Тобто якщо в системі  $K'$  існує тільки електричне або тільки магнітне поле, то в системі відліку  $K$  з'являються, відповідно, магнітне й електричне поля, вектори індукції та напруженості яких перпендикулярні, відповідно, вектору  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ . Інакше кажучи, у всіх інших системах відліку вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  перпендикулярні один одному.

Має місце й обернене твердження: якщо в системі відліку  $K'$  вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}'$  перпендикулярний вектору індукції магнітного поля  $\vec{B}'$ , то тоді завжди можна знайти систему відліку, у якій буде існувати суто електричне або суто магнітне поле.

Як же знайти напрямок і величину швидкості такої системи відліку? Розглянемо конкретні приклади.

**Приклад 2.1.** Нехай у системі відліку  $K'$  є взаємно перпендикулярні напруженість електричного поля  $\vec{E}'$  й вектор індукції  $\vec{B}'$  магнітного поля. Як повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб у СВ  $K$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = 0$ ?

*Розв'язання:* Орієнтацію осей СВ  $K'$  слід вибрати так, щоб вісь  $O'X'$  була перпендикулярна площині, у якій лежать вектори  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$ . Тоді  $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} = 0$ , а  $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}'$ .

Але згідно з умовою задачі повинно бути  $\vec{E}_\perp = \vec{E} = 0$  (тобто в СВ  $K$  поздовжня компонента електричного поля дорівнює нулеві). Очевидно, що це буде за умови, коли, див. (2.3):

$$\vec{E}_\perp = \Gamma(\vec{E}'_\perp - [\vec{V}, \vec{B}']) = 0.$$

Тобто з попередньої рівності одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'] &= 0, \\ \vec{E}' &= [\vec{V}, \vec{B}']. \end{aligned}$$

Але нам треба знайти величину швидкості СВ  $K'$ . Помножимо останню рівність векторно на  $\vec{B}'$  і врахуємо, що  $\vec{B}' \perp \vec{V}$ :

$$[\vec{B}', \vec{E}'] = [\vec{B}', [\vec{V}, \vec{B}']] = \vec{V} \cdot (B'^2) - \vec{B}' \cdot (\vec{B}' \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (B'^2).$$

Звідси одержуємо, що при умові  $cB' > E'$  (див. рис. 2.3.) СВ  $K'$  повинна рухатися зі швидкістю (рис. 2.3)

$$\vec{V} = \frac{[\vec{B}', \vec{E}']}{B'^2}. \quad (2.7)$$

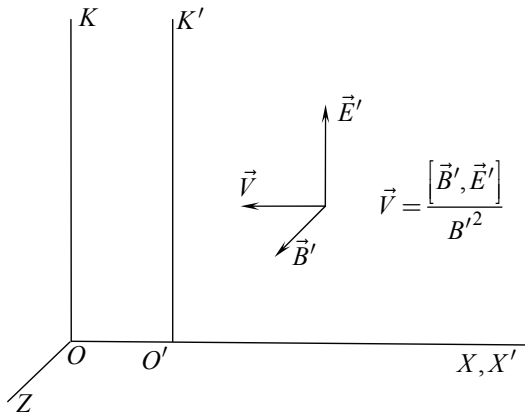


Рис. 2.3. Щоб у СВ  $K$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = 0$ , СВ  $K'$  повинна рухатися зі швидкістю, яка визначається формулою (2.7)

Умова  $cB' > E'$  впливає з наявності інваріанту  $I_1 = c^2 \cdot B^2 - E^2$  в довільному ЕМП (див. нижче) й очевидної вимоги СТВ -  $V < c$ .

Цей результат можна пояснити й таким чином.

СВ  $K'$  повинна рухатися так, щоб електричне поле, що породжується рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{E}_{B'} = -\Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}']$ , компенсувало те електричне поле, що виникає в СВ  $K$  унаслідок руху  $\vec{E}'$ ,  $\vec{E}_{E'} = \Gamma \vec{E}'$  (рис. 2.4).

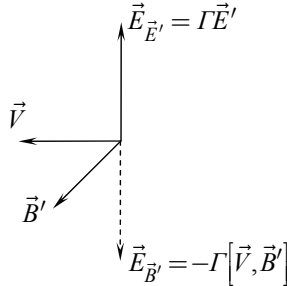


Рис. 2.4. Електричне поле буде відсутнє в СВ  $K$ , якщо електричне поле, що породжується рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{E}_{B'} = -\Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}']$ , компенсується електричним полем, яке виникає внаслідок руху  $\vec{E}'$ ,  $\vec{E}_{E'} = \Gamma \vec{E}'$

Тобто

$$\vec{E}_{E'} = -\vec{E}_{B'},$$

$$\vec{E} = \Gamma \cdot \vec{E}' = \Gamma \cdot [\vec{V}, \vec{B}'] = 0.$$

І ми приходимо до результату (2.7). Електричне поле в СВ  $K$  може зникнути за умови, що  $cB' > E'$ .

**Приклад 2.2.** Знайдемо напрямок і величину швидкості СВ  $K'$ , при якій у СВ  $K$  буде відсутнє магнітне поле, якщо в СВ  $K'$  вектор напруженості поля  $\vec{E}'$  перпендикулярний вектору  $\vec{B}'$ .

*Розв'язання:* Аналогічно до розв'язання попереднього прикладу, орієнтацію осей СВ  $K'$  слід обрати так, щоб вісь  $O'X'$  була перпендикулярна площині, у якій лежать вектори  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$ . Тоді, згідно з умовою задачі, можна записати

$$\vec{B}'_x = \vec{B}'_x = 0, \quad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}'.$$

А в СВ  $K$  повинно бути  $\vec{B}_{\perp} = \vec{B} = 0$ .

Тоді з формули перетворення (2.4)  $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'] \right) = 0$  одержуємо

$$\vec{B}'_{\perp} = \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'].$$

Помножимо це рівняння зліва векторно на  $\vec{E}'$  й одержимо

$$[\vec{E}', \vec{B}'] = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{E}', [\vec{V}, \vec{E}']] = -\frac{1}{c^2} \vec{V} (E'^2).$$

Тобто швидкість СВ  $K'$ , при якій у СВ  $K$  відсутнє магнітне поле, дорівнює (рис. 2.5)

$$\vec{V} = -\frac{c^2 \cdot [\vec{E}', \vec{B}']}{E'^2}, \quad V = \frac{c^2 \cdot B'}{E'} \quad (2.8)$$

за умови, що в системі відліку  $K'$   $E' > cB'$ .

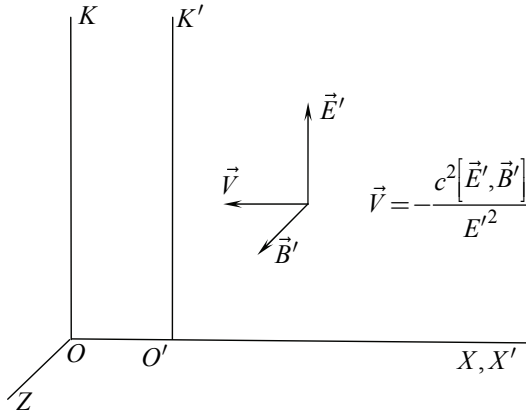


Рис. 2.5. Щоб у СВ  $K$  напруженість магнітного поля  $\vec{B} = 0$ , СВ  $K'$  повинна рухатися зі швидкістю, яка визначається формулою (2.8)

Знаходження величини й напрямку швидкості руху такої СВ  $K'$  наочно можна пояснити і так: у СВ  $K$  ми повинні мати тільки електричне поле, оскільки магнітне поле повинне зникнути. Але магнітне поле в системі в СВ  $K$  створюється рухом  $\vec{B}'$  ( $\vec{B}_{B'} = \Gamma \cdot \vec{B}'$ ) і рухом електричного поля  $\vec{E}'$  ( $\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$ ).

А в сумі ми повинні отримати нуль. Тобто на основі умови прикладу слід записати:

$$\vec{B}_{B'} = \Gamma \cdot \vec{B}' = -\vec{B}_{E'} = -\frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'],$$

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}'],$$

звідки й отримуємо (2.8) (див. рис. 2.6).

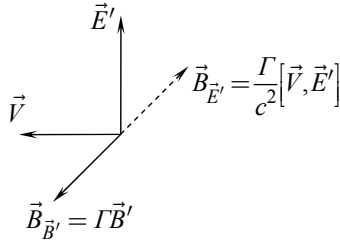


Рис. 2.6. Магнітне поле буде відсутнє в СВ  $K$ , якщо магнітне поле, породжене рухом поля  $\vec{B}'$ ,  $\vec{B}_{B'} = \Gamma \cdot \vec{B}'$ , компенсується магнітним полем,

$$\text{яке виникає внаслідок руху } \vec{E}', \vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$$

**Приклад 2.3.** У СВ  $K'$  вектори поля  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$  орієнтовані довільно один відносно одного. Яка повинна бути швидкість СВ  $K'$ , щоб у СВ  $K$  вектор напруженості електричного й вектор індукції магнітного поля були паралельні між собою?

*Розв'язання:* Припустимо, що поля в СВ  $K$  паралельні, тобто  $[\vec{E}, \vec{B}] = 0$ . Направимо швидкість СВ  $K'$  перпендикулярно полям  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ , причому напрямком  $\vec{V}$  виберемо за вісь  $OX$  (рис. 2.6а).

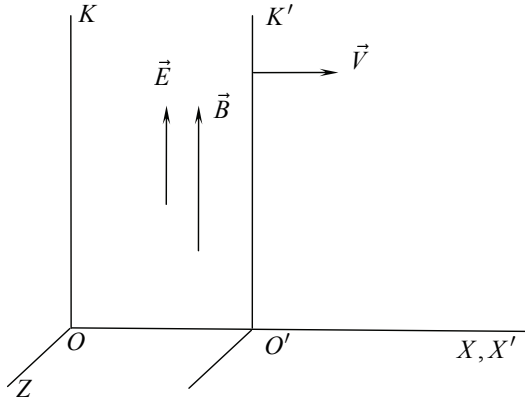


Рис. 2.6а. До знаходження такої швидкості руху електродинамічної системи з полями  $\vec{E}'$  та  $\vec{B}'$ , при якій у ЛСВ ці поля будуть паралельні

Тоді  $E_x = B_x = 0$  й умова  $[\vec{E}, \vec{B}] = 0$  еквівалентна рівності  $E_y B_z - E_z B_y = 0$ .

Після підстановки в цю рівність компонент поля з формул (1.38) та (1.39) одержимо наступне алгебраїчне рівняння:

$$\Gamma(E'_y + VB'_z) \cdot \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right) = \Gamma(E'_z - VB'_y) \cdot \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right). \quad (2.9)$$

Згідно з формулами (1.38), (1.39) та розв'язанням,  $E'_x = B'_x = 0$ , тому  $[\vec{E}', \vec{B}'] = (E'_y B'_z - E'_z B'_y) \cdot \vec{i}$ . Але ж і швидкість  $\vec{V} = \vec{i} \cdot V$ .

Із попереднього рівняння (2.9) знаходимо швидкість руху СВ  $K'$

$$\frac{\vec{V}}{c^2} = \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{c^2 \cdot B'^2 + E'^2} \cdot [\vec{B}', \vec{E}']. \quad (2.10)$$

Напрямок швидкості визначається вектором  $[\vec{B}', \vec{E}']$ , а величина швидкості є одним з коренів квадратного рівняння (2.10).

## 2.2. Комп'ютерна програма для моделювання відносності електричного й магнітного полів

Методика вивчення явища відносності електричного й магнітного полів, як свідчить аналіз навчально-методичної літератури, знаходиться не на кращому рівні й потребує вдосконалення [14].

Один зі шляхів удосконалення методики вивчення теми «Відносність електричного та магнітного полів» полягає в моделюванні явища відносності електричного й магнітного полів.

Ознайомлення учнів і студентів з методами наукових досліджень – одна з найважливіших вимог принципу науковості у вивченні фізики. Серед багатьох методів наукового пізнання вагоме місце займає метод моделювання, який використовується не лише у фізиці, а й у багатьох інших галузях науки.

Комп'ютерні моделі легко вписуються в структуру традиційних форм навчання, дають змогу викладачу моделювати природні явища, створювати абстрактні моделі, які в процесі вивчення курсу фізики описувались словесно або в суто формальному вигляді.

Комп'ютерні моделі є також ефективним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів і студентів, що відкриває перед викладачем широкі можливості щодо удосконалення навчально-виховного процесу.

Взагалі, застосування методу моделювання в навчальному процесі – одне з актуальних питань сучасної педагогіки й відповідних методик. І це цілком закономірно, оскільки сам процес формування знань пов'язаний з перетворенням у свідомості учня чи студента одних моделей на інші, які є похідними від перших, але точнішими, з більшим наближенням до дійсності. Використання моделей з навчальною метою допомагає виділити й відобразити найважливіші для пізнання зв'язки в явищах, які часто бувають недоступними для безпосереднього спостереження, розкрити механізм протікання відповідних процесів, ознайомити учнів з експериментальною базою сучасної фізики. Крім названих дидактичних можливостей метод моделювання може бути використаний також для самостійної роботи учнів і студентів при вивченні фізики.

Метод математичного моделювання, який дозволяє звести дослідження явищ зовнішнього світу до математичних задач, займає провідне місце з-поміж інших методів дослідження, особливо у зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки. Математичні моделі проявили себе також як важливий засіб управління пізнавальною діяльністю студентів.

Одним з можливих напрямків застосування методу математичного моделювання є дослідження відносності електричного й магнітного полів.

Як показано в *Розділі 1*, якщо в довільній точці простору  $(x', y', z')$  і в довільний момент часу  $t'$  інерційної системи відліку  $K'$  відомі напруженість електричного поля  $\vec{E}'$  й магнітна індукція  $\vec{B}'$  електромагнітного поля, то значення полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  у тій самій просторово-часовій точці СВ  $K$ , відносно якої СВ  $K'$  рухається вздовж вісі  $OX$  зі швидкістю  $\vec{V} = const$ , визначаються ФПКЕМП (1.38) та (1.39).

Для більш наочної демонстрації основних наслідків ФПКЕМП (проявів явища відносності електричного й магнітного полів) нами був розроблений програмний продукт «Компонент». Ця програма складається з 3-х модулів: «Компонент  $K \rightarrow K'$ » (за допомогою якого можна прослідкувати за поведінкою векторів  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{P}, \vec{M}$  при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$ ), «Компонент  $K' \rightarrow K$ » (за допомогою якого можна прослідкувати за поведінкою названих векторів полів при переході з СВ  $K'$  до СВ  $K$ ) та модуль «ЗАДАЧІ» (за допомогою якого можна розв'язати деякі задачі з даної теми).

Розглянемо основні особливості використання програмного продукту «Компонент».

Після запуску програми перед користувачем з'явиться вікно програми (див. рис. 2.7).

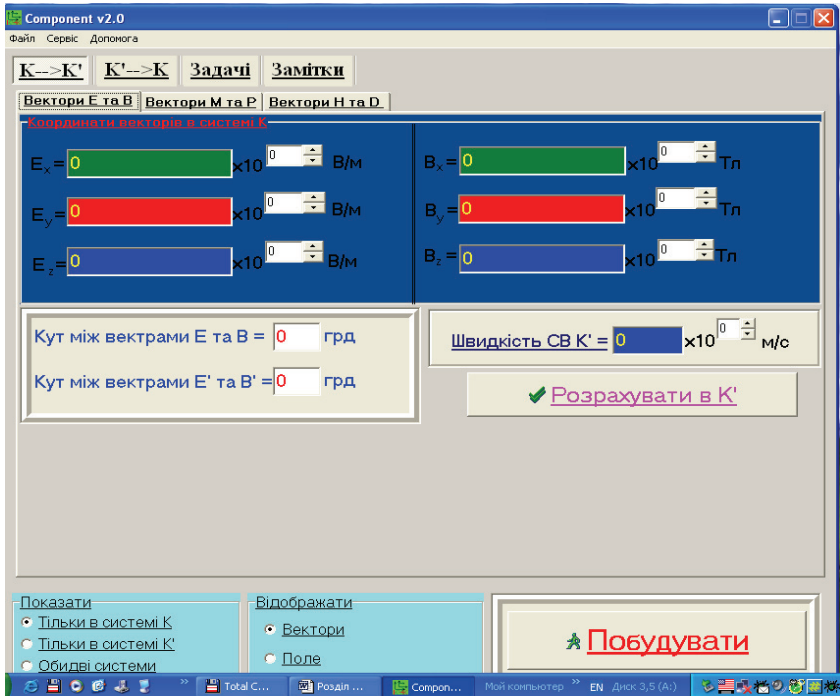


Рис. 2.7. Головне вікно програми

Розглянемо основні елементи цього вікна.

Головне меню програми представлено такими елементами (див. рис. 2.8):

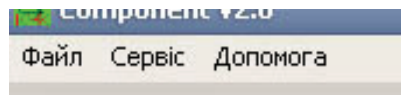


Рис. 2.8. Головне меню програми

У закладці «Файл» можна очистити головне вікно або ж закрити програму.

У закладці «Сервіс» є декілька важливих пунктів (див. рис. 2.9):

1. «Налаштування СВ».
2. «Розрахувати вектори».
3. «Параметри».





Рис. 2.9. Елементи закладки «Сервіс»

«**Налаштування СВ**» – дане меню застосовується для настройки системи координат, а також для визначення меж значень відповідних векторів (наприклад,  $E_y^{\max} = E_x^{\max} = E_z^{\max}$  та  $B_y^{\max} = B_x^{\max} = B_z^{\max}$ ). У ньому можна задати як кольори осей системи координат, так і кольори векторів.

«**Розрахувати вектори**» – у цьому вікні ми можемо в автоматичному режимі підрахувати вектори електричного й магнітного полів при переході від системи відліку  $K$  до СВ  $K'$  або навпаки (див. рис. 2.10).

«**Параметри**» – вікно, яке служить для настройки клієнтської області програми залежно від розподільчої здатності окремо взятого монітора (розміри екрана).

Ознайомившись з елементами меню, перейдемо до розгляду питань, що пов'язані з роботою програми.

Для прикладу розглянемо роботу з модулем переходу від системи відліку  $K$  до СВ  $K'$  (аналогічно використовується і модуль переходу від СВ  $K'$  до СВ  $K$ ).

Після вводу відповідних компонент поля (як показано на рис. 2.11) користувач може вибрати два різних види показу результатів (рис. 2.12): поодиноким вектором (рис. 2.13) і полем (рис. 2.14). Для кожного випадку можна вибрати систему відліку, у якій буде виконано побудову (рис. 2.15).

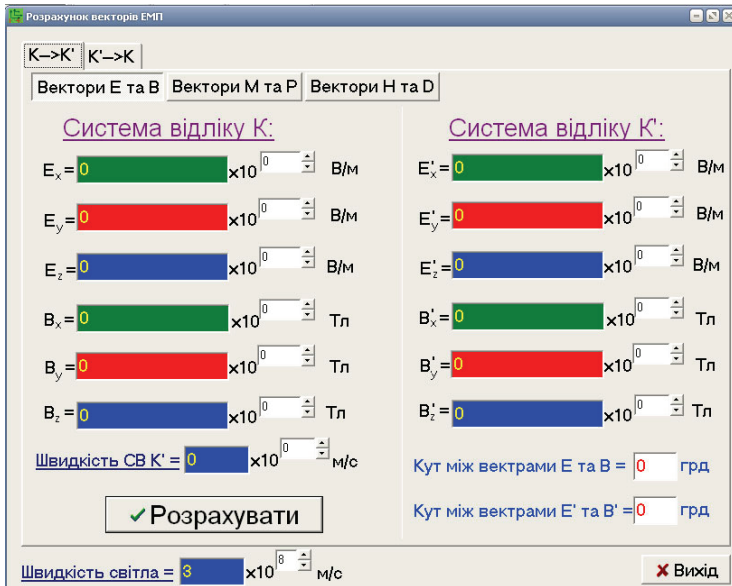


Рис. 2.10. Розрахунок компонент векторів

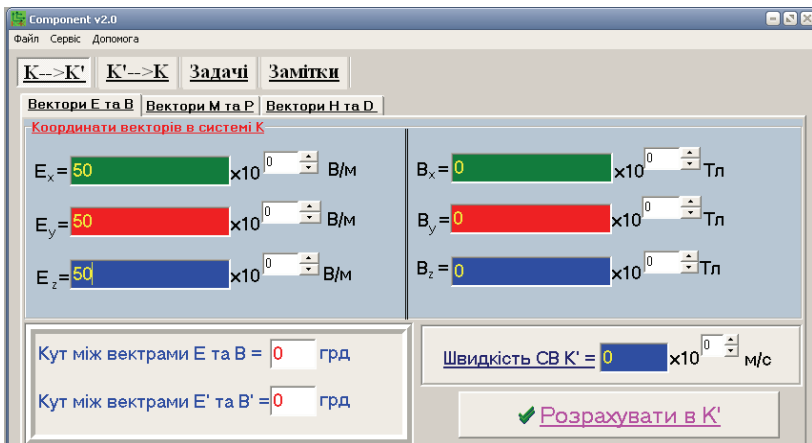


Рис. 2.11. Область вводу компонент поля

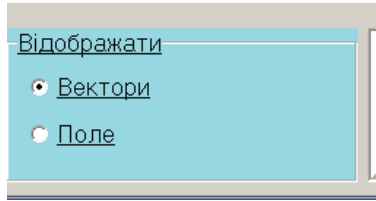


Рис. 2.12. Вивід показу результатів

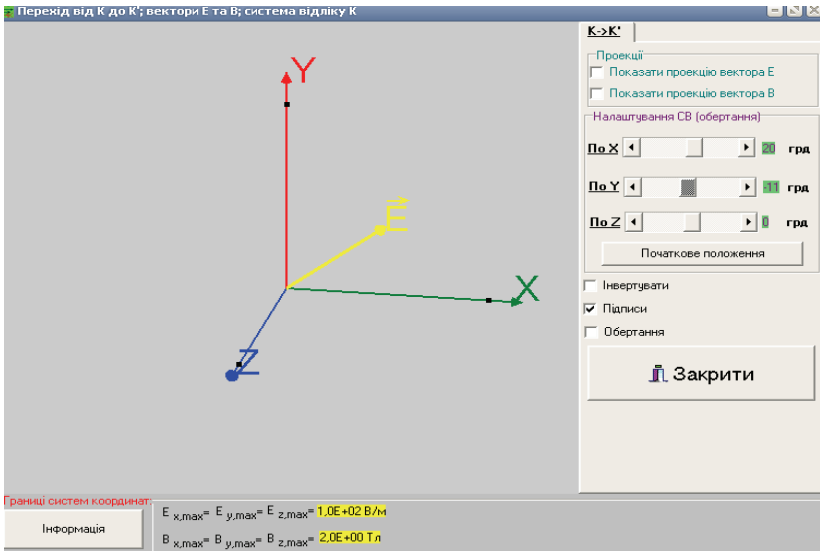


Рис. 2.13. Результат побудови вектора

При побудові векторів у нижній частині вікна (див. рис. 2.13а) показані граничні значення проекцій компонент електромагнітного поля для даного випадку.

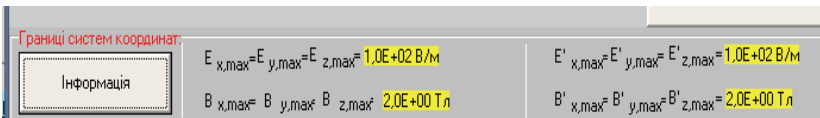


Рис. 2.13а. Граничні значення проекцій векторів поля

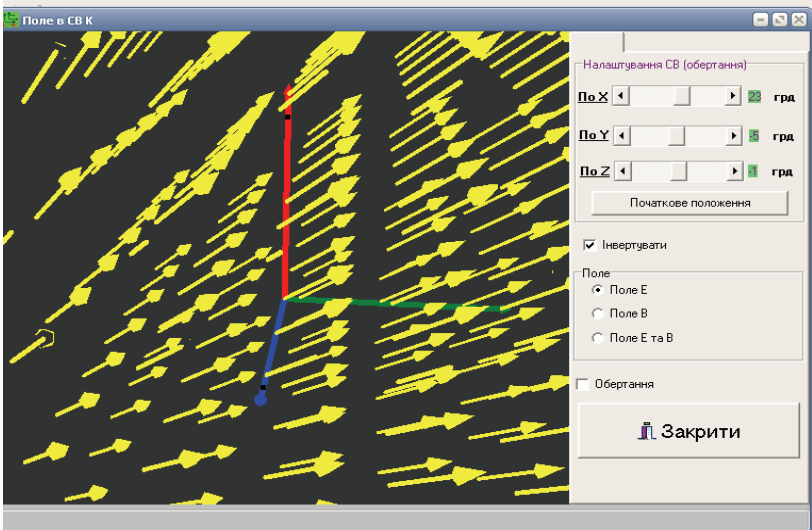


Рис. 2.14. Результат побудови поля

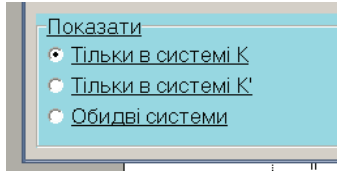


Рис. 2.15. Вибір системи відліку для отримання результатів обчислення

У цій версії програми є можливість моделювати поведінку не тільки векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , а й векторів намагнічування й поляризації ( $\vec{M}$ ,  $\vec{P}$ ), а також векторів напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  та індукції електричного поля  $\vec{D}$ . Меню вибору векторів зображено на рисунку 2.16.

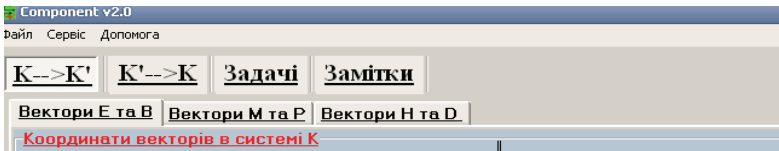


Рис. 2.16. Закладки для вибору різних векторів

Умови роботи з векторами  $\vec{M}$  і  $\vec{P}$ ,  $\vec{H}$  та  $\vec{D}$  такі ж, як і для описаних вище векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ .

Тепер детальніше зупинимося на розгляді модуля розв'язку задач (модуль розв'язку задач представлений на рисунку 2.17).

За допомогою цього модуля можна демонструвати деякі наслідки формул перетворення компонент електромагнітного поля (див. п. 2.1), зокрема:

- знаходження величини й напрямку швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб у СВ  $K$  напруженість електричного поля  $\vec{E} = 0$ ;

- знаходження величини й напрямку швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб у СВ  $K$  індукція магнітного поля  $\vec{B} = 0$ .

Розглянемо деякі приклади використання програми.

**Приклад 2.4.** Довести, що якщо в деякій системі відліку є тільки електричне або тільки магнітне поля, то в будь-якій іншій системі відліку спостерігається й електричне, й магнітне поля, причому вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{E}$  перпендикулярні між собою.

*Розв'язання:* У головному вікні програми вводимо будь-які значення компонент проекції вектора, наприклад, вектора  $\vec{B}$  у відповідній поля, та вказуємо швидкість системи відліку  $K'$  (наприклад, як показано на рис. 2.17).

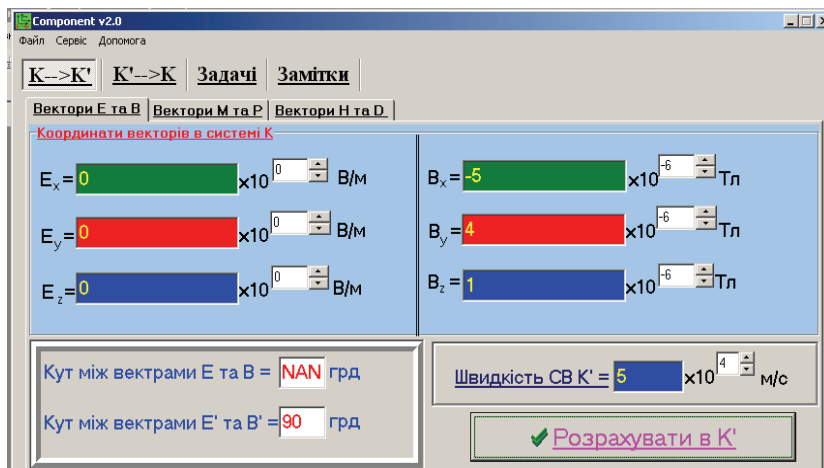


Рис. 2.17. Компоненти вектора  $\vec{B}$

Після натискання кнопки «Розрахувати в  $K'$ » ми побачимо, що дійсно в СВ  $K'$  буде існувати як вектор  $\vec{E}'$ , так і вектор  $\vec{B}'$  (рис. 2.18), причому кут між ними становитиме 90 градусів (див. рис. 2.17).

Координати векторів в системі  $K'$

$E'_x = 0,00000000000000 \times 10^{+00}$ В/м	$B'_x = -5,00000000000000 \times 10^{-06}$ Тл
$E'_y = -5,00000000000000 \times 10^{-02}$ В/м	$B'_y = 4,00000000000000 \times 10^{-06}$ Тл
$E'_z = 2,00000000000000 \times 10^{-01}$ В/м	$B'_z = 1,00000000000000 \times 10^{-06}$ Тл

Показати:  Тільки в системі K,  Тільки в системі  $K'$ ,  Обидві системи

Відобразити:  Вектори,  Поле

**Побудувати**

Рис. 2.18. Результат аналітичного розрахунку

Щоб побачити графічний розв'язок задачі, треба натиснути кнопку «Побудувати», попередньо вибравши відповідну систему координат (наприклад, як показано на рис. 2.18). Результат побудови зображений на рис. 2.19.

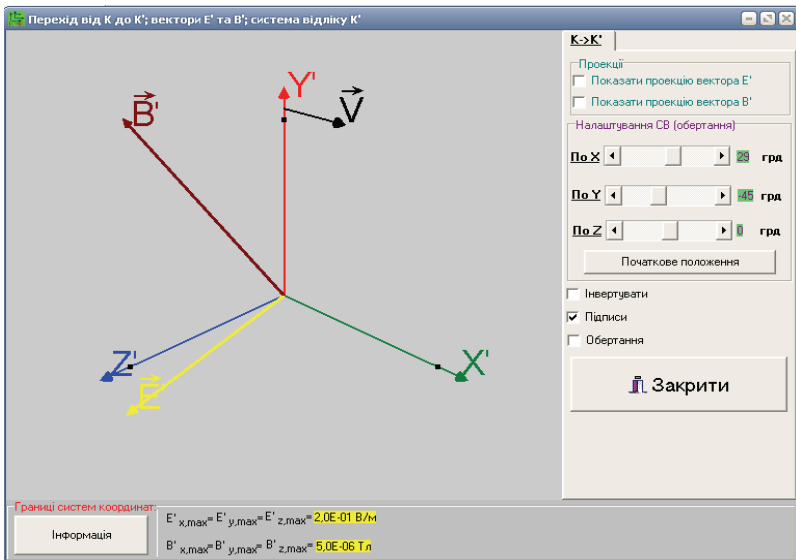


Рис. 2.19. Результати побудови

Якщо ж вибрати відображення результату у вигляді поля, то можна буде побачити картинку, яка зображена на рис. 2.20.

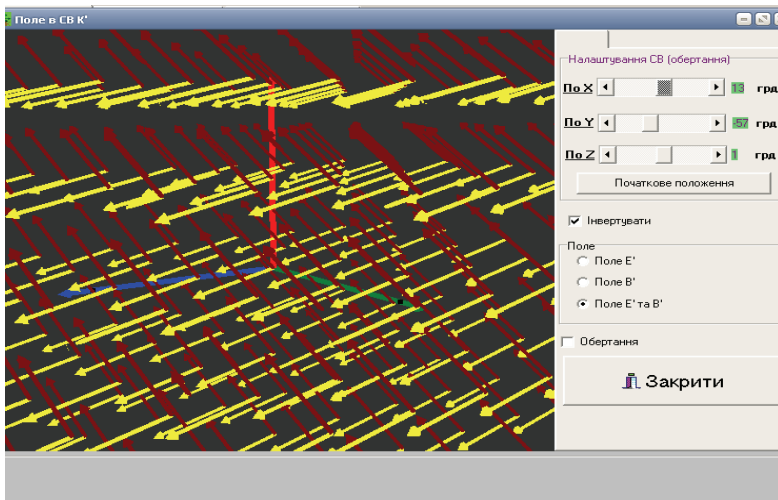


Рис. 2.20. Результати побудови

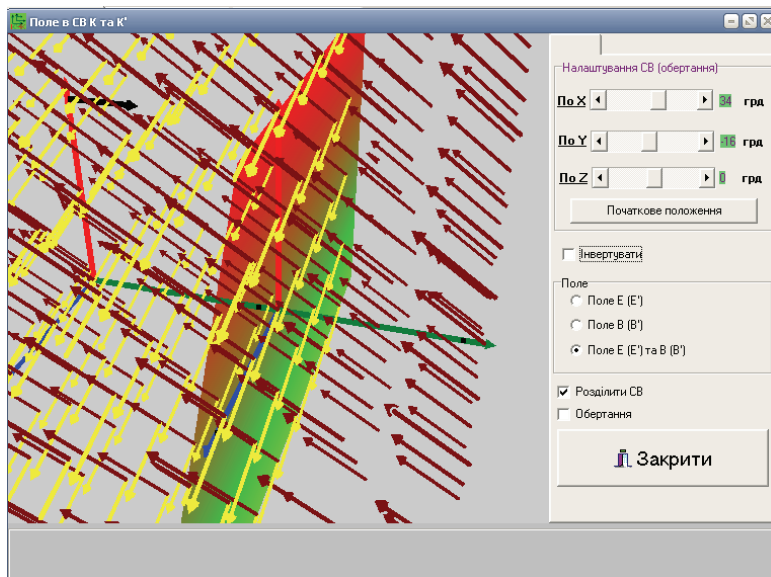


Рис. 2.21. Результати побудови (у вигляді поля)

На рис. 2.20 видно, що в системі  $K'$  існує як електрична складова ЕМП, так і магнітна складова ЕМП, причому чітко видно, що кут між ними дорівнює 90 градусам.

Якщо задати одночасно показ картин поля у системі відліку  $K'$  та  $K$ , то можна буде спостерігатися картинку, що зображена на рис. 2.21.

На рисунку 2.21 червоно-зелена площина є умовною поділкою систем відліку: у даному випадку зліва зображена система відліку  $K'$ , а справа – система відліку  $K$ .

**Приклад 2.5.** Знайти кут між векторами  $\vec{E}(0; 11 \cdot 10^6; 5 \cdot 10^5) \frac{В}{М}$  та  $\vec{B}(5 \cdot 10^{-12}; 8 \cdot 10^{-12}; 7 \cdot 10^{-12}) Тл$ .

*Розв'язання:* Для розв'язку цієї задачі використаємо модуль розв'язку задач. Для цього треба вибрати закладку «Задачі». Ввести відповідні значення проєкцій векторів. У полі шуканої величини поставити знак «?» та натиснути кнопку «Знайти» (див. рис. 2.22).

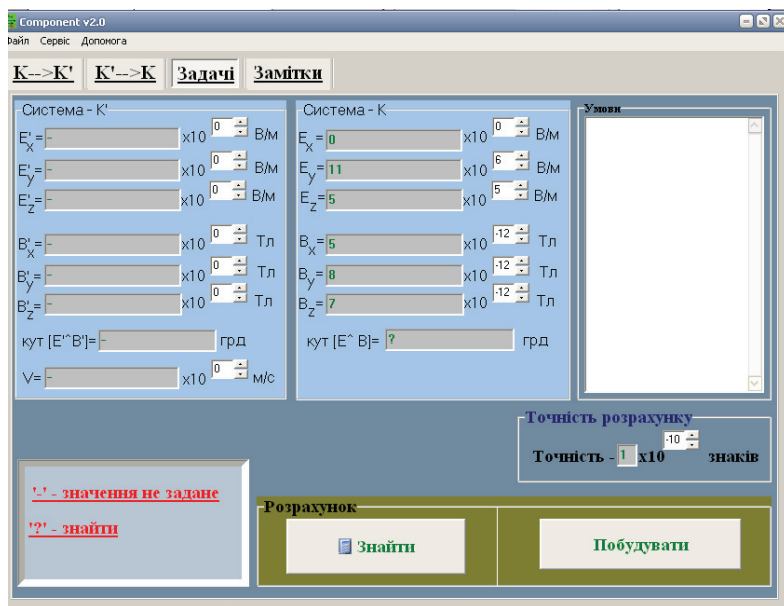


Рис. 2.22. Використання модуля «Задачі»

Після цього замість знаку «?» з'явиться значення шуканої величини. Якщо натиснути кнопку «Побудувати», то програма побудує задану ситуацію (див. рис. 2.23).



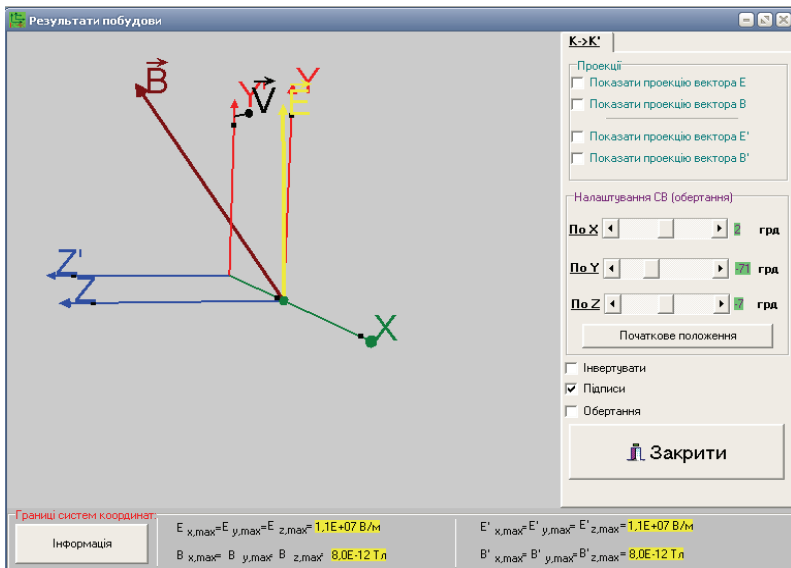


Рис. 2.23. Використання модуля «Задачі» (графічна побудова)

**Приклад 2.6.** Знайти проекцію вектора  $\vec{B}$ , якщо задані проекції векторів  $\vec{B}'$  та  $\vec{E}'$ .

*Розв'язання:* Для розв'язку цієї задачі теж можна використати модуль розв'язку задач. Для цього треба вибрати закладку «Задачі» та ввести у відповідні поля значення проекцій відповідних векторів, а також вказати швидкість СВ  $K'$ . Потім у полях проекцій вектора  $\vec{B}$  поставити символ «?» та натиснути кнопку «Знайти». Результат представлений на рисунку 2.24.

**Приклад 2.7.** Нехай у СВ  $K'$  вектор  $\vec{E}'(0; 20; 40)\frac{B}{M}$ , а вектор  $\vec{B}'(0; -4,7 \cdot 10^{-11}; 2,35 \cdot 10^{-11})Тл$ . Знайти величину й напрямок швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб у СВ  $K$  вектор магнітної індукції дорівнював нулю  $\vec{B} = 0$ .

*Розв'язання:* Введемо ці значення у відповідні поля модуля «Задачі» та натиснемо кнопку «Знайти» (як описано в попередньому прикладі). Результати роботи програми показані на рисунку 2.25.

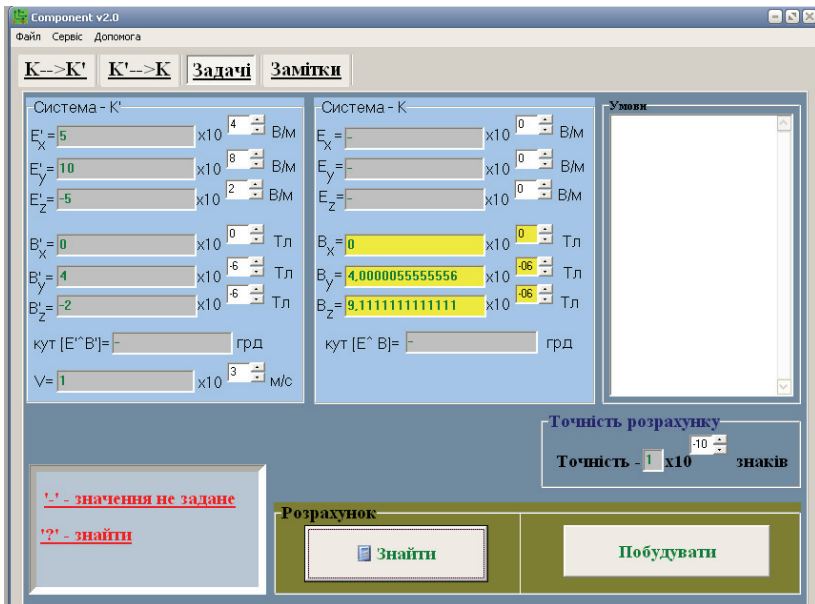


Рис. 2.24. Використання модуля «Задачі»

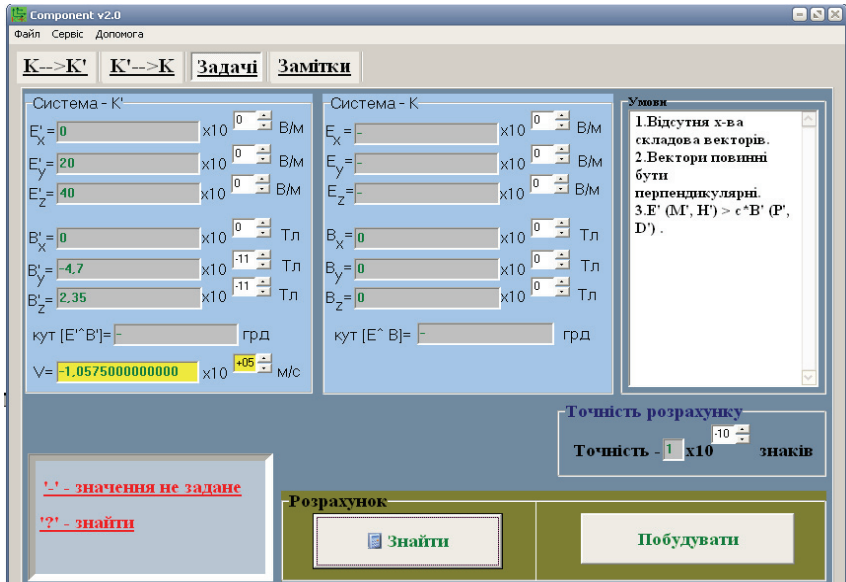


Рис. 2.25. Результат розрахунку

Слід зауважити, що справа зазначені умови, які накладаються на задачу.

Якщо ж тепер натиснути кнопку «Побудувати», то можна побачити графічно відповідь цієї задачі (див. рис. 2.26).

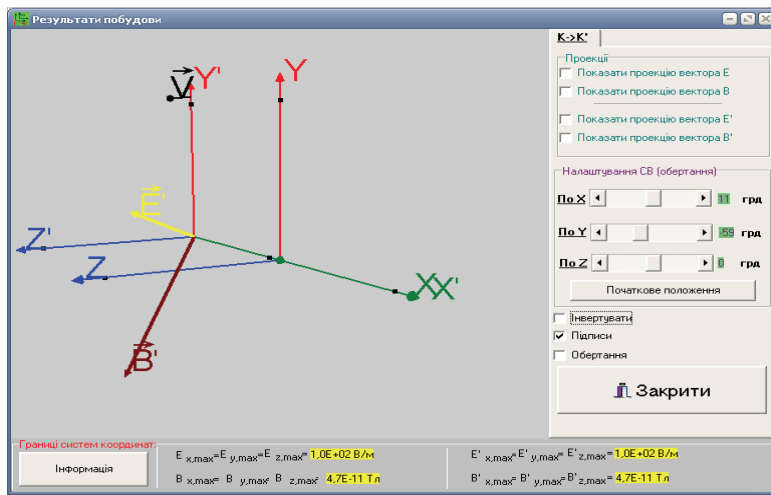


Рис. 2.26. Результат побудови

Тобто ми бачимо, що при швидкості СВ  $K' V = -1,0575 \cdot 10^5 \frac{M}{c}$ , яка направлена так, як показано на рисунку, буде відсутнє магнітне поле в СВ  $K$ .

**Приклад 2.8.** Нехай СВ  $K$  ЕМП задано векторами  $\vec{E}(0; 40 \cdot 10^{-6}; 20 \cdot 10^{-6}) \frac{B}{M}$  та  $\vec{B}(0; -1,215 \cdot 10^{-11}; 2,43 \cdot 10^{-11}) \frac{Tл}{M}$ . Знайти величину й напрямок швидкості, з якою повинна рухатися СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ , щоб у СВ  $K$  вектор напруженості електричного поля дорівнював нулю  $\vec{E} = 0$ .

**Розв'язання:** Введемо ці значення у відповідні поля модуля «Задача» та натиснемо кнопку «Знайти». Результати роботи програми показані на рисунку 2.27.

Слід зауважити, що справа зазначені умови, які накладаються на задачу.

Якщо ж тепер натиснути кнопку «Побудувати», то можна побачити графічно відповідь цієї задачі (див. рис. 2.28).

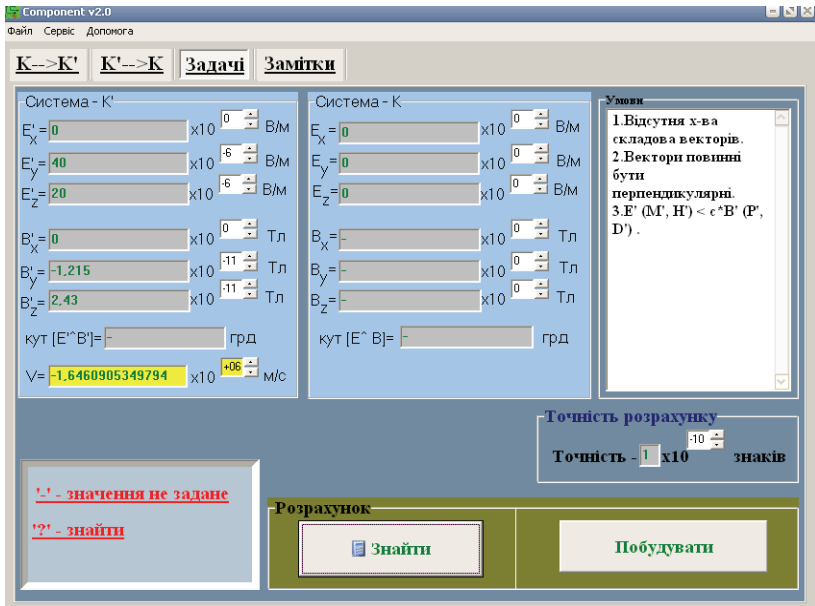


Рис. 2.27. Результат розрахунку

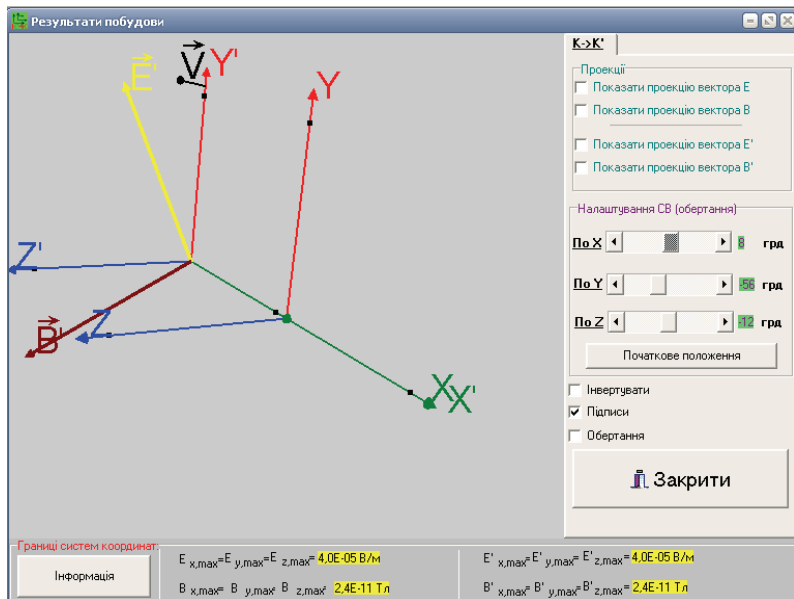


Рис. 2.28. Результат побудови

Тобто ми бачимо, що при швидкості  $V = -1,6461 \cdot 10^6 \frac{M}{c}$  СВ  $K'$ , яка направлена так, як показано на рисунку, буде відсутнє електричне поле в СВ  $K$ .

## Висновки до розділу 2

1. Як наслідок ФПКЕМП, обґрунтовані формули перетворення по-здовжніх і поперечних компонент електромагнітного поля (2.3) та (2.4).

2. Як наслідок формул (2.3) та (2.4), одержано й пояснено, що коли в системі  $K'$  існує тільки електричне або тільки магнітне поле, то в системі відліку  $K$  з'являються, відповідно, магнітне й електричне поля, вектори індукції та напруженості яких перпендикулярні, відповідно, вектору  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ . Можна сказати й так: у всіх інших системах відліку вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  перпендикулярні один одному.

3. При переміщенні магнітного поля  $\vec{B}'$  зі швидкістю  $\vec{V}$  в СВ  $K$  виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}']$ . Тобто рухоме магнітне поле породжує електричне поле, причому вектори  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  утворюють ліву трійку векторів.

4. У тому випадку, коли електричне поле  $\vec{E}'$  переміщується відносно СВ  $K$ , у системі відліку  $K$  виникає індукція магнітного поля  $\vec{B}$ ,  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$ , де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля в СВ  $K$ .

5. Якщо в системі відліку  $K'$  існують довільні за величиною й напрямком напруженості електричного й магнітного полів, то можна завжди знайти систему відліку  $K$ , у якій  $\vec{E} \parallel \vec{B}$ . Швидкість системи відліку  $K'$  відносно такої системи відліку визначається формулою (2.10).

6. Може бути показано безпосередньо перевіркою, що в будь-якій інерційній системі відліку залишаються інваріантними такі комбінації напруженості електричного й індукції магнітного полів:

$$\begin{aligned} I_1 &= c^2 B^2 - E^2, \\ I_2 &= \vec{E}\vec{B}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Із цих двох інваріантів випливають наступні висновки.

7. Якщо в якійсь системі відліку вектор індукції магнітного поля  $\vec{B}'$  перпендикулярний вектору напруженості електричного поля  $\vec{E}'$ , то

ця перпендикулярність, взагалі кажучи, залишається і в будь-якій іншій системі відліку.

8. Якщо в деякій системі відліку  $cB' = E'$  і поле  $\vec{B}'$  перпендикулярне  $\vec{E}'$ , то такі ж співвідношення мають місце для будь-якої іншої системи відліку. Приклад – плоска електромагнітна хвиля.

9. Якщо в деякій системі відліку є тільки електричне або тільки магнітне поля, то в будь-якій іншій системі відліку спостерігається й електричне, й магнітне поля, причому вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{E}$  перпендикулярні між собою.

10. Пояснена методика знаходження швидкості руху СВ  $K'$ , у якій  $\vec{E}' \perp \vec{B}'$ , щоб у СВ  $K$  було або тільки електричне поле, або тільки магнітне поле (*Приклад 2.1, Приклад 2.2*).

11. Якщо в системі відліку  $K'$   $\vec{E}' > c \cdot \vec{B}'$ , то і в будь-якій іншій системі відліку ця нерівність зберігається.

12. Створена й описана комп'ютерна програма «Компонент» для моделювання відносності електричного й магнітного полів.

13. Використання даного програмного продукту в навчальному процесі, як показує досвід навчання студентів, дозволяє більш ґрунтовно й наочно ілюструвати основні наслідки ФПКЕМП.

14. З допомогою розробленої комп'ютерної програми можна більш детально аналізувати ФПКЕМП.

15. Програма дозволяє більш-менш наочно уявити та представити електромагнітне поле й перетворення його компонент при переході від однієї системи відліку до іншої, причому не лише якісно – у вигляді відповідних зображень, але й кількісно, оскільки значення векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  можуть бути розраховані з будь-якою точністю за відомими полями  $\vec{E}'$  і  $\vec{B}'$  та швидкістю руху СВ  $K'$  відносно СВ  $K$ .

16. Розроблений програмний продукт дозволяє моделювати поведінку компонент тензора  $f_{ik}$  електричного й магнітного полів у середовищі (1.86), а також компонент тензора  $m_{ik}$  (формули (1.88) і (1.89)).

## РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПОНЕНТ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 3.1. Приклади застосування формул перетворення компонент електромагнітного поля для аналізу простих задач

**Приклад 3.1.** Нехай у СВ  $K'$  в магнітному полі  $B'_y$  знаходиться нерухома заряджена частинка (протон) (рис. 3.1). Знайти силу, що діє на протон у СВ  $K$ .

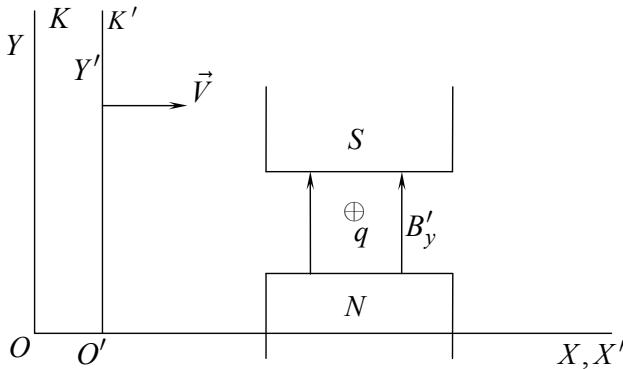


Рис. 3.1. У СВ  $K'$  в магнітному полі  $B'_y$  знаходиться нерухомий протон

*Розв'язання.* Протон у СВ  $K'$  знаходиться в спокої, тому на нього в цій системі відліку не діє сила Лорентца. Із ПВ випливає, що і в СВ  $K$  сила, яка діє на протон, повинна дорівнювати нулю. Але в СВ  $K$  будуть існувати й електричне, й магнітне поля з напруженістю та індукцією, відповідно  $E_z = -\Gamma V B'_y$ ,  $B_y = \Gamma B'_y$ . З точки зору СВ  $K$  протон рухається в магнітному полі  $B_y$  зі швидкістю  $\vec{V}$ .

Тому на нього діє і сила Лорентца  $F_l = qV B_y = q\Gamma V B'_y$ , і сила з боку електричного поля  $F_z^E = qE_z = -q\Gamma V B'_y$ , які направлені протилежно одна одній, але однакою за величиною (рис. 3.2).

Тому результуюча сила, яка діє на протон, дорівнює нулю, як того й вимагає ПВ. Хоч протон відносно джерела магнітного поля не рухається, у  $K$ -системі магнітна сила, що діє на нього, не дорівнює нулю. *Суттєво тут те, що протон рухається відносно СВ  $K$  в певному магнітному полі.*

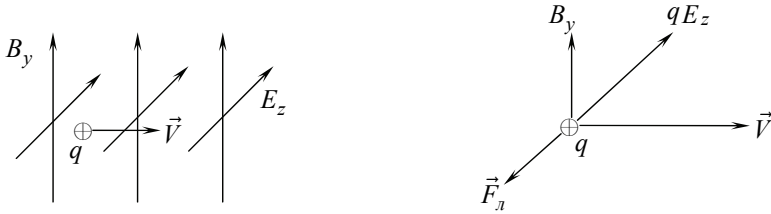


Рис. 3.2. Електромагнітне поле в СВ  $K$  та сили, які діють на заряджену частинку

**Приклад 3.2.** Уявимо, що між пластинами нерухомого в СВ  $K'$  зарядженого конденсатора знаходиться в спокої протон. Чому дорівнює сила, яка діє на нього в СВ  $K$ ? (Рис. 3.3).

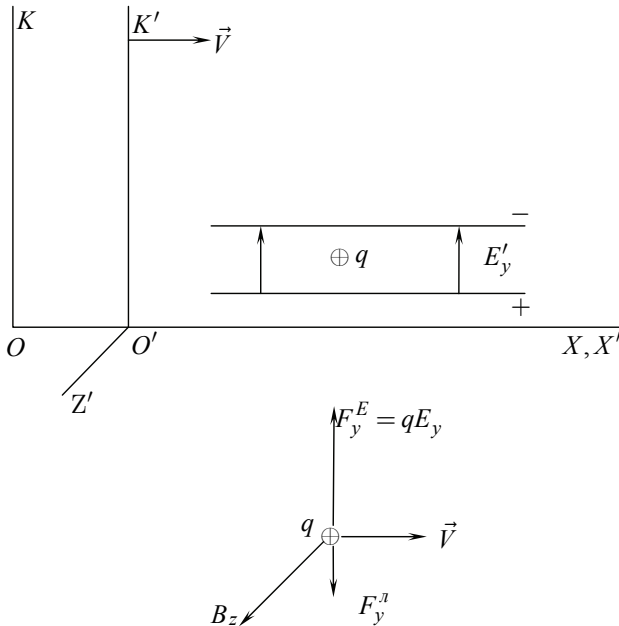


Рис. 3.3. Електромагнітні сили, що діють на протон у СВ  $K'$  та в СВ  $K$

**Розв'язання.** Знаходимо спочатку за формулами (1.38) і (1.39) компоненти ЕМП у СВ  $K$  :

$$E_y = \Gamma E'_y, \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (3.1)$$



Тому сумарна сила, що діє на протон, з урахуванням напрямку векторів поля й напрямку швидкості його дорівнює

$$F_y = F_y^E - F_y^B = \Gamma q E'_y - q V B_z = q E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (3.2)$$

Тобто в СВ  $K$  сила зменшилась у  $\Gamma^{-1}$  разів відповідно до вимог СТВ (оскільки в СВ  $K'$  протон нерухомий, то повинно мати місце таке співвідношення між поперечними складовими сили:  $F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ ).

Зауважимо, що, при бажанні, аналіз електромагнітних сил, які діють на протон у цих двох прикладах, можна покласти в основу доведення співвідношень (останнє можна розглядати як самостійне завдання учням чи як тему науково-оглядового реферату)

$$E_z = -\Gamma V B'_y \text{ та } B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y.$$

**Приклад 3.4.** У СВ  $K'$  у магнітному полі з індукцією  $B'_z$  знаходиться заряджений конденсатор разом з нерухомим протоном у ньому (рис. 3.4). Як повинна рухатися СВ  $K'$ , щоб у СВ  $K$  існувало:

- тільки електричне поле ( $\vec{B} = 0$ );
- тільки магнітне поле ( $\vec{E} = 0$ )?

Знайти також силу, що діє на протон у СВ  $K$  у випадках а) і б).

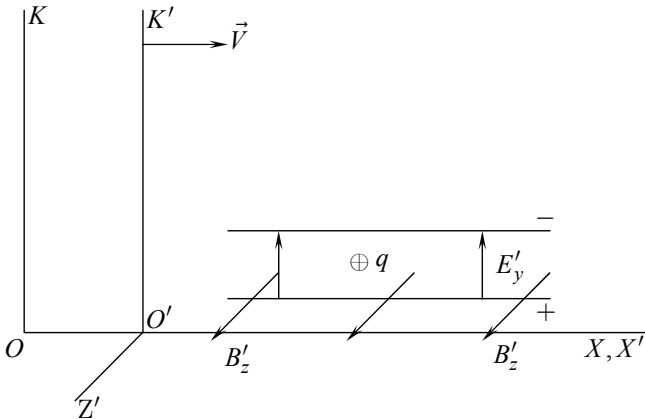


Рис. 3.4. Електромагнітне поле в СВ  $K'$  і СВ  $K$

*Розв'язання.* а) СВ  $K'$  повинна рухатися так, щоб індукція  $B_z$  у СВ  $K$  дорівнювала нулю. Тоді з формул перетворення (1.39) одержуємо

$$B_z = \Gamma \left( B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) = 0, \text{ звідси } V = -\frac{c^2 B'_z}{E'_y}, \quad (3.3)$$

де знак « $\rightarrow$ » означає, що СВ  $K'$  повинна рухатись у бік від'ємних значень осі  $OX$ . Цей же результат можна отримати на основі таких фізичних міркувань. Очевидно, що  $K'$ -система повинна рухатися так, щоб магнітне поле, яке породжується в СВ  $K$  рухомим електричним полем  $E'_y$  ( $B_z = \frac{V}{c^2} \Gamma E'_y$ ), повністю компенсувало магнітне поле  $B_z = \Gamma B'_z$ .

Із рис. 3.4 видно, що складова магнітного поля, яке породжується рухомим електричним полем  $E'_y$ , повинна бути направлена протилежно  $B'_z$  (у бік від'ємних значень осі  $OZ$ ).

Це можливо тільки в тому випадку, коли швидкість руху СВ  $K'$  направлена в бік від'ємних значень осі  $OX$  (як це показано на рис. 3.5, оскільки вектори швидкості  $\vec{V}$ , напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , яке рухається, та вектор індукції магнітного поля, яке виникає внаслідок руху цього електричного поля, утворюють правогвинтову систему). Тому чисельне значення швидкості руху СВ  $K'$  знаходимо зі співвідношення:

$$\Gamma B'_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y,$$

що підтверджує (3.3).

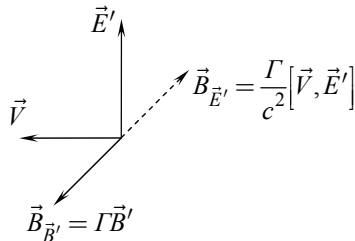


Рис. 3.5. Магнітне поле буде відсутнє в СВ  $K$ , якщо магнітне поле, що породжується рухом полем  $\vec{B}'$ ,  $\vec{B}_{B'} = \Gamma \cdot \vec{B}'$ , компенсується магнітним полем, яке виникає внаслідок руху електричного поля  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}_{E'} = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V}, \vec{E}']$

Таким чином у СВ  $K$  буде існувати тільки електричне поле, напруженість якого дорівнює (з формули (1.38)):

$$E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z).$$

Ураховуючи вираз (3.3) для швидкості  $\vec{V}$ , одержуємо для значення сили, що діє на протон у СВ  $K$ :

$$\begin{aligned} F_y &= qE_y = q\Gamma E'_y \left( 1 - \frac{c^2 \cdot B'_z{}^2}{E'_y{}^2} \right) = \\ &= q\Gamma E'_y \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

у відповідності до вимог СТВ.

б) Щоб у  $K$ -системі було відсутнє електричне поле,  $K'$ -система повинна рухатися зі швидкістю, величина і напрямок якої визначаються з другого співвідношення формули (1.38):

$$E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z) = 0, \text{ тоді } V = -\frac{E'_y}{B'_z}, \quad (3.5)$$

що зрозуміло і з наступних фізичних міркувань.

Напруженість електричного поля в СВ  $K$  складається з двох доданків:  $\Gamma E'_y$  – напруженості поля, зумовленого перетворенням поперечної складової поля  $E'_y$  при переході з СВ  $K'$  до СВ  $K$ , і доданка, зумовленого породженням електричного поля рухомим магнітним полем  $B'_z$ ,  $\Gamma VB'_z$ . А результуюче електричне поле в СВ  $K$ , згідно з умовою задачі, дорівнює нулю.

Значить, складова напруженості електричного поля  $\Gamma VB'_z$  повинна бути направлена протилежно  $\Gamma E'_y$ .

І оскільки вектори  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  при русі магнітного поля (і виникненні електричного поля напруженістю  $\vec{E}$ ) утворюють лівогвинтову систему (рис. 3.6), то необхідно, щоб СВ  $K'$  рухалась уліво (у напрямку від'ємних значень осі  $OX$ ) зі швидкістю, яку знаходимо з рівності

$$\Gamma E'_y = -\Gamma VB'_z,$$

що еквівалентно (3.5).

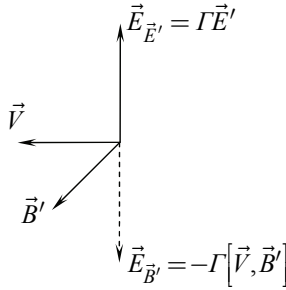


Рис. 3.6. Електричне поле в СВ  $K$  дорівнює нулю, якщо поля  $\vec{E}_{E'}$  і  $\vec{E}_{B'}$  компенсують одне одного

Чому ж дорівнює сила, що діє на протон у саме такій СВ?

Із загальних міркувань зрозуміло, що ця сила буде менша від  $qE'_y$  у  $\Gamma$  разів. Упевнімося в цьому безпосередньо, враховуючи (1.39) і те, що на протон буде діяти тільки магнітна сила в СВ  $K$  :

$$F_y = qVB_z = qV \left( \Gamma B'_z - \frac{\Gamma V E'_y}{c^2} \right) = qE'_y \Gamma \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

У загальному випадку, при довільному електромагнітному полі в СВ  $K'$  і довільній швидкості руху зарядженої частинки, для знаходження значення сили, яка діє на неї в СВ  $K$ , треба знайти за формулами (1.38) і (1.39) складові поля, а швидкість частинки в СВ  $K$  знайти за релятивістськими формулами додавання швидкостей.

**Приклад 3.5. Природа сили Лорентца.** Нехай у СВ  $K$  є магнітне поле  $\vec{B}$ , і в ньому зі швидкістю  $\vec{V}$  рухається ЗЧ. Показати, що сила Лорентца, яка діє на ЗЧ в СВ  $K$ , – це сила з боку електричного поля, яке існує у власній СВ зарядженої частинки [33; 85].

*Розв'язання:* Дійсно, у СВ  $K'$ , що зв'язана з ЗЧ, згідно з ФПКЕМП (1.5), спостерігаємо електричне поле:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \\ E'_y &= \Gamma(E_y - VB_z) = -\Gamma VB_z, \\ E'_z &= \Gamma(E_z + VB_y) = \Gamma VB_y. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$[\vec{V}, \vec{B}] = \vec{i}(V_y B_z - V_z B_y) + \vec{j}(V_z B_x - V_x B_z) + \vec{k}(V_x B_y - V_y B_x),$$

та згідно з умовою задачі  $\vec{V} = \vec{i}V$ , напруженість електричного поля в

СВ  $K'$  можна подати у вигляді

$$\vec{E}' = \Gamma [\vec{V}, \vec{B}].$$

І, таким чином, записати вираз для сили, що діє в СВ  $K'$  на ЗЧ:

$$\vec{F}' = q\vec{E}'.$$

При вимірюваннях цієї електричної сили з СВ  $K$  ми повинні мати (оскільки заряд у СВ  $K'$  нерухомий)

$$\vec{F} = \vec{F}'\sqrt{1-B^2}.$$

Іншими словами, з точки зору СВ  $K$ , сила дорівнює

$$\vec{F} = q\vec{E}' \cdot \sqrt{1-B^2} = q\Gamma [\vec{V}, \vec{B}] \cdot \sqrt{1-B^2} = q [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (3.6)$$

Тобто ми одержали силу Лорентца. **Таким чином, сила Лорентца – це сила з боку електричного поля  $\vec{E}'$ , яке існує у ВСВ зарядженої частинки, але ця сила вимірюється приладами, що нерухомі в лабораторній системі відліку (СВ  $K$ ).**

**Приклад 3.6.** Знайти електромагнітне поле рівномірно та прямолінійно рухомою зарядженою частинкою [33; 85].

*Розв'язання:* Сумістимо початок декартової системи відліку  $K'$  з точковою ЗЧ, величина заряду якої  $q$ . У цій системі напруженість електричного поля в довільній точці простору, що визначається радіус-вектором  $\vec{r}'$ , описується законом Кулона, а магнітне поле відсутнє:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{B}' = 0,$$

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; \quad E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; \quad E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad (3.7)$$

де  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ .

У СВ  $K$  ЗЧ рухається зі швидкістю  $V$  в напрямку додатних значень вісі  $OX$ . Вісі координат  $K'$  орієнтовані таким чином, що в момент часу  $t' = t = 0$  вони співпадають з відповідними осями СВ  $K$ .

Використовуючи формули перетворення компонент електромагнітного поля, одержуємо

$$E_x = E'_x; \quad E_y = E'_y\Gamma; \quad E_z = E'_z\Gamma, \quad (3.8)$$

$$B_x = B'_x = 0; \quad B_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} E'_z; \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (3.9)$$

Виразимо тепер радіус-вектор  $r'$ , що визначає положення точки в СВ  $K'$ , через радіус-вектор  $\vec{r}$  проведений з миттєвого положення заряду  $q$  в СВ  $K$  в ту ж саму просторово-часову точку поля (рис. 3.7).

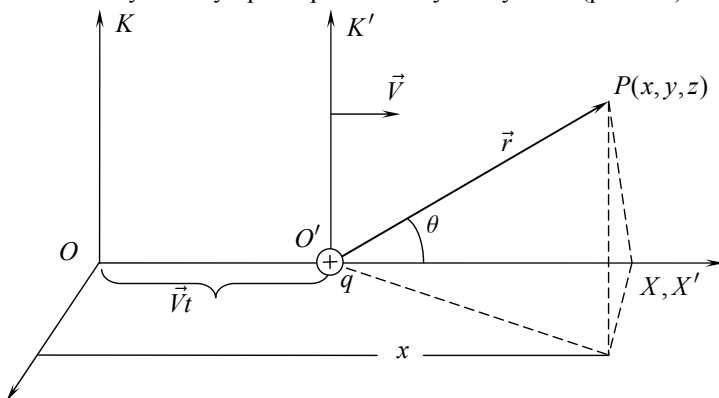


Рис. 3.7. До знаходження ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \Gamma^2 \left[ (x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r' &= \Gamma \cdot \left[ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} = \\ &= \Gamma \cdot \sqrt{(x - Vt)^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\Gamma^2}}. \end{aligned}$$

Але оскільки  $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  (див. рис. 3.7), то вираз для  $r'$  можна подати так:

$$\begin{aligned} r' &= \Gamma \cdot \left[ \left( (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right) \cdot \left( 1 - \frac{V^2(y^2 + z^2)}{c^2 r^2} \right) \right]^{1/2} = \\ &= r \cdot \Gamma \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

тобто

$$\left[ (x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2} = r^3 \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}, \quad (3.10)$$

де  $\sin^2 \theta = \frac{y^2 + z^2}{r^2}$ .

І тоді на основі (3.8) одержуємо

$$E_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q(x-Vt)\Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}};$$

$$E_y = \frac{qy\Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}};$$

$$E_z = \frac{qz\Gamma}{4\pi\epsilon_0 \Gamma^3 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}}.$$

Враховуючи формулу (3.10) для вектора напруженості електричного поля рухомої зарядженої частинки, одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q\vec{r} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{3/2}} = \\ &= \frac{q\vec{r} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Індукція магнітного поля визначається за допомогою формул (3.9). Результат краще записати у векторній формі:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}], \quad (3.12)$$

де  $\vec{E}$  визначається формулою (3.11).

Нагадаємо, що результат (3.12) може бути обґрунтований декількома способами [33; 40; 85].

1. На основі інтерпретації закону Біо-Савара.
2. Використовуючи потенціали Лієнара-Віхерта.
3. Користуючись формулами перетворення 4-потенціалу.

4. І, врешті, з допомогою формул перетворення компонент електромагнітного поля.

Із формули (3.12) видно, що лінії  $\vec{B}$  утворюють концентричні кола з центром на вісі  $OX$ , вздовж якої рухається заряд  $q$ .

Конфігурація ЕМП ЗЧ, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат  $K$ , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом з ЗЧ.

Але для будь-якої фіксованої точки простору в СВ  $K$  вектори поля  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  є функціями часу.

Причому для ЕМП, яке визначається векторами поля (3.11) та (3.12), у будь-який момент часу, у будь-якій точці простору мають місце фундаментальні співвідношення

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt}, \\ \text{rot}\vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt}. \end{aligned}$$

Перше з цих рівнянь дозволяє зробити висновок про те, що **як явище електромагнітної індукції, так і закон ЕМІ є наслідком принципу відносності та закону Кулона** [17; 31; 54; 97] (див також п. 4.2).

Ще раз нагадаємо, що  $r$  – це відстань точки поля від миттєвого положення ЗЧ, а  $\theta$  – кут між напрямком руху ЗЧ (вектором швидкості  $\vec{V}$  ЗЧ) та радіус-вектором  $\vec{r}$ , проведеним з миттєвого положення ЗЧ в дану точку простору.

Як буде видно з наступних пояснень, навіть незначна відмінність електричного поля РЗЧ (при  $V \ll c$ ) та поля нерухомої ЗЧ має принциповий характер.

Особливо наочним прикладом, який часто використовується в навчальній літературі для ілюстрації відносності електричного й магнітного полів, є аналіз взаємодії зарядженої частинки й довгого провідника зі струмом (рис. 3.8).

**Приклад 3.7.** Розглянемо взаємодію прямолінійного провідника зі струмом і зарядженої частинки, яка рухається вздовж провідника з точки зору двох систем відліку  $K$  і СВ  $K'$  [33; 85; 97].



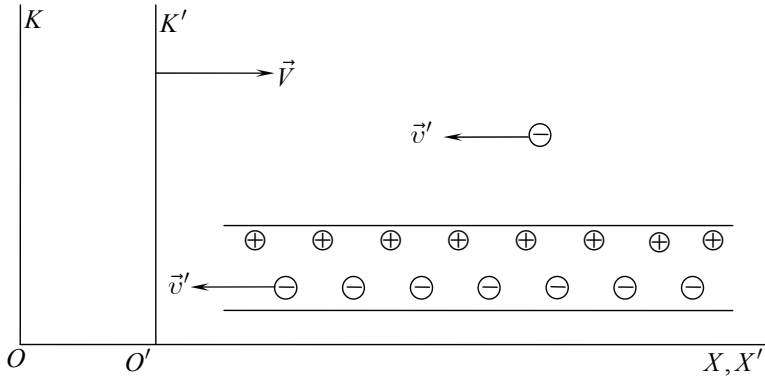


Рис. 3.8. Взаємодія електрона і провідника зі струмом

У СВ  $K'$  знаходиться нерухомий провідник, по якому протікає постійний струм  $I'$ . Уздовж провідника в площині  $XOY$  у бік від'ємних значень осі  $OX$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}'$  електрон. Знайти силу взаємодії між електроном і провідником зі струмом  $I'$  у СВ  $K$ . Пояснити явище виникнення об'ємного заряду в рухомому провіднику зі струмом.

*Розв'язання.* Індукція магнітного поля в точці знаходження електрону визначається за формулою

$$B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r'}, \quad (3.13)$$

де  $r'$  – відстань електрона від проводу,  $I' = j' \cdot S'$ ,  $j' = \frac{n_-^0 \cdot v' q}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$  –

густина струму в СВ  $K'$ ,  $S'$  – площа поперечного перерізу провідника,

$n_-^0$  – концентрація електронів провідності у ВСВ,  $\beta' = \frac{v'}{c}$ ,  $v'$  – дрейфова швидкість руху цих електронів.

Тоді величина сили Лорентца, яка діє на електрон у СВ  $K'$ , дорівнює

$$F'_x = qv' \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'}. \quad (3.14)$$

Якщо СВ  $K'$  разом з провідником і електроном рухаються зі швидкістю  $V = v'$ , то в СВ  $K$  електрон буде нерухомий, і тому до уваги в цій СВ слід брати тільки силу з боку електричного поля напруженістю

$$E_y = \Gamma V B'_z. \quad (3.15)$$

Це електричне поле в СВ  $K$  виникає внаслідок руху відносно СВ  $K'$  магнітного поля  $B'_z$ . І тоді сила, що діє на ЗЧ в СВ  $K$ ,

$$F = q\Gamma VB'_z. \quad (3.15a)$$

Порівнюючи (3.15) і (3.14), бачимо, що  $F'_n = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ .

Але ця задача з такою моделлю ППС (рис. 3.15) надає можливість для іншого наочного фізичного пояснення явища виникнення електричного поля в СВ  $K$ .

Як виявляється, це електричне поле напруженістю  $E_y = \Gamma VB'_z$  створюється різною за величиною густиною об'ємного заряду електронів провідності й об'ємною густиною заряду позитивних іонів кристалічної ґратки.

Часто говорять, що провідник зі струмом, який рухається в лабораторній СВ вздовж своєї довжини, у цій СВ характеризується деякою об'ємною густиною заряду (провідник зі струмом є «зарядженим»).

Дійсно, якщо СВ  $K'$  є власною СВ провідника зі струмом, то в цій СВ об'ємна густина заряду електронів провідності

$$\rho'_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}}, \quad \beta' = \frac{v'}{c},$$

де  $v'$  – дрейфова швидкість електронів провідності в СВ  $K'$ .

Тоді очевидно, що в лабораторній СВ  $K$ , відносно якої  $K'$ -система рухається зі швидкістю  $V = v'$ , електрони провідності будуть нерухомі, а іони кристалічної ґратки мають швидкість  $V = v'$ . Тому густина заряду позитивних іонів в СВ  $K$  дорівнює

$$\rho_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.16)$$

А густина заряду електронів провідності СВ  $K$

$$\rho_- = \rho_-^0 = \rho'_- \cdot \sqrt{1 - \beta'^2}, \quad (3.17)$$

де  $\rho_+^0 = n_+^0 q$ ,  $\rho_-^0 = n_-^0 q$  – об'ємна густина заряду позитивних іонів і електронів провідності у ВСВ, відповідно;  $q$  – величина заряду електрона;  $n_+^0$ ,  $n_-^0$  – концентрація іонів та електронів у ВСВ, відповідно.

Значить, сумарна об'ємна густина заряду провідника зі струмом у СВ  $K$

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_+ - \rho_- = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \rho'_- \cdot \sqrt{1-\beta'^2} = \\ &= \frac{\rho_+^0 \cdot v'^2}{\sqrt{1-\beta'^2} \cdot c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot v'}{\sqrt{1-\beta'^2}}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Таким чином, лінійний провідник зі струмом у СВ, відносно якої він рухається, при геометрії задачі, показаної на рис. 3.15, характеризується лінійною густиною заряду  $\tau = \rho \cdot S$  і тому створює електричне поле напруженістю

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\rho_+^0 v'^2 \cdot S}{2\pi\epsilon_0 \cdot r c^2 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma v' \cdot \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = \Gamma V B'_z, \quad (3.19)$$

де  $I' = j'S = v'\rho'_-S$ , що і співпадає з напруженістю поля (3.15), яка може бути знайдена й іншими шляхами.

А сила, що діє на електрон в СВ  $K$ , тоді дорівнює

$$F_y = \frac{F'_-}{\sqrt{1-\beta'^2}}.$$

Здавалося б, ми одержали майже ідентичний опис взаємодії ЗЧ та ППС:  $F_y \cong F'_y$ . Але насправді ми маємо в СВ  $K$  точно таке ж значення сили, яка діє на ЗЧ, як і в СВ  $K'$ . Дійсно, необхідно врахувати формули перетворення для поперечних компонент сили при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ ,  $F_y = \frac{F'_-}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ .

Для простоти підрахунків ми розглянули випадок при  $V = v'$ . Зацікавлений читач, розглянувши більш загальний випадок  $V \neq v'$ , прийде до аналогічного висновку: у лабораторній СВ провідник зі струмом, який рухається вздовж своєї довжини з довільною за величиною швидкістю  $V$ , характеризується об'ємною густиною заряду (3.18) (див. п. 4.3.3).

Зуважимо ще раз, що протиріччя, які виникають при використанні умови нейтральності  $\rho_+^0 = -\rho_-^0 = \frac{-\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ , проаналізовані в роботах [18; 19; 20; 21; 22; 23], і там же запропоновані альтернативні рішення

ня цих протиріч у рамках моделі, зображеної на рис. 3.8 (додаткові пояснення див. у пп. 4.3.3 та 4.3.5).

Електродинаміка і спеціальна теорія відносності є фундаментальними фізичними теоріями, які мають надзвичайно широке практичне й теоретичне застосування. Знайомство з методами сучасної фізики, ілюстрація й використання на конкретних прикладах фундаментальних положень електромагнетизму та принципів СТВ допомагають формуванню наукового світогляду студентів, виховують у них творчий підхід до знань. Аналіз подібних задач невимушено формує також поняття про єдине електромагнітне поле. І ця єдність, як бачимо, може ілюструватися не тільки при вивченні явища електромагнітної індукції. У дидактичному аспекті, у найбільш чистому вигляді, єдине електромагнітне поле проявляється при аналізі взаємодії двох рухомих заряджених частинок [13; 14]. На наш погляд, чіткого й повного уявлення про єдність і відносність електричного й магнітного полів неможливо досягти без вивчення елементарних основ СТВ.

Таким чином, аналіз цих питань, з огляду на перегляд змісту фізичної освіти в педагогічних ВНЗ і СНЗ та реалізацію загальних принципів дидактики (фундаментальність, науковість, системність і послідовність), видається актуальним.

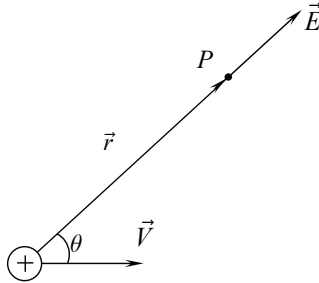
### **3.2. Основні властивості та моделювання електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки**

Знаходження ЕМП зарядженої частинки, яка рухається рівномірно і прямолінійно з довільною за величиною швидкістю, є однією з академічних задач класичної електродинаміки, що має точний розв'язок. На цій фізичній моделі відпрацьовувались математичні методи класичної та релятивістської електродинаміки. Не менш актуальним видається й дидактичне значення моделі та розв'язків для електричного й магнітного полів ЗЧ, яка рухається з релятивістською швидкістю. Аналіз і застосування розв'язків для ЕМП рухомої ЗЧ дозволяє проілюструвати принцип доповнюваності, принцип відносності й одержати ряд важливих науково-методичних результатів (див. *Розділ 4*).

Таким чином, підводячи підсумок результатів, одержаних у цьому прикладі, відзначимо характерні властивості електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки. Як ми виявили, електромагнітне поле рухомої зарядженої частинки описується повністю величинами  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , формули (3.11), (3.12).

Таким чином, з формул (3.11), (3.12) випливають наступні наслідки:

1. Вектор  $\vec{E}$  кожної миті направлений уздовж радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля.



2. Напруженість електричного поля залежить і від швидкості руху зарядженої частинки  $V$ , і від кута  $\theta$  між радіус-вектором, проведеним з миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля, та напрямком руху ЗЧ (див. формули (3.11), (3.12)).

Різниця між електричним полем рухомої ЗЧ і полем нерухомої ЗЧ зводиться до сильної залежності напруженості поля рухомої ЗЧ від напрямку знаходження точки поля (кута  $\theta$ ) та від швидкості ЗЧ. Напруженість електричного поля ЗЧ зменшується в напрямку руху (коли  $\theta = 0, \theta = \pi$ ),

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) < E_{н,з},$$

де  $E_{н,з} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  – напруженість електричного поля **нерухомої ЗЧ** в точках простору на такій же віддалі  $r$  від ЗЧ, як і миттєві відстані точок поля від рухомої ЗЧ,  $E_{\parallel}$  – повздовжня (у напрямку осі  $OX$ , у напрямку руху ЗЧ) проекція напруженості електричного поля РЗЧ.

При релятивістських швидкостях,  $V \rightarrow c$ , напруженість електричного поля в напрямку руху зменшується практично до нуля  $E_{\parallel} \rightarrow 0$ . Але при цьому величина поля значно зростає в точках простору, розташованих у площині, перпендикулярній до  $\vec{V}$  (коли  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ):

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} > E_{н,з},$$

при  $V \rightarrow c$  напруженість поля в площині, перпендикулярній  $\vec{V}$ , прямує до нескінченності,  $E_{\perp} \rightarrow \infty$ .

При значеннях  $\vec{V}$  порядку швидкості світла електромагнітне поле РЗЧ зосереджене навколо площини, перпендикулярної  $\vec{V}$ , яка в дану мить проходить через ЗЧ.

Отже, електромагнітне поле ЗЧ, що рухається з довільною за величиною швидкістю  $V$ , електричне поле  $\vec{E}$  зменшується в напрямку руху і збільшується в площині, перпендикулярній до  $\vec{V}$ . Ідентично поводить себе й магнітне поле.

Таким чином, електричне поле рухомої ЗЧ «сплющується» в напрямку руху.

При релятивістських швидкостях ( $\frac{V}{c} \approx 1$ ) напруженість поля рухомої ЗЧ на заданій відстані від неї мала по лінії руху ЗЧ і велика в перпендикулярному напрямку, тобто поле начебто сконцентровується поблизу площини, проведеної через ЗЧ перпендикулярно її швидкості.

3. Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний напруженості електричного поля та швидкості руху ЗЧ. Тому силові лінії вектора  $\vec{B}$  утворюють сукупність концентричних кіл, що лежать у площині, перпендикулярній  $\vec{V}$ , а центри цих кіл знаходяться на лінії руху ЗЧ (див. рис. 3.15). До речі, цей висновок, що випливає і з виразів для  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ , приводить до формулювання в курсі фізики середньої школи «правила буравчика» стосовно визначення напрямку силових ліній магнітного поля струмів.

4. Електричне поле не є сферично-симетричним, хоча й характеризується значними симетріями, зокрема поле вектора  $\vec{E}$  дзеркально симетричне відносно координатних площин  $XOZ$  (взагалі кажучи, відносно будь-якої площини, що проходить через вісь  $OX$ ),  $YOZ$ .

5. Електричне поле рухомої ЗЧ є, взагалі кажучи, непотенційним полем [31]:

$$\text{rot}\vec{E} \neq 0,$$

хоча можна вказати на безліч контурів у цьому полі, циркуляція вектора  $\vec{E}$  вздовж яких дорівнює нулю. Так, наприклад,  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$ :

- а) уздовж будь-якого контуру, що лежить у площині  $YOZ$ ;
- б) уздовж контуру, симетрично розташованого відносно площини  $YOZ$ ;
- в) уздовж контуру, симетрично розташованого відносно площини  $XOZ$ ;
- г) уздовж контуру, симетрично розташованого відносно площини  $XOY$ .

Тобто, з одного боку, у будь-якій точці поля поза межами ЗЧ електричне поле є вихровим полем  $rot\vec{E} \neq 0$ , з іншого, – є потенційним (якщо за критерій потенційності поля брати  $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$ ).

Завдяки певній симетрії електричного поля РЗЧ можна знайти форми замкнутих контурів, циркуляція  $\oint_L \vec{E}d\vec{l}$  уздовж яких дорівнює нулю.

Але по суті своїй поле вектора  $\vec{E}$  являється вихровим, оскільки і  $\vec{E}$  породжується  $\frac{d\vec{B}}{dt}$ , і  $\vec{H}$  породжується  $\frac{d\vec{D}}{dt}$ .

У зв'язку з цим виникає питання, як може бути потенціальним електричне поле, утворене суперпозицією електричних полів сукупності рухомих ЗЧ (наприклад, електричне поле провідника з постійним струмом)?!

**Комп'ютерне моделювання електромагнітного поля рівномірно та прямолінійно рухомої зарядженої частинки.**

Для кращого розуміння властивостей ЕПМ РЗЧ нами була створена комп'ютерна програма, призначена для моделювання й пояснення особливостей ЕПМ РЗЧ.

В основу комп'ютерної програми, що ілюструє особливості електромагнітного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки, були покладені формули для напруженості електричного (3.11) й індукції магнітного полів (3.12).

Була використана мова програмування «TURBO PASCAL» [47].

Деяко несподіваними виявились результати моделювання ЕМП рухомої ЗЧ. Картина ЕМП, яку ми отримали (див. рис. 3.9, 3.10), не описана в існуючих підручниках з електродинаміки. З тексту вказаних посібників випливає, що нібито електричне поле РЗЧ сплющується в напрямку руху таким же чином, як і еквіпотенціальні поверхні Хевісайда (див., наприклад, [1, с. 125; 7, с. 184]).

Комп'ютерне моделювання ЕП рухомої ЗЧ та дослідження функції (див. рис. 3.10)

$$f(\beta, \theta) = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}},$$

яка входить у вирази (3.11) та (3.12), показало, що полярна діаграма напруженості ЕП РЗЧ при великих швидкостях руху її не має вигляду

сплющеного еліпсоїду.

Комп'ютерне моделювання ЕМП РЗЧ показало, що «сплющування» електричного поля РЗЧ в напрямку руху відбувається нерівномірно в площині  $YOZ$ . А саме при  $\theta = 0$  та  $V = 0,8c$   $E_{\parallel} \rightarrow 0$ , тобто спостерігається «перетяжка» (див. рис. 3.9) у картині електричного поля.

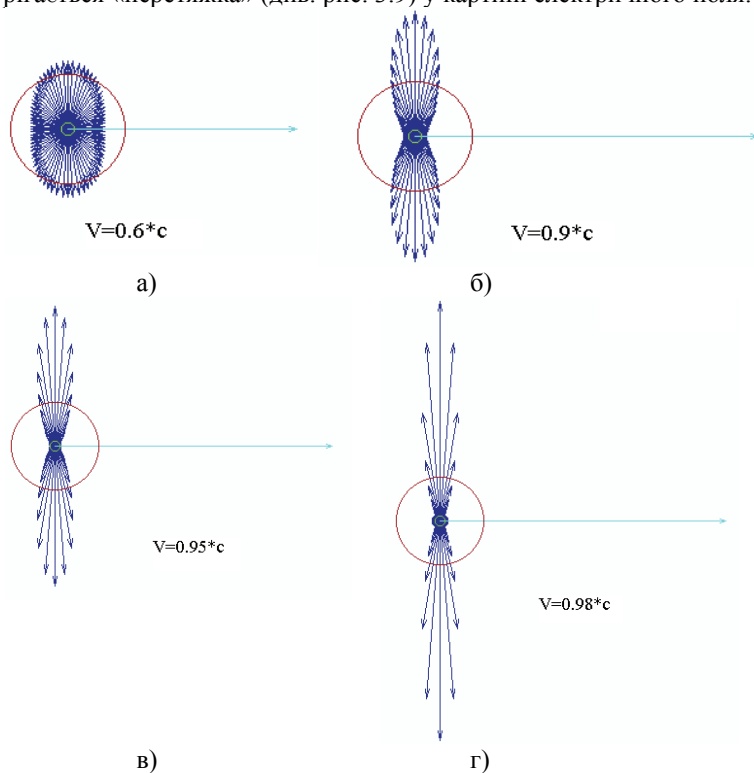


Рис. 3.9. Полярні діаграми напруженості електричного поля РЗЧ в площині  $XOY$  при різних значеннях швидкості руху ЗЧ

Іншими словами, у будь-якій площині, у якій знаходиться вісь  $OX$ , годограф вектора  $\vec{E}$  утворює вісімку. У навчально-методичній літературі відсутні коментарі з приводу такої картини ЕМП РЗЧ.

Тобто при  $V \rightarrow c$  в області значення кутів  $\theta \approx 0$  спостерігається ніби «перетяжка» на полярній діаграмі напруженості електричного поля, і в площині  $XOY$  полярна діаграма має вигляд «вісімки» (рис. 3.9 а, 3.9 в, 3.9 г).



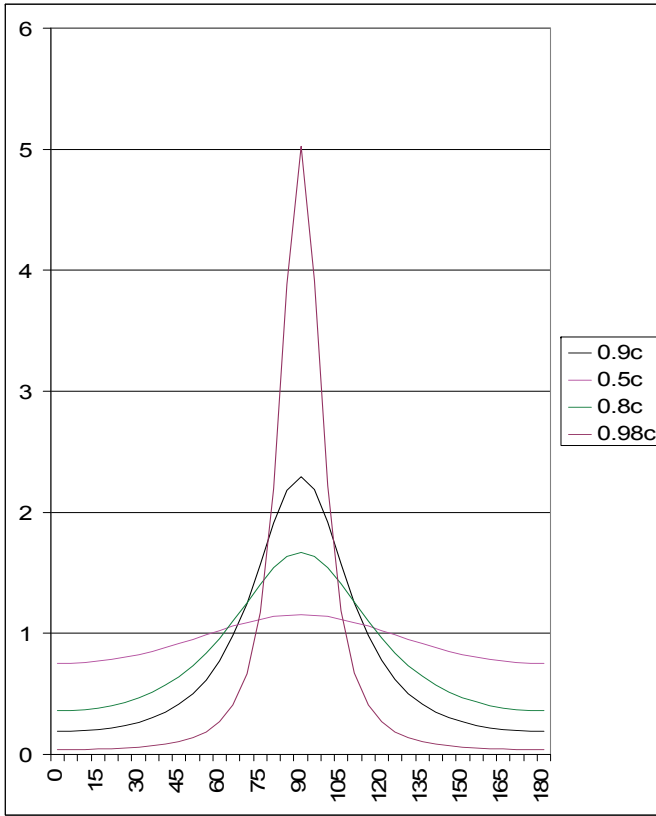


Рис. 3.10. Залежність функції  $f(\beta, \theta) = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$

від кута  $\theta$  при різних значеннях швидкості руху ЗЧ

Використовуючи комп'ютерну модель як засіб пізнання, вдається проілюструвати залежність напруженості електричного й індукції магнітного полів від швидкості руху зарядженої частинки, спостерігати, як змінюється вигляд ЕМП у цілому, порівняти величини полів при різних швидкостях руху та в різних напрямках. Усе це для наочності, для кращого розуміння властивостей ЕМП РЗЧ.

Відомо, що динамічні моделі більш повно передають інформацію про властивості об'єкту і з психологічної точки зору краще за-

пам'ятовуються, оскільки дію моделі можна розглядати й вивчати необхідну кількість разів, повертаючись до різних аспектів механізму, часового перебігу явища. Досвід використання подібних моделей у навчальному процесі показав, що вони виконують не лише пояснювальну функцію, а й сприяють кращому розумінню властивостей ЕМП РЗЧ та поглибленому вивченню особливостей ЕМП РЗЧ.

У програмі було створене меню з шести пунктів: «Електричне поле», «Магнітне поле», «Електромагнітне поле», «Графік:  $(1 - \beta^2)$ », «Графік:  $(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}})$ », а також «Вихід». Усе це було пророблено, щоб

підтримувати двосторонній зв'язок з користувачем і для переключення від одного до іншого необхідного пункту меню. Простота управління не створює труднощів у процесі використання програми й не вимагає витрат часу на вивчення правил користування.

Програма враховує також граничні випадки, тобто досягнення ЗЧ швидкості, яка дорівнює швидкості світла у вакуумі. І продемонстровано, що відбувається при цьому з електромагнітним полем. Усе це показано у векторах напруженостей електричного й індукції магнітного полів. Вектори поля на моніторі представлені в різних кольорах для кращого сприйняття та розрізнення. У такому ж вигляді представленні виведені підказки, указівки й інше.

Тепер можна охарактеризувати те, що відбувається на моніторі під час виконання програми. Так, при  $V = 0$  ми одержуємо модель, що відображає електричне поле нерухомого або повільно рухомої ( $V \ll c$ ) ЗЧ (рис. 3.11).

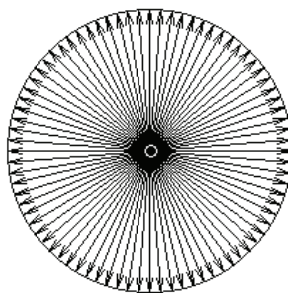


Рис. 3.11

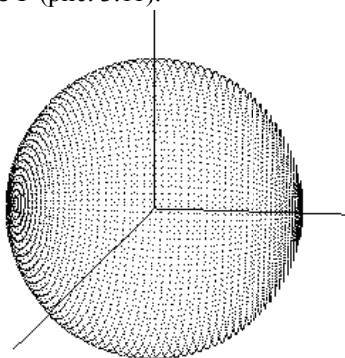


Рис. 3.12

З рисунку видно, що вектори напруженості електричного поля на однаковій відстані від заряду однакові за величиною. Але це тільки при малих швидкостях руху ЗЧ або при нерухомій ЗЧ. Тоді картина цього ж поля в тривимірній моделі має вигляд, зображений на рис. 3.12.

У центрі знаходиться заряджена частинка, а відстань від центру до точок на моделі дорівнює, у певному масштабі, величині напруженості ЕП у точках

простору, рівновіддалених від миттєвого положення ЗЧ.

При збільшенні швидкості руху ЗЧ його поле начебто сплющується в напрямку його руху. Це й спостерігаємо під час роботи програми, коли ми збільшуємо швидкість, наприклад, до  $V=0,6 c$  (рис. 3.13). Зліва на рис. 3.13 зображена картина ЕП у площині  $XOY$ , справа – просторова картинка.

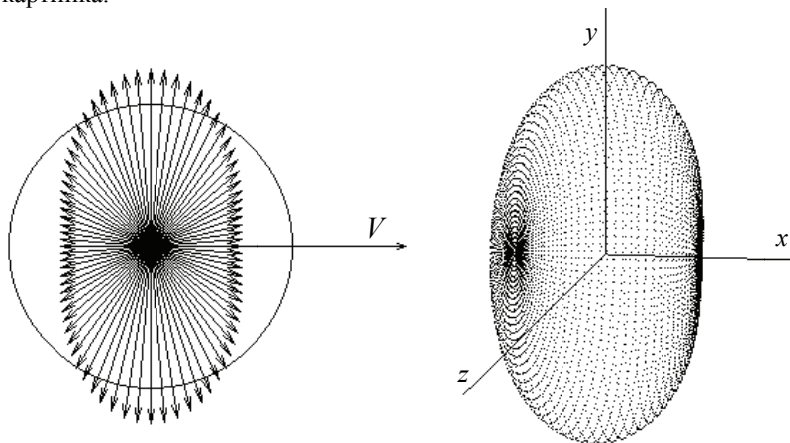


Рис. 3.13

При швидкості руху ЗЧ ( $V=0.9 c$ ) картина поля суттєво змінюється  $Z Y$  (рис. 3.14).

Згідно з (3.12) вектори напруженості електричного й індукції магнітного полів взаємно перпендикулярні, крім того, це ілюструють наступні рисунки, що відображають орієнтацію векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  в даній моделі при швидкостях зарядженої частинки  $V \ll c$ ,  $V = 0,6 c$  та  $V = 0,9 c$ , відповідно, рис. 3.15.

Програми, що дали картинки, зображені на рисунках 3.9, 3.11–3.15, динамічні, тобто при збільшенні швидкості відповідною клавішею зображення автоматично перемальовується відповідно до значення швидкості й таким чином створюється ефект руху.

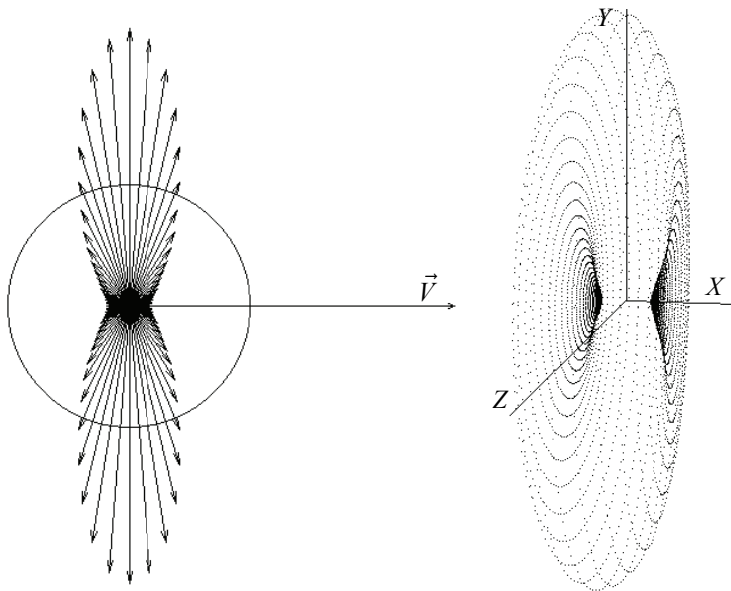


Рис. 3.14

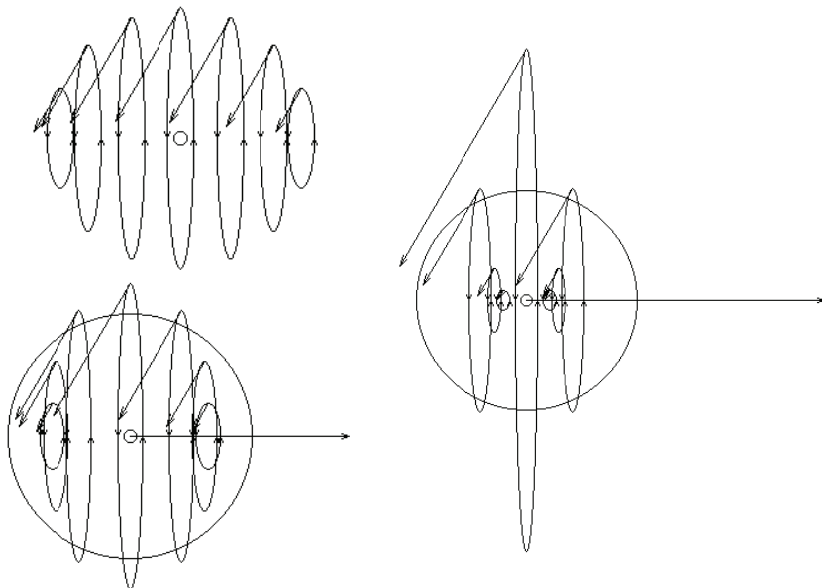


Рис. 3.15

### Висновки до розділу 3

1. Запропоновано ряд оригінальних задач, використання яких у навчальному процесі, при вивченні питання про відносність поділу ЕМП на електричне й магнітне поля, позитивно вплинуло на активізацію пізнавальної діяльності студентів і рівень опанування цього питання.

2. При розв'язанні задач показано, що ФПКЕМП мають локальний характер.

3. Показано, що сила Лорентца – це сила з боку електричного поля  $\vec{E}'$ , яке існує у ВСВ зарядженої частинки, але ця сила вимірюється приладами, що є нерухомими в лабораторній системі відліку (СВ  $K$ ) (*приклад 3.5*). Причому, якщо ЗЧ і нерухома відносно магніту, але магніт разом з ЗЧ рухаються відносно СВ  $K$ , то все ж у цій системі виникає магнітна сила (хоч ЗЧ відносно джерела магнітного поля не рухається). *Суттєво тут те, що ЗЧ рухається відносно СВ  $K$  в певному магнітному полі (приклад 3.1).*

4. Особливо детально розглянуті властивості ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ. Електричне поле РЗЧ є не потенційним,  $\text{rot}\vec{E} \neq 0$ , але можна знайти безліч контурів в ЕП РЗЧ, циркуляція вектора напруженості електричного поля вздовж яких все ж дорівнює нулеві.

5. У підрозділі 3.2 цього розділу описана програма, яка моделює ЕМП РЗЧ при різних значеннях швидкості руху ЗЧ. При цьому вдалося виявити ряд властивостей ЕМП РЗЧ, які не описані в навчально-методичній літературі. Це стосується появи «перетяжки» в картині електричного поля РЗЧ (при  $V \rightarrow c$ ) у будь-якій площині, що проходить через вісь  $OX$  (див. рис. 3.9 та 3.14).

## Розділ 4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ

### 4.1. Електромагнітне поле в середовищі, яке рухається повільно ( $V \ll c$ )

#### 4.1.1. Співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в різних системах відліку

Зв'язок між векторами поля, які описують ЕМП з точки зору «нерухомої системи відліку»  $K$  та з точки зору рухомої СВ  $K'$ , дається формулами *Розділу 1*. Причому ці формули мають місце при будь-якому значенні швидкості  $\vec{V}$  поступального руху СВ  $K'$ .

Знайдемо вектори поля і зв'язок між ними в однорідних та ізотропних тілах, які рухаються зі швидкістю  $V \ll c$  відносно лабораторної СВ  $K$ .

Для цього скористаємось результатами, одержаними нами в *Розділі 1*.

Із формул (1.13)–(1.17) одержуємо

$$\vec{E} = \vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'], \quad (4.1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}' + \frac{[\vec{V}, \vec{E}']}{c^2}, \quad (4.2)$$

$$\vec{H} = \vec{H}' + [\vec{V}, \vec{D}'], \quad (4.3)$$

$$\vec{D} = \vec{D}' - \frac{[\vec{V}, \vec{H}']}{c^2}, \quad (4.4)$$

$$\vec{j} = \vec{j}' + \vec{V} \rho', \quad (4.5)$$

$$\rho = \rho' + \frac{\vec{V} \vec{j}'}{c^2}. \quad (4.6)$$

Вектор намагнічування й вектор поляризації при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , з урахуванням (1.82), (1.83) і при умові  $V \ll c$ , перетворюються згідно з формулами

$$\vec{M} = \vec{M}' - [\vec{V}, \vec{P}'], \quad (4.7)$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2}. \quad (4.8)$$

Щоб одержати поля в СВ  $K'$  за відомими характеристиками ЕМП в СВ  $K$ , скористаємося або формулами (1.18)–(1.22), або в попередніх формулах змінимо штриховані величини на не штриховані та навпаки, а перед  $\vec{V}$  поставимо протилежний знак:

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}], \quad (4.9)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2}, \quad (4.10)$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - [\vec{V}, \vec{D}], \quad (4.11)$$

$$\vec{D}' = \vec{D} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}]}{c^2}, \quad (4.12)$$

$$\vec{j}' = \vec{j} - \vec{V}\rho, \quad (4.13)$$

$$\rho' = \rho - \frac{\vec{V} \cdot \vec{j}}{c^2}. \quad (4.14)$$

Аналогічно, із формул (1.84) і (1.85) при  $V \ll c$  знаходимо вектор намагнічування й вектор поляризації в штрихованій системі відліку за відомими величинами в «нерухомій» СВ

$$\vec{M}' = \vec{M} + [\vec{V}, \vec{P}], \quad (4.15)$$

$$\vec{P}' = \vec{P} - \frac{[\vec{V}, \vec{M}]}{c^2}. \quad (4.16)$$

А зв'язок між величинами, які залежать від властивостей середовища, коли воно нерухоме в СВ  $K'$ , виражається такими формулами (одержані з (1.24–1.27)):

$$\begin{aligned} \vec{D} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}]}{c^2} &= \varepsilon_0 \varepsilon (\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \\ \vec{j} - \vec{V}\rho &= \lambda (\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\vec{B} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2} = \mu_0 \mu (\vec{H} - [\vec{V}, \vec{D}]).$$

Формули (4.5) і (4.6) показують, що при наявності густини заряду  $\rho'$  й густини струму  $\vec{j}'$  в СВ  $K'$  в лабораторній СВ густина струму й заряду будуть мати додаткові доданки  $\vec{V}\rho'$  та  $\frac{\vec{V}\vec{j}'}{c^2}$ , відповідно. Але при відсутності струму в СВ  $K'$

$$\rho = \rho'.$$

Тому об'ємна густина сили, яка діє на заряди, нерухомі в СВ  $K'$ , дорівнює

$$\vec{f}' = \vec{E}'\rho'.$$

Якщо виразити  $\vec{E}'$  через величини, які вимірюються в СВ  $K$  (формула (4.9)), то одержимо

$$\vec{f}' = \rho(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]). \quad (4.18)$$

Права частина (4.18) в точності дорівнює густині сили, що діє на ЗЧ з точки зору СВ  $K$ .

**Приклад 4.1.** У СВ  $K'$  густина заряду й густина струму відповідно дорівнюють  $\rho'$  і  $\vec{j}'$ . Знайти густину сили Лорентца в СВ  $K$ .

*Розв'язання:* Згідно з формулами (4.5) і (4.6) маємо

$$\vec{j} = \vec{j}' + \vec{V}\rho',$$

$$\rho = \rho' + \frac{\vec{V}\vec{j}'}{c^2}.$$

Тому для густини сили Лорентца в СВ  $K$  одержуємо

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]. \quad (4.19)$$

Якщо підставити вирази для  $\rho$  та  $\vec{j}$ , то одержимо

$$\begin{aligned} \vec{f} = & \rho'\vec{E}' - \rho'[\vec{V}, \vec{B}'] + \frac{(\vec{V}\vec{j}')}{c^2}\vec{E}' - \frac{(\vec{V}\vec{j}')}{c^2}[\vec{V}, \vec{B}'] + [\vec{j}', \vec{B}'] + \\ & + \frac{1}{c^2}[\vec{j}', [\vec{V}, \vec{E}']] + \rho'[\vec{V}, \vec{B}'] + \frac{\rho'}{c^2}[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}']] = \rho'\vec{E}' + \frac{(\vec{V}\vec{j}')}{c^2}\vec{E}' - \\ & - \frac{(\vec{V}\vec{j}')}{c^2}[\vec{V}, \vec{B}'] + [\vec{j}', \vec{B}'] + \frac{1}{c^2}[\vec{j}', [\vec{V}, \vec{E}']] + \frac{\rho'}{c^2}[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}']]. \quad (4.20) \end{aligned}$$



І якщо припустити далі, що в СВ  $K'$  відсутні струми, як це прийнято в [12, с. 35], то  $\vec{j}' = \vec{E}'\rho'$ , і з (4.20) одержуємо

$$f = \rho'\vec{E}' + \frac{\rho'}{c^2}[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}']],$$

що можна також подати і в очевидній формі (4.18), якщо врахувати формули (4.1) і (4.2).

Вираз (4.18) можна відразу записати, якщо врахувати ту очевидну річ, що відносно в СВ  $K$  переміщується розподіл заряду  $\rho'$  зі швидкістю  $\vec{V}$ , тому  $\vec{j} = \vec{j}' + \vec{V}\rho' = \vec{V}\rho'$ , а  $\rho = \rho'$ .

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}] = \rho(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]).$$

Такі обґрунтування (4.18), як нам здається, більш очевидні і прості, ніж заплутані пояснення в [12, с. 35–36].

Але, як бачимо, густина сили Лорентца СВ  $K$  не дорівнює густині сили Лорентца в СВ  $K'$ , на відміну від того, що стверджується у [12].

Якщо ж припустити, що в СВ  $K'$  протікають струми  $\vec{j}'$ , а відсутні заряди й електричне поле ( $\rho' = 0$ ,  $\vec{E}' = 0$ ), то в СВ  $K$  сумарна густина сили (оскільки  $\vec{j}' = \vec{j}$ ,  $\vec{B}' = \vec{B}$ ) дорівнюватиме

$$\vec{f} = \vec{f}_e + \vec{f}_{ed} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}] = \frac{\vec{V}\vec{j}'}{c^2} \cdot (-[\vec{V}, \vec{B}']) + [\vec{j}, \vec{B}],$$

$$\text{де } \vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}'], \rho = \frac{\vec{V}\vec{j}'}{c^2}.$$

Цей результат впливає також і з детальної та загальної формули (4.20) при вибраних вище умовах:

$$\vec{f} = -\frac{(\vec{V}\vec{j}')}{c^2}[\vec{V}, \vec{B}'] + [\vec{j}', \vec{B}'].$$

Але припущення, що при  $\vec{j}' \neq 0$  об'ємна густина зарядів в СВ  $K'$  дорівнює нулеві, має місце тільки тоді, коли знехтувати точним виразом для напруженості електричного поля РЗЧ (тобто при розгляді тільки нерелятивістського наближення). Інколи це припущення при проходженні струму металевими провідниками формулюють таким чином: «заряди, які створюють струм рухомих частинок, компенсуються в макроскопіч-

ному наближенні зарядами протилежного знаку нерухомих частинок» [10; 11; 12].

Причину виникнення об'ємної густини заряду в СВ  $K$ ,  $\rho = \frac{\vec{V} \vec{j}'}{c^2}$ ,

в релятивістському і в нерелятивістському наближенні розглянуто нами в [19; 20] (див. також п. 4.3.3 та 4.3.5).

#### 4.1.2. Співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в одній і тій самій системі відліку в нерелятивістському наближенні

Розглянемо більш детально співвідношення між векторами поля в однорідному й ізотропному середовищі, яке рухається рівномірно і прямолінійно відносно СВ  $K$  зі швидкістю  $\frac{V}{c} \ll 1$ . Систему відліку  $K'$  зв'яжемо з рухомих середовищем.

Тоді в СВ  $K'$  справедлива система рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' \vec{E}' &= -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}, \\ \operatorname{div}' \vec{B}' &= 0, \\ \operatorname{div}' \vec{D}' &= \rho', \\ \operatorname{rot}' \vec{H}' &= \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \end{aligned}, \quad (4.21)$$

де  $\vec{D}' = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}'$  і  $\vec{B}' = \mu \mu_0 \vec{H}'$ .

У системі рівнянь Максвелла (4.21) штрихи біля операцій  $\operatorname{rot}'$  та  $\operatorname{div}'$  означають, що відповідні похідні беруться за просторово-часовими координатами події в СВ  $K'$  ( $x', y', z', t'$ ). Оскільки при  $\frac{V}{c} \ll 1$  мають місце перетворення Галілея

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

то для операцій ротора, дивергенції та частинних похідних за часом маємо

$$\begin{aligned}
rot' &= rot, \\
div' &= div, \\
\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'}.
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що, згідно з означенням,  $\vec{P}' = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}'$ ,  $\vec{M}' = \chi \vec{H}'$ , де  $1 + \alpha = \varepsilon$ ,  $1 + \chi = \mu$ . Тому для вектора поляризації  $\vec{P}'$  та вектора намагнічування  $\vec{M}'$  можемо записати

$$\vec{P}' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \left( \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \right), \quad (4.22)$$

$$\vec{M}' = (\mu - 1) \frac{\vec{B}'}{\mu_0 \mu} = \frac{\mu - 1}{\mu \mu_0} \cdot \left( \vec{B} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2} \right). \quad (4.23)$$

**Приклад 4.2.** Виразити вектор поляризації  $\vec{P}$  в СВ  $K$  через параметри ЕМП в цій СВ в нерелятивістському наближенні.

*Розв'язання:* У СВ  $K$  вектор, який характеризує електричний момент одиниці об'єму середовища, згідно з (4.8) та з урахуванням (4.22), дорівнює

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{P}' + \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \left( \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \right) + \\
&+ \frac{\mu - 1}{c^2 \mu \mu_0} \left( [\vec{V}, \vec{B}] - \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}]]}{c^2} \right) = \left\{ \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E} - \frac{\mu - 1}{\mu} \varepsilon_0 \left( \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}]]}{c^2} \right) \right\} + \\
&\left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Другим доданком у фігурних дужках, як правило, нехтують, оскільки

$$\frac{V^2}{c^2} \frac{\mu - 1}{\mu} \ll \varepsilon - 1.$$

Тоді для вектора поляризації в СВ  $K$  одержуємо

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E} + \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.25)$$

**Приклад 4.3.** Виразити вектор намагнічування  $\vec{M}$  у СВ  $K$  через параметри ЕМП в цій СВ в нерелятивістському наближенні.

*Розв'язання:* У СВ  $K$  вектор, який характеризує магнітний момент одиниці об'єму середовища, дорівнює, згідно з (4.7) та з урахуванням (4.23),

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}' - [\vec{V}, \vec{P}'] = \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0} \left( \vec{B} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2} \right) - \\ &\quad - \varepsilon_0(\varepsilon - 1) \left( [\vec{V}, \vec{E}] + [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{B}]] \right) = \\ &= \left\{ \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0} \vec{B} - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon_0\mu_0} \left( \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{B}]]}{c^2} \right) \right\} - \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}].\end{aligned}\quad (4.26)$$

Якщо реалізується умова

$$(\varepsilon - 1) \frac{V^2}{c^2} \ll \frac{\mu - 1}{\mu},$$

то для вектора намагнічування отримаємо вираз

$$\vec{M} = \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}].\quad (4.27)$$

**Приклад 4.4.** Знайти зв'язок між вектором  $\vec{H}$ , який залежить від властивостей середовища, й векторами ЕМП  $\vec{B}$  та  $\vec{E}$ .

*Розв'язання:* Скористаємося означенням вектора поля  $\vec{H}$ ,  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ , у яке підставляємо (4.26) й одержуємо

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \left\{ \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0} \vec{B} - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon_0\mu_0} \left( \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{B}]]}{c^2} \right) \right\} - \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] = \\ &= \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu} + \varepsilon_0(\varepsilon - 1) \cdot [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{B}]] + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) \cdot [\vec{V}, \vec{E}].\end{aligned}\quad (4.28)$$

Якщо знехтувати другим доданком порівняно з першим, то одержуємо

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu} + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}].\quad (4.29)$$

Якщо рухається немагнітний ( $\mu = 1$ ) діелектрик, то

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + (\varepsilon_0\varepsilon - \varepsilon_0)[\vec{V}, \vec{E}]. \quad (4.30)$$

**Приклад 4.5.** Знайти зв'язок між вектором  $\vec{D}$ , який залежить від властивостей середовища, й векторами ЕМП  $\vec{B}$  та  $\vec{E}$ .

*Розв'язання:* Аналогічно до попереднього прикладу, скористаємося означенням вектора поля  $\vec{D}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ , у яке підставляємо вираз (4.24):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E} + \left\{ \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} - \frac{\mu - 1}{\mu}\varepsilon_0 \left( \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}]]}{c^2} \right) \right\} + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{B}] = \\ &= \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} - \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\varepsilon_0}{c^2} [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{E}]] + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Другий доданок практично завжди набагато менший ніж перший, тому маємо

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.32)$$

До речі, це ж співвідношення, (4.32), **отримується, можливо, і простішим шляхом, із першого рівняння системи (4.17).**

Якщо ж діелектрик немагнітний, то

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} + (\varepsilon_0\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.33)$$

Вирази (4.28) та (4.31) з точністю до  $\frac{V^2}{c^2}$  співпадають з тими, що можна отримати з системи (4.17).

Із (4.29) можна одержати вираз для індукції магнітного поля в рухомому середовищі через параметри руху й поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \left( \vec{H} - \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] \right), \quad (4.34)$$

а з (4.32) знаходимо напруженість електричного поля в рухомому середовищі як функцію  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{V}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon} - \left( 1 - \frac{1}{\mu\varepsilon} \right) [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.35)$$

**Приклад 4.6.** Одержати вирази (4.34) та (4.35) із, відповідно, третього й першого рівнянь системи (4.17).

*Розв'язання:* Перепишемо третє рівняння системи (4.17):

$$\vec{B} - \frac{[\vec{V}, \vec{E}]}{c^2} = \mu_0 \mu \left( \vec{H} - [\vec{V}, \vec{D}] \right).$$

Із нього знаходимо

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \left( \vec{H} - \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] \right) = \mu \mu_0 \vec{H} - \frac{1}{c^2} (n^2 - 1) [\vec{V}, \vec{E}],$$

де  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu}$  – показник заломлення однорідного середовища; також використано  $D = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ .

Аналогічно, з першого рівняння (4.17)

$$\vec{D} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}]}{c^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \left( \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \right)$$

маємо

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{[\vec{V}, \vec{H}]}{c^2 \varepsilon \varepsilon_0} - [\vec{V}, \vec{B}] = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \left( 1 - \frac{1}{\mu \varepsilon} \right) [\vec{V}, \vec{B}] = \\ &= \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) [\vec{V}, \vec{B}]. \end{aligned}$$

**Приклад 4.7.** Використовуючи співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в одній і тій самій системі відліку в нерелятивістському наближенні, записати рівняння Максвелла для рухомих тіл.

*Розв'язання:* Для немагнітного діелектрика можна з урахуванням (4.30) записати рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{H}$

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \text{rot} \left\{ (\varepsilon_0 \varepsilon - \varepsilon_0) [\vec{V}, \vec{E}] \right\},$$

$$\text{де } \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + (\vec{j}' + \rho \vec{V}).$$

Вважається при цьому, що  $\vec{j} = \vec{j}' + \vec{V} \rho'$ ,  $\rho = \rho' + \frac{\vec{V} \vec{j}'}{c^2} \approx \rho'$ .

Тобто рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{B}$  в рухомому немагнітному середовищі набуває форми

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ (\varepsilon_0 \varepsilon - \varepsilon_0) [\vec{V}, \vec{E}] \right\} + \vec{j}' + \rho \vec{V}, \quad (4.36)$$

яка збігається з відповідним рівнянням в теорії Максвелла-Лоренца.

Для магнітного діелектрика рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{B}$  рухомого середовища має вигляд

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] \right\} + \vec{j}' + \rho \vec{V}. \quad (4.37)$$

Закон ЕМІ в локальній формі одержуємо, використовуючи (4.35).

Тоді для магнітних діелектриків рівняння Максвелла для ротора вектора  $\vec{D}$  в рухомому середовищі має вигляд

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}] \right\}, \quad (4.38)$$

де враховано, що в СВ  $K$   $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Інші два рівняння Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

з урахуванням формул (4.6) ( $\rho = \rho' + \frac{\vec{V} \cdot \vec{j}'}{c^2}$ ), (4.29), (4.32) і в припущенні, що відсутні будь-які інші заряди, крім тих, які рухаються разом з середовищем, набувають вигляду

$$\operatorname{div} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{B}] \right\} = \rho = \rho' + \frac{\vec{V} \cdot \vec{j}'}{c^2} \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} \left\{ \mu_0 \mu H - \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon \mu - 1) \cdot [\vec{V}, \vec{E}] \right\} = 0.$$

Закон Ома в диференціальній формі одержуємо з (1.26) і (1.27), у яких припускаємо, що коефіцієнт  $\Gamma$  з великою точністю дорівнює одиниці ( $\Gamma = 1$ ) (див. також (4.17))

$$\vec{j} - \vec{V} \rho = \lambda \left( \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \right).$$

Граничні умови

$$H'_{\tau 1} = H'_{\tau 2}, \quad E'_{\tau 1} = E'_{\tau 2},$$

$$B'_{n 1} = B'_{n 2}, \quad D'_{n 1} = D'_{n 2}.$$

Також трансформуються з використанням (4.29) та (4.32).

### 4.1.3. Рівняння Максвелла в рухомому середовищі

Звичайно, як ми впевнились у *Розділі 1* (п. 1.1) (див. також [33]), рівняння Максвелла мають один і той же вигляд у будь-якій інерційній системі відліку. І немає значення, з якою за величиною швидкістю (чи  $V \ll c$ , чи  $V \approx c$ ) рухається ця ІСВ.

Але ми хочемо записати рівняння Максвелла в рухомому середовищі через величини, які вимірюються в лабораторній (нерухомій) системі відліку в нерелятивістському наближенні.

РМ у рухомому середовищі в нерелятивістському наближенні можуть бути обґрунтовані такими способами.

1. *Спосіб обґрунтування РМ в рухомому середовищі для вихорів напруженості електричного й магнітного полів, заснований на знаходженні зміни потоків векторів  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  через рухому поверхню.*

Щоб записати РМ для вихору вектора  $\vec{H}$ ,  $\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ , в ІСВ, відносно якої середовище рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ , необхідно знати величину  $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$  в рухомому середовищі. Оскільки  $\vec{j} \approx \vec{j}'$ , знайдемо силу струму зміщення через рухому поверхню.

Сила струму зміщення через деяку поверхню  $S$ , обмежену контуром  $L$ , у нерухомому середовищі визначається

$$\int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Якщо ж середовище рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ , то ця поверхня й контур також рухаються з цією ж швидкістю. Тоді для знаходження зміни в часі потоку вектора  $\vec{D}$  необхідно врахувати і зміну в часі вектора  $\vec{D}$ ,  $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ , і зміну потоку  $\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S}$ , зумовлену рухом цієї поверхні разом з середовищем. Тобто сумарний струм зміщення слід подати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S}}{\Delta t}, \quad (4.40)$$

де другий доданок враховує зміну потоку вектора  $\vec{D}$  внаслідок переміщення середовища разом з поверхнею  $S$ .



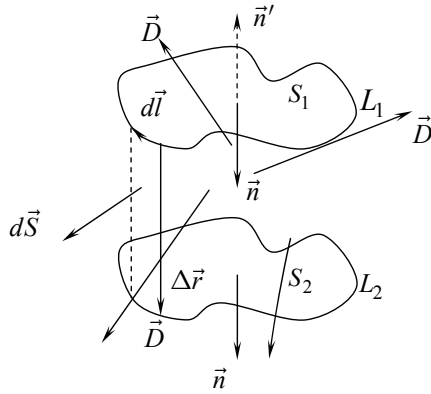


Рис. 4.1. Знаходження зміни в часі потоку вектора  $\vec{D}$  через рухоми поверхню

$\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S}$  – це приріст потоку вектора  $\vec{D}$  через  $S$  при перемі-

щенні кожного елемента поверхні  $S$  на  $\Delta \vec{r}$  (див. рис. 4.1).

Замкнена поверхня, яка охоплює об'єм  $\Delta V$ , як видно з рис. 4.1, складається з таких частин: поверхня  $S$  у початковому положенні  $S_1$ , поверхня  $S$  у кінцевому положенні  $S_2$  та поверхня, утворена контуром  $L$  при його переміщенні на  $\Delta \vec{r}$ ,  $S_\sigma$ . Цю поверхню  $S_\sigma$  будемо називати «пояском», тоді елемент поверхні пояска дорівнює  $[d\vec{l}, \Delta \vec{r}]$ .

Цей приріст потоку,  $\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S}$ , якраз і є додатковим потоком через частину поверхні, що обмежує об'єм  $\Delta V$  і утворена поверхнею  $S$  при її положенні на початку й у кінці переміщення  $\Delta \vec{r}$

$$\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S}. \quad (4.41)$$

Тоді, для повного потоку вектора  $\vec{D}$  з об'єму  $\Delta V$  назовні через усю замкнену поверхню, що обмежує об'єм  $\Delta V$ , можна записати [36; 12]:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_L \vec{D} [d\vec{l}, \Delta \vec{r}] + \Delta \int_S \vec{D} d\vec{S}, \quad (4.42)$$

де потік через поверхню  $S_0$ , «поясок», що утворюється рухом контуру з положення  $L_1$  в положення  $L_2$ , дорівнює

$$\oint_L \vec{D} [d\vec{r}, \Delta\vec{r}] = \oint_L [\vec{D}, d\vec{r}] \Delta\vec{r} = - \oint_L [\vec{D}, \Delta\vec{r}] \cdot d\vec{r}. \quad (4.43)$$

Тобто для повного потоку через замкнену поверхню  $(S_1 + S_2 + \text{«поясок»})$  можна записати

$$\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S} - \oint_L [\vec{D}, \Delta\vec{r}] \cdot d\vec{r} = \Delta \int_S \vec{D} d\vec{S} - \int_S \text{rot} [\vec{D}, \Delta\vec{r}] \cdot d\vec{S}. \quad (4.44)$$

Але згідно з теоремою Гаусса  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{\Delta V} \text{div} \vec{D} \cdot dV$ , цей пов-

ний потік повинен дорівнювати об'ємному інтегралу від  $\text{div} \vec{D}$  за об'ємом  $\Delta V$ , об'ємом, який охоплений поверхнею  $(S_1 + S_2 + \text{«поясок»})$ .

Тобто співвідношення (4.44) з урахуванням рівняння Максвелла

$$\int_{\Delta V} \text{div} \vec{D} \cdot dV = \Delta q \text{ набуває вигляду}$$

$$\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S} - \int_S \text{rot} [\vec{D}, \Delta\vec{r}] \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta V} \text{div} \vec{D} \cdot dV = \Delta q, \quad (4.45)$$

де  $\Delta q$  – величина заряду, розподіленого в об'ємі  $\Delta V$ .

І тому другий доданок у виразі (4.40) для повної похідної потоку вектора  $\vec{D}$  через поверхню, яка рухається, дорівнює

$$\Delta \int_S \vec{D} d\vec{S} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} + \oint_L [\vec{D}, \vec{v}] d\vec{r} = \frac{dq}{dt} - \oint_L [\vec{v}, \vec{D}] d\vec{r}, \quad (4.46)$$

$$\text{де } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Величину  $\frac{dq}{dt}$  – швидкість зміни в часі заряду в об'ємі  $\Delta V$ , який утворює поверхня  $S_1$  за одиницю часу при своєму русі, – можна подати у вигляді

$$\frac{dq}{dt} = \int_S \rho \vec{v} d\vec{S},$$

де  $\rho$  – об'ємна густина заряду.

Таким чином, сумарний струм зміщення через рухома поверхню  $S$  дорівнює

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \rho \vec{v} d\vec{S} - \oint [\vec{v}, \vec{D}] d\vec{l}. \quad (4.47)$$

І тому РМ для вихору вектора  $\vec{H}$  в інтегральній формі має вигляд

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \rho \vec{v} d\vec{S} - \oint_L [\vec{v}, \vec{D}] d\vec{l}. \quad (4.48)$$

А локальна форма цього рівняння

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v} - \text{rot} [\vec{v}, \vec{D}], \quad (4.49)$$

або

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{div} \vec{D} - \text{rot} [\vec{v}, \vec{D}]. \quad (4.50)$$

Але, якщо субстанціональна похідна, згідно з основними положеннями векторного аналізу, становить (див. п. 4.2.3)

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot} [\vec{V}, \vec{D}] + (\vec{D} \nabla) \vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div} \vec{D} - \vec{D} \cdot \text{div} \vec{V}, \quad (4.50a)$$

то у виразі для  $\text{rot} \vec{H}$  ми повинні мати ще два доданки  $(\vec{D} \nabla) \vec{V} - \vec{D} \cdot \text{div} \vec{V}$ , які дорівнюють нулеві тільки при  $\vec{V} \equiv \vec{v} = \text{const}$ .

А що ж будемо мати при  $\vec{V} \equiv \vec{v} \neq \text{const}$ , коли швидкість руху контуру разом з поверхнею, разом з середовищем, змінна в часі та в просторі?

Знайдемо локальну форму закону ЕМІ для рухомих тіл. Для цього нам необхідно знайти спочатку повну похідну за часом від потоку магнітного поля через довільну поверхню, що спирається на контур, який рухається в такому полі. Скористаємося способом, описаним у [35, с. 162–163]:

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{S}. \quad (4.51)$$

Припустимо, що в деякій області простору створене нестационарне і неоднорідне магнітне поле  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

Розглянемо поверхню  $S$ , яка обмежена контуром  $L$  і яка в момент  $t$  знаходиться в положенні  $L_1$  (рис. 4.2). Нехай за час  $dt$  контур перемістився на вектор  $\vec{v} dt$  і в момент часу  $t + dt$  знаходиться в положенні  $L_2$ .

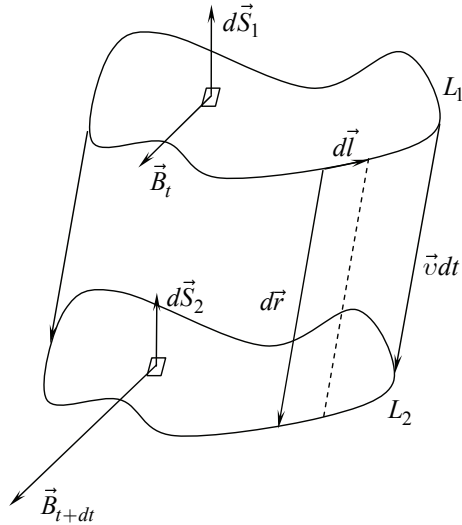


Рис. 4.2. До знаходження зміни потоку магнітної індукції через рухомий контур

Згідно з означенням похідної, ми можемо записати

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \int \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int (\vec{B}_{t+dt} \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}_t \cdot d\vec{S}_1)}{\Delta t}, \quad (4.52)$$

де  $\vec{B}_{t+dt}$  – індукція магнітного поля в момент часу  $t + dt$  у точках поверхні  $S_2$ .

Для моменту часу  $t$  застосуємо теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$  для об'єму, обмеженого поверхнями  $S_1$ ,  $S_2$  та поверхнею  $S_0$ , яка утворена рухом контуру  $L$  (рис. 4.2) [35]:

$$\int_S \nabla \vec{B} \cdot dV = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int (\vec{B}_t \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}_t \cdot d\vec{S}_1) - \oint \vec{B}_t \cdot [\vec{v} dt, d\vec{l}], \quad (4.53)$$

де  $\oint \vec{B}_t \cdot [\vec{v} dt, d\vec{l}]$  – це потік вектора  $\vec{B}$  через поверхню  $S_0$ , утворену рухом контуру  $L$ , елемент якого рівний  $d\vec{l}$  (рис. 4.2).

Оскільки теорема Гаусса справедлива тільки миттєвих значень вектора  $\vec{B}$ , то в (4.53) потік через поверхні  $S_1$  і  $S_2$  знаходиться в момент  $t$ . Але поле нестационарне, тому вектор  $\vec{B}$  в кожній точці на поверхні  $S_2$  в момент  $t + dt$  можна таким чином виразити через його величину в момент часу  $t$ :

$$\vec{B}_{t+dt} = \vec{B}_t + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt + \dots \quad (4.54)$$

Після підстановки (4.54), (4.53) в (4.52) маємо

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint [\vec{B}, \vec{v}] \cdot d\vec{l} + \int \frac{\nabla \vec{B} \cdot dV}{dt}, \quad (4.55)$$

де  $dV = \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$  – елемент об'єму.

Застосування теореми Стокса до другого доданку (4.55) разом з (4.51) дає

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + [\nabla, [\vec{B}, \vec{v}]] + (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{v}. \quad (4.56)$$

У посібнику [35, с. 162–163] вважається, що повна похідна (4.56) відноситься до СВ  $K'$ , і тому з допомогою (4.56) закон ЕМІ у формі

$$\varepsilon'_i = -\frac{d}{dt} \Phi = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{S}$$

можна тепер подати у вигляді

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{v} + [\nabla, [\vec{B}, \vec{v}]] \right) \cdot d\vec{S}, \quad (4.57)$$

де  $\vec{E}'$  – напруженість індукційного електричного поля в СВ  $K'$ , яка пов'язана з рухомим середовищем.

Оскільки магнітне поле соленоїдальне завжди, то  $\nabla \vec{B} = 0$  і рівняння (4.57) в локальній формі набуває вигляду

$$[\nabla, \vec{E}'] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - [\nabla, [\vec{B}, \vec{v}]], \quad (4.58)$$

$$[\nabla, (\vec{E}' - [\vec{v}, \vec{B}])] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Вираз під знаком ротора,  $\vec{E} = \vec{E}' - [\vec{v}, \vec{B}]$ , дорівнює напруженості електричного поля в СВ  $K$ , див. також формулу (4.1).

Тому в СВ  $K$  закон ЕМІ в локальній формі набуває вигляду

$$[\nabla, \vec{E}] = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.59)$$

**Тобто ми показали, що математична форма закону ЕМІ (4.59) не залежить від руху середовища в полі. Це значить, що при русі будь-якого контуру (навіть того, який деформується в процесі руху) в полі**

$\vec{B}(\vec{r}, t)$  «закон ЕМІ не залежить від руху середовища в полі» [35, с. 164], а ЕРС індукції в контурі дорівнює  $\frac{d\Phi}{dt}$ .

Як видно з викладеного вище, способи знаходження зміни потоку вектора  $\vec{D}$  й вектора  $\vec{B}$  в часі через рухому поверхню, які пропонуються в [12] та [35], відповідно, відрізняються один від одного. Ці способи наведені нами виключно з метою показати їх відмінність, і, по-друге, показати суперечливість і деяку непослідовність при одержанні кінцевих результатів.

У пункті 4.2.3 запропонований, як нам здається, несуперечливий спосіб обґрунтування формули для зміни потоку довільного векторного поля через рухому поверхню. Більш детальне обговорення цих суперечностей і непослідовностей, пов'язаних із законами електродинаміки, наведено в підрозділі 4.2.

2. Спосіб обґрунтували РМ у рухомому середовищі, оснований на використанні співвідношень між векторами поля [12], див. також **Приклад 4.7**.

У попередньому пункті (**Приклад 4.6**) ми знайшли зв'язок між векторами поля в рухомому середовищі з точки зору СВ  $K$ . Це формули (4.35) та (4.29):

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}], \quad (4.35)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} + \left(\varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu}\right) [\vec{V}, \vec{E}]. \quad (4.29)$$

Виходячи з закону ЕМІ

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

та з урахуванням (4.35), рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{D}$  рухомому середовищі набуває форми (4.38)

$$\text{rot} \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}] \right\}.$$

А рівняння Максвелла для вихору напруженості магнітного поля в рухомому середовищі

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

з урахуванням (4.29) записується у вигляді (4.37)

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] \right\} + \vec{j}' + \rho \vec{V}.$$

Вважається при цьому, що  $\vec{j} = \vec{j}' + \vec{V} \rho'$ ,  $\rho = \rho' + \frac{\vec{V} \vec{j}'}{c^2} \approx \rho'$ .

Але, очевидно, припускається, що доданок  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  залишається таким са-

мим, як і в СВ  $K'$ . Водночас, при обґрунтуванні РМ для вихору  $\vec{H}$ , у роботі [12] струм зміщення через рухому поверхню (див. нижче та (4.49)) дорівнює

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v} - \operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{D}]. \quad (4.60)$$

Тобто рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{B}$  в рухомому немагнітному середовищі набуває форми (4.36)

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ (\varepsilon_0 \varepsilon - \varepsilon_0) [\vec{V}, \vec{E}] \right\} + \vec{j}' + \rho \vec{V}.$$

По суті, ми одержали той же результат, що й методом Беккера [24] (див. формулу (4.67) та коментарі до неї).

3. *Обґрунтування рівнянь ЕМП у рухомому середовищі на засадах електронної теорії* [24].

Виходячи з формули перетворення напруженості електричного поля при переході від однієї системи відліку до іншої при  $\frac{V}{c} \ll 1$  (4.9)

для поля  $\vec{E}'$  можемо записати:

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}].$$

Тобто спостерігач, який рухається разом з провідником (СВ  $K'$ ), з допомогою одиничного заряду виміряв би якраз поле  $\vec{E}'$ .

Тому закон ЕМІ в СВ  $K'$  подають у формі [24, с. 254]

$$\operatorname{rot} \vec{E}' = -\dot{\vec{B}},$$

де похідна  $\dot{\vec{B}}$  дорівнює [24, с. 408]

$$\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\vec{B}, \vec{V}] + \vec{V} \operatorname{div} \vec{B}. \quad (4.61)$$

Але з точки зору СВ  $K$  закон ЕМІ має вигляд

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E}' + [\vec{V}, \vec{B}]\right) = -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{div} \vec{B}\right), \quad (4.61a)$$

що приводить до форми

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

яка в точності збігається з відповідним рівнянням для нерухомого тіла.

Тепер перетворимо рівняння Максвелла для вихору вектора  $\vec{B}$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{сум}} \quad (4.62)$$

таким чином, щоб воно було справедливим і для рухомого середовища.

Якщо тіло знаходиться в спокої, то повна густина струму є сумою струму провідності  $\vec{j}$ , струму зміщення  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  і струму поляризації  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ .

Коли ж тіло рухається, то з'являється конвекційний струм, зумовлений рухом ЗЧ, які зв'язані з самим тілом. Величина заряду в елементі об'єму тіла, який може бути зв'язаний з тілом, складається з вільного заряду  $\rho = \operatorname{div} \vec{D}$  та заряду, що з'являється в результаті неоднорідної поляризації,  $\rho_{\text{зв}} = -\operatorname{div} \vec{P}$ .

Величина струму поляризації, що протікає через рухому разом з тілом поверхню, через зміну поляризації в часі дорівнює:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{P} d\vec{S} = \int_S \frac{d\vec{P}}{dt} d\vec{S}. \quad (4.63)$$

Поверхня  $S$  рухається разом з тілом, а  $\frac{d\vec{P}}{dt} \equiv \dot{\vec{P}}$  дорівнює похідній за часом з точки зору спостерігача, який рухається разом з тілом.

Таким чином, повна густина струму відносно рухомого тіла складається з таких доданків.

А) Густина струму поляризації. Тоді для повної похідної вектора поляризації  $\vec{P}$  маємо [24, с. 408]

$$\dot{\vec{P}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{div} \vec{P} + \operatorname{rot} [\vec{P}, \vec{V}] \quad (4.64)$$

– це густина струму, яка зв'язана зі зміною в часі поляризації  $\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)$  та рухом поляризованого середовища  $(\vec{V} \operatorname{div} \vec{P} + \operatorname{rot} [\vec{P}, \vec{V}])$ .



Але вектор  $\vec{P}$  в цій формулі, як стверджується в [24], слід розглядати як функцію координат і часу з **точки зору лабораторної системи відліку**.

Б) Густина конвекційного струму

$$\vec{V}(\rho - \text{div}\vec{P}). \quad (4.65)$$

В) Густина струму провідності,  $\vec{j}$ .

Г) Густина струму зміщення,  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Таким чином, сумарна густина струму, який визначає вихор індукції магнітного поля, дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{сум}} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div}\vec{P}) + \dot{\vec{P}} = \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div}\vec{P}) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{V}\text{div}\vec{P} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] = \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V}\rho. \end{aligned} \quad (4.66)$$

І тоді для вихору вектора індукції МП в рухомому немагнітному середовищі отримуємо:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_{\text{сум}} = \mu_0 \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V}\rho \right), \\ \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} &= \vec{j}_{\text{сум}} = \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V}\rho \right) = \\ &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V}\rho. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Якщо діелектрик незаряджений і в ньому відсутній струм, то з попереднього рівняння одержуємо

$$\text{rot}(\vec{B} - \mu_0[\vec{P}, \vec{V}]) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (4.68)$$

**тобто, з макроскопічної точки зору впливає, що рухомий поляризований діелектрик еквівалентний речовині з вектором намагнічування  $\vec{M} = [\vec{P}, \vec{V}]$ .**

Рівняння Максвелла в рухомому середовищі в посібниках Беккера [24], Мандельштама [36], Тамма [48] одержані на основі правдоподібних міркувань класичної електронної теорії Лорентца.

Але, як ми бачимо, найбільш послідовно рівняння електродинаміки рухомих середовищ (при  $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$ ) одержуються, як наслідок положень релятивістської електродинаміки.

Таким чином, система рівнянь Максвелла в довільному однорідному рухомому середовищі ((4.37), (4.38), (4.39)) має вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{B}] \right\} &= \rho = \rho' + \frac{\vec{V} \vec{j}'}{c^2} \\ \operatorname{div} \left\{ \mu_0 \mu H - \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon \mu - 1) \cdot [\vec{V}, \vec{E}] \right\} &= 0 \\ \operatorname{rot} \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}] \right\} \\ \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] \right\} + \vec{j}' + \rho \vec{V} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Тоді система рівнянь Максвелла в немагнітному середовищі (див. (4.69), а також (4.67)) набуває форми

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \varepsilon \vec{E} + (\varepsilon - 1) [\vec{V}, \vec{B}] \right\} &= \frac{\rho' + \frac{\vec{V} \vec{j}'}{c^2}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \left\{ \mu_0 H - \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon - 1) \cdot [\vec{V}, \vec{E}] \right\} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} &= \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V} \rho. \end{aligned} \quad (4.70)$$

**Таким чином, ми одержали рівняння ЕМП в рухомому середовищі з точки зору нерухомого спостерігача.**

У посібнику [12] основна увага звертається на співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в різних СВ.

У книзі Р. Беккера [24] наголос робиться на змістові доданків, що входять до правої частини рівнянь Максвелла для немагнітних середовищ.

Несуперечливість одержаних результатів тільки пояснює суть відповідних і рівнянь, і величин. Ці три різні способи обґрунтувань РМ у

рухомому середовищі доповнюють один одного. І з різних сторін пояснюють суть рівнянь і доданків, які входять до цих рівнянь.

А тому, нам здається, і слід було зупинитися на вище викладених різних методах обґрунтування РМ.

#### 4.1.4. Досліди Вільсона, Рентгена, Роуlanda, Ейхенвальда

Дослід Вільсона полягав в обертанні порожистого незарядженого діелектричного циліндра в зовнішньому магнітному полі, вектор індукції якого направлений уздовж осі циліндра. Принципова схема дослідів Вільсона (якщо замінити обертання діелектрика його поступальним рухом) показана на рис. 4.3.

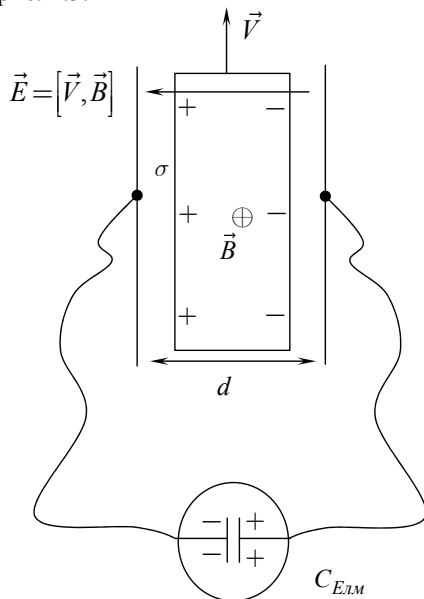


Рис. 4.3. Схема дослідів Вільсона

До внутрішньої і зовнішньої металевих обкладинок циліндра приєднувався через ковзні контакти квадрантний електрометр, власна електроємність якого  $C_{E_{LM}}$ . Він показував різницю потенціалів, що виникає при обертанні циліндра.

Унаслідок руху діелектрика в магнітному полі в СВ  $K'$ , яку слід зв'язати з діелектриком, виникає електричне поле напруженістю  $[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Якби обертався металевий порожистий циліндр, то це поле викликало б переміщення електронів провідності до однієї з обкладинок. Таке переміщення тривало б до тих пір, поки заряди на внутрішній і зовнішній

обкладинках не створили поле, що компенсувало б  $[\vec{V}, \vec{B}]$ . І тоді між обкладинками виникла б різниця потенціалів  $\Delta\varphi = VBd$ , де  $d$  – товщина стінки циліндра. Але наш циліндр є діелектриком, тому поле  $[\vec{V}, \vec{B}]$  викличе **в радіальному напрямку поляризацію діелектрика**.

Враховуючи геометрію досліду (рис. 4.3), величина вектора поляризації визначається

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\left(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]\right), \quad (4.71)$$

оскільки ефективне поле всередині діелектрика є сумою зовнішнього поля  $[\vec{V}, \vec{B}]$  та поля, що виникає в результаті поляризації (див. також формулу (4.9)).

Враховуючи геометрію досліду, величина вектора електричного зміщення  $\vec{D}$  дорівнює густині вільного заряду на внутрішній поверхні однієї з обкладинок

$$D = \varepsilon_0 E + P \equiv \sigma = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(E + VB) = \varepsilon\varepsilon_0 E + \varepsilon_0(\varepsilon - 1)VB.$$

Звідси для напруженості електричного поля одержуємо

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)VB. \quad (4.72)$$

До речі, останню формулу можна одержати також і з (4.32).

Тоді різниця потенціалів дорівнює

$$\Delta\varphi = -Ed = -\frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)VBd, \quad (4.73)$$

де  $d$  – товщина стінок порожистого циліндра,  $\sigma$  – поверхнева густина вільного заряду на металевих обкладинках діелектричного циліндра.

Оскільки ємність конденсатора  $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ , а величина заряду на одній з обкладинок  $Q = \sigma S$ , то з (4.73) знаходимо

$$\frac{Q}{C} = -\Delta\varphi + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)VBd. \quad (4.75)$$

Заряд на пластині електрометра, електроємність якого  $C_{E\text{ЛМ}}$ , також рівний  $Q$  ( $C_{E\text{ЛМ}} = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ ), але заряди на електрично зв'язаних обкладинках конденсаторів  $C$  та  $C_{E\text{ЛМ}}$  протилежні за знаком (див. рис. 4.3).

Тоді (4.75) набуває вигляду

$$\frac{C_{Елм} \cdot \Delta\varphi}{C} = -\Delta\varphi + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)VBd. \quad (4.76)$$

Із (4.76) одержуємо вираз для різниці потенціалів, яку буде показувати електрометр

$$\Delta\varphi = \frac{C}{C + C_{Елм}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)VBd. \quad (4.77)$$

Вимірювання різниці потенціалів у дослідах Вільсона показали, що формула (4.77) у проведених експериментах підтверджується тільки для **немагнітних діелектриків**.

*Досліди Роуlanda та Рентгена.* Дослід Роуlanda показав, що конвекційний струм вільних зарядів на рухомому провіднику еквівалентний за своєю магнітною дією звичайному струму провідності в нерухомому провіднику.

Схема досліду полягала в наступному. У 1876 р., як про це пише Л. І. Мандельштам, «...Роуланд узяв два позолочених скляних диски, між якими обертався обклеєною золотою фольгою ебонітовий диск. Обкладки на диску заряджалися, а обкладки на склі заземлювалися. Астатична магнітна стрілка була підвішена над верхньою скляною кришкою і, при обертанні ебонітового диску, спостерігалось відхилення цієї стрілки...» [36].

Дослід показав, що відхилення стрілки пропорційне величині заряду, нанесеного на золоту фольгу, і кутовій швидкості обертання диску. Тобто відхилення пропорційне  $\rho V$ . Обертання диска суттєвого значення не має при нерелятивістських лінійних швидкостях точок диска. Ідею досліду краще пояснювати на прикладі поступального руху зарядженої обкладинки конденсатора (рис. 4.4).

Згідно з формулами перетворення (1.17)

$$\vec{j}_{\parallel} = \Gamma(\vec{j}'_{\parallel} + \vec{V}\rho'), \quad \vec{j}_{\perp} = \vec{j}'_{\perp}, \quad \rho = \Gamma\left(\rho' + \frac{1}{c^2}j'V\right),$$

при  $V \ll c$  одержуємо

$$\vec{j} = \vec{j}' + \vec{V}\rho' \approx \vec{j}' + \vec{V}\rho, \quad (4.78)$$

$$\rho = \rho' + \frac{\vec{V}\vec{j}'}{c^2} \approx \rho' + \frac{\vec{V}\vec{j}}{c^2}. \quad (4.79)$$

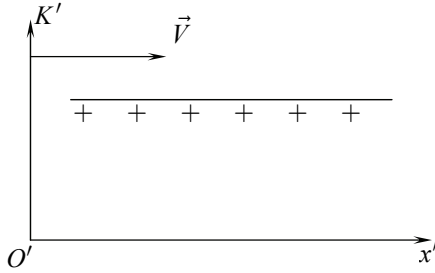


Рис. 4.4. Ідея досліду Роуlanda

Формула (4.78) показує, що коли в СВ  $K'$  маємо і струм провідності  $\vec{j}'$ , і густину заряду  $\rho'$ , то при русі такого зарядженого провідника зі струмом у лабораторній СВ  $K$ , крім струму провідності, з'являється конвекційний струм (**струм Роуlanda**)  $\vec{V}\rho' \approx \vec{V}\rho$ .

А формула (4.79) говорить про те, що переміщення незарядженого ( $\rho' = 0$ ) провідника зі струмом  $\vec{j}'$  призводить до виникнення в ППС з

точки зору ЛСВ об'ємної густини заряду  $\rho = \frac{\vec{V}\vec{j}'}{c^2} \approx \frac{\vec{V}\vec{j}}{c^2}$ .

Кілька років по тому (1888 р.) Рентген зробив інший дослід з поляризованим діелектриком. Між різнойменно зарядженими обкладками обертався диск із незарядженого ізолятора (рис. 4.5). Відхилення стрілок магнітометра показувало, що й у цьому випадку виникає струм (струм Рентгена). Рентген домагався високої чутливості пристрою. Однак він не зміг одержати необхідної точності. Кількісні результати були досягнуті Ейхенвальдом у 1904 р. [24].

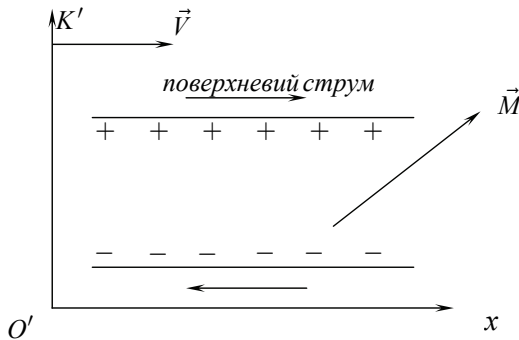


Рис. 4.5. Схема досліду Рентгена

Досліди Рентгена показали, що потік зв'язаних зарядів (струм поляризаційних зарядів), який виникає при русі поляризованого діелектрика, еквівалентний за своєю магнітною дією звичайному струму провідності в нерухомому провіднику й еквівалентний конвекційному струму вільних зарядів (струму Роуланда).

Ідею дослідів Рентгена пояснює рис. 4.5, у якому обертання поляризованого діелектрика представлено у вигляді його поступального руху.

Як відомо, густина зв'язаних зарядів дорівнює  $\rho_{3e} = -\text{div}\vec{P}$ , тому переміщення їх зі швидкістю  $\vec{V}$  зумовлює густину струму  $\vec{j}_{3e} = \vec{V}\rho_{3e}$ .

Виникнення струму Рентгена означає, що в рухомому поляризованому діелектрику з'являється намагнічування.

Іншими словами, у ЛСВ рухомий поляризований діелектрик характеризується вектором намагнічування  $\vec{M} = [\vec{P}, \vec{V}]$  – рухомий поляризований немагнітний діелектрик стає намагніченим.

Цей висновок впливає як з виразу

$$\vec{j}_{3e} = \vec{V}\rho_{3e} = -\vec{V}\text{div}\vec{P} = \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] = \text{rot}\vec{M}, \quad (4.80)$$

так і з рівняння Максвелла (4.68), а також із формул перетворення (4.7).

Якісно цей результат зрозумілий з наступних міркувань. Якщо рухається поляризована пластина (рис. 4.5), то ми маємо начебто два струми: один направлений у бік руху поляризованого діелектрика, який зумовлений переміщенням позитивних поляризаційних зарядів, і інший струм у протилежному напрямку, зумовлений рухом негативних поляризаційних зарядів. Ці струми утворюють замкнутий контур зі струмом, який характеризується магнітним моментом.

До речі, а от явище виникнення поляризації внаслідок руху намагніченого середовища (формула (1.83), а за умови  $V \ll c$  – (4.8))

$$\vec{P} = \vec{P}' + \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2}$$

**може бути пояснене тільки теорією відносності.**

Для ілюстрації (1.83) і (4.8) розглянемо рух відносно ЛСВ  $K$  намагніченого ( $\vec{M}' \neq 0, \vec{P}' = 0$ ) вздовж осі  $O'Y'$  бруска прямокутного перерізу (рис. 4.6).

**Приклад 4.8.** Знайти поляризацію рухомого намагніченого бруска (рис. 4.6) і напруженість електричного поля між точками  $A$  та  $B$ .

*Розв'язання:* Зв'яжемо систему відліку  $K'$  з намагніченим бруском. Тоді в СВ  $K$  брусок, згідно з (4.8), буде характеризуватись вектором поляризації [40, с. 322].

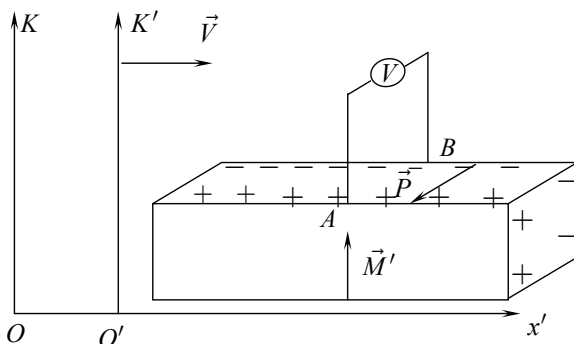


Рис. 4.6. Поляризація рівномірно рухомого намагніченого бруська

$$\vec{P} = \vec{P}' + \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2} = \frac{[\vec{V}, \vec{M}]}{c^2}.$$

Дивергенція вектора  $\vec{E}$ , яке з'являється внаслідок поляризації, через параметри задачі виражається

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{P} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \operatorname{div} [\vec{V}, \vec{M}] = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} (\vec{M} \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{V} \operatorname{rot} \vec{M}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{V} \operatorname{rot} \vec{M}. \end{aligned}$$

З іншого боку,  $\operatorname{rot} \vec{M} = \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , оскільки вихор вектора

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  дорівнює нулеві (струми провідності відсутні в нашій задачі). Тому

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\vec{V}}{\varepsilon_0 c^2 \mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Але  $\vec{V} \operatorname{rot} \vec{B}$  при постійній швидкості дорівнює  $-\operatorname{div} [\vec{V}, \vec{B}]$ .

Таким чином, напруженість електричного поля в кожній точці простору, у якій індукція магнітного поля має значення  $\vec{B}$ , дорівнює

$$\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}],$$



що, власне, впливає і з ФПКЕМП (див. (2.6) і коментарі до неї) [40, с. 327].

Електротехнічне пояснення цього явища на базі спрощеної форми принципу відносності наступне. Якщо біля верхньої горизонтальної поверхні бруска знаходиться нерухома ЗЧ, то на неї з боку рухомого намагніченого бруска діє така ж сила, яка виникає і в тому випадку, коли брусок нерухомий, а ЗЧ рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ . Але в цьому випадку сила дорівнює силі Лорентца  $q[\vec{V}, \vec{B}]$ . Значить, рухомий намагнічений брусок створює поле  $-[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Якщо ж залишатися в термінах полевих величин, то можна говорити, що це поле,  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$ , породжується рухомим магнітним полем. Хоча при такій інтерпретації в цій задачі й виникають деякі суперечності.

Дійсно, якщо ЗЧ нерухома, то чому внаслідок руху магніту виникає електричне поле? Не можна вважати, що при русі магніту разом з ним переміщуються і «магнітні силові лінії», які начебто, при електротехнічному поясненні, зумовлюють появу сили  $-q[\vec{V}, \vec{B}]$ . Індукція магнітного поля  $\vec{B}$ , створеного рухомим намагніченим бруском (магнітом), у точці знаходження ЗЧ незмінна в часі. Тобто вимірювання поблизу ЗЧ не можуть дати відповідь, рухається магніт чи ні. Таким чином, при описаному підході до інтерпретації явища уніполярної індукції причина виникнення поля  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  залишається незрозумілою.

Але тут суттєвим є те, що це електричне поле електростатичне за своєю природою. **Воно породжується поляризацією намагніченого бруска.**

Впевнимся, що поле  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  є потенційним.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}] = \\ &= -\left\{ (\vec{B} \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \nabla) \vec{B} + \vec{V} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{V} \right\} = (\vec{V} \nabla) \vec{B}. \end{aligned}$$

У нашій задачі  $(\vec{V} \nabla) \vec{B} = 0$ , тому що у випадку нескінченного бруска поле  $\vec{B}$  не залежить від координати  $x$ . І тому  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ .

Навіть і в тому випадку, коли рухається магніт кінцевих розмірів, формула  $\vec{E} = -[\vec{V}, \vec{B}]$  залишається вірною, але при цьому  $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$ .

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (\vec{V} \nabla) \vec{B}.$$

Дійсно, використовуючи вираз для повної похідної, яка для спостерігача, що рухається разом з магнітом, дорівнює нулеві,

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{B} = 0, \text{ маємо}$$

$$(\vec{V} \nabla) \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

А тому одержуємо закон ЕМІ

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (\vec{V} \nabla) \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

У дослідях Ейхенвальда достатньо точними кількісними вимірами показано, що і конвекційний струм Роланда, і струм зміщення  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , і струм Рентгена породжують магнітне поле, так само й за тими ж законами, що й струм провідності в нерухомому провіднику.

У сучасних посібниках з електродинаміки відсутній детальний аналіз дослідів Ейхенвальда. Описують їх досить поверхово, констатується лише кінцевий результат.

У методичних цілях, щоб показати винахідливість експериментатора, інтерпретацію дослідних даних, використання рівнянь Максвелла в рухомому середовищі, показати, що ж криється за констатацією кінцевого результату, розглянемо більш детально ідеї дослідів Ейхенвальда [24].

Загальний струм, який породжує магнітне поле, дорівнює (звичайно, крім струму  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ )

$$\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V} \rho, \quad (4.81)$$

де  $\rho$  – густина вільних зарядів,  $\vec{j}$  – густина струму провідності,  $\vec{P}$  – вектор поляризації,  $\vec{V}$  – швидкість руху речовини.

**Приклад 4.9.** Обґрунтувати вираз для повного струму (4.81).

*Розв'язання:* Конвекційний струм вільних і зв'язаних зарядів дорівнює

$$\vec{V} (\rho - \operatorname{div} \vec{P}).$$

Струм поляризації

$$\vec{P} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{div} \vec{P} + \operatorname{rot} [\vec{P}, \vec{V}].$$

Струм провідності –  $\vec{j}$ , струм зміщення –  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Тому повний струм визначається формулою (4.66)

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{сум}} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div} \vec{P}) + \dot{\vec{P}} = \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V} \rho. \end{aligned}$$

звідки й одержуємо (4.81).

Перша група дослідів О. О. Ейхенвальда належить до стаціонарних процесів. У цьому випадку густина струму, що породжує магнітне поле, дорівнює

$$\vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div} \vec{P}).$$

Виходячи з РМ  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{сум}}$ , де в цьому випадку  $\vec{j}_{\text{сум}} = \vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div} \vec{P})$ , ми приходимо до висновку, що одне й те ж магнітне поле може породжуватися як струмами провідності, так і рухомими зарядженими або поляризованими тілами (струмами Роланда або струмами Рентгена).

Дуже просте експериментальне підтвердження справедливості положення про те, що магнітне поле утворюється будь-якими рухомими зарядженими частинками (струмами), зробив О. О. Ейхенвальд.

Схему одного з дослідів О. О. Ейхенвальда зображено на рис. 4.7.

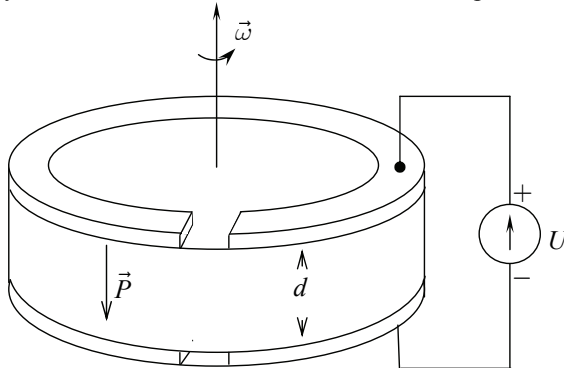


Рис. 4.7. Схема дослідів Ейхенвальда

До ебонітового диску (товщина якого  $d$  і який може обертатись навколо вертикальної вісі) прикладені дуже близько два металевих кіль-

ця. Ширина кілець  $b$ , кожне з них розрізане поперек. До кілець прикладена напруга  $U$ . Експериментальна установка дозволяє обертати тільки ебонітовий диск, тільки металеві кільця й обертати диск з кільцями одночасно.

Поверхневий заряд на металевих кільцях

$$\sigma = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{d}.$$

Зв'язаний (поляризаційний) поверхневий заряд на ебонітовому диску

$$\sigma' = -\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E = -\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \frac{U}{d}.$$

Якщо диск разом з кільцями обертати з кутовою швидкістю  $\omega$ , то конвекційний струм, зумовлений рухом зарядженого кільця (верхнього) і поверхневого заряду на ебонітовому диску, дорівнює

$$vb\sigma + vb\sigma' = vb\varepsilon_0 \frac{U}{d}. \quad (4.82)$$

Цей струм створює певне магнітне поле, для реєстрації якого поблизу дисків на тонкій нитці підвісили невелику магнітну стрілку, вісь якої паралельна площині дисків. Для спостереження за зміщенням стрілки до неї прикріпили невелике дзеркальце.

Стрілка розташовувалась усередині металевого кожуха, що захищав її від дії електричного поля й від потоків повітря при обертанні диску та кілець.

Досліди показали: при обертанні дисків магнітна стрілка відхиляється, що вказує на появу магнітного поля.

Як бачимо з формули (4.82), величина магнітного поля при одночасному обертанні й диску, й кілець не залежить від діелектричної проникності ебонітового диску.

Усі ці випадки О. О. Ейхенвальд перевіряв експериментально. Досліди показали, що магнітне поле виникає при русі будь-яких електричних зарядів незалежно від природи їх, у тому числі й поляризаційних.

Отже, магнітне поле виникає не тільки поблизу природних і штучних магнітів, а й біля провідників, по яким проходить електричний струм, причому магнітне поле постійних магнітів нічим не відрізняється від магнітного поля струму  $\vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div}\vec{P}) + \dot{\vec{P}}$ .

Крім того ці теоретичні міркування перевірялись наступним чином. При нерухомому диску й при нерухомих кільцях пропускається струм через обидва розрізаних кільця (рис. 4.8). З допомогою амперметра реєструють ту величину струму, при якій магнітна стрілка відхилиться на такий же кут, як і внаслідок обертання конденсатора. Експеримент

показав, що при цьому сила струму мала величину, яка з великою точністю збігається з  $bv\epsilon_0 \frac{U}{d}$ , тобто з величиною конвекційного струму.

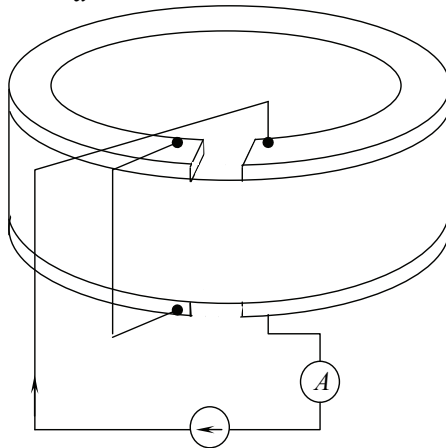


Рис. 4.8. Схема досліду Ейхенвальда з метою перевірки теоретичних розрахунків. Через кільця установки від батареї пропускався струм такої величини, щоб його поле викликало таке ж відхилення магнітної стрілки, як при конвекційному струмі

Однорідне земне магнітне поле на таку систему не діє, а в неоднорідному полі конвекційного струму на ближчу до нього стрілку діє сильніше, ніж на більш віддалену, тому не дивлячись на те, що поле конвекційного струму в десятки тисяч разів слабше від земного поля, воно може бути виявлене.

Якщо ж обертати диск між нерухомими металевими кільцями, то струм буде зумовлений переносом поверхневих зарядів на діелектрику конденсатора.

Таким чином, рух поляризованого діелектрика за своїми магнітними діями в цьому випадку еквівалентний струму

$$i = bv\sigma' = -bv\epsilon_0(\epsilon - 1)E = -bv\epsilon_0(\epsilon - 1)\frac{U}{d}. \quad (4.83)$$

Що і було підтверджено з великою точністю.

Цю серію дослідів з рухомим поляризованим диском можна пояснювати не тільки мовою струму (4.83), а й іншими міркуваннями.

Дійсно, густина поляризаційного струму дорівнює  $-\vec{V}div\vec{P}$ . А тому потік цього вектора через поперечний переріз 1234 дорівнює  $-\vec{V}P_n b = bv\sigma'$ , оскільки при однорідній поляризації  $P_n = -\sigma'$ .

Ми вже відзначали, що  $\vec{j}_{36} = \vec{V}\rho_{36} = -\vec{V}\text{div}\vec{P} = \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] =$ ,  
 $= \text{rot}\vec{M}$  тому такий же результат ми одержуємо, враховуючи тільки  
 $\text{rot}[\vec{P}, \vec{V}]$ . У схемі досліду Ейхенвальда вектор  $[\vec{P}, \vec{V}]$  направлений ра-  
 діально (рис. 4.9).

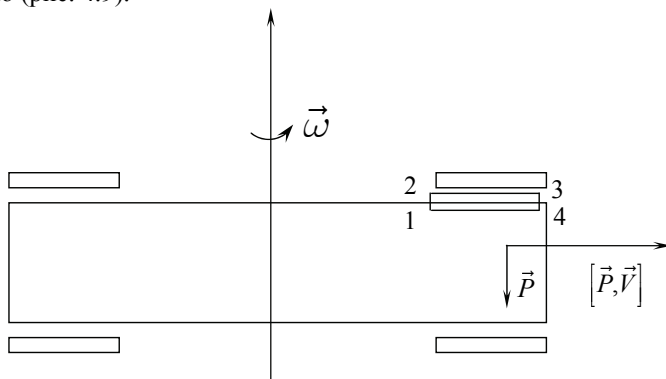


Рис. 4.9. До знаходження струму поляризації  
 при русі поляризованого діелектрика

Очевидно, що цей вектор всюди в ебоніту однаковий, а за межами діелектрика дорівнює нулеві. Застосування теореми Стокса до контуру 1234 дає силу струму, що проходить через площу прямокутника, обмеженого контуром 1234

$$\int_S \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] \cdot d\vec{S} = \oint_{1432} [\vec{P}, \vec{V}] \cdot d\vec{l} = vP_n(14) = vP_n b = v\sigma' \cdot b.$$

Тобто ми одержали той же вираз для струму поляризації.

Звернімо увагу на ще один спосіб подання й інтерпретації результатів цієї серії дослідів Ейхенвальда [24].

Запишемо рівняння Максвелла (4.67) у рухомому немагнітному середовищі

$$\begin{aligned} \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} &= \vec{j}_{\text{сум}} = \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V}\rho \right) = \\ &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V}\rho \end{aligned}$$

у такому вигляді:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - [\vec{P}, \vec{V}] \right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{V} \rho.$$

У такому вигляді рівняння Максвелла (4.67) у відсутності вільних зарядів ( $\rho = 0$ ) відрізняється від відповідного РМ для нерухомих тіл тільки тим, що в ньому замість вектора  $\vec{H}$  маємо вираз  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - [\vec{P}, \vec{V}]$ .

Тобто рухомий поляризований діелектрик спостерігається в лабораторній системі відліку як такий, що характеризується вектором намагнічування  $\vec{M} = [\vec{P}, \vec{V}]$ . До речі, про цей наслідок наголошувалося в кінці пункту 4.1.3.

Таким чином, магнітне поле, яке виникає в дослідах Ейхенвальда, за бажанням можна вважати породженим або поверхневим конвекційним струмом, або радіальним намагнічуванням диску, зумовленим «рухом» вектора поляризації  $\vec{P}$  зі швидкістю  $\vec{V}$ ,  $\vec{M} = [\vec{P}, \vec{V}]$ .

У дослідах Ейхенвальда було доведено також існування струму поляризації  $\dot{\vec{P}}$  й виміряна його величина. На рис. 4.9а зображена схема відповідної установки.

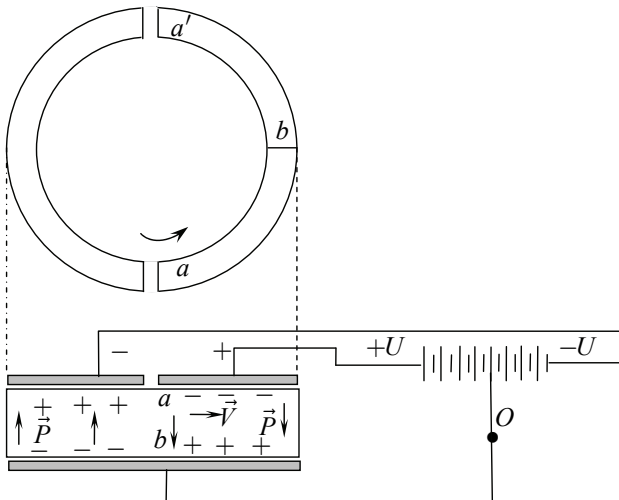


Рис. 4.9а. Схема установки для вимірювання магнітного поля, яке породжується струмами зміщення

У ній ебонітовий диск крутиться між двома нерухомими металевими кільцями. Ширина кілець  $b$ . Верхнє кільце (обкладинка) розрізане на два півкільця. Нижнє кільце заземлене, а на верхні півкільця подаються рівні за величиною, але протилежні за знаком потенціали  $+U$  та  $-U$ . Магнітна стрілка розміщувалася над диском поблизу осі обертання. У цій установці буде протікати струм Рентгена  $-\vec{V} \cdot \text{div} \vec{P}$ , зумовлений рухом індукованих на ебонітовому диску поверхневих поляризаційних зарядів.

Струм Рентгена в лівій і правій частинах диска має однакову величину, але протилежного напрямку. Тому дія цих струмів на магнітну стрілку компенсується.

У цій установці буде спостерігатися і струм поляризації в напрямку, паралельному осі обертання. Біля точки  $a$  струм поляризації направлений згори вниз, як це показано на рис. 4.9а. А біля точки  $a'$ , навпаки, струм поляризації направлений знизу вгору.

Знайдемо силу струму, який зумовлений зміною в часі вектора поляризації і протікає від  $a$  до  $b$ .

У рівнянні для повного струму

$$\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{P}, \vec{V}] + \vec{V} \rho = \vec{j} + \vec{V}(\rho - \text{div} \vec{P}) + \dot{\vec{P}},$$

яке випливає з (4.81), не дорівнює нулеві тільки доданок  $\dot{\vec{P}}$ .

Тому при інтегруванні по горизонтально розташованому прямокутнику, який охоплює цей струм, одержуємо

$$i = b \int j \cdot dx = b \int \vec{P} dx = bV \int \frac{\partial P}{\partial x} dx = 2bVP = 2bV \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \frac{U}{d}.$$

При цьому вісь  $OX$  вибрана в напрямку  $\vec{V}$ , вісь  $OY$  – у напрямку  $\vec{P}$ .

Аналогічний результат одержимо й тоді, коли використовуємо (4.81).

Дійсно, вектор  $[\vec{P}, \vec{V}]$ , направлений радіально, змінює свій знак

при переході через місце зі струмом. І при інтегруванні по поверхні, охопленій указаним вище прямокутником, маємо знову таки ж  $2VbP$ .

#### 4.1.5. Дослід Трoutона-Нобля в системі парадоксів теорії відносності

У дидактиці фізики існує підхід, згідно з яким фундаментальні фізичні принципи й фізичні теорії є наслідком експерименту або сукупності експериментів. Типовими прикладами таких методичних міфів є зокрема «відкриття» закону електромагнітної індукції та створення спеціальної теорії відносності.



У багатьох посібниках з теорії відносності власне викладу самої теорії відносності передують так звані «експериментальні основи СТВ», де розглядаються досліди, які начебто були предтечею СТВ і без знання яких А. Ейнштейн не зміг би створити СТВ. Особливо часто в існуючих підручниках, як для вищої школи, так і для середніх навчальних закладів, при вивченні основ СТВ наголошується на визначній ролі досліду Майкельсона в створенні Ейнштейном теорії відносності. Фактично ситуація виявляється зовсім іншою. Ось слова самого А. Ейнштейна:

«...в моих исследованиях опыт Майкельсона не играл никакой роли или, по крайней мере, не играл решающей роли» [46, с. 298].

У той же час ряд класичних дослідів, фізично прозорих і більш очевидних, ніж дослід Майкельсона, не розглядається в більшості посібників з теорії відносності. Це стосується, насамперед, аналізу досліду Трутона-Нобля.

**Ідея досліду Трутона-Нобля.** Трутон і Нобль спостерігали упродовж достатньо великого проміжку часу за поворотом зарядженого конденсатора, який підвішувався на пружній нитці.

Щоб пояснити, чому слід чекати повороту зарядженого конденсатора при русі його разом з Землею, розглянемо модель конденсатора Трутона-Нобля. Дві заряджені частинки знаходяться на кінцях твердого стержня (див. рис. 4.10, рис. 4.11, рис. 4.15).

Тоді при русі такої системи – «стержень – ЗЧ» – навіть і в нерелятивістському наближенні (з використанням закону Біо-Савара в класичній формі) на систему буде діяти момент сил [35]

$$M_z = \frac{q_1 \cdot q_2 B^2 \sin 2\theta}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.84)$$

де  $B = \frac{V}{c}$ ,  $V$  – швидкість руху системи «стержень – ЗЧ»,  $c$  – швид-

кість світла у вакуумі,  $\theta$  – кут між вектором  $\vec{V}$  і стержнем (див. рис. 4.10, рис. 4.15).

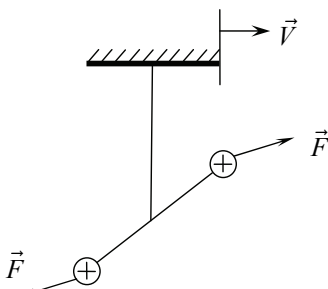


Рис. 4.10. Ідея досліду Трутона-Нобля

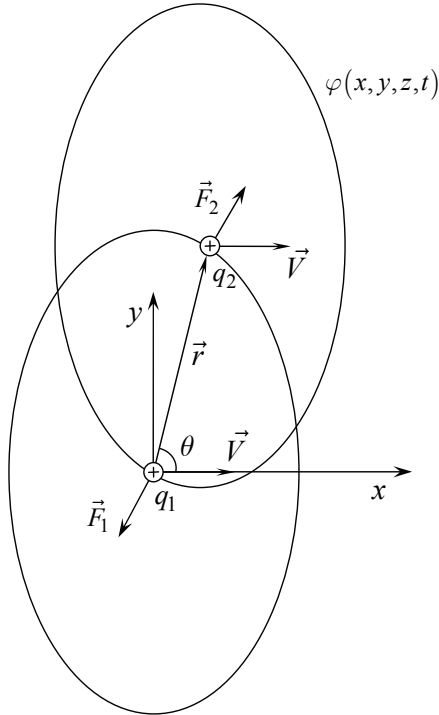


Рис. 4.11. Сили взаємодії між двома ЗЧ, які знаходяться з допомогою конвекційного потенціалу Хевісайда

Знаходження величини обертового моменту, що діє на заряджені частинки в моделі конденсатора Трутона-Нобля. Дійсно, знайдемо силу, з якою ЗЧ діє на іншу ЗЧ, що рухається разом з першою.

Ця сила згідно з [24; 37] дорівнює

$$\vec{F} = q_2 \left( \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}] \right),$$

де  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  – напруженість електричного й індукція магнітного полів, які створені рівномірно РЗЧ, заряд якої  $q_1$ .

Після підстановки значень  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  (див. (3.11) та (3.12)) для так званої «конвекційної сили» одержуємо вираз

$$\vec{F} = -q_2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \cdot \nabla \varphi = -q_2 \nabla \varphi_H, \quad (4.85)$$

де  $\varphi_H$  – конвекційний потенціал Хевісайда

$$\varphi_H(x, y, z, t) = \frac{q_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}. \quad (4.86)$$

Потенціал Хевісайда має постійне значення,  $\varphi_H = const$ , на поверхні сплющеного еліпсоїду обертання

$$(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = const.$$

Ці хевісайдовські еліпсоїди можна уявити, якщо сімейство концентричних сфер стиснути в напрямку руху (тобто в напрямку осі  $OX$ ) у

$$\text{відношенні } \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Із результатів (4.85) і (4.86) випливають такі наслідки.

Оскільки градієнт будь-якого скалярного поля перпендикулярний до екіпотенціальних поверхонь цього поля, то сила, що діє на рухому ЗЧ з боку іншої ЗЧ, згідно з (4.85), завжди перпендикулярна до поверхні еліпсоїду Хевісайда першої ЗЧ в точці знаходження другої ЗЧ.

Для наочності аналізу розглянемо випадок, коли в момент  $t=0$  початки координат СВ  $K$  і СВ  $K'$  співпадають (тобто коли ЗЧ  $q_1$  знаходиться в точці  $O$ ).

Таким чином, якщо тільки лінія, яка з'єднує дві ЗЧ не паралельна або не перпендикулярна вектору швидкості руху  $\vec{V}$ , то сили взаємодії двох ЗЧ не направлені по радіус-вектору (див. рис. 4.10, 4.11).

По-друге, якщо такі дві ЗЧ з'єднані твердим стержнем, то на систему «ЗЧ – стержень» буде діяти момент сил, який при однойменних зарядах на кінцях стержня намагається повернути стержень у напрямку руху

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = -q_1 q_2 [\vec{r}, \nabla \varphi_H]. \quad (4.87)$$

А враховуючи точні значення величин, що описують електромагнітне поле рухомої ЗЧ, для обертового моменту, що діє на систему «стержень – ЗЧ», яка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ , одержуємо [24; 37]

$$M_z = (-y \cdot \nabla_z \varphi_H + x \cdot \nabla_y \varphi_H) \cdot q_1 \cdot q_2,$$

$$\begin{aligned}
 M_z &= - \frac{q_1 q_2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot xy \frac{V^2}{c^2}}{4\pi\epsilon_0 \left\{x^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= - \frac{q_1 q_2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot \frac{V^2}{2c^2} \sin 2\theta}{4\pi\epsilon_0 r \cdot \left\{1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right\}^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

Цей обертовий момент намагалися свого часу зареєструвати Троутон і Нобль, спостерігаючи за поведінкою підвішеного на пружній нитці зарядженого конденсатора.

Якби експеримент показав наявність обертового моменту, це **було б підтвердженням існування переважної системи відліку**.

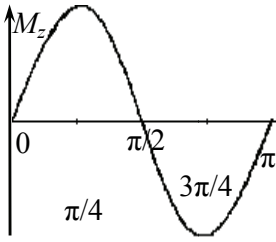
Тому, якби існувала переважна система відліку (і малоймовірно, що вона знаходилася б у спокої відносно Землі), то поступальний рух Землі разом з підвішеним на нитці зарядженим конденсатором (стержень – ЗЧ) повинен був би приводити до виникнення обертового моменту. Конденсатор мав би повернутися так, щоб його пластини зорієнтувалися паралельно до швидкості руху Землі  $\vec{V}$ .

*Характерні особливості обертового моменту  $M(\theta, V)$ .* Нами створена комп'ютерна програма для моделювання величин обертового моменту в залежності від кута  $\theta$  та швидкості  $V$  [37].

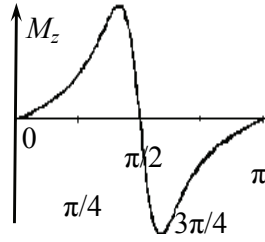
Моделювання залежності значення обертового моменту від однієї якоїсь змінної, що виникає в моделі «конденсатора» в досліді Троутона-Нобля, було зроблено в середовищі програмування DELPHI.

А малювання виконувалося за допомогою WinAPI функцій. Перевага такого програмування полягає в тому, що програма створюється для операційної системи Windows. У програмі передбачено вивід графіків для обертового моменту в залежності від різних величин, від яких він залежить.

Так можна побачити залежність обертового моменту від кута  $\theta$  (рис. 4.12). На рис. 4.13 зображена залежність  $M_z(V)$ .



a)  $V = 10^8 \text{ м/с}$



б)  $V = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Рис. 4.12. Залежність моменту сил  $M_z$  від кута  $\theta$  при різних значеннях швидкості

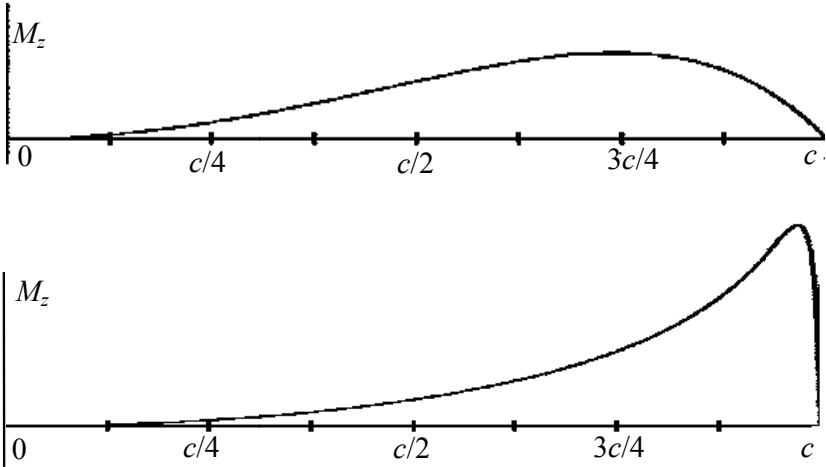


Рис. 4.13. Залежність моменту сил  $M_z$  від швидкості  $V$  при різних значеннях кута  $\theta$

Відзначимо характерні особливості  $M_z(\theta, V)$ :

а) навіть при швидкостях руху  $V \approx 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$   $M_z(\theta)$  носить практично гармонічну залежність, а максимальне значення  $(M_z)_{\text{max}}$  спостерігається при  $\theta \approx 45^\circ$ ;

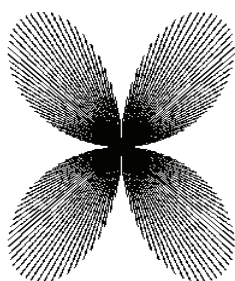
б) при  $V > 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  гармонічна залежність зникає, а  $(M_z)_{\text{max}}$  спостерігається при кутах  $\theta > 45^\circ$ ;

в) при швидкості руху  $V \approx c$  величина обертового моменту набуває максимального значення  $(M_z)_{\max}$  при  $\theta \rightarrow 90^\circ$ ;

г) при різних значеннях  $\theta$  залежність  $M_z(V)$  при  $V < \frac{c}{2}$  носить плавний характер;

д) але максимальне значення  $M_z$  при довільних  $\theta$  спостерігається при швидкості руху  $V \approx c$ .

Зазначені вище якісні характеристики  $M_z(\theta, V)$  можна також зобразити в полярній системі координат (рис. 4.14).



а)  $V = 0,5c$



б)  $V = 0,8c$

Рис. 4.14. Залежність  $M_z(V, \theta)$  в полярній системі координат

Полярна вісь на малюнку зображена горизонтально, й проходить вона через середину рис. 4.14а та рис. 4.14б. Відповідне значення обертового моменту відповідає довжині променя, а кут, на який повернутий промінь від полярної вісі проти руху годинникової стрілки, відповідає куту, при якому знаходять значення обертового моменту.

Що ж ми спостерігаємо? Коли швидкість зарядженої частинки набагато менша за швидкість світла у вакуумі, тобто  $V \ll c$ , то обертовий момент має досить маленьке значення  $\sim \frac{V^2}{c^2}$ . Потім, коли швидкість зростає і має значення  $V < c$ , ми бачимо ріст і значний ріст величини обертового моменту.

А коли швидкість  $V \approx c$ , то видно, що значно змінюється кут, при якому обертовий момент має максимальне значення.

Одержання тривимірних моделей електричного поля рухомої зарядженої частинки (див. **Розділ 3**) програмувалося в «Borland C для Windows» із використанням стандартних функцій бібліотеки OpenGL.

Також ця бібліотека використовувалась при одержанні тривимірного графіка для залежності обертового моменту і від кута  $\theta$ , і від швидкості руху «конденсатора» Троутона-Нобля (рис. 4.15).

На нашу думку, ці програми добре ілюструють суть даних явищ і доповнюють вищенаведені аналітичні викладки.

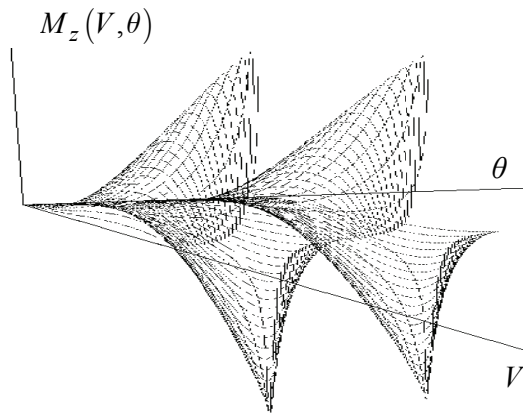


Рис. 4.15. Тривимірний графік залежності обертового моменту від кута  $\theta$  та від швидкості руху  $V$

Корисно також одержати вираз для моменту сил  $M_z$  на основі СТВ, який повинен співпадати з (4.88), **оскільки електродинаміка є релятивістською теорією.**

**Приклад 4.10.** На кінцях стержня, власна довжина якого  $r'$ , знаходяться заряджені частинки  $q_1$  та  $q_2$ . Стержень орієнтований під кутом  $\theta$  відносно осі  $O'X'$  СВ  $K'$  (рис. 4.16). Знайти момент сил, який діє на стержень у ЛСВ.

*Розв'язання:* Сили, що діють на ЗЧ у ВСВ, дорівнюють

$$F'_x = \mp F' \cdot \cos \theta', \quad F'_y = \mp F' \cdot \sin \theta',$$

« $\leftarrow$ » відноситься до зарядженої частинки  $q_1$ , « $\rightarrow$ » відноситься до зарядже-

ної частинки  $q_2$ , а  $F' = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$ .

Якщо стержень із зарядами  $q_1$  і  $q_2$  на його кінцях рухається зі швидкістю  $V$  вздовж вісі  $OX$ , то сили, що діють на заряди в СВ  $K$ , вже не будуть направлені по лінії, яка їх з'єднує.

Виникає момент сил, який намагається повернути стержень перпендикулярно до  $\vec{V}$  (якщо  $q_1$  і  $q_2$  різнойменні) або паралельно  $\vec{V}$ , якщо заряди однойменні.

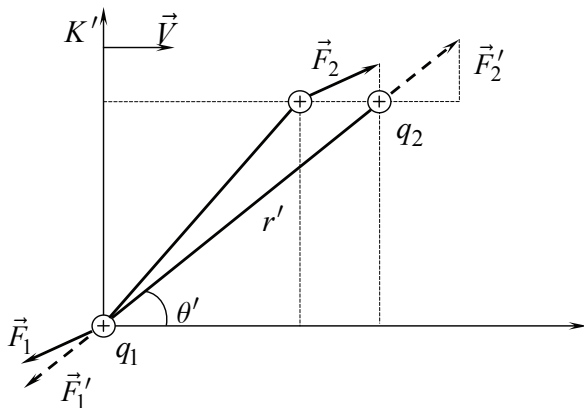


Рис. 4.16. До обчислення моменту сил, що діють на систему «стержень – заряджені частинки»

Цей момент сил у нашій моделі конденсатора виникає внаслідок лорентцевого скорочення повздовжньої проекції  $r'$  та зменшення поперечних складових сил, що діють на заряджену частинку.

Дійсно, у СВ  $K$  (очевидно, що  $l'_x = r' \cdot \cos \theta'$ ,  $l'_y = r' \cdot \sin \theta'$ )

$$l_x = l'_x \cdot \sqrt{1 - B^2} = r' \cdot \cos \theta' \cdot \sqrt{1 - B^2}, \quad l_y = l'_y = r' \cdot \sin \theta',$$

а формули перетворення сил дають

$$F_x = F'_x = \mp F' \cos \theta',$$

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - B^2} = \pm F' \sin \theta \sqrt{1 - B^2}.$$

Тоді момент сил у СВ  $K$  дорівнює

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = [(l_x \cdot \vec{i} + l_y \cdot \vec{j}) \cdot (F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j})] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_x & l_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} =$$



$$= \vec{k} \cdot (-l_y \cdot F_x + l_x \cdot F_y),$$

а для проекції  $M_z$  маємо

$$\begin{aligned} M_z &= l_x \cdot F_y - l_y \cdot F_x = -(r' \cdot \sin \theta' \cdot F' \cdot \cos \theta') + \\ &+ r' \cdot \cos \theta' \cdot \sqrt{1-B^2} \cdot F' \cdot \sqrt{1-B^2} \cdot \sin \theta' = \\ &= r' \cdot F' \cdot \sin \theta' \cdot \cos \theta' \cdot (-1 + (1-B^2)) = \\ &= -r' \cdot F' \cdot \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin \theta' \cdot \cos \theta'. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Неважко впевнитися, що (4.89) співпадає з (4.88). Дійсно, величини  $r'$ ,  $\cos \theta'$ ,  $\sin \theta'$  виражаються через параметри задачі в СВ  $K$

$$\sin \theta' = \frac{l'_y}{r'} = \frac{l_y}{r'} = \frac{r \cdot \sin \theta}{r \cdot \Gamma (1-B^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{\sin \theta' \sqrt{1-B^2}}{(1-B^2 \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

оскільки довжина стержня в СВ  $K'$ , виражена через довжину та його орієнтацію в СВ  $K$ , дорівнює

$$\begin{aligned} r' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} = \Gamma \cdot \left\{ (x-Vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1-B^2) \right\}^{1/2} = \\ &= r \cdot \Gamma \cdot (1-B^2 \cdot \sin^2 \theta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Або по-іншому:

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{l_x'^2 + l_y'^2} = \sqrt{\frac{l_x^2}{1-B^2} + l_y^2} = \Gamma \cdot \sqrt{l_x^2 + l_y^2 \cdot (1-B^2)} = \\ &= \Gamma \cdot \sqrt{r^2 \cdot \cos^2 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot (1-B^2)} = \\ &= r \cdot \Gamma \cdot \sqrt{1-B^2 \cdot \sin^2 \theta}, \\ \cos \theta' &= \frac{l'_x}{r'} = \frac{l_x / \sqrt{1-B^2}}{r \cdot \Gamma \cdot (1-B^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{\cos \theta}{(1-B^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Тому одержуємо

$$\begin{aligned}
M_z &= -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r'} \cdot \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin\theta' \cdot \cos\theta' = \\
&= -\frac{B^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \sqrt{1-B^2} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 (1-B^2 \cdot \sin^2\theta) \cdot r \cdot \Gamma \cdot (1-B^2 \cdot \sin^2\theta)^{1/2}} = \\
&= -\frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{V^2}{c^2} \cdot (1-B^2) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r \cdot (1-B^2 \cdot \sin^2\theta)^{3/2}} = \\
&= -\frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{V^2}{2 \cdot c^2} \cdot (1-B^2) \cdot \sin 2\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r \cdot (1-B^2 \cdot \sin^2\theta)^{3/2}},
\end{aligned}$$

що збігається з (4.88).

Виходячи з попереднього аналізу, слід чекати, що, наприклад, і при русі металеві кулі, рівномірно заряджені по поверхні, її заряди повинні скупчуватись на передньому й задньому (по відношенню до напрямку руху) кінцях кулі. Такий перерозподіл зарядів по кулі можна в принципі зареєструвати за відповідною зміною електричного поля навколо кулі. Тобто знову можна було б визначити швидкість Землі відносно переважної системи відліку.

Але скупченню зарядів на полюсах кулі запобігає явище лорентцевого скорочення кулі в напрямку руху. З точки зору СВ  $K$ , куля має вигляд сплющеного еліпсоїду обертання. Тоді накопичення зарядів у місцях з найбільшою кривизною приводить до компенсації ефекту скупчення зарядів на полюсах кулі.

Численні спостереження за поведінкою конденсатора не виявили існування обертового моменту. Таким чином, цей експеримент показав, що:

- а) переважна система відліку відсутня;
- б) підтверджується принцип відносності і в електродинаміці.

*Пояснення негативного результату досліджу Троутона-Нобля.* Але залишається пояснити, чому ж не спостерігається поворот конденсатора в СВ  $K$ , незважаючи на те, що електродинаміка, як релятивістська теорія, передбачає появу обертового моменту в ЛСВ.

Якісне пояснення таке. Оскільки в СВ  $K'$  електромагнітні й механічні сили урівноважуються, а при переході до СВ  $K$  вони перетво-

рюються згідно з одними й тими ж формулами перетворення, то і в СВ  $K$  вони будуть зрівноважені.

**Момент електромагнітних сил у СВ  $K$  буде компенсуватися рівним, але протилежно направленим йому механічним моментом, що створюється пружними напругами в стержні при його поступальному русі.**

**Якраз цю обставину, що і механічні сили, які розтягують або стискають стержень і рухаються відносно СВ  $K$ , у цій СВ характеризуються моментом сил, класична фізика не могла пояснити.**

Часто цей незвичний результат залишався поза увагою при вивченні СТВ. Без урахування цього ефекту неможливо спростувати й деякі інші парадокси СТВ (наприклад, парадокс важеля).

У СВ  $K$  сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  починають діяти неодноразомно, а через проміжок часу:

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{V}{c^2} \cdot \frac{r'}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (4.91)$$

Упродовж  $\Delta t$  на стержень діє тільки сила  $\vec{F}_1$ . Тому пружна сила, що виникає в нижньому кінці стержня, за цей час надає стержню імпульс, компонента якого дорівнює

$$p_y = F' \sqrt{1 - B^2} \cdot \sin \theta' \cdot \Delta t = \frac{V}{c^2} r' F' \sin \theta' \cdot \cos \theta'. \quad (4.92)$$

Якщо  $\vec{g}$  – густина імпульсу в стержні, то момент імпульсу

$$\vec{L} = \int [\vec{r}, \vec{g}] \cdot dV,$$

а зміна в часі моменту імпульсу дорівнює

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{g} \right] \cdot dV = [\vec{V}, \vec{p}],$$

оскільки при поступальному русі стержня кожний елемент його переміщується за  $dt$  на  $\vec{V} \cdot dt$ , а імпульс, що міститься в кожному елементарному об'ємі  $dV$ , не змінюється.

Тобто

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} &= V p_z \vec{j} + V p_y \vec{k}, \\ M_z &= V p_y, \quad p_z = 0. \end{aligned}$$

Тому

$$M_z = F' r' \frac{V^2}{c^2} \sin \theta' \cdot \cos \theta'. \quad (4.93)$$

Ця величина співпадає з величиною моменту електромагнітних сил (4.88).

Таким чином, момент сил (4.88) і (4.89) компенсується моментом механічних сил (4.93), який виникає внаслідок появи компоненти імпульсу  $p_y$  через наявність потоку енергії в стержні.

## 4.2. Явище електромагнітної індукції

### 4.2.1. Історія відкриття закону електромагнітної індукції і огляд традиційних методик вивчення явища та закону електромагнітної індукції

Явище електромагнітної індукції відіграє визначну роль у формулюванні й вивченні найбільш загальних законів електромагнетизму.

Не можна також перебільшити значення цього явища й при використанні його в електротехніці та радіоелектроніці.

Як правило, при вивченні цього явища після опису його та дослідної демонстрації з самого початку формулюється закон ЕМІ [38, с. 226], [3, с. 316], [27, с. 75], [96, с. 106]:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.94)$$

Причому наголошується, що він є експериментальним законом.

Але слід сказати, що це твердження, якщо його розуміти буквально, не відповідає дійсності.

Дійсно, (4.94) не може бути експериментальним законом, оскільки не існує приладів (принцип роботи яких не оснований на (4.94)), які могли б вимірювати магнітний потік  $\Phi$  або зміну магнітного потоку  $d\Phi$ .

Що ж стверджують історики фізики та як подається еволюція формулювання закону (4.94)?

У навчально-методичній літературі, як правило, взагалі не обговорюється або майже не обговорюється питання, хто і як сформулював (4.94). У відомому посібнику [3, с. 316] стверджується, що закон ЕМІ у формі (4.94) вперше записав Нейман у 1845 році.

Уперше математичну теорію електромагнітної індукції почав розробляти Ф. Нейман у роботах, що датуються 1845–1847 рр.

Ось як відтворюються думки Неймана в книзі П. С. Кудрявцева [58].

При визначенні величини сили індукційного струму Нейман використовував п'ять гіпотез [58, с. 501–502].

Але дві основні гіпотези такі. Згідно з першою, електрорушійна сила індукції  $d\varphi$ , що виникає в елементі лінійного провідника  $dl$  в ре-

зультаті його руху відносно контуру з постійним струмом  $i$  або магніту, пропорційна швидкості цього руху  $\vec{v}$ . Ця гіпотеза виходить з експериментальних даних, отриманих Фарадеєм та іншими. Друга гіпотеза полягає в тому, що електрорушійна сила індукції в провіднику пропорційна проєкції на напрям його руху сили  $F_v dl$ .  $F$  – сила на одиницю довжини провідника, яка діє на нього з боку контуру зі струмом або магніту, коли по ньому протікає індукційний струм, рівний одиниці. Ця гіпотеза виникла в Неймана під впливом закону Ленца, який встановлює зв'язок між електромагнітною індукцією й силами, що діють між струмами або струмом і магнітом. Таким чином, Нейман вважає, що

$$d\varphi = -k v F_v dl,$$

де  $k$  – постійний коефіцієнт, який визначається вибором одиниць.

Ураховуючи вираз сили  $F$  (використовуючи закон Ампера або Біо-Савара), можна отримати, що кількість електрики  $dq$ , що протекла через поперечний переріз провідника за час  $dt$  його нескінченно малого переміщення (Нейман називає цю величину диференціальним струмом), дорівнює

$$dq = -\frac{a}{R} d\Phi, \quad (4.95)$$

де  $a$  – константа;  $R$  – опір провідника;  $\Phi$  – функція, що залежить від конфігурації і взаємного розташування провідника й контуру зі струмом або провідника і магніту, а також від величини струму в контурі або магнітної маси.

Якщо тепер визначити «інтегральний струм», тобто кількість електрики, що протікає в провіднику за кінцевий час при кінцевому переміщенні провідника, то він визначається різницею значень  $\Phi_2$  і  $\Phi_1$ , а отже, залежить тільки від його кінцевого й початкового положення.

Тому Нейман назвав функцію  $\Phi$  потенційною функцією магніту і провідника або провідника і контуру зі струмом.

Для випадку двох лінійних контурів  $L_1$  і  $L_2$  ( $L_1$  – контур, у якому індукується електрорушійна сила) Нейман показав, що (у сучасних позначеннях)

$$\Phi = a I_2 \oint \oint \frac{(d\vec{l}_1 d\vec{l}_2)}{r},$$

де  $I_2$  – сила струму в другому контурі.

Тоді для цього випадку (4.95) набуває вигляду

$$dq = \frac{a I_2}{R} d \oint \oint \frac{(d\vec{l}_1 d\vec{l}_2)}{r}.$$

До формули  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$  можна прийти також за допомогою закону

збереження енергії, як це вперше зробив *Гельмгольц* (1821–1894).

Розглянемо, згідно з Гельмгольцем, замкнений виток дроту, у який включений гальванічний елемент з електрорушійною силою  $\varepsilon$ . Виток рухається в постійному магнітному полі (взагалі кажучи, неоднорідному). За час  $dt$  амперові сили виконують над витком роботу  $I \cdot d\Phi$ . Крім того у витку виділяється джоулеве тепло  $RI^2 dt$ . Сума цих величин повинна дорівнювати роботі гальванічного елемента  $\varepsilon \cdot I dt$ , тобто

$$Id\Phi + RI^2 dt = \varepsilon I dt. \quad (4.96)$$

Звідси:

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (4.97)$$

Таким чином, у витку, що рухається, струм визначається не тільки електрорушійною силою гальванічного елемента. До неї приєднується

доданок:  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Цей доданок і є електрорушійною силою індукції.

Недоліком цього способу обґрунтування закону ЕМІ в інтегральній формі є необхідність обґрунтування виразу для роботи сил Ампера  $dA = I \cdot d\Phi$ . Зазвичай цей вираз виводиться при умові  $I = \text{const}$ , незважаючи на те, що при русі витка в магнітному полі  $I \neq \text{const}$  внаслідок виникнення ЕРС індукції в цьому контурі.

Слід зауважити, що рівнянню збереження енергії (4.96) можна також задовольнити, припустивши, що  $I = 0$ . Яке з двох рішень вибрати:  $I = 0$  або рішення (4.97) – на це закон збереження енергії не дає ніяких вказівок. Отже, без залучення додаткових міркувань він не дозволяє передбачити явище електромагнітної індукції. Потрібно якось виключити рішення  $I = 0$ . З цією метою, як це зробив Гельмгольц, у виток і включений гальванічний елемент з електрорушійною силою  $\varepsilon$ . Та обставина,

що додаткова електрорушійна сила  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , котра з'являється при русі

провідника, не залежить від  $\varepsilon$ , робить правдоподібним висновок, що й за відсутності гальванічного елемента у витку, який рухається, повинна виникнути така ж електрорушійна сила. Можна обійтися й без введення гальванічного елемента, якщо припустити, що при русі провідника повинен виникати індукційний струм. Тоді закон збереження енергії дозволяє визначити силу цього струму, а отже, й електрорушійну силу ін-

дукції. У цьому істинне значення і зміст міркування Гельмгольца [65, с. 266–267].

Очевидно, що Фарадей в принципі не міг закону ЕМІ надати форми (4.94).

Але в деяких книгах, присвячених історії розвитку фізичних ідей (див., наприклад, [53]), проводиться думка, що Фарадей майже сформулював закон ЕМІ у формі (4.94). І наводяться такі слова Фарадея:

«118. Всі ці результати доводять, що здатність індукувати струми виявляється по колу навколо магнітної рівнодіючої або силової осі так, як розташований по колу магнетизм виникає навколо електричного струму і ним виявляється» [53, с. 240].

Ці слова Фарадея коментуються П. С. Кудрявцевим таким чином: «На математичній мові це означає, що «здатність індукувати струми», або індукційна ЕРС  $\varepsilon$  виражається інтегралом по контуру, що охоплює магнітний потік  $\Phi$ . Відповідно до результатів, одержаних згодом Ленцем і Нейманом, вона може бути виражена рівнянням

$$\varepsilon = \oint E_l dl = -k \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{» [53, с. 241].}$$

П. С. Кудрявцев [53, с. 241] з точки зору сучасних поглядів «вгадує-вбачає» у вище наведених словах Фарадея закон ЕМІ у формі (4.94).

Фактично М. Фарадей і не міг сформулювати закон ЕМІ в такій формі в принципі, оскільки в часи Фарадея і поняття «магнітний потік» та «електрорушійна сила» не мали чітких означень.

Більше того, у [53, с. 241] ми маємо підтвердження, що закон ЕМІ у формі (4.94) відповідає результатам, «одержаним згодом Ленцем і Нейманом».

Коротко окреслимо хід думок Д. К. Максвелла, наскільки це можливо згідно з літературними джерелами, щодо формулювання закону ЕМІ.

Відомо, що точно й адекватно відновити хід думок тієї чи іншої видатної людини минулого надзвичайно важко. Це пов'язано з тим, що до кінця, з урахуванням всіх обставин, практично неможливо зануритись у світ наукових ідей, уявлень, стилів мислення фізиків 30–60 років 19 століття.

«Згідно з Фарадеем, провідник, поміщений в магнітне поле, знаходиться в стані, яке не виявляє себе, якщо умови стаціонарні, але якщо поле змінюється, то в провіднику виникає електрорушійна сила. «Ця електрорушійна сила, – пише Максвелл, – залежить тільки від зміни числа ліній магнітної індукції, які пронизують контур струму. Напрошується допущення, що подібна сила, що залежить від зміни числа силових ліній, зумовлена зміною деякого стану, який вимірюється цим числом» [66, с. 62].

«Для того, щоб пов'язати індукцію з числом силових ліній, Максвелл вводить поняття «електромагнітної кількості руху», яке з сучасної точки зору є не чим іншим, як векторним потенціалом  $\vec{A}$ , а потім, виражаючи індукцію  $\vec{B}$  через вектор-потенціал:  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  і використовуючи закон Ампера у формі  $\text{rot}\vec{H} = 4\pi\vec{j}$ , а також умови збереження енергії, він одержує вираз для ЕРС індукції:  $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ » [66, с. 62].

Потім Максвелл вводить поняття повної електротонічної інтенсивності вздовж замкнутої кривої:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi, \quad (4.98)$$

з допомогою якої формулюється закон ЕМІ.

«Електрорушійна сила (індукції), що діє на елемент провідника, вимірюється похідною за часом від електротонічної інтенсивності, незалежно від того, чи обумовлена ця похідна зміною величини або напрямом електротонічного стану» [59, с. 138].

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \left( -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_L \vec{A} d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (4.99)$$

«Відносно історії запропонованої теорії я вкажу, що використані (вживані) вище математичні функції для виразу фарадеївського електротонічного стану і для визначення електродинамічних потенціалів і електрорушійних сил, наскільки мені відомо, абсолютно нові» [59, с. 139].

**Таким чином, можна стверджувати, що найбільш чітко й «абсолютно по-новому» теорію явища ЕМІ дав Максвелл.**

При цьому, якщо врахувати подання самим Максвеллом теорії електромагнітного поля [83], [84], у якому взагалі відсутній закон ЕМІ у

формі  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ , але приведений локальний вираз для напруженості електричного поля, який враховує й індуковане поле (два типи ефектів ЕМІ:  $[\vec{V}, \vec{B}]$  та  $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ), й поле заряджених частинок  $\nabla\varphi$

$$\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}] - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad (4.100)$$

**то питання (проблема) подвійної природи ЕРС індукції, на якій у сучасних навчальних посібниках весь час наголошується, як виявляється, була поставлена й вирішена Максвеллом [83; 84].**



Огляд традиційних методик вивчення явища та закону електромагнітної індукції. При вивченні явища ЕМІ акцентують увагу на двох типах ефектів ЕМІ [4], [38, с. 230], [6, с. 52–53], [98, с. 537–538], [94].

Перший з них полягає в «наведенні вихрового електричного поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  змінним магнітним полем  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ »:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{ або } \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \gg [98, \text{ с. } 537].$$

А другий тип ефектів ЕМІ «пов'язаний з рухом матеріального середовища (провідників, діелектриків, твердих тіл, рідин, газів, плазми) в стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r})$ » [98, с. 538].

Тобто в посібниках наголошується, що в основі явища ЕМІ лежать дві різних за своєю природою фізичних причин виникнення ЕРС індукції:

1) наведення вихрового електричного поля змінним у часі магнітним полем;

2) дія сили Лорентца на ЗЧ, що входять до складу матеріального середовища (зокрема, провідників замкненого кола), яке рухається в полі

$$\vec{B}(\vec{r}), \quad \varepsilon_i = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}.$$

Тоді закон ЕМІ з урахуванням цих двох причин виникнення ЕРС індукції можна записати у формі [38, с. 231]

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}. \quad (4.101)$$

При обґрунтуванні закону ЕМІ й аналізі фізичних причин, які приводять до появи індукційного поля, використовуються наступні **методичні підходи**.

А) У переважній більшості навчальних посібників закон (4.94) виводиться як результат аналізу уявної експериментальної ситуації (рис. 4.17) та виходячи з виразу для сили Лорентца як сторонньої сили [7, с. 220], [6, с. 51], [9, с. 12], [26], [27], [28], [29, с. 261], [64, с. 348], [63, с. 276–278], [69, с. 176].

А потім наводяться аргументи того, що ЕРС індукції визначається формулою (4.94) й у випадку змінного магнітного поля при нерухомому контуру.

Усвідомлюючи, що такий спосіб обґрунтування закону ЕМІ є надто простим, позбавленим узагальнюючих рис і до того ж спирається на ідеалізовані ситуації (однорідне магнітне поле в межах замкненого проволочного контуру, відрізок провідника рухається з постійною швидкістю), у ряді посібників з електродинаміки для вищої школи пропонують-

ся способи обґрунтування (4.94) на основі знаходження  $\frac{d\Phi}{dt}$  через поверхню різної форми, яка рухається в довільному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  [38, с. 254], [7, с. 226], [99, с. 37–38], [35, с. 162–163], [100, с. 301–302], (детальніше див. п. 4.2.2).

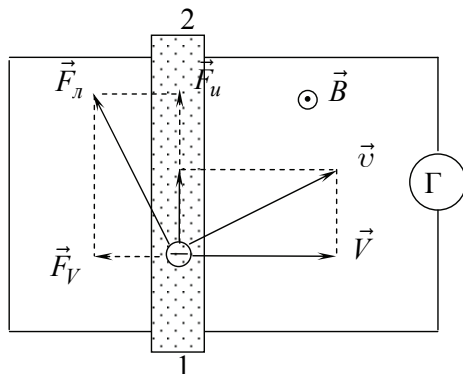


Рис. 4.17. До обґрунтування «правила потоку»

Причому в посібниках [4], [7, с. 226], [38], [99], [100] в основу виводу (4.94) закладений вираз для сили Лорентца і вважається, що магнітне поле стаціонарне, але неоднорідне (у [7], [99], [100] взагалі властивості  $\vec{B}$  не уточнюються).

Б) Відразу формулюється закон у формі (4.94), а потім аналізуються фізичні причини, які приводять до виникнення індукційного струму (індукційного електричного поля) [38, с. 226], [3, с. 316], [4].

В) «Правило потоку» (4.94) виводиться способом Гельмгольца [65, с. 266], [29, с. 251–254], а потім, знову таки ж, обговорюються фізичні причини виникнення індукційного поля й відповідні узагальнення щодо максвеллівського трактування ЕРС індукції [65, с. 273].

Прослідкуємо тепер способи обґрунтування в навчально-методичній літературі локальної форми закону ЕМІ.

1. За основу береться «правило потоку» (4.94), а потім на основі теореми Стокса й означення ЕРС записується послідовність формул

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (4.102)$$

«Перехід до частинної похідної в правій частині виражає ту обставину, що мова іде про зміну вектора  $\vec{B}$  у визначеній точці простору» [96, с. 107].

І тоді маємо

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

По суті, аналогічні міркування приводяться в посібнику [65, с. 271], але правило потоку записується у вигляді

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

і відзначається, що контур при цьому нерухомий.

У той же час у фізичній енциклопедії [98] стверджується, що співвідношення

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{ або } \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (4.103)$$

«універсально застосовні, як до вільного простору (електродинамічного вакууму), так і до довільних середовищ і систем (нерухомих і **рухомих**)» [98, с. 537] (виділено мною).

До речі, формула (6) у фізичній енциклопедії [98, с. 537]

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \left( \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right) \cdot d\vec{l},$$

яка повинна об'єднувати, за задумом авторів цієї статті в [98], ЕРС, зумовлену як силою Лорентца, так і змінним магнітним полем, **неадекватна думкам і задумам авторів**. Очевидно, слід було записати формулу (4.101).

Аналогічна непослідовність в обґрунтуванні  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  просліджується і в посібнику [27, с. 75].

Тобто висновок у фізичній енциклопедії **суперечить** поясненню цих питань у посібнику Д. В. Сивухіна.

Автори посібників [63, 64] локальну форму закону ЕМІ одержують у результаті низки таких очевидних перетворень:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E}d\vec{l} &= -\frac{d\Phi}{dt}, \\ \int_S \text{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Але потім ми читаємо дивний перехід: «Загалом  $\vec{B}$  є функцією координат і часу. Тому зміну за часом  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  правильніше буде записати як частинну похідну  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ . Тоді  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ » [63, с. 279], [64, с. 350].

У посібнику Парселла [7] закон  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$  з «правила потоку» виводиться абсолютно подібно до того, як це робиться в [63; 64]. А потім знову легковажний перехід.

«Оскільки  $\vec{B}$  може залежати від положення і від часу, ми напишемо  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  замість  $\frac{d\vec{B}}{dt}$ . Тоді ми одержимо два абсолютно еквівалентних формулювання закону індукції:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{та} \quad \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{» [7, с. 233].}$$

Таким чином, залишається незрозумілим перехід від повної похідної до частинної, і навпаки.

2. Використовуючи функцію Лагранжа ЗЧ в ЕМП та рівняння руху ЗЧ в ЕМП у формі рівнянь Лагранжа [1, с. 93], [97]

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q \cdot \text{grad}\varphi + q[\vec{v}, \text{rot}\vec{A}], \quad (4.104)$$

приходимо до висновку, що з допомогою електромагнітних потенціалів напруженість електричного поля й індукція магнітного поля, відповідно, визначаються

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi, \\ \vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Тоді вихор вектора напруженості електричного поля

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{A} - \text{rotgrad}\varphi.$$

Оскільки ротор усякого градієнта дорівнює нулю, то одержуємо закон ЕМІ в локальній формі

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

3. У навчальному посібнику [101] взагалі не обговорюється походження й обґрунтування рівнянь Максвелла (у тому числі й закон ЕМІ в локальній формі), а самі РМ подаються як аксіоми чи постулати.

«Зараз випишемо рівняння без обговорення їх походження і історії відкриття, тобто в готовому вигляді» [101, с. 19].

#### 4.2.2. Явище електромагнітної індукції в рухомих електричних колах

Тепер перейдемо до огляду способів обґрунтування (4.94) у випадку руху дротового контуру в зовнішньому магнітному полі.

Розглянемо явище ЕМІ в рівномірно рухомій в одній площині плоскій рамці [45], [7, с. 224].

Припустимо, що прямокутна рамка рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  в неоднорідному магнітному полі, силові лінії якого перпендикулярні площині рамки.

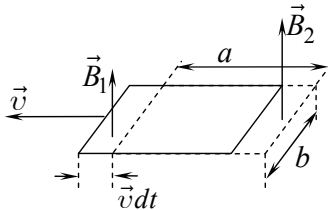


Рис. 4.18. До знаходження ЕРС в плоскій рамці, яка рухається з постійною швидкістю

Тоді, згідно з ФПКЕМП, у СВ  $K'$ , зв'язаній з рамкою, виникає індукційне електричне поле  $\vec{E}' = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}]$ . А в СВ  $K$ , відносно якої рамка рухається, у двох сторонах рамки, довжина яких  $b$ , виникне індукційне електричне поле  $\vec{E}_1 = [\vec{v}, \vec{B}_1]$  та  $\vec{E}_2 = [\vec{v}, \vec{B}_2]$  (див., наприклад, [33] і [85]). Тому величина ЕРС в рамці дорівнює

$$\varepsilon = b(E_2 - E_1) = bv(B_2 - B_1). \quad (4.105)$$

Формулу (4.105) можна подати у вигляді «правила потоку».

Дійсно, при русі рамки вліво, за проміжок часу  $dt$  (рис. 4.18), рамка зміститься на відстань  $\vec{v}dt$ . Потік вектора  $\vec{B}$  в лівій частині рамки зростає на  $B_1 \cdot b \cdot vdt$ , у правій частині рамки зменшиться на  $B_2 \cdot b \cdot vdt$

. Якщо ми знаємо розподіл магнітного поля в просторі, тобто  $B(x)$ , для зміни магнітного потоку через площу рамки одержуємо

$$d\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = B_1 \cdot b \cdot v dt - B_2 \cdot b \cdot v dt = b \cdot v dt (B_1 - B_2),$$

але  $B_2 - B_1 = -\Delta B = -\frac{\partial B}{\partial x} \Delta x \approx -\frac{\partial B}{\partial x} \cdot a$ , якщо  $a$  – достатньо маленька величина.

Тому

$$\varepsilon = b \cdot v (B_2 - B_1) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{b \cdot v dt (B_1 - B_2)}{dt}.$$

По суті це один з різновидів методичного підходу А (п. 4.2.1).

Тепер проаналізуємо обґрунтування (4.94), розглядаючи рух зі швидкістю  $\vec{v}$  довільного контуру  $L$  в неоднорідному, але стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}$  (рис. 4.19).

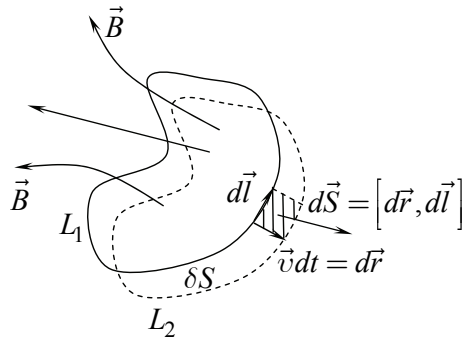


Рис. 4.19. Знаходження ЕРС в контурі  $L$ , який рухається в неоднорідному, але стаціонарному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r})$

Тоді в межах кожного нескінченно малого елемента цього контуру  $d\vec{l}$  виникає електричне поле  $\vec{E}'$ . Напруженість цього поля, згідно з (1.41) (див. також **Приклад 3.5**),

$$\vec{E}' = \Gamma[\vec{v}, \vec{B}].$$

Але з точки зору СВ  $K$ , напруженість цього поля, як уже відзначалось, дорівнює  $\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}]$ , що сприймається й інтерпретується як поле сили Лорентца. Іншими словами, у межах кожного  $d\vec{l}$  з'являється нескінченно мала ЕРС  $[\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}$ .

Тоді сумарна ЕРС в контурі, очевидно, дорівнює

$$\varepsilon_i = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}, \quad (4.105a)$$

де, за змістом величин, що входять у (4.105a),  $\vec{B}(\vec{r})$  – значення індукції магнітного поля в тій точці контуру  $L$ , яка в дану мить має швидкість  $\vec{v}$ .

Нехай за час  $dt$  контур змістився з положення  $L_1$  в положення  $L_2$ . Якщо припустити, що в першому положенні магнітний потік через поверхню  $S_1$ , що обмежена контуром  $L_1$ , дорівнює  $\Phi_1$ , то в другому положенні магнітний потік через поверхню, яка спирається на контур  $L_2$ , становитиме  $\Phi_1 + \delta\Phi$ , де  $\delta\Phi$  – збільшення магнітного потоку через вузьку смужку  $\delta S$ , яка обмежується контурами  $L_1$  і  $L_2$  (рис. 4.19).

Користуючись властивостями змішаного добутку векторів,

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}, \vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]\vec{c}$$

підінтегральний вираз (4.105a) можна записати таким чином:

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B} \right] \cdot d\vec{l} = -\vec{B} \cdot \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{l} \right],$$

але  $[d\vec{r}, d\vec{l}] = d\vec{S}$  – елементарна площадка смужки  $\delta S$ , утвореної переміщенням контуру на  $d\vec{r}$ , тому  $-\vec{B} \cdot \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{l} \right] = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot d\vec{S})$ .

І (4.105a) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l} = -\oint_L \vec{B} \cdot \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, d\vec{l} \right] = \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{S_0} \vec{B} \cdot [d\vec{r}, d\vec{l}] = -\frac{d\Phi}{dt}, \end{aligned} \quad (4.105b)$$

де  $d\Phi = \int_{S_0} \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{B} [d\vec{r}, d\vec{l}] = -\oint_L [d\vec{r}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}$  – приріст, зміна

потоку магнітного поля, яка зумовлена нескінченно малим переміщенням контуру з положення  $L_1$  в положення  $L_2$ .

Тобто сумарна ЕРС в контурі визначається повною похідною за часом від магнітного потоку через будь-яку поверхню, яка спирається на контур  $L$ .

Подібне обґрунтування наведене в [38, с. 254], [100, с. 302].

### 4.2.3. Зміна в часі потоку довільного векторного поля через рухому поверхню та субстанціональна похідна за часом векторного поля

*Зміна в часі потоку векторного поля через рухому поверхню.* Навіть поверховий огляд навчально-методичної літератури з методів математичної фізики показує [41; 42; 43; 44], що при вивченні векторного аналізу на фізико-математичних факультетах педагогічних університетів взагалі не розглядається питання про знаходження потоку векторного поля через рухому поверхню.

І тільки в деяких посібниках з електродинаміки у зв'язку з аналізом явища електромагнітної індукції в рухомих провідниках [34; 12] та обґрунтуванням рівнянь Максвелла в рухомих тілах [35; 36; 24; 12] ми знаходимо обговорення цього питання.

Але способи знаходження похідної за часом потоку векторного поля через рухому поверхню, описані в [34; 35; 36; 12; 24] (див. також п. 4.1.3), супроводжує низка непослідовностей (вибір нормалей до поверхонь і зв'язок цих нормалей з напрямком обходу контурів, на які спираються ці поверхні [35, с. 162]). Ці способи характеризуються методично не виваженими, а інколи й не ясними та суперечливими формулюваннями [12, с. 8] і застосовністю одержаних співвідношень тільки для окремих випадків (п. 4.1.3, п. 4.2.2).

Дійсно, у способах обґрунтування (4.94), наведених у [38; 100], нічого не стверджується відносно стану руху поверхні, натягнутої на контур.

Чи вона не змінює свою форму, чи окремі частини її рухаються з різними швидкостями, але так, що вона залишається нерозривною і весь час спирається на цей контур?

Звичайно, враховуючи властивості МП, ми можемо сказати, що як би не рухалися елементи поверхні, натягнутої на  $L$ , потік вектора  $\vec{B}(\vec{r})$  в дану мить через дві (наприклад,  $S_1$  та  $S_2$ ) довільної форми поверхні, які спираються на один і той же контур, залишається незмінним за величиною (рис. 4.20).

Але для будь-якого іншого вектора цей висновок, узагалі кажучи, несправедливий.

Тому й знаходження швидкості зміни потоку довільного векторного поля в часі через рухому поверхню повинно ґрунтуватись на більш загальних підходах, ніж це зроблено в [4; 12; 35; 36; 100]. Крім того, слід враховувати не тільки неоднорідність поля, але і його не стаціонарність.

По-друге, у посібнику [35, с. 162] в другому інтегралі правої частини формули (9.10) (див. також формулу (4.53) п. 4.1.3) недостатньо обґрунтований знак мінус (доданок  $\oint \vec{B}_t \cdot [\vec{v}dt, d\vec{l}]$ ).



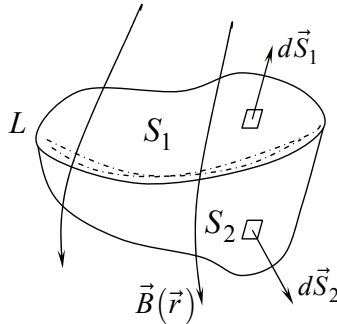


Рис. 4.20. Потоки вектора  $\vec{B}(\vec{r})$  через поверхні  $S_1$  та  $S_2$

$$\text{однакові за величиною } \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}$$

Далі, права частина (9.16) [35, с. 163] (див. також формулу (4.58) п. 4.1.3) нагадує вираз для повної похідної за часом вектора  $\vec{B}$  при умові, що  $\vec{v} = \text{const}$ . Але ж ліва частина описує вихор напруженості електричного поля в СВ  $K'$  !

Так, рівняння (4.58), згідно з [35], записане в супутній СВ (СВ  $K'$ ). А похідні (4.51) та (4.56) ми шукали і знайшли в СВ  $K$ . У той же час у [12, с. 8–10] вираз (4.47), як і подібний йому (4.55), слід вважати справедливим у СВ  $K$ .

Іншими словами, по суті, протиріччя, які зустрічаються в ряді посібників при обґрунтуванні похідної за часом потоку векторного поля через рухоми поверхню, пов'язані з тим, до якої СВ слід відносити вираз для повної похідної за часом будь-якого векторного поля.

У посібниках [35, с. 163], [24, с. 254, с. 256, с. 349, с. 408] вважається, що похідні, подібні до формули (4.56), мають місце для векторного поля в супутній системі відліку.

А в [12, с. 8–10], [48, с. 152, с. 547], [49, с. 169], [50, с. 201] вважається, що формула  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$  визначає повну похідну векторного поля  $B(\vec{r}, t)$  в лабораторній СВ (СВ  $K$ ).

Тому послідовне, ґрунтоване на прозорих вихідних засадах обґрунтування формули для похідної за часом потоку довільного векторного поля через рухоми поверхню є актуальним.

Нижче пропонується спосіб обґрунтування формули похідної за часом потоку векторного поля через рухоми поверхню [104], який використовує позитивні аспекти способів, описаних у [12; 24; 35; 36] (див. також п. 4.1.3, с. 96–101).

Розглянемо взаємозв'язані поверхню  $S$  і контур  $L$ , які рухаються зі швидкістю  $\vec{v}$  в довільному векторному полі  $\vec{a}$ .

Знайдемо повну швидкість зміни потоку довільного векторного поля  $\vec{a}$  через дану рухомию поверхню  $S$ .

Нехай поверхня  $S$ , що обмежена контуром  $L$  (рис. 4.21), у момент  $t$  знаходиться в положенні  $S_1$ , а в момент  $t + dt$  – у положенні  $S_2$ .

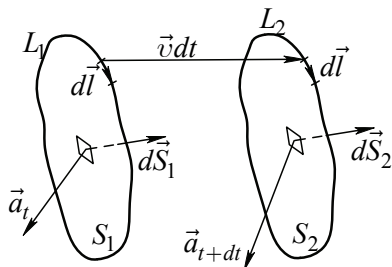


Рис. 4.21. Поверхня  $S$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  у векторному полі  $\vec{a}(\vec{r}, t)$

Тоді, згідно з означенням, для зміни в часі потоку векторного поля через рухомию поверхню,  $\frac{d\Phi}{dt}$ , можемо записати

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \right)}{\Delta t}, \quad (4.106)$$

де  $\Phi = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$  – потік вектора  $\vec{a}$  через поверхню  $S$ ,  $\Delta \left( \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \right)$  – приріст потоку  $\Phi$  через поверхню  $S$  при зміні її положення від початкового  $S_1$  до  $S_2$ .

Будемо вважати, що векторне поле в загальному випадку є і неоднорідним, і не стаціонарним,  $\vec{a}(\vec{r}, t)$ .

Розглянемо приріст функції  $\int_S \vec{a} d\vec{S}$ :

$$\Delta \left( \int_S \vec{a} d\vec{S} \right) = \int_{S_2} \vec{a}_{t+dt} d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1, \quad (4.107)$$

де  $\vec{a}_{t+dt}$  – векторне поле в кожній точці поверхні  $S_2$  в момент часу  $t + dt$ ;  $\vec{a}_t$  – векторне поле в кожній точці поверхні  $S_1$  в момент часу  $t$ .

Нехай  $\Delta V$  – об’єм, утворений рухом поверхні  $S$ , від положення  $S_1$  до положення  $S_2$  за час від  $t$  до  $t + dt$  (рис. 4.22).

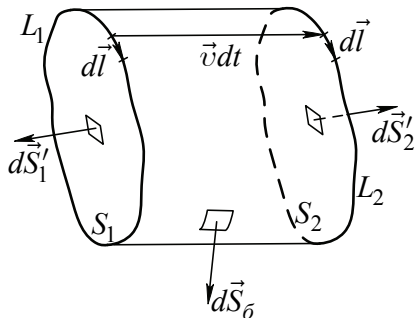


Рис. 4.22. Об’єм  $\Delta V$ , утворений рухом поверхні  $S$  унаслідок її переміщення

Очевидно, що загальна величина замкненої поверхні  $S_{заг}$ , яка обмежує об’єм  $\Delta V$ , складається з трьох частин: поверхні  $S$  у початковий момент часу ( $S_1$ ), поверхні  $S$  у кінцевому положенні ( $S_2$ ), після того як вона здійснила елементарне переміщення  $\vec{v} dt$ , і «циліндричної» поверхні ( $\Delta S_\delta$ ), утвореної контуром  $L$  унаслідок його переміщення на  $d\vec{r} = \vec{v} dt$

$$S_{заг} = S_1 + S_2 + \Delta S_\delta. \quad (4.108)$$

*Розглянемо цю уявлювану поверхню  $S_{заг}$  в момент часу  $t$ . Ми говоримо про уявлювану поверхню  $S_{заг}$ , адже в початковий момент часу існує лише поверхня  $S_1$ . До цієї поверхні  $S_{заг}$  застосуємо теорему Гаусса*

$$\int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t dV = \oint_{S_{заг}} \vec{a}_t d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 + \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_\delta} \vec{a}_t d\vec{S}_\delta. \quad (4.109)$$

Зазвичай за додатній напрям нормалі обирається напрям зовнішньої нормалі до поверхні, що обмежує об’єм, тому вектори елементарних площинок  $d\vec{S}_1'$ ,  $d\vec{S}_2'$ ,  $d\vec{S}_\delta$  мають напрям, указаний на рис. 4.22. Порівнюючи напрямки елементарних площинок на рис. 4.21 і на

рис. 4.22, можна зробити висновок, що  $d\vec{S}'_1 = -d\vec{S}_1$ , а  $d\vec{S}'_2 = d\vec{S}_2$ . Враховуючи цей результат, рівняння (4.109) можна переписати у вигляді

$$\int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 = \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t dV - \int_{\Delta S_\delta} \vec{a}_t d\vec{S}_\delta. \quad (4.110)$$

Врахуємо, що елементарна площинка  $d\vec{S}_\delta$  дорівнює  $d\vec{S}_\delta = [d\vec{l}, \vec{v} dt]$ , тоді маємо

$$\int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 = \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t dV - \int_{\Delta S_\delta} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v} dt], \quad (4.111)$$

де  $\vec{v} dt$  – елементарне переміщення елемента контуру  $d\vec{l}$ .

Останній доданок у (4.111) визначає зміну потоку через бічну поверхню при русі контуру  $L$  поверхні  $S$ , елемент якого  $d\vec{l}$ . Підкреслимо ще раз, що потік через поверхні  $S_1$  і  $S_2$  в співвідношенні (4.110) обчислюється в момент часу  $t$ , оскільки теорема Гаусса застосовна лише для миттєвих значень векторного поля  $\vec{a}$ .

Величину вектора  $\vec{a}$  в кожній точці на поверхні  $S_2$  в момент часу  $t + dt$  можна виразити через його величину в момент  $t$  розкладом в ряд

$$\vec{a}_{t+dt} = \vec{a}_t + \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt + \delta, \quad (4.112)$$

де  $\delta$  – величина більш високого порядку малості, ніж  $dt$ .

Тобто ми вважаємо при цьому, що зміна векторного поля в часі зумовлена тільки явною залежністю  $\vec{a}(t)$ .

Підставимо знайдене нами значення у формулу (4.107), отримаємо

$$\Delta \left( \int_S \vec{a} d\vec{S} \right) = \int_{S_2} \vec{a}_t d\vec{S}_2 - \int_{S_1} \vec{a}_t d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt d\vec{S}_2 + \int_{S_2} \delta d\vec{S}_2. \quad (4.113)$$

З урахуванням виразу (4.111) співвідношення (4.113) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta \left( \int_S \vec{a} d\vec{S} \right) &= \int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} \cdot dt d\vec{S}_2 + \int_{\Delta V} \text{div} \vec{a}_t \cdot dV - \\ &- \int_{\Delta S_\delta} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v} dt] + \int_{S_2} \delta d\vec{S}_2. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Підставимо в співвідношення (4.106) вираз (4.114) та, зробивши граничний перехід при  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \left( \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \right)}{\Delta t} = \\
& = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt d\vec{S}_2 + \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{a}_t \cdot dV - \int_{\Delta S_6} \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v} dt] + \int_{S_2} \delta d\vec{S}_2}{\Delta t}. \quad (4.115)
\end{aligned}$$

Розглянемо почергово доданки у формулі (4.115).

$$1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \frac{\partial \vec{a}_t}{\partial t} dt d\vec{S}_2}{\Delta t} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.116)$$

При граничному переході  $\Delta t \rightarrow 0$  поверхня  $S_2$  переходить у поверхню  $S_1$ . За непотрібністю ми опустили індекс 1 при поверхні  $S_1$ .

2) Використовуючи очевидний вираз для елементарного об'єму  $dV = \vec{v} d\vec{S} dt$ , маємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{a}_t \cdot dV}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{a}_t \cdot \vec{v} d\vec{S} dt}{\Delta t} = \int_S \vec{v} \cdot \operatorname{div} \vec{a} \cdot d\vec{S}. \quad (4.117)$$

При граничному переході  $\Delta t \rightarrow 0$  об'єм  $\Delta V$  стягується в поверхню  $S$ .

$$\begin{aligned}
& - \int \vec{a}_t \cdot [d\vec{l}, \vec{v} dt] \\
3) \quad & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S_6}{\Delta t} = \\
& = - \oint_L \vec{a} \cdot [d\vec{l}, \vec{v}] = \oint_L [\vec{a}, \vec{v}] \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} [\vec{a}, \vec{v}] \cdot d\vec{S}. \quad (4.118)
\end{aligned}$$

При граничному переході  $\Delta t \rightarrow 0$  площа  $\Delta S_6$  стягується в контур  $L$  поверхні  $S$ .

$$4) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \delta d\vec{S}_2}{\Delta t} = 0 \quad (4.119)$$

Використовуючи (4.116), (4.117), (4.118), (4.119) для повної швидкості зміни потоку довільного векторного поля  $\vec{a}$  через рухому поверхню  $S$ , одержуємо [104]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi &= \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} d\vec{S} = \\ &= \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_S \text{rot}[\vec{a}, \vec{v}] \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{v} \cdot \text{div} \vec{a} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Формула (4.120) дозволяє записати явний вираз для швидкості зміни в часі потоку вектора магнітної індукції через рухому поверхню.

Оскільки  $\text{div} \vec{B} = 0$ , то

$$\frac{d}{dt}\Phi_B = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{S}, \quad (4.121)$$

та для повного струму зміщення через рухому поверхню

$$\frac{d}{dt}\Phi_D = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{v}, \vec{D}] \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{v} \cdot \text{div} \vec{D} \cdot d\vec{S}.$$

Якщо поверхня  $S$  перетинає область простору, у якій розподілені заряди, то миттєве значення струму зміщення дорівнює

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{v}, \vec{D}] \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{v} \cdot \rho \cdot d\vec{S}. \quad (4.122)$$

Якщо припустити, що наші поверхня  $S$  і контур  $L$  пов'язані із середовищем (знаходяться в середовищі), то останні формули (4.121) і (4.122) дозволяють записати РМ у повільно рухомих немагнітних тілах.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{v}, \vec{D}] + \vec{v} \rho, \quad (4.123)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{B} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}], \quad (4.124)$$

оскільки  $(\vec{B} \nabla) \vec{v} - \vec{B} \cdot \text{div} \vec{v} = 0$ .

*Субстанціональна похідна за часом довільного векторного поля і фундаментальні закони електродинаміки.* Повні похідні векторних полів органічно входять як до рівнянь Максвелла, так і до інших рівнянь електродинаміки. Крім того, з допомогою повних похідних векторних і скалярних полів можна визначати електромагнітне поле та рівняння, які його описують у рухомих середовищах.

Тому зупинимося більш детально на виразі для повної похідної довільної динамічної величини та на змісті величин, що входять до цього виразу.

Повна (або субстанціональна, матеріальна) похідна за часом  $t$  характеризує зміну певної величини для даної частинки, тоді як частинна (або локальна) похідна описує зміну цієї величини в даному місці. Тобто матеріальна похідна описує швидкість повної зміни величини в точці, яка рухається разом із середовищем. При цьому вважається, що ця величина залежить і від часу, і від миттєвого положення точки.

Вираз для повної похідної за часом довільної фізичної величини може бути обґрунтований (у всякому разі) трьома різними способами [33, с. 185].

Згідно з правилами диференційного числення для будь-якої функції координат і часу,  $\vec{a}(x, y, z, t)$ , повинно мати місце співвідношення [51], [24, с. 408], [50, с. 201], [33, с. 185], [40, с. 351], [85, с. 318]

$$\begin{aligned} \dot{\vec{a}} &= \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Аналогічно, згідно з примітками редактора перекладу книги Р. Беккера [24], [24, с. 408], для кожної функції  $f$  від координат і часу «повинно бути»

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (4.126)$$

Останні три доданки у формулах (4.125) і (4.126), якщо ввести оператор  $(\vec{v}\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ , записують зазвичай у формі  $(\vec{v}\nabla)\vec{a}$ .

З іншого боку, якщо  $\vec{V}$  – швидкість «точки спостереження» (швидкість довільної точки середовища), то оператор  $(\vec{V}\nabla) \cdot \vec{a}$  дорівнює [31, с. 173], [33, с. 189]

$$(\vec{V}\nabla) \cdot \vec{a} = -\text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] + (\vec{a}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{a} - \vec{a} \cdot \text{div}\vec{V} \quad (4.126a)$$

Тому повна похідна векторного поля  $\vec{a}(x, y, z, t)$  за часом дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla) \cdot \vec{a} = \\ &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] + (\vec{a}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{a} - \vec{a} \cdot \text{div}\vec{V}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Тепер переходимо до пояснення змісту величин, які входять у (4.125) або (4.127).

Згідно з примітками редактора перекладу до книги Р. Беккера [24, с. 408],  $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  означає  $\dot{\vec{A}} = \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{x',y',z'}$ , а під  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  розуміють  $\left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_{x,y,z}$ .

У цих виразах  $x', y', z'$  – координати в системі відліку, яка рухається разом з тілом (середовищем). Як правило, таку СВ позначають  $K'$ , СВ  $K$ . А  $x, y, z$  – координати в нерухомій СВ  $K$ . Тому, стверджується в [24, с. 408], « $x, y, z$  є функціями від  $x', y', z'$  і від  $t$ , похідні ж цих функцій за  $t$  суть компоненти вектора  $\vec{V}$ ».

І тому застосування (4.126) для, наприклад,  $P_x$  дає можливість записати повну похідну за часом іксової проекції вектора поляризації  $\dot{P}_x$  у вигляді

$$\dot{P}_x = \frac{\partial P_x}{\partial t} + V_x \cdot \text{div} \vec{P} + \frac{\partial}{\partial y} (P_x V_y - P_y V_x) - \frac{\partial}{\partial z} (P_z V_x - P_x V_z).$$

Тоді для повної похідної вектора поляризації  $\vec{P}$  маємо (див. також (4.64))

$$\dot{\vec{P}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{V} \text{div} \vec{P} + \text{rot} [\vec{P}, \vec{V}].$$

*І це вірно тільки при умові  $\vec{V} \neq V(x, y, z)$  (виділено мною).*

« $\dot{\vec{P}}$  представляє похідну від  $\vec{P}$  за часом з погляду спостерігача, який рухається разом з тілом, але вектор  $\vec{P}$  в правій частині рівності слід розглядати як функцію координат і часу точки зору спостерігача, що покоїться» [24, с. 256].

До речі, останнє співвідношення для  $\dot{\vec{P}}$  можна відразу одержати використовуючи вираз для повної похідної довільного векторного поля (4.127) та умову  $(\vec{P} \nabla) \vec{V} - \vec{P} \cdot \text{div} \vec{V} = 0$ , яка має місце при  $\vec{V} = \text{const}$ .

Таким чином, хоча  $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  – це похідна з точки зору СВ  $K'$ , а сам вектор  $\vec{A}(x, y, z, t)$  у правій частині (4.125) слід розглядати як функцію координат і часу з точки зору «нерухомої» СВ  $K$ .



Що і використовується Р. Беккером [24] для знаходження  $\dot{\vec{B}}$  у різних місцях книги, де  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля.

У [24] повна похідна  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  позначається  $\dot{\vec{B}}$  і дорівнює

$$\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}], \quad (4.128)$$

оскільки завжди  $\text{div} \vec{B} = 0$ .

Формула (4.128) впливає і з (4.127) при  $\vec{V} = \text{const}$ . Тому, очевидно, в [24], мабуть, припускається, що  $\vec{V} = \text{const}$  або швидкість настільки мало змінюється, що в межах будь-якого малого відрізка часу можна вважати рух рівномірним і прямолінійним.

І ця похідна визначає ротор вихрового електричного поля в системі відліку, **яка зв'язана з рухомим тілом (провідником) (формула (43.3) в [24, с. 254] або (9.16) у [35, с. 163])**

$$\text{rot} \vec{E}' = -\dot{\vec{B}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.129)$$

Таким чином, згідно з [24, с. 254], [24, с. 256], [24, с. 349], [24, с. 408], вважається, що вираз (4.125)  $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  визначає похідну від

$\vec{A}(x, y, z, t)$  з точки зору спостерігача, який рухається разом з тілом або з точкою спостереження.

«Оскільки для спостерігача, який рухається разом з магнітом, повна зміна  $\vec{B}$ , тобто  $\dot{\vec{B}} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ , дорівнює нулю, то  $\text{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ , як того вимагає закон індукції» [24, с. 349]. Тобто в цій частині книги [24,

с. 349] вважається, що  $\dot{\vec{B}}$  – це частинна похідна  $\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , оскільки, на-

справді, повна зміна  $\vec{B}$  дорівнює  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{B}$ . Але це суперечить

тому, що написано на сторінці 254 книги Р. Беккера –  $\dot{\vec{B}} = \frac{d\vec{B}}{dt}$ .

Хоча вираз  $\dot{\vec{B}} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$  в контексті книги Р. Беккера [24, с. 349] є, на мій погляд, помилковим (можливо, помилковим випадково).

А повинно бути, згідно з [24, с. 349],  $\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ . Автор книги [24] скоріше за все це й мав на увазі. Але тоді  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , а не  $\text{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ , як це стверджується в [24, с. 254, с. 349].

Аналогічної точки зору на зміст доданків (4.125) дотримуються й автори книги [12]. Причому в одних місцях  $\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}$  – це похідна величини  $\vec{A}(x, y, z, t)$  в СВ  $K$ , в інших місцях [12] формула (4.125) визначає похідну з точки зору СВ  $K'$ .

У класичному посібнику Е. В. Шпольського [50, с. 201], **навпаки, вираз (4.127) означає матеріальну похідну вектора  $\vec{a}$  в лабораторній системі відліку (СВ  $K$ )**.

У посібнику І. Є. Тамма [48, с. 152–153, с. 546–547] **похідна (4.125), (4.127) визначає повну зміну в часі величини в СВ  $K$** .

Таким чином, ми маємо низку суперечностей і непослідовностей щодо змісту доданків у (4.127) як у рамках однієї книги, так і при порівнянні висловлювань відносно розуміння (4.127) в різних книгах.

Якщо вважати, що повна похідна за часом потоку вектора  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  через рухому поверхню  $\frac{d}{dt}\Phi$  дорівнює потоку вектора  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  через цю поверхню  $(\int_S \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot d\vec{S})$ ,  $\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot d\vec{S}$ , то, порівнюючи (4.127) з теоремою про повну зміну в часі потоку векторного поля  $\vec{a}$  (4.120)

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt} \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{V} \cdot \text{div} \vec{a} \cdot d\vec{S},$$

одержуємо

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] + \vec{V} \cdot \text{div} \vec{a}. \quad (4.130)$$

Тобто з точністю до доданку  $(\vec{a} \nabla) \vec{V} - \vec{a} \cdot \text{div} \vec{V}$  одержуємо однакові результати для виразу повної похідної за часом векторного поля  $\vec{a}(\vec{r}, t)$ .

Відсутність цього доданку у виразі для повної похідної  $\frac{d\vec{a}}{dt}$ , який впливає з (4.120), означає, напевно, що і  $\text{div}\vec{V} = 0$ , і  $(\vec{a}\nabla)\vec{V} = 0$ , а це у свою чергу говорить про те, що у всіх методах доведення й обґрунтування формули (4.120) і рівнянь Максвелла в рухомому тілі приймається, за мовчазної згоди у всіх посібниках і монографіях, угода про рівномірний і прямолінійний рух середовища або системи відліку, яка зв'язана з ним ( $\vec{V} \neq f(x, y, z)$ ), швидкість  $\vec{V}$  руху «точки» однакова для всіх точок поверхні  $S$  і контуру  $L$ ). Щодо цього є важливим також зауваження Тамма І. Є. [48, с. 546].

Аналогічно, формулу (4.120) можна обґрунтувати виходячи і з виразу для матеріальної похідної по часу векторного поля.

Дійсно, виберемо будь-яку точку, «точку спостереження», на нашій поверхні  $S$ . Тоді матеріальна, або субстанціональна, похідна (4.127) визначає повну зміну в часі величини  $\vec{a}$  в точці («точці спостереження»), яка рухається разом з середовищем.

Проінтегрувавши (4.127) по довільній поверхні  $S$  одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_S \text{rot}[\vec{V}, \vec{a}] \cdot d\vec{S} + \\ &+ \int_S (\vec{a}\nabla)\vec{V} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{V} \cdot \text{div}\vec{a} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{a} \cdot \text{div}\vec{V} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (4.130a)$$

Оскільки  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  визначає повну зміну в часі величини  $\vec{a}$  в точці, яка рухається разом з середовищем, то коли ми інтегруємо по поверхні  $S$ , яка рухається, бо  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  визначається в «точках спостереження», які переміщуються разом із поверхнею, то ми і знаходимо в результаті інтегрування повну похідну поля  $\vec{a}$  через рухому поверхню:  $\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot d\vec{S}$ .

Тобто з точністю до доданку  $\int_S (\vec{a}\nabla)\vec{V} \cdot d\vec{S} - \int_S \vec{a} \cdot \text{div}\vec{V} \cdot d\vec{S}$  одержуємо результат для повної похідної за часом потоку вектора  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  через рухому поверхню, який співпадає з (4.120).

#### 4.2.4. Непотенційність електричного поля рухомої зарядженої частинки та закон електромагнітної індукції

Таким чином, у результаті обговорення фізичних причин виникнення ЕРС індукції в навчальній і методичній літературі [3; 4; 6; 7] прийнята точка зору про подвійну природу ЕРС індукції. Якщо в лабораторній системі відліку  $K$  існує постійне, але неоднорідне магнітне поле, то ЕРС індукції, що виникає в контурі, який рухається в цьому полі, зумовлена силою Лорентца. А у власній СВ контуру, СВ  $K'$ , ЕРС зумовлена виникненням електричного поля, яке породжується рухом відносно  $K'$  магнітного поля СВ  $K$ . Спостерігач СВ  $K'$  може також інтерпретувати «свою» ЕРС як наслідок зміни магнітної індукції з часом.

Власне, у першій роботі А. Ейнштейна з теорії відносності «До електродинаміки рухомих тіл» [25] й наголошується на цьому:

«Відомо, що електродинаміка Максвелла в сучасному її вигляді приводить у застосуванні до рухомих тіл до асиметрії, яка невласлива, мабуть, самим явищам. Пригадаємо, наприклад, електродинамічну взаємодію між магнітом і провідником зі струмом. Спостережуване явище залежить тут тільки від відносного руху провідника і магніту, тоді як, згідно зі звичайним уявленням, два випадки, у яких рухається або одне або інше з цих тіл, повинні бути строго розмежовані» [25, с. 7].

Як показує аналіз (див. пп. 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, [38; 85]), у більшості випадків ЕРС визначається швидкістю зміни магнітного потоку через контур і не залежить від того, яким чином реалізується зміна магнітного потоку  $\Phi$  («правило потоку») (4.94).

«Ми не знаємо у фізиці жодного іншого такого прикладу, коли б простий і точний загальний закон вимагав для свого справжнього розуміння аналізу в термінах двох різних явищ. Зазвичай таке красиве узагальнення виявляється витікаючим з єдиного глибокого основоположного принципу. Але в цьому випадку якого-небудь особливо глибокого принципу не видно. Ми повинні сприймати «правило» як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ» [6, с. 53].

Але при аналізі конкретних фізичних ситуацій, у яких спостерігається явище електромагнітної індукції, завжди слід звертати увагу на фізичну причину виникнення ЕРС.

У посібнику [38] повторюються слова Р. Фейнмана [6, с. 53] щодо відсутності єдиного принципу, що лежить в основі закону електромагнітної індукції: «Зважаючи на те, що ніякого єдиного глибокого принципу, об'єднуючого обидва явища, не видно, ми повинні сприймати закон електромагнітної індукції як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ. Обидва ці явища, взагалі кажучи, незалежні одне від одного, і проте – що дивно – ЕРС індукції в контурі завжди рівна зміні магнітного потоку крізь контур» [38, с. 230].

У курсі загальної фізики при вивченні явища електромагнітної індукції теж, як правило, акцентується увага на двох фізичних причинах виникнення індукованої ЕРС в замкнутому контурі або в окремих частинах його [3; 4; 6; 7]: дія сили Лорентца на вільні електрони провідника, який рухається в магнітному полі, та виникнення вихрового електричного поля в нестационарному МП.

У стандартних методиках вивчення фізики в СНЗ пропонується досліджувати закономірності цього явища теж у два етапи [8; 9; 26; 27; 28]. Спочатку аналізується явище ЕМІ в рухомих провідниках з використанням традиційної моделі (рис. 4.17), а потім, спираючись на відомі дослідження, що ілюструють ЯЕМІ, формуються уявлення про вихрове електричне поле [26; 28; 29].

Аналіз науково-методичних публікацій з питань інтерпретації ЯЕМІ та методик його вивчення показує, що існує ціла низка проблем методичного характеру [9; 26; 28] (див. також п. 4.2.1).

Електростатичній теоремі Гаусса, теоремі про циркуляцію вектора  $\vec{B}$ , й іншим рівнянням Максвелла в інтегральній формі відповідають рівняння Максвелла в диференційній формі. А от «правило потоку» (4.94), від якого видно з аналізу науково-методичної літератури, не сформульовано відповідного локального закону.

Один з аспектів сучасної фізичної парадигми припускає, що інтегральний закон є наслідком локального закону. Але стосовно рівняння

Максвелла  $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  в навчально-методичній літературі прийнятий зовсім інший підхід (див. п. 4.2.1).

Незважаючи на те, що електродинаміка по суті своїй належить до релятивістської фізики, аналіз значної частини навчальних моделей електродинаміки проводиться в рамках класичної механіки. Так, розглядаючи традиційну модель (див. рис. 4.17) [26, с. 24; 9, с. 12; 29, с. 261], формули додавання швидкостей, а також формули перетворення компонент електромагнітного поля беруться тільки в нерелятивістському наближенні [7; 9; 26; 28]. Останнє не сприяє глибокому розумінню суті явища та принципу відносності, а інколи приводить і до фактичних помилок.

**Покажемо, що явище ЕМІ й закон електромагнітної індукції є наслідком принципу відносності та закону Кулона.**

Виходячи з принципу відносності та закону Кулона, можна одержати формулу для вектора  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  електричного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки [102]

$$\vec{D} = \frac{q(1 - \beta^2)\vec{r}}{4\pi r^3(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{3/2}} \quad (4.131)$$

де  $q$  – величина заряду РЗЧ,  $\vec{r} = (x-vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля  $P(x, y, z)$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\theta$  – кут між вектором  $\vec{r}$  і напрямком руху ЗЧ (рис. 4.23).

Електричне поле РЗЧ є **непотенціальним**. Дійсно, використовуючи (4.131), для ротора вектора  $\vec{D}$  знаходимо

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{D} &= \left( \frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{3q(1-\beta^2)(x-vt) \cdot z \cdot \beta^2}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{j} - \\ &\quad - \frac{3q(1-\beta^2)y(x-vt) \cdot \beta^2}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

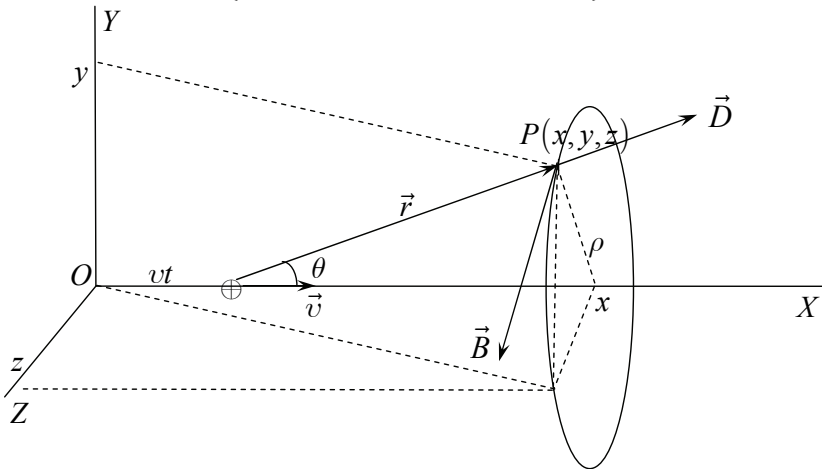


Рис. 4.23. Електромагнітне поле рівномірно рухомої ЗЧ  
З метою спрощення виразів і для більшої прозорості розрахунків і висновків ЕМП будемо розглядати в площині  $XOY$  (рис. 4.24).

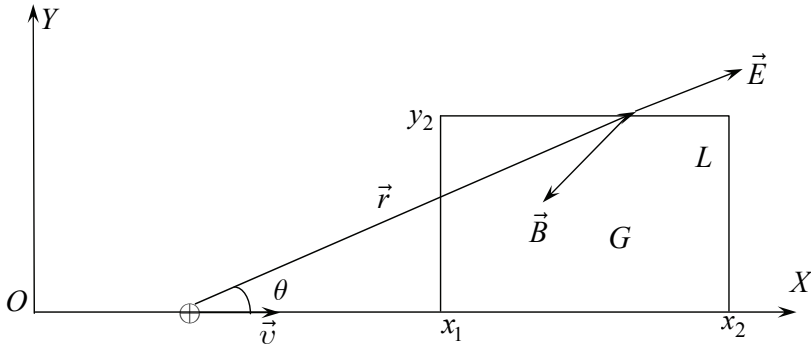


Рис. 4.24. Прямокутний контур  $L$  знаходиться в площині  $XOY$

Тоді

$$\text{rot}_z \vec{D} = - \frac{3q(1-\beta^2)y(x-ut) \cdot \beta^2}{4\pi \left\{ (x-ut)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}. \quad (4.133)$$

Як відомо, циркуляція вектора  $\vec{D}$  може бути знайдена трьома шляхами:

$$1) \oint D_x dx + \oint D_y dy = \int_{x_1}^{x_2} D_x(x_1, y=0) dx + \int_{x_2}^{x_1} D_x(x_1, y=y_2) dx + \\ + \int_{y_1}^{y_2} D_y(x_2, y) dy + \int_{y_2}^{y_1} D_y(x_1, y) dy,$$

причому контур  $L$  необхідно обходити проти годинникової стрілки, щоб область інтегрування  $G$  знаходилася зліва;

2) використовуючи формулу Гріна

$$\oint_L (D_x dx + D_y dy) = \iint \left( \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) dx dy;$$

3) виходячи з фізичного змісту  $\oint \vec{D} d\vec{l}$  (брати відповідні проекції  $\vec{D}$  за чотирима сторонами прямокутного контуру  $L$ ). Але цей шлях приводить до першого способу.

Неважко впевнитися, що всі 3 способи розрахунку циркуляції вектора  $\vec{D}$ ,  $\oint \vec{D} d\vec{l}$ , дають однаковий результат

$$\oint \vec{D} d\vec{l} = \iint_G \left( \frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= \frac{q\beta^2}{4\pi} \left( \frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} \right) + \frac{q\beta^2}{4\pi} \left( \frac{1}{(x - vt)^2 + y_2^2(1 - \beta^2)} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2}. \quad (4.134)$$

У власній системі відліку зарядженої частинки, СВ  $K'$ , контур рухається в кулонівському потенціальному полі. Тому ЕРС у контурі  $\varepsilon' = \oint \vec{E}' d\vec{l} = 0$ .

У СВ  $K$ , що зв'язана з контуром, ЗЧ рухається з деякою швидкістю. Але електричне поле рухомої ЗЧ непотенціальне, і це має принципове значення. Циркуляція цього непотенціального поля не дорівнює нулю:  $\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ . Тому, здавалося б, у будь-якому конурі, відносно якого рухаються ЗЧ (навіть зі швидкостями  $v \ll c$ ), повинна виникати ЕРС, що чисельно дорівнює циркуляції вектора  $\vec{E}$  непотенціального поля РЗЧ.

Цей висновок суперечить принципу відносності. Принцип відносності – один з фундаментальних принципів не тільки фізики, а й сучасного світобачення та методології наукового пізнання. Тому для виконання ПВ слід припустити існування додаткової ЕРС, яка компенсує в будь-який момент часу циркуляцію непотенціального поля  $\oint \vec{E} d\vec{l}$  у контурі  $L$ .

**Приклад 4.11.** Заряджена частинка рухається у вакуумі зі швидкістю  $\vec{v}$ . Показати, що непотенційне електричне поле РЗЧ в кожній точці простору й у довільний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем цієї ж РЗЧ.

*Розв'язання:* Оскільки електромагнітне поле РЗЧ визначається формулами (3.11) та (3.12), то вихор вектора напруженості електричного поля РЗЧ дорівнює

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{3q\beta^2(1 - \beta^2) \cdot (x - vt) \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{j} -$$

$$- \frac{3q\beta^2(1 - \beta^2) \cdot (x - vt) \cdot y}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right\}^{5/2}} \cdot \vec{k},$$



а частинна похідна вектора  $\vec{B}$  [17]

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{3q\beta^2(1-\beta^2) \cdot (x-vt) \cdot z}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2) \cdot (1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{j} +$$

$$+ \frac{3q\beta^2(1-\beta^2) \cdot (x-vt) \cdot y}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2) \cdot (1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}.$$

Порівнюючи ці вирази одержуємо фундаментальне рівняння

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Таким чином, аналіз властивостей електромагнітного поля РЗЧ приводить до однозначної відповіді: непотенціальне, вихрове електричне поле РЗЧ в кожній точці простору, у кожний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем РЗЧ,

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  [17; 30; 31]

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.135)$$

Ще раз підкреслимо, що для виконання ПВ необхідно вимагати, щоб у системі відліку, яка зв'язана з контуром  $L$ , циркуляція вектора  $\vec{E}$  по цьому контуру повністю компенсувалася ЕРС, зумовленою зміною магнітного потоку через поверхню, що обмежена контуром  $L$ . Тобто щоб з точки зору і СВ  $K$ , і СВ  $K'$  у контурі  $L$  не виникало ЕРС.

Власне ця вимога ПВ та непотенціальність електричного поля РЗЧ з однозначністю приводять до рівняння (4.135). Це й дозволяє зробити висновок, що закон електромагнітної індукції (4.135) є наслідком ПВ та закону Кулона.

У методичних цілях упевнімося, що ЕРС в контурі, зображеному на рис. 4.24, який знаходиться в ЕМП РЗЧ, визначається  $\epsilon_{ind} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ .

**Приклад 4.12.** Показати, що зміна в часі магнітного потоку через нерухомий контур  $L$  (рис. 4.24) дорівнює зі знаком мінус циркуляції вектора  $\vec{E}$  РЗЧ по контуру  $L$ .

Розв'язання: Знайдемо потік  $\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  через поверхню, обмеже-

ну прямокутним контуром  $L$  (рис. 4.24),

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

де  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  – індукція магнітного поля РЗЧ в точках цієї поверхні.

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, t) &= \frac{\mu_0 q [\vec{v} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}}, \\ B_z &= \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2) v \cdot r \sin \theta}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 q \cdot (1 - \beta^2) \cdot v \cdot \sqrt{y^2}}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}}, \end{aligned}$$

де  $\sin^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2}$ , див. рис. 4.24.

Оскільки рівняння поверхні  $S$ , яка обмежена контуром  $L$ , має вигляд  $z = f(x, y) = 0$ , то величина магнітного потоку через цю поверхню в довільний момент часу дорівнює

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_z dS = \int_G B_z \cdot dx dy = \\ &= \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2) v}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_2} \frac{y dy}{\left\{ (x - vt)^2 + y^2 (1 - \beta^2) \right\}^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi} \left( \ln \frac{x_2 - vt}{x_1 - vt} - \ln \frac{x_2 - vt + \sqrt{(x_2 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}}{x_1 - vt + \sqrt{(x_1 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, для величини  $-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  одержуємо

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 q v^2}{4\pi} \left( \frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} \right),$$

що збігається з (4.134) для вакууму.

Важливо наголосити, що при використанні нерелятивістських виразів для векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  ЕМП РЗЧ

$$\vec{E}_{np} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \vec{B}_{np} = \frac{\mu_0 [\vec{v} \cdot \vec{r}] q \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{[\vec{v} \cdot \vec{r}] \epsilon_0 \mu_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{E}_{np}]$$

одержуємо результат, що суперечить ПВ,

$$\text{rot} \vec{E}_{np} = 0, \quad \text{але} \quad \frac{\partial \vec{B}_{np}}{\partial t} \neq 0,$$

де  $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор проведений із миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля.

Дійсно, для ситуації, зображеної на рис. 4.24, маємо:

$$\frac{\partial \vec{B}_{np}}{\partial t} = \frac{\partial B_{np}^x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial B_{np}^y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial B_{np}^z}{\partial t} \vec{k},$$

$$\frac{\partial B_{np}^z}{\partial t} = \frac{3\mu_0 q v^2 y (x - vt)}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{5/2}}.$$

А тому

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 q v^2 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - vt)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - vt)^2 + y^2}} \right).$$

У той же час циркуляція вектора  $\vec{E}_{np}$  по контуру  $L$  дорівнює нулеві (оскільки  $rot\vec{E}_{np} = 0$ ). Тобто з точки зору СВ, яка зв'язана із ЗЧ, ЕРС в контурі дорівнює нулю, а з точки зору СВ, яка зв'язана з контуром, ЕРС дорівнює  $-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ . Явне порушення принципу відносності.

*Таким чином, при аналізі будь-яких електромагнітних явищ для одержання коректних несуперечливих результатів слід користуватися формулами та методами теорії відносності.*

**Відтак локальна форма закону ЕМІ впливає як наслідок закону Кулона та ПВ.**

Узагальнюючи цей результат на змінні в часі магнітні поля довільної природи і використовуючи теорему Стокса та принцип суперпозиції, ми одержуємо вираз для ЕРС індукції в нерухомому контурі, рівняння (4.99).

Рівняння  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  обґрунтовано нами для довільної точки простору, в якому існує змінне магнітне поле, **але для точки, нерухомої в даній системі відліку.**

Якщо трохи ускладнити задачу і розглянути рух зі швидкістю  $\vec{V}$  «точки спостереження» в довільному МП  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , то ми знайдемо, що [31]

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (4.136)$$

де  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B}$  – це зміна в часі вектора  $\vec{B}$  з точки зору СВ  $K$  в тілі (середовищі), яке рухається з швидкістю  $\vec{V}$  відносно СВ  $K$ .

При русі «точки спостереження» в полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  субстанціональна, або повна похідна  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  (як уже відзначалося) описує зміну в часі поля  $\vec{B}$  не тільки тому, що це поле нестационарне, а й тому, що точка рухається через неоднорідне поле.

Тобто ми можемо узагальнити закон (4.136) на довільні магнітні поля  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , створені іншими джерелами, а не тільки РЗЧ.

Тобто якщо в неоднорідному й нестационарному полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  зі швидкістю  $\vec{V}$  рухається «точка спостереження», то для повної похідної вектора індукції магнітного поля ми повинні записати, згідно з (4.127)

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V},$$

$\text{div}\vec{B} = 0$  завжди, а при русі тіла як цілого  $\text{div}\vec{V} = 0$  (при  $\vec{V} = \text{const}$ ). Іншими словами,  $\text{div}\vec{V} = 0$  означає «нестисливість» тіла. Тому попередня формула спрощується

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V}. \quad (4.137)$$

Доданок  $(\vec{B}\nabla)\vec{V}$  враховує зміну орієнтації вектора  $\vec{B}$  по відношенню до тіла [34, с. 264]. Цей доданок дорівнює нулю при поступальному русі з  $\vec{V} = \text{const}$  й дорівнює  $[\vec{\omega}, \vec{B}]$  при обертанні тіла ( $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ , де  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість).

Тобто при русі зі швидкістю  $\vec{V}$  «точки спостереження» (наприклад, деякої точки немагнітного провідника) в МП з індукцією  $\vec{B}$  рівняння (4.136) набуває вигляду

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.137a)$$

Якщо поле стаціонарне, то  $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ , і тоді напруженість індукційного електричного поля в провіднику дорівнює

$$\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}],$$

що й інтерпретується як напруженість сили Лорентца в традиційних методиках вивчення закону ЕМІ (див. п. 4.2.1).

У випадку простого розподілу поля в просторі зміст доданку  $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$  можна пояснити з допомогою рис. 4.25, де зображені стаціонарні,

неоднорідні поля  $B_y(x) = a + bx$ ,  $B_y(x) = B_0x^{1/2}$  та  $B_y(x) = B_1x^n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  – деякі постійні величини.

Поділ будь-якого поля на постійне чи змінне має, взагалі кажучи, відносний характер. Наприклад, з точки зору СВ  $K$ , поле  $B_y$  постійне, але неоднорідне, а з точки зору СВ  $K'$ , яка рухається зі швидкістю  $\vec{V} = \text{const}$  вздовж осі  $OX$ , поле  $B_y'(t')$  є функцією часу (рис. 4.25).

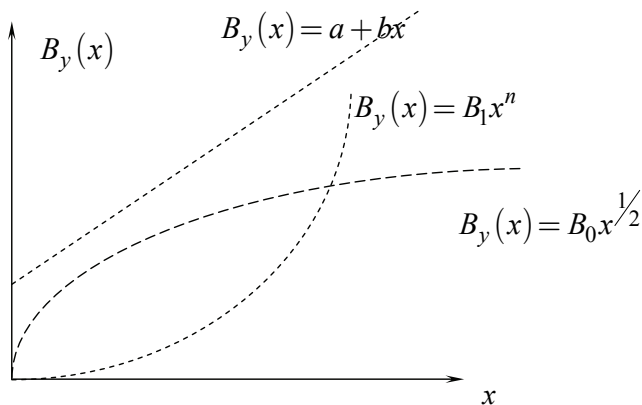


Рис. 4.25. Рух у стаціонарному, але неоднорідному полі спостерігається

$$\text{як змінне поле: } \frac{\partial B_y}{\partial t} = V \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

В існуючих методиках вивчення й пояснення явища ЕМІ якраз і акцентують увагу на виникненні ЕРС в нерухомому і в рухомому контурі в довільному магнітному полі. А потім дивуються тому, що для пояснення цього явища доводиться використовувати дві фізичні причини, незважаючи на те, що практично у всіх випадках має місце «правило потоку».

**Ці фізичні причини об'єднуються в одну, якщо закон ЕМІ записати у формі  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ , яка впливає з принципу відносності та закону Кулона [17; 31].**

І тоді це здивування – «ЕРС індукції в контурі завжди рівна зміні магнітного потоку крізь контур», як показано в [17; 31], – взагалі зникає, якщо уважніше подивитися на закон ЕМІ, (4.136) або (4.137а). Вихрове електричне поле повністю визначається повною похідною за часом від індукції магнітного поля.

Рухомий чи нерухомий контур – відносні твердження, а поділ будь-якого векторного поля на постійне чи змінне носить, взагалі кажучи, відносний характер.

Уявимо контур будь-якої форми, який рухається в довільному магнітному полі  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  зі швидкістю  $\vec{V}$ .

Оскільки ЕРС дорівнює циркуляції вектора  $\vec{E}$ , то, згідно з теоремою Стокса, ця циркуляція повинна дорівнювати потоку ротора вектора  $\vec{E}$ . А тому з урахуванням закону (4.136), (4.137а) маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \\ &= - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Таким чином на основі (4.136) ми одержали закон (4.101), який об'єднує в собі дві фізичні причини виникнення ЕРС індукції.

Тому дивним є не вираз  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ , а фізична інтерпретація та зведення причин виникнення ЕРС тільки до двох, начебто зрозумілих: вихрове електричне поле й сила Лорентца. Тим самим свідомо чи не свідомо звужується спектр фізичних причин виникнення ЕРС.

Інші причини – це третій та п'ятий доданки у виразі для повної похідної за часом вектора  $\vec{B}$ .

**Тобто ПВ лежить в основі об'єднання «двох причин виникнення ЕРС індукції». На феноменологічному, явищному, рівні ці дві причини зумовлені самим процесом пізнання. Вихрове електричне поле породжується тільки  $\frac{d\vec{B}}{dt}$ .**

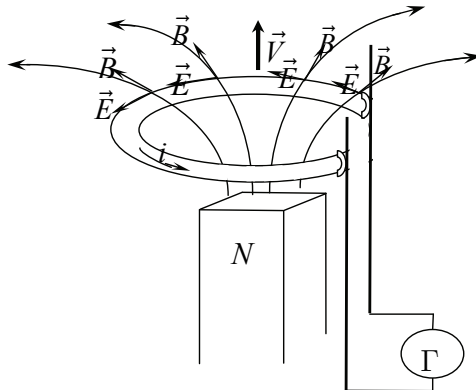


Рис. 4.26. Вихрове електричне поле, яке породжується в кожній точці контуру (локально) полем сили Лорентца

Індукційне електричне поле в будь-якому випадку не потенціальне в цілому. У цілому лінії вектора напруженості індукційного електричного поля  $\vec{E}$  замкнені завжди.

При аналізі моделі, у якій відрізок провідника рухається зі швидкістю  $\vec{V} = const$  в МП, мимовільно формується уявлення про однорідність індукційного електричного поля в цій моделі. Зумовлене воно тим, що в цьому випадку аналіз проводиться локально, без урахування картини електромагнітного поля в цілому.

Індукційний струм, що виникає в контурі при русі його в неоднорідному, стаціонарному магнітному полі, зумовлений вихровим електричним полем, яке породжується в кожній точці контуру (локально) полем сили Лорентца. А більш точно задача описується рівнянням (4.136) з урахуванням (4.137).

У п. 4.2.3 показано (див. пояснення щодо (4.130) та (4.130а)), що й локальне, й інтегральне подання (при  $\vec{V} \neq f(x, y, z)$ ) приводить до того,

що повна похідна вектора  $\vec{B}$ ,  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B}$ , співпадає з повною похідною, яку отримуємо з виразу для повної похідної за часом потоку векторного поля через рухому поверхню, (4.120). При цих умовах такий результат може означати, що всі точки контуру рухаються в дану мить з однаковою швидкістю. *А якщо різна швидкість? Відповіді в інтегральній формі немає. А локальна форма передбачає існування додаткових складових ЕРС індукції???*

Розглянемо приклади, які ілюструють (4.136), де

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V}.$$

Незважаючи на те, що в найбільш загальному вигляді локальне подання закону ЕМІ  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$  приводить до (4.101) та (4.138), упевнимося на конкретних прикладах, що (4.136) описує повністю весь спектр проявів явища ЕМІ.

Тобто покажемо, що локальна форма закону ЕМІ (4.136) описує всі ті явища, які в традиційній методиці вивчення інтерпретуються на основі уявлень про подвійну природу ЕРС індукції.

**Приклад 4.13.** Нехай в площині  $XOY$  СВ  $K$  в однорідному магнітному полі  $\vec{B} = k\vec{B}_z$  знаходиться контур (рис. 4.27). Перемичка  $AB$  рухається зі швидкістю  $\vec{v} = \vec{i}v$ . Знайти напруженість індукційного електричного поля, яке виникає в кожній точці перемички.



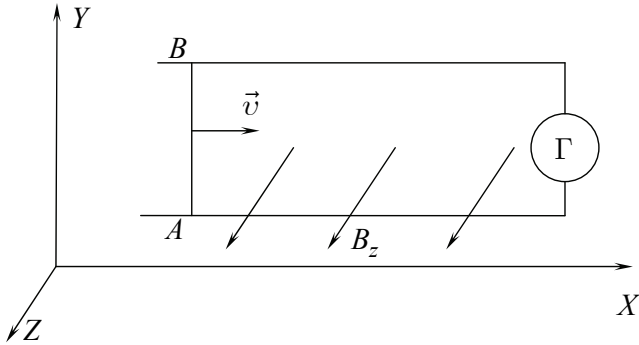


Рис. 4.27. В однорідному МП  $\vec{k}B_z$  рухається перемичка  $AB$

*Розв'язання:* Оскільки МП стаціонарне, то закон ЕМІ (4.136) для цього випадку має вигляд

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Тобто в кожній точці перемички маємо індукційне електричне поле напрямленістю

$$\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}], \quad E_i = -vB_z \vec{j}.$$

У цій задачі, згідно умови, у кожній точці перемички електричне поле не вихрове,  $\text{rot}\vec{E} = 0$ . У цьому можна впевнитися безпосереднім обчисленням величин  $\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]$  або  $-(\vec{v}\nabla)\vec{B}$ .

**Приклад 4.14.** Геометрія задачі така ж, як і в прикладі 4.13, але МП неоднорідне,  $\vec{B} = \vec{k}B_z(x) = \vec{k}B_1x^2$ , де  $B_1$  – деяка постійна. Знайти напруженість індукційного електричного поля, яке виникає в кожній точці перемички.

*Розв'язання:* Використаємо закон ЕМІ

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Перш за все впевнімося безпосереднім обчисленням, що

$$-(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Дійсно, у цьому прикладі

$$(\vec{v}\nabla)\vec{B} = v_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = v\vec{k} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \vec{k}2xvB_1,$$

$$[\vec{v}, \vec{B}] = -\vec{j}vB_z = -\vec{j}vB_1x^2,$$

$$\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = -\left[\left(-\vec{i} \frac{\partial}{\partial z} vB_z\right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x} vB_z\right] = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial x} vB_z = -\vec{k} 2xvB_1.$$

Таким чином

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{v}\nabla)\vec{B} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = -2\vec{k}xvB_1.$$

При вираховуванні геометрії задачі останнє диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\text{rot}_z \vec{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -2\vec{k}xvB_1,$$

$$dE_y = -2\vec{k}xvB_1 \cdot dx,$$

$$E_y = -vB_1x^2 + C = -vB_1x^2.$$

Одержуємо добре відомий зі шкільного та загального курсу фізики результат: напруженість стороннього електричного поля визначається силою Лорентца і дорівнює

$$\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}(x)] = -\vec{j}vB_1x^2.$$

**Приклад 4.15.** Нехай уздовж осі  $OX$  знаходиться достатньо довгий ППС (див. рис. 4.28). Використовуючи (4.136), знайти індукційне електричне поле в «точці», яка рухається зі швидкістю  $\vec{V} = V\vec{j} = \text{const}$ .

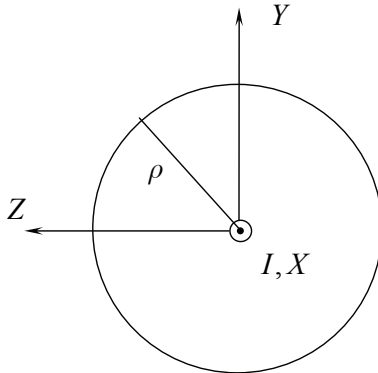


Рис. 4.28. Уздовж осі  $OX$  розташований достатньо довгий ППС, сила струму  $I$

*Розв'язання:* Вектор магнітної індукції в довільній точці простору визначається

$$\vec{B}(y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho^2} [\vec{i}, \vec{r}] = \frac{\mu_0 I}{2\pi (y^2 + z^2)} (-z\vec{j} + y\vec{k}),$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні орти,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор, який визначає точку поля.

Магнітне поле стаціонарне, але неоднорідне.

Припустимо, що «точка» спостереження рухається з постійною швидкістю вздовж вісі  $OY$ ,  $\vec{V} = V\vec{j} = const$ .

Тоді для нашого випадку

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B} = (\vec{V}\nabla)\vec{B} = V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y},$$

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z = \vec{j}B_y + \vec{k}B_z, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \vec{j} \frac{\partial B_y}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial B_z}{\partial y}.$$

Оскільки  $\vec{V} = V\vec{j} = const$ , повна похідна  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  дорівнює

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{V}\nabla)\vec{B} = V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \vec{k}V \frac{\partial B_z}{\partial y} = \vec{k}V \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{y^2} \right).$$

Значить, закон ЕМІ набуває вигляду

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{V}\nabla)\vec{B}.$$

$$\text{Тому } (rot\vec{E})_z = -\frac{\partial E_x}{\partial y} = -V \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{1}{y^2} \right) = V \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{y^2} \right).$$

І звідси отримуємо величину напруженості індукційного електричного поля в точці простору на відстані  $y$  від ППС

$$E_x = V \frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

Це ж значення ми одержимо відразу, не знаходячи попередньо  $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ , а врахувавши, що при такій умові задачі  $(\vec{V}\nabla)\vec{B} = -rot[\vec{V}, \vec{B}]$  (див. формулу (4.126a)).

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{V}\nabla)\vec{B} = rot[\vec{V}\vec{B}],$$

що ще більш детально впливає з закону ЕМІ (4.136)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{B} \right) = \\ &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}] - (\vec{B} \nabla) \vec{V} - \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{B} + \vec{B} \cdot \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}]. \end{aligned}$$

Тобто  $\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}]$ , а для нашої задачі  $\vec{E} = [\vec{V}, \vec{k}B_z]$ , й одержуємо той же результат

$$E_x = \left| [\vec{V}, \vec{k}B_z] \right| = V \frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

Ці результати дозволяють стверджувати (у більш спрощеному формулюванні), що причиною виникнення ЕРС індукції є сила Лорентца.

**Приклад 4.16.** В неоднорідному стаціонарному полі (див. рис. 4.28) вздовж осі  $OY$  рухається рівно прискорено «точка» (або відрізок провідника, паралельний осі  $OX$ ). Прискорення  $a$ . Знайти індукційне електричне поле в цій «точці».

*Розв'язання:* Для вихору індукційного електричного поля маємо

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.139)$$

Ураховуючи вираз для векторного добутку векторів  $[\vec{V}, \vec{B}]$ ,  $[\vec{V}, \vec{B}] = \vec{i}V_y B_z$ , для ротора  $[\vec{V}, \vec{B}]$  одержуємо

$$\operatorname{rot} [\vec{V}, \vec{B}] = \operatorname{rot} (\vec{i}V_y B_z) = \vec{j} \frac{\partial}{\partial z} (V_y B_z) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y} (V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y} (V_y B_z).$$

Тобто права частина рівняння (4.139) дорівнює

$$-\vec{k} \frac{\partial}{\partial y} (V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{2ay} \cdot \frac{\mu_0 I}{2y\pi} \right) = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi y^{3/2}} \vec{k}.$$

Але  $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{k} \frac{\partial E_x}{\partial y}$ , тому із закону ЕМІ одержуємо диференціальне рівняння

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi y^{3/2}}.$$

$$E_x = -\frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi} \int \frac{dy}{y^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

Якщо помножити чисельник і знаменник на  $\sqrt{y}$ , то одержуємо

$$E_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2a}{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{V_y}{2y} \frac{\mu_0 I}{\pi} = V_y \frac{\mu_0 I}{2\pi y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

Чи можемо ми в цій і подібних задачах вважати, що швидкість залежить від координати  $y$  і в правій частині закону ЕМІ (4.136) враховувати доданок  $\text{div}\vec{V}$ , оскільки  $V_y = at = \sqrt{2ay} = f(y)$ ?

При знаходженні  $\text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]$  швидкість є функцією  $y$ , але  $\text{div}\vec{V} = 0$  завжди, яка не була б залежність швидкості руху «точки спостереження» від просторових координат. «Нестисливість тіла» – означає, що  $\text{div}\vec{V} = 0$ .

Порівнюючи розв'язки двох останніх прикладів бачимо, що при русі в неоднорідному магнітному полі з постійною швидкістю  $E_x \approx \frac{1}{y}$ .

При русі ж в цьому неоднорідному магнітному полі, але зі швидкістю, яка залежить від координати  $V_y = at = \sqrt{2ay} = f(y)$ ,  $E_x \approx \frac{1}{\sqrt{y}}$ .

**Приклад 4.17.** Показати, що за умови **Прикладу 4.16** має місце така рівність

$$-(\vec{V}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] - (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V}.$$

*Розв'язання:* 1. Із попереднього прикладу ми маємо

$$\text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] = \text{rot}(\vec{i}V_y B_z) = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot 2\pi y^{3/2}} \vec{k}.$$

2. Диференціальна операція  $(\vec{B}\nabla)\vec{V}$  означає

$$(\vec{B}\nabla)\vec{V} = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{V}$$

Коли «точка» рухається вздовж осі  $OY$ , то  $(\vec{B}\nabla)\vec{V} = \left( B_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{V} = B_y \frac{\partial}{\partial y} (\vec{j}V_y) = 0$ , оскільки  $B_y = 0$  на осі  $OY$  (див. рис. 4.28).

У цьому прикладі  $(\vec{B}\nabla)\vec{V} \neq 0$ , тільки тоді коли «точка» рухається нерівномірно ще (або) й у напрямку осі  $OZ$ , тобто, при умові  $\vec{V} = \vec{i}V_x + V_y(y,z)\vec{j} + \vec{k}V_z(y,z)$ .

$$3. V_y = at = \sqrt{2ay} = f(y).$$

$$\text{Якщо так, то } \operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{2ay} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

Тобто права частина нашої рівності дорівнює

$$\begin{aligned} & -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) + \vec{k} B_z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{y}} = \\ & = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2ay} \cdot \frac{\mu_0 I}{2y\pi}\right) + \vec{k} B_z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{y}} = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2\pi y^{3/2}} \vec{k} / \end{aligned}$$

Оскільки  $\operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + \vec{B} \cdot \operatorname{div}\vec{V} = \frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2\pi y^{3/2}} \vec{k}$ , то для порівняння

знайдемо  $-(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ .

$$\text{Оскільки } \vec{B}(y,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2}[\vec{i}, \vec{r}] = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y^2 + z^2)}(-z\vec{j} + y\vec{k}), \text{ то}$$

$$\text{на осі } OY \quad \vec{B} = \vec{k} B_z(y) = \vec{k} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}.$$

$$\begin{aligned} (\vec{V}\nabla)\vec{B} &= V_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = V_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \\ &= \sqrt{2ay} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{1}{y^2}\right) \vec{k} = -\frac{\mu_0 I \cdot \sqrt{2a}}{2\pi y^{3/2}} \vec{k}. \end{aligned}$$

Тобто рівність має місце.

Але незважаючи на це при використанні закону ЕМІ (4.136), навіть якщо швидкість руху «точки спостереження» і залежить від просторових координат  $x, y, z$ , слід вважати, що  $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ .

А якщо ми маємо і поступальний рух, то закон (4.136) спрощується до (4.137а)

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}],$$

у якому  $\vec{V}$  та  $\vec{B}$  слід розглядати (в залежності від умов конкретної задачі) як функції просторових координат.

Тому, можливо, при використанні (4.136) простіше знаходити відразу диференційну операцію  $-(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ .

**Приклад 4.18.** В однорідному МП  $\vec{B} = k\vec{B}_z$  в площині  $XOY$  знаходиться дріт, що має форму параболи (рис. 4.29). З вершини параболи переміщують поступально і без початкової швидкості перемичку з постійним прискоренням  $a$ . Знайти ЕРС індукції в контурі, що утворився, як функцію координати  $y$ .

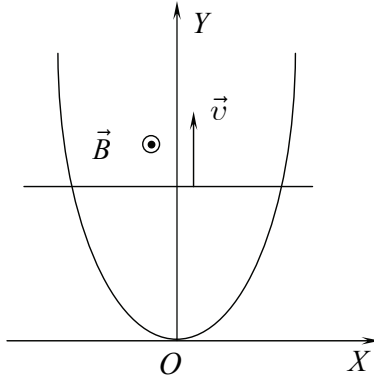


Рис. 4.29.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] &= \text{rot}(\vec{i}V_y B_z) = \vec{j} \frac{\partial}{\partial z}(V_y B_z) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) = \\ &= -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z). \end{aligned}$$

Тобто права частина рівняння (4.139) дорівнює

$$-\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(V_y B_z) = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{2ay} \cdot B_z) = -\frac{B_z \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot y^{1/2}} \vec{k}.$$

Інтегруючи диференційне рівняння

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{B_z \cdot \sqrt{2a}}{2 \cdot y^{1/2}},$$

одержуємо для напруженості індукційного електричного поля

$$E_x = \sqrt{2ay} \cdot B_z.$$

Позитивне значення  $E_x$  означає, що вектор напруженості індукційного електричного поля направлений вздовж осі  $OX$ .

У кожному мить ЕРС індукції дорівнює

$$\varepsilon = E_x 2x = \sqrt{2ay} \cdot B_z 2\sqrt{\frac{y}{k}} = B_z y \sqrt{\frac{8a}{k}}.$$

**Приклад 4.19.** В електромагнітному полі РЗЧ в площині  $XOY$  знаходиться прямокутний контур  $L$  (рис. 4.30). Перемичка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж осі  $OX$ . Визначити напруженість електричного поля в кожній точці перемички та ЕРС індукції в контурі.

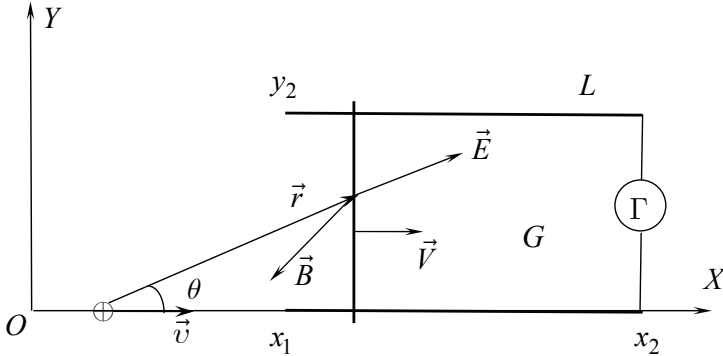


Рис. 4.30.

*Розв'язання:* Скористаємося законом ЕМІ

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{V} \nabla) \vec{B},$$

$$\text{де, } \vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 q [\vec{v} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}}, \quad \vec{v} - \text{швидкість}$$

руху ЗЧ.

Оскільки ми розглядаємо контур, який лежить в площині  $XOY$ ,

$$\text{то } \vec{B} = \vec{k} B_z, \text{ де } B_z = \frac{\mu_0 q \cdot (1 - \beta^2) \cdot v \cdot y}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2)(1 - \beta^2) \right\}^{3/2}}.$$



Із розв'язання та обговорення попередніх задач випливає

$$\left(\vec{B}\nabla\right)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V} = 0.$$

Було також показано, що непотенційне електричне поле РЗЧ в кожній точці простору й у довільний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем цієї ж РЗЧ.

Тобто при кожному миттєвому положенні перемички індукційне електричне поле буде породжуватися тільки доданком  $-\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{B}$ , і закон ЕМІ для нашої задачі набуває вигляду

$$\text{rot}\vec{E} = -\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{B}.$$

До речі, як і в **Прикладі 4.14**, можна впевнитися, що  $-\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{B} = \text{rot}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$ .

Знаходимо

$$\begin{aligned} -\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{B} &= -V_x \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} - V_y \frac{\partial\vec{B}}{\partial y} - V_z \frac{\partial\vec{B}}{\partial z} = -V_x \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} = -\vec{k}V \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\ -\vec{k}V \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \vec{k}V \frac{3\mu_0 q \cdot (1-\beta^2) \cdot v \cdot y(x-vt)}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}}. \end{aligned}$$

Диференційне рівняння, яке відповідає закону ЕМІ, має вигляд

$$\text{rot}_z \vec{E} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = V \frac{3\mu_0 q \cdot (1-\beta^2) \cdot v \cdot y(x-vt)}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}},$$

$$E_y = \int V \frac{3\mu_0 q \cdot (1-\beta^2) \cdot v \cdot y(x-vt)}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} dx = -VB_z.$$

Ми знову приходимо до висновку, що про індукційне електричне поле можна говорити як про поле сили Лорентца.

#### 4.2.5. Рух у магнітному полі діелектричної або провідної рідини

Потік діелектричної рідини між пластинами, які знаходяться в однорідному магнітному полі.

**Приклад 4.20.** Нехай між двома нескінченими пластинами  $A_1$  та  $A_2$ , які паралельні координатній площині  $XOY$ , рухається діелектрична рідина (рис. 4.31). Індукція зовнішнього магнітного поля  $\vec{B}_0$  направлена вздовж осі  $OY$ , відстань між пластинами  $d$ , швидкість рідини залежить від  $z$ ,  $\vec{v}(z)$ . Знайти напругу між пластинами  $A_1$  та  $A_2$ .

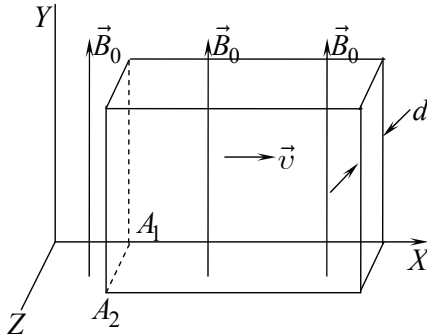


Рис. 4.31. Між двома пластинами  $A_1$  та  $A_2$ , які паралельні координатній площині  $XOY$ , рухається діелектрична рідина

*Розв'язання:* Супутню СВ (СВ  $K'$ ) можна зв'язати з довільним шаром рідини, що має швидкість  $\vec{v}(z)$ . І, згідно з формулами перетворення компонент ЕМП для нерелятивістського випадку, маємо

$$\vec{E}(z) = \vec{E}'(z) - [\vec{v}(z), \vec{B}'(z)],$$

$$\vec{B}(z) = \vec{B}'(z) + \frac{[\vec{v}(z), \vec{E}'(z)]}{c^2},$$

де  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$  – напруженість електричного й індукція магнітного полів у супутній СВ.

Але в СВ  $K'$  ми не можемо записати для індукції магнітного поля  $\vec{B}' = \mu \vec{B}_0$ , оскільки у супутній СВ магнітне поле визначається не тільки зовнішнім МП  $\vec{B}_0$ , а й МП, яке виникає внаслідок відносного руху частинок, для яких об'ємна густина зв'язаних зарядів не дорівнює нулеві. Якби ми розглядали рух твердого тіла, а не рідини, то всі части-

нки рухалися б з однаковою швидкістю (відносна швидкість частинок дорівнювала б нулю) і додаткового МП не виникало б [12, с. 51].

Оцінімо внесок в електричне поле цього додаткового МП. Застосуємо рівняння (4.37)

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{V}, \vec{E}] \right\} + \vec{j}' + \rho \vec{V}$$

до тонкого шару рідини, який рухається зі швидкістю  $\vec{v}(z)$ .

У нашому випадку  $E = E_z, B = B_y, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \vec{j} = 0, \rho \vec{v} = 0$ . І тоді з (4.37) одержуємо

$$-\frac{\partial B}{\partial z} = -\mu_0 \mu \left( \varepsilon_0 \varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} [\vec{v}, \vec{E}]_y.$$

Інтегрування дає

$$B = \mu \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1/\mu) v E + C_1, \quad (4.140)$$

де  $C_1$  знаходиться з початкових умов -  $v = 0, B = \mu B_0$ . І тоді  $C_1 = \mu B_0$ .

Із (4.32) знаходимо значення вектора  $\vec{E}$  в діелектрику

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}],$$

$$E = - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \cdot v B + \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \cdot v B + \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (4.141)$$

де  $\sigma_A$  - поверхнева густина заряду на пластині.

Розв'язуючи систему рівнянь (4.140) та (4.141) і нехтуючи доданком, який пропорційний  $\frac{v^2}{c^2}$ , для індукції додаткового МП одержуємо

$$B = \mu \left( \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \mu_0 \varepsilon_0 \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) v + \mu B_0.$$

Видно, що  $\mu \left( \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \mu_0 \varepsilon_0 \left( \varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) v$  - величина набагато менша,

ніж  $\mu B_0$ .

Таким чином, електричне поле в рухомому рідкому діелектрику визначається

$$E = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) \cdot v(z) B.$$

Тоді різниця потенціалів між пластинами  $A_2$  і  $A_1$  дорівнює

$$\varphi_{A_2} - \varphi_{A_1} = - \int_{z_{A_2}}^{z_{A_1}} E_z dz = - \frac{\sigma_A d}{\varepsilon_0 \varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) B \int_{A_2}^{A_1} v(z) dz.$$

З урахуванням перетворень, поданих у пункті 4.3.2 для напруги, яку показує вольтметр, маємо

$$U = d \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) B \frac{C}{C + C'} \int_{A_2}^{A_1} v(z) dz = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) B \frac{C}{C + C'} V_{\text{серед}},$$

де  $V_{\text{серед}} = \frac{1}{d} \int_{A_2}^{A_1} v(z) dz$  – середнє значення швидкості рідини.

Припустимо тепер, що між пластинами  $A_1$  та  $A_2$  протікає рідина, яка характеризується питомою електропровідністю  $\lambda$  та магнітною проникністю  $\mu$ .

Тоді в будь-якій точці рідини сумарне електричне поле, якщо тільки до пластин не підключений гальванометр, повинно дорівнювати нулю

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] = 0.$$

Тут  $\vec{B}$  – це вектор магнітної індукції в рухомій рідині, визначений в СВ  $K$ . Вектор  $\vec{B}$  у кожній точці рідини визначається не тільки зовнішнім магнітним полем  $\vec{B}_0$ , але й відносним рухом зарядів розподілених в об'ємі рідини.

Використовуючи (4.37) та умови задачі ( $\vec{j}' = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ), можемо записати

$$\frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot} \vec{B} = -\text{rot}(\varepsilon_0 \varepsilon - \varepsilon_0) [\vec{v}, \vec{E}] + \rho \vec{v}$$

або

$$\text{rot} \left\{ \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B} - (\varepsilon_0 \varepsilon - \varepsilon_0) [\vec{v}, [\vec{v}, \vec{B}]] \right\} = \rho \vec{v}.$$

Неважко впевнитися, що

$$\frac{1}{\mu_0\mu} \vec{B} \gg (\varepsilon_0\varepsilon - \varepsilon_0) [\vec{v}, [\vec{v}, \vec{B}]],$$

тому вихор індукції магнітного поля дорівнює

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0\mu\rho\vec{v}. \quad (4.141a)$$

**Приклад 4.21.** Знайти об'ємну густину заряду  $\rho_{зв}$ , зумовленого рухом намагніченої рідини.

*Розв'язання:* Внаслідок руху рідини зі швидкістю  $\vec{v}(z)$  різні точки її характеризуються різним значення вектора намагнічування, а значить, і різним вектором поляризації. Тому в об'ємі рідини з'являються зв'язані заряди. Об'ємну густину яких можна знайти двома шляхами.

Перший полягає в знаходженні спочатку густини вільного заряду і повної густини заряду. Тоді  $\rho_{зв} = \rho_{повн} - \rho$ .

Другий спосіб знаходження  $\rho_{зв}$  оснований на використанні рівняння  $\rho_{зв} = -\text{div} \vec{P}$ , де вектор поляризації згідно з (4.24), оскільки  $\vec{P}' = 0$ ,  $\vec{P} = \frac{[\vec{v}, \vec{M}']}{c^2}$ , де вектор намагнічування згідно з (4.23)  $\vec{M}' = \frac{\mu - 1}{\mu_0\mu} \vec{B}'$ .

Цей спосіб знаходження  $\rho_{зв}$  буде неодноразово реалізований в пунктах 4.2.9 та 4.2.10.

Тому зупинимося на першому способі.

Розподіл вільного заряду, як відомо, може бути знайдений з рівняння Максвелла

$$\rho = \text{div} \vec{D},$$

де індукція електричного поля визначається (4.32), а для нашого випадку дорівнює

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{v}, \vec{B}] = -\varepsilon_0\varepsilon [\vec{v}, \vec{B}] + \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{v}, \vec{B}].$$

Тоді для густини вільного заряду одержуємо

$$\begin{aligned} \rho = \text{div} \vec{D} &= -\text{div} \left( \varepsilon_0\varepsilon [\vec{v}, \vec{B}] \right) + \text{div} \left\{ \left( \varepsilon_0\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{\mu} \right) [\vec{v}, \vec{B}] \right\} = \\ &= -\text{div} \left( \frac{\varepsilon_0}{\mu} [\vec{v}, \vec{B}] \right). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Повну густину заряду визначасмо з рівняння Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{повн}}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_{\text{повн}} = \rho_{\text{зв}} + \rho = \varepsilon_0 \frac{dE}{dz} = -\varepsilon_0 \frac{d(vB)}{dz}.$$

Тому для  $\rho_{\text{зв}}$  маємо

$$\begin{aligned} \rho_{\text{зв}} &= -\varepsilon_0 \frac{d(vB)}{dz} - \rho = -\varepsilon_0 \frac{d(vB)}{dz} + \frac{\varepsilon_0}{\mu} \frac{d(vB)}{dz} = \\ &= -\varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{d(vB)}{dz} = -\varepsilon_0 \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{d(vB)}{dz}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Вирази (4.142) та (4.143) визначають розподілений в об'ємі рухо­мої рідини вільний і зв'язаний заряди.

Враховуючи геометрію задачі, рівняння (4.141а) та (4.142) набу­вають вигляду

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{dB}{dz} &= \rho v, \\ -\frac{\varepsilon_0}{\mu} \frac{d(vB)}{dz} &= \rho. \end{aligned}$$

Система цих двох рівнянь дає диференційне рівняння для знахо­дження  $B(z)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dz}(vB) &= \frac{1}{v} \frac{dB}{dz}, \\ (1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0) \frac{dB}{dz} &= \varepsilon_0 \mu_0 v B \frac{dv}{dz}. \end{aligned}$$

У результаті інтегрування одержуємо

$$B(z) = \frac{C}{\sqrt{(1 - v^2(z) \varepsilon_0 \mu_0)}},$$

де постійна інтегрування  $C = \mu B_0$  знаходиться з початкових умов ( $B = \mu B_0$  при  $v(z) = 0$ ).

Тобто індукція магнітного поля залежить від швидкості рідини в даній точці

$$B(z) = \frac{\mu B_0}{\sqrt{1 - v^2(z)\epsilon_0\mu_0}} = \frac{\mu B_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \mu B_0. \quad (4.144)$$

Таким чином, різниця потенціалів між пластинами  $A_1$  та  $A_2$  дорівнює

$$\begin{aligned} \varphi_{A_2} - \varphi_{A_1} &= - \int_0^d E dz = \mu \int_0^d v(z) B_0 (1 - v^2(z)\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} dz \approx \\ &\approx \mu_r B_0 \int_0^d v(z) dz \end{aligned}$$

Із рівняння (4.142) для об'ємної густини вільного заряду при умові  $B(z) \approx \mu B_0$  маємо

$$\rho \approx -\epsilon_0 B_0 \frac{dv}{dz}.$$

А щоб знайти  $\rho_{зв}$  необхідно в (4.143) підставити (4.144).

#### 4.2.6. Поступальний рух немагнітного провідника в однорідному магнітному полі

Проведемо аналіз традиційної фізичної моделі: відносно лабораторної СВ  $K$  в однорідному магнітному полі з постійною швидкістю рухається відрізок провідника (див. рис. 4.32). Необхідно знайти й проаналізувати ЕМП, яке виникає всередині та зовні провідника.

Слід сказати, що ця задача в існуючих посібниках розв'язується тільки в нерелятивістському наближенні [3; 4; 7; 9; 29; 96].

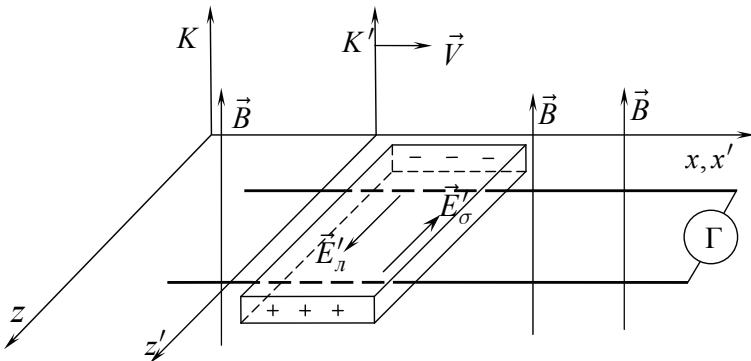


Рис. 4.32. Виникнення електричних полів у металевій пластині при русі її в однорідному магнітному полі

Цей аналіз проведемо у два етапи. Спочатку знайдемо ЕМП як всередині, так і зовні провідника, а потім порівняємо процедуру й результат знаходження ЕМП у металевій пластині в СВ  $K'$  за вихідними даними в СВ  $K$ , а також при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  за нерелятивістськими й точними ФПКЕМП.

У СВ  $K$  маємо поля  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_\perp$ .

СВ  $K'$  ми зв'яжемо з самим провідником. Спочатку проаналізуємо ЕМП в СВ  $K'$  та СВ  $K$  в точках простору, віддалених від металевієї пластини.

Тоді, використовуючи обернені ФПКЕМП

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{E}_{\perp} + [\vec{V}, \vec{B}] \right), \quad (4.145)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \Gamma \left( \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}] \right), \quad (4.146)$$

для ЕМП в системі відліку  $K'$  поза межами пластини одержуємо

$$\vec{E}'_{\perp} = \Gamma [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}], \quad (4.147)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \Gamma \vec{B}_{\perp}. \quad (4.148)$$

Тобто в СВ  $K'$  в точках простору, достатньо віддалених від провідника, ЕМП характеризується величинами

$$\vec{E}'_{\perp} = \Gamma [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}] \quad \text{та} \quad \vec{B}'_{\perp} = \Gamma \vec{B}_{\perp}.$$

Електричне поле  $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]$  викликає перерозподіл зарядів на поверхні металевієї пластини, які всередині цієї металевієї пластини повністю компенсують поле  $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]$ .

Тобто поле розділених зарядів у ВСВ пластини дорівнює

$$\vec{E}'_{\sigma} = -\Gamma [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]. \quad (4.149)$$

До речі, така ж ситуація виникає, коли в однорідне електричне поле внести металевий провідник. І задача розрахунку картини електричного поля в СВ  $K'$  зводиться, таким чином, до розрахунку поля провідника, який знаходиться в зовнішньому стаціонарному електричному полі.

І тому, з точки зору СВ  $K'$ , у металевій пластині електричне поле дорівнює нулю.

До такого ж результату ми приходимо, аналізуючи явище з точки зору СВ  $K$ .



Як відомо, на ЗЧ при русі її зі швидкістю  $\vec{V}$  в МП з індукцією  $\vec{B}$  діє сила  $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}]$ . Цей вираз в електродинаміці розглядається як результат узагальнення сукупності дослідних даних [2–7] або як наслідок ПВ [40], див. також **Приклад 3.5**.

Тому в СВ  $K$  на вільні заряди, які рухаються разом з пластиною, діє сила Лорентца  $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ . Під дією цієї сили ЗЧ в самій пластині розділяються і всередині неї; з точки зору СВ  $K$ , виникає електричне поле напруженістю

$$\left(\vec{E}_\perp\right)_{\text{сврд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]. \quad (4.150)$$

Іншими словами, поле сили Лорентца  $\vec{E}_L = [\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  в СВ  $K$  повністю компенсується всередині пластини електричним полем розділених силою Лорентца вільних зарядів.

Тобто всередині пластини в СВ  $K$  існує поле  $\vec{E}_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ .

Таким чином, у СВ  $K'$ , що зв'язана з металевою пластиною, існує ЕМП, яке всередині пластини, згідно з формулою (4.145), характеризується напруженістю електричного поля

$$\vec{E}'_{\text{сврд}} = \Gamma\left(\left(\vec{E}_\perp\right)_{\text{сврд}} + [\vec{V}, \vec{B}_\perp]\right) = \Gamma\left(\vec{E}_\sigma + [\vec{V}, \vec{B}_\perp]\right) = 0.$$

**Тобто, з точки зору СВ  $K'$ , електричне поле всередині пластини  $\vec{E}'_{\text{сврд}} = 0$ , а з точки зору СВ  $K$ , електричне поле всередині пластини не дорівнює нулю:**  $\left(\vec{E}_\perp\right)_{\text{сврд}} = \vec{E}_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ .

Тоді, згідно з формулами перетворення поперечних компонент сил  $\vec{E}_\sigma = \vec{E}'_\sigma \cdot \sqrt{1 - B^2}$ , поле розділених зарядів у ВСВ пластини дорівнює

$$\vec{E}'_\sigma = -\vec{E}'_\perp = -\Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp].$$

Тобто ми прийшли майже з незалежних міркувань, найбільш прозорих мовою сили Лорентца, до висновку, що з точки зору СВ  $K$ , електричне поле всередині пластини дорівнює  $\left(\vec{E}_\perp\right)_{\text{сврд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ , а у ВСВ  $E'_\sigma$  визначається (4,149).

Тепер знайдемо індукцію магнітного поля всередині пластини з точки зору СВ  $K'$ . Очевидно, слід скористатися формулою (4.146).

При цьому слід зробити важливе зауваження, яке стосується поняття рухомого поля.

Раніше ми прийшли до висновку (див. (4.150)), що, з точки зору СВ  $K$ , електричне поле всередині пластини дорівнює  $(\vec{E}_\perp)_{\text{всрд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ . Якщо вважати, що це поле начебто «рухається» разом з пластиною відносно СВ  $K$ , то приходимо до суперечливого неприйняттого результату.

Дійсно, тоді, з точки зору СВ  $K$ , виникає додаткове магнітне поле, яке породжується цим «рухомим» електричним полем  $(\vec{E}_\perp)_{\text{всрд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$

$$\vec{B}_E = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, E_\sigma] = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, (-[\vec{V}, \vec{B}_\perp])] = \frac{V^2}{c^2} \vec{B}_\perp.$$

Як це може бути? У СВ  $K$  було тільки поле  $\vec{B}_\perp$ . Почали рухати незаряджений провідник, і МП всередині його збільшилось на величину

$$\vec{B}_E = \frac{V^2}{c^2} \vec{B}_\perp. \text{ За рахунок чого?}$$

$$\text{Значить, ми повинні розглядати поле } (\vec{E}_\perp)_{\text{всрд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$$

як **просто існує в СВ  $K$ , а не таке, що рухається відносно СВ  $K$ .**

Тобто в СВ  $K$  всередині пластини ЕМП визначається векторами  $\vec{B}_\perp$  та  $(\vec{E}_\perp)_{\text{всрд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ .

Тоді це поле  $\vec{E}_\sigma$  рухається відносно СВ  $K'$ , а значить, у ВСВ пластини індукція МП дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{B}'_\perp &= \Gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}_\sigma]) = \Gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2} [\vec{V}, (-[\vec{V}, \vec{B}_\perp])]\right) = \\ &= \Gamma \vec{B}_\perp \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma}. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Таким чином, всередині пластини ЕМП визначається:

$$\text{– в СВ } K: (\vec{E}_\perp)_{\text{всрд}} = E_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp], \vec{B}_\perp; (*)$$

$$\text{– в СВ } K': \vec{E}' = 0, \vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp}{\Gamma}.$$

Якщо розрахунки вести в нерелятивістському наближенні, то начебо і простіше записати поля в СВ  $K'$  за відомими полями СВ  $K$ . Вони будуть просто дорівнювати одне одному. Але тоді майже неможливо перевірити правильність знаходження полів шляхом переходу від однієї системи відліку до іншої.

**ЕМП поза межами провідника. Нерелятивістське наближення.**

Дійсно, в СВ  $K$  ЕМП поза межами провідника дорівнює

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} = \vec{B}_\perp = B \cdot \vec{j}.$$

Тоді в СВ  $K'$ , згідно з (4.145)–(4.148), у нерелятивістському наближенні маємо в кожній точці поза межами металевої пластини

$$\vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp, \quad \vec{E}' = \vec{E}'_\perp = [\vec{V}, \vec{B}_\perp].$$

Тоді, повертаючись знову в СВ  $K$ , згідно з формулами (4.1) та (4.2)

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}'_\perp - [\vec{V}, \vec{B}'],$$

$$\vec{B}_\perp = \vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'],$$

та оскільки  $\vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp$ , одержуємо

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}'_\perp - [\vec{V}, \vec{B}'_\perp] = [\vec{V}, \vec{B}_\perp] - [\vec{V}, \vec{B}'_\perp] = 0.$$

Тобто одержали вірний результат для вихідного значення напруженості електричного поля поза межами металевої пластини, використовуючи нерелятивістське наближення.

Але для магнітного поля в СВ  $K$ , за відомим ЕМП в СВ  $K'$ , одержуємо **парадоксальний і неприйнятний результат**:

$$\begin{aligned} \vec{B}_\perp &= \vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, \vec{E}'] = \vec{B}_\perp + \frac{1}{c^2} [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{B}_\perp]] = \\ &= \vec{B}_\perp + \frac{1}{c^2} (\vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{B}_\perp) - \vec{B}_\perp (\vec{V} \cdot \vec{V})) = \\ &= \vec{B}_\perp + \frac{1}{c^2} (-\vec{B}_\perp V^2) = \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \cdot \vec{B}_\perp. \end{aligned}$$

Тобто ФПКЕМП в нерелятивістському наближенні при циклічному застосуванні їх дають відповіді, що не відповідають дійсності, точніше кажучи, дають неправильні результати. Це, мабуть, відбувається тому, що в наближену (неточну) формулу підставляємо неточні (наближені) значення полів, знайдені з допомогою подібної неточної формули.

### ЕМП поза межами провідника. Використання точних формул.

Водночас при тих же вихідних даних у СВ  $K$  ( $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_\perp$ ), у СВ  $K'$ , згідно з **точними формулами перетворення** (4.145) і (4.146), маємо поля  $\vec{E}'_\perp = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  та  $\vec{B}'_\perp = \Gamma\vec{B}_\perp$ .

Тому при переході знову в СВ  $K$  із СВ  $K'$  на основі точних ФПКЕМП одержуємо для ЕМП в просторі зовні провідника

$$\begin{aligned}\vec{E}_\perp &= \Gamma\left(\vec{E}'_\perp - [\vec{V}, \vec{B}'_\perp]\right) = \Gamma\left(\Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp] - [\vec{V}, \Gamma\vec{B}_\perp]\right) = 0, \\ \vec{B}_\perp &= \Gamma\left(\vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}'_\perp]\right) = \Gamma\left(\Gamma\vec{B}_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp]_\perp]\right) = \\ &= \Gamma^2\left(\vec{B}_\perp - \frac{V^2}{c^2}\vec{B}_\perp\right) = \vec{B}_\perp.\end{aligned}$$

Тобто одержали вихідні значення ЕМП в СВ  $K$ .

Тепер порівняємо процедуру й результат знаходження ЕМП в металевій пластині в СВ  $K'$  за вихідними даними в СВ  $K$ , а потім при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$  за нерелятивістськими й точними ФПКЕМП.

### ЕМП в провіднику. Нерелятивістське наближення.

Поле  $\vec{E}'_\perp = [\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ , яке виникає в СВ  $K'$  як наслідок руху відносно  $K'$  магнітного поля  $\vec{B}_\perp$  зі швидкістю  $-\vec{V}$ , призводить до перерозподілу зарядів усередині металевієї пластини, внаслідок чого виникає всередині індукційне поле  $\vec{E}'_{ind} = \vec{E}'_{nz} \equiv \vec{E}'_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ , котре зумовлене поверхневими зарядами й компенсує поле  $\vec{E}'_\perp = [\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  всередині провідника в СВ  $K'$ .

І тому в СВ  $K'$  в провіднику сумарне поле дорівнює нулеві –  $\vec{E}' = \vec{E}'_\perp + \vec{E}'_\sigma = 0$ .

До цього висновку можна прийти й іншим шляхом. Дійсно, згідно з традиційними уявленнями, у СВ  $K$  під дією сили Лорентца  $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  заряди в рухомому провіднику розділяються, а всередині нього, з точки зору СВ  $K$ , виникає електричне поле напруженістю  $\vec{E}_\perp = \vec{E}'_{ind} = \vec{E}'_{nz} \equiv \vec{E}'_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ .

Тоді ЕМП в провіднику з точки зору СВ  $K$ :  $\vec{E}_\perp = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ ,  $\vec{B}_\perp$ .

Тому, якщо вважати, що поле  $\vec{E}_\perp = -[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  рухається відносно СВ  $K'$ , то за формулою (4.10) знаходимо індукцію МП в системі  $K'$

$$\vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}_\perp] = \vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{V}, (-[\vec{V}, \vec{B}_\perp])] = \vec{B}_\perp \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

– значення, що відповідає правильному.

Тоді в СВ  $K$ , якщо ЕМП в СВ  $K'$  визначається векторами  $\vec{E}' = \vec{E}'_\perp + \vec{E}'_\sigma = [\vec{V}, \vec{B}_\perp] + \vec{E}'_\sigma = 0$  та  $\vec{B}'_\perp \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$ , маємо

$$\vec{E}_\perp = \vec{E}' - [\vec{V}, \vec{B}'_\perp] = 0 - \left[\vec{V}, \vec{B}_\perp \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] = -\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot [\vec{V}, \vec{B}_\perp],$$

що суперечить істинному значенню (див. (\*) електричного поля СВ  $K$ ;

$$\vec{B}_\perp = \vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, \vec{E}'] = \vec{B}_\perp \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}[\vec{V}, 0] = \vec{B}_\perp \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right),$$

що суперечить значенню магнітного поля СВ  $K$ , знайденому згідно з точними ФПКЕМП.

### ЕМП в провіднику. Використання точних ФПКЕМП.

У СВ  $K'$  у точках простору, достатньо віддалених від провідника, як уже відзначалось, ЕМП характеризується величинами

$$\vec{E}'_\perp = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp] \text{ та } \vec{B}'_\perp = \Gamma\vec{B}_\perp.$$

Поле  $\vec{E}'_\perp = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  викликає перерозподіл зарядів на поверхні провідника, які всередині цієї металевої пластини повністю компенсують поле  $\vec{E}'_\perp = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$ .

Тобто поле розділених зарядів у ВСВ пластини дорівнює (4.149)

$$\vec{E}'_\sigma = -\vec{E}'_\perp = -\Gamma[\vec{V}, \vec{B}_\perp].$$

До речі, повторимося, ситуація точно така ж, коли в однорідне електричне поле внести металевий провідник.

У СВ  $K$  під дією сили Лорентца  $\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}_\perp]$  вільні заряди, які рухаються разом з пластиною, у самій пластині розділяються і всередині неї, з точки зору СВ  $K$ , виникає електричне поле напруженістю

$$\left(\vec{E}_{\perp}\right)_{всрд} = E_{\sigma} = -\left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right].$$

Таким чином, як уже відзначалося вище, електричне поле розділених зарядів у ВСВ пластини  $\vec{E}'_{\sigma} = -\vec{E}'_{\perp} = -\Gamma\left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right]$  компенсує поле  $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma\left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right]$ , що виникає в СВ  $K'$  внаслідок руху магнітного поля  $\vec{B}_{\perp}$  відносно пластини. І тому

$$\vec{E}' = \Gamma\left(\left(\vec{E}_{\perp}\right)_{всрд} + \left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right]\right) = \Gamma\left(\vec{E}_{\sigma} + \left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right]\right) = 0.$$

Таким чином, всередині пластини ЕМП визначається (\*):

$$\text{– в СВ } K: \left(\vec{E}_{\perp}\right)_{всрд} = E_{\sigma} = -\left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right], \vec{B}_{\perp};$$

$$\text{– в СВ } K': \vec{E}' = 0, \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp}}{\Gamma}.$$

Чи одержимо ми узгоджене рішення для ЕМП в СВ  $K$  за знайденими всередині пластини  $\vec{E}' = 0, \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp}}{\Gamma}$  полями в СВ  $K'$ ?

Згідно з (2.1) та (2.2) одержуємо

$$\vec{E}_{\perp} = \Gamma\left(E'_{\perp} - \left[\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}\right]\right) = \Gamma\left(0 - \left[\vec{V}, \frac{\vec{B}_{\perp}}{\Gamma}\right]\right) = -\left[\vec{V}, \vec{B}'_{\perp}\right],$$

$$\vec{B}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\left[\vec{V}, \vec{E}'\right]\right) = \Gamma\left(\frac{\vec{B}_{\perp}}{\Gamma} + \frac{1}{c^2}\left[\vec{V}, 0\right]\right) = \vec{B}_{\perp}.$$

Тобто маємо значення ЕМП в середині пластини в СВ  $K$ , що відповідають правильному розв'язку.

У ряді науково-методичних публікацій часто використовуються напівякісні, вирвані з у принципі вірних релятивістських і нерелятивістських формул перетворення компонент ЕМП часткові результати, які все ж, можливо, інколи й дають кінцевий вірний результат, але які системно суперечливі [7; 8; 9; 28].

Тому в якості висновку скажемо, що розрахунки слід вести строго за точними релятивістськими формулами, а потім, наприкінці, робити відповідні наближення й нехтувати (при  $v \ll c$ ) мізерними незначними релятивістськими поправками.

В електричному полі  $\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}'_{\perp} = \Gamma\left[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}\right]$  установлюється деякий розподіл електронів провідності по поверхні провідника, які ство-

рюють електричне поле напруженістю  $\vec{E}'_{\sigma}$ .

Унаслідок потенціальності поля  $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]$  в межах провідника ( $rot' \vec{E}'_{\perp} = \Gamma \cdot rot'[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}] = \Gamma(\vec{V} div' \vec{B}_{\perp} - (\vec{V} \nabla') \vec{B}_{\perp}) = 0$ ) та при розімкненому колі всередині провідника не можуть існувати замкнені струми провідності.

Тому як раз поле  $\vec{E}'_{\sigma}$  всередині провідника й компенсує повністю поле  $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]$ .

Звичайно, при замиканні кола зовнішнє електричне поле навколо пластини змінюється суттєво, а всередині пластини буде існувати поле  $\vec{E}_{\perp} = [\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]$  в СВ  $K$  та поле  $\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}]$  в СВ  $K'$ , які приведуть до виникнення ЕРС індукції й індукційного струму.

#### 4.2.7. Рух однорідного провідного магнетика у вигляді пластини в магнітному полі

Нехай однорідний магнетик ( $\mu > 1, \varepsilon > 1$ ) рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  відносно лабораторної СВ  $K$ , у якій існує тільки магнітне поле, вектор індукції  $\vec{B}_0$  якого перпендикулярний  $\vec{V}$  (див. рис. 4.33). Знайти різницю потенціалів між горизонтальними пластинами магнетика.

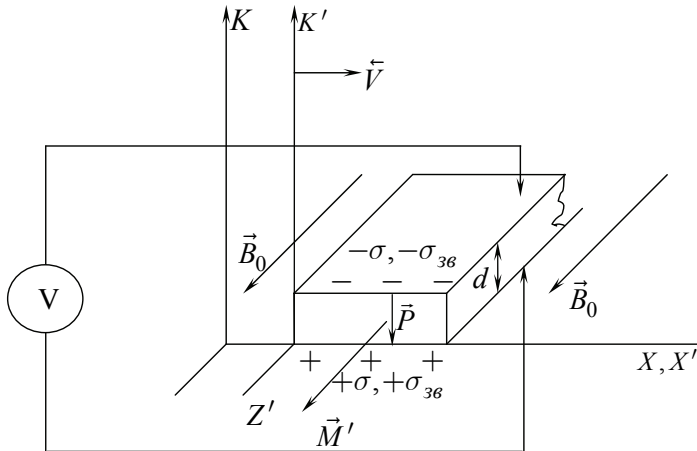


Рис. 4. 33. Однорідний магнетик ( $\mu > 1, \varepsilon > 1$ ) рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  в магнітному полі, вектор індукції якого  $\vec{B}_0$

Тоді в СВ  $K'$ , що зв'язана з магнетиком, зовнішнє поле

$$\vec{E}'_{\perp} = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_{\perp}],$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \Gamma\vec{B}_{\perp}.$$

Або в позначеннях задачі

$$\vec{E}' = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_0], \quad \vec{B}' = \Gamma\vec{B}_0.$$

Під дією поля  $\vec{E}' = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_0]$  в магнетикі відбувається перерозподіл вільних зарядів. І на поверхні його ці заряди так розподіляться, що електричне поле їх всередині магнетика повністю компенсує зовнішнє поле. Тобто всередині магнетика в СВ  $K'$

$$\vec{E}' + \vec{E}'_{\sigma} = 0,$$

$$\vec{E}'_{\sigma} = -\Gamma[\vec{V}, \vec{B}_0].$$

Електричне поле розділених зарядів всередині магнетика буде існувати і в СВ  $K$ , але воно, з точки зору СВ  $K$ , дорівнює (див. (4.150))

$$\left(\vec{E}_{\perp}\right)_{\text{всрд}} = \vec{E}_{\sigma} = -[\vec{V}, \vec{B}_0]. \quad (4.152)$$

Тому поверхнева густина вільного заряду визначається з умови, що напруженість електричного поля розділених зарядів компенсує поле сили Лорентца  $[\vec{V}, \vec{B}_0]$

$$\vec{E}_{\sigma} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{j} = -[\vec{V}, \vec{B}_0], \quad (4.153)$$

де  $\vec{j}$  – одиничний орт у напрямку осі  $OY$ .

У скалярній формі рівняння (4.153) набуває вигляду

$$E_{\sigma} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = VB_0,$$

звідси для поверхневої густини вільних зарядів  $\sigma$  маємо

$$\sigma = \epsilon_0 VB_0. \quad (4.154)$$

Тому вектор магнітної індукції **всередині магнетика**, з точки зору СВ  $K'$ , визначається не тільки  $\Gamma\vec{B}_0$ , а, як ми впевнилися, і рухомим відносно СВ  $K'$  електричним полем  $\left(\vec{E}_{\perp}\right)_{\text{всрд}} = E_{\sigma} = -[\vec{V}, \vec{B}_0]$  (див.

п. 4.2.6).

Тобто формулою (4.151)



$$\vec{B}'_{\text{сум}} = \frac{\vec{B}_0}{\Gamma}.$$

Магнітне поле всередині магнетика в СВ  $K'$ , очевидно, дорівнює сумі магнітного поля, яке існує в магнетик у як зовнішнє ( $\vec{B}'_{\text{сум}} = \frac{\vec{B}_0}{\Gamma}$ ),

та власного поля намагнічування  $\Delta\vec{B}' = \mu_0\vec{M}'$ :

$$\vec{B}' = \mu\vec{B}'_0 = \vec{B}'_{\text{сум}} + \Delta\vec{B}' = \Gamma^{-1}\vec{B}_0 + \Delta\vec{B}',$$

$$\vec{B}' = \mu\Gamma\vec{B}_0 = \Gamma^{-1}\vec{B}_0 + \Delta\vec{B}' = \Gamma^{-1}\vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}'.$$

Звідси знаходимо вектор намагнічування магнетика

$$\vec{M}' = \frac{\vec{B}_0(\mu\Gamma^2 - 1)}{\mu_0\Gamma}.$$

У нерелятивістському наближенні

$$\vec{B}' = \mu\vec{B}'_0 = \mu\vec{B}_0 = \vec{B}_0 + \Delta\vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}',$$

$$\vec{M}' = \frac{\vec{B}_0(\mu - 1)}{\mu_0}. \quad (4.155)$$

Здавалося б на перший погляд, що формула  $\vec{M}' = \frac{\vec{B}_0(\mu - 1)}{\mu_0}$  по-

милкова, оскільки  $\vec{M} \cong \vec{M}' = \frac{\vec{B}'}{\mu\mu_0}(\mu - 1)$ . Але слід врахувати, що  $\vec{B}'$

– це індукція магнітного поля в магнетик у з точки зору СВ  $K'$  ( $\vec{B} \cong \vec{B}'$ ), вона становить  $\vec{B}' = \mu\vec{B}_0$ , де  $\vec{B}_0$  – індукція зовнішнього МП.

$$\text{І тоді } \vec{M} \cong \vec{M}' = \frac{\vec{B}'}{\mu\mu_0}(\mu - 1) = \frac{(\mu - 1)}{\mu\mu_0}\mu\vec{B}_0 = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0}\vec{B}_0.$$

Або по-іншому:

$$\vec{M}' = \chi\vec{H}' = (\mu - 1)\vec{H}' = \frac{\vec{B}'}{\mu\mu_0}(\mu - 1) = \frac{(\mu - 1)}{\mu\mu_0}\mu\vec{B}_0 = \frac{(\mu - 1)}{\mu_0}\vec{B}_0.$$

Тобто формула (4.155) вірна.

У СВ  $K$  магнетик, який рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ , є поляризованим (див. (4.8)):

$$\vec{P} = \vec{P}' + \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2} = \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2}.$$

Тоді об'ємна густина зв'язаного заряду дорівнює

$$\rho_{зв} = -div\vec{P}.$$

Оскільки в методичних цілях ми розглядаємо однорідну й нескінченну у всіх напрямках пластину, то внаслідок однорідної поляризації об'ємний заряд у магнетика відсутній [40, с. 114]. А поверхнева густина зв'язаного заряду визначається

$$\sigma_{зв} = -div\frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2} = \frac{VB_0}{\mu_0 c^2} div\{(\mu-1)\vec{j}\} = \varepsilon_0 VB_0 (\mu-1). \quad (4.156)$$

Таким чином, електричне поле всередині рухомої в магнітному полі однорідної пластини з магнетика створюється вільними поверхневими зарядами (4.154) та зв'язаними поверхневими зарядами (4.156):

$$\vec{E}_{рез} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{j} + VB_0 (\mu-1) \vec{j} = VB_0 \vec{j} + VB_0 (\mu-1) \vec{j} = \mu VB_0 \vec{j}. \quad (4.157)$$

Електричне поле, що визначається (4.157), зосереджене тільки між двома горизонтальними поверхнями пластини (див. рис. 4.30). Тобто це поле плоского зарядженого конденсатора, на пластинках якого розподілені поверхневі заряди  $\pm(\varepsilon_0 VB_0 + \varepsilon_0 VB_0 (\mu-1))$ .

Модель реальної установки, у якій з достатнім наближенням можна реалізувати умови цієї задачі, показана на рис. 4.34.

Тонкостінний достатньо довгий циліндр, виготовлений з феромагнетика (причому радіус його набагато більший за товщину стінки), рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  в однорідному магнітному полі. Вектори  $\vec{\omega}$  та  $\vec{B}_0$  колінеарні [12].

Різниця потенціалів між зовнішньою та внутрішньою поверхнями циліндра, очевидно, дорівнює

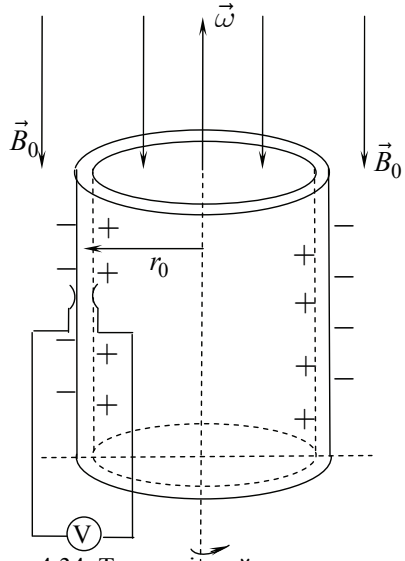


Рис. 4.34. Тонкостінний достатньо довгий феромагнітний циліндр рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  в однорідному магнітному полі

$$U = E_{\text{pez}} d = v B d,$$

де  $v = \omega r_0$  – лінійна швидкість стінки циліндра,  $B = \mu B_0$ , а  $\vec{E}_{\text{pez}}$  визначається (4.157).

Якщо тонкостінна труба виготовлена, наприклад, із міді, то різниця потенціалів

$$U = E_{\sigma} d = v B_0 d.$$

Якщо ж тонкостінний циліндр являє собою постійний магніт, намагнічений уздовж осі його і який обертається так, як показано на рис. 4.31, то потенційне електричне поле, яке виникає в рухомому намагніченому середовищі (стінці циліндра), повністю зумовлене його поляризацією.

#### 4.2.8. Рух магнетика у формі циліндра в магнітному полі лінійного струму, який розміщений уздовж осі циліндра

Нехай достатньо довга металева труба (питома електропровідність і магнітна проникність якої  $\lambda$  та  $\mu$ , відповідно) рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж провідника зі струмом  $i$ , який знаходиться на осі труби (рис. 4.35). Знайти різницю потенціалів між стінками труби [12].

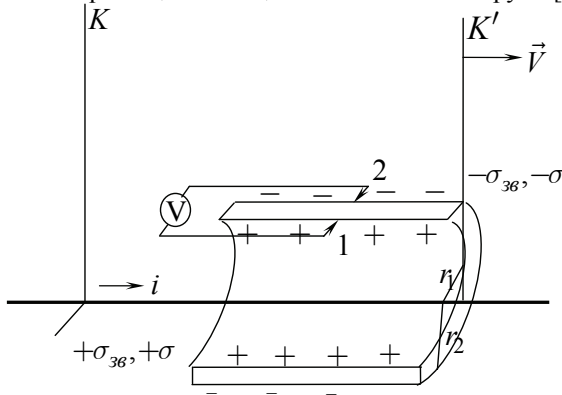


Рис. 4.35. Довга металева труба рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж провідника зі струмом  $i$ , який знаходиться на осі труби

Знехтуємо крайовими ефектами, тобто будемо вважати, що магнітне поле в стінці циліндра залишається незмінним.

Тоді електричне поле в стінці циліндра, з точки зору СВ  $K$ ,

$$\vec{E}_{\text{pez}} = \vec{E}_{\sigma} + \vec{E}_{36},$$

де  $\vec{E}_{\sigma}$  – напруженість електричного поля, що виникає внаслідок розпо-

ділу СВ  $K$  вільних електронів під дією поля  $\vec{E}' = \Gamma[\vec{V}, \vec{B}_0(r)]$  (див. формулу (4.152));  $\vec{E}_{зв}$  – напруженість електричного поля, яке зумовлене неоднорідною, радіально направленою поляризацією рухомої намагніченої стінки циліндра;  $\vec{B}_0(r)$  – індукція зовнішнього магнітного поля в точках на відстані  $r$  від лінійного провідника зі струмом (відстань від осі циліндра).

$$\vec{E}_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_0(r)] = VB_0 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{i \cdot \mu_0 V}{2\pi r^2} \vec{r}. \quad (4.158)$$

Об'ємна густина зв'язаних зарядів визначається з формули

$$\rho_{зв} = -div \vec{P} = -div \frac{[\vec{V}, \vec{M}']}{c^2},$$

де  $\vec{M}' = (\mu - 1)\vec{H}' = \frac{i(\mu - 1)}{2r^2\pi}[\vec{i}, \vec{r}]$ ,  $\vec{B}' = \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}' = \frac{\mu\mu_0 i}{2r^2\pi}[\vec{i}, \vec{r}]$ ,

$\vec{i}$  – одиничний орт у напрямку протікання струму в провіднику.

Тоді для об'ємної густини зв'язаних зарядів знаходимо, використовуючи циліндричну систему координат,

$$\begin{aligned} \rho_{зв} &= -\frac{1}{c^2} div [\vec{V}, \vec{M}'] = -\frac{i(\mu - 1)}{2c^2\pi} div \left[ \vec{V}, \frac{[\vec{i}, \vec{r}]}{r^2} \right] = \\ &= -\frac{i(\mu - 1)}{2c^2\pi} \left\{ \frac{[\vec{i}, \vec{r}]}{r^2} rot \vec{V} - \vec{V} rot \frac{[\vec{i}, \vec{r}]}{r^2} \right\} = \frac{i(\mu - 1)}{2c^2\pi} \vec{V} rot \frac{[\vec{i}, \vec{r}]}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Поверхнева густина зв'язаних зарядів знаходиться з очевидного співвідношення  $\sigma_{зв} = P_n$ .

Оскільки вектор поляризації  $\vec{P}$  в кожній точці стінки циліндра направлений до його осі й перпендикулярний як до внутрішньої, так і до зовнішньої поверхонь циліндра в будь-якій точці цих поверхонь, то (див. рис. 4.36)

$$\begin{aligned} \sigma_{зв}(r_1) &= \frac{VM'}{c^2} = \frac{V(\mu - 1)}{2c^2 r_1 \pi} i, \\ \sigma_{зв}(r_2) &= -\frac{VM'}{c^2} = -\frac{V(\mu - 1)}{2c^2 r_2 \pi} i. \end{aligned}$$

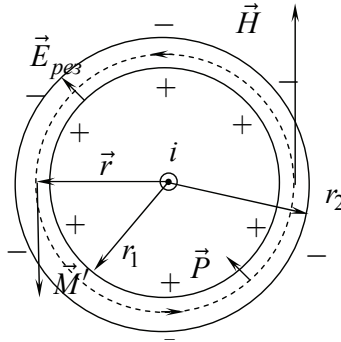


Рис. 4.36. Вектори електромагнітного поля всередині стінки циліндра

Використовуючи теорему Гаусса для знаходження напруженості електричного поля, створеного розподіленим зв'язаним зарядом  $\sigma_{зв}(r_1)$ , та враховуючи (4.158), одержуємо вираз для результуючої напруженості електричного поля всередині стінки циліндра

$$\vec{E}_{\text{перз}} = \vec{E}_{\sigma} + \vec{E}_{зв} = \frac{i \cdot \mu_0 V}{2\pi r^2} \vec{r} + \frac{iV(\mu - 1)}{2\pi r^2 \epsilon_0 c^2} \vec{r} = \frac{i \cdot \mu \mu_0 V}{2\pi r^2} \vec{r}. \quad (4.160)$$

А для різниці потенціалів між точками 1 та 2 тоді дорівнює

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}_{\text{перз}} d\vec{r} = \frac{i \cdot \mu \mu_0 V}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Різниця потенціалів, як бачимо, пропорційна магнітній проникності металу, з якого виготовлений циліндр. І ця задача по суті не відрізняється від задачі, розглянутої в п. 4.2.7.

Якщо розглянути більш реальні умови проведення подібного експерименту, тобто розглядати циліндр кінцевої довжини, то необхідно враховувати і зміну магнітного потоку через контур  $1V2$ .

Тоді ЕРС індукції, як виявляється, вже не залежить від магнітних властивостей циліндра [12, с. 71]:

$$\epsilon = \frac{i \cdot \mu_0 V}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Таким чином, компенсацію електричного поля в СВ  $K'$  у провіднику простіше й зрозуміліше пояснювати не мовою сил Лорентца, а аналізуючи ситуацію у ВСВ (СВ  $K'$ ) з допомогою характеристик ЕМП, одержаних при застосуванні ФПКЕМП.

$$\vec{E}_{\sigma} = -[\vec{V}, \vec{B}_0].$$

#### 4.2.9. Явище електромагнітної індукції при обертанні магнетиків у стаціонарному магнітному полі

У навчально-методичній літературі відсутній порівняльний аналіз опису електромагнітних явищ, що виникають при обертанні намагнічених тіл.

Однак, як свідчить практика, такий аналіз є корисним і важливим для майбутніх учителів фізики.

Зокрема в курсі загальної фізики при знаходженні ЕРС індукції, яка виникає внаслідок обертання намагніченого циліндра (рис. 4.37), використовується «правило потоку»:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де приріст потоку  $d\Phi$  за проміжок часу  $dt$  дорівнює потоку вектора  $\vec{B}_0$  через поверхню  $acbb'c'a$ . І тоді ЕРС, згідно з [24, с. 347; 48, с. 550], дорівнює

$$\varepsilon = -\omega \int_a^b r \left[ \vec{B}_0, d\vec{l} \right]. \quad (4.161)$$

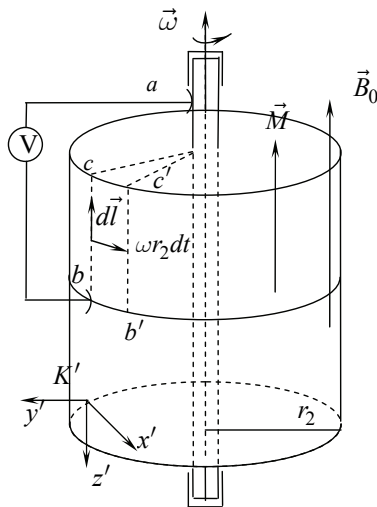


Рис. 4.37. Однорідний циліндричний магнетик обертається в магнітному полі

Оскільки в кожній точці на смужці бічної циліндричної поверхні  $cbb'c'$   $\vec{B} \perp d\vec{l}$ , то фактично приріст  $d\Phi$  зумовлений потоком вектора

$\vec{B}$  через поверхню  $acc'a$ . Але в такому способі знаходження ЕРС фізична причина виникнення її залишається нез'ясованою. Тобто, незважаючи на те, що, як стверджується в [24, с. 347], «це безперечно правильний спосіб обчислення електричного поля», цей спосіб знаходження ЕРС є формальним і суперечливим [48, с. 550].

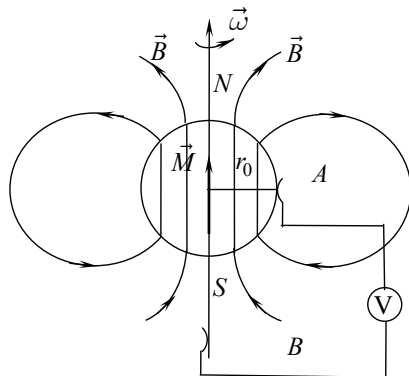


Рис. 4.38. Уніполярна індукція при обертанні однорідної намагніченої кулі

Але другий спосіб, запропонований у [24, с. 347], в основі якого роль сторонньої сили відіграє сила Лорентца, вже більшою мірою відповідає фізичній реальності порівняно з першим. Тоді можна говорити про локалізацію ЕРС по радіус-вектору  $\vec{r}$ , проведеному від осі обертання до довільної точки циліндра.

ЕРС уніполярної індукції в подібній задачі в посібнику [34, с. 264–265] пропонується знаходити в системі відліку, зв'язаній з магнітом.

Тоді ЕРС індукції зумовлена рухом (обертанням) провідника  $AVB$  в постійному полі магніту. Тобто ЕРС індукції виникає в зовнішній, по відношенню до магніту, частині електричного кола. Але при такій геометрії задачі

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Розглянемо спочатку циліндричний магнетик (магнітна проникність  $\mu$ , радіус його  $r_2$ , радіус осі навколо якої він обертається  $r_1$ ), що обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  в зовнішньому магнітному полі  $\vec{B}_0$  (рис. 4.37).

Для того, щоб використати методи СТВ, зв'яжемо інерційну СВ  $K'$  з довільною точкою магнетика. Тобто в дану мить швидкість початку координат цієї супутньої СВ становить  $\vec{v} = \omega \cdot [\vec{r}, \vec{k}']$ , де  $\vec{r}$  – радіус-

вектор, проведений від осі обертання до даної точки магнетика,  $\vec{k}'$  – орт у напрямку осі  $O'z'$  СВ  $K'$ . Як показано в [103], методи СТВ можна застосовувати й для неінерційних СВ.

У випадку намагнічування циліндричного достатньо довгого магнетика магнітне поле в СВ  $K'$  при швидкостях руху  $v \ll c$  очевидно визначається  $\vec{B}' = \mu \vec{B}_0 = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$ , де  $\vec{M}$  – вектор намагнічування магнетика в даній точці його (див., наприклад, [69, с. 153]). Тому 
$$\vec{M} = \frac{\mu - 1}{\mu_0} \vec{B}_0.$$

Відносно СВ  $K'$  всі точки циліндра рухаються з миттєвою лінійною швидкістю  $\vec{v}' = \vec{v}_i - \vec{v} = \left[ (\vec{r}_i - \vec{r}), \vec{k}' \right] \omega$ .

Тому з точки зору будь-якої супутньої СВ  $K'$  рух намагніченого магнетика видається поляризованим, причому вектор поляризації при  $v \ll c$  дорівнює [40, с. 322]

$$\vec{P}'_i = \frac{[\vec{v}', \vec{M}'_i]}{c^2} \approx \frac{[\vec{v}', \vec{M}_i]}{c^2} = \frac{[\vec{v}', \vec{B}_0]}{c^2} \frac{\mu - 1}{\mu_0}, \quad (4.162)$$

де  $\vec{M}'_i \approx \vec{M}$  – вектор намагнічування в СВ, що пов'язана з  $i$  – точкою циліндра.

Внаслідок неоднорідної (радіальної) поляризації магнетика виникають зв'язані поляризаційні заряди, об'ємна густина яких визначається формулою  $\rho_{зв} = -\text{div}'_i \vec{P}'_i$ . Тоді з урахуванням (4.162) для  $\rho_{зв}$  одержуємо [12, с. 73–83]

$$\begin{aligned} \rho_{зв} &= -\text{div}'_i \vec{P}'_i = -\text{div}'_i \frac{[\vec{v}', \vec{M}'_i]}{c^2} = -\frac{1}{c^2} \text{div}'_i \left[ [\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}'_i \right] \omega = \\ &= -\frac{1}{c^2} \text{div} \left[ \vec{v}_i, \vec{M}_i \right] = \frac{(\mu - 1)\omega}{c^2 \mu_0} \text{div} \left[ \vec{B}_0, [\vec{r}, \vec{k}] \right] = \\ &= -2B_0 \varepsilon_0 \omega (\mu - 1). \end{aligned} \quad (4.163)$$

Оскільки при використанні ідеального вольтметра струм у колі дорівнює нулеві, то згідно з формулами перетворення компонент електромагнітного поля в нерелятивістському наближенні 
$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] = 0.$$

Тобто електричне поле в СВ  $K'$  відсутнє. Тоді напруженість електричного поля (НЕП) у лабораторній СВ становить



$\vec{E} = -[\vec{v}, \vec{B}] = -[\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$ . Аналогічний результат для рівномірного і прямолінійного руху металевієї пластини описаний і в [40, с. 345–347] (див. також п. 4.2.6).

Електричне поле  $\vec{E}$ , яке породжується певним об'ємним розподілом зарядів, компенсує електричне поле  $[\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$ , що виникає внаслідок руху магнітного поля  $\mu\vec{B}_0$  відносно супутньої СВ.

Сумарна об'ємна густина заряду, що компенсує електричне поле  $[\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$  й дорівнює сумі зв'язаного заряду та вільного заряду, визначається з рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \rho_{\text{сум}} &= \rho_{\text{зв}} + \rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = -\varepsilon_0 \operatorname{div} [\vec{v}, \mu\vec{B}_0] = \\ &= \mu\omega\varepsilon_0 \operatorname{div} [\vec{B}_0, [\vec{r}, \vec{k}]] = -2\mu\omega\varepsilon_0 B_0. \end{aligned} \quad (4.164)$$

До речі, об'ємна густина вільного заряду при обертанні магнетика в зовнішньому магнітному полі

$$\rho = -2\mu\omega\varepsilon_0 B - (-2B_0\varepsilon_0\omega(\mu - 1)) = -2\omega\varepsilon_0 B_0, \quad (4.165)$$

як виявляється, в точності дорівнює густині заряду, який з'являється в немагнітному металевому циліндрі при обертанні його в МП з індукцією  $\vec{B}_0$ .

Тоді різниця потенціалів між точками  $a$  та  $b$  дорівнює

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-[\vec{v}, \mu\vec{B}_0]) d\vec{r} = -\frac{\mu\omega B_0}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (4.166)$$

Звичайно, при замиканні кола зовнішнє електричне поле навколо магнетика змінюється суттєво, а всередині магнетика буде існувати радіальне поле  $\vec{E}_l = [\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$  в СВ  $K$  та поле  $\vec{E}'_r = \Gamma[\vec{v}, \mu\vec{B}_0]$  в СВ  $K'$ , які приведуть до виникнення ЕРС індукції й індукційного струму. Причому ЕРС індукції дорівнює

$$\varepsilon = \int_{r_1}^{r_2} ([\vec{v}, \mu\vec{B}_0]) d\vec{r} = \frac{\mu\omega B_0}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (4.167)$$

**Таким чином, ЕРС уніполярної індукції, яка виникає при обертанні магнетиків у зовнішньому магнітному полі, зумовлена радіальною поляризацією цього магнетика.**

Але в рамках шкільного чи загального курсу фізики можна в грубому наближенні сказати, що ЕРС уніполярної індукції зумовлена силою Лорент-

ца, оскільки у формулах (4.161), (4.163), (4.166), (4.167) зустрічається співмножник, який дорівнює напруженості ЕП сили Лорентца –  $\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}]$ .

Але таке пояснення не відповідає реальності. Приведемо аналогію: розрахунки втрат енергії (та інших величин) в лініях електропередач основані на законах Ома і Джоуля-Ленца й уявленнях про передачу енергії дротами. А по суті, енергія, яка споживається, повністю передається електромагнітним полем.

#### 4.2.10. Обертання постійних магнітів

Якщо обертається однорідний циліндричний магніт (рис. 4.39), то в лабораторній системі відліку він виявляється радіально поляризованим

$$\vec{P}_i = \frac{[\vec{v}, \vec{M}_i']}{c^2} \approx \frac{[\vec{v}, \vec{M}]}{c^2} = \frac{\omega}{c^2} [[\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}].$$

Значить, у радіальному напрямку в магніті виникає електричне поле, напруженість якого знаходиться з умови

$$\text{div} \vec{E}_i = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{div} \vec{P}_i = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{div} \frac{\omega}{c^2} [[\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}].$$

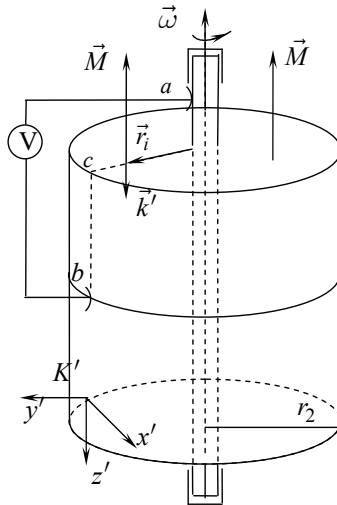


Рис. 4.39. Уніполярна індукція при обертанні однорідного циліндричного магніту

Звідси, знаходимо НЕП в кожній точці магніту

$$\vec{E}_i = -\frac{\omega}{\epsilon_0 c^2} [[\vec{r}_i, \vec{k}'], \vec{M}].$$

Залежно від форми магніту напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  всередині магніту визначається  $\vec{H} = -N\vec{M}$ , де  $N$  – так званий розмагнічуючий коефіцієнт. Для нескінченно довгого намагніченого циліндру  $N = 0$ . А, наприклад, для рівномірно намагнічених кулі (рис. 4.38) й тонкого диску розмагнічуючий коефіцієнт, відповідно, дорівнює  $N = \frac{1}{3}$  і  $N = 1$ .

Тобто якщо знехтувати крайовими ефектами і вважати, що циліндричний магніт достатньо довгий, то напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  всередині магніту дорівнює нулю [3, с. 275–278], а  $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ .

І тому для НЕП у довільній точці магніту маємо

$$\vec{E}_i = -\frac{\omega}{\varepsilon_0 c^2} \left[ \vec{r}_i, \vec{k}' \right], \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -[\vec{v}_i, \vec{B}]. \quad (4.168)$$

Таким чином, ЕРС індукції виникає не тому, що ЗЧ, деякий контур чи частина його рухаються в магнітному полі магніту, а тому, що рухомий магнетик поляризується.

Таким чином, явище уніполярної індукції – це суто релятивістський ефект. Хоча формально й у повній відповідності до чисельних значень ЕРС, яка при цьому виникає, можна пояснити уніполярну індукцію і як результат дії сили Лорентца на електрони, що обертаються разом з магнітом.

У нашій задачі ЕРС уніполярної індукції дорівнює

$$\varepsilon = \int_a^b [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} r \omega B \cdot dr = \frac{\omega \mu_0 M}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (4.169)$$

У випадку уніполярного генератора, модель якого зображена на рис. 4.35, ЕРС дорівнює

$$\varepsilon = \frac{\omega \mu_0 M}{3} r_0^2,$$

оскільки для намагніченої кулі  $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$ .

При поясненні релятивістського ефекту – поляризації рухомого намагніченого тіла, у методичному плані є сенс розглядати дещо спрощену задачу. Нехай рівномірно намагнічений брусок (рис. 4.40) рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж вісі  $OX$ . Знайдемо НЕП між точками  $A$  і  $B$  та ЕРС уніполярної індукції.

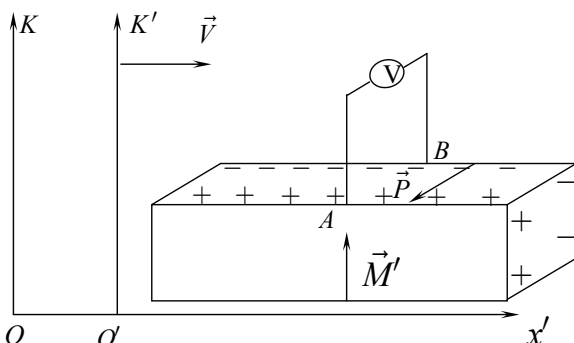


Рис. 4.40. Поляризація рівномірно рухомого намагніченого бруска та явище уніполярної індукції

Розв'язання, пояснення й коментарі до цієї задачі наведені у *Прикладі 4.8*.

У наведених вище розрахунках ми нехтували додатковим внеском у сумарне магнітне поле в магнетик чи магніті, зумовленому відносним рухом зарядів, розподілених згідно з (4.165). Ми також знехтували внеском відцентрової сили інерції в сумарне індукційне електричне поле.

### 4.3. Інші задачі

#### 4.3.1. Поступальний рух твердого провідника в зовнішньому однорідному електричному полі

Нехай провідник рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  в однорідному електричному полі  $\vec{E}$ . Тоді в СВ  $K'$ , яку ми зв'яжемо з провідником, будемо спостерігати й електричне поле  $\vec{E}' = \vec{E}$ , й магнітне поле  $\vec{B}' = -\frac{[\vec{V}\vec{E}']}{c^2}$ .

Під дією поля  $\vec{E}'$  у провіднику виникне такий розподіл зарядів, що сумарне електричне поле в будь-якій точці всередині провідника буде дорівнювати нулеві. Тобто задача зводиться до розрахунку такого розподілу зарядів у провіднику, щоб електричне поле, яке породжується таким розподілом у довільній точці всередині провідника, компенсувало зовнішнє електричне поле  $\vec{E}'$ . Наприклад, при русі металеві кулі в полі  $\vec{E}$  поверхневий заряд розподілений за законом  $\sigma = 3\varepsilon_0 E' \cos \theta$ .

Поле  $\vec{E}'_{вс} = 0$  всередині сфери створюється розподіленими по поверхні сфери поверхневими зарядами  $\sigma' = 3\epsilon_0 E' \cos \theta$  та зовнішнім полем  $\vec{E}'$ .

Електричне поле, що створюється індукованими на поверхні сфери зарядами  $\sigma = 3\epsilon_0 E' \cos \theta$ , у навколишньому просторі еквівалентне полю диполя (див., наприклад, [3; 4; 29; 40; 85; 86]).

Приблизна картина силових ліній сумарного електричного поля поза межами металевої кулі, яка знаходиться в полі  $\vec{E}'$ , показана на рис. 4.41.

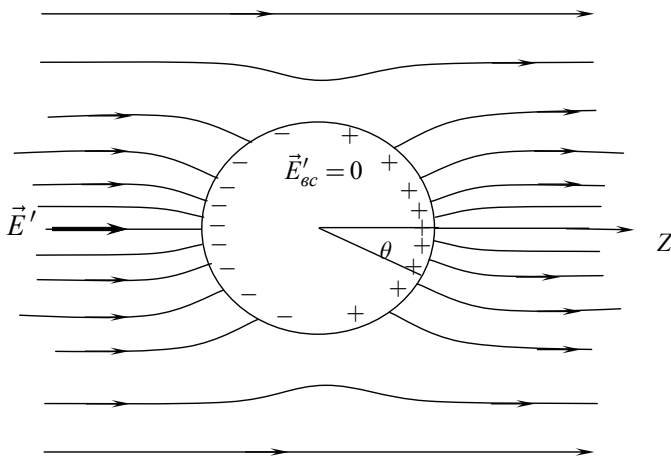


Рис. 4.41. Металева сфера в однорідному електричному полі  $\vec{E}'$

### 4.3.2. Рух твердого діелектрика, який може намагнічуватися, у магнітному полі (дослід Вільсона)

Як уже відзначалось у п. 4.1.4, формула (4.77)

$$\Delta\varphi = \frac{C}{C + C_{Елм}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) VBd$$

для різниці потенціалів, яку показував електрометр, підтверджувалася тільки при русі немагнітних діелектриків у дослідах Вільсона.

Причина в тому, що при обґрунтуванні (4.77) невірно визначалася напруженість електричного поля в рухомій пластині чи в тонкостінному ебонітовому циліндрі.

Ідея досліду Вільсона ілюструється рисунками 4.3 та 4.42.

У системі відліку, яка зв'язана з пластиною діелектрика, відсутній рух будь-яких ЗЧ, чи то зв'язаних, чи то вільних. Тому напруженість електричного поля в рухомій пластині діелектрика, згідно з (4.35), дорівнює

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) \cdot [\vec{V} \vec{B}].$$

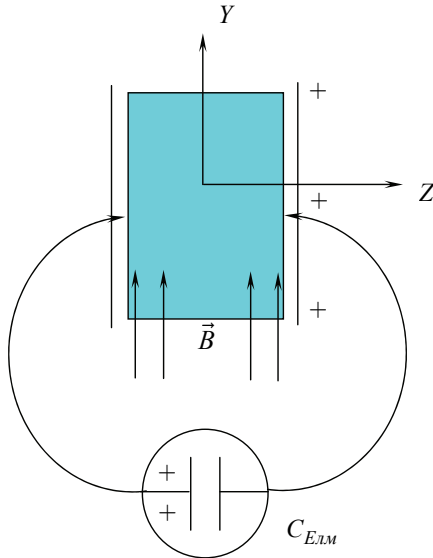


Рис. 4.42. Діелектрична пластина рухається зі швидкістю  $\vec{V}$  вздовж осі  $OX$

На рис. 4.42 швидкість руху пластини  $\vec{V}$  направлена вздовж осі  $OX$ . При інтегруванні виразу для вектора  $\vec{E}$  від однієї пластини до іншої одержуємо різницю потенціалів на затискачах електрометра:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= -\vec{E} \vec{k} d = -E_z d = -\frac{D_z d}{\varepsilon \varepsilon_0} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) [\vec{V}, \vec{B}]_z \cdot d = \\ &= -\frac{\sigma_1 d}{\varepsilon \varepsilon_0} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) V B d, \end{aligned} \quad (4.170)$$

де  $\sigma_1$  – поверхнева густина вільного заряду на металевих обкладинках ебонітового циліндра.

Якщо  $C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$  ємність конденсатора, а величина заряду на одній з обкладинок  $q_1 = \sigma_1 S$ , то з (4.170) одержуємо

$$\frac{q_1 d}{\varepsilon \varepsilon_0 S} = \frac{q_1}{C} = -U + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) V B d.$$

Оскільки величина заряду на пластині електрометра теж дорівнює  $q_1 = UC_{E_{LM}}$ , то попереднє співвідношення переписується так:

$$\frac{UC_{E_{LM}}}{C} = -U + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) V B d.$$

Розв'язок цього алгебраїчного рівняння дає значення різниці потенціалів на затискачах електрометра:

$$U = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) \cdot V B d \cdot \frac{C}{C + C_{E_{LM}}}. \quad (4.171)$$

Формула (4.171) підтверджується дослідними даними.

Таким чином, значення досліду Вільсона полягає в перевірці істинності або помилковості теорії ЕМП в повільно рухомих середовищах.

Тобто формула (4.72) невірно визначає напруженість електричного поля в рухомій пластині діелектричного магнетика.

Формулою, яка адекватно описує електричне поле в рухомому середовищі, є (4.35).

### 4.3.3. Електричне поле провідника зі струмом

Вивчення, здавалося б, достатньо прозорого електромагнітного явища – протікання постійного струму по однорідному металевому провіднику (для простоти і ясності будемо далі розглядати циліндричний і довгий провідник) – не приховує в собі якісь несподіванки й проблеми.

І все ж існують зв'язані з цим явищем деякі фізичні питання, на які при вивченні електромагнетизму не звертається (або майже не звертається) увага. Мова йде про механізми виникнення електричного поля провідника з постійним струмом (ППС).

У всякому разі слід нагадати три фізичних явища, які можуть привести до виникнення електричного поля як всередині, так і зовні ППС.

1. Якщо розглядається тільки стаціонарне електричне поле постійного струму (СЕППС), то воно, як відомо, створюється певним чином розподіленими по поверхні циліндричного провідника зі струмом поверхневими зарядами [88, с. 245], [4, с. 113], [38, с. 124], [89, с. 105–106], [90, с. 37–41], [65, с. 177].

2. ППС характеризується й об'ємною густиною заряду, якщо брати до уваги дію сили Лорентца на електрони провідності з боку власного магнітного поля струму (пінч-ефект) [89, с. 322], [82].

3. Є ще одне фізичне явище, яке в принципі в загальноприйнятій моделі ППС може приводити до виникнення додаткового електричного поля. Це додаткове електричне поле зумовлене різницею у величинах

густини зарядів сукупності електронів і іонів кристалічної ґратки внаслідок руху їх з різними швидкостями в деякій СВ [5; 24; 73]. Для ясності нашої подальшої аргументації коротко нагадаємо релятивістську інтерпретацію взаємодії рухомої зарядженої частинки і ППС [5, с. 270–273], [19, с. 338], [33; 85].

Нехай у системі відліку  $K$  знаходиться нерухомий ППС. Уздовж нього зі швидкістю  $\vec{v}$  рухається електрон. Знайти силу, що діє на електрон у СВ  $K$  та у СВ  $K'$ , яка рухається вздовж вісі  $OX$  СВ  $K$  зі швидкістю  $\vec{V} = \vec{v}$ , де  $\vec{V}$  – швидкість руху СВ  $K'$  (рис. 4.43).

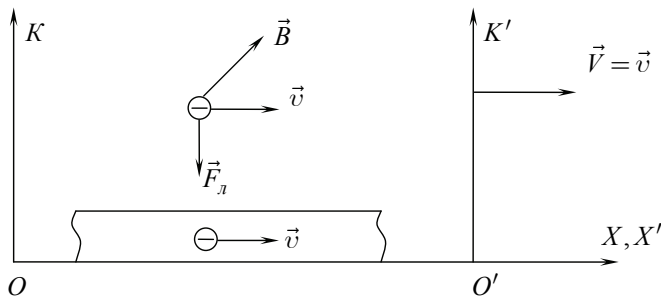


Рис. 4.43. Взаємодія електрона і ППС в СВ  $K$  і СВ  $K'$

На електрон у СВ  $K$ , якщо не брати до уваги СЕППС та електричне поле, що створюється об'ємним зарядом при пінч-ефекті, діє тільки сила Лорентца:

$$F_y = qvB_z = \frac{qv\mu_0 \cdot S\rho_-v}{2\pi d}, \quad (4.172)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу провідника,  $\rho_-$  – об'ємна густина заряду електронів провідності в СВ  $K$ ,  $d$  – відстань від зовнішнього електрона від провідника.

Електрон у СВ  $K'$  нерухомий, тому на нього може діяти сила тільки з боку деякого електричного поля. Якраз це поле в СВ  $K'$  створюється нескомпенсованими густинами зарядів іонів та електронів провідності. Оскільки електрони в СВ  $K'$  нерухомі, а іони рухаються зі швидкістю  $V = v = v'$ , то густина їх заряду відповідно дорівнює

$$\rho'_- = \rho_-^0 = \rho_- \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (4.173)$$

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.174)$$



де  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $\rho_-^0$  і  $\rho_+^0$  – густини зарядів електронів провідності й позитивних іонів, відповідно, у власних системах відліку.

А тому об'ємна густина заряду у СВ  $K'$  буде така:

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \rho_- \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\rho_- \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.175)$$

тут використано умову нейтральності нерухомого ППС [2; 5; 24; 73]

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.176)$$

Після того як знайдемо напруженість електричного поля, що створюється об'ємним зарядом (4.175), для сили, що діє на нерухомий електрон в СВ  $K'$ , одержимо  $F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , що й вимагає принцип відно-

сності. Звичайно, швидкість дрейфу електронів провідності надзвичайно мала в порівнянні зі швидкістю світла. Але, як ми впевнилися, нехтування навіть мізерними релятивістськими ефектами при аналізі електромагнітних явищ призводить до «втрати» фізичного явища в теоретичному пізнанні [13; 17; 91].

Мабуть, уперше на суперечливість умови нейтральності (4.176) звернуто увагу в роботі [18]: оскільки СВ  $K$  і СВ  $K'$  рівноправні, то при  $V = v$  завдяки симетричним умовам, якими визначається рух електронів і протонів, відповідно, у СВ  $K$  і у СВ  $K'$ , фізичні ситуації в цих СВ повинні бути однаковими.

А при умові (4.176) й при  $\vec{V} = \vec{v}$  фізичні ситуації у СВ  $K$  і у СВ  $K'$  неоднакові (детальніше див. нижче).

У науково-методичній літературі запропоновано декілька варіантів розв'язання вказаної суперечності:

1. «...фізичні властивості від'ємного і позитивного зарядів виявляються різними» [18]. Якщо електрон і протон в електромагнітних взаємодіях проявляють себе симетрично, то «ми вимушені визнати існування фізичної нееквівалентності нерухомої на поверхні масивного, що створює гравітаційне поле, тіла Землі лабораторної СВ по відношенню до будь-якої іншої СВ, яка рухається відносно неї» [18, с. 6].

2. Провідник зі струмом нейтральний у тій СВ  $K'$ , яка рухається зі швидкістю дрейфу електронів провідності [21, с. 92], тобто в СВ  $K'$ :

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = 0. \quad (4.177)$$

Аргументація авторів статті [21] така. Припустимо появу об'ємного заряду провідника зі струмом в СВ  $K'$  (4.175) і розглянемо взаємодію електронів провідності з полем цього об'ємного заряду. Через те, що у СВ  $K'$  на електрони провідності «магнітне поле не діє і не існує другої сили, яка змогла б зрівноважити дію електричного поля об'ємного заряду» [21, с. 91], необхідно зажадати виконання (4.177).

Зауваження щодо останньої тези:

а) насправді, з точки зору СВ  $K'$ , і немає чого зрівноважувати, бо, згідно, наприклад, з такою формулою перетворення проєкції напруженості  $\vec{E}$  електромагнітного поля  $E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$  [6; 7] при переході

від СВ  $K$  до СВ  $K'$ ,  $E'_y = 0$  при  $\vec{V} = \vec{v}$ . У системі відліку  $K$  напруженість поля об'ємного заряду  $E_y = E_r$  компенсується полем сили Лорентца  $E_r^L = v \cdot B_z$ . У СВ  $K'$  суто електричне поле збільшується й становить  $\frac{E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ , а «рухоме» магнітне поле  $B_z$  створює в СВ  $K'$

електричне поле такої самої величини, але протилежного напрямку  $-\frac{v \cdot B_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ . Таким чином, і у СВ  $K'$  знову все в рівновазі (як того й

вимагає принцип відносності), і немає потреби «зрівноважувати дію електричного поля об'ємного заряду». А значить, умова (4.177) некоректна.

б) з умови нейтральності (4.177) випливає, що у СВ  $K$  об'єм нерухомого ППС заряджений. Тоді густина цього заряду з урахуванням (4.173), (4.174) та (4.177) дорівнює

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = \rho_- \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (4.178)$$

Густина заряду (4.178) в точності дорівнює густині заряду, що з'являється при пінч-ефекті в нерухомому ППС [89], [21]. Але пінч-ефект і збільшення об'ємної густини заряду при русі будь-якої сукупності заряджених частинок – це різні фізичні явища. А автори [21] хотіли, мабуть, пояснити пінч-ефект релятивістськими ефектами.

в) у СВ  $K$  на зовнішній електрон, який рухається зі швидкістю дрейфу  $\vec{v}$  вздовж провідника, крім сили Лорентца буде діяти й електрична сила з боку поверхневого заряду. Цей позитивний поверхневий заряд утворюється за рахунок переміщення частини електронів всередину провідника. «Якраз цей поверхневий заряд у СВ  $K'$  буде притягувати зовнішній нерухомий електрон» [21, с. 92]. Але у СВ  $K'$  і  $F'_L = 0$  (бо зовнішній електрон нерухомий в СВ  $K'$ ), і  $\rho' = 0$ , а значить, і поверхневий заряд дорівнює нулю. Очевидне порушення принципу відносності.

г) спостерігається явне порушення фізичної відносності в розв'язку, що пропонується в [21]. Нагадаємо, що слід розрізняти фізичну відносність, як принцип, «що стверджує існування відповідних явищ, і просте виконання вимоги коваріантності рівнянь при переході від однієї системи відліку до іншої» [77, с. 245]. Дійсно, уявимо собі у СВ  $K$  електрон, який рухається вздовж ППС зі швидкістю дрейфу й нерухомий протон.

Тоді в СВ  $K'$  маємо симетричну в кінематичному відношенні картину. Але аналіз сил, що діють на електрон і протон в обох СВ, показує фізичну нееквівалентність ситуацій у СВ  $K$  і в СВ  $K'$ .

3. Умова нейтральності провідника [19]:

$$\rho_+^0 = -\rho_-^0. \quad (4.179)$$

Тоді нерухомий провідник зі струмом характеризується об'ємною густиною заряду [19; 22; 92; 93]

$$\rho = \rho_+^0 + \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \sqrt{1-\beta^2} - 1 \right). \quad (4.180)$$

Приведемо міркування на користь умов (4.179), (4.180):

а) дійсно, якщо справедлива умова (4.176)  $\rho_+^0 = -\rho_-^0$  при протіканні струму, то це означає, що  $\rho_-^0 < \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_-$ : нерухома, як ціле,

сукупність електронів провідності має меншу густину заряду, ніж густина заряду цієї ж сукупності електронів, але рухомої. Тоді при  $\beta = 0$  (струм у провіднику відсутній)  $\rho_-^0 = \rho_- < \rho_+^0$ , тобто провідник без струму (після того, як виключили струм) буде заряджений позитивно:

$\rho_+^0 - \rho_-^0 = \rho_+^0 \left( 1 - \sqrt{1-\beta^2} \right)$ , причому величина цього заряду залежить

від сили струму, що протікав раніше [19]?!

б) густина будь-якого розподілу заряду при переході від однієї СВ до іншої перетворюється за формулою  $\rho = \frac{\rho^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ , де  $V$  – швидкість

руху деякого розподілу зарядів з густиною  $\rho^0$ ,  $\rho$  – густина заряду у СВ, відносно якої рухається цей розподіл зарядів.

Тому й густини зарядів сукупності електронів і іонів при русі їх з довільною, але однаковою за величиною швидкістю повинні збільшитися в одне і те ж число разів. Якщо провідник без струму нейтральний  $\rho_+^0 = -\rho_-^0$  (що природно), то чому після того, як з'явиться струм і сукупність електронів, що рухаються при цьому зі швидкістю  $v$ , описується, як відомо, густиною заряду  $\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , ця густина  $\rho_-$  не

стає більшою чисельно за  $\rho_+^0$ ?

в) якщо ж густини сукупності електронів і іонів при русі з однаковою швидкістю змінюються по-різному, то провід без струму, який рухається, буде зарядженим з об'ємною густиною

$\rho = \rho_+ - \rho_- = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right)$  [19; 93]. Але немає ніяких фі-

зичних підстав вважати нерухомий (як і той, що рухається з постійною швидкістю) провідник зарядженим. Явище термоелектронної емісії?

г) густина струму в СВ  $K$   $j_x = \rho_- \cdot v$ , а у СВ  $K'$  струм зумовлений рухом тільки іонів з такою ж самою за величиною швидкістю, що й рух електронів провідності в СВ  $K$ . Але густина струму в СВ  $K'$  є більшою  $j'_x = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} > j_x$ , незважаючи на те, що густини заряду й

електронів, й іонів зростають однаково у СВ, відносно якої вони рухаються з рівними швидкостями. Аналогічно ми знайдемо, що у СВ  $K'$

магнітне поле більше ніж у СВ  $K$ :  $B'_z = \frac{B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , але ж фізичні ситуа-

ції ідентичні (з точністю до знаку рухомих і нерухомих заряджених частинок).

д) одержуємо на основі умови нейтральності провідника зі струмом (4.176): у СВ  $K$  електричне поле відсутнє, а у СВ  $K'$  напруженість електричного поля дорівнює  $E'_y = \frac{\rho_- S \beta^2}{2\pi\epsilon_0 d \sqrt{1-\beta^2}}$ ; індукція магнітного

поля у СВ  $K$   $B_z = \frac{\mu_0 \rho_- v \cdot S}{2\pi d}$ , а у СВ  $K'$  індукція магнітного полі в

$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  разів більша, бо  $I' = \frac{I}{\sqrt{1-\beta^2}}$  незважаючи на те, що іони в

$K'$ -системі рухаються з такою самою швидкістю (за величиною), як і електрони провідності в  $K$ -системі.

Порушення фізичної відносності при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  особливо чітко видно, якщо порівняти сили, котрі діють на електрон у СВ  $K$  (швидкість його  $v$ ) і на позитрон, який рухається у СВ  $K'$  зі швидкістю  $v' = v$  вздовж струму. **Традиційна точка зору для сили, що діє на електрон, визначає її величину як у виразі (4.172), а сила, що діє на позитрон у СВ  $K'$ , дорівнює  $qv \cdot B'_z - qE'_y = 0$ , хоч фізичні умови в системах  $K$  і  $K'$  однакові [71]. У цьому прикладі, здається, порушується можливість фізичної адаптації, яка «являється вирішальною умовою реалізації фізичної відносності» [79, с. 8–9].**

Зауважимо, що в статті [80] зроблена спроба проаналізувати подібну задачу, але оскільки, на наш погляд, вона містить деякий некоректний висновок і до того ж повторює наші, багаторічної давності, результати, слід нагадати взаємоузгоджене обґрунтування формул перетворення об'ємних густин заряду і струму при переході від СВ  $K$  до СВ  $K'$  з допомогою формул перетворення компонент 4-струму, та, виходячи з фізичного змісту цих величин, у загальному випадку, коли  $\vec{V} \neq \vec{v}$  і в рамках кожної з умов нейтральності (4.176) та (4.179) [19].

Отже, нехай у СВ  $K$  маємо компоненти 4-струму

$$s_1 = \rho_- v = j_x, s_2 = s_3 = 0, s_4 = ic\rho = 0, \quad (4.181)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ ,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Тоді, згідно з формулами перетворення компонент 4-векторів [6], компоненти 4-струму у СВ  $K'$  дорівнюють

$$s'_1 = \frac{j_x}{\sqrt{1-B^2}}, s'_2 = s'_3 = 0, s'_4 = ic\rho' = \frac{iBj_x}{\sqrt{1-B^2}}, \quad (4.182)$$

де  $B = \frac{V}{c}$ .

Із (4.182) одержуємо:

$$\begin{aligned} j'_x &= \Gamma j_x, \\ \rho' &= \frac{V j_x}{c^2} \Gamma, \end{aligned}$$

де  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$ .

Струм з точки зору СВ  $K'$  зумовлений рухом іонів та електронів зі швидкостями  $V$  і  $v' = \frac{V-v}{1-B\beta}$ , відповідно. Тоді, густина струму й густина заряду в ППС у СВ  $K'$  дорівнюють

$$j'_x = \frac{\rho_+^0 V}{\sqrt{1-B^2}} - \rho'_- v' = \Gamma j_x \quad (4.183)$$

$$\rho' = \Gamma \rho_+^0 - \rho'_- = \frac{\rho_+^0 V v}{c^2} \Gamma = \Gamma \frac{V j_x}{c^2}, \quad (4.184)$$

де  $\rho'_- = \gamma' \cdot \rho_-^0 = \Gamma \rho_- (1-B\beta)$ ,  $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ .

Тепер, якщо припустити, що ППС у власній СВ характеризується об'ємною густиною заряду (4.180) і  $\rho_+^0 = |\rho_-^0| = \rho^0$ , то у СВ  $K$  компоненти 4-струму такі:

$$s_1 = \rho_- v = j_x, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = ic\gamma\rho^0 \left( \sqrt{1-\beta^2} - 1 \right), \quad (4.185)$$

де  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

А густина струму й густина заряду у СВ  $K'$ , згідно з формулами перетворення компонент 4-струму,

$$j'_x = \rho^0 \gamma \cdot \Gamma \left( v + V - V \sqrt{1-\beta^2} \right), \quad (4.186)$$

$$\rho' = \rho^0 \gamma \cdot \Gamma \left( \sqrt{1-\beta^2} - B\beta - 1 \right). \quad (4.187)$$

Такий же вираз для  $j'_x$  та  $\rho'$  ми одержимо, виходячи з фізичного змісту цих величин, при умові, що провідник зі струмом у власній СВ «заряджений» з об'ємною густиною заряду (4.180).

Повертаємося до обговорення результатів роботи [80], де стверджується, що при наявності компенсації електричного поля рухомих електронів провідності електричним полем нерухомих іонів аналіз взаємодії нерухомого в СВ  $K$  протона і ППС приводить до протиріччя з ПВ, бо при вказаній компенсації сила взаємодії цього протона і ППС дорівнює нулю, але, якщо перейти до іншої інерціальної СВ, то навіть при наявності вказаної компенсації рівнодійна сила, що діє на зовнішній протон, уже не дорівнює нулю.

Якраз останнє не вірно.

Якщо в СВ  $K$   $F = 0$ , то і в будь-якій іншій СВ результуюча сила теж дорівнює нулю. Дійсно, в СВ  $K'$  на цей протон буде діяти і сила Лорентца, і сила з боку електричного поля, зумовленого об'ємним зарядом (4.175) (у СВ  $K$  має місце повна компенсація полів,  $\rho = 0$ ). Тоді, з урахуванням (4.183) та (4.184), результуюча сила, що діє на протон у довідній інерціальній СВ  $K'$ , дорівнює (рис. 4.44)

$$F'_p = F'_L - F'_E = qVB'_z - qE'_y = 0.$$

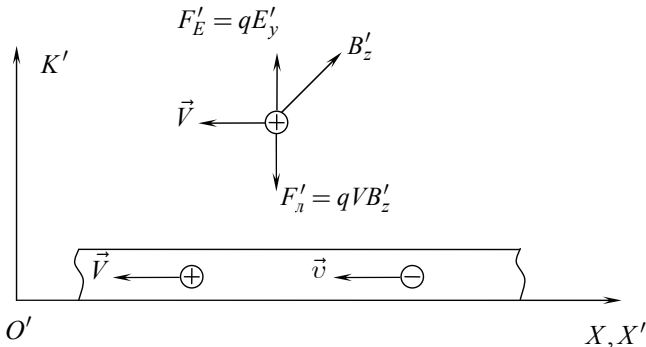


Рис. 4.44. Сили, які діють на протон у СВ  $K'$

Якщо ж припустити, що компенсація відсутня (як це зроблено нами раніше [19; 22; 93]) і на протон у СВ  $K$  діє сила з боку рівномірно зарядженого, об'ємною густиною заряду (4.180) провідника зі струмом

$$F = qE_y = \frac{qS\rho^0\gamma \cdot (\sqrt{1-\beta^2} - 1)}{2\pi\epsilon_0 d},$$

то в будь-якій іншій СВ, як можна впевнитися використовуючи (4.186)

та (4.187),  $F'_p = \frac{F}{\Gamma}$ . До того ж навчальна задача, що аналізується у [80], розв'язана в [19; 93].

Якщо прийняти умови (4.179) і (4.180), то всі протиріччя, викладені в пунктах 3а)–3д), спростовуються.

Якщо умова (4.180) відповідає фізичній реальності, то не слід буквально розуміти слова «заряд провідника зі струмом». Додаткове електричне поле ППС є результатом збільшення поперечної складової напруженості електричного поля рухомих заряджених частинок. Тоді поле, зумовлене (4.180), – це суперпозиція поля лінійної сукупності нерухомих іонів і поля лінійної сукупності рухомих електронів провідності [72].

Можливо, умова (4.180) не має відношення до реальності через грубість моделі ППС. Вважаємо, що електронна й іонна підсистеми в електромагнітних явищах, пов'язаних з протіканням струму, ніяк не взаємодіють між собою й існують як два незалежних лінійних ланцюжка зарядів.

Але тоді треба пояснити: чому при будь-яких значеннях сили струму (при довільних значеннях  $\beta$ ), що протікає по провіднику, реалі-

зується дивна умова нейтральності  $\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , якщо у відсутнос-

ті струму  $\rho_+^0 = -\rho_-^0$ ?

Без уявлень про електронну теорію важко пояснити чи навіть уявити, механізм виникнення багатьох електродинамічних явищ, тому використання моделей необхідне. Але тоді слід враховувати й усі ефекти, пов'язані з рухом електронів. Зокрема при введенні поняття «магнітне поле» на основі аналізу взаємодії двох струмів нехтування електричною взаємодією струмів, точно кажучи, є некоректним.

З іншого боку, якщо така модель ППС далека від реальності (насправді і  $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$  по контуру, що лежить у площині провідника, і умова (4.180) некоректна), то як на основі такої моделі успішно пояснюється і релятивістська природа магнітного поля, і безліч інших фізичних явищ?!

А в методиці навчання фізики ця модель активно експлуатується. Можливо, ці апорії породжені не тільки недосконалістю моделі, а в першу чергу діалектикою самого процесу пізнання. Але й вивчення фізики повинно бути таким, щоб студент бачив ці суперечності, розумів необхідність появи їх і шукав шляхи їх подолання.

Тому при вивченні даного питання слід чітко формулювати задачу (яке явище аналізується, яка модель провідника зі струмом розглядається). Необхідно показати суперечності, що виникають при аналізі як поля провідника зі струмом, так і взаємодії рухомого відносно провідника протона й провідника зі струмом.



#### 4.3.4. Обертання соленоїду зі струмом навколо його вісі

Відомо, що при поступальному русі незарядженого провідника з постійним струмом уздовж своєї довжини відносно СВ  $K$  в цій СВ провідник зі струмом характеризується об'ємною густиною заряду (формули (1.17) і (3.18))

$$\rho = \Gamma \cdot j'V / c^2,$$

де  $j'$  – густина струму в ППС в СВ  $K'$ .

При нерелятивістських швидкостях руху  $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$ ,  $\rho = j'V / c^2$ .

Більш детальне обговорення цього ефекту СТВ та проблем, пов'язаних з інтерпретацією явища виникнення об'ємної густини заряду в рухомому провіднику зі струмом, можна знайти в [19–20], [21], [22], [40, с. 304–310] (див. також п. 4.3.3).

Але розглянемо соленоїд зі струмом, який обертається навколо своєї вісі з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  (рис. 4.45).

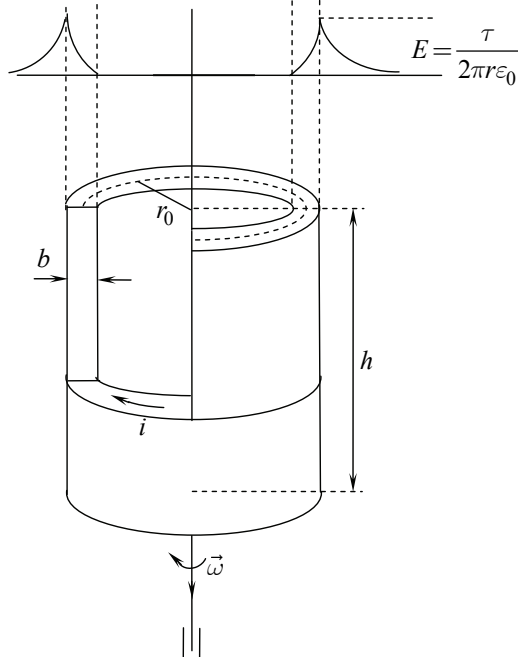


Рис. 4.45. Густина заряду й електричне поле, які утворюються внаслідок обертання соленоїду зі струмом

Тоді  $\vec{j}'$  – це густина струму в кожній із супутніх СВ  $K'$ , які в кожну мить зв'язані з певними точками соленоїду й рухаються з лінійною швидкістю  $V = \omega r$ . При  $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$ , згідно з формулою (4.5),  $j = j'$ , а тому і  $i = i'$ . Тобто нерухомий у СВ  $K$  дослідник вимірює таке ж значення сили струму в соленоїді, як і дослідник у СВ  $K'$ .

Тоді нерухомий у СВ  $K$  дослідник реєструє появу заряду в елементарному об'ємі соленоїду

$$dq = \rho \cdot dV = \frac{V \cdot j}{c^2} \cdot dr \cdot dh,$$

де  $dr$  – елемент товщини, а  $dh$  – елемент висоти проводу соленоїда.

Тут також враховано, що вектор миттєвої швидкості  $\vec{V}$  супутньої СВ в кожній точці соленоїду співпадає по напрямку з  $\vec{j}$  (див. рис. 4.45).

Якщо  $r_0$  – середній радіус соленоїду, то  $\frac{V \cdot j}{c^2} = j \varepsilon_0 \mu_0 r_0 \omega$ .

Тому величина заряду, яка буде реєструватись нерухомим дослідником на одиницю висоти соленоїду, дорівнює

$$\begin{aligned} \tau &= \int d\tau = \int \frac{dq}{dh} 2\pi r = \int_{r_0 - b/2}^{r_0 + b/2} j \varepsilon_0 \mu_0 r \omega \cdot 2\pi r dr = \\ &= \frac{2\pi \varepsilon_0 j \mu_0 \omega}{3} \left\{ \left( r_0 + \frac{b}{2} \right)^3 - \left( r_0 - \frac{b}{2} \right)^3 \right\}. \end{aligned} \quad (4.188)$$

Якщо ввести силу струму на одиницю висоти соленоїду  $i_1 = \frac{di}{dh} = \frac{b \cdot dh \cdot j}{dh} = bj$ , то при  $\frac{r_0}{b} \gg 1$  з (4.188) одержуємо

$$\tau = 2\pi \omega r_0^2 \left( \frac{i_1}{c^2} \right) = 2\pi r_0^2 \omega \varepsilon_0 \mu_0 i_1.$$

Тобто при таких умовах,  $\frac{r_0}{b} \gg 1$ , ми вважаємо, що об'ємна густина заряду в межах товщини обмотки соленоїда залишається сталою.

Напруженість електричного поля в точках простору, які знаходяться зовні соленоїда, дорівнює

$$\vec{E}_{зов} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 r} \cdot \vec{n} = \frac{i_1 \omega r_0^2}{c^2 r} \cdot \vec{n}, \quad (4.189)$$

де  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$  – одиничний орт у напрямку радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного від осі соленоїду в дану точку поля.

У точках простору всередині соленоїду електричне поле дорівнює нулю внаслідок симетричного відносно осі розподілу заряду.

Але в точках простору, у яких розміщена обмотка соленоїду, напруженість електричного поля не дорівнює нулеві. Ця напруженість, як показано на рис. 4.42, зростає від нуля при  $r = r_0 - \frac{b}{2}$  до значення

$$(4.189) \text{ при } r = r_0 + \frac{b}{2}.$$

#### 4.3.5. Релятивістський опис взаємодії між двома довгими провідниками зі струмами

Останнім часом у вітчизняній методичній періодиці з'являються статті [80; 81], зміст яких значною мірою повторює результати наших досліджень 20-річної давності [70; 71; 19]. Крім того, вони містять і помилки в розрахунках моделей, що обговорюються. На цьому наголошувалося нами в [20]. Тому має сенс повернутися до цих питань і більш детально їх обговорити.

Було показано [70; 71; 72], що релятивістський аналіз (у рамках класичної електронної теорії, як це звичайно прийнято в посібниках з основ електродинаміки [5; 7; 48; 64; 65; 69]) взаємодії 2-х нескінченно довгих прямих провідників зі струмами, моделі яких зображені на рис. 4.46, приводить до наступних виразів для сили, що приходиться на одиницю довжини провідників, відповідно для рівнобіжних і антипаралельних струмів:

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a} \cdot \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\}, \quad (4.190)$$

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a} \cdot \left\{ 2 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2} \right) \right\}, \quad (4.191)$$

де  $v$  – дрейфова швидкість електронів провідності в СВ  $K$ ,  $a$  – відстань між провідниками з постійним струмом,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $I = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  – величина сили струму,  $\tau_0 = \rho_-^0 S$  – лінійна густина заряду,  $\rho_-^0$  – об'ємна густина заряду електронів провідності у вла-

дина,  $\rho_-^0$  – об'ємна густина заряду електронів провідності у вла-

сній системі відліку,  $S$  – площа поперечного перерізу лінійного металевого провідника,  $\beta = \frac{v}{c}$ .

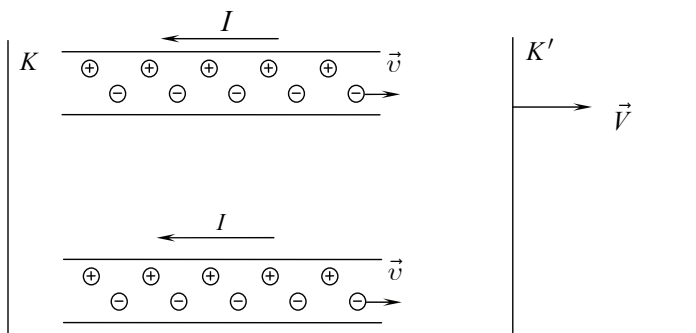


Рис. 4.46. Взаємодія двох ППС в моделі, у якій вони «заряджені» у ВСВ [70; 71]

Сила струму – це величина, що є комбінацією інших величин і через яку зручно, на електротехнічному рівні розуміння електромагнітних явищ, описувати як взаємодію ланцюжків рухомих заряджених частинок, так і магнітне поле, що супроводжує такі процеси ЗЧ. Просто зручно і не більше.

Відомо, що МП таких процесів ЗЧ породжується не струмами провідності, а струмами зміщення [54–56], а індукція МП все ж може бути виражена через певну комбінацію величин, що характеризують рух ЗЧ (через так звану силу струму), та вимірюватись в експериментах безпосередньо. Тому така увага в методиці й приділяється поняттю «сила струму», хоча ця величина і не несе суттєвого фізичного змісту. Тоді, якщо ми хочемо виразити силу взаємодії струмів через вихідні величини в нашій моделі, то формули (4.190) та (4.191) набувають вигляду

$$F_y = \frac{\tau_0^2}{\pi \epsilon_0 a} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \quad (4.190')$$

$$F_y = \frac{\tau_0^2}{\pi \epsilon_0 a} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} \right). \quad (4.191')$$

Очевидно, що множники у фігурних дужках формул (4.190) і (4.191), та множники в дужках формул (4.190') і (4.191') при будь-яких значеннях сили струмів, які реально зустрічаються в практичній електротехніці, дуже мало відрізняються від одиниці. Наприклад, якщо по двом мідним провідникам діаметром 2 мм протікають струми  $\sim 120$  А, то

дрейфова швидкість електронів у кожному провіді  $\approx 0,3 \frac{см}{сек}$ . Якщо

відстань між струмами  $a=3 см$ , то, розкладаючи  $\sqrt{1-\beta^2}$  у степеневий ряд, для сили взаємодії одержуємо

$$F = 10 \left\{ 1 \pm \frac{\beta^2}{4} \right\} \frac{дин}{см} \quad (4.192)$$

з точністю до величин другого порядку малості по  $\beta$ .

Знак « $\rightarrow$ » у (3) відповідає однаково направленим струмам, а « $\leftarrow$ » – протилежно направленим струмам. Відмінність (4.190) і (4.191) від класичного виразу  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$  настільки незначна й мізерна, що прямий

дослід з вимірювання сили взаємодії струмів, здається, не в змозі при сучасному рівні експериментальної техніки [74; 75] зареєструвати відмінність сил (4.190) та (4.191) від значення, що визначається класичним виразом.

Найбільш вагомим аргументом у доказі справедливості чи помилковості (4.190) та (4.191) є результати експерименту. Однак, наскільки відомо, такі спеціальні досліді не ставилися, а вся сукупність фактів

цілком описується класичною формулою  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$ . Оскільки попра-

вочний множник  $\left\{ 1 \pm \frac{\beta^2}{4} \right\} \approx \left\{ 1 \pm 3 \cdot 10^{-23} \right\}$  мізерно мало відрізняється

від одиниці й оскільки чутливість наявної експериментальної техніки [74; 75] недостатня для спростування чи підтвердження формул (4.190) і

(4.191), електротехнічне підтвердження виразу  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$  не можна розцінювати як доказ помилковості (4.190) та (4.191).

Адже навіть при розгляді сил взаємодії між реальними провідниками зі струмом не враховують класичну електричну силу, обумовлену появою надлишкових поверхневих зарядів на поверхні цих провідників [76; 4]. Це, як правило, не обговорюється, тому що відношення цієї електричної сили взаємодії до суто магнітної сили взаємодії рівнобіжних

струмів за порядком величини дорівнює  $\frac{F_e}{F_m} \approx 10^{-12}$  [76].

Серед теоретичних аргументів на користь справедливості деяких співвідношень варто вказати на вимогу їх релятивістської інваріантності

[24; 35; 77]. Принцип відносності приводить до цілком визначених законів перетворення фізичних величин при переході з однієї ІСВ до іншої.

Покажемо для ситуації, зображеної на рис. 4.43, що вираз (4.190), наприклад, задовольняє формулам перетворення для сили.

Для знаходження сили взаємодії струмів у СВ  $K'$ , яка рухається відносно лабораторної системи відліку  $K$  вздовж осі  $OX$  зі швидкістю  $\vec{V}$ , необхідно знати струм та об'ємну густину заряду, якими характеризуються провідники в СВ  $K'$ . Очевидно, ці величини дорівнюють [19; 20]

$$\rho' = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{\rho_0 \left\{ \frac{V \cdot v}{c^2} - 1 + \sqrt{1-\beta^2} \right\}}{\sqrt{(1-B^2)}(1-\beta^2)}, \quad (4.193)$$

$$I' = \left( \frac{\rho_+^0 \cdot V}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0 \cdot v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right) S = \frac{\rho_0 S \left\{ v + V \sqrt{1-\beta^2} - V \right\}}{\sqrt{(1-B^2)}(1-\beta^2)},$$

де  $v$  – швидкість руху електронів провідності в СВ  $K$ ,  $S$  – площа поперечного перерізу провідника,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $B = \frac{V}{c}$ ,  $v' = \frac{V-v}{1-B\beta}$  – швидкість електронів провідності в СВ  $K'$ .

Тоді напруженість електричного поля й індукція магнітного поля в СВ  $K'$ , відповідно, дорівнюють

$$E' = \frac{\tau'}{2\pi\epsilon_0 \cdot a} = \tau_0 \frac{\left\{ \sqrt{1-\beta^2} - 1 + B\beta \right\}}{2\pi\epsilon_0 \cdot a \sqrt{(1-B^2)}(1-\beta^2)}, \quad (4.194)$$

$$B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot a} = \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 a} \frac{\left\{ v + V \sqrt{1-\beta^2} - V \right\}}{\sqrt{(1-B^2)}(1-\beta^2)}, \quad (4.195)$$

де  $\tau_0 = \rho_0 \cdot S$  – лінійна густина заряду нерухомого ланцюжка заряджених частинок,  $|\rho_+^0| = |\rho_-^0| = \rho_0$ .

Величина об'ємної густини заряду  $\rho'$  і сила струму  $I'$  у СВ  $K'$  можуть бути також знайдені за формулами перетворення компонентів 4-струму [2; 24; 40], якщо складові 4-струму в системі відліку  $K$  визначити [19]

$$s_1 = \frac{\rho_-^0 \cdot v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s_2 = s_3 = 0 \quad s_4 = \rho_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Поля  $E'$  і  $B'_z$  можна також знайти й за допомогою формул перетворення компонент тензора електромагнітного поля [19; 78].

Сила взаємодії між струмами в СВ  $K'$ , яка припадає на довжину  $\sqrt{1 - B^2}$  і дорівнює  $F'_y = F'_A - F'_E$ , де  $F'_A$  – це сила Ампера, що діє на струм  $I'$  з боку поля  $B'_z$ ;  $F'_E$  – сила електричної взаємодії між струмами.

Тобто в СВ  $K'$  ми цікавимося силою, що припадає на той же відрізок, що і в СВ  $K$  ( $\Delta l = 1 \text{ см}$ ), але в СВ  $K'$  довжина його дорівнює  $\Delta l \sqrt{1 - B^2} = \sqrt{1 - B^2}$ ; якщо ж брати відрізок довжиною 1 см за вимірами СВ  $K'$ , то замість (4.196) ми одержимо  $F'_y = F_y$ .

Отже, враховуючи (4.194) и (4.195), одержуємо [70; 71]

$$\begin{aligned} F'_y &= \sqrt{1 - B^2} \left( \frac{\mu_0 I'^2}{2a\pi} - \frac{\tau'^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a} \left\{ 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\beta^2} \right) \right\} \sqrt{1 - B^2} \end{aligned} \quad (4.196)$$

у повній згоді з формулами перетворення компонентів 4-сили [2; 24; 35].

Таким чином, ми маємо релятивістськи-інваріантний опис силової взаємодії. Аналогічно може бути знайдено, що рух ЗЧ в електричному й магнітному полях (4.194), (4.195) описується релятивістськи-коваріантним рівнянням.

Однак ми знайдемо таке ж співвідношення між силами, що діють між провідниками в системах  $K$  і  $K'$  ( $F'_y = F_y \sqrt{1 - B^2}$ ) й у рамках традиційного підходу, тобто вважаючи, що провідники зі струмом «заряджені» тільки в тій системі відліку, щодо якої вони рухаються (див. Додаток В).

Така подвійність при розв'язанні цієї задачі в рамках однакового наближення (однаковий ступінь грубості прийнятих моделей) викликає подив.

Але чи маємо ми в обох випадках (в СВ  $K$  і в СВ  $K'$ ) справу з фізичною відносністю? Варто розрізнити фізичну відносність, як принцип

«що стверджує існування відповідних явищ у різних системах відліку, і просто вимогу коваріантності рівнянь при переході від однієї СВ до іншої» [77, с. 245]. Спробуємо розібратись у цьому.

Для цього розглянемо електромагнітне поле, що створюється провідником зі струмом, у двох системах відліку: системі  $K$  (лабораторній) і СВ, зв'язаній з електронами провідності –  $K_e$ . У системі  $K_e$  у рамках рішення, запропонованого нами, ми маємо ситуацію, ідентичну (з точністю до знаку рухомих і нерухомих ЗЧ) такій у системі  $K$ . Дійсно, у СВ  $K$  позитивні іони нерухомі, а електрони провідності рухаються зі швидкістю  $v$ . У СВ  $K_e$  електрони нерухомі, а іони рухаються зі швидкістю  $v$ . Тому напруженість електричного поля  $E$  й індукція магнітного поля  $B$  мають у системі  $K$  таку ж величину, як і в системі  $K_e$  через симетричність умов у системах  $K$  і  $K_e$ .

У рамках же традиційного розв'язку [2; 5; 24; 73] в системі  $K$  електричне поле відсутнє, тому що умова нейтральності провідника зі струмом

$$\left| \rho_-^0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \right| = \left| \rho_+^0 \right|, \quad (4.197)$$

а в системі  $K_e$ , навпаки, електричне поле не дорівнює нулю

$$E_e = \frac{\rho_+^0 S v^2}{c^2 2\pi \cdot a \varepsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.198)$$

де  $a$  – відстань точки поля від процесії заряджених частинок.

Далі, індукція магнітного поля в системі  $K$  дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot a} = \frac{\mu_0}{2\pi \cdot a} \frac{\rho_-^0 v \cdot S}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

а в системі  $K_e$  індукція дорівнює

$$B_e = \frac{\mu_0 \cdot \rho_-^0 v \cdot S}{2a\pi(1 - \beta^2)},$$

тому що струм у системі  $K_e$  виявляється таким, що дорівнює проте

$$I_e = \frac{I}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad [2; 24; 73] \quad (\text{див. також Додаток В}), \text{ незважаючи на те, що}$$

цей струм обумовлений тільки рухом іонів з такою ж за величиною швидкістю  $v$ , як і швидкість електронів у системі  $K$ .



І це не дивлячись на те, що системи  $K$  і  $K_e$  симетричні (ідентичні) з точністю до знаку ЗЧ, які рухаються в цих системах відліку. Очевидна нееквівалентність систем відліку  $K$  і  $K_e$  в моделі, яка широко використовується при вивченні електродинаміки.

Ці висновки можна проілюструвати з допомогою таких рисунків:

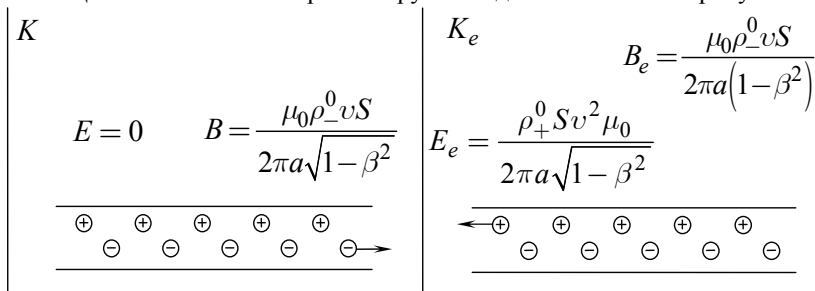


Рис. 4.47. ЕМП в СВ  $K$  та СВ  $K_e$  в традиційній моделі ППС

Порушення фізичної відносності особливо ясно видно при порівнянні сили, що діє на електрон, який рухається в системі  $K$  в напрямку руху електронів провідності зі швидкістю  $v$ , котра дорівнює швидкості останніх, з одного боку, і сили, що діє на позитрон у системі  $K_e$ , яка рухається в цій системі відліку ( $K_e$ ) зі швидкістю  $v$  в напрямку руху іонів.

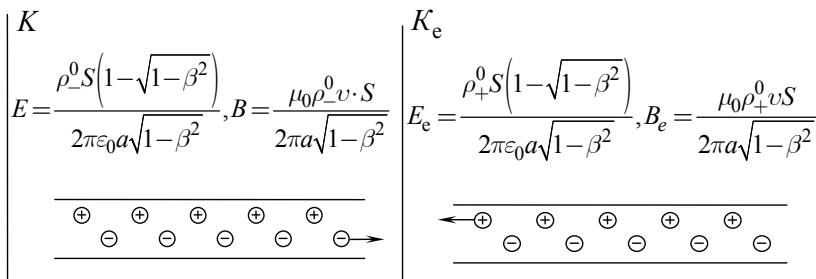


Рис. 4.48. ЕМП в СВ  $K$  та СВ  $K_e$  в моделі ППС, що аналізувалась у [19; 20; 70; 71]

Ми маємо абсолютно ідентичні ситуації і в СВ  $K$ , і в СВ  $K_e$ . Традиційна точка зору дає для сили, що діє в СВ  $K$  на заряд  $q$ :

$$F = qvB = qv \frac{\mu_0 \rho_-^0 \cdot v \cdot S}{2a\pi\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.199)$$

а в системі  $K_e$  сила, що діє на позитрон, дорівнює

$$F = qvB_e - qE_e = qv \cdot \frac{\mu_0 \rho_-^0 \cdot v \cdot S}{2a\pi(1-\beta^2)} - q \frac{\rho_+^0 S \cdot v^2}{c^2 2a\pi \cdot \varepsilon_0 \sqrt{1-\beta^2}} = 0, (4.200)$$

незважаючи на те, що умови в системах  $K$  і  $K_e$  однакові (рис. 4.46). У цьому прикладі, здається, порушується можливість фізичної адаптації, що «є вирішальною умовою реалізації фізичної відносності» [79, с. 8, с. 9].

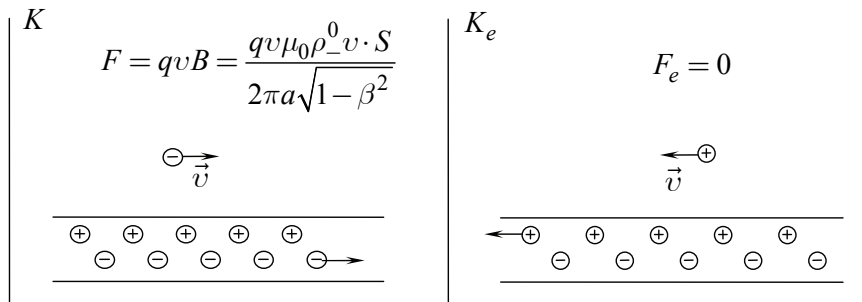


Рис. 4.49. Сила, що діє на електрон у СВ  $K$  та позитрон у СВ  $K_e$  в традиційній моделі ППС

Якщо ж прийняти модель провідника зі струмом, запроповану нами [19; 70; 71], то розв'язання цієї задачі в системах відліку  $K$  і  $K_e$  будуть тотожні (рис. 4.50) [20].

Але для сили, що діє на одиницю довжини одного зі струмів, одержимо, як уже відзначалося, погоджене рішення в рамках кожної з моделей.

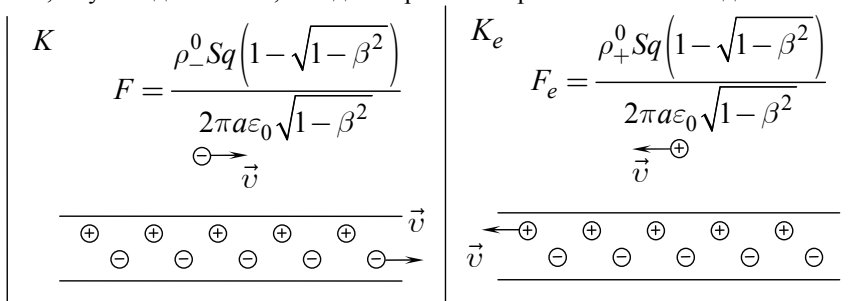


Рис. 4.50. Сила, що діє на електрон у СВ  $K$  та позитрон у СВ  $K_e$  в моделі ППС, що обговорювалась у [19; 20; 70; 71]

## Висновки до розділу 4

1. Твердження, що закон ЕМІ в інтегральній формі («правило потоку») (4.94) є експериментальним законом, виявляється помилковим і не відповідає дійсності.

Розуміння того, що закон ЕМІ (4.94) не є експериментальним законом, надзвичайно важливе. Цей висновок потрібний також і для усвідомлення співвідношення теоретичного й емпіричного в процесі пізнання фізичних явищ і формулювання законів і принципів, які описують ці явища.

2. Найбільш чітко й «абсолютно по-новому» теорію явища ЕМІ дав Максвелл після того, як зв'язав ЕРС індукції з повною електротонічною інтенсивністю вздовж замкнутої кривої (див. (4.99)).

3. У навчально-методичній літературі «правило потоку» (4.94) виводиться, як правило, з аналізу рис. 4.17 та виходячи з виразу для сили Лорентца як сторонньої сили. Саме через математичну простоту та прозорість цей спосіб обґрунтування (4.94) є найбільш поширеним у науково-методичній літературі.

У той же час, незважаючи на те, що електродинаміка є релятивістською теорією, аналіз рис. 4.17 проводиться на базі класичної фізики (класичні формули додавання швидкостей).

4. При обґрунтуванні локальної форми закону ЕМІ в ряді посібників з електродинаміки [7, с. 233], [63, с. 279], [64, с. 350], [96, с. 107] залишається не зрозумілим і **необґрунтованим** перехід від повної похідної до частинної, і навпаки. Некоректним і непослідовним виявляється

виведення рівняння  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  з «правила потоку» (4.94).

5. Якщо інтегральною формою закону ЕМІ є (4.101)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l},$$

то в локальній формі цього закону ( $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ) ніяк не представлений другий доданок правої частини (4.101).

6. Висновок у фізичній енциклопедії щодо того, що співвідношення

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{ або } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

універсально застосовні [98, с. 537] і до довільних **рухомих** середовищ і систем, **суперечить** відповідним положенням посібника Д. В. Сивухіна [65, с. 271–272] і суті цих рівнянь Максвелла. Тобто **такий висновок є помилковим**, оскільки ці рівняння Максвелла, (4.103), описують явище ЕМІ в нерухомих середовищах і контурах.

7. Виходячи з суті електродинаміки як локальної, і польової теорії, інтегральна форма закону ЕМІ повинна бути наслідком локальної форми цього закону. Тобто вихідним законом слід вважати визначення  $rot\vec{E}$  в довільно рухомій точці простору, а не тільки в нерухомій ( $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ).

8. Таким чином, ми можемо сказати, що при описі явища ЕМІ ряд положень (як фізичних, так і методичних) є некоректними, непослідовними й навіть помилковими. Усе це вимагає більш уважного й глибокого аналізу явища ЕМІ та методики вивчення його.

9. В останньому варіанті своєї праці [83] Д. К. Максвелл не подав закон ЕМІ у формі  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ , але привів локальний вираз для напруженості електричного поля, який враховує й індуковане поле (два типи ефектів ЕМІ:  $[\vec{V}, \vec{B}]$  та  $-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ), й поле заряджених частинок  $\nabla\varphi$  (див. формулу (4.100)).

У зв'язку з цим існує точка зору [84, с. 92-94], що (див. також п. 4.2.3 та п. 4.2.4) Максвелл зміг більш точно й адекватно описати суть явища ЕМІ, ніж це зроблено в сучасних літературних джерелах.

Тобто подання (4.100) якраз і відображає подвійну природу ЕРС індукції (на якій в сучасних навчальних посібниках весь час наголошується).

10. Показано, що в основі ЯЕМІ лежать принцип відносності, закон Кулона, принцип суперпозиції.

11. Показана необхідність обов'язкового врахування релятивістських ефектів, навіть якщо вони й нескінченно малі, для коректного опису електромагнітних явищ. Дійсно, якщо не враховувати релятивістських поправок у виразах для напруженості електричного  $\vec{E}$  та індукції магнітного  $\vec{B}$  поля РЗЧ, то в СВ К  $rot\vec{E}_{кл} = 0$ , а  $\frac{\partial\vec{B}_{кл}}{\partial t} \neq 0$ , і таким чином,

$$rot\vec{E}_{кл} \neq \frac{\partial\vec{B}_{кл}}{\partial t}.$$

12. Обгрунтована, виходячи з перших принципів, формула (4.120) для швидкості зміни в часі потоку довільного векторного поля  $\vec{a}$  через рухому поверхню  $S$ .

13. Показано, що формула (4.120) має місце насправді тільки при  $\vec{v} = const$  (швидкість  $\vec{v}$  однакова для всіх точок контуру). Підкресли-

мо, що в усіх посібниках з електродинаміки вважається без обґрунтування й пояснення, що швидкість різних ділянок контуру одна й та сама.

14. Показано, що формула (4.120) може бути обґрунтована також виходячи з повної (субстанціональної) похідної за часом довільного векторного поля.

15. Показано, що закон ЕМІ у формі  $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  є наслідком

принципу відносності та закону Кулона.

16. Таким чином, у результаті проведених досліджень можна констатувати, на відміну від тверджень [6, с. 53] [38, с. 230] щодо відсутності єдиного глибокого принципу, який лежить в основі закону ЕМІ, що такий фундаментальний принцип знайдено. **Це подання закону ЕМІ у формі**

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

17. Показано, що при застосуванні узагальненого закону ЕМІ [17; 31]

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

знімаються й спростовуються непослідовності в інтерпретації явища ЕМІ, пов'язані з так званою подвійною природою ЕРС індукції [6; 38].

18. Показано, що на основі узагальненого закону ЕМІ

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt},$$

$$\text{де } \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - rot[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot div\vec{B} - \vec{B} \cdot div\vec{V},$$

можна описати всі ті явища, які в традиційній методиці вивчення ЯЕМІ інтерпретуються на основі уявлень про подвійну природу ЕРС індукції.

19. Якщо ми хочемо описувати явище ЕМІ мовою польових величин  $(\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t))$ , то не слід прив'язувати свої думки, згідно з ідеями Максвелла, до рухомих провідників і т. п. Хоча початки таких ідей і частково їх реалізацію в нерелятивістському наближенні можна знайти в посібнику Парселла [7].

20. Для електромагнітного поля РЗЧ мають місце хвильові рівняння

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

21. Аналіз взаємодії заряджених частинок, аналіз і вивчення властивостей їх електромагнітних полів дає надзвичайно багатий дидактичними принципами й знахідками матеріал [13; 14; 54; 55; 56].

22. Одержані точні вирази для напруженості ЕП та індукції МП всередині немагнітного провідника, який рухається в однорідному МП.

23. Очевидно, що одержані в п. 4.2 формули справедливі в нерелятивістському наближенні, оскільки ми ніяк не враховували лорентцеве скорочення рухомих контурів, рухомих середовищ.

24. Компенсацію електричного поля в СВ  $K'$  в провіднику простіше й зрозуміліше пояснювати не мовою сил Лорентца, а аналізуючи ситуацію у ВСВ (СВ  $K'$ ) з допомогою ЕМП, одержаного при застосуванні ФПКЕМП  $\vec{E}_\sigma = -[\vec{V}, \vec{B}_0]$ .

25. Виникнення різниці потенціалів між віссю обертання магніту та його бічною поверхнею зумовлене радіальною поляризацією магніту. А явище поляризації при русі намагніченого середовища – це наслідок СТВ, наслідок формул перетворення компонент тензора електричного й магнітного моментів.

**Таким чином, явище уніполярної індукції є релятивістським ефектом.**

26. Використання методів СТВ при поясненні природи ЕРС уніполярної індукції робить зайвими й надуманими проблеми нерелятивістського обґрунтування цього явища: Чи обертається магнітне поле разом з магнітом? У якій частині замкненого контуру виникає ЕРС індукції: у нерухомих провідниках, що приєднують вольтметр до уніполярного генератора, чи всередині самого магніту. Релятивістський підхід спростовує подібні суперечливі пояснення природи ЕРС уніполярної індукції.

Подібні міркування стають досить корисними для підвищення фундаментальної підготовки майбутніх учителів фізики та випускників ВНЗ за спорідненою спеціальністю.

27. Інваріантність сили при переході з однієї СВ в іншу в межах традиційної моделі та моделі провідників зі струмом, запропонованої в [19; 20; 70; 71], і різні величини цієї сили зумовлені, відповідно, однаковим законом перетворення компонент тензора електромагнітного поля й різними значеннями його компонент (а в кінцевому рахунку – різною величиною четвертої складової 4-струму) у кожній з моделей.

28. Може бути, що формули (4.190) і (4.191) не мають відношення до реальності через грубість моделі, яка породила їх. Але тоді треба пояснити, чому при будь-яких значеннях струму (при будь-яких значеннях величини  $\beta$ ), що протікає по провіднику, реалізується умова нейтральності:

сті:  $|\rho_+^0| = |\rho_-^0(1 - \beta^2)|^{-\frac{1}{2}}$ , якщо при відсутності струму  $|\rho_-^0| = |\rho_+^0|$ .

Однак, це інше питання. Альтернативні точки зору на проблему «заряд провідника зі струмом» обговорювалися в роботах [20; 21].

29. Ми лише хотіли показати, що якщо бути послідовним і залишатися в згоді з принципом відносності в рамках прийнятого наближення, яке в дидактиці фізики використовується часто [2; 4; 5; 7; 48; 64; 65; 69; 73] (див. рис. 1, 2 роботи [70], або [40, с. 304–310]), необхідно враховувати релятивістські поправки в електричному полі зарядів, що рухаються («заряд провідника зі струмом»).

30. На основі дидактичних принципів науковості та методологічної спрямованості при вивченні електродинаміки, послідовності, зв'язку практичного досвіду з науковими положеннями нам вдається:

- проілюструвати «роботу» принципу відносності, принципу відповідності;
- сформулювати проблему вибору адекватної моделі;
- пояснити діалектику емпіричного й теоретичного в структурі фізичного знання й подати розуміння зв'язку теорії та експерименту.

І таким чином методика вивчення електродинаміки узгодити, скоординувати з методологією базової науки задля формування в студентів світогляду та фізичного стилю мислення, уявлень про методи наукового пізнання.

31. Слід зазначити, що при описі взаємодії пропонованих моделей 2-х ППС ми не враховували інші фізичні причини появи додаткових взаємодій, крім обговорюваної, зумовленої сплюсненням електричного поля рухомої ЗЧ, а саме: електричну взаємодію між ППС, що виникає внаслідок появи на поверхні ППС поверхневих зарядів, та електричну взаємодію, викликану пінч-ефектом в ППС [82].

32. Обґрунтовані співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в різних системах відліку.

33. Обґрунтовані співвідношення між електродинамічними величинами, які вимірюються в одній і тій самій СВ, в нерелятивістському наближенні.

34. Різними способами обґрунтовані рівняння Максвелла в рухомому середовищі.

35. З метою ознайомлення з експериментами, які проводилися для підтвердження чи спростування висновків релятивістської електродинаміки, детально, у методичних цілях, описані досліди Трутона-Нобля, Вільсона, Рентгена, Роуланда, Ейхенвальда.

## ДОДАТКИ

### Додаток А

#### Формули перетворення проекцій сили при переході від однієї СВ до іншої

Виходячи з вимоги коваріантності рівняння руху при переході від СВ  $K'$  до СВ  $K$ , знайдемо формули, згідно з якими перетворюються компоненти сили при такому переході.

Для цього, згідно з означенням, запишемо спочатку компоненти сил у СВ  $K$  та СВ  $K'$ :

$$\begin{aligned} dp_x/dt &= F_x, \quad dp_y/dt = F_y, \quad dp_z/dt = F_z, \\ dp'_x/dt' &= F'_x, \quad dp'_y/dt' = F'_y, \quad dp'_z/dt' = F'_z. \end{aligned}$$

Використовуючи далі перетворення Лоренца та формули перетворення компонент імпульсу

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2) \cdot V}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z,$$

знаходимо

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left[ \frac{p'_x + (E'/c^2)V}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = \\ &= F'_x + \frac{Vv'_y/c^2}{1+Vv'_x/c^2} F'_y + \frac{Vv'_z/c^2}{1+Vv'_x/c^2} F'_z = \\ &= \frac{1}{1+Vv'_x/c^2} \left\{ F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{v}') \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+Vv'_x/c^2} F'_y, \quad (\text{A.2})$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+Vv'_x/c^2} F'_z, \quad (\text{A.3})$$



де  $E'$  – повна енергія тіла в СВ  $K'$ ,  $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$  – швидкість тіла в СВ  $K'$ ,  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – швидкість цього ж тіла в СВ  $K$ .

$$\text{Ураховано також, що } \frac{dE'}{dt'} = \frac{d\Gamma'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{v}'.$$

У принципі, формулами (A.1), (A.2) та (A.3) питання вирішується.

**Але інколи важливо мати перетворення будь-якої компоненти сили з СВ  $K'$  в СВ  $K$ , у якій компоненти сили в СВ  $K$  були б виражені через швидкість  $v_x$  тіла, а не через швидкість цього тіла  $v'_x$  у СВ  $K'$ , як це відображено в (A.1), (A.2) та (A.3).**

З допомогою формул додавання швидкостей

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}, v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}$$

формула (A.1) набуває вигляду

$$F_x = F'_x + \frac{Vv_y/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_y + \frac{Vv_z/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z. \quad (\text{A.4})$$

Використовуючи прямі та обернені перетворення для ігрекової проекції швидкості

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}, v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-B^2}}{1-Vv_x/c^2},$$

перемножимо почленно ліві й праві частини цих рівностей і одержимо

$$\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right) \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) = 1 - B^2.$$

Тоді з урахуванням останньої формули наші формули (A.2) та (A.3) набувають вигляду

$$F_y = \frac{1-Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_y, \quad (\text{A.5})$$

$$F_z = \frac{1-Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z. \quad (\text{A.6})$$

**Додаток Б**  
**Деякі формули векторної алгебри**  
**та векторного аналізу**

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}, \quad (\text{Б.1})$$

$$\operatorname{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b} \cdot \operatorname{grad}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a}, \quad (\text{Б.2})$$

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \operatorname{grad}) \vec{a} + [\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}] + (\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \vec{b} + [\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b}], \quad (\text{Б.3})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla \cdot (\nabla \vec{a}) - (\nabla \nabla) \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}. \quad (\text{Б.4})$$

Зупинимося більш детально на властивостях скалярного диференційного оператора  $(\vec{a} \cdot \operatorname{grad}) \equiv (\vec{a} \nabla)$ :

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{Б.5})$$

Виконання операції  $(\vec{a} \nabla)$  над довільною функцією точки еквівалентне добутку похідної цієї функції, взятої за напрямком вектора  $\vec{a}$ , на чисельну величину вектора  $\vec{a}$

$$(\vec{a} \nabla) = a \frac{\partial}{\partial a}.$$

Дійсно, знайдемо спочатку операцію  $(\vec{a} \nabla)$  над скаляром  $\varphi$

$$(\vec{a} \nabla) \cdot \varphi = a_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \vec{a} \cdot \nabla \varphi.$$

Але на основі  $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \operatorname{grad}_\tau \varphi$  маємо  $(\vec{a} \nabla) \cdot \varphi = \vec{a} \cdot \nabla \varphi = a \frac{\partial \varphi}{\partial a}$ .

Операцію  $(\vec{a} \nabla)$  над вектором  $\vec{b}$  дає вектор

$$(\vec{a} \nabla) \cdot \vec{b} = a_x \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}, \quad (\text{Б.6})$$

компонента якого, наприклад, по осі  $OX$  дорівнює

$$\left( (\vec{a} \nabla) \cdot \vec{b} \right)_x = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} = (\vec{a} \nabla) \cdot b_x.$$

З іншого боку, похідна вектора  $\vec{b}$  за напрямком  $\vec{a}$  визначається

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial a} = \cos(x, \vec{a}) \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + \cos(y, \vec{a}) \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + \cos(z, \vec{a}) \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}.$$

Якщо помножити останню рівність на  $a$  й порівняти з (Б.6), то впевнимися, що дійсно

$$(\vec{a}\nabla)\cdot\vec{b} = a_x \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} = a \frac{\partial \vec{b}}{\partial a}.$$

Таким чином, якщо вектор  $\vec{a}$  досить малий, то з точністю до величин другого порядку малості  $(\vec{a}\nabla)\cdot\vec{b}$  та  $(\vec{a}\nabla)\cdot\varphi$  дорівнюють, відповідно, приросту вектора  $\vec{b}$  і скаляру  $\varphi$  при переміщенні «точки спостереження» на відрізок, який дорівнює за величиною й напрямком вектору  $\vec{a}$ .

**Додаток В**  
**Опис взаємодії двох паралельних ППС**  
**у традиційній моделі**

Дійсно, в традиційній моделі ППС вважається, як вже відзначалося, що у ВСВ провідник зі струмом нейтральний, «незаряджений», а умова нейтральності  $\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_-$ .

Сила магнітної взаємодії у ВСВ між двома паралельними ППС, що приходиться на одиницю довжини одного із них в такій моделі визначається класичною формулою  $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$ .

Знайдемо силу взаємодії між ними в СВ  $K'$ .

У системі  $K'$ , щодо якої струми переміщуються уздовж своєї довжини зі швидкістю  $V$ , крім магнітної взаємодії струмів, буде мати місце й електрична взаємодія, тому що кожен провідник зі струмом у цій СВ характеризується об'ємною густиною заряду [40, с. 306]

$$\rho' = \frac{V \cdot j_x}{c^2 \sqrt{1-B^2}} = \frac{V \cdot v \cdot \rho_-^0}{c^2 \sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}},$$

де  $j_x$  – густина струму в СВ  $K$ , щодо якої провідник зі струмом нерухомий,  $v$  – швидкість дрейфу електронів провідності.

Умова нейтральності провідника зі струмом у ВСВ визначається співвідношенням (4.179). Тому результуюча сила, що діє на ділянку провідника завдовжки  $\Delta l \sqrt{1-B^2}$  одного зі струмів з боку іншого, дорівнює

$$\begin{aligned} F' &= \frac{\mu_0 I'}{2a\pi} \cdot I' \Delta l \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{\tau'}{2a\pi \cdot \varepsilon_0} \tau' \Delta l \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \\ &= \frac{\Delta l \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \cdot \left( \mu_0 I'^2 - \frac{\tau'^2}{\varepsilon_0^2} \right)}{2a\pi} = \frac{\mu_0 I'^2 \Delta l \cdot \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{2a\pi}, \end{aligned}$$

$$\text{де } I' = \frac{S \cdot v \cdot \rho_-^0}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot (1 - \beta^2)}} = \frac{I}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \tau' = \frac{SV \cdot v \rho_-^0}{c^2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (1 - \beta^2)}},$$

відповідно, сила струму в провіднику та лінійна густина заряду на цьому провіднику в СВ  $K'$ .

Тобто ми одержали необхідне співвідношення між силами  $F'$  і  $F$ :

$$F' = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким чином, щоб одержати релятивістськи-інваріантний опис взаємодії струмів у рамках традиційного підходу, необхідно мати наступний закон перетворення струму:  $I' = \frac{I}{\sqrt{1 - B^2}}$ , де  $I$  – величина стру-

му в системі відліку  $K$ . Останнє, як неважко бачити, забезпечується також і рівністю

$$\left| \rho_+^0 \right| = \left| \rho_-^0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \right|,$$

незважаючи на те, що й густина заряду електронів провідності, й густина заряду позитивних іонів змінюються за однаковим законом при пере-

ході до системи  $K'$  ( $\rho_-^0 = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ ,  $\rho_+^0 = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ ).

Відзначимо, що співвідношення  $I' = \frac{I}{\sqrt{1 - B^2}}$  одержуємо відразу

з формул перетворення компонент 4-струму [85, с. 275] за умови  $s_4 = 0$  або виходячи з означення сили струму [14, с. 138].

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Вектор**  $\vec{B}$  11–13, 14–17, 22, 23, 27, 30, 33, 39, 68, 71, 93, 140, 161, 165, 168, 184–191, 224  
 $\vec{D}$  12, 13, 34, 157  
поляризації 33, 91, 108, 111, 200  
намагнічування 33, 35, 91, 92, 181, 200  
Векторний аналіз 169–177, 234  
Відносність електричного і магнітного полів 7, 18, 37, 38, 39–45, 46, 72, 141
- Гаусса теорема 98, 100, 148  
Градiєнт потенціалу 122, 123  
Густина електричних зарядів 12, 13, 22, 23, 86–88, 109, 196, 209, 211–214, 222  
струму зміщення 99, 103, 105, 114  
струму поляризації 104, 114  
струму провідності 12, 13, 22, 23, 86–88, 105, 109, 213, 214, 222
- Діелектрики 107, 109, 110, 111, 117, 118, 119, 205, 207  
Досліди  
Вільсона 105–108, 201  
Ейхенвальда 114–120  
Рентгена 109–111  
Роланда 109–111  
Троутона-Нобля 121–124  
Фарадея 135
- Електричне поле ППС 73–75, 202–210, 218–221  
Електроємність 108, 206  
Електромагнітна індукція 132–177, 191, 198, 203, 227–229
- ЕРС індукції природа 136, 137, 140, 156, 161, 164, 167  
історія відкриття закону ЕМІ 132–136  
методики вивчення 136–141, 168, 183–203  
Електромагнітне поле в рухомому середовищі 86–88, 183, 187, 189, 192, 194, 196, 203  
ЕМП рівномірно рухомої зарядженої нитки 28–30  
ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ 23, 24, 27, 69, 76–78, 80, 160, 176
- Закон Біо-Савара-Лапласа 72, 121  
електромагнітної індукції 101, 102, 132, 136, 137–141, 161, 164, 166, 169, 172, 227–229  
Кулона 157, 161, 164, 166, 228  
Заряд об'ємний 12, 23, 110, 181, 196, 201, 208, 209, 211, 212, 214, 217  
зв'язаний 111, 181, 194, 196, 200  
поверхневий 18, 116, 192, 194, 196  
ППС, який рухається 74, 75, 209, 213, 214, 216, 222
- Інваріанти ЕМП 61  
Інваріантність виразу для сили Лорентца 31  
Індукція  
електричного поля 12, 14, 34, 93, 96, 108  
електромагнітна 21, 132–144, 156–177, 198, 203  
магнітного поля 22, 23, 27, 30, 33, 39, 68, 71, 93, 140, 161, 165, 168, 224  
уніполярна 36, 199, 201, 203, 230

Коваріантність рівнянь Максвелла  
9, 10

Конденсатор плоский 19, 64, 65

Концентрація зарядів 22, 73

Лінії силові 141, 205

Лорентца матриця перетворення 10,  
11, 16

перетворення 10

сила 31, 68, 192, 203, 208

Магнітний момент 33, 36, 92, 193

Момент дипольний 33, 36

імпульсу 131

сили 121, 124, 129, 131

Намагнічування 111, 119, 193

Напруженість електричного поля  
11, 19, 21, 24, 25, 40, 69, 71, 75, 93,

102, 108, 136, 140, 165, 176, 184–

190, 195, 200, 203, 213, 222, 225

магнітного поля 12, 86, 87, 92

Об'ємний заряд ППС 74, 207, 209,

211, 214, 217, 222

Перетворення компонент 4-тензора  
16, 17

вектора  $\vec{D}$  11–13, 86, 87

вектора  $\vec{H}$  11–13, 86, 87

вектора  $\vec{M}$  33, 34, 86, 87

вектора  $\vec{P}$  33, 35, 86, 87, 111

ЕМП 11, 13, 17, 25, 28, 30, 32,  
39–46, 63–75, 86, 87

Принцип відносності 9, 17, 20, 121,  
130, 157, 160, 161, 164, 166, 167,  
211, 213, 223, 228

Поляризація 91, 111, 112, 113, 152,  
200, 202, 204

Потенціал векторний 14

скалярний 14

чотиривимірний 14

Потенціали ЕМП 14, 140

Потенціальність електричного поля  
158, 160

Програма комп'ютерна для моде-  
лювання відносності електрично-  
го й магнітного полів 48–60

для моделювання ЕМП РЗЧ  
79–84

для моделювання обертового  
моменту 124–127

Потік вектора  $\vec{D}$  96, 99

Потік вектора  $\vec{B}$  99, 101

Принцип суперпозиції 228

Рівняння Максвелла у вакуумі 10

Максвелла в середовищі 10

Максвелла в рухомому середо-  
вищі 96–106

Ротор поля векторного 94, 95, 101,  
103, 105, 118, 140, 158, 160, 169,  
172–177

Сила електрорушійна 19, 20, 134,  
135, 136, 138, 143, 156, 161, 167,

198, 201, 203, 228

Лорентца 19, 31, 68, 192, 203,  
208

Способи обґрунтування ФПКЕМП  
9, 14, 17, 26, 28, 31, 38

Стокса теорема 138, 164, 166

Тензор електромагнітного поля 15,  
16, 37

електричного і магнітного моме-  
нтів 35

ЕМП в середовищі 34

Умови граничні для векторів  $\vec{E}$  та

$\vec{B}$  95

Умови граничні для векторів  $\vec{D}$  та  $\vec{H}$  95

**Формули перетворення компонент**  
ЕМП 10–13, 17, 25, 38, 39, 61, 64,  
67, 68, 141, 184, 187, 189

повздожніх і поперечних  
проекцій векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$   
38, 40, 42, 44, 45, 184, 186,  
187, 189, 192

компонент вектора поляриза-  
ції та вектора намагнічу-  
вання 33, 35

**ФПКЕМП** наслідки основні 38, 39,  
41, 43, 45, 61, 63, 66, 68, 69  
приклади застосування 40, 41,  
43, 45, 63, 65, 68, 69, 72

**Циркуляція вектора  $\vec{E}$**  137, 138,  
139, 140, 143, 159, 161, 167, 227

**Швидкість дрейфова електронів**  
провідності 73, 74, 209, 219, 222,  
225



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
2. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
3. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1983. – 463 с.
4. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1991. – 288 с.
5. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 5 : Электричество и магнетизм. – М. : Мир, 1966. – 290 с.
6. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 6 : Электродинамика. – М.: Мир, 1966. – 343 с.
7. Парселл Э. Электричество и магнетизм : учебное руководство : пер. с англ. / Э. Парселл ; под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1983. – 416 с. – (Берклиевский курс физики).
8. Дідович М. М. Систематизація знань учнів при формуванні поняття електромагнітного поля / М. М. Дідович, С. М. Мощенко // Дидактичні проблеми фізичної освіти в Україні : матеріали науково-практичної конференції. – Чернігів : Чернігівський державний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка, 1998. – С. 53–57.
9. Глазунов А. Т. Методика преподавания физики в средней школе: Электродинамика нестационарных явлений. Квантовая физика : пособие для учителя / А. Т. Глазунов, И. И. Нурминский, А. А. Пинский. – М. : Просвещение, 1989. – 272 с.
10. Гончаренко С. У. Формування наукового світогляду учнів під час вивчення фізики : посібник для вчителя / С. У. Гончаренко. – К. : Рад. шк., 1990. – 208 с.
11. Гончаренко С. У. Фізика, 11 кл. : проб. навч. посіб. для ліцеїв та класів природничо-наукового профілю / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 1995. – 430 с.
12. Меерович Э. А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике / Э. А. Меерович, Б. Э. Мейерович. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
13. Коновал О. А. Особливості методики формування поняття «магнітне поле» / О. А. Коновал // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 3. – С. 24–26.
14. Коновал О. А. Формування уявлень про відносність та взаємозв'язок електричного та магнітного полів при вивченні електромагнетизму / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 51. – Ч. 1. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2003. – С. 135–141.
15. Коновал О. А. Відносність електричного і магнітного полів : Методичні аспекти / О. А. Коновал, Д. В. Рябоконт // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Випуск 3 : у 3-х томах. –

- Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – С. 154–167.
16. Коновал О. А. Елементарне обґрунтування формул перетворення компонент електромагнітного поля / О. А. Коновал, Ю. В. Єчкало // Наукові записки : зб. наук. ст. Національного пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова / Укл. П. В. Дмитренко, Л. Л. Макаренко, В. Д. Сиротюк. – Вип. LIII (53). – К. : НПУ, 2003. – С. 143–148.
  17. Коновал О. А. Непотенціальність електричного поля рухомої зарядженої частинки і закон електромагнітної індукції / О. А. Коновал // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 13 : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2002. — С. 192–195.
  18. Николаев Г. В. Парадокс Фейнмана и асимметрия лабораторной и движущейся систем отсчета : статья деп. в ВИНТИ, рег. № 1937–75.
  19. Коновал А. А., Панов В. П. Заряжен ли проводник, по которому протекает ток? : статья деп. в ВИНТИ, рег. № 4318–80.
  20. Коновал О. А. Електричне поле провідника з струмом / О. А. Коновал // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету. – Серія педагогічна : «Дидактика дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей». – Вип. 8. – Кам'янець-Подільський : К-ПДПУ, інформаційно-видавничий відділ, 2002. – С. 265–275.
  21. Мартинсон М. Л. О плотности заряда внутри проводника с током / М. Л. Мартинсон, А. В. Недоспасов // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163. – № 1. – С. 91–92.
  22. Коновал А. А. Об объемном заряде проводника с током / А. А. Коновал // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в освітній діяльності : зб. наук. пр. – Кривий Ріг, 1999. – С. 143–146.
  23. Коновал О. А. Релятивістський опис взаємодії між провідниками зі струмами / О. А. Коновал // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 30. – Чернігів : ЧДПУ, 2005. – С. 123–130.
  24. Беккер Р. Электронная теория / Р. Беккер. – Л. : ОНТИ, 1936. – 416 с.
  25. Эйнштейн А. Собрание научных трудов / А. Эйнштейн. – Т. I. – М. : Наука, 1965. – 700 с.
  26. Акименко М. Методика вивчення явища електромагнітної індукції / М. Акименко, М. Дідович // Фізика та астрономія в школі. – 2001. – № 1. – С. 23–26.
  27. Каменецкий С. Е. Электродинамика в курсе физики средней школы : пособие для учителей / С. Е. Каменецкий, И. Г. Пустыльник. – М. : Просвещение, 1978. – 127 с.
  28. Вознюк С. Ю. Формування поняття «електромагнітне поле» на основі фундаментальних понять / С. Ю. Вознюк, В. І. Кульчицький // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – № 4. – С. 43–47.
  29. Зисман Г. А. Курс общей физики / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – Т. II. – М. : Наука, 1972. – 368 с.

30. Коновал О. А. Дидактичне та евристичне значення деяких моделей при вивченні електродинаміки / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 46. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2002. – С. 71–76.
31. Коновал О. А. Принцип відносності і закон електромагнітної індукції / О. А. Коновал // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка : зб. наук. праць. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 23 : у 2-х т. – Чернігів : ЧДПУ, 2004. – С. 171–177.
32. Коновал О. А. Принцип відносності і електромагнітне поле рухомої зарядженої частинки / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Випуск VI : у 3-х томах. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2006. — С. 258–262.
33. Коновал О. А. Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки / О. А. Коновал. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2006. – 202 с. : іл.
34. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1957. – 532 с.
35. Пановский В. Классическая электродинамика / В. Пановский, М. Филипс. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 432 с.
36. Манделъштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л. И. Манделъштам. – М. : Наука, 1972. – 437 с.
37. Коновал О. А. Дослід Трoutона-Нобля в системі парадоксів теорії відносності / О. А. Коновал, О. В. Швидкий // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Випуск V : у 3-х томах. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2005. – С. 147–154.
38. Иродов И. Е. Электродинамика. Основные законы / И. Е. Иродов. – 4-е изд., испр. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 320 с. : ил.
39. Франкфурт У. И. Специальная и общая теория относительности. Исторические очерки / У. И. Франкфурт. – М. : Наука, 1968. – 328 с.
40. Коновал О. А. Основи електродинаміки : навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закладів / О. А. Коновал. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2007. – 328 с. : іл.
41. Краснов М. Л. Векторный анализ / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1978. – 160 с.
42. Очан Ю. С. Методы математической физики / Ю. С. Очан. – М. : Высшая школа, 1965. – 383 с.
43. Очан Ю. С. Сборник задач по методам математической физики / Ю. С. Очан. – М. : Высшая школа, 1967. – 195 с.
44. Несис Е. И. Методы математической физики / Е. И. Несис. – М. : Просвещение, 1977. – 199 с. : ил.
45. Коновал А. А. Релятивистская электродинамика и относительность электрического и магнитного полей : метод. пособ. / А. А. Коновал. – Кривой Рог : КГПИ, 1978. – 24 с.
46. Холтон Дж. Эйнштейн и «решающий» эксперимент / Дж. Холтон // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104. – Вип. 2. – С. 297–316.

47. Немнюгин С. А. Turbo Pascal / С. А. Немнюгин. – СПб : Издательство «Питер», 2001. – 496 с. : ил.
48. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М. : Наука, 1966. – 624 с.
49. Борисенко А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. – М. : Высшая школа, 1966. – 252 с.
50. Шпольский Э. В. Атомная физика / Э. В. Шпольский. – Т. 1 : Введение в атомную физику. – М. : Физматгиз, 1963. – 576 с. : ил.
51. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – М. : ГОНТИ, 1939. – 265 с.
52. Савельев И. В. Основы теоретической физики / И. В. Савельев. – Т. 1. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
53. Кудрявцев П. С. Развитие теории электромагнитного поля / П. С. Кудрявцев // Очерки развития основных физических идей. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1959. – С. 236–262.
54. Коновал О. А. Механізм виникнення магнітного поля при русі протонів / О. А. Коновал // Теорія та методика вивчення природничо-математичних і технічних дисциплін : зб. наук.-метод. пр. : Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – Вип. 4. – Рівне : РДГУ, 2002. – С. 123–125.
55. Коновал О. А. Властивості струмів зміщення / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. : у 3-х т. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НацМетАУ, 2002. – С. 138–145.
56. Коновал О. А. Струми зміщення і магнітне поле постійних струмів / О. А. Коновал // Наукові записки Національного пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова : зб. наук. ст. / Укл. П. В. Дмитренко, Л. Л. Макаренко, В. П. Сергієнко. – Вип. 48.– К. : НПУ, 2002. – С. 150–157.
57. Спасский Б. И. История физики / Б. И. Спасский. – Ч. II. – М. : Высшая школа, 1977. – 309 с.
58. Кудрявцев П. С. История физики : у 2-х т. / П. С. Кудрявцев. – Т. I. – М. : Гос. учеб.-педагог. изд-во Минпрос РСФСР, 1956. – 563 с.
59. Кудрявцев П. С. История физики : у 2-х т. / П. С. Кудрявцев. – Т. II. – М. : Гос. учеб.-педагог. изд-во Минпрос РСФСР, 1956. – 487 с.
60. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла / И. С. Шапиро // Успехи физических наук. – 1972. – Т. 108. – Вып. 2. – С. 319–333.
61. Левин М. Л. Максвелловский «Трактат об электричестве и магнетизме» / М. Л. Левин, М. А. Миллер // Успехи физических наук. – 1981. – Т. 135. – Вып. 3. – С. 425–440.
62. Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – 245 с.
63. Кучерук І. М. Загальна фізика. Електрика і магнетизм : навч. посіб. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук ; за заг. ред. В. Й. Сугакова. – К. : Вища школа, 1990. – 367 с. : іл.

64. Кучерук І. М. Загальний курс фізики : у 3 т. : навч. посіб. для студ. вищ. тех. і пед. закл. освіти / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик ; за ред. І. М. Кучерука. – Т. 2 : Електрика і магнетизм. – К. : Техніка, 2001. – 452 с.
65. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – Т. III : Электричество. – М.: Наука, 1977. – 688 с.
66. Кирсанов В. С. Максвелл: создание электромагнитной теории / В. С. Кирсанов // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – С. 62.
67. Карцев В. П. Приключения великих уравнений / В. П. Карцев. – М. : Знание, 1986.
68. Визгин В. П. Потенциалы и напряженности в теории электромагнитного поля / В. П. Визгин // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – С. 15–27.
69. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – Т. 2. – М. : Наука, 1978. – 480 с.
70. Коновал А. А. Релятивистская интерпретация взаимодействия двух длинных токов : статья деп. в УкрНИИИТИ, рег. № 4, Ук-Д84. – 12 с.
71. Коновал А. А. Релятивистски-инвариантное описание взаимодействия двух токов : статья деп. в УкрНИИИТИ, Рег. № 1260, Ук-84 от 17.04.84. – 10 с.
72. Коновал А. А. Дидактическое значение адекватных электродинамических моделей / А. А. Коновал, П. И. Самойленко, А. В. Сергеев // Среднее профессиональное образование : приложение к ежемесячному теоретическому и научно-методическому журналу «СПО». – 2002. – № 4. – С. 136–145.
73. Матвеев А. Н. Электродинамика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1964. – 435 с.
74. Слабкий Л. И. Методы и приборы предельных измерений в экспериментальной физике / Л. И. Слабкий. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
75. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами / В. Б. Брагинский. – М. : Наука, 1970. – 136 с.
- 75а. Брагинский В. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах / В. Б. Брагинский, А. Б. Манукин. – М. : Наука, 1974. – 152 с.
76. Morton N. Electric and magnetic forces between parallel-wire conductors / N. Morton // Phys. Educ. – 1979. – V. 14. – № 6. – S. 369–373.
77. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М. : ФМЛ, 1963.
78. Коновал А. А., Панов В. П. Замечание к закону Био-Савара : статья депонирована в ВИНТИ, рег. 4316-80.
79. Фок В. А. Теория Эйнштейна и физическая относительность / В. А. Фок. – М. : Знание, 1967.
80. Гришук В. В. Релятивістські ефекти при взаємодії електричних зарядів та струмів / В. В. Гришук, М. Т. Мордовець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка : зб. наук. праць. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 13 : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2002. – С. 180–181.

81. Гришук В. В., Мордовець М. Т. Врахування релятивістських ефектів при взаємодії між паралельними провідниками зі струмом / В. В. Гришук, М. Т. Мордовець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 23. – Чернігів : ЧДПУ, 2004. – С. 180–181.
82. Коновал А. А. О физических причинах возникновения электрического поля проводника с током / А. А. Коновал // Модульные технологии обучения в системе непрерывного профессионального образования (теория и практика) : сборник научных трудов X Международной научно-методической конференции, Москва, 23-24 марта 2004 г. – Вып. 8. – Ч. 1 / ред. кол.: В. В. Осипов, П. И. Самойленко, Ю. В. Еремин, А. Е. Краснов, В. Д. Малкина, В. Ф. Дмитриева. – М., 2004. – С. 171–178.
83. Максвелл Д. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Д. К. Максвелл. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 687 с.
84. Маркчев Н. Т. Сравнение различных форм системы уравнений Максвелла / Н. Т. Маркчев // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков : сб. статей. – М. : Наука, 1985. – С. 84–96.
85. Коновал О. А. Основи електродинаміки : навч. посіб для студ. вищ. пед. навч. закл. / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл.
86. Коновал О. А. Задачі з класичної та релятивістської електродинаміки : навч. посіб для студ. вищ. пед. навч. закл. / О. А. Коновал ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2006. – 158 с. : іл.
87. Коновал О. А. Електромагнітна індукція при обертанні магнетиків / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 77. – Ч. 2. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – С. 208–214.
88. Гончаренко С. У. Фізика. 10 кл. : пробн. навч. посібн. для ліцеїв та класів природничо-наук. профілю / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 1998. – 445 с.
89. Терлецкий Я. П. Электродинамика : учеб. пособие для студ. физ. спец. ун-тов / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков. – М. : Высшая шк., 1990. – 352 с.
90. Рязанов Г. А. Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля / Г. А. Рязанов. – М. : Наука, 1966. – 208 с.
91. Коновал О. А. Закон Био-Савара в релятивістській формі / О. А. Коновал // Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – Вип. 42. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2002. – С. 159–165.
92. Коновал О. А. Про заряд провідника з струмом / О. А. Коновал // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Актуальні проблеми викладання та навчання фізики у вищих навчальних закладах», Львів, 5–6 жовтня 1999 р. – Л. : Львівський нац. ун-т ім. Івана Франка, 1999.
93. Коновал А. А., Панов В. П. О так называемом парадоксе Фейнмана : статья деп. в ВИНИТИ рег. № 4317–80.
94. Бурак В. І. Вивчення електромагнітної індукції на рівні її польового трактування у вищих навчальних закладах / В. І. Бурак, Є. І. Тищенко, О. С. Мочеус // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформа-

- тики : зб. наук. пр. – Вип. VII : у 3-х томах. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – С. 210–214.
95. Коновал О. А. Природа електромагнітної індукції / О. А. Коновал // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр. – Випуск VII : у 3-х томах. – Т. 2 : Теорія та методика навчання фізики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – С. 207–209.
96. Пеннер Д. И. Электродинамика и теория относительности / Д. И. Пеннер, В. А. Угаров. – М. : Просвещение, 1980. – 271 с.
97. Коновал О. А. Теорія відносності та електродинаміка : монографія / О. А. Коновал. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 258 с.
98. Физическая энциклопедия / под ред. А. М. Прохорова. – Т. 5. – М. : Советская энциклопедия, 1998. – 691 с.
99. Федорченко А. М. Теоретическая физика. Классическая электродинамика : учеб. пособие / А. М. Федорченко. – К. : Выща шк., Головное изд-во, 1988. – 280 с. : ил.
100. Федорченко А. М. Теоретична фізика : підручник : у 2 т. / А. М. Федорченко. – Т. 1 : Класична механіка і електродинаміка. – К. : Вища шк., 1992. – 535 с. : іл.
101. Мултановский В. В. Курс теоретической физики / В. В. Мултановский, А. С. Василевский. – М. : Просвещение, 1990. – 272 с.
102. Коновал О. А. Властивості і моделювання електромагнітного поля рухомої зарядженої частинки / О. А. Коновал, О. В. Швидкий // Матеріали ІХ Всеукраїнської наукової конференції «Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики» // уклад. : М. І. Шут, Т. Г. Січкач. – К. : НПУ, 2004. – С. 52.
103. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации : Современный анализ проблемы / А. А. Логунов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
104. Коновал О. А. Зміна в часі потоку векторного поля через рухому поверхню та фундаментальні закони електродинаміки / О. А. Коновал, М. А. Слюсаренко // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка : зб. наук. пр. – Серія: педагогічні науки. – Вип. 46 : у 2-х т. – Т. 2. – Чернігів : ЧДПУ, 2007. – С. 48–53.

УДК 538.3 (075)  
ББК 22.33  
К 64

**Коновал О. А.**

**К64 Відносність електричного і магнітного полів** : монографічний навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 248 с. : іл.  
ISBN 978-966-2915-14-3

В навчальному посібнику поданий ґрунтовний аналіз формул перетворення компонент електромагнітного поля (ФПКЕМП) при зміні системи відліку. Приведений огляд як існуючих в навчально-методичній літературі, так і ряд нових, оригінальних способів обґрунтування цих формул. Детально пояснюється зміст та застосування ФПКЕМП на конкретних електродинамічних прикладах. Фізичний зміст задач також перекликається з шкільним та загальним курсом фізики, що дає можливість більш цілеспрямовано готувати учителя фізики. Значна увага приділяється обґрунтуванню закону електромагнітної індукції.

Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, вчителів та викладачів фізики.

*Навчальне видання*

**Олександр Андрійович Коновал**

**Відносність електричного і магнітного полів**

Монографічний навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів

Підписано до друку 10.09.2008.  
Формат 60х84/16. Ум. др. арк. – 14,5. Обл.-вид. арк. – 15,2.  
Тираж – 300 прим.

Видавництво ПП «Видавничий дім»  
Свідоцтво ДК № 515 від 03.07.2001.  
вул. Тухачевського, 26, м. Кривий Ріг, 50063

Друкарня СПД Щербенок С. Г.  
Свідоцтво ДП 126-р від 12.10.2004.  
вул. Рокоссовського, 5/3, м. Кривий Ріг, 50027