

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КРИВОРІЗЬКИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

О. А. Коновал

ОСНОВИ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Навчально-методичний посібник
для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів

Кривий Ріг
Видавець Роман Козлов
2014

ББК 22.313 (Я73)
УДК 530.121 (075.8)
К 64

*Рекомендовано до видання вченою радою
Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний
університет» (Протокол № 4 від 13 листопада 2014 року)*

Рецензенти:

Глушко Є. Я., доктор фізико-математичних наук, професор Інституту фізики напівпровідників імені В. Є. Лашкарьова НАН України

Садовий М. І., доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

Балабай Р. М., доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та методики її навчання Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет»

Коновал О. А.

К64 **Основи спеціальної теорії відносності** : навч.-метод. посіб для самот. роб. студ. вищ. пед. навч. закл. / Олександр Андрійович Коновал ; КПІ ДВНЗ «КНУ». – Кривий Ріг : Вид. Р. А. Козлов, 2014. – 272 с. : іл.
ISBN 978-617-7104-33-8

У навчально-методичному посібнику викладені основні положення спеціальної теорії відносності. Особливу увагу звернуто на фізичну інтерпретацію релятивістських ефектів. Продемонстровано використання чотиривимірного формалізму для опису та аналізу фізичних явищ. Наведені приклади розв'язання задач, що доповнюють та пояснюють особливості застосування законів релятивістської фізики.

Посібник орієнтований на студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів, аспірантів, учителів і викладачів фізики вищих навчальних закладів.

ББК 22.313 (Я73)
УДК 530.121 (075.8)

ISBN 978-617-7104-33-8

© Коновал О. А., 2014.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	6
ПЕРЕДМОВА.....	7
РОЗДІЛ 1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНТЦА.....	11
<i>Теоретична частина</i>	11
1.1. Основні уявлення дорелятивістської фізики. Експериментальні основи спеціальної теорії відносності.....	11
1.2. Постулати Ейнштейна. Простір, час, системи відліку в спеціальній теорії відносності. Синхронізація годинників. Перетворення Лорентца.....	14
1.3. Кінематичні наслідки перетворень Лорентца.....	23
1.4. Метод k - коефіцієнта (радіолокаційний метод).....	31
1.5. Деякі експериментальні підтвердження наслідків спеціальної теорії відносності.....	38
1.6. Видима форма тіл, що рухаються з великою швидкістю.....	42
<i>Практична частина</i>	44
Зразки розв'язування задач.....	44
Завдання для самоконтролю.....	62
Контрольні запитання і завдання.....	64
Рекомендована література до розділу 1.....	65
РОЗДІЛ 2. ЧОТИРИВИМІРНИЙ ПРОСТІР - ЧАС МІНКОВСЬКОГО...67	
<i>Теоретична частина</i>	67
2.1. Поняття про інтервал. Інваріантність інтервалу.....	67
2.2. Геометрична інтерпретація перетворень Лорентца.....	73
2.3. Чотиривимірні вектори та формули перетворення їх компонентів...79	
2.4. Класифікація інтервалів. Причинні зв'язки між подіями та перегляд класичних уявлень про простір і час.....	81
<i>Практична частина</i>	87
Зразки розв'язування задач.....	87
Завдання для самоконтролю.....	96
Контрольні запитання і завдання.....	96
Рекомендована література до розділу 2.....	98

РОЗДІЛ 3. РЕЛЯТИВІСТСЬКА ДИНАМІКА.....	99
<i>Теоретична частина</i>	99
3.1. Чотиривимірні тензори та коваріантна форма запису фізичних законів. Чотиривимірне рівняння руху точкової маси, чотиривимірна сила Мінковського.....	99
3.2. Формули перетворення компонентів тривимірної сили. Зв'язок енергії та маси.....	101
3.3. Тривимірне релятивістське рівняння руху та його особливості. Релятивістська маса.....	104
3.4. Чотиривимірний вектор енергії-імпульсу. Формули перетворення його компонентів. Закон збереження чотиривимірного імпульсу.....	110
3.5. Система невзаємодіючих частинок. Інваріантна маса системи невзаємодіючих частинок. Маса та енергія зв'язку системи взаємодіючих частинок.....	123
<i>Практична частина</i>	126
Зразки розв'язування задач.....	126
Завдання для самоконтролю.....	136
Контрольні запитання і завдання.....	138
Рекомендована література до розділу 3.....	140
 РОЗДІЛ 4. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ ТА ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ЯВИЩА.....	141
<i>Теоретична частина</i>	141
4.1. Електричне поле рівномірно рухомої зарядженої частинки.....	141
4.2. Магнітна взаємодія як релятивістський ефект.....	149
4.3. Принцип відносності і явище електромагнітної індукції.....	153
4.4. Система рівнянь Максвелла у вакуумі як наслідок закону Кулона та принципу відносності.....	167
4.5. Зміна частоти світла при його віддзеркаленні від рухомої поверхні.....	173
<i>Практична частина</i>	176
Зразки розв'язування задач.....	176
Завдання для самоконтролю.....	185
Контрольні запитання і завдання.....	187
Рекомендована література до розділу 4.....	188

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ В ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ.....190

Теоретична частина.....190

5.1. Методичні особливості пояснення явища сповільнення ходу
рухомого годинника.....193

5.2. Обґрунтування формули лорентцевого скорочення повздовжніх
розмірів рухомих тіл.....196

5.3. Деякі способи обґрунтування перетворень Лорентца.....198

5.4. Деякі способи обґрунтування релятивістських формул додавання
швидкостей.....202

5.5. Критично–конструктивний аналіз особливостей висвітлення
релятивістських кінематичних ефектів у підручниках для ЗНЗ209

Практична частина..... 218

Зразки розв’язування задач.....218

Завдання для самоконтролю.....226

Контрольні запитання і завдання.....228

Рекомендована література до розділу 5.....229

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....232

ДОДАТКИ.....239

Додаток А. Традиційний метод обґрунтування перетворень Лорентца..239

Додаток Б. Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що
ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та формального
використання процедури вимірювання довжини рухомого стрижня.....242

Додаток В. Метод доведення релятивістських формул додавання
швидкостей та перетворень Лорентца за Малініним О.М.....244

Додаток Г. Формули перетворення проєкцій сили при переході від однієї
системи відліку до іншої.....247

Додаток Д. Опис взаємодії між двома рухомими зарядженими
частинками. Уведення поняття магнітного поля.....249

Додаток Е. Дослідження електричного та магнітного полів, що
породжуються рівномірно рухомою зарядженою ниткою.....253

Додаток Ж. Дослідження взаємодії двох паралельних провідників з
постійними струмами в традиційній моделі та в моделі, згідно з якою ППС у
власній системі відліку характеризується об’ємною густиною заряду.....257

Додаток И. Обґрунтування релятивістської формули додавання
повздовжньої складової швидкості за допомогою методу k - коефіцієнта.....267

Додаток К. Найважливіші фізичні константи.....270

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- ВВП – вихрове електричне поле.
ВНЗ – вищий навчальний заклад.
ВСВ – власна система відліку.
ЕМ – електромагнітний (електромагнітне).
ЕМІ – електромагнітна індукція.
ЕМП – електромагнітне поле.
ЕП – електричне поле.
ЗНЗ – загальноосвітній навчальний заклад.
ЗТВ – загальна теорія відносності.
ЗЧ – заряджена частинка.
ЛСВ – лабораторна система відліку.
МП – магнітне поле.
НКС – наукова картина світу.
ПВ – принцип відносності.
ПЛ – перетворення Лорентца.
ПСШС – постулат сталості швидкості світла.
ППС – провідник із постійним струмом.
РЗЧ – рухома заряджена частинка.
РФДШ – релятивістські формули додавання швидкостей.
РМ – рівняння Максвелла.
СВ – система відліку.
СЕППС – стаціонарне електричне поле постійного струму.
СК – система координат.
СТВ – спеціальна теорія відносності.
ФПКЕМП – формули перетворення компонентів електромагнітного поля.
ЯЕМІ – явище електромагнітної індукції.

*Теорія відносності Ейнштейна є, ймовірно,
найвеличнішим синтетичним досягненням
людського інтелекту наших днів. Вона підсумовує
математичні та фізичні знання, накопичені більш
ніж за 2000 років. Чиста геометрія від Піфагора до
Рімана, динаміка і астрономія Галілея і Ньютона,
теорія електромагнетизму, створена на підґрунті
досліджень Фарадея, Максвелла та їх послідовників,
- всі вони влилися в децю зміненому
вигляді в теорію Ейнштейна.
Б. Рассел.*

ПЕРЕДМОВА

Спеціальна теорія відносності (СТВ) – розділ фізики, який відіграє надзвичайно важливу роль у формуванні наукового світогляду суб'єктів навчальної діяльності, дозволяє їм отримати сучасні уявлення про простір-час, дає розуміння меж застосування законів класичної фізики.

Спеціальна теорія відносності – це фундаментальна, загальнофізична релятивістська концепція простору-часу, яка разом із законами та принципами квантової теорії є підґрунтям сучасної фізичної картини світу. Релятивістські ідеї пронизують усі розділи фізики. Значущість філософсько-світоглядного потенціалу СТВ, її освітня та виховна функція визначають її загальнолюдську цінність як невід'ємного елемента культури як фахівця-фізика так і кожної сучасної освіченої людини. Тому формування наукового світогляду та фізичного стилю мислення учнів і студентів, уявлень про простір-час та його властивості, які адекватні фізичній реальності, неможливе без засвоєння основних положень СТВ. У зв'язку з цим і в вищих навчальних закладах і в загальноосвітніх навчальних закладах слід звернути особливу увагу на вивчення цієї фізичної теорії.

Насамперед зауважимо, що назва «Теорія відносності» виникла з найменування основного принципу (постулату), покладеного А. Пуанкаре й А. Ейнштейном в основу всіх теоретичних побудов нової теорії простору і часу.

Змістом теорії відносності є **фізична теорія простору і часу, що враховує існуючий між ними взаємозв'язок геометричного характеру.**

Назва ж «принцип відносності» або «постулат відносності» виникла як **заперечення** уявлення про абсолютну нерухому систему відліку, пов'язану з нерухомим ефіром, який протягом декількох століть використовувався для пояснення оптичних і електродинамічних явищ.

Важливо зауважити, що до початку двадцятого століття у фізиків, які будували теорію оптичних і електромагнітних явищ по аналогії з теорією

пружності, склалося помилкове уявлення про необхідність існування абсолютної нерухомої системи відліку, пов'язаної з ефіром. Зародилося, таким чином, уявлення про абсолютний рух щодо системи, пов'язаної з ефіром, що суперечить раннім уявленням класичної механіки (принцип відносності Галілея).

Досліди Майкельсона й інших фізиків спростували цю теорію «нерухомого ефіру» і дали підставу для формулювання протилежного твердження, яке й одержало назву «принцип відносності». Таким чином, ця назва пропонується й обґрунтовується в перших роботах А. Пуанкаре і А. Ейнштейна.

Зокрема, А. Ейнштейн підкреслює: «..невдалі спроби виявити рух Землі щодо «світлоносного середовища» ведуть до припущення, що не тільки в механіці, але і в електродинаміці ніякі властивості явищ не відповідають поняттю абсолютного спокою, і навіть більш того, - до припущення, що для всіх координатних систем, для яких справедливі рівняння механіки, мають місце ті ж самі електродинамічні і оптичні закони, як це вже доведено для величин першого порядку. Ми маємо намір це положення (зміст якого надалі називатиметься «принцип відносності») перетворити на вихідний принцип...» [89, с. 7]. Слушно звернути увагу і на думку А. Пуанкаре: «Ця неможливість показати дослідним шляхом абсолютний рух Землі є законом природи; ми приходимо до того, щоб прийняти цей закон, який ми назвемо **постулатом відносності**, і прийемо його без обмовок» [68, с. 118].

Опонуючи А. Пуанкаре, відомий радянський теоретик Л. І. Мандельштам у своїх лекціях з теорії відносності роз'яснював: «Назва «принцип відносності» - одна з найневдаліших. Стверджується незалежність явищ від неприскореного руху замкнутої системи. Те, що це називається «принципом відносності», вводить, як побачимо потім, в оману багатьох вчених» [55, с. 160].

На невдалу назву цієї теорії вказував і один із творців теорії відносності Герман Мінковський, який виклав її суть в чотиривимірній геометричній формі. 1908 року він стверджував: «..термін «постулат відносності» для вимоги інваріантності по відношенню до групи G_c , здається мені дуже блідим. Оскільки сенс постулату зводиться до того, що в явищах нам дається тільки чотиривимірний у просторі та часі світ, і що проекції цього світу на простір і на час можуть бути узяті дещо довільно, то мені б хотілося цьому твердженню дати назву «**постулат абсолютного світу**» (або, коротко, світовий постулат)» [68, с. 173]. Таким чином, ми бачимо, що назви «принцип відносності» й «теорія відносності» не відображають дійсного змісту теорії, що має назву «спеціальна теорія відносності».

Із появою теорії відносності гостро постала проблема істинності фізичної теорії, означення меж її застосування. Основні положення теорії відносності перестали бути здобутком «чистої науки», як це було на зорі її виникнення. Вони лежать в основі сучасної прискорюючої техніки, фізики ядра та елементарних частинок, ядерної енергетики, квантової оптики, електродинаміки. Всі наслідки теорії відносності експериментально доведені. Наприклад, зв'язок між масою та енергією, який систематично підтверджується роботою ядерних електростанцій, а також ядерними реакціями, що постійно здійснюються та спостерігаються в різних лабораторіях.

Окремо слід звернути увагу на методологічну сутність перетворень Лорентца (Lorentz) (ПЛ), адже зміст СТВ з достатньою повнотою та глибиною не можна з'ясувати без опертя на ці перетворення.

Перетворення Лорентца є математичним апаратом СТВ, але в діючих посібниках з теоретичної фізики в розділах СТВ цьому питанню не завжди приділено достатньо уваги. Так, зокрема, в посібнику [59], написаному на належному науково-методичному рівні, обґрунтування ПЛ, незважаючи на важливість цього питання, здійснено досить поверхово.

У нашій роботі ми враховуємо результати науково-методичного аналізу методів обґрунтування ПЛ здійсненого у посібнику [40], а також пропонуємо методичні рекомендації щодо самостійного опрацювання цих методів та приклади розв'язування задач, які ілюструють принципові аспекти та формули, що використовуються при обґрунтуванні ПЛ.

Усі закони електродинаміки та наслідки рівнянь Максвелла (РМ) можна теж розглядати як підтвердження СТВ, оскільки електромагнітне поле (ЕМП) є релятивістським об'єктом і тому мусить характеризуватися відповідно з вимогами СТВ [35; 36; 38]. З іншого боку, результати теоретичного аналізу всіх електродинамічних явищ як в межах класичної електродинаміки, так і в межах квантової електродинаміки, підтверджуються в експериментах з дивовижною точністю [70].

У зв'язку з цим **метою навчально-методичного посібника** «Основи спеціальної теорії відносності» автор вбачає висвітлення структури та змісту СТВ з акцентом на використання 4-вимірного формалізму та різнобічного, детального аналізу наслідків ПЛ, а також експериментів щодо підтвердження СТВ. У посібнику передбачається органічне поєднання змісту та форми викладу навчального матеріалу, значна частина якого пропонується студентам фізичних спеціальностей університетів для самостійного опанування.

Змістовий компонент посібника ґрунтується на наступних положеннях:

- послідовному поясненні різними способами кінематичних наслідків ПЛ;

- широкому використанні 4-вимірного формалізму для пояснення низки фізичних явищ, які в межах класичної фізики не знаходять адекватного пояснення та висвітлення (зокрема, ефект Допплера, явище аберації, перетворення компонентів 4-вимірних векторів та ін.);

- окресленні провідної ролі СТВ при поясненні, дослідженні та обґрунтуванні деяких електродинамічних явищ;

- нових підходах щодо формування фізичного стилю мислення суб'єктів навчальної діяльності на засадах залучення їх до самостійного пошуку різних способів обґрунтування релятивістських співвідношень.

Ефективність засвоєння студентами змістового компоненту передбачається реалізувати за наступною логікою:

- опанування опорними теоретичними знаннями, викладеними в теоретичній частині кожного розділу посібника, у поєднанні з самостійним опрацюванням літератури з теоретичної фізики та науково-методичних джерел;

- ознайомлення зі зразками розв'язання типових задач;

- самостійне виконання завдань для поглиблення знань та формування вмінь їх практичного використання;

- виконання різнорівневих завдань для самоконтролю навчальних досягнень;

- виконання проблемно-пошукових та творчих завдань (за вибором студентів);

- виконання контрольних завдань;

- ознайомлення з джерелами інформації для поглибленого вивчення теми (за бажанням студентів) з подальшим обговоренням та можливою науковою дискусією.

Практичну та науково-методичну значущість мають «Додатки», в яких запропоновані матеріали, що пояснюють деякі наслідки ПЛ та повинні слугувати поглибленому осмисленню основних положень СТВ, перетворень Лорентца та їх наслідків.

Автор посібника має надію, що викладені вище нові підходи до вивчення СТВ майбутніми вчителями фізики та викладачами фізики забезпечать належне розуміння цієї фізичної теорії, формування професійних умінь, необхідних для організації її плідного вивчення учнями загальноосвітніх навчальних закладів та студентами вищих навчальних закладів.

Розділ 1. Перетворення Лорентца

Мета вивчення розділу: поглиблення та узагальнення знань щодо фізичного змісту перетворень Лорентца (ПЛ) (**Lorentz**) та їх наслідків.

Ключові слова: принципи СТВ, перетворення Лорентца, експериментальні основи спеціальної теорії відносності, кінематичні наслідки ПЛ, метод k -коефіцієнта.

Теоретична частина

1.1. Основні уявлення дорелятивістської фізики. Експериментальні основи спеціальної теорії відносності

Історія фізики знає немало прикладів, коли новий крок у пізнанні суті фізичних явищ зв'язаний з об'єднанням, здавалося б, незалежних одне від одного проявів фізичної реальності. Так, у XVIII столітті І. Ньютон запропонував класичну теорію тяжіння і пояснив природу небесної гравітації та конкретизував її законами земного тяжіння. А потім, у XIX столітті Д.К. Максвелл об'єднав сили електрики та магнетизму і показав, що світло є проявом такої єдності.

А. Ейнштейн в 1905 році створив СТВ і при цьому вдалося об'єднати поняття простору та часу, а в 1916 році довів, що ньютонівська гравітація є проявом цього об'єднання, а саме описується кривиною чотиривимірного простору-часу. Так наука збагатилася двома геніальними відкриттями – спеціальною теорією відносності та загальною теорією відносності (ЗТВ).

Спеціальна теорія відносності, створена А. Ейнштейном, означала перегляд усіх уявлень класичної фізики і головним чином уявлень про простір і час. Тому ця теорія, у відповідності до свого основного змісту, є фізичною теорією простору й часу. Її виникнення – новий переворот у фізичному світогляді, у розумінні таких понять як простір та час, маса та енергія, абсолютність та відносність і т. п.

Постулати теорії відносності приводять до нових поглядів на властивості простору-часу, дають можливість передбачити нові фізичні явища (поперечний ефект Доплера, збільшення часу життя мікрочастинок зі зростанням їх швидкостей), точно описати низку фізичних явищ (рух частинок в електромагнітних полях, явище аберації, ефект Доплера та багато інших), одержати рівняння руху в зовнішніх полях, які відповідають дійсності (релятивістське рівняння руху, функція Лагранжа для релятивістських частинок, закон збереження енергії-імпульсу).

Теорію відносності поділяють на дві частини: спеціальну теорію відносності та загальну теорію відносності.

I. Спеціальна теорія відносності, яка вивчає рух і взаємодію тіл, фізичні процеси в інерціальних системах відліку з урахуванням кінцевої швидкості передачі сигналів (взаємодій), була створена, в основному, Альбертом Ейнштейном в 1905 році. Суть її полягає в об'єднанні простору і часу.

II. Загальна теорія відносності, або теорія гравітації, вивчає фізичні процеси в неінерціальних системах відліку і одночасно є релятивістською теорією гравітації. ЗТВ створена незалежно одним від одного А. Ейнштейном та Д. Гілбертом в 1916 році.

Теорія відносності – це фізична теорія простору і часу.

Суть спеціальної теорії відносності полягає в єдності простору і часу та в тому, що геометрія цього простору псевдоевклідова.

Перш ніж перейти до власне СТВ, акцентуємо увагу на *основних положеннях дорелятивістської фізики*:

1. Простір класичної механіки тривимірний, а метрика цього простору евклідова.

2. Просторові та часові співвідношення незалежні одне від одного та від руху і характеру перебігу фізичних процесів. Але зауважимо, що часові співвідношення і простір пов'язані з законами руху, і оскільки закони руху описують пов'язані з простором та часом особливості протікання фізичних процесів в часі, то неможливо вимірювати час без посилання на простір та закони руху. Поряд з 3-вимірним простором існує незалежний від нього одновірний час.

3. Просторові та часові проміжки в класичній фізиці є абсолютними і не залежать від системи відліку (СВ):

$$\Delta l' = \Delta l, \quad \Delta t' = \Delta t.$$

Ці співвідношення відображають Ньютонівську концепцію абсолютного простору і часу.

Штрихом будемо позначати величини, що вимірюються чи визначаються в СВ K' , яка рухається відносно СВ K вздовж осі OX прямолінійно і рівномірно з швидкістю \vec{V} .

4. В класичній фізиці має місце принцип відносності Галілея, який характеризує виключно механічні процеси.

5. При переході від однієї СВ до іншої просторові та часова координати підпорядковуються перетворенням Галілея:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (1.1)$$

Ці перетворення також відображають абсолютність простору і часу. Із (1.1) одержується формула додавання швидкостей класичної механіки:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1.2)$$

та інваріантність прискорення тіла \vec{a} при переході від в СВ K до СВ K' :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}', \quad (1.3)$$

де \vec{V} швидкість СВ K' відносно системи K .

Оскільки $\vec{a} = \vec{a}'$, то сила $\vec{F} = m\vec{a}$, що діє на частинку в системі K , збігається з силою $\vec{F}' = m\vec{a}'$, що діє на частинку в системі K' :

$$\vec{F} = \vec{F}'.$$

Це пов'язано з тим, що сила залежить від відстані між даною частинкою і частинками, які діють на неї, а ці відстані в ньютонівській механіці вважаються однаковими у всіх інерціальних системах. Маса тіла m також однакова у всіх системах відліку.

Отже, рівняння класичної динаміки не змінюється при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої, тобто є інваріантними відносно перетворення Галілея. Це і є механічний принцип відносності. Галілей зазначив, що ніякими механічними дослідами, які проведені в даній інерційній системі відліку, не можна встановити, чи знаходиться фізичний процес і пов'язана з ним СВ в стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно.

6. Швидкість поширення взаємодій нескінченно велика. Тобто, класична фізика базується на принципі дальності. Власне, і поняття потенціальної енергії $U(r'_1, r'_2, \dots)$, можна несуперечливо ввести тільки в рамках дальності (в межах класичної механіки).

До експериментальних основ спеціальної теорії відносності відносять досліді і їх результати, які підтверджують постулати Ейнштейна. Це досліді, які начебто є вихідними при формулюванні принципів СТВ. В традиційних методиках викладання СТВ до низки таких дослідів відносять: досліді Фізо по визначенню швидкості світла, явище аберації зірок, досліді по спостереженню за рухом подвійних зірок, досліді Майкельсона та інші.

Досліді Фізо по визначенню швидкості світла v в рухомому середовищі дали результат:

$$v = \frac{c}{n} + k \cdot V, \quad (1.4)$$

де $k = 1 - \frac{1}{n^2}$ – коефіцієнт захоплення, V – швидкість руху середовища (води), в якому поширюється світло, n – показник заломлення світла у рухомому середовищі, c – швидкість світла в вакуумі.

Слід відмітити також низку дослідів, які підтвердили незалежність швидкості світла від швидкості руху джерела світла: це досліди Саде, Бонч-Бруєвича, Майорани.

У той же час слід також зазначити, що, наприклад, дослід Майкельсона не відігравав значної ролі в процесі створення Ейнштейном СТВ. Сам А. Ейнштейн, відповідаючи на питання чи допоміг йому дослід Майкельсона-Морлі в розробці СТВ, так охарактеризував ситуацію:

«Коли я розвивав свою теорію, результат Майкельсона не зробив на мене помітного впливу. Я навіть не можу пригадати, чи знав я про нього взагалі, коли писав свою першу роботу по спеціальній теорії відносності (1905 р.). Пояснити це можна просто тим, що із загальних міркувань я був твердо переконаний в тому, що ніякого абсолютного руху не існує і моє завдання полягало тільки в тому, щоб поєднати цю обставину з тим, що відоме з електродинаміки. Звідси можна зрозуміти, чому в моїх дослідженнях дослід Майкельсона не грав ніякої ролі або, принаймні, не грав вирішальної ролі» [81, с. 298].

Тому ми змушені визнати, всупереч загальноприйнятій в існуючих підручниках та посібниках з СТВ точці зору, що «вплив «вирішального» експерименту Майкельсона-Морлі на мої власні зусилля був досить опосередкованим.... Звичайно, не існує логічного шляху, що приводить до створення теорії; існують лише здійснювані навпомацки конструктивні спроби, які контролюються за допомогою ретельного аналізу пізнаних фактів» [81, с. 313].

1.2. Постулати Ейнштейна. Простір, час, системи відліку в спеціальній теорії відносності. Синхронізація годинників. Перетворення Лорентца

В основу спеціальної теорії відносності покладено два постулати Ейнштейна.

I. Принцип відносності, який стверджує, що всі інерціальні системи відліку рівноправні для опису довільного фізичного явища.

Наведемо ще декілька еквівалентних формулювань принципу відносності (ПВ):

- Рівномірний та прямолінійний рух системи відліку не впливає на перебіг довільного фізичного явища.
- У всіх інерціальних системах відліку одне і теж фізичне явище відбувається однаково за умови, що зовнішні та початкові умови однакові.
- Диференціальні рівняння, що описують будь-який фізичний процес в СВ K та СВ K' , мають однакову форму.
- Основні рівняння фізики повинні бути коваріантними відносно певних перетворень координат простору і часу.

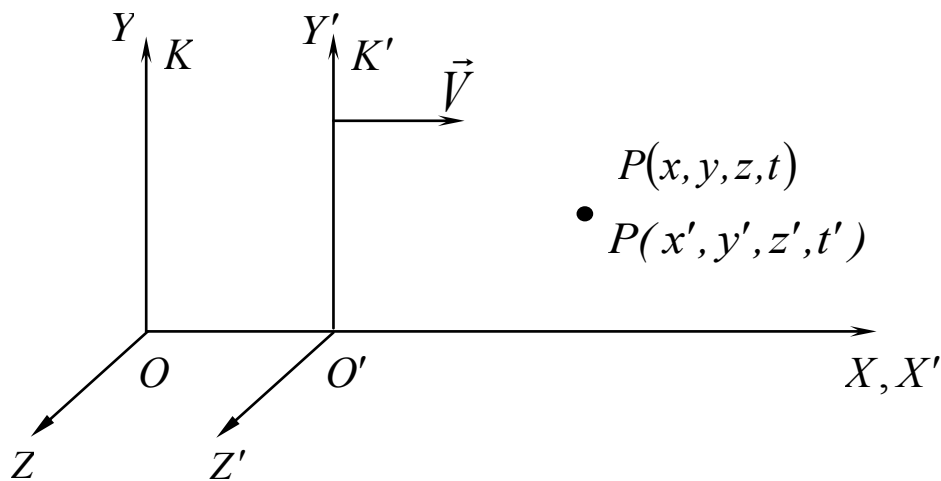
II. Постулат сталості швидкості світла (ПСШС):

- швидкість світла в вакуумі однакова в усіх системах відліку і не залежить від швидкості руху системи відліку та джерела світла.

Вихідним поняттям СТВ є поняття події, яка характеризується чотирма числами x, y, z, t – місцем настання та часом настання події.

Г. Мінковський стверджував, що «Предметом нашого сприйняття завжди є тільки місце та час взяті разом. Ніхто ще не спостерігав будь-якого місця інакше, ніж в деякий момент часу і будь-який час інакше, ніж в деякому місці» [68, с. 168].

Таким чином, одне із основних понять теорії відносності – це поняття події.



Мал. 1.1. Рух СВ K' відносно «нерухомої» СВ K

В СВ K , яка вважається «нерухомою», подія в точці P характеризується чотирма координатами, x, y, z, t . А СВ K' , яка рухається зі швидкістю \vec{V} відносно СВ K вздовж вісі OX (мал. 1.1), ця ж подія має координати x', y', z', t' .

Закони фізики розглядаються як деякий умовний запис результатів експериментальних спостережень, які врешті решт зводяться до аналізу просторово часових збігів. Тому в фізиці, і зокрема в теорії відносності, так багато уваги приділяється процедурам визначення часу настання події.

За Ейнштейном, щоб надати часу фізичного змісту необхідні деякі процеси, які дали б можливість встановити зв'язок між різними точками простору, просторові та часові дані мають не фіктивне, фізично реальне значення.

І далі, часові відношення одержують фізичний зміст тільки тоді, коли події, що інтерпретуються зв'язані фізичною взаємодією.

Нехай в точці P відбулася деяка подія. Координати події x, y, z, t - це просторові координати т. P : x, y, z , та t - час настання цієї події. **Час настан-**

ня будь-якої події реєструється годинником, що знаходиться в тій же точці простору, що і подія.

Але коли нам необхідно зіставити (порівняти) події в різних точках простору, іншими словами порівняти час настання цих подій, то необхідно запропонувати спосіб установки та визначення загального часу для всіх точок даної СВ.

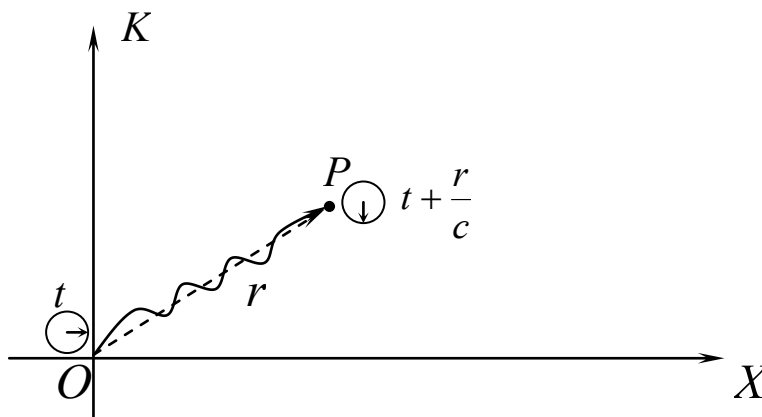
Тобто, щоб визначити час настання події в якійсь точці системи необхідно поглянути на циферблат годинника, який знаходиться в даній точці. Тому треба синхронізувати хід всіх годинників в даній СВ.

Синхронізацію годинників можна здійснити двома способами:

1. Опорний годинник розміщують в початку відліку системи координат (т. O). В момент t по опорному годиннику посилається сигнал до точки P (мал. 1.2). В момент приходу світлового сигналу в т. P , годинник в т. P встановлюють на момент часу:

$$t + \frac{r}{c}, \quad (1.5)$$

де r – відстань від опорного годинника до т. P . Тобто, $t + \frac{r}{c}$ – час, який показує годинник, що знаходиться в точці P .



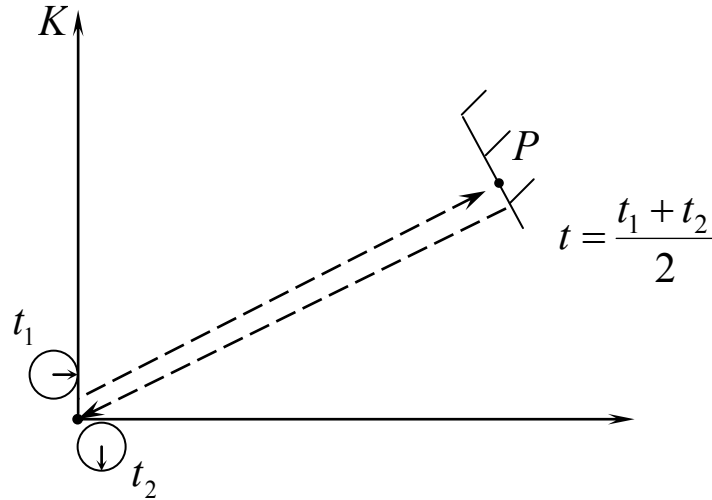
Мал. 1.2. Синхронізація годинників

Якщо таким чином виставлені стрілки всіх годинників даної СВ, то говорять, що хід цих годинників синхронізований. І всі вони в довільну мить показують один і той же момент часу. Точно така ж процедура синхронізації повинна бути здійснена і в СВ K' .

2. Другий спосіб синхронізації полягає в наступному. В момент t_1 від опорного годинника (мал. 1.3) подається світловий сигнал в напрямі до точки P . Він відбивається від дзеркала, що знаходиться в т. P , і прибуває в початок координат в момент t_2 .

В який момент часу сигнал відбивається від дзеркала? В який момент часу відбулася ця подія з точки зору СВ K ? Цей момент часу дається означенням:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (1.6)$$



Мал. 1.3. Синхронізація годинників (момент часу відбиття сигналу від дзеркала)

Це час настання події - прибуття світлового сигналу в т. P (мал. 1.3).

Як бачимо, процедури синхронізації базуються на другому постулаті СТВ, а також на припущенні, що швидкість світла в обидві сторони (в прямому та зворотному напрямках) однакова.

Просторові координати точки визначаються лініями, які є ідентичними в СВ K і СВ K' (ідентичність масштабів можна, в принципі, реалізувати виходячи з принципу тотожності мікрочастинок).

Ще раз нагадаємо, що коли таким чином синхронізовані годинники у всіх точках простору даної СВ всі вони, в дану мить, показують один і той же момент часу.

Перетворення Лорентца (Lorentz). А). Знайдемо формули, згідно з якими координати події в СВ K' пов'язані з координатами цієї ж події в системі K . Тобто необхідно знайти функції:

$$x' = \varphi_1(x, y, z, t), \quad y' = \varphi_2(x, y, z, t), \quad z' = \varphi_3(x, y, z, t), \quad t' = \psi(x, y, z, t). \quad (1.6a)$$

Ці формули називаються перетвореннями Лорентца. Їх одержують на основі постулатів Ейнштейна. Перетвореннями Лорентца слід замінити перетворення Галілея, **оскільки (1.2) суперечать другому постулату СТВ.**

Дійсно, розглянемо поширення сферичної електромагнітної хвилі в обох системах відліку. Виберемо за початок відліку часу і в СВ K і в СВ K' ту мить, ($t = t' = 0$) коли початки координат (т. O і т. O') систем відліку співпадають.

В цю мить в початках координат (т. O і т. O') спалахнула лампочка. Тому рівняння хвильової поверхні в СВ K в момент часу t має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (1.7)$$

Аналогічно, в момент часу t' світловий сигнал в СВ K' досягне точок сфери радіуса ct' :

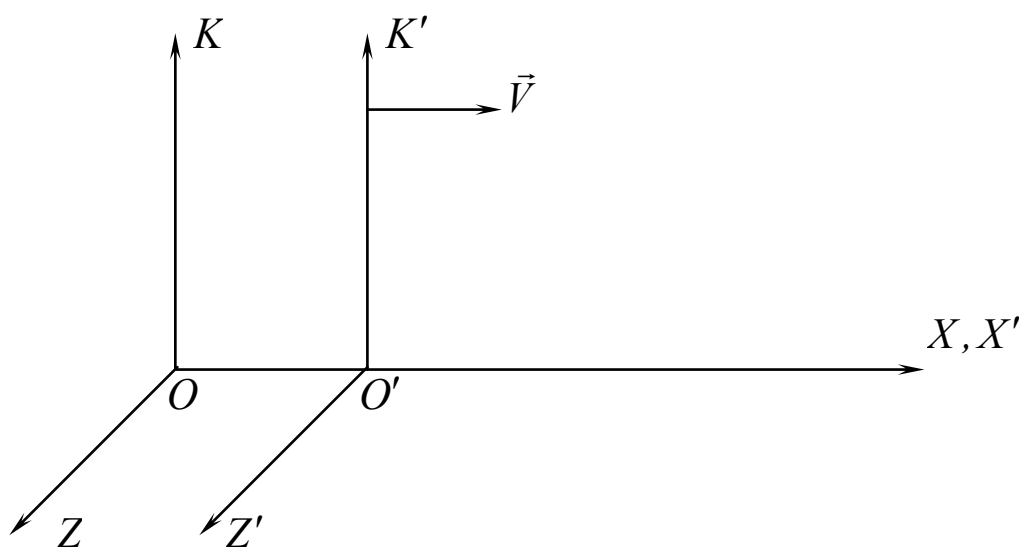
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (1.8)$$

Рівняння (1.7) та (1.8) мають однаковий вигляд, що являється наслідком інваріантності розповсюдження світла щодо перетворення координат і часу від однієї СВ до іншої.

Якщо в (1.7) підставити перетворення (1.1), то одержуємо співвідношення

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 - 2V \cdot x't' - V^2 t'^2 = 0,$$

яке не співпадає з (1.8).



Мал. 1.4. Відносне положенні СВ K' в момент часу t

Тобто, перетворення (1.1) не сумісні з ПСШС. Згідно з принципом відносності закон поширення повинен бути однаковим в усіх СВ. Значить, необхідно знайти такі перетворення координат події, які давали б, наприклад, (1.8).

Переходимо тепер до обґрунтування перетворень Лорентца.

Стосовно вигляду функцій (1.6а) див. Додаток А, де зокрема показано, що

$$y' = y, \quad z' = z, \quad \text{а} \quad x' = f(x, t), \quad x = f'(x', t').$$

Вигляд функцій $f(x, t)$ та $f'(x', t')$ знаходять виходячи із таких міркувань.

Для цього розглянемо мал. 1.5. Вихідні умови для систем відліку такі ж, як і для мал. 1.4.

Точка $x' = 0$ в СВ K має координату $x = Vt$. Тоді очевидно, що для довільної іншої точки СВ K' маємо:

$$x' = \alpha'(x - Vt). \quad (1.9)$$

З іншого боку, точка $x = 0$ (точка O , початок координат СВ K) з точки зору СВ K' має координату $x' = -Vt'$ (див. Мал. 1.5). Тому для будь-якої іншої точки СВ K можна записати:

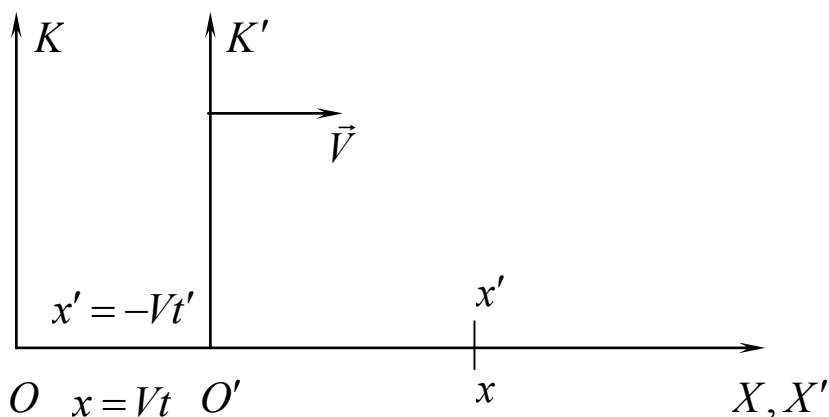
$$x = \alpha(x' + Vt'). \quad (1.10)$$

Виходячи із принципу відносності коефіцієнти α та α' повинні бути однакові:

$$\alpha = \alpha'.$$

Дійсно, нехай в СВ K' вздовж осі $O'X'$ знаходиться стержень одиничної довжини. Тобто координати кінців його такі:

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = 1, \quad x'_2 - x'_1 = 1.$$



Мал. 1.5. Положення початку координат кожної із систем відліку відносно іншої

Тоді в СВ K в один і той же момент часу ($t_1 = t_2$) координати кінців стержня та довжина цього стержня будуть:

$$x'_1 = \alpha'(x_1 - Vt_1),$$

$$x'_2 = \alpha'(x_2 - Vt_2),$$

$$\frac{x'_2 - x'_1}{\alpha'} = x_2 - x_1.$$

Оскільки $x'_2 - x'_1 = 1$, то одержуємо:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\alpha'}.$$

Це з точки зору системи відліку K .

Нехай тепер в СВ K знаходиться такий же одиничний стержень. Тобто, $x_2 - x_1 = 1$. Тоді з точки зору СВ K' довжина його буде (при виконанні умови $t'_1 = t'_2$):

$$\frac{(x_2 - x_1)}{\alpha} = x'_2 - x'_1.$$

Оскільки, згідно з перетвореннями Лорентца:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha(x'_1 + Vt'_1) \\ x_2 &= \alpha(x'_2 + Vt'_2), \end{aligned}$$

тому $x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\alpha}$.

Із рівноправності СВ K і СВ K' випливає, що:

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1,$$

тобто $\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha}$, а отже і $\alpha = \alpha'$.

Із цих двох співвідношень, $x' = \alpha(x - Vt)$ та $x = \alpha(x' + Vt')$, можна одержати:

$$t' = \gamma \cdot t + \delta \cdot x, \quad (1.11)$$

де $\gamma = \alpha$, $\delta = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha V}$.

Тобто, виходячи із принципу відносності та другого постулату Ейнштейна, ми дійшли висновку: між t і t' повинна бути лінійна залежність.

Якби вона була нелінійна, наприклад, $t' \sim t^2$, то довільний рівномірний рух у першій системі буде прискореним в іншій системі відліку. Такий висновок суперечить самому поняттю інерційної системи відліку.

Для знаходження коефіцієнтів α, γ, δ в формулах перетворення (1.9) (1.10) (1.11) підставимо ці формули, (1.9), (1.10), (1.11), в рівняння хвильової поверхні і врахуємо її однаковий вигляд з точки зору СВ K та СВ K' :

$$\alpha^2(x - Vt)^2 + y'^2 + z'^2 - c^2(\gamma t + \delta x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Ця алгебраїчна рівність буде мати місце при довільних t та x тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти, що стоять перед x^2, t^2, xt в лівій і правій частині рівності однакові.

Тобто:

$$\alpha^2 - c^2\delta^2 = 1, \quad \alpha^2V^2 - c^2\gamma^2 = -c^2, \quad -\alpha^2V - c^2\gamma\delta = 0.$$

Розв'язуючи систему цих трьох рівнянь, знаходимо:

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} = \Gamma,$$

$$\delta = \left(-\frac{V}{c^2}\right)\alpha, \text{ де } B = \frac{V}{c}.$$

Таким чином, перетворення Лорентца мають вигляд:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (1.12)$$

При обґрунтування ПЛ цим методом послідовно і прозоро використовуються постулати СТВ (як принцип відносності так і принцип ПСШС). Окрім того, для обґрунтування $y' = y$, $z' = z$ плідно, наочно та результативно використовуються властивості симетрії простору: однорідність та ізотропія. У процесі роботи над навчальним матеріалом щодо обґрунтування ПЛ слід звернути особливу увагу на способи використання властивостей симетрії простору.

Щоб знайти обернені перетворення, треба розв'язати рівняння (1.12) відносно x та t і одержимо:

$$x = (x' + Vt')\Gamma, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2} \cdot x'\right). \quad (1.13)$$

Але простіше запам'ятати правило: **при переході від однієї СВ до іншої в формулах перетворення Лорентца слід штриховані величини замінити на не штриховані, а перед швидкістю \vec{V} поставити протилежний знак.**

Таким чином, оскільки подія характеризується координатами x, y, z, t , то вся сукупність координат фізичних подій в довільній системі відліку утворює чотиривимірний багатовид, причому зв'язок між координатами одного і того ж багатовиду в двох інерціальних системах відліку дається перетвореннями Лорентца.

Момент часу $t'(x, t)$, який визначається перетвореннями Лорентца (1.12) - це те, що показує годинник із СВ K' , який знаходиться в цю мить (момент t) в точці x СВ K . Таким чином, годинник із набору годинників СВ K' , який буде в точці x , показує момент t' , що не співпадає з часом, що показує годинник із СВ K (детальніше див. *Задачу 1.5*).

Якщо x - це координата деякої точки (події) в СВ K і годинник в цій системі відліку показує момент часу t , то координата цієї події з точки зору СВ K' буде x' , (1.12).

Відмітимо деякі наслідки перетворень Лорентца.

Так, відносність одночасності добре видно із перетворень Лорентца.

а) Нехай в точці x_1 і x_2 СВ K , відбулись події в один і той же момент часу t . Тоді згідно з перетвореннями Лорентца проміжок часу між цими подіями в СВ K' буде:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\Gamma\left(\frac{V\Delta x}{c^2}\right). \quad (1.13a)$$

Тобто, якщо події в СВ K просторово рознесені ($x_1 \neq x_2$), але одночасні ($t_1 = t_2$), то в СВ K' :

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - B^2}}, x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - B^2}}, \\ t'_1 &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - B^2}}, t'_2 = \frac{t - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - B^2}}, \\ x'_1 &\neq x'_2, t'_1 \neq t'_2. \end{aligned}$$

Отже, в СВ K' ці події залишаються просторово рознесеними, але виявляються й неодночасними. Знак різниці $t'_2 - t'_1$ визначається знаком виразу $V \cdot \Delta x = V(x_2 - x_1)$. Тому в різних точках СВ K' різниця $t'_2 - t'_1$ буде неоднаковою за величиною і за знаком.

б) Перетворення Галілея (1.1) - це граничний випадок перетворень Лорентца. Дійсно, якщо $B \ll 1$, то $\Gamma \cong 1$ і із формул перетворень Лорентца, при $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$, одержуємо:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y &= y', z = z', t = t'. \end{aligned}$$

в) Нехай в СВ K в точках з координатами x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 відбуваються дві події. В СВ K' , яка рухається відносно СВ K з швидкістю \vec{V} вздовж осі OX , цим подіям відповідають координати x'_1 і x'_2 в моменти часу t'_1 і t'_2 . Якщо події в СВ K відбуваються в одній точці ($x_1 = x_2$) і є одночасним ($t_1 = t_2$), то згідно з перетвореннями Лорентца (1.12) маємо:

$$x'_1 = x'_2 \text{ і } t'_1 = t'_2.$$

Тобто, ці події є одночасними і такими, що просторово збігаються для довільної інерціальної системи відліку.

Для більш детального ознайомлення, як з методами обґрунтування перетворень Лорентца так і з властивостями й наслідками ПЛ, слід звернутися до посібника [40].

1.3. Кінематичні наслідки перетворень Лорентца

Проаналізуємо основні кінематичні наслідки перетворень Лорентца («сповільнення ходу рухомих годинників», скорочення повздовжніх розмірів рухомих тіл, формули додавання швидкостей за Ейнштейном).

а) перебіг часу в різних системах відліку, власний час.

Нехай в СВ K' в точці з координатою x' знаходиться годинник, який реєструє тривалість деякого процесу або явища. Нехай явище почалося в момент часу t'_1 , а кінець явища по годиннику СВ K' - t'_2 .

Тривалість цього явища з точки зору СВ K' :

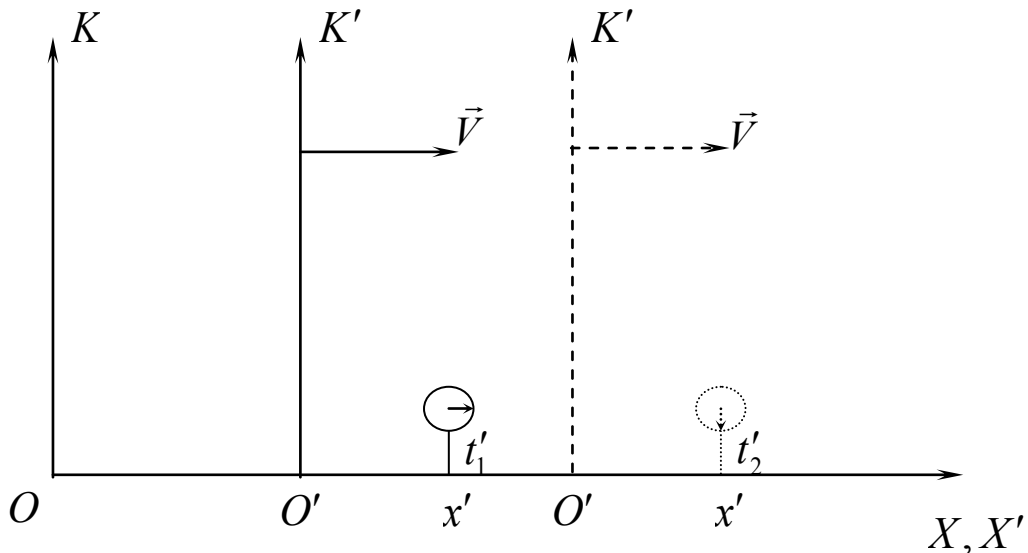
$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Треба знайти тривалість цього процесу, або відповідний проміжок з точки зору СВ K .

Нехай в той момент, коли годинник СВ K' , що знаходиться в точці з координатою x' і показав t'_1 , годинник системи K , що знаходиться в цій же точці, відмітив момент t_1 . Тоді в той момент, коли годинник СВ K' , показав t'_2 , годинник системи K , що знаходиться в цій же точці простору СВ K показав момент часу t_2 , мал. 1.6.

Таким чином, тривалість процесу з точки зору СВ K :

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$



Мал. 1.6. «Сповільнення ходу» рухомого годинника як наслідок перетворень Лорентца

Тоді із перетворень Лорентца $t_{2,1} = \frac{t'_{2,1} - \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}$, отримуємо:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (1.14)$$

Оскільки $B = \frac{V}{c} > 0$, то $\sqrt{1-B^2} < 1$, а звідси:

$$\Delta t > \Delta t'. \quad (1.15)$$

Тобто складається враження, що рухомий годинник з точки зору «нерухомого годинника» (спостерігача) «іде» повільніше, ніж нерухомий.

Це співвідношення слід розуміти так:

Тривалість фізичного процесу в системі відліку, де він нерухомий, завжди менша, ніж тривалість його з точки зору будь-якої іншої інерціальної системи відліку.

Можна також говорити, що фізичний процес в СВ, відносно якої він переміщується, протікає повільніше, ніж з точки зору системи відліку, в якій він знаходиться в спокої.

Різним виявляється лише відлік проміжків часу.

Зв'язок проміжку часу між двома подіями, що відбулися в деякій СВ в одній і тій самій точці простору (а, отже, цей проміжок часу $\Delta t'$ фіксується одним годинником) з проміжком часу між тими самими подіями, але який вимірюється двома годинниками іншої СВ, відносно якої ці дві події відбуваються в двох різних точках простору, визначається формулою (1.14).

Розглянемо інші способи обґрунтування та пояснення формули (1.14).

З цією метою здійснимо аналіз ходу світлового променя в «світловому годиннику» в СВ K та СВ K' .

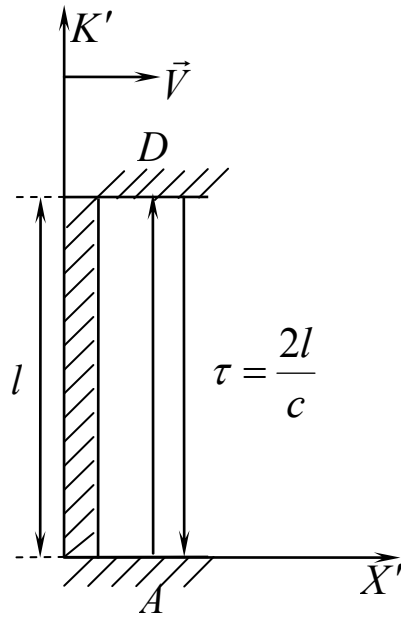
На кінцях стержня довжиною l закріплені два паралельні дзеркала. Між дзеркалами рухається вгору і вниз світловий промінь (фотон), мал. 1.7.

Кожне віддзеркалення світла від нижнього дзеркала за допомогою спеціального пристрою викликає наступне «клацання» годинника.

Спостерігач, нерухомий відносно годинника, виявить, що інтервал часу між «клацанням» дорівнює:

$$\tau = \frac{2l}{c}.$$

Та з точки зору спостерігача, відносно якого годинник рухається зі швидкістю V , інтервал часу виявиться іншим.

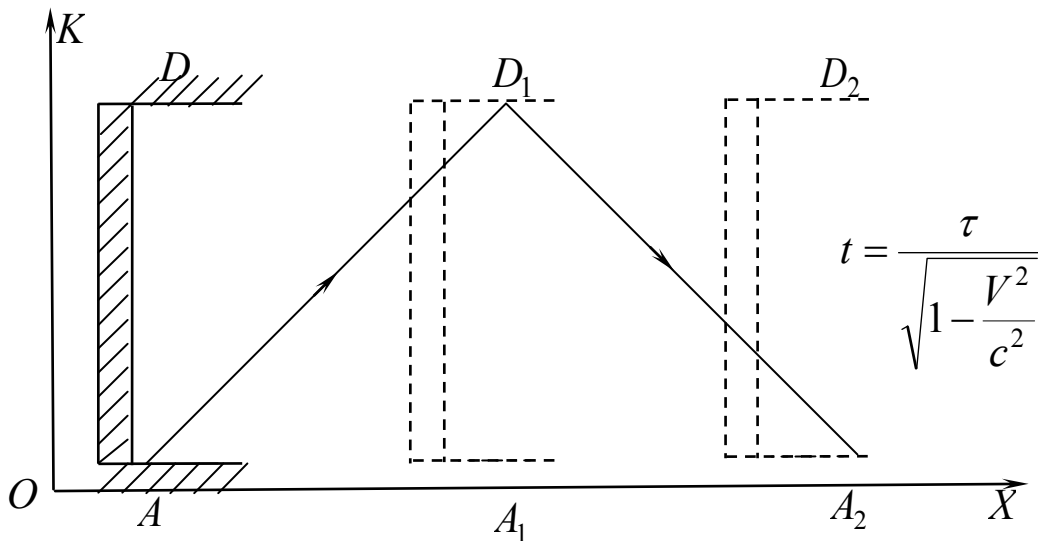


Мал. 1.7. Світловий годинник AD нерухомий в СВ K'

Будемо вважати, що стержень (світловий годинник AD) перпендикулярний до вектору швидкості \vec{V} . Тоді світло в рухомому годиннику з точки зору СВ K розповсюджується вздовж ломаної лінії AD_1A_2 , (мал. 1.8.) і проходить між «клацанням» годинника за час t шлях:

$$2\sqrt{(AA_1)^2 + (A_1B_1)^2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{Vt}{2}\right)^2 + l^2}.$$

Відповідно, проміжок часу між випромінюванням сигналу в т. A та прийманням його в т. A_2 з точки зору СВ K , дорівнює:



Мал. 1.8 Світловий промінь в «світловому годиннику» в СВ K розповсюджується вздовж ломаної лінії AD_1A_2

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{Vt}{2}\right)^2 + l^2}}{c}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно t і враховуючи, що $\frac{2l}{c} = \tau$, приходимо до формули, яка співпадає з (1.14):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Тобто, якщо проміжок часу між «клацанням» годинника у власній СВ τ , то з точки будь-якої іншої системи відліку, відносно якої годинник рухається з швидкістю V , проміжок часу між цими ж «клацанням» буде більшим, $t > \tau$.

Власний час показує той годинник, який нерухомий відносно певної системи відліку (або деякого процесу). При цьому маємо на увазі довільну систему відліку.

Нескінченно малий інтервал часу власного часу позначається $d\tau$. Тому згідно з формулою (1.14):

$$d\tau = dt \sqrt{1 - B^2}.$$

Якщо відносно СВ K з швидкістю $\vec{v}(t)$ рухається деякий фізичний процес, то інтервал власного часу $d\tau$ пов'язаний з лабораторним часом dt :

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \quad (1.16)$$

Щоб знайти кінцевий інтервал власного часу, треба проінтегрувати (1.16):

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \cdot dt. \quad (1.16a)$$

Обґрунтування цієї формули можливе, якщо ввести нескінченну кількість «миттєво супутніх систем відліку».

Із (1.16) знайдемо:

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dS^2, \quad (1.17)$$

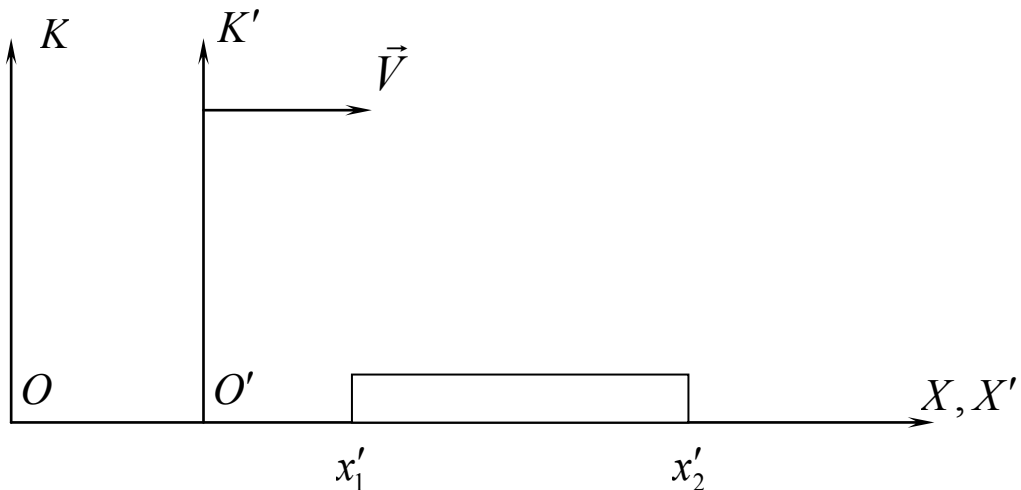
де $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, а тому $v^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Величина dS^2 називається **квадратом інтервалу** між двома нескінченно близькими подіями в 4 – вимірному просторі-часі.

І власний час можна визначити, знаючи величини інтервалу між цими подіями:

$$d\tau = \frac{dS}{c}. \quad (1.18)$$

б) скорочення повздожніх розмірів рухомих тіл (лорентцеве скорочення)



Мал. 1.9. Обґрунтування лорентцевого скорочення на основі перетворень Лорентца

Нехай в СВ K' вздовж вісі $O'X'$ знаходиться в спокої стрижень, координати початку і кінця якого відповідно дорівнюють x'_1 та x'_2 (мал. 1.9).

Треба знайти довжину цього стрижня з точки зору СВ K .

Використаємо перетворення Лорентца:

$$x'_1 = \Gamma(x_1 - Vt_1) \quad (1.19)$$

$$x'_2 = \Gamma(x_2 - Vt_2). \quad (1.20)$$

Означення: Довжина рухомого стрижня в СВ K - це різниця між координатами кінця і початку цього стрижня, які вимірюються в один і той же момент часу за годинниками СВ K .

Тобто, щоб знайти довжину стрижня в СВ K , необхідно зафіксувати координати його x_1 та x_2 одночасно, $t_1 = t_2$. Із формул (1.19) та (1.20) одержуємо:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\Gamma}(x'_2 - x'_1) = l_0 \sqrt{1 - B^2}, \quad (1.21)$$

де $l_0 = x'_2 - x'_1$ - власна довжина стрижня, тобто довжина його в тій СВ, у якій він знаходиться в спокої. Таким чином $l < l_0$.

Це говорить про відносність повздожніх розмірів тіла.

Довжина тіла – це величина відносна, що залежить від системи відліку. Відносність довжини зумовлена тим, що довжина визначається співвідношенням двох об'єктів – стрижня та набору лінійок і годинників, за допомогою яких вимірюють довжину.

Тому повздовжня довжина тіла, одержана при використанні набору годинників і лінійок однієї СВ настільки ж реальна, як і довжина, що вимірюється набором годинників і лінійок іншої СВ.

$$l = l_0 \sqrt{1 - B^2}. \quad (1.22)$$

Формула (1.22) описує так зване скорочення Лорентца.

Формулу, що визначає лорентцеве скорочення (1.22), можна також отримати:

- по одночасному в СВ K' спалаху лампочок на кінцях нерухомого в СВ K' стрижня;
- аналізуючи хід променів в «світловому годиннику» (див. Практичну частину, **Задача 1.1**);
- знаючи швидкість руху стрижня відносно СВ K (див. Практичну частину, **Задача 1.2**);
- користуючись методом k - коефіцієнту (див. п. **1.4**) [8; 69] (див. також [40]).

Приклад 1.1. Знайти довжину рухомого стрижня по одночасному в СВ K' спалаху лампочок на кінцях нерухомого в СВ K' стрижня [75, с. 71-72].

Розв'язання:

Відносність довжин – прямий наслідок відносності одночасності.

Дійсно, нехай в СВ K' вздовж вісі $O'X'$ знаходиться нерухомий стержень. Власна довжина його, очевидно, дорівнює:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \Delta x'.$$

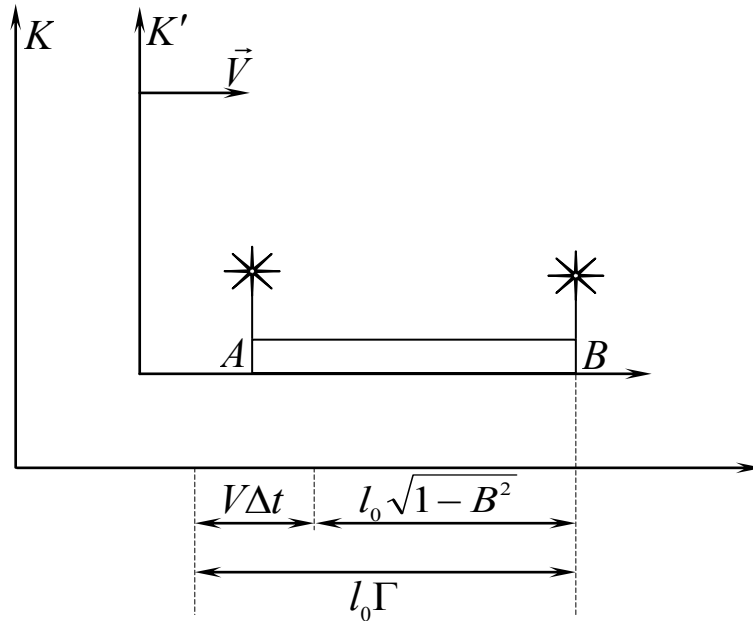
Нехай на кінцях стержня знаходиться лампочки і нехай вони одночасно спалахують в СВ K' ($\Delta t' = 0$), мал. 1.10.

Ці дві події будемо реєструвати в СВ K . Знайдемо відстань між точками, в яких відбулися ці дві події з точки зору спостерігача СВ K . Використовуючи перетворення Лорентца, одержуємо:

$$\Delta x = \Gamma(\Delta x' + V\Delta t') = \Gamma\Delta x' = \frac{l_0}{\sqrt{1 - B^2}} = l_0 \cdot \Gamma. \quad (1.23)$$

Оскільки $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} > 1$ при будь-якому значенні швидкості СВ K'

(швидкості стрижня V), то, як бачимо із (1.23), $\Delta x > l_0$.



Мал. 1.10. В СВ K' вздовж вісі $O'X'$ знаходиться нерухомий стрижень, а на кінцях стрижня знаходяться лампочки і вони одночасно спалахують в СВ K' ($\Delta t' = 0$)

Але в формулі (1.23) Δx це не довжина стрижня в СВ K . Щоб знайти довжину стрижня в системі відліку K необхідно знайти **координати кінців стрижня в СВ K в один і той же момент часу за годинниками СВ K** . Тобто, одночасно зафіксувати координати т. A та т. B .

Але одночасні в СВ K' події відбуваються в системі в СВ K з відносним запізненням:

$$\Delta t = \Gamma \left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x' \right) = \frac{\Gamma V}{c^2} \Delta x'. \quad (1.24)$$

Тобто, $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, де t_1 - момент спалаху лампочки в т. A , t_2 - момент спалаху лампочки т. B . З точки зору спостерігача в СВ K спочатку спостерігається спалах лампочки в т. A , а потім, через проміжок часу Δt , (1.24), спалахує і лампочка, яка знаходиться в т. B (див. **Задачу 1.5**).

І за цей проміжок часу лівий кінець (т. A) стрижня в напрямі руху пройде відрізок, мал. 1.10, $V\Delta t = \Gamma \frac{V^2}{c^2} l_0$.

Таким чином, довжина рухомого стрижня буде менша ніж Γl_0 на величину $V\Delta t$ (див. Мал. 1.10.). І шукана довжина стрижня в СВ K дорівнює:

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1-B^2}} - \Gamma \frac{V^2}{c^2} l_0 = l_0 \sqrt{1-B^2}. \quad (1.25)$$

в) теорема додавання швидкостей за Ейнштейном.

Нехай в СВ K' тіло рухається зі швидкістю \vec{v}' , компоненти якої

$$v'_x, v'_y, v'_z,$$

де, наприклад, $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$.

Треба знайти швидкість цього тіла з точки зору СВ K (Мал. 1.11).

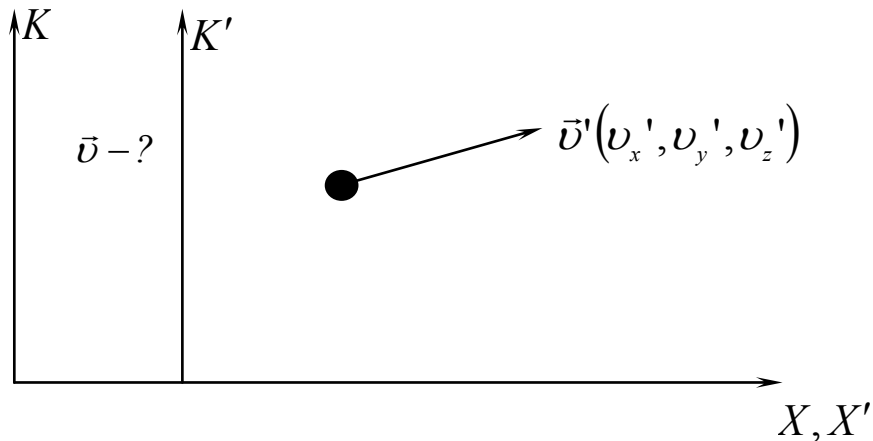
Користуючись перетвореннями Лорентца, знайдемо диференціали dx, dy, dz, dt :

$$dx = \Gamma(dx' + Vdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

Поділивши почленно вираз для dx, dy, dz на dt , одержимо компоненти швидкості тіла в СВ K :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}. \quad (1.26)$$

Це формули додавання швидкостей за Ейнштейном (релятивістські формули додавання швидкостей).



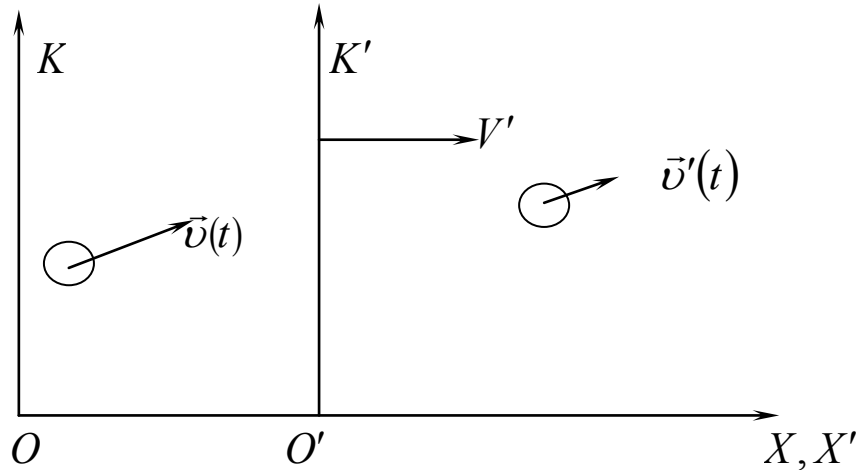
Мал. 1.11. Швидкість тіла в СВ K' дорівнює \vec{v}' . Чому дорівнює швидкість цього тіла відносно СВ K ?

Наслідки формул (1.26):

1. Якщо швидкість СВ K' $V \ll c$, то із (1.26) одержуємо, як наслідок, класичні формули додавання швидкостей:

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z.$$

2. Якщо, наприклад, швидкість тіла в СВ K' , $v'_x = \frac{3}{4}c$, і сама швидкість



Мал. 1.12. Тіло в СВ K' має швидкість $\vec{v}'(t)$. Тоді швидкість його в СВ K , $\vec{v}(t)$, визначається формулами додавання (1.26)

СВ K' , $V = \frac{3}{4}c$, але швидкість тіла відносно СВ K буде, згідно (1.26), менша за швидкість світла в вакуумі:

$$v_x = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{c^2}{c^2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot c}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}c < c.$$

3. Якщо тіло в СВ K' рухається тільки в поперечному напрямі, то в СВ K поперечні складові швидкості його зменшуються:

$$v_y = v'_y \sqrt{1 - B^2}, \quad v_z = v'_z \sqrt{1 - B^2}.$$

За допомогою формул (1.26) елегантно пояснюється досвід Фізо та явище аберації світла (див. п. 1.5).

1.4. Метод k - коефіцієнта (радіолокаційний метод)

У методиці навчання основам СТВ (зокрема, при обґрунтуванні перетворень Лорентца та кінематичних наслідків СТВ) часто використовується радіолокаційний метод [12; 75]. Суть його полягає в наступному.

Нехай в СВ K в початку координат знаходиться пристрій, який посилає в напрямі до СВ K' імпульси через проміжки часу T .

У початковий момент часу зазвичай початки координат СВ K та СВ K' співпадають, і в цей момент часу посилається перший імпульс до СВ K' . Другий імпульс посилається в момент $t_1 = T$.

Тоді в СВ K' цей сигнал за *годинником системи K'* буде прийнятий в момент:

$$t'_1 = kT. \quad (1.27)$$

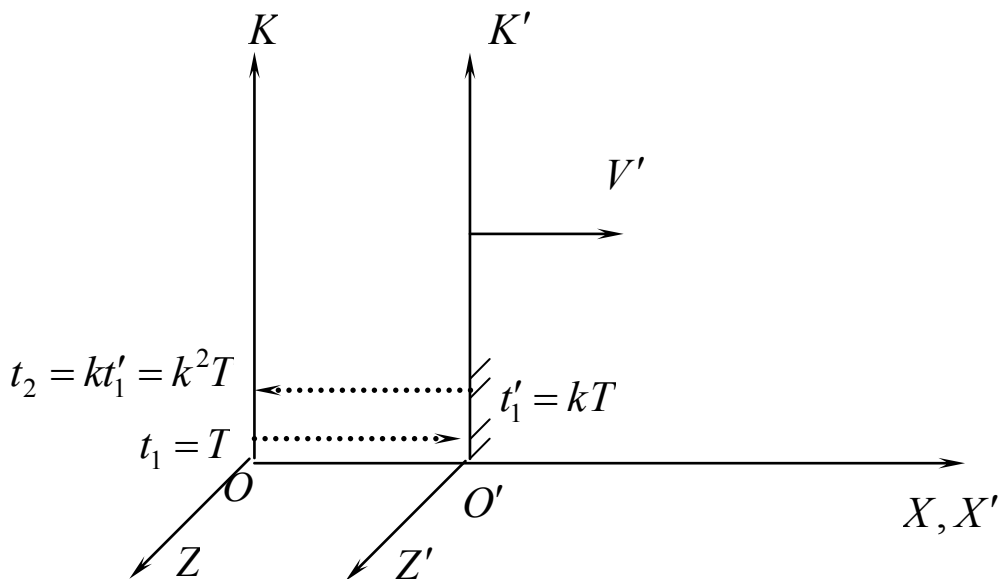
Тобто, всі наступні сигнали в СВ K' будуть прийматися через такий же проміжок часу: $t'_1 = kT$.

Аналогічно (в силу рівноправності СВ K та СВ K'), якщо із системи K' в напрямі системи K буде посилатись сигнал через проміжок часу T' за годинником системи K' , то за годинником системи K цей сигнал буде прийматись через проміжок часу kT' , мал. 1.13.

Нехай в початку координат системи K' знаходиться дзеркало, тоді другий посланий сигнал відіб'ється від K' через проміжок часу kT за годинником K' , але спостерігач в СВ K прийме його після віддзеркалення через проміжок часу:

$$t_2 = kt'_1 = k \cdot kT = k^2T \quad (1.28)$$

Тобто, за годинником СВ K , 2-й віддзеркалений сигнал прийде в т. O в момент $t_2 = k^2T$.



Мал. 1.13. Ілюстрація методу k - коефіцієнта

Таким чином, за годинником СВ K проміжок часу $k^2T - T$ - це час розповсюдження радіолокаційного сигналу від СВ K до системи K' і назад. А проміжок часу $\frac{(k^2T - T)}{2}$ - час розповсюдження сигналу тільки від СВ K до системи K' .

А в який момент за годинником СВ K відбулося віддзеркалення світлового сигналу від дзеркала СВ K' ? Безпосередньо виміряти час настання цієї події ми не можемо. Цей момент ми повинні визначити.

Час настання події (віддзеркалення сигналу) за годинником СВ K , згідно з означенням, (згідно з процедурою синхронізації (1.4)), дорівнює:

$$T = \frac{(t_1 + t_2)}{2}.$$

Враховуючи (1.28) для моменту відбиття сигналу від СВ K' маємо:

$$\frac{k^2 T + T}{2} = \frac{T(k^2 + 1)}{2}. \quad (1.29)$$

Тоді, очевидно, що СВ K' «з точки зору» СВ K пройшла за цей проміжок часу шлях:

$$\frac{T(k^2 + 1)V}{2},$$

а світловий промінь подолав відстань:

$$\frac{(k^2 T - T)}{2} \cdot c = \frac{cT(k^2 - 1)}{2}. \quad (1.30)$$

Тому одержуємо рівність для визначення коефіцієнту k :

$$\frac{T(k^2 + 1)V}{2} = \frac{cT(k^2 - 1)}{2}. \quad (1.31)$$

Тоді коефіцієнт k та релятивістський множник Γ , відповідно, дорівнюють:

$$k = \sqrt{\frac{1+B}{1-B}}, \quad \Gamma = \frac{k^2 + 1}{2k}. \quad (1.32)$$

Тепер ми можемо одержати перетворення Лорентца користуючись методом k -коефіцієнту. Нехай ми маємо деяку подію. Оскільки вона являється довільною, то виберемо її таку, що настає (відбувається) в момент приходу світлового сигналу в т. P . В початковий момент часу $t = t' = 0$, як завжди, початки координат СВ K та СВ K' співпадають.

Нехай в момент t_1 за годинником СВ K послали сигнал в напрямі СВ K' . Спостерігач, який знаходиться в початку координат СВ K' отримає цей сигнал в момент $t'_1 = kt_1$.

І одразу посилає його в точку $P(x', t')$, де знаходиться дзеркало, і після відбиття, цей сигнал знову повертається в початок СВ K' в момент t'_2 (мал.1.14).

В т. O спостерігач СВ K зареєструє повернення світлового сигналу за своїм годинником в момент $t_2 = kt'_2$,

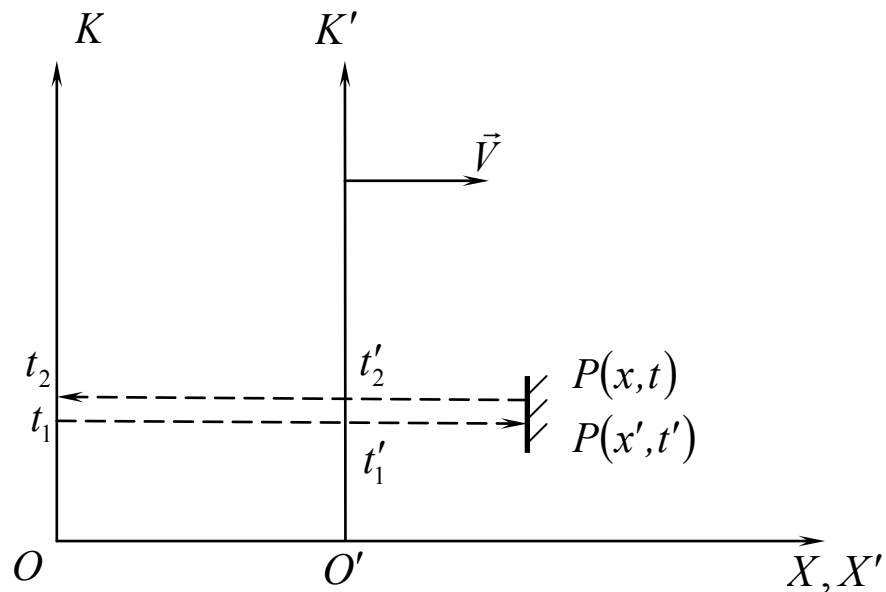
де t_2 - момент приходу відбитого від т. $P(x, t)$ сигналу в т. O за годинником СВ K . Тоді, згідно з процедурою синхронізації, для моменту настання події (прибуття сигналу в т. $P(x, t)$), з точки зору СВ K , можна записати:

$$t = t_1 + \frac{x}{c}, t = t_2 - \frac{x}{c}. \quad (1.33)$$

Аналогічно визначається момент настання події (прибуття сигналу в т. $P(x', t')$) з точки зору СВ K' :

$$t' = t'_1 + \frac{x'}{c}. \quad (1.34)$$

$$t' = t'_2 - \frac{x'}{c}. \quad (1.35)$$



Мал. 1.14. Пояснення знаходження перетворень Лорентца за допомогою методу k - коефіцієнта

(До речі використання формули $t = \frac{(t_1 + t_2)}{2}$ дає той самий результат).

Звідси одержуємо такі співвідношення:

$$t_1 = t - \frac{x}{c}, t_2 = t + \frac{x}{c},$$

$$t'_1 = t' - \frac{x'}{c}, t'_2 = t' + \frac{x'}{c}.$$

Але, згідно з методом k - коефіцієнту:

$$t'_1 = kt_1, t_2 = kt'_2. \quad (1.36)$$

Тому попередні співвідношення (1.36) набувають вигляду:

$$t' - \frac{x'}{c} = k\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (1.37)$$

$$t' + \frac{x'}{c} = \frac{1}{k}\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (1.38)$$

Тепер ми можемо знайти зв'язок між координатами однієї і тієї ж події з точки зору СВ K і СВ K' . Додамо, а потім віднімемо ліві і праві частини (1.37) і (1.38), і в результаті одержуємо:

$$t' = \frac{k^2 + 1}{2k}t - \frac{k^2 - 1}{2ck}x$$

$$x' = x\left(\frac{1 + k^2}{2k}\right) - t\left(\frac{k^2 - 1}{2k} \cdot c\right).$$

Але, оскільки $\frac{k^2 - 1}{2ck} = \Gamma \frac{V}{c^2}$, а $\frac{k^2 + 1}{2k} = \Gamma$, то

$$t'(x, t) = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (1.39)$$

$$x'(x, t) = \Gamma(x - Vt). \quad (1.40)$$

Тобто, ми одержали перетворення Лорентца (1.39) (1.40).

Співвідношення між проміжками часу між двома подіями з точки зору СВ K та СВ K' , (1.14), можна одержати також, користуючись методом k - коефіцієнту.

Дійсно, спостерігач в СВ K' (по своєму годиннику) приймає сигнали через проміжок часу.

$$\Delta t' = kT.$$

З точки зору спостерігача СВ K спостерігач в СВ K' приймає другий сигнал через проміжок часу (див. формулу (1.29)):

$$\Delta t = \frac{T + k^2T}{2}.$$

Іншими словами, для СВ K цей проміжок дорівнює: $\Delta t = \frac{T(1 + k^2)}{2}$.

Тому проміжки часу Δt та $\Delta t'$ зв'язані співвідношенням:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{1+k^2}{2k} = \Gamma.$$

Тобто, ми ще раз знайшли зв'язок проміжку часу між двома подіями, що відбулися в деякій СВ в одній і тій же точці простору (а значить цей $\Delta t'$ фіксується одним годинником) з проміжком часу між тими самими подіями, який вимірюється двома годинниками іншої СВ, відносно якої ці дві події відбуваються в двох різних просторових точках:

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - B^2}. \quad (1.41)$$

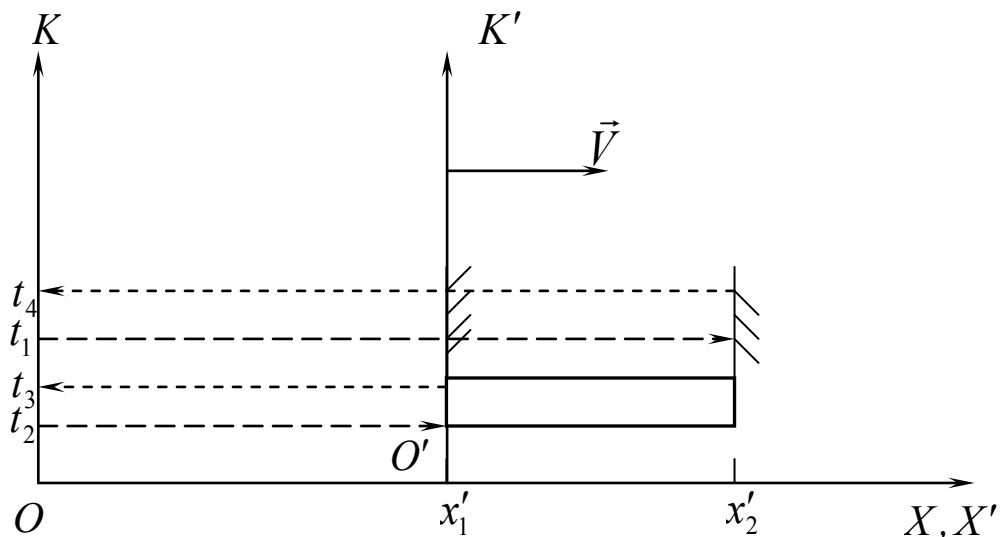
Знайдемо довжину рухомого стержня користуючись методом k -коефіцієнта. Нехай вздовж вісі $O'X'$ знаходиться нерухомий стержень. Власна довжина якого $l_0 = x'_2 - x'_1$. На кінцях стержня закріплені напівпрозорі дзеркала.

Як завжди, в початковий момент $t = t' = 0$ початки координат СВ K і K' співпадають.

На мал. 1.15. t_1 – момент посилки світлового сигналу до дальнього (переднього) кінця стержня;

t_4 – момент часу, коли цей сигнал повернувся до СВ K після відбиття від переднього кінця стержня;

t_2 і t_3 – відповідно моменти посилки світлового сигналу до ближнього (заднього) кінця і прийому цього сигналу в точці O після відбиття.



Мал. 1.15. Обґрунтування формули лорентцевого скорочення

$$l = l_0 \sqrt{1 - B^2} \quad \text{за допомогою методу } k \text{ - коефіцієнта}$$

Довжина стержня в СВ K – це різниця координат початку і кінця стержня $x_2 - x_1$, зафіксованих одночасно в СВ K .

Згідно з означенням (процедура синхронізації), сигнали одночасно відбіються від переднього та заднього кінців стержня за умови:

$$\frac{t_2 + t_3}{2} = \frac{t_1 + t_4}{2}. \quad (1.42)$$

Тоді координати переднього та заднього кінців стержня відповідно дорівнюють:

$$x_2 = \frac{t_4 - t_1}{2} \cdot c, \quad x_1 = \frac{t_3 - t_2}{2} \cdot c.$$

Звідси одержуємо довжину стержня в СВ K :

$$l = x_2 - x_1 = \frac{c}{2}(t_4 - t_1 - t_3 + t_2). \quad (1.43)$$

Але в т. x'_1 спостерігач в СВ K' приймає перший (випущений в момент t_1 в СВ K) сигнал по своєму годиннику в момент kt_1 . В т. x'_1 спостерігач в СВ K' приймає цей вже відбитий від т. x'_2 сигнал в момент $\frac{t_4}{k}$ (оскільки, сигнал, який в СВ K приймається в момент t_4 , повинен бути випущений з т. x'_1 за годинником СВ K' в момент $\frac{t_4}{k}$, (дійсно, згідно з методом k – коефіцієнту: $t_4 = k \frac{t_4}{k}$).

Ці пояснення дають змогу записати власну довжину лінійки через моменти приходу першого прямого і відбитого сигналу в т. x'_1 .

Справді, $(\frac{t_4}{k} - kt_1)$ – час поширення світлового сигналу від т. x'_1 до т. x'_2 і назад по годиннику СВ K' . Тому власна довжина стержня:

$$\frac{\left(\frac{t_4}{k} - kt_1\right)c}{2} = l_0. \quad (1.44)$$

З іншого боку, якщо 2-й сигнал був випущений в момент t_2 , то, відбившись від т. x'_1 , в СВ K він прийде в момент $t_3 = k^2 t_2 = k \cdot kt_2$.

Таким чином, довжина стержня в СВ K , з урахуванням (1.42) та (1.43) дорівнює:

$$l = \frac{c}{2}(t_4 - t_1 - t_3 + t_2) = c(t_2 - t_1), \quad (1.45)$$

а власна довжина його, з урахуванням (1.44) та (1.42) може бути подана у вигляді:

$$l_0 = \frac{c}{2} \left(\frac{t_4}{k} - kt_1 \right) = \frac{c}{2} \left(\frac{t_2 + t_3 - t_1}{k} - kt_1 \right) = \frac{c}{2k} (k^2 + 1)(t_2 - t_1). \quad (1.46)$$

І нарешті, зіставляючи (1.45) та (1.46), одержуємо:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - B^2}, \quad l = l_0 \sqrt{1 - B^2}.$$

1.5. Деякі експериментальні підтвердження наслідків спеціальної теорії відносності

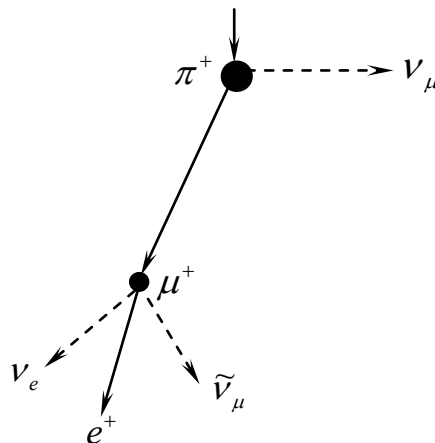
Експериментально явище «сповільнення ходу» рухомого годинника найбільш чітко і прозоро спостерігається при визначенні часу життя нестабільної елементарної частинки, якщо вона рухається з великою швидкістю.

Так, в результаті дослідів, проведених згідно з мал. 1.17, був визначений час життя нерухомого мюона μ^+ . Цей мюон утворюється згідно зі схемою розпаду, що зображена на мал. 1.16.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu.$$

Очевидно, що для визначення часу життя мюона, τ_0 , необхідно зафіксувати його зупинку і розпад.

Тоді τ_0 буде дорівнювати проміжку часу між цими подіями.



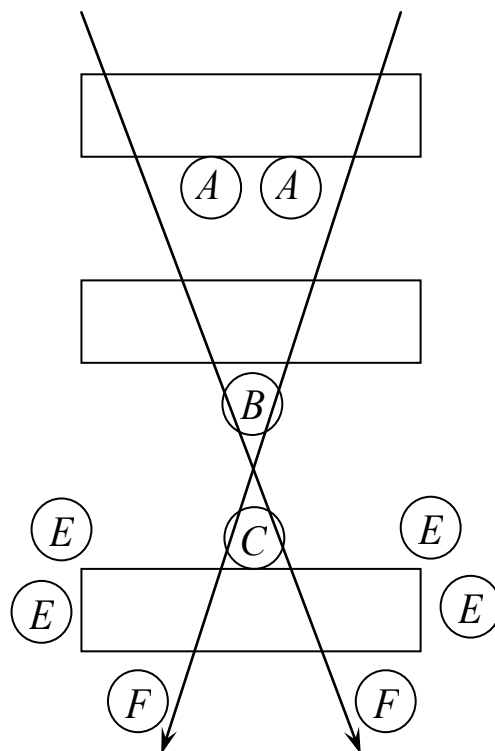
Мал. 1.16. Утворення мюона та розпад його на позитрон e^+ , нейтрино ν_e та антинейтрино $\tilde{\nu}_\mu$

На мал. 1.17. кільцями A, B, C, F позначені детектори, що реагують на наявність мюона. Детектори E реагують на позитрони. Детектори A, B, C підключені по схемі збігів, а детектори A, B, C, F - по схемі антизбігів.

Детектори E з'єднані по схемі запізнювань, а весь комплекс приладів спрацьовує лише тоді, коли μ^+ проходить через A, B, C , через детектори F не проходить і коли лічильники E спрацьовують через певний проміжок часу.

Було знайдено, що власний час життя дорівнює $\tau_0 = 2,15 \cdot 10^{-6}$ сек. Також експериментально встановлено, що швидкість руху мюонів така, що реля-

тивістський множник $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 10$.



Мал. 1.17. Схема експериментального визначення часу життя нерухомого мюона

Тобто, слід було очікувати, що шлях, який вони можуть пролетіти до розпаду на позитрони та нейтрино приблизно дорівнює $l \approx V \cdot \tau_0 \approx 2,9 \cdot 10^8 \cdot 2,15 \cdot 10^{-6} \approx 600$ м. Але насправді в атмосфері Землі вони пролітали до розпаду відстань в десять раз більшу. Це означає, що час життя рухомого мюона більший ніж нерухомого і якраз в таке число разів, яке в точності відповідає релятивістській формулі (1.14):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Як вже відмічалось, за допомогою формул додавання швидкостей за Ейнштейном, (1.26), пояснюється, наприклад, явище аберації світла та результат досліду Фізо. Але дослід Фізо і явище аберації світла можна розглядати і як експериментальні результати, що підтверджують кінематичні наслідки перетворень Лорентца.

Так, якщо швидкість світла в нерухомій воді $v' = \frac{c}{n}$ (СВ K' зв'яжемо з водою), швидкість води відносно лабораторії (СВ K) V , то швидкість світла відносно лабораторії:

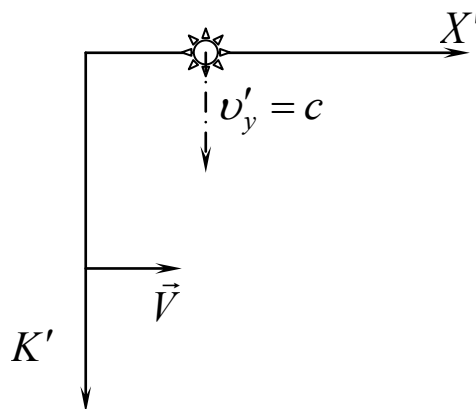
$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' \cdot V}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{c \cdot V}{nc^2}} \approx \left(\frac{c}{n} + V \right) \cdot \left(1 - \frac{V}{cn} \right) = \frac{c}{n} \left[1 + \frac{V}{c} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) n - \frac{V^2}{c^2} \right] \approx \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

що і підтверджено в дослідах Фізо.

Опишемо тепер як пояснюється явище аберації зірок теорією відносності Ейнштейна. Нехай СВ K' зв'язана з далекою зіркою, а СВ K – з Землею. Осі координат зорієнтовані так, як показано на мал. 1.18. Тоді, в СВ K' буде спостерігатися тільки один компонент швидкості променя світла, а саме, $v'_y = c$.

А з точки зору СВ K , земним телескопом буде спостерігатися промінь з компонентами швидкості (згідно з формулами додавання швидкостей (1.26)):

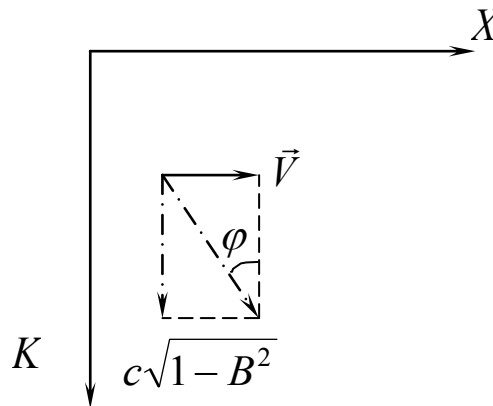
$$v_x = V, \quad v_y = c\sqrt{1 - B^2}.$$



Мал. 1.18. Напрямок поширення променя світла в СВ K' , що зв'язана з далекою зіркою

Тобто, щоб на Землі спостерігати в телескоп світло від зірки, телескоп слід встановити під кутом $\frac{\pi}{2} - \varphi$ до напрямку руху Землі (мал. 1.19).

Астрономічні вимірювання кута аберації φ дають для $\operatorname{tg}\varphi \approx \frac{V}{c}$, де V - це орбітальна швидкість Землі, $V \approx 30 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.



Мал. 1.19. Напрямок поширення променя світла в СВ K , що зв'язана з Землею

Іншими словами, тангенс кута аберації дорівнює:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V}{c\sqrt{1-B^2}}.$$

Тобто, значення тангенса кута аберації підтверджується експериментальними вимірюваннями.

Зазначимо, що в загальному вигляді явище аберації світла описується формулами (див. розділ 2):

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-B^2}}{B + \cos\theta'} \cdot \sin\theta'$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + B}{1 + B \cdot \cos\theta'}$$

де θ - кут між напрямом швидкості в системі K та віссю OX , θ' - кут між напрямом швидкості в системі K' та віссю $O'X'$.

Таким чином, ми ще раз впевнюємося в тому, що тільки теорія в змозі пояснити, що ж спостерігається чи вимірюється в експерименті.

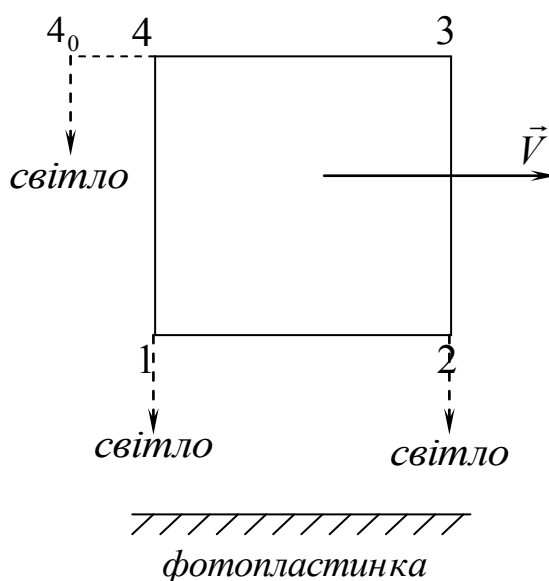
1.6. Видима форма тіл, які переміщуються з великою швидкістю

Проаналізуємо, який вигляд (візуально) матиме куб, що пролітає мимо нас з великою швидкістю [10; 71; 75]. Іншими словами, яке зображення зафіксується на фотопластинці за умов, що ілюструються мал. 1.20.

Як відомо, зображення на фотоплівці формують фотони, які попадають на плівку одночасно в системі відліку плівки. Але і очевидно, що із різних точок куба вони повинні бути випущені в різні моменти часу.

Так, щоб фотон, який випромінюється вершиною куба 4, прийшов на плівку одночасно з фотоном вершини 1, він повинен бути випромінений на l/c секунд раніше.

Тобто, в цю мить вершина 4 знаходиться в положенні 4_0 , $44_0 = l/c \cdot V$. Тому складається враження, що грань (ребро) 44_0 нахилене на кут φ , причому $\sin \varphi = \frac{V \cdot l/c}{l} = B$ (див. Мал. 1.20, мал. 1.21, мал. 1.22).

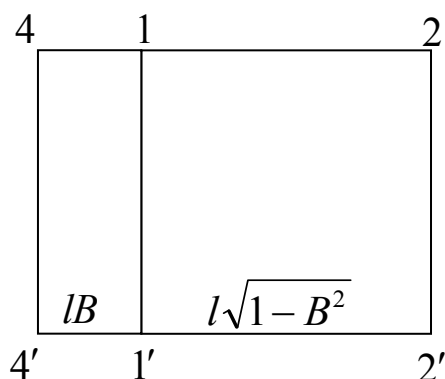


Мал. 1.20. Зображення на фотоплівці формують фотони, які попадають на плівку одночасно в системі відліку плівки. Але при цьому моменти випромінювання фотонів різними точками рухомого об'єкту будуть різними

Ребро 12 внаслідок лорентцевого скорочення має довжину (куб рухається із швидкістю V) $l_{12} = l\sqrt{1 - B^2} = l \cos \varphi$, де l - власна довжина ребра куба.

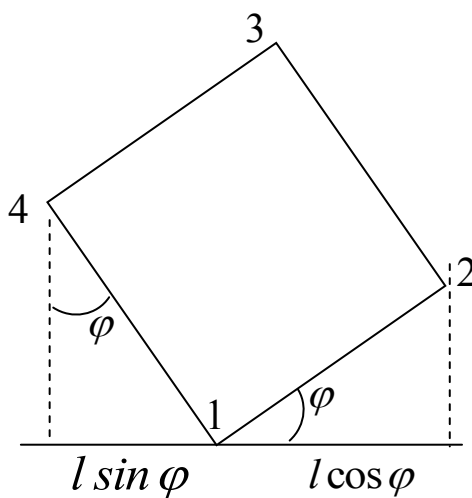
Тобто, на фотоплівці сформується зображення, яке показане на мал. 1.21.

Ребра 14 та 1'4' будуть видимі, причому довжина їх дорівнює lB . Тобто, візуально складається таке враження, що куб начебто повернутий відносно осі 11' на кут φ .



Мал. 1.21. На фотографії ми бачимо скорочені в напрямку руху ребра 12 та 1'2', а також буде видно і ребра 14 та 1'4'

Таким чином, тіло, що рухається з великою швидкістю, ми бачимо як повернуте. Насправді воно не повернуте, це тіло є сплющеним в напрямі руху.



Мал. 1.22. Куб, який рухається з великою швидкістю, ми бачимо як повернутий на кут φ . А в дійсності він не повернутий, а сплющений в напрямі руху

Практична частина
Зразки розв'язування задач

Задача 1.1. Знайти довжину рухомого стержня на основі аналізу поширення променів в «світловому годиннику» [26; 63, с. 200-201; 75, с. 45-47].

Розв'язання: Обґрунтуємо формулу лорентцевого скорочення, $l = l_0 \sqrt{1 - B^2}$, за допомогою «світлового годинника», що розташований горизонтально (див. Мал. 1.23).

Світловій імпульс, пущений з одного кінця стержня (A), відіб'ється від дзеркала на іншому кінці стержня (D) и повернеться назад через інтервал часу τ , який вимірюється по годиннику СВ K' .

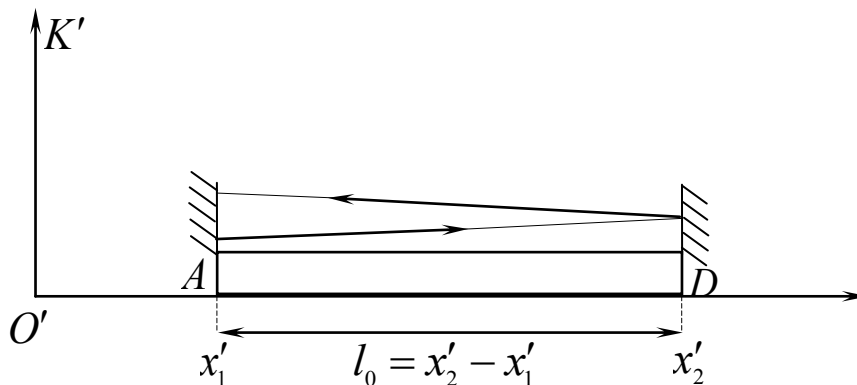
Власна довжина стержня, l_0 зв'язана з часом τ очевидним співвідношенням:

$$c\tau = 2l_0 \tag{1.47}$$

Проміжок часу між цими ж подіями, але виміряними годинниками СВ K , позначимо через t . Інтервали часу τ і t зв'язані один з одним формулою (1.14):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - B^2}},$$

де $B = \frac{V}{c}$.



Мал. 1.23. Власна одиниця часу «світлового годинника» дорівнює $\tau = \frac{2l_0}{c}$

Якщо t_1 - час руху світлового сигналу від A до D з точки зору СВ K , і t_2 - час руху сигналу в протилежному напрямку, то повний час дорівнює:

$$t = t_1 + t_2. \tag{1.48}$$

На мал. 1.24 показані положення стержня відносно СВ K в різні моменти часу:

в момент спалаху світла (положення AD стержня);

через час t_1 (положення A_1D_1);

і через час $t_1 + t_2$ (положення стержня A_2D_2).

За час t_1 стержень змістився відносно системи K на відстань Vt_1 . Шлях який проходить світловий імпульс при його русі від A до D , з точки зору спостерігача, зв'язаного з системою K , дорівнює $l + Vt_1$ (де l - довжина рухомого стержня). Тому можна записати наступне рівняння

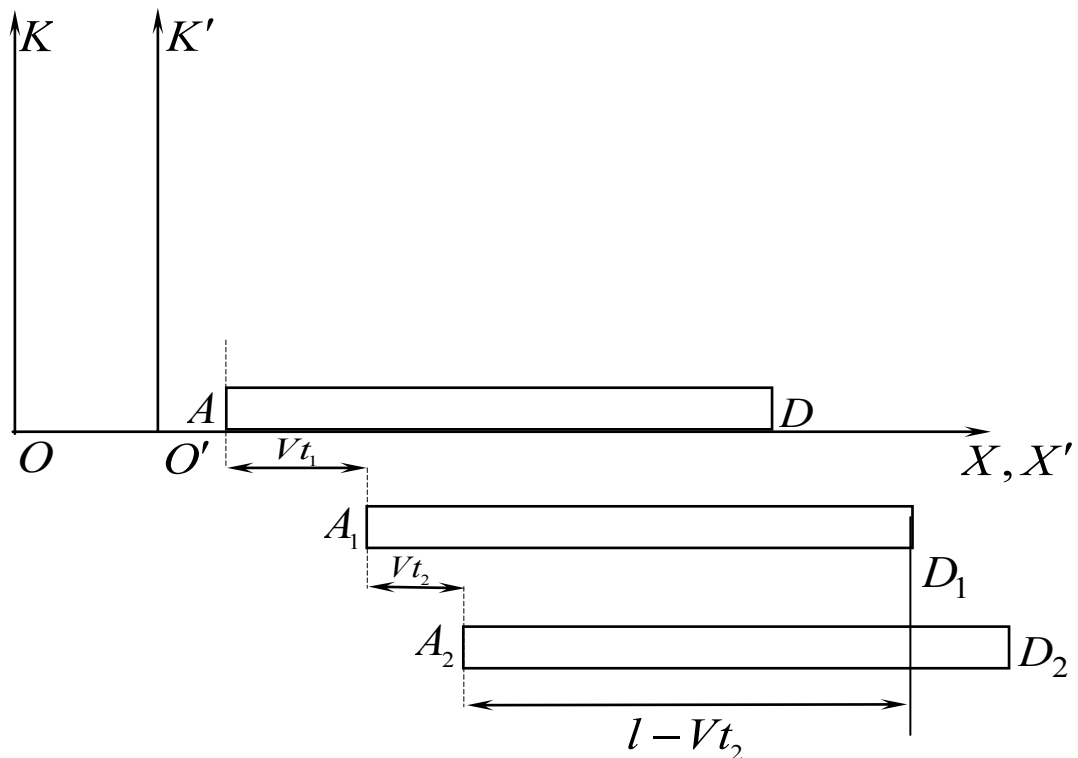
$$l + Vt_1 = ct_1.$$

Звідси:

$$t_1 = \frac{l}{c - V}.$$

При русі світлового імпульсу назад від D до A пройдений ним шлях в СВ K дорівнює $l - Vt_2$, оскільки за час t_2 точка A зміститься на відстань Vt_2 назустріч світловому імпульсу. Тому:

$$l - Vt_2 = ct_2.$$



Мал. 1.24. Положення стержня відносно СВ K в різні моменти часу

Звідси:

$$t_2 = \frac{l}{c + V}.$$

Повний час руху світлового імпульсу від A до D а потім від D до A за годинником СВ K дорівнює:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2cl}{c^2 - V^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.49)$$

Згідно ж з формулами (1.14)

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.50)$$

Прирівнюючи (1.49) і (1.50), ми отримуємо відношення:

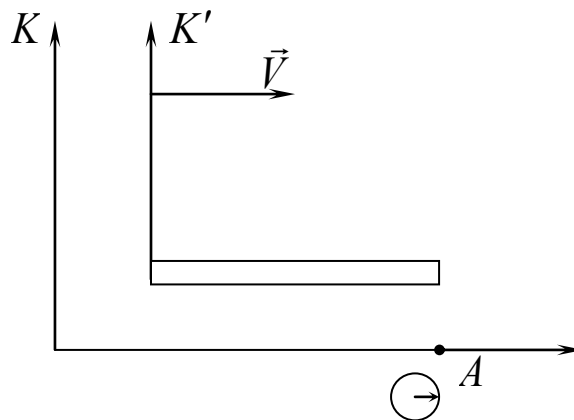
$$\frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

або:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.51)$$

Задача 1.2. Знайти довжину рухомого стержня по відомій швидкості руху стержня відносно СВ K [24, С. 146-147; 29].

Розв'язання. Нехай в СВ K знаходиться годинник в т. A (мал. 1.25). Мимо цього годинника пролітає з швидкістю V стержень. Очевидно, що довжина рухомого стержня дорівнює $l = V\Delta t$, де Δt – час прольоту стержня мимо т. A .



Мал. 1.25. В СВ K мимо годинника A пролітає з швидкістю V стержень

Власна довжина стержня, очевидно, дорівнює:

$$l_0 = V\Delta t',$$

де $\Delta t'$ - час прольоту стержня мимо точки A за годинником СВ K' .

Але для спостерігача зв'язаного з СВ K' , час прольоту буде іншим, ніж час прольоту його мимо т. A за годинником СВ K , а саме:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (1.52)$$

Формула (1.52) має саме такий вигляд, а не (1.14) тому, що годинник із СВ K , який показав Δt , рухається відносно СВ K' і його покази порівнюються з показами двох годинників СВ K' .

Для відношення довжин стержня в СВ K та СВ K' маємо:

$$\frac{l}{l_0} = \frac{V\Delta t}{\Delta t'V} = \sqrt{1-B^2}.$$

Тобто, знову ми одержали формулу лорентцевого скорочення:

$$l = l_0\sqrt{1-B^2}.$$

Задача 1.3. В K -системі відліку знаходиться нерухомий стержень, довжина якого $l = 1\text{ м}$ і який орієнтований під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі OX . Знайти його довжину l' та відповідний кут α' в K' -системі, яка рухається відносно СВ K з швидкістю $V = \frac{c}{2}$ вздовж осі OX .

Розв'язання: Довжина стержня в K' -системі (бо $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-B^2}$) дорівнює:

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = \sqrt{(\Delta x)^2(1-B^2) + (\Delta y)^2},$$

де $B = \frac{V}{c}$.

Оскільки $\Delta x = l \cos \alpha$, $\Delta y = l \sin \alpha$, то

$$l' = l\sqrt{1-B^2} \cos^2 \alpha = 0.94.$$

Кут α' в K' -системі знайдемо через тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x\sqrt{1-B^2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-B^2}} = 1.155.$$

Звідси $\alpha' = 49^\circ$

Відповідь: $l' = l\sqrt{1-B^2} \cos^2 \alpha = 0.94$, $\alpha' = 49^\circ$.

Задача 1.4. Знайти відстань, яку пройде в K -системі відліку нестабільна частинка за час від її народження до розпаду, якщо час її життя в цій системі відліку $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ c}$, а власний час життя $\Delta t_0 = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ c}$

Розв'язання: Очевидно, щоб знайти цю віддаль необхідно знати швидкість частинки та час життя її в СВ K . Час життя відомий із умови задачі, тому швидкість знаходимо із співвідношення між Δt та Δt_0 .

$$\text{Оскільки } \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ то } \Delta t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \Delta t_0^2,$$

$$V = \sqrt{c^2 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \right)^2 \cdot c^2}$$

Тоді маємо

$$l = \Delta t \cdot V = \Delta t \cdot c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \right)^2} = 0.6 \text{ км}$$

Інший спосіб розв'язання базується на інваріантності інтервалу:

$$c^2 \Delta t_0^2 = c^2 \Delta t^2 - l^2,$$

звідси отримується той же результат:

$$l = c \cdot \sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2} = \Delta t \cdot c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \right)^2} = 0.6 \text{ км}.$$

$$\text{Відповідь: } l = c \cdot \sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2} = \Delta t \cdot c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \right)^2} = 0.6 \text{ км}.$$

Задача 1.5. Є дві групи синхронізованих годинників K' і K , які рухаються одна відносно іншої із швидкістю \vec{V} вздовж осі OX . За початок відліку часу беремо момент, коли годинник A' буде знаходитися навпроти годинника A , мал. 1.26. Зобразити положення стрілок всіх годинників в цю мить «з точки зору» СВ K' та СВ K .

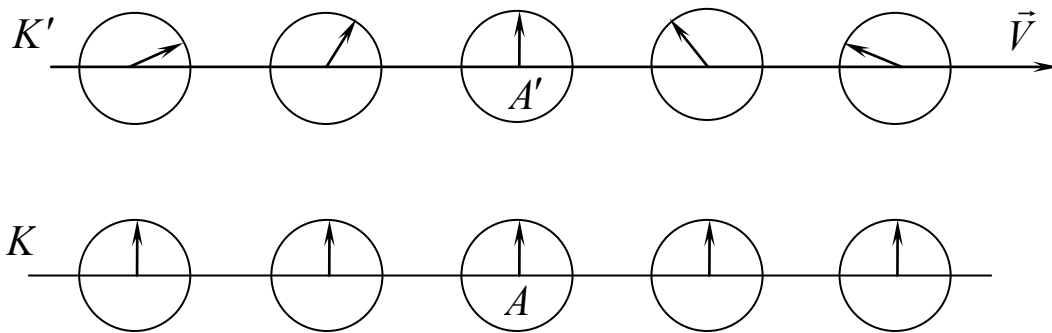
Розв'язання: Із відносності одночасовості випливає, що годинники K' -системи, що розміщені вздовж осі $O'X'$ та синхронізовані між собою в цій системі відліку (СВ K'), в СВ K будуть показувати різний час.

Тобто, в деякій точці на осі OX годинник СВ K показує час $t = 0$, а годинник СВ K' , який в цю мить знаходиться в цій же точці x показує, згідно з перетвореннями Лорентца, час

$$t' = \frac{-xV/c^2}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (1.53)$$

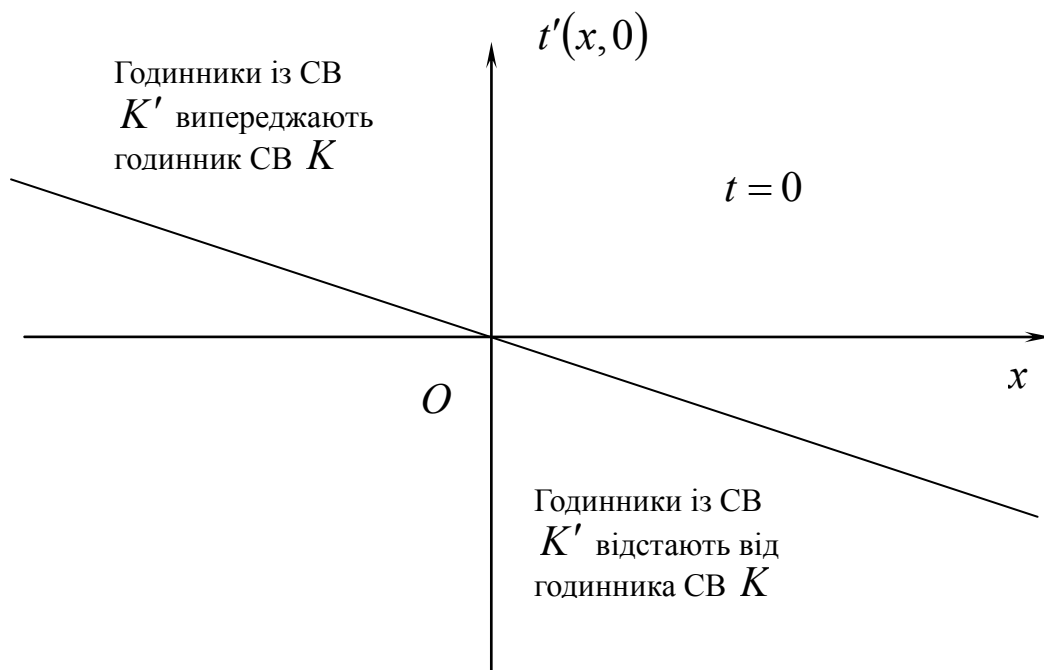
Тоді, наприклад, для довільної точки x СВ K формулу (1.53) перепишемо у вигляді:

$$t'(x, t = 0) = -\Gamma \frac{B}{c} x. \quad (1.53a)$$



Мал. 1.26. Положення стрілок годинників СВ K' з точки зору СВ K в ту мить, коли годинники СВ K показують $t = 0$

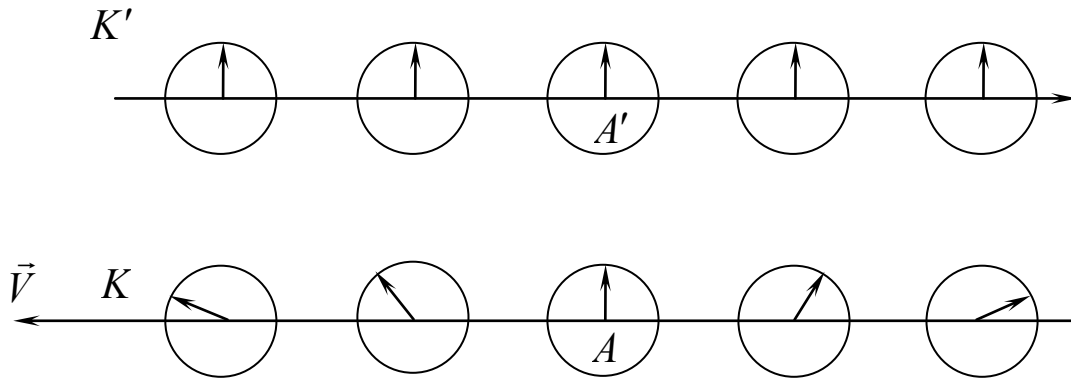
Із формули (1.53a) зрозуміло, що ж показують в момент часу $t = 0$ (за годинником СВ K) годинники СВ K' , які знаходяться в точках з координатою x .



Мал. 1.26а. Покази годинників СВ K' в в момент часу $t = 0$ (за годинником СВ K) в точках з координатами x

Покази годинників СВ K' графічно подані на мал. 1.26а.

Зліва від початку відліку, годинники СВ K' все більше і більше випереджають годинники із СВ K , а праворуч – відстають від них (порівняйте з мал. 1.26)



Мал. 1.27. Положення стрілок годинників СВ K з точки зору СВ K' в ту мить, коли годинники СВ K' показують $t' = 0$

Навпаки з точки зору СВ K' , згідно з перетвореннями Лорентца

$$t = \frac{x' V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad (1.54)$$

годинники СВ K в ту мить коли $t' = 0$, показують час, що зображений на мал. 1.27.

Тоді, наприклад, для довільної точки x' СВ K' формулу (1.54) можна подати в такому вигляді:

$$t(x', t' = 0) = \Gamma \frac{B}{c} x'. \quad (1.54a)$$

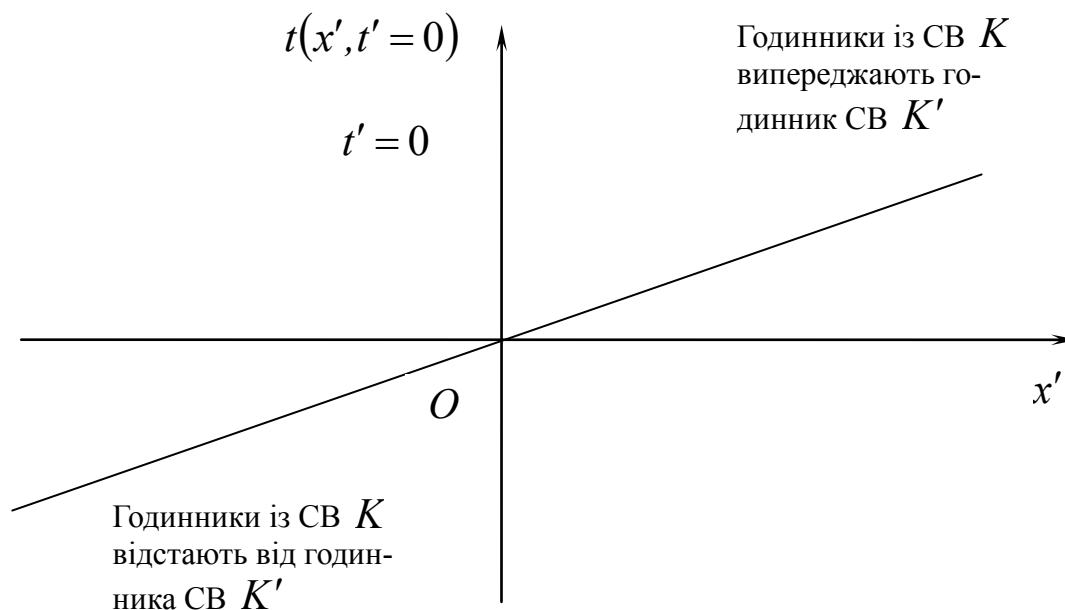
Отже, в момент часу $t' = 0$ (за годинником СВ K') годинники СВ K показують різний час і цей час залежить від координати x' , в якій у дану мить ($t' = 0$) знаходиться годинник СВ K .

Покази годинників СВ K , (залежність $t(x', t' = 0) = \Gamma \frac{B}{c} x'$ від координати x') подані на мал. 1.27а.

Причому, праворуч від початку відліку, годинники СВ K все більше і більше випереджають годинники із СВ K' , а зліва – відстають від них (порівняйте з мал. 1.27)

А відповідні проміжки часу, які показують годинники, що знаходяться в різних точках, будуть дорівнювати (із перетворень Лорентца):

$$t'_2 - t'_1 = \frac{-(x_2 - x_1)V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad t_2 - t_1 = \frac{(x'_2 - x'_1)V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (1.55)$$



Мал. 1.27а. Покази годинників СВ K в момент часу $t' = 0$ (за годинником СВ K') в точках з координатами x'

Формули (1.53) - (1.55) інколи називають формулами розсинхронізації [69, с. 50], або формулами різночасовості [38; 50].

Задача 1.6. Стержень, що орієнтований паралельно вісі OX СВ K , рухається зі швидкістю v вздовж вісі OY (див. Мал. 1.28). Знайти кут θ' між стержнем та віссю $O'X'$ СВ K' . Осі OX та $O'X'$ СВ K та систем K' співпадають, а СВ K' рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж вісі OX .

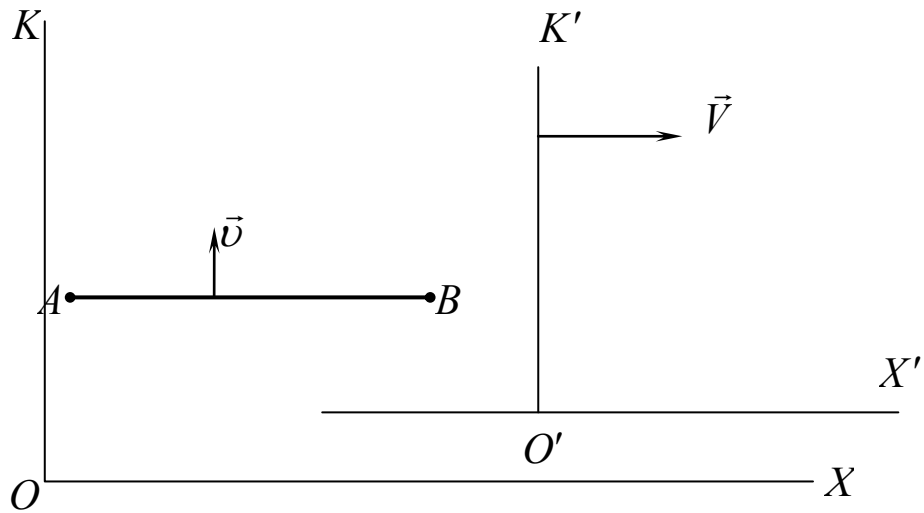
Розв'язання: Утворення кута між стержнем та віссю $O'X'$ СВ K' зумовлене відносністю одночасності.

Дійсно, якщо в деякий момент часу кінці стержня співпадають з віссю OX в СВ K , то в системі K' ці дві події будуть не одночасними. Проміжок часу між цими подіями в СВ K' дорівнює, згідно з перетвореннями Лорентца (див. також (1.53), або (1.55) формула різночасовості):

$$\Delta t' = -\frac{\Delta x \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - B^2}},$$

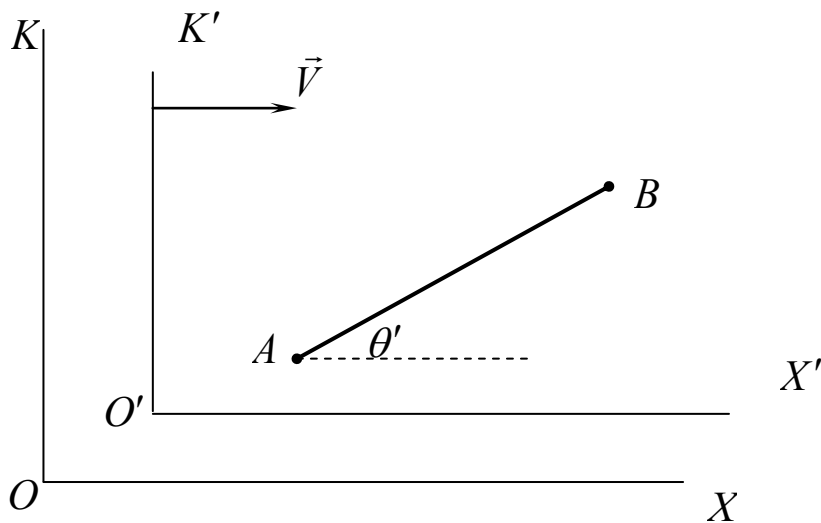
де Δx – власна довжина стержня.

Тобто з точки зору СВ K' спочатку (раніше) настає подія в точці B , а потім в точці A (див. також мал. 1.28). Тобто, під час руху стержня AB горизонтальну лінію спочатку перетинає точка B стержня, а потім - точка A .



Мал. 1.28. Стержень, орієнтований паралельно вісі OX СВ K , рухається зі швидкістю v вздовж вісі OY

При цьому за цей час, $\Delta t'$, правий кінець стержня (точка B) пройде шлях $\Delta y' = v'_y \cdot \Delta t'$, де $v'_y = v\sqrt{1 - B^2}$.



Мал. 1.29. З точки зору СВ K' стержень буде повернутий проти ходу годинникової стрілки на кут θ'

Таким чином, в СВ K' стержень буде повернутий проти ходу годинникової стрілки на кут θ' (мал. 1.29), який визначається:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{v\sqrt{1 - B^2} \cdot \Delta x \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2} \cdot \Delta x \cdot \sqrt{1 - B^2}} = \frac{B \cdot v}{c\sqrt{1 - B^2}}, \quad (1.56)$$

де $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - B^2}$.

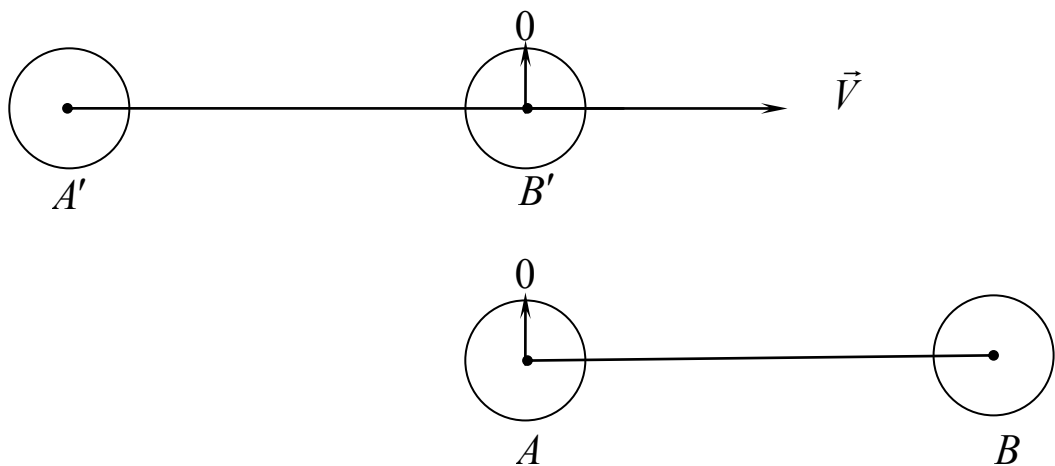
$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{B \cdot v}{c \sqrt{1 - B^2}}.$$

Задача 1.7. Стержень $A'B'$ рухається з постійною швидкістю \vec{V} відносно стержня AB (мал. 1.30). Обидва стержні мають однакову власну довжину l_0 , причому на кінцях кожного з них встановлені синхронізовані між собою годинники: A з B та A' з B' . Ту мить, коли годинники B' і A виявилися навпроти один одного будемо вважати за початок відліку часу в системах відліку, які зв'язані з кожним із стержнів. Визначити:

А) покази годинників B та B' в момент коли вони будуть навпроти один одного;

Б) покази годинників A і A' в ту мить, коли і вони виявляться навпроти один одного.

Розв'язання: Щоб годинник B' виявився навпроти годинника B йому, очевидно, необхідно переміститися на віддаль $l_0 = AB$. Час необхідний для цього, за годинниками A з B (за годинником СВ K), дорівнює $\frac{l_0}{V}$. Тобто, годинник B у цю мить буде показувати час $t(B) = \frac{l_0}{V}$.



Мал. 1.30. Відносне положення стержня $A'B'$ та стержня AB в ту мить, коли годинники B' і A виявилися навпроти один одного

А годинник B' у момент співпадання B' і B у просторі, згідно з перетвореннями Лоренца (очевидно, що з годинниками A' та B' зв'язана СВ K'), буде показувати час:

$$t'(x, t) = \Gamma\left(t - \frac{B}{c}x\right) = t(B').$$

Звідси одержуємо:

$$t(B') = \Gamma\left(t - \frac{B}{c}x\right) = \Gamma\left(t(B) - \frac{B}{c}l_0\right) = \Gamma\left(\frac{l_0}{V} - \frac{B}{c}l_0\right) = \frac{l_0}{V}\sqrt{1-B^2}.$$

З точки зору СВ K' (годинники A' та B' , стержень $A'B'$) стержень AB рухається зі швидкістю \vec{V} у напрямі відємних значень осі $O'X'$. Тому з точки зору СВ K' (з точки зору годинника A') годинник A буде навпроти A' через проміжок часу $\frac{l_0}{V}$. Тобто, годинник A' у момент співпадання у просторі A' та

$$A \text{ буде показувати час } t(A') = \frac{l_0}{V}.$$

А згідно з перетвореннями Лорентца годинник A буде у цей момент показувати час:

$$t(x', t') = \Gamma\left(t' + \frac{B}{c}x'\right) = t(A).$$

Отже, маємо:

$$t(A) = \Gamma\left(t' + \frac{B}{c}x'\right) = \Gamma\left(t(A') + \frac{B}{c}(-l_0)\right) = \Gamma\left(\frac{l_0}{V} - \frac{B}{c}l_0\right) = \frac{l_0}{V}\sqrt{1-B^2}.$$

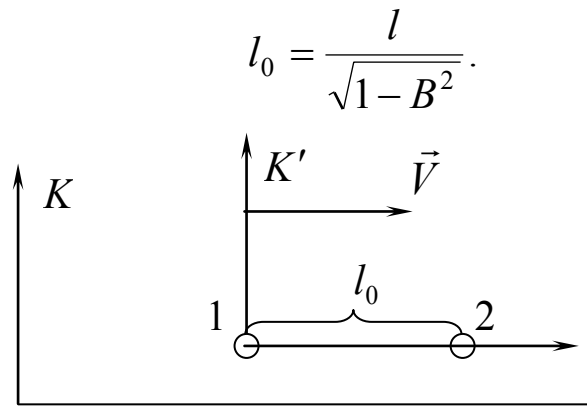
$$\text{Відповідь: } t(B) = \frac{l_0}{V}, \quad t(B') = \frac{l_0\sqrt{1-B^2}}{V}, \quad t(A) = \frac{l_0\sqrt{1-B^2}}{V}, \quad t(A') = \frac{l_0}{V}.$$

Задача 1.8. Дві нестабільні частинки рухаються в СВ K вздовж деякої прямої з швидкістю $V = 0,99c$. Віддаль між ними в цій СВ дорівнює $l = 120$ м. В деякий момент часу частинки розпалися одночасно в системі відліку, яка зв'язана з ними (СВ K'). Знайти проміжок часу між моментами розпаду обох частинок в лабораторній системі відліку.

Розв'язання: Згідно з перетвореннями Лорентца (див. **Задачу 1.5**), оскільки частинки розпалися одночасно в СВ K' , маємо (формула різночасовості):

$$t_2 - t_1 = \frac{(x'_2 - x'_1)V/c^2}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Але $x'_2 - x'_1 = l_0$ - це власна довжина стержня, яка зв'язана з довжиною його в СВ K співвідношенням (див. Мал. 1.31):



Мал. 1.31. Дві нестабільні частинки рухаються в СВ K вздовж деякої прямої з швидкістю V

Тому проміжок часу між моментами розпаду обох частинок в лабораторній системі відліку дорівнює:

$$t_2 - t_1 = \frac{l \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$t_2 - t_1 > 0$, тому 2-а частинка (що рухалася першою згідно з мал. 18), розпалася раніше.

Відповідь: $t_2 - t_1 = \frac{l \frac{V}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

Задача 1.9. Система відліку K' рухається відносно СВ K зі швидкістю \vec{V} , що направлена довільно. Обґрунтувати перетворення Лорентца для цього випадку.

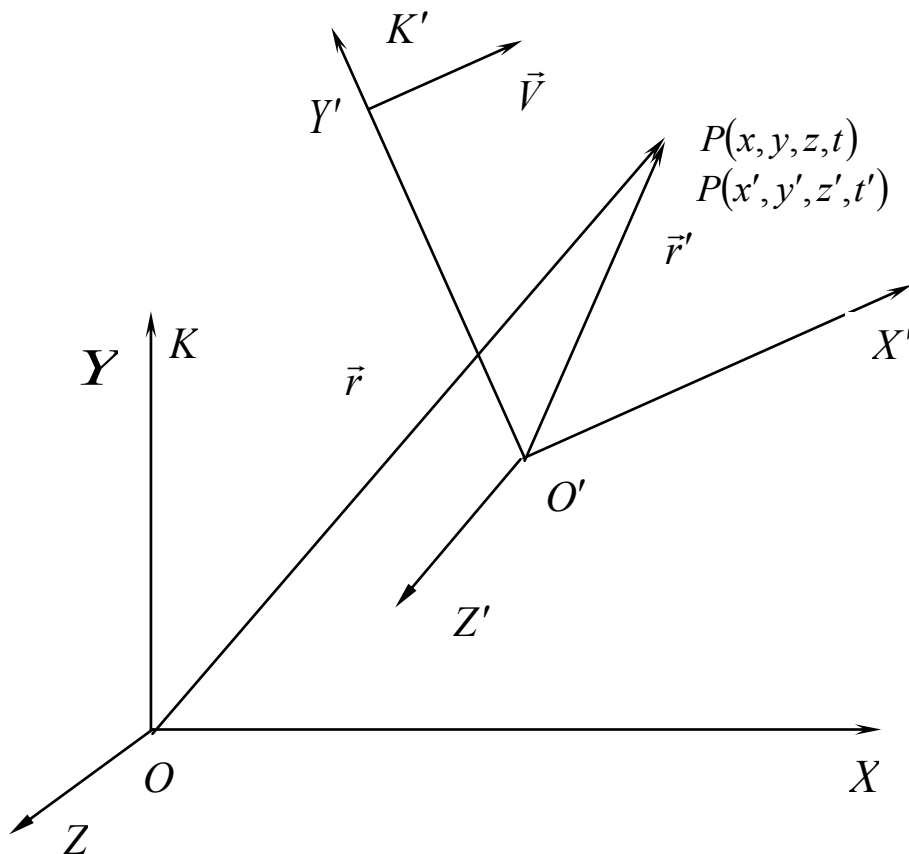
Розв'язання: Складова радіус-вектора \vec{r} , яка паралельна швидкості відносного руху, дорівнює $\vec{r} \frac{\vec{V}}{V}$. А перпендикулярна складова дорівнює (див. Мал. 1.32):

$$\vec{r} - \left(\vec{r} \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V}$$

Очевидно, що $\vec{r} \frac{\vec{V}}{V}$ перетворюється як координата x у спеціальному перетворенні (1.13), а перпендикулярна складова не змінюється (як координати

$$y \text{ і } z). \text{ Тому отримуємо: } \vec{r} \frac{\vec{V}}{V} = \frac{\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} + Vt'}{\sqrt{1-B^2}}, \quad \vec{r} - \left(\vec{r} \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} = \vec{r}' - \left(\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V}.$$

Із двох останніх рівностей маємо:



Мал. 1.32. Система відліку K' рухається відносно СВ K зі швидкістю \vec{V} , що направлена довільно

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' - \left(\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \left(\vec{r} \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} = \vec{r}' - \left(\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \frac{\vec{V}}{V} \cdot \frac{\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} + Vt'}{\sqrt{1-B^2}} = \\ &= \vec{r}' - \left(\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} + \vec{V}t'}{\sqrt{1-B^2}} \end{aligned}$$

Відповідь: Таким чином, одержуємо залежність радіус-вектора \vec{r} від \vec{r}' та \vec{V} -швидкості руху СВ K' відносно СВ K :

$$\vec{r} = \vec{r}' - \left(\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} + \vec{V}t'}{\sqrt{1-B^2}}, \quad (1.57)$$

$$t = \frac{t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (1.58)$$

При переході від СВ K до СВ K' аналогічним шляхом одержуємо залежність радіус-вектора \vec{r}' від \vec{r} :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \left(\vec{r} \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t}{\sqrt{1-B^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Задача 1.10. Вивести релятивістську формулу додавання швидкостей для загального випадку довільної взаємної орієнтації векторів \vec{V} та \vec{v}' , де \vec{V} - швидкість руху СВ K' відносно СВ K , а \vec{v}' - швидкість руху частинки відносно СВ K' .

Розв'язання: Знайдемо диференціал двох останніх формул із попередньої задачі:

$$d\vec{r} = d\vec{r}' - \left(d\vec{r}' \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \frac{(d\vec{r}' \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} + \vec{V}dt'}{\sqrt{1-B^2}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{d\vec{r}' \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Поділивши ліві і праві частини цих формул, одержуємо:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{V} + \vec{v}'\sqrt{1-B^2} + \frac{1}{V^2}(\vec{V}\vec{v}')\vec{V}(1-\sqrt{1-B^2})}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}, \quad (1.59)$$

де $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ - швидкість тіла відносно СВ K ; $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ - швидкість тіла відносно СВ K' ; \vec{V} - швидкість СВ K' відносно СВ K .

Припустимо, що відносна швидкість систем відліку \vec{V} направлена вздовж вісі OX .

Тоді,

А) у випадку колінеарності векторів швидкостей \vec{V} та \vec{v}' маємо:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}.$$

Б) спроектувавши векторну формулу (106) на вісі OY та OZ , релятивістські формули додавання швидкостей для поперечних проєкцій швидкостей мають вигляд:

$$v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}.$$

Якщо розглядати релятивістське додавання швидкостей за умови, що швидкість \vec{V} рухомої системи відліку K' , відносно нерухомої K , значно менше швидкості світла у вакуумі (при цьому швидкість v може бути будь-якою),

то з точністю до доданків за порядком величин $\frac{V}{c}$ отримуємо вираз [41, с. 27]:

$$v_x = v'_x + V \left(1 - \left(\frac{v'_x}{c} \right)^2 \right), \quad v_y = v'_y - v'_y v'_x \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_z v'_x \frac{V}{c^2}$$

Останні три формули можна записати у векторній формі:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} - \vec{v}' \frac{(\vec{v}' \vec{V})}{c^2}.$$

Абсолютна ж величина швидкості дорівнює (після піднесення до квадрату формули (1.59)):

$$v = \frac{\sqrt{(\vec{v}' + \vec{V})^2 - \left[\vec{v}, \frac{\vec{V}}{c} \right]^2}}{1 + \frac{\vec{V} \vec{v}'}{c^2}}. \quad (1.60)$$

Відповідь: Релятивістська формула додавання швидкостей для загального випадку довільної взаємної орієнтації векторів \vec{V} та \vec{v}' є

$$\vec{v} = \frac{\vec{V} + \vec{v}' \sqrt{1 - B^2} + \frac{1}{V^2} (\vec{V} \vec{v}') \vec{V} (1 - \sqrt{1 - B^2})}{1 + \frac{\vec{V} \vec{v}'}{c^2}}.$$

Релятивістські формули додавання швидкостей для проєкцій швидкостей на вісі OX , OY та OZ відповідно, мають вигляд (за умови, що швидкість руху \vec{V} СВ K' відносно СВ K направлена вздовж осі OX):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}. \quad (1.61)$$

Задача 1.11. Знайти формули перетворення для декартових проекцій вектора прискорення частинки при переході від СВ K' до СВ K .

Розв'язання: Нехай у СВ K' прискорення частинки відоме $\vec{a}'(a'_x, a'_y, a'_z)$, де a'_x, a'_y, a'_z декартові проекції вектора прискорення частинки. Тоді використовуючи формули додавання швидкостей за Ейнштейном

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x},$$

де \vec{V} - швидкості руху СВ K' відносно СВ K ; v'_x, v'_y, v'_z - компоненти швидкості частинки у СВ K' ; v_x, v_y, v_z - компоненти швидкості цієї частинки у СВ K та диференціюючи перший вираз із попередніх трьох, для a_x маємо:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right) \frac{dv'_x}{dt'} - \frac{dv'_x}{dt'} (v'_x + V) \frac{V}{c^2} \cdot \frac{dt'}{dt}}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right)^2}.$$

Або після алгебраїчних спрощень:

$$a_x = \frac{(1 - B^2) \cdot a'_x}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right)^2} \frac{dt'}{dt}.$$

Оскільки похідна $\frac{dt'}{dt}$, з урахуванням ПЛ для часової координати (1.58),

дорівнює:

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right)},$$

то із попереднього виразу отримуємо:

$$a_x = \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right)^3} a'_x.$$

Порівняйте цей результат з результатом та методом розв'язанням *Задачі 2.1*.

Відповідь: Таким чином, формула перетворення для іксової проекції прискорення при переході від СВ K' до СВ K має вигляд:

$$a_x = \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right)^3} a'_x. \quad (1.62)$$

Задача 1.12. Ракета рухається прямолінійно з прискоренням $a' = \text{const}$ відносно супутньої СВ. Через який час (за Земним годинником) швидкість ракети буде $v = 0,8c$. Скільки часу пройде при цьому за власним годинником ракети.

Розв'язання: У супутньої СВ $v'_x = 0$, тому прискорення ракети відносно Землі, згідно з (1.62), дорівнює:

$$a = \frac{dv}{dt} = a'(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}, \text{ або } \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a' \cdot dt}{c}, \quad (1.63)$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, v -миттєве значення швидкості ракети.

Після інтегрування (1.63) знаходимо:

$$\frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a' \cdot t}{c}, \text{ або } v = \frac{a't}{\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2}}. \quad (1.64)$$

Згідно з умовою задачі $v = 0,8c$, тому

$$0,8c = \frac{a't}{\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2}}.$$

Звідси знаходимо час розгону ракети за Земним годинником:

$$t = \frac{4c}{3a'}.$$

При цьому власний час (час за годинником ракети), згідно з формулою (1.16а), дорівнює:

$$\Delta\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a'} \ln \left\{ \frac{a'}{c} t + \sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2} \right\} = \frac{c}{a'} \operatorname{Arsh} \left(\frac{a't}{c} \right)$$

$$\Delta\tau = \frac{c}{a'} \ln \left\{ \frac{a'}{c} t + \sqrt{1 + \left(\frac{a't}{c}\right)^2} \right\} = \frac{c}{a'} \ln \left\{ \frac{a'4c}{c \cdot 3a'} + \sqrt{1 + \left(\frac{a'4c}{3a'c}\right)^2} \right\} =$$

$$= \frac{c}{a'} \ln 3$$

Відповідь: Таким чином, за Земним годинником час розгону ракети дорівнює: $t = \frac{4c}{3a'}$, а за годинником ракети - $\Delta\tau = \frac{c}{a'} \ln 3$.

Задача 1.13. Знайти формулу перетворення прискорення частинки при переході від СВ K' до СВ K .

Розв'язання: Знайдемо спочатку диференціал виразу (1.59):

$$d\vec{v} = \left\{ d\vec{v}' \sqrt{1 - B^2} + \frac{1}{V^2} (\vec{V} \cdot d\vec{v}') \vec{V} (1 - \sqrt{1 - B^2}) \right\} \left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2} \right)^{-1} -$$

$$- \frac{\vec{V}}{c^2} d\vec{v}' \left\{ \vec{V} + \vec{v}' \sqrt{1 - B^2} + \frac{1}{V^2} (\vec{V} \cdot \vec{v}') \vec{V} (1 - \sqrt{1 - B^2}) \right\} \left(1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2} \right)^{-2}.$$

Поділимо ліві і праві частини цього виразу на

$$dt = \frac{dt' + \frac{d\vec{r}' \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}} = dt' \frac{1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}$$
 і одержуємо:

$$\vec{a} = \frac{1 - B^2}{\left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right)^2} \vec{a}' + \frac{1 - B^2}{\left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right)^3} \frac{(\vec{a}' \cdot \vec{V})}{c^2} \left\{ \vec{v}' + \frac{c^2}{V^2} \vec{V} (1 - \sqrt{1 - B^2}) \right\},$$

де $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'}$ - прискорення частинки відносно СВ K' до СВ K

Відповідь: Таким чином, при переході від СВ K' до СВ K тривимірне прискорення частинки перетворюється згідно з формулою:

$$\vec{a} = \frac{1 - B^2}{\left(1 + \frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}\right)^2} \vec{a}' + \frac{1 - B^2}{\left(1 + \frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}\right)^3} \frac{(\vec{a}' \cdot \vec{V})}{c^2} \left\{ \vec{v}' + \frac{c^2}{V^2} \vec{V} (1 - \sqrt{1 - B^2}) \right\}. \quad (1.65)$$

Завдання для самоконтролю

Завдання 1. Стрижень рухається в поздовжньому напрямку мимо двох міток A і B , відстань між якими Δx . Спочатку в момент t_1 навпроти мітки A виявився передній кінець цього стрижня. Потім навпроти мітки B в моменти часу t_2 та t_3 виявилися відповідно передній і задній кінці стрижня.

Знайти власну довжину стрижня.

Відповідь: $l_0 = \frac{\Delta x \cdot c(t_3 - t_2)}{\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - \Delta x^2}}$

Завдання 2. Два стрижня однакової власної довжини l_0 рухаються назустріч один одному паралельно спільній горизонтальній вісі. В системі відліку, яка зв'язана з одним із стрижнів, проміжок часу між моментами співпадання лівих і правих кінців стрижнів виявився рівним Δt . Знайти відносну швидкість стрижнів.

Відповідь: $V = \frac{2l_0 / \Delta t}{1 + \left(\frac{l_0}{c\Delta t}\right)^2}$

Завдання 3. Нехай в момент, коли початки координат O і O' співпадають, покази годинників обох СВ K і K' в цих точках дорівнюють нулеві. Чому дорівнює швидкість \dot{x} переміщення точки, в якій покази годинників в обох системах відліку весь час будуть однаковими?

Відповідь: швидкість переміщення точки, в якій покази годинників в обох системах відліку весь час будуть однаковими, дорівнює $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = \frac{(\Gamma - 1)}{V\Gamma} c^2$.

Завдання 4. Впевнитися, що дві, одночасові і одномісні в СВ K , події будуть одночасовими і в будь-якій системі відліку K' , що рухається відносно СВ K . Якщо ж ці дві події одночасові, але не одномісні, то вони не є одночасовими з точки зору будь-якої іншої СВ K' .

Завдання 5. Показати, використовуючи перетворення Лорентца, що в момент $t = 0$ за годинником СВ K в початку координат (т. O), годинники СВ K' на позитивній частинні осі OX відстають від годинника СВ K , а на від'ємній частинні осі OX випереджають лабораторний годинник. Причому різниця в часі, за годинниками СВ K і за годинниками СВ K' збільшується при збільшенні віддалі від початку координат СВ K (т. O).

Відповідь: $t' = -\frac{Vx}{c\sqrt{1-B^2}}$, де $B = \frac{V}{c}$.

Завдання 6. В кожному мить часу є лише одна площина в просторі (площина взаємної згоди), на якій покази годинників СВ K і ракети (СВ K'), що рухається зі швидкістю V , співпадають (збігаються). Знайти швидкість руху цієї площини в СВ K та СВ K' .

Відповідь: $v = c \frac{1 - \sqrt{1 - B^2}}{B}$.

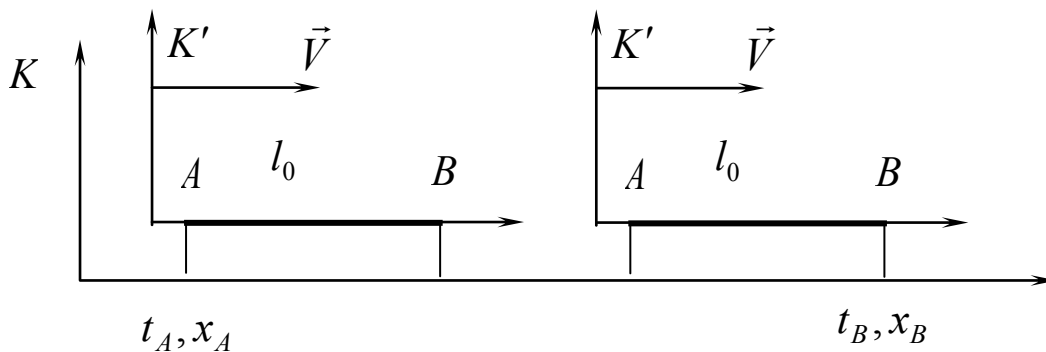
Завдання 7. Стрижень, що орієнтований паралельно вісі $O'X'$ СВ K' , рухається зі швидкістю v' вздовж вісі $O'Y'$. Знайти кут θ між стрижнем та віссю OX СВ K . Осі OX та $O'X'$ СВ K та систем K' співпадають, а СВ K' рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж вісі OX .

Відповідь: З точки зору СВ K стрижень буде повернутий за годинникової

стрілкою на кут θ : $\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v' \sqrt{1 - B^2} \cdot \Delta x' \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2} \cdot \Delta x' \cdot \sqrt{1 - B^2}} = \frac{B \cdot v'}{c \sqrt{1 - B^2}}$,

де $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - B^2}$.

Завдання 8. Стрижень AB рухається вздовж осі OX системи відліку K зі швидкістю V . Переднім кінцем стрижня є точка B , а заднім кінцем – точка A . (мал. 1.33).



Мал. 1.33. Стрижень AB рухається вздовж осі OX системи відліку K зі швидкістю V

Знайти:

А) власну довжину стрижня, якщо в момент t_A координата точки A дорівнює x_A , а в момент t_B координата точки B рівна x_B ;

Б) через який проміжок часу необхідно зафіксувати координати початку і кінця стрижня в СВ K , щоб різниця координат виявилася рівною власній довжині стрижня.

Відповідь: власна довжина стрижня дорівнює: $l_0 = \frac{(x_B - x_A) - V(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - B^2}}$, а

проміжок часу дорівнює: $t_B - t_A = \Delta t = \frac{l_0}{V} \cdot (1 - \sqrt{1 - B^2})$

Завдання 9. Користуючись способом розв'язання **Задачі 1.9** знайти радіус-вектор \vec{r}' по відомому радіус-вектору \vec{r} та напрямку швидкості \vec{V} руху СВ K' відносно СВ K .

Відповідь: $\vec{r}' = \vec{r} - \left(\vec{r} \cdot \frac{\vec{V}}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \frac{\vec{V}}{V^2} - \vec{V}t}{\sqrt{1 - B^2}}$.

Завдання 10. Користуючись способом розв'язання **Задачі 1.11** одержати формули перетворення для ігрекової та зетої проекцій вектора прискорення при переході від СВ K' до СВ K .

Відповідь: $a_y = \frac{(1 - B^2) \cdot \left[\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2} \right) a'_y - \frac{V v'_y}{c^2} a'_x \right]}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2} \right)^3}$,

$$a_z = \frac{(1 - B^2) \cdot \left[\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2} \right) a'_z - \frac{V v'_z}{c^2} a'_x \right]}{\left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2} \right)^3}.$$

Завдання 11. Обґрунтувати та пояснити зміст формул розсинхронізації (формул різночасовості) годинників (1.53) - (1.55).

Контрольні запитання і завдання

1. Показати, що II-закон Ньютона інваріантний щодо перетворень Галілея.
2. Які дослідні факти відносять до експериментальних основ СТВ?
3. Який основний результат дослідів Фізо?

4. Що означає процедура синхронізації годинників?
5. Впевнитися, що обидві процедури синхронізації годинників еквівалентні.
6. Чи вплинув результат досліду Майкельсона на створення А. Ейнштейном СТВ?
7. Як Ви розумієте постулати СТВ?
8. Обґрунтувати перетворення Лорентца методом k - коефіцієнту.
9. Чи являється лорентцеве скорочення реальним ефектом?
10. Як Ви розумієте вислів «сповільнення ходу рухомого годинника»?
11. Описати метод k - коефіцієнту та з його допомогою обґрунтувати лорентцеве скорочення і формулу $\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - B^2}}$.
12. Аналізуючи хід променя в «світловому годиннику» одержати формули $l = l_0 \sqrt{1 - B^2}$ та $\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - B^2}}$.
13. Описати явище аберації зірок використовуючи формули додавання швидкостей за Ейнштейном.
14. Наведіть експериментальні факти, які підтверджують СТВ та її наслідки.
15. Пояснити властивості симетрії простору і часу, які використовуються при обґрунтуванні перетворень Лорентца.
16. Показати виходячи із принципу відносності, що коефіцієнти Γ і Γ' , що входять у вирази $x' = \Gamma'(x - Vt)$, $x = \Gamma(x' + Vt')$ однакові: $\Gamma = \Gamma'$.
17. Використовуючи систему рівнянь (1.9) та (1.10) одержати вираз $t' = \gamma \cdot t + \delta \cdot x$ та $t = \gamma \cdot t' - \delta \cdot x$, де $\gamma = \Gamma$, $\delta = \frac{1 - \Gamma^2}{\Gamma V}$, $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$.
18. Обґрунтувати вирази $y' = ay$, $z' = az$ використовуючи властивості симетрії простору і часу.

Рекомендована література до розділу 1

Основна

1. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності : Навчальний посіб. для студ. вищих навч. закл. / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми : «МакДен», 2011. – 335 с.
2. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с

3. Иродов И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – [6-е изд.]. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 312 с.
4. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
5. Левич В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В. Г. Левич. – Т. 1. – М. : Наука, 1969. – 912 с.
6. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации : [Современный анализ проблемы] / А. А. Логунов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
7. Малинин А. Н. Теория относительности в задачах и упражнениях / А. Н. Малинин. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.
8. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособ. для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.
9. Коновал О.А. Науково-методичний аналіз методів обґрунтування перетворень Лорентца : навчальний посібник для самостійної роботи студентів / О.А. Коновал. - Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2014. – 137 с.

Для поглибленого вивчення теми

1. Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности. – М. : Атомиздат, 1973. – 332 с.
2. Холтон Дж. Эйнштейн и «решающий» эксперимент / Дж. Холтон // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104. – Вып. 2. – С. 297–316.
3. Чудинов Э. М. Эйнштейн и Бриджмен / Э. М. Чудинов // Эйнштейновский сборник : [сб. статей]. – М. : Наука, 1974. – С. 335–350.
4. Чудинов Э. М. Эйнштейн и операционализм Бриджмена / Э. М. Чудинов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 504–519.
5. Чудинов Э. М. Эквивалентные описания и проблема истины в физике / Э. М. Чудинов // Методологические проблемы физики : [сборник статей]. – М. : Знание, 1981. – С. 42–64. – (Новое в жизни, науке и технике. Серия «Физика». – № 1).
5. Штепа М. І. Теорія відносності : [навч. посібник] / М. І. Штепа. – К. : ІЗМН, 1996. – 84 с.
6. Болотовский Б. М. О видимой форме движущегося тела / Б. М. Болотовский // Эйнштейновский сборник : [сб. статей]. – М. : Наука, 1986–1990. – С. 279–328.
7. Левашев А. Е. Движение и двойственность в релятивистской электродинамике / А. Е. Левашев. – Минск : Изд-во БГУ им. Ленина, 1979. – 224 с.

Розділ 2. Чотиривимірний простір-час Мінковського

Мета вивчення розділу: ознайомлення з 4-вимірним поданням СТВ (4-вимірні вектори та формули їх перетворення, усвідомлення зв'язку результатів 4-вимірних перетворень з фізичними явищами та фактами); засвоєння методу діаграм Мінковського для ілюстрації та графічної інтерпретації перетворень Лорентца та їх наслідків; обґрунтування можливості причинно-наслідкових зв'язків між подіями.

Ключові слова: діаграми Мінковського, 4-вимірні вектори, інтервал між подіями, формули перетворення компонентів 4-векторів, класифікація інтервалів.

Теоретична частина

2.1. Поняття про інтервал. Інваріантність інтервалу

1908 року Герман Мінковський запропонував геометричну інтерпретацію, створеної А. Ейнштейном СТВ та її наслідків, після чого відношення тогочасних фізиків до СТВ та розуміння її змінилося на краще. Хоча сам Айнштайн напівжартома з приводу цього сказав якимось, що «з тих пір, як на теорію відносності накинута математика, я сам перестав її розуміти».

Геометрична інтерпретація дозволила по новому осмислити СТВ, дала можливість застосувати нові математичні методи для аналізу фізичних процесів, що протікають в просторі і часі. Використання математичного 4-вимірного формалізму дозволило одержати цілий спектр нових фізичних результатів, про які в класичній фізиці взагалі мови не було, і які в рамках традиційного розуміння СТВ важко отримати взагалі.

Основним поняттям геометричної інтерпретації СТВ являється поняття події, яка характеризується 4 числами x, y, z, t – місцем настання та часом настання події. Як уже наголошувалося, Г. Мінковський стверджував, що «Предметом нашого сприйняття завжди являються тільки місце та час взяті разом. Ніхто ще не спостерігав будь-якого місця інакше, ніж в деякий момент часу і будь-який час інакше, ніж в деякому місці» [68, с. 168].

Оскільки подія характеризується координатами x, y, z, t , то вся сукупність координат фізичних подій в довільній системі відліку утворює 4 - вимірний багатовид, причому зв'язок між координатами багатовидів у двох систем відліку дається перетвореннями Лорентца.

Як відомо, довільний багатовид можна перетворити у відповідний простір тільки тоді, коли в цьому багатовиді визначити геометричні властивості:

«віддаль» між двома нескінченно близькими точками цього багатovidу, кути між прямими, площинами, тощо. Тобто, щоб єдиний просторово-часовий багатovid перетворити у відповідний простір необхідно ввести метрику в цьому багатovidі. Так, наприклад, в 3-вимірному багатovidі – сукупності координат деякого вільного тіла в декартовій системі координат, метрика визначається теоремою Піфагора:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

В евклідовій геометрії dl^2 являється інваріантом. Як же встановити, чи визначити метрику в 4-вимірному багатovidі СТВ? Ця метрика повинна невимушено витікати із теоретичних узагальнень сукупності експериментальних фактів. Але ця сукупність експериментальних фактів привела до формулювання принципів СТВ, а останні, як ми впевнилися в п. 1.3, дають:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dS^2 = in v.$$

Тобто, із постулатів теорії відносності випливає, що квадрат «віддалі» між двома нескінченно близькими подіями дається квадратом інтервалу між цими двома подіями:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.1)$$

Таким чином, можна стверджувати, що постулати СТВ дозволяють визначити квадрат віддалі між двома нескінченно близькими подіями dS^2 . Значення dS^2 не залежить від вибору СВ і тому квадрат інтервалу можна використати для введення метрики в 4-вимірному багатovidі. І таким чином перетворити 4-вимірний багатovid в простір-час Мінковського. Точками цього 4-вимірного простору-часу є сукупність всіх подій в тій чи іншій СВ.

Тобто 3-вимірний простір і одновимірний час об'єднуються в єдиний псевдоевклідовий простір-час Мінковського. В основі об'єднання простору і часу лежить вираз для dS^2 . Інваріантність квадрату інтервалу приводить, як ми впевнимся пізніше, до нових поглядів і уявлень на природу просторово-часових відношень. Хоча і зараз видно із форми (2.1), що як просторова віддаль, так і часова «віддаль» між подіями змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої (носять відносний характер), а квадрат інтервалу dS^2 залишається незмінним.

Таким чином, просторові відрізки та часові проміжки втрачають свій незалежний (як це було в класичній механіці) один від одного характер і **стають відносними проявами більш глибокої сутності. Вона не має наглядного подання, наглядних образів, але строго і точно описується з допомогою поняття інтервалу – це простір-час Мінковського.**

Можна вважати, що (2.1) є результат узагальнення емпіричних фактів. Тобто, вираз для dS^2 не впливає насправді із якихось більш загальних принципів. Він сам виражає фундаментальний принцип сучасної фізики – простір-час єдиний.

Суть і головний зміст СТВ якраз заключається в єдності простору і часу, геометрія якого псевдоевклідова. Всі фізичні процеси протікають в 4-вимірному просторі-часу.

Єдиний псевдоевклідовий простір-час Мінковського – є множина усіх подій у світі, абстрагована від усіх її властивостей, окрім тих, що визначаються відношеннями впливу одних подій на інші.

Розглянемо дві події:

Перша – посилення світлового сигналу з першої точки, друга - прийом цього сигналу в іншій точці. Тоді, квадрат інтервалу між цими двома подіями, посиленням сигналу із першої точки та прийомом його в другій точці, дорівнює:

$$c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \Delta S^2 = 0. \quad (2.2)$$

Це буде співвідношення справедливе в СВ K .

Виходячи із принципу відносності і другого постулату Ейнштейна, для цих двох подій в СВ K' можна записати:

$$c^2 \cdot (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = \Delta S'^2 = 0. \quad (2.3)$$

Коли квадрат інтервалу $\Delta S^2 = 0$, то він називається *світлоподібним інтервалом*.

Якщо ці події (посилання та прийом світлового сигналу) відбуваються в нескінченно близьких точках, то:

$$\begin{aligned} dS^2 &= c^2 \cdot dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \\ dS'^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тобто, якщо $dS^2 = 0$ в одній СВ то і в іншій СВ K' він також дорівнює нулю, $dS'^2 = 0$

Розглянемо тепер інтервал між довільними подіями. Із властивості світлоподібного інтервалу слід чекати, що і для **будь-яких подій** будемо мати наступне співвідношення між квадратами інтервалу в СВ K' та СВ K :

$$dS^2 = a \cdot dS'^2. \quad (2.5)$$

Внаслідок рівноправності СВ K та СВ K' можна написати також:

$$dS'^2 = a \cdot dS^2. \quad (2.5')$$

Перемноживши між собою останні два співвідношення одержимо $a^2 = 1$, тобто, $a = \pm 1$. Природньо припустити, що знак квадрату інтервалу у всіх СВ повинен бути однаковий.

Тому із принципу відносності випливає, що квадрат інтервалу між довільними подіями є величина інваріантна:

$$dS'^2 = dS^2. \quad (2.6)$$

В справедливості закону (2.6) можна впевнитися, безпосередньо скориставшись перетвореннями Лорентца.

Таким чином, із постулатів теорії відносності в 4-вимірному багатовиді координат подій в довільній системі відліку можна ввести форму (2.1), яка буде визначати квадрат віддалі між двома нескінченно близькими подіями.

Ця формула визначає метрику в 4-вимірному багатовиді. Тепер можна говорити про 4-вимірний простір – час. Таким чином, наслідком постулатів теорії відносності є об'єднання в єдиний простір-час Мінковського 3-вимірного простору класичної фізики та незалежного від простору (в класичній механіці) одновимірного часу.

Оскільки квадрат інтервалу є інваріантною величиною, то треба знайти такі перетворення просторових та часових координат події, які б забезпечували цю інваріантність.

Розглянемо ще один спосіб обґрунтування перетворень Лорентца.

Приклад 2.1. В 4-вимірному просторі Мінковського рух першої системи відліку відносно другої системи відліку можна подати як «поворот» системи координат у цьому 4-вимірному просторі.

Показати, що такий «поворот» в 4-вимірному просторі, який не змінює квадрат інтервалу (2.1) між двома подіями, еквівалентний перетворенням Лорентца.

Розв'язання. Координати події будемо позначати x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict. \quad (2.7)$$

Тому по аналогії з поворотом декартової системи координат в 3-вимірному просторі можна записати:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cdot \cos \varphi - x'_4 \cdot \sin \varphi \\ x_4 &= x'_4 \cdot \cos \varphi + x'_1 \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Розглянемо точку $x'_1 = 0$, це початок координат в СВ K' , тому із (2.8) одержуємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x'_4 \cdot \sin \varphi \\ x_4 &= x'_4 \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{x_4} = -tg\varphi. \quad (2.9)$$

Перепишемо (2.9) враховуючи, що $x_1 = Vt$ - це координата початку координат СВ K' з точки зору СВ K :

$$tg\varphi = -\frac{x \cdot i}{i \cdot c \cdot t \cdot i} = i \cdot \frac{V}{c} = i \cdot B. \quad (2.10)$$

Тоді косинус та синус кута повороту виражаються через $B = \frac{V}{c}$:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \Gamma, \sin\varphi = \frac{i \cdot B}{\sqrt{1-B^2}},$$

де $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$.

Таким чином, перетворення (2.8), які залишають інтервал інваріантним при поворотах системи координат в просторі Мінковського ϵ :

$$x_1 = \frac{x'_1 - i \cdot c \cdot t' \cdot i \cdot B}{\sqrt{1-B^2}}$$

$$x_4 = i \cdot c \cdot t = \frac{i \cdot c \cdot t' + x'_1 \cdot i \cdot B}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Або після спрощення маємо:

$$x_1 = \frac{x'_1 + V \cdot t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{t' + x'_1 \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.11)$$

Це перетворення Лорентца.

Ми показали ще один спосіб обґрунтування перетворень Лорентца.

Перетворення Лорентца можна записати і так:

$$x'_i = \alpha'_{ik} \cdot x_k, \quad (2.12)$$

де α'_{ik} - це матриця перетворень Лорентца, яка вводиться і визначається таким чином. Запишемо перетворення Лорентца в такому вигляді:

$$x'_1 = \frac{x_1 + i \cdot B \cdot x_4}{\sqrt{1-B^2}} = \Gamma \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + i \cdot B \cdot \Gamma x_4$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

$$x'_4 = \frac{x_4 - i \cdot B \cdot x_1}{\sqrt{1-B^2}} = -i \cdot B \cdot \Gamma \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \Gamma \cdot x_4 \quad (2.13)$$

Тоді матриця α'_{ik} дорівнює:

$$\alpha'_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Це матриця перетворень Лорентца.

Якщо ввести уявну одиницю в означення «часової координати» події, то одержуємо для квадрату інтервалу між двома подіями наступний вираз:

$$-dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (2.15)$$

Обернені перетворення Лорентца:

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k, \quad (2.16)$$

де

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Інтервал називають часоподібним, якщо квадрат його більше нуля.

$$dS^2 > 0 \quad (2.18)$$

$$dS^2 = c^2 \cdot dt^2 - dl^2 = c^2 \cdot dt'^2 - dl'^2 > 0. \quad (2.19)$$

Якщо інтервал часоподібний, то можна знайти систему координат, в якій дві події відбуваються в одній точці (див. п. 2.4). Тобто, можна знайти таку систему координат, наприклад СВ K' , в якій $dl' = 0$. Тобто, $c^2 dt'^2 = c^2 \cdot dt^2 - dl^2$. Тоді, проміжок часу між двома подіями в такій СВ K' дорівнює:

$$dt' = \frac{dS}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dl^2}}{c},$$

або:

$$dt' = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (2.20)$$

де $V = \frac{dl}{dt}$.

Якщо $dS^2 < 0$, то тоді можна знайти таку СВ K' , в якій дві події відбуваються одночасно, $dt' = 0$:

$$dS^2 = c^2 \cdot dt^2 - dl^2 = c^2 \cdot dt'^2 - dl'^2 = -dl'^2. \quad (2.21)$$

2.2. Геометрична інтерпретація перетворень Лорентца

Для того, щоб дати геометричну інтерпретацію перетворенням Лорентца, та кінематичним наслідкам їх, треба в 4-вимірному часо-просторі Мінковського зобразити СВ K та СВ K' і на осях координат відкласти одиничні відрізки. Оскільки, згідно з перетвореннями Лорентца, «ігрикові» та «зеті» координати події незмінні, то ми на двовимірній евклідовій площині зображаємо просторову і часову вісі СВ K . Причому на часовій вісі будемо відмічати не просто час настання події, а величину ct . Нехай, як завжди при розгляді відносного руху систем відліку, в початковий момент часу $t = t' = 0$ початки координат СВ K та СВ K' співпадають.

Система K' відносно системи K рухається зі швидкістю V . Тому графік закону руху початку координат СВ K' (точка O') в СВ K буде мати вигляд прямої

$$x = V \cdot t = \frac{V \cdot t \cdot c}{c} = B \cdot ct, \quad (2.22)$$

яка утворює кут θ з часовою віссю СВ K (див. Мал. 2.1):

$$\frac{x}{c \cdot t} = B = \operatorname{tg} \theta.$$

Це означає, що тіло, яке рухається з постійною швидкістю V відносно системи K на діаграмі зображається прямою лінією, яка утворює з часовою віссю системи K кут θ . Така лінія (закон руху) на діаграмі Мінковського називається світовою лінією тіла (матеріальної точки).

«Матеріальна частинка, яку розуміють як сукупність подій, є системою, в якій лінійна протяжність має часовий характер» (А.С. Едінгтон). Це означає, що світова лінія, яка зображає матеріальну частинку всюди часоподібна. Будь-яка пара подій, які розділені часоподібним інтервалом, можуть фізично відповідати двом різним моментам «життя» однієї і тієї ж частинки. І можуть знаходитися на осі часу деякої СВ.

Оскільки для кожної точки світової лінії початку координат СВ K' $x' = 0$, то це часова вісь системи K' .

Знайдемо як орієнтована просторова вісь системи K' на діаграмі Мінковського. Для цього використаємо перетворення Лорентца:

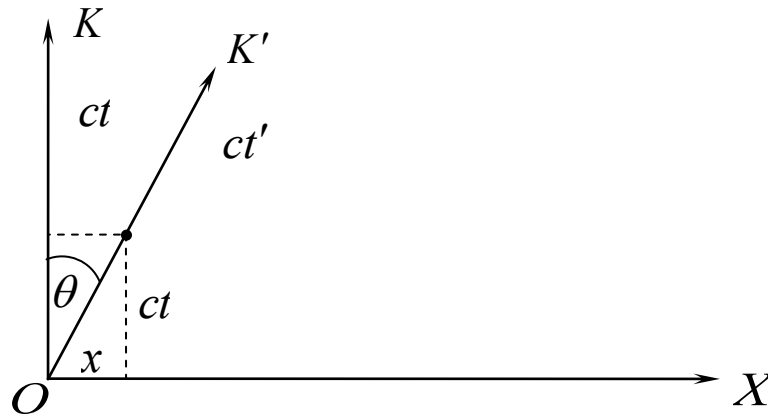
$$ct' = \frac{ct - \frac{V \cdot x \cdot c}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}} = 0. \quad (2.23)$$

(Тут $ct' = 0$ тому, що в кожній точці просторової осі x' час $t' = 0$).

Дійсно, що показують годинники СВ K' , що знаходяться на просторовій вісі $O'X'$? Всі вони показують $t' = 0$.

Тому із (2.23) маємо:

$$c \cdot t = \frac{V \cdot x}{c}. \quad (2.24)$$



Мал. 2.1. Орієнтація часової вісі СВ K' відносно СВ K .

Тепер ми знаходимо рівняння та графік просторової вісі СВ K' відносно системи K на діаграмі Мінковського:

$$\frac{c \cdot t}{x} = \operatorname{tg} \theta = B. \quad (2.25)$$

Тобто, просторова вісь СВ K' утворює з віссю OX СВ K кут $\theta = \operatorname{arctg} \frac{V}{c}$ (мал. 2.2).

З допомогою (2.25) знаходимо світову траєкторію кванта світла у вакуумі. Оскільки для кванта світла $V = c$, то світова траєкторія його утворює з віссю OX кут $\theta = 45^\circ$.

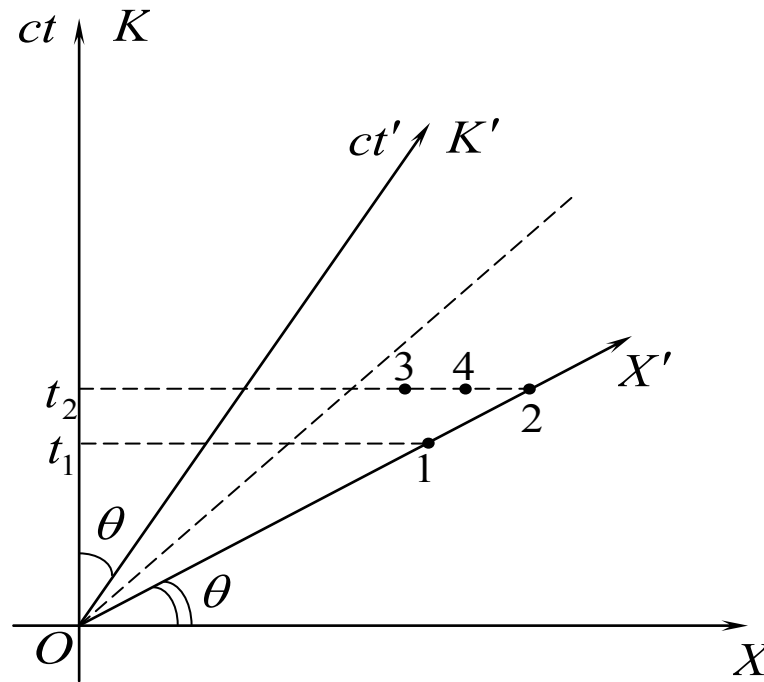
На діаграмі Мінковського особливо очевидна відносність одночасовості.

Дійсно, нехай в точках 1 і 2 відбулися дві події, які з точки зору СВ K' відбулися одночасово, $t'_1 = t'_2$.

Але з точки зору СВ K ці події відбулися неодноразово: $t_1 \neq t_2$, що очевидно з діаграми, зображеної на мал. 2.2.

Для того, щоб дати геометричну інтерпретацію перетворень Лорентца, треба тепер на координатних осях відкласти одиничні відрізки. Для цього скористаємося квадратичною формою (2.1), яка в площині $XOct$ запишеться як рівняння рівнобічної гіперболи:

$$(ct)^2 - x^2 = 1, \quad x^2 - (ct)^2 = 1. \quad (2.26)$$



Мал. 2.2. Зображення на діаграмі Мінковського просторових та часових осей СВ K та СВ K'

Це гіперболи називають масштабними або калібровочними.

Очевидно, що ці гіперболи на просторових та часових осях системи K відсікають одиничні відрізки (див. Мал. 2.3). Це означає відрізок OA в СВ K дорівнює одному метру, і $OC = 1$ метру. Тобто, $OC = 1 = ct$, а відповідний часовий відрізок $t = \frac{1}{c}$ секунд.

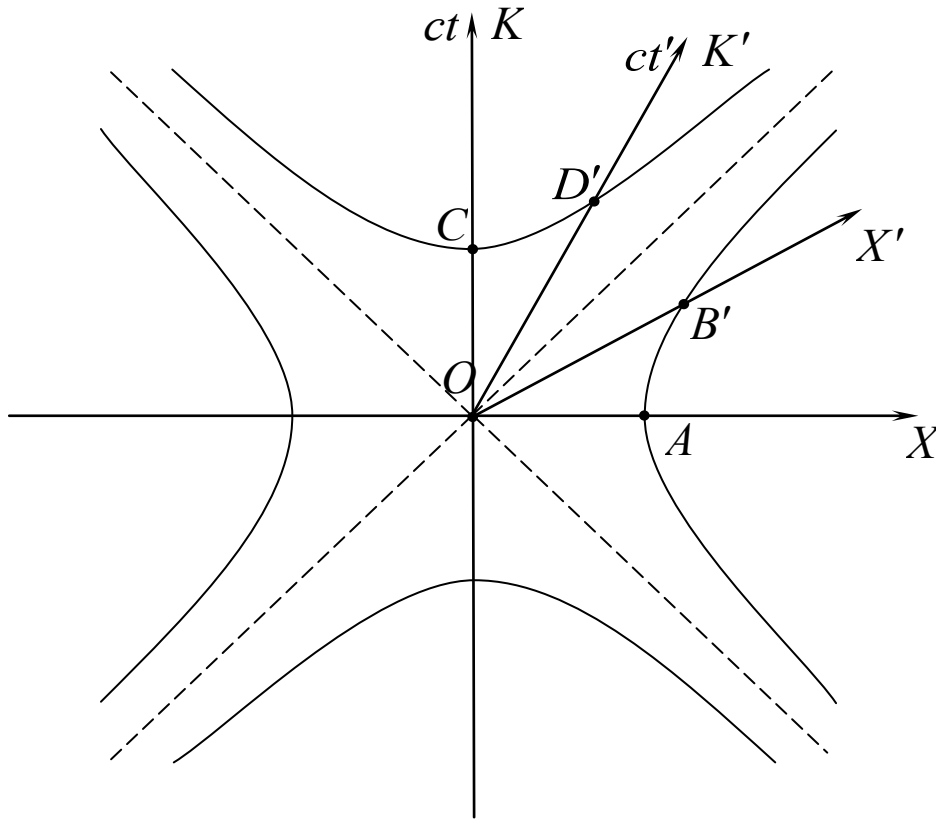
Можна впевнитись, що ці гіперболи відсікають також одиничні відрізки на просторовій та часовій осях в СВ K' .

Дійсно, користуючись перетвореннями Лорентца, можна знайти координати точок B' і D' в СВ K в припущенні, що OB' і OD' дорівнюють 1 в СВ K' і показати, що координати точок B' і D' в СВ K задовольняють рівняння (2.26).

Справді, точка D' (координати якої в СВ K' : $ct' = 1, x' = 0$) має в СВ K координати $x = \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}$, $ct = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$, що задовольняють рівнянню

$(ct)^2 - x^2 = 1$, а точка B' ($ct' = 0, x' = 1$) в СВ K має координати $x = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}$,

$ct = \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}$, які задовольняють рівнянню $x^2 - (ct)^2 = 1$.



Мал.2.3. СВ K і СВ K' на діаграмі Мінковського та калібровочні гіперболи

Аналогія: калібровочні гіперболи в нашому випадку грають роль кола одиничного радіусу на евклідовій площині, (бо відсікають одиничні відрізки на осях декартової системи координат). Одиничні відрізки на часовій та просторовій осях псевдоевклідовій площині відсікаються гіперболами (2.26).

І ось тепер можна пояснити з допомогою діаграм Мінковського кінематичні наслідки перетворень Лорентца.

Нехай в СВ K' вздовж вісі OX' знаходиться нерухомий стрижень OB' одиничної довжини, мал. 2.4.

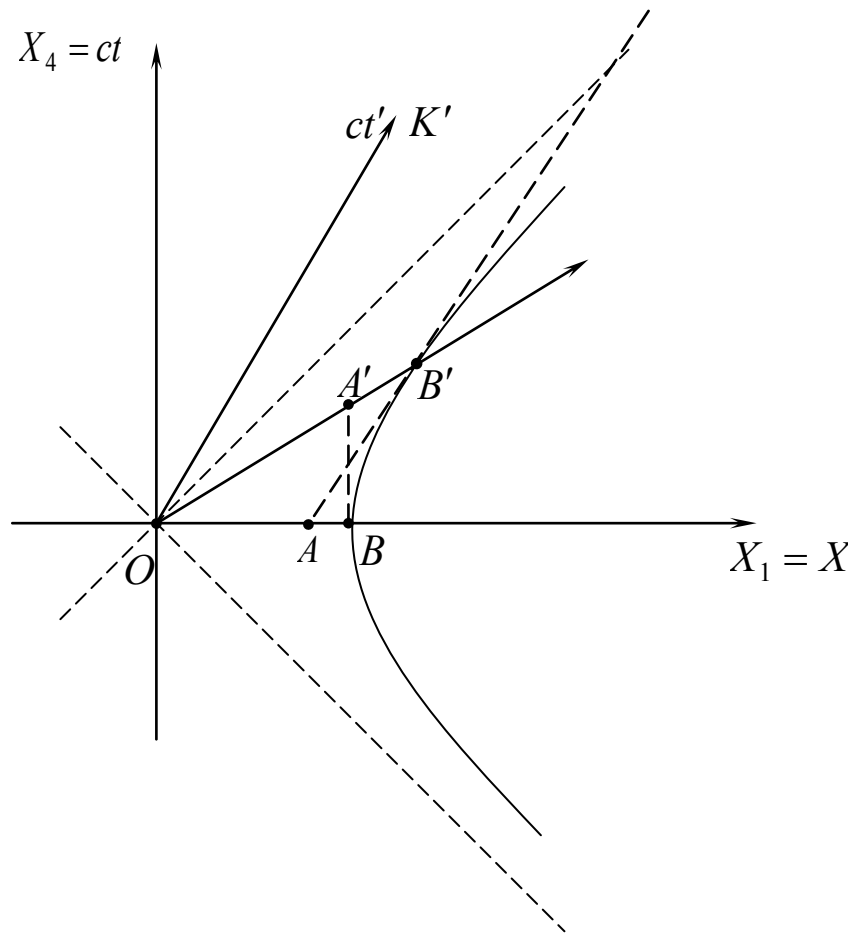
Значить відносно СВ K він рухається зі швидкістю V . Світовою лінією точки B' в СВ K буде пряма AB' . А світова лінія точки O' є не що інше як часова вісь СВ K' .

Чому дорівнює довжина цього стрижня в СВ K ?

Для цього треба визначити координати початку і кінця стрижня в цій системі одночасово по годиннику СВ K . Координата точки A – це координата кінця стрижня в СВ K по годиннику цієї системи. Бачимо, що $OA < OB$, оскільки $OB = l_0 = 1\text{ м}$.

Висновок: стрижень, що рухається в СВ K , має меншу довжину, ніж його власна довжина:

$$OA = l_0 \cdot \sqrt{1 - B^2}. \quad (2.27)$$



Мал. 2.4. Геометрична інтерпретація лорентцевого скорочення з допомогою діаграми Мінковського

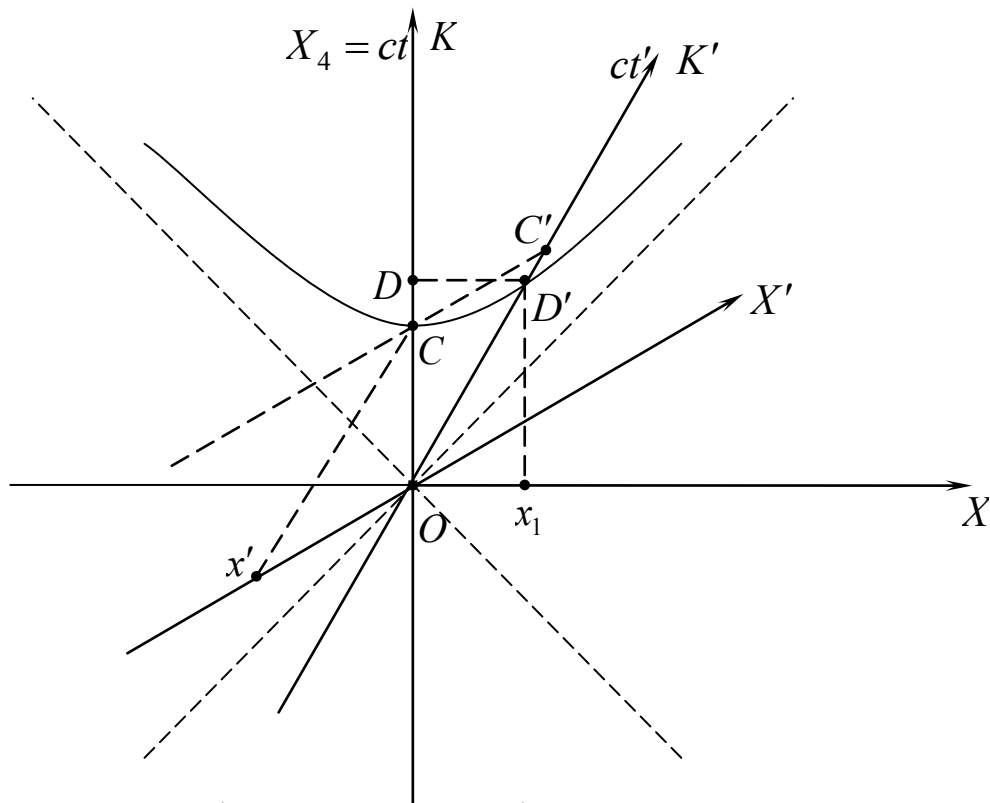
Аналогічно, нехай в СВ K вздовж вісі OX знаходиться в спокої стрижень $OB = l_0 = 1\text{м}$.

Яка його довжина в СВ K' ? Щоб дати відповідь на це запитання необхідно знайти координати кінців стрижня OB одночасно в СВ K' . Оскільки світові лінії кінців стрижня це лінії OX_4 та BA' , то для спостерігача СВ K' одночасові положення початку та кінця (в момент часу $ct' = 0$) масштабу OB визначаються світовими точками O та A' . Отже, для спостерігача СВ K' довжина рухомого стрижня дорівнює OA' . І як видно з малюнку 2.4. $OA' < OB'$. Тобто, довжина рухомого стрижня OA' з точки зору СВ K' менша, ніж власна довжина одиничного масштабу:

$$OA' = l_0 \cdot \sqrt{1 - B^2}.$$

Тепер зупинемося на геометричній інтерпретації відносності проміжків часу. Нехай в СВ K' в початку координат знаходиться годинник. Тоді світовою

лінією його буде просто вісь часу ct' і в точці D' цей годинник відрахував одиницю часу $\tau' = 1$ (мал. 2.5).



Мал. 2.5. Геометрична інтерпретація сповільнення ходу рухомого годинника

Точка D' в СВ K одночасна з усіма подіями, що лежать на лінії DD' . Але годинник СВ K , який знаходиться в цій самій точці простору, а саме, в точці з координатою x_1 , відрахував проміжок часу, що відповідає відрізку OD . Але $OD > 1$.

Це означає, що коли рухомий годинник, годинник в СВ K' , відрахував одиницю часу $O'D' = \tau' = 1$, проміжок часу відрахований двома годинниками СВ K (які знаходяться в точках O і x_1) дорівнює OD і $OD > O'D'$. Тобто, годинник який рухається «іде» повільніше з точки зору СВ K

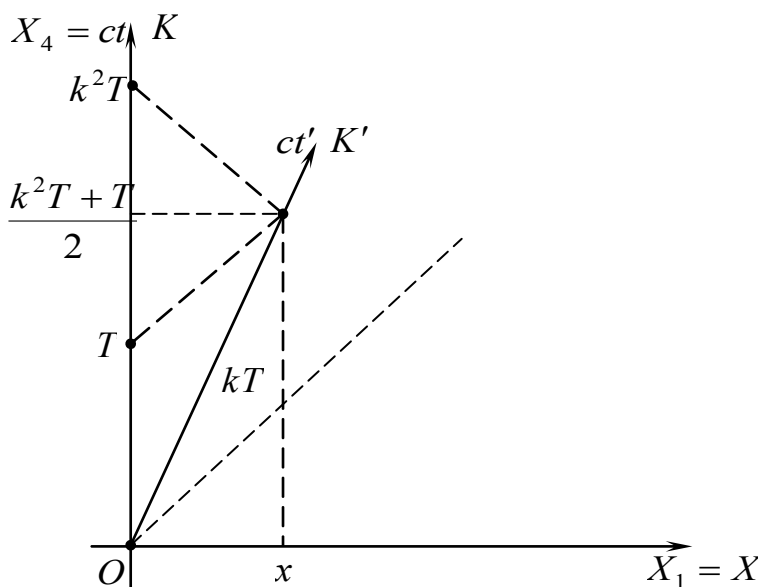
$$OD = \frac{O'D'}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (2.28)$$

Якщо ж годинник нерухомий в СВ K , то в т. C він відрахував одиницю часу. Але з точки зору СВ K' т. C одночасова з усіма подіями, що лежать на лінії CC' , мал. 2.5. Годинник із СВ K' , що знаходиться в тій самій точці простору, що й годинник СВ K (точка x') відрахував проміжок часу $O'C' > OC = 1$. Тобто, рухомий годинник іде повільніше ніж нерухомий в СВ K' .

Висновок: годинник, який рухається, «іде» повільніше, ніж той, що не рухається (з точки зору СВ K' , відносно якої годинник рухається).

Абсолютна величина квадрату інтервалу між подіями інваріанта, але кожна окремо взята величина часового і просторового проміжка між цими подіями залежать від СВ, тобто, величини просторових і часових проміжків носять відносний характер. В цьому суть теорії відносності. Простір і час єдині.

В абсолютності інтервалу та відносності окремо взятих просторових і часових проміжків, Δl і Δt , як раз і проявляться більш глибока суть простору і часу, які об'єднуються в єдину форму існування матерії.



Мал. 2.6. Пояснення методу k - коефіцієнту на діаграмі Мінковського

Тепер з допомогою діаграм Мінковського (мал. 2.6) можна пояснити і метод k - коефіцієнта (див. Розділ 1).

Нагадаємо, що kT – час прибуття світлового сигналу в СВ K' за годинником системи K' .

$\frac{k^2 \cdot T + T}{2}$ - момент відбиття сигналу від СВ K' за годинником системи

K . Або, що те ж саме, момент часу за годинником СВ K , коли світловий сигнал догнав СВ K' .

2.3. Чотиривимірні вектори та формули перетворення їх компонентів

В 4 – вимірному просторі Мінковського вводиться 4-вимірний радіус-вектор, компоненти якого визначають координати події в СВ K :

$$\mathfrak{R}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = i \cdot c \cdot t) \quad (2.29)$$

Перетворення Лорентца для компонентів 4- вимірного радіуса-вектора наступні:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 - i \cdot B \cdot x'_4}{\sqrt{1 - B^2}} \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ x_4 &= \Gamma \cdot (x'_4 + i \cdot B \cdot x'_1) \end{aligned} \quad , \quad (2.30)$$

або

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k,$$

де $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}$, а матриця перетворень Лорентца α_{ik} визначається (2.17).

Означення: 4-вимірним вектором називається сукупність 4 компонентів (координат або проекцій), які при переході від СВ K' до СВ K перетворюються по формулам аналогічним перетворенням Лорентца для компонентів 4-радіус-вектора (2.30).

Тобто, якщо є 4-вимірний вектор з компонентами

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4), \quad (2.31)$$

то компоненти його при переході від СВ K' до СВ K перетворюються згідно з формулами:

$$\begin{aligned} A_1 &= \Gamma \cdot (A'_1 - i \cdot B \cdot A'_4) \\ A_2 &= A'_2 \\ A_3 &= A'_3 \\ A_4 &= \Gamma \cdot (A'_4 + i \cdot B \cdot A'_1) \end{aligned} \quad . \quad (2.32)$$

Так, наприклад, компоненти 4-швидкості визначаються: $u_i = \frac{dx_i}{d\tau}$, де $d\tau$ - нескінченно малий проміжок власного часу. Суттєво, що похідна береться по власному часу: $\frac{dx_i}{d\tau}$ - це відношення приросту координати частинки за час $d\tau$, який реєструється годинником зв'язаним з частинкою.

$$u_1 = \frac{dx}{dt\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \cdot v_x, \quad (2.33)$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, v - швидкість тіла відносно СВ K , $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

А в СВ K' , наприклад, перший компонент 4- швидкості дорівнює:

$$u'_1 = \frac{dx'}{d\tau} = \frac{dx'}{dt\sqrt{1-\beta'^2}} = \gamma'v'_x,$$

де v' - швидкість тіла в системі K' , $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$, $\beta' = \frac{v'}{c}$.

Четвертий компонент 4-швидкості в СВ K :

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{d(i \cdot c \cdot t)}{dt \cdot \sqrt{1-\beta^2}} = i \cdot c \cdot \gamma. \quad (2.34)$$

Можна впевнитися, що формули перетворення компонентів 4-швидкості при переході від СВ K' до СВ K приводять до формул додавання швидкостей за Ейнштейном (1.26).

Аналогічно визначаються компоненти 4-імпульсу:

$$\begin{aligned} p_i &= m_0 \cdot u_i \\ p_1 &= m_0 \cdot v_x \cdot \gamma \\ p_4 &= i \cdot c \cdot \gamma \cdot m_0 \cdot \frac{c}{c} = \frac{i}{c} \cdot E \end{aligned} \quad (2.35)$$

Оскільки четвертий (часовий) компонент 4-імпульсу пропорційний повній енергії частинки, то 4-вимірний імпульс називають 4-вимірним вектором енергії-імпульсу.

Аналогічно визначаються і компоненти 4-вимірного прискорення:

$$b_i = \frac{du_i}{d\tau}. \quad (2.36)$$

Результати формул перетворення компонентів 4-вимірного прискорення подані в **Задачі 2.1**.

2.4. Класифікація інтервалів, причинні зв'язки між подіями та перегляд класичних уявлень про простір і час

Як відомо, квадрат інтервалу між двома подіями визначається:

$$\Delta S^2 = c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (2.37)$$

Будемо вважати, для простоти, що події відбуваються на осі ОХ. Тоді для квадрату інтервалу маємо:

$$\Delta S^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \cdot \Delta t'^2 - \Delta x'^2, \quad (2.38)$$

де Δt , $\Delta t'$ - проміжок часу між цими двома подіями з точки зору СВ K та СВ K' відповідно; Δx , $\Delta x'$ - просторові віддалі між цими подіями в СВ K і СВ K' .

Як уже відмічалось, інтервали поділяються на:

1. Часоподібні, для яких $\Delta S^2 > 0$.
2. Просторовоподібні: $\Delta S^2 < 0$.
3. Світлоподібні: $\Delta S^2 = 0$.

Розглянемо більш детально властивості та наслідки інтервалів між подіями.

Так, для часоподібних інтервалів завжди можна знайти СВ K' , в якій перша та друга події відбуваються в одній і тій самій точці, $\Delta x' = 0$.

Тоді як знайти швидкість, з якою повинна рухатись СВ K' , щоб ці дві події відбувались в одній точці цієї СВ K' ?

Із перетворень Лоренца випливає, що:

$$\Delta x' = (\Delta x - V\Delta t) \cdot \Gamma = \Delta t \cdot (u - V) \cdot \Gamma, \quad (2.39)$$

де $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

І тоді очевидно, що швидкість СВ K' повина дорівнювати:

$$u = V. \quad (2.40)$$

Тобто, СВ K' повинна бути весь час пов'язана з цим явищем, яке переміщується з швидкістю $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ відносно СВ K .

А проміжок часу $\Delta t'$ між цими подіями в СВ K' дорівнює:

$$\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \Gamma \left(1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} \right) \cdot \Delta t. \quad (2.41)$$

Якщо в СВ K $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, то і проміжок часу між цими подіями в СВ K' , $\Delta t'$, більший за нуль при умові:

$$\left(1 - \frac{V}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} \right) > 0. \quad (2.42)$$

Але остання нерівність виконується завжди, оскільки для часоподібного інтервалу $c \cdot \Delta t > l_{12}$. Але $l_{12} \geq \Delta x$, то безумовно, що і $c\Delta t > \Delta x$, а відношення

$\frac{V}{c}$ завжди менше одиниці, $\frac{V}{c} < 1$, то і $\frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} < 1$.

Значить другий доданок в (2.42) $\frac{V}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} < 1$ завжди.

А сам вираз (2.42) більший нуля завжди для часоподібних інтервалів,

$$\left(1 - \frac{V}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t}\right) > 0.$$

Тобто, для часоподібних інтервалів поняття раніше або пізніше мають абсолютний характер: послідовність подій в часі для часоподібних інтервалів не може бути змінена при переході у довільну систему відліку.

Іншими словами, послідовність подій носить абсолютний характер.

Яке ж значення має збереження послідовності подій в часі?

Якщо інтервал часоподібний, то це може вказувати на можливість причинного зв'язку між подіями, оскільки послідовність подій в часі носить абсолютний характер. Але часоподібність інтервалу говорить і про фізичну можливість впливу однієї події на іншу.

По-іншому: якщо події, які зв'язані деякою взаємодією, відбулися на віддалі Δx , то швидкість світла встигає передати цю взаємодію між точками x_1 і x_2 . За час, що пройшов між настанням подій світло може пройти просторову відстань між цими подіями, оскільки $c\Delta t > \Delta x$, де $\Delta x = x_2 - x_1$ - віддаль між подіями.

Тобто, ми можемо сказати: дві події, можуть знаходитися у причинному зв'язку в принципі, якщо для них інтервал часоподібний.

Подія в точці x_2 - наслідок події в точці x_1 . Це може бути лише при умові, що швидкість розповсюдження взаємодій менше швидкості світла. Швидкість u , яку ми ввели в (2.39) може бути швидкістю частинок, швидкістю передачі сигналів і т.п.

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c. \quad (2.43)$$

Якщо допустити, що існує взаємодія, яка передається зі швидкістю більшою ніж швидкість світла, або припустити, що існують такі гіпотетичні частинки, які переносять цю взаємодію, тобто припустити, що

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} > c, \quad (2.44)$$

то тоді можна знайти таку СВ (що рухається з швидкістю V), в якій доданок $\frac{V}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{Vu}{c^2}$ буде більшим ніж одиниця. При цьому, згідно з (2.42), $\Delta t' < 0$ ($t'_2 < t'_1$). **Тобто, послідовність подій в часі стає зворотною.**

Гіпотетичні частинки, які рухаються зі швидкістю $u = \frac{\Delta x}{\Delta t} > c$ називаються тахіонами. Теорія відносності, в принципі, не заперечує їх існування.

Якщо вони існують, то послідовність протікання подій в часі може бути змінена на протилежну в деякій системі відліку.

Дійсно, нехай в СВ K $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, тобто подія в точці x_1 відбулася раніше ніж в точці x_2 . Із формули (2.41),

$$\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \Gamma \left(1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} \right) \cdot \Delta t,$$

одержуємо, що $\Delta t' = t'_2 - t'_1 < 0$, коли $\frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} > 1$.

Справді, хоч $\frac{V}{c} < 1$ (завжди), величина $\frac{V}{c} \cdot \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t}$ може бути більшою за одиницю, коли $\frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} > 1$.

Фізично це означає: що в СВ K' наслідок і причина міняються місцями – спочатку відбулася подія (наслідок) в точці x_2 в момент t_2 , а потім в точці x_1 в момент часу t_1 ми спостерігаємо причину.

Таким чином, припущення про існування надсвітлових сигналів еквівалентно можливості зміни в часі послідовності 2-х подій шляхом вибору СВ. Але припущення такої можливості суперечить принципу причинності: причина завжди передує по часі наслідку. Це об'єктивний зв'язок і він не може бути порушений вибором СВ.

Якщо в основу пізнання та світогляду покласти принцип причинності, то повсякденний досвід, весь макроскопічний досвід людства протирічить наявності тахіонів, або надсвітлових сигналів. Принцип причинності заперечує існування тахіонів, або сигналів, для яких

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} > c.$$

Якщо інтервал між подіями просторовоподібний, то для нього:

$$c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \cdot \Delta t'^2 - \Delta x'^2 < 0, \quad (2.45)$$

що означає також $\Delta x > c \cdot \Delta t$.

І виявляється тоді, що СВ, в якій події відбулися одночасово, ($\Delta t' = 0$), знайти можна. Знову звернемося до виразу (2.41):

$$\Delta t' = \Gamma \left(1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} \right) \cdot \Delta t = 0. \quad (2.46)$$

Із (2.46) знайдемо умову, при якій події в деякій СВ відбулися одночасно:

$$\Delta t = \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x \rightarrow V = c \cdot \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x}.$$

І оскільки для просоровоподібних інтервалів $c\Delta t < \Delta x$, то для швидкості руху такої СВ одержуємо $V < c$. Значить, дійсно така СВ існує.

І тоді в принципі можна знайти систему відліку, в якій порядок подій в часі змінюється на протилежний. Оскільки $\Delta t' = \Delta t \cdot \Gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$, то при $\Delta t > 0$ порядок подій в часі змінюється на протилежний, $\Delta t' < 0$, якщо $\left(1 - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) < 0$, що може бути, бо $c\Delta t < \Delta x$, і $\frac{\Delta x}{c\Delta t} > 1$.

Таким чином, події для яких інтервал просторовоподібний не можуть знаходитись в причинному зв'язку.

Як бачимо, теорія відносності дає змогу обґрунтувати умови, при яких причинний зв'язок між подіями або можливий, або неможливий.

Виходячи з діаграм Мінковського та із існування цих трьох видів інтервалів, всі події в 4-вимірному просторі Мінковського можна поділити на такі області (мал. 2.7).

Довільні дві події, які знаходяться в області aOb , cOd зв'язані часоподібним інтервалом, $\Delta S^2 > 0$.

Тому для усіх подій з області aOb час настання будь-якої події більший, ніж час настання події в точці O .

Тому ця область називається абсолютно майбутньою по відношенню до початку координат. Аналогічно, час настання будь-якої події із області cOd менший, ніж час настання події в точці O .

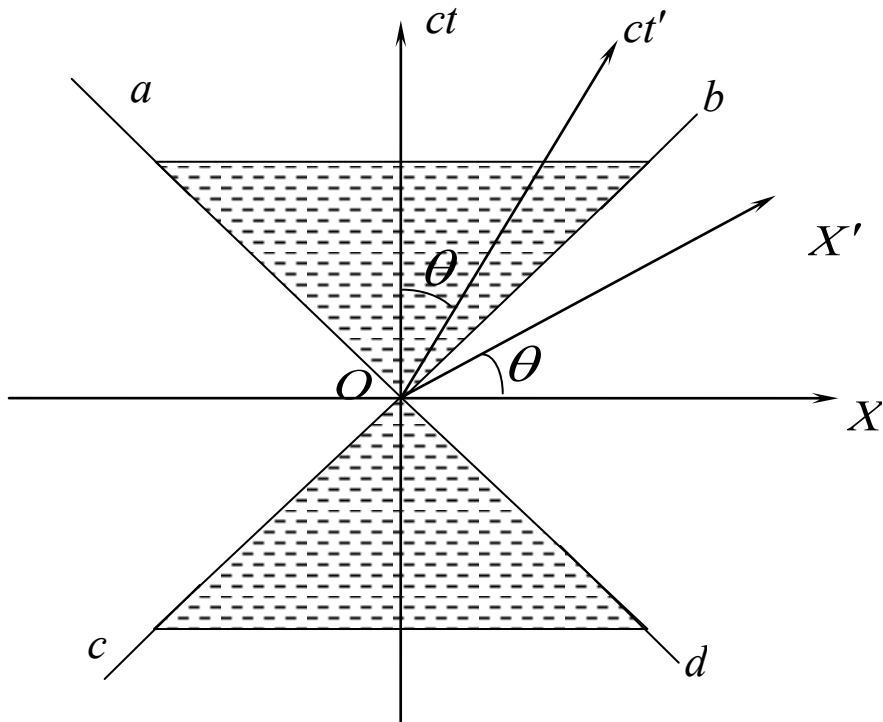
Тобто, довільна подія із області cOd відбулася раніше, ніж подія в точці O . Тому, область cOd - це область абсолютно минулого.

Будь-які дві події із областей 4-вимірного простору bOd і aOc , зв'язані, як неважко впевнитися, просторовоподібним інтервалом, $\Delta S^2 < 0$. Тому, із цього випливають такі висновки:

1. Довільні дві подій із областей простору bOd і aOc , не можуть бути в причинному зв'язку.

2. Для таких подій поняття пізніше, раніше, одночасно носять відносний характер:

а) можна знайти систему відліку, в якій довільна подія із області bOd або aOc , відбулася пізніше події в точці O ;



Мал. 2.7. Области майбутнього та минулого на діаграмі Мінковського

б) можна знайти систему відліку, в якій ця сама подія відбулася раніше події в точці O ;

в) можна знайти єдину систему відліку, в якій подія із цих областей відбулася одночасно з подією в точці O .

Області bOd і aOc , називаються абсолютно віддаленими.

Ця назва зумовлена тим, що довільні дві події в цих областях не можуть спостерігатись ні в якій системі відліку в одній і тій самій точці, $\Delta x' \neq 0$.

Якщо розглянути не одну просторову вісь, а всі три просторові осі, то області абсолютного майбутнього і абсолютного минулого відносно точки O будуть мати вигляд конуса.

Ця конічна поверхня, тобто конус, описується рівнянням:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (2.47)$$

і його називають світловим конусом.

Практична частина

Зразки розв'язування задач

Задача 2.1. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-прискорення, знайти формули згідно з якими перетворюються проекції ньютонівського (звичайного, тривимірного) прискорення $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку просторові та часовий компоненти 4-прискорення:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{du_1}{d\tau} = \frac{du_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \gamma = \\
 &= \gamma \cdot \frac{d}{dt} (\gamma \cdot v_x) = \gamma \cdot v_x \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \cdot \frac{dv_x}{dt} \\
 b_4 &= \frac{d}{dt} (ic\gamma) \frac{dt}{d\tau} = ic\gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{ic}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} = \frac{i}{c} \frac{(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}{(1-\beta^2)}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Можна врахувати також, що

$$\gamma \cdot \vec{v} \cdot \dot{\gamma} = \gamma^4 \cdot \beta \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{v}, \quad \frac{ic}{2} \frac{d}{dt} (\gamma^2) = ic\gamma \cdot \dot{\gamma},$$

і тоді 4-прискорення має такі компоненти:

$$b(\gamma^2 \cdot \dot{\vec{v}} + \gamma \vec{v} \cdot \dot{\gamma}, ic\gamma \cdot \dot{\gamma}). \tag{2.49}$$

Використовуючи (2.32) одержуємо формули перетворення компонентів звичайного (ньютонівського) прискорення при переході від однієї ІСВ до іншої:

$$\begin{aligned}
 a_x &= a'_x \left(\frac{\sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \right)^3, \\
 a_y &= \left[\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) a'_y - \frac{Vv'_y}{c^2} a'_x \right] \cdot \frac{1-B^2}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)^3}, \\
 a_z &= \left[\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right) a'_z - \frac{Vv'_z}{c^2} a'_x \right] \cdot \frac{1-B^2}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right)^3}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Слушно порівняти ці результати (2.50) з результатом та методом розв'язанням *Задачі 1.11* та *Задачі 1.13*.

Як бачимо в формули перетворення компонентів 3-вимірного прискорення (2.50) входить швидкість частинки. Але ми пам'ятаємо з класичної фізики, що прискорення виникає тільки тоді, коли швидкість змінюється. **Тобто, навіть тоді, коли в одній ІСВ 3-прискорення постійне, то у всіх інших СВ прискорення уже змінюється з часом. Таким чином, в СТВ рівноприскорений рух тіла в одній СВ уже не рівноприскорений у всіх інших ІСВ.**

Задача 2.2. Виразити компоненти 4-прискорення частинки через 3-вимірну швидкість та 3-вимірне прискорення. Впевнитися, що у супутній системі відліку $\sum_k b_k^2 = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2$.

Розв'язання. Згідно з означенням $b_k = \frac{du_k}{d\tau}$. Тому компоненти вектора 4-прискорення дорівнюють:

$$b_1 = \frac{du_1}{d\tau} = \frac{du_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \right),$$

$$b_2 = \frac{du_2}{d\tau} = \frac{du_2}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \right),$$

$$b_3 = \frac{du_3}{d\tau} = \frac{du_3}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right),$$

Враховуючи, що $u_4 = i \cdot c \cdot \gamma$ для четвертого (часового) компоненту 4-прискорення маємо:

$$b_4 = \frac{du_4}{d\tau} = \frac{du_4}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \gamma = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Таким чином, одержуємо вираз 4-прискорення частинки через 3-вимірну швидкість та 3-вимірне прискорення:

$$b_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right); \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right\}.$$

У супутній СВ $\beta = 0$, а тому $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = 0$.

Значить $b_k \left\{ \frac{d\vec{v}}{dt}; 0 \right\}$, а квадрат довжини вектора 4-прискорення частинки дорівнює $\sum_k b_k^2 = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2$.

Розглянемо ще один приклад на використання формул перетворення компонентів 4-векторів.

Задача 2.3. Введемо 4-вимірний хвильовий вектор. Це, згідно з означенням, сукупність 4 величин:

$$k_i \left(\frac{\omega}{c} \cdot n_x, \frac{\omega}{c} \cdot n_y, \frac{\omega}{c} \cdot n_z, i \cdot \frac{\omega}{c} \right), \quad (2.51)$$

де ω - частота електромагнітної хвилі; c – швидкість світла у вакуумі; n_x – це \cos кута між віссю OX (напрямок швидкості СВ K') та напрямком поширення хвилі,

$$n_x = \cos \alpha. \quad (2.52)$$

Знайти формули, за якими перетворюється частота електромагнітної хвилі та напрямок її поширення при переході від системи K' до СВ K . Тобто описати ефект Доплера та явище аберації світла.

Розв'язання. Як відомо, стан електромагнітної хвилі в довільній світовій точці $\mathcal{R}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, тобто фаза хвилі, не може залежати від вибору СВ. Стан фізичного явища не залежить від того рухаємося ми чи ні, стан електромагнітної хвилі – це об'єктивне явище (яке визначається фазою), і згідно з ПВ фаза повинна бути інваріантом. Фазу хвилі $\omega \cdot t - \vec{k}\vec{r}$ можна подати як скалярний добуток двох 4-векторів: 4-радіус-вектора і 4-хвильового вектора.

Завдяки введенню 4-хвильового вектора, який забезпечує інваріантність фази, його компоненти перетворюються по формулам (2.32):

$$k_1 = \frac{k'_1 - i \cdot B \cdot k'_4}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad k_2 = k'_2, \quad k_3 = k'_3, \quad k_4 = \Gamma \cdot (k'_4 + i \cdot B \cdot k'_1). \quad (2.53)$$

Згідно з означенням компонентів 4-хвильового вектора маємо:

$$\frac{\omega}{c} \cdot n_x = \Gamma \cdot \left(\frac{\omega'}{c} \cdot n_x' - i \cdot B \cdot \frac{\omega'}{c} \cdot i \right) = \frac{\omega' (n_x' + B)}{c \sqrt{1 - B^2}},$$

$$\frac{\omega}{c} \cdot n_y = \frac{\omega'}{c} \cdot n_y', \quad \frac{\omega}{c} \cdot n_z = \frac{\omega'}{c} \cdot n_z' \quad . \quad (2.54)$$

$$i \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{i \cdot \frac{\omega'}{c} + i \cdot B \frac{\omega'}{c} n_x'}{\sqrt{1 - B^2}} \Rightarrow \omega = \frac{\omega' \cdot (1 + B \cdot n_x')}{\sqrt{1 - B^2}}$$

Із останнього співвідношення системи рівнянь (2.54) одержуємо

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + B n_x'}$$

Оскільки експеримент і спостереження за світловими променями відбувається, як правило, в СВ K , то необхідно подати зв'язок між ω і ω' через величини, що вимірюються в СВ K (лабораторній СВ), а саме через n_x , а не через n_x' . Це значить, що в останній формулі штриховані величини слід поміняти на нештриховані, а перед швидкістю V поставити протилежний знак. І тоді одержуємо:

$$\omega = \frac{\omega' \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 - B \cdot n_x}, \quad (2.55)$$

де ω - частота електромагнітної хвилі, що вимірюється в системі K , ω' - власна частота хвилі, n_x - направляючий косинус променя світла в СВ K .

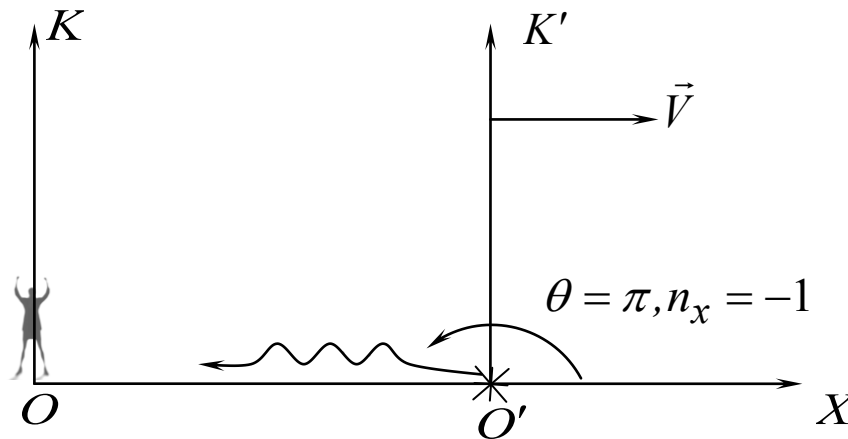
Формула (2.55) описує явище Доплера.

Розглянемо деякі окремі випадки, що описуються (2.55).

Задача 2.4. Нехай в СВ K знаходиться спостерігач, відносно якого СВ K' рухається зі швидкістю \vec{V} . Нехай джерело електромагнітних хвиль знаходиться в початку координат СВ K' , мал. 2.8, і власна частота дорівнює ω' . Знайти частоту електромагнітних хвиль в СВ K .

Розв'язання. Кут між напрямками поширення радіохвиль і віссю OX в такому випадку дорівнює n_x , іншими словами, n_x – це косинус кута між напрямком руху джерела світла та напрямком поширення світла в СВ K . В тому випадку, коли джерело ЕМХ віддаляється від спостерігача (приймача ЕМХ), то $n_x = -1$. І тоді, згідно (2.55), приходимо до висновку, що спостерігач в СВ K сприйматиме частоту, яка дорівнює:

$$\omega = \frac{\omega' \cdot \sqrt{1 - B^2}}{1 + B} = \omega' \cdot \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}}, \quad \omega < \omega', \quad \lambda > \lambda'. \quad (2.56)$$



Мал. 2.8. Умови спостереження повздовжнього ефекту Доплера (червоне зміщення спектральних ліній)

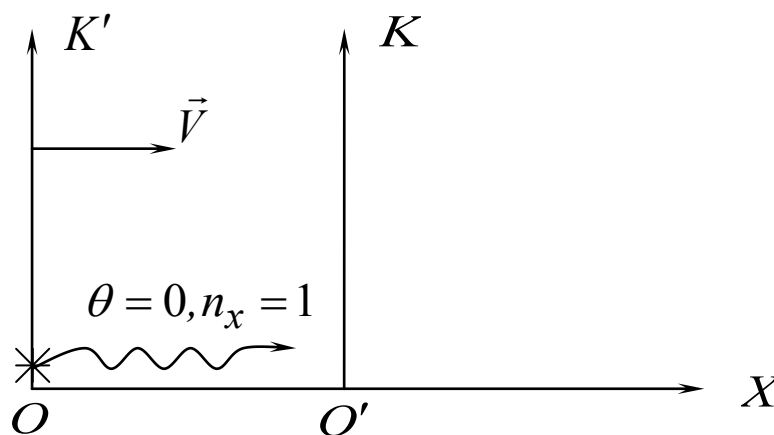
Таким чином, при віддаленні джерела ЕМХ від спостерігача частота ЕМХ, які реєструються в СВ K (СВ спостерігача), зменшується (а довжина ЕМХ збільшується). Явище Доплера в цьому випадку полягає в зменшенні частоти ЕМХ, які реєструються в СВ K .

Про такий ефект говорять як про червоне зміщення спектральних ліній.

Якщо система K' , наближається до системи K , тобто джерело хвиль рухається на спостерігача, (Мал. 2.9.) то:

$$n_x = 1, \quad \omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + B}{1 - B}}, \quad \omega > \omega', \quad \lambda < \lambda'. \quad (2.57)$$

Формула (2.57) описує збільшення частоти (зменшення довжини хвилі електромагнітного випромінювання). Про такий ефект говорять як про фіолетове зміщення спектральних ліній.



Мал. 2.9. Умови спостереження повздовжнього ефекту Доплера (фіолетове зміщення спектральних ліній)

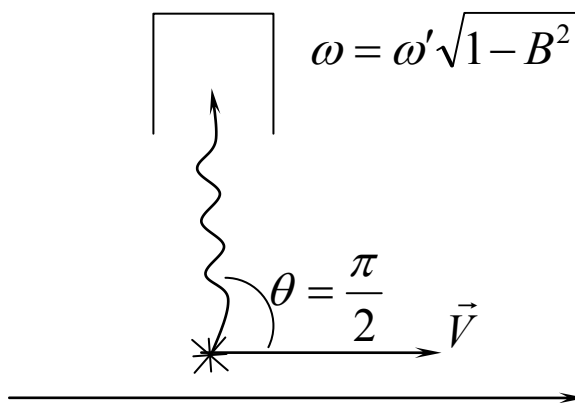
Формули (2.56) і (2.57), які описують повздовжній ефект Доплера, абсолютно точно підтверджуються експериментальними вимірюваннями.

Коли кут $\theta = \frac{\pi}{2}$, то ми із (2.55) одержуємо результат:

$$\omega = \omega' \cdot \sqrt{1 - B^2} \quad (2.58)$$

Формула (2.58) описує так званий *поперечний ефект Доплера*.

Нехай вздовж вісі OX рухаються атоми водню, що випромінюють серію Бальмера (мал. 2.10). Тоді при спостереженні цього випромінювання під кутом $\theta = \frac{\pi}{2}$ до напрямку руху атомів, частота електромагнітних хвиль буде визначатися (2.58).



Мал. 2.10. Умови спостереження поперечного ефекту Доплера

Дослідне вивчення поперечного ефекту Доплера Стілуелом в 1938 році повністю підтвердило формулу (2.58).

Слід зауважити, що це новий результат, якого не було до теорії відносності. Перетворення Лорентца та перетворення (2.32) і (2.55) передбачили новий ефект Доплера, про існування якого до теорії відносності навіть не підозрювали.

І це передбачення зумовлене і означенням компонентів 4-хвильового вектора і формулами його перетворення, тобто в кінцевому рахунку властивостями єдиного 4-вимірного простору-часу. А те, що експеримент підтверджує повністю теоретичні наслідки говорить про адекватність наших уявлень об'єктивній реальності. Іншими словами, безпосередньо підтверджується, що наш простір і час є псевдоевклідовим і що простір і час єдині.

Розглянемо тепер явище аберації світла. Перші три співвідношення системи (2.54) повністю описують явище аберації для світлових хвиль:

$$n_y = \frac{\omega'}{\omega} \cdot n'_y = n'_y \cdot \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B \cdot n'_x}, \quad n_z = n'_z \cdot \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B \cdot n'_x}, \quad (2.59)$$

$$n_x = \frac{(n'_x + B) \cdot \sqrt{1-B^2}}{\sqrt{1-B^2} \cdot (1+B \cdot n'_x)} = \frac{(n'_x + B)}{(1+B \cdot n'_x)}$$

Тобто, формули (2.59) описують зміну напрямку розповсюдження електромагнітних хвиль при переході від однієї системи відліку до іншої:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n_x}{n_y} = \frac{(n'_x + B) \cdot (1+B \cdot n'_x)}{(1+B \cdot n'_x) \cdot n'_y \cdot \sqrt{1-B^2}} = \frac{(n'_x + B)}{n'_y \cdot \sqrt{1-B^2}}, \quad (2.60)$$

де φ – кут аберації.

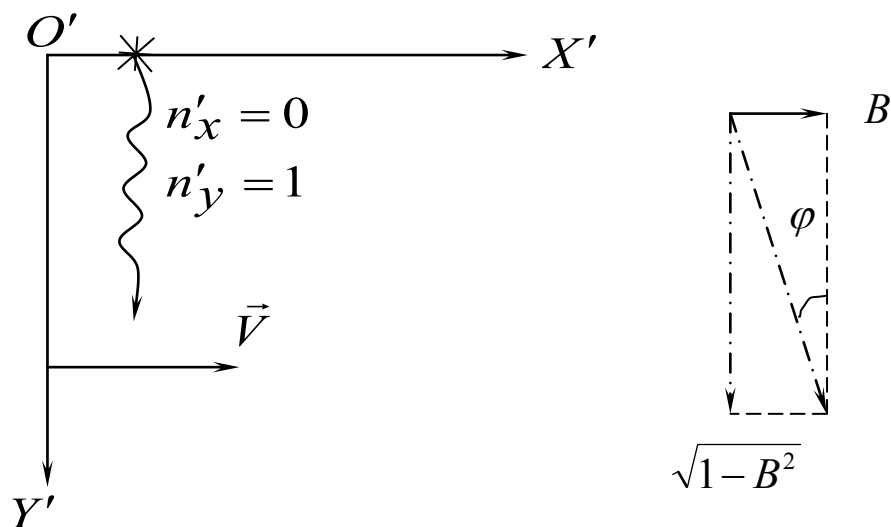
Розглянемо конкретну задачу.

Задача 2.5. Пояснити явище аберації зірок, використовуючи формули (2.59).

Розв'язання: СВ K' зв'яжемо з далекою зіркою, а СВ K - з Землею. Тоді напрямок поширенні світла в СВ K' визначається (див. Мал. 2.11):

$$n'_x = 0, \quad n'_y = 1.$$

Згідно з (2.59) в СВ K світло поширюється в напрямку, який визначається наступними значеннями величин n_x та n_y :



Мал. 2.11. Пояснення аберації світла

$$n_x = B, \quad n_y = \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B \cdot n'_x} = \sqrt{1-B^2}. \quad (2.61)$$

Тобто, тангенс кута аберації (див. Мал. 1.19 та мал. 2.11) дорівнює:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{\sqrt{1-B^2}},$$

де $B = \frac{V}{c}$, V – швидкість зірки відносно телескопу на Землі.

Оскільки $V \ll c$, то $B \approx 0$ і Брадлей одержав, що:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx B. \quad (2.62)$$

Задача 2.6. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-швидкості, обґрунтувати формули додавання швидкостей за Ейнштейном.

Розв'язання: Нехай в СВ K' 4-швидкість має такі компоненти:

$$u'_1 = \frac{v'_x}{\sqrt{1-\beta'^2}}, u'_2 = \frac{v'_y}{\sqrt{1-\beta'^2}}, u'_3 = \frac{v'_z}{\sqrt{1-\beta'^2}}, u'_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta'^2}}.$$

Тоді компоненти 4-швидкості СВ K , згідно з формулами перетворення компонентів 4-векторів, дорівнюють:

$$u_1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Gamma \left(\frac{v'_x}{\sqrt{1-\beta'^2}} - iB \frac{ic}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right),$$

$$u_2 = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = u'_2 = \frac{v'_y}{\sqrt{1-\beta'^2}},$$

$$u_3 = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = u'_3 = \frac{v'_z}{\sqrt{1-\beta'^2}},$$

$$u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Gamma \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta'^2}} + iB \frac{v'_x}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right).$$

Із перших трьох співвідношень отримуємо

$$v_x = \Gamma \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta'^2}} (v'_x + Bc), \quad v_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta'^2}} \cdot v'_y, \quad v_z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta'^2}} \cdot v'_z \quad (2.63)$$

А із формули перетворення для четвертого компоненту 4-швидкості обернуємо корисне співвідношення, яке часто зустрічається в кінематичних формулах теорії відносності

$$\frac{\sqrt{1-\beta'^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Gamma \left(1 + \frac{B \cdot v'_x}{c} \right).$$

Це співвідношення зв'язує абсолютні значення швидкості частинки в СВ K' , $\frac{v'}{c} = \beta'$, та в СВ K , β , а також швидкість руху самої СВ K' відносно СВ K :

$$\Gamma \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{1}{1 + \frac{V \cdot v'_x}{c}} \quad (2.64)$$

З урахуванням (2.64) із формул (2.63) одержуємо РФДШ за Ейнштейном:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}.$$

Таким чином, розглянуті приклади та теорія свідчать про те, що просторово-часові відношення та властивості тіл і процесів не залежать від систем відліку, а лише по різному проявляються в різних СВ. Взагалі, фізичні величини, які залежать від СВ і в цьому розумінні відносні, являються своєрідними «проекціями» більш загальних величин, котрі від СВ не залежать. Наприклад:

1. ΔS^2 - є інваріант, а Δt та l_{12} - величини відносні.

В абсолютності інтервалу і відносності окремо взятих Δl та Δt проявляється більш глибока сутність простору і часу, яка зв'язує їх в єдину форму існування матерії. Простір-час – це не допоміжний формальний прийом, це фізична реальність.

2. $\sum u_i^2 = -c^2$ - інваріант, а v_x, v_y, v_z - відносні величини;

3. $\omega \cdot t - \vec{k}\vec{r} = inv$, а ω, n_x, n_y, n_z в різних СВ величини різні, відносні;

4. $\sum p_i^2 = -m_0^2 c^2$, тобто, квадрат «довжини» 4-імпульсу являється інваріантом, а значення проекцій релятивістського імпульсу та енергія в різних СВ мають різні значення, відносні.

Простір і час – форми існування матерії. Форма предмету не являється чим то зовнішнім по відношенню до нього, вона належить йому і визначається ним самим і його рухом. Тому форми існування матеріального світу – це загальна його структура, яка визначається його коріними властивостями, а не

щось таке в що світ начебто вкладений. Ось тому властивості простору і часу впливають із властивостей матерії та особливостей її руху, а не привносяться зовні.

Завдання для самоконтролю

Завдання 1. Показати, що рівнобічні калібровочні гіперболи $(ct)^2 - x^2 = 1$ та $x^2 - (ct)^2 = 1$ відсікають на просторових і часових осях СВ K і СВ K' одиничні відрізки.

Завдання 2. Проілюструвати на діаграмі Мінковського спосіб обґрунтування перетворень Лорентца за допомогою методу k - коефіцієнту.

Завдання 3. Проілюструвати на діаграмі Мінковського обґрунтування лорентцевого скорочення методом k - коефіцієнту.

Завдання 4. Дати геометричну інтерпретацію сповільнення ходу рухомого годинника за допомогою діаграми Мінковського.

Завдання 5. Показати, що припущення щодо існування надсвітлових сигналів еквівалентно можливості зміни в часі послідовності 2-х подій шляхом вибору СВ.

Завдання 6. У деякий момент часу на Сонці відбувся спалах, а через $\Delta t = 5xв$ на Землі відбувся землетрус.

1. Яким – часоподібним чи просторовоподібним - інтервалом розділені ці події?
2. Чи можна розглядати землетрус на Землі як наслідок спалаху на Сонці?
3. Чи існують такі системи відліку, в яких вказані події відбуваються в оберненому порядку?

Завдання 7. Дві події розділені просторовоподібним інтервалом. Довести, що: а) існує система відліку, в якій вони одночасні; б) у кожній системі відліку вони не відбуваються в одній і тій самій точці.

Завдання 8. Дві події розділені часоподібним інтервалом. Довести, що: а) існує система відліку, в якій вони відбуваються в одній і тій самій точці; б) у жодній системі відліку вони не є одночасними.

Контрольні запитання та завдання

1. Що називається квадратом інтервалу між двома нескінченно близькими подіями?
2. Що являють собою точки 4-вимірною багатовиду СТВ?
3. У чому полягає сутність і зміст спеціальної теорії відносності?

4. Показати, що квадрат інтервалу між двома нескінченно близькими подіями є інваріантом.

5. Показати, що рух однієї системи відліку відносно іншої в 4-вимірному просторі Мінковського можна подати як поворот системи координат у цьому 4-вимірному просторі.

6. Використовуючи відповідь на питання № 5 та інваріантність квадрату інтервалу обґрунтувати перетворення Лорентца.

7. Знайти орієнтацію часової та просторової осей системи відліку K' відносно осей СВ K на діаграмі Мінковського.

8. Пояснити на діаграмі Мінковського відносність одночасності довільних двох подій.

9. Пояснити процедуру калібровки (відкладання одиничних відрізків) просторових та часових осей СВ K' і СВ K .

10. Дати геометричну інтерпретацію лорентцевого скорочення за допомогою діаграми Мінковського.

11. Пояснити метод k - коефіцієнту на діаграмі Мінковського.

12. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-прискорення знайти формули згідно з якими перетворюються проекції ньютонівського прискорення $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

13. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-швидкості знайти релятивістські формули перетворення швидкостей (РФПШ).

14. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-хвильового вектора описати ефект Доплера.

15. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-хвильового вектора описати явище аберації світла.

16. Використовуючи формули перетворення компонентів 4-хвильового вектора знайти зміну частоти та кута відбивання світла при його віддзеркаленні від рухомої поверхні.

17. Описати властивості часоподібних інтервалів.

18. При яких умовах послідовність в часі двох подій носить абсолютний характер?

19. При яких умовах послідовність в часі двох подій може бути зворотною?

20. Показати, що для довільних двох подій із абсолютно віддалених областей простору Мінковського поняття пізніше, раніше, одночасно носять відносний характер.

21. В чому полягає (проявляється) більш глибока сутність простору і часу?

22. Як Ви розумієте вислів: «єдність простору і часу»?

Рекомендована література до розділу 2

Основна

1. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
2. Беккер Р. Электронная теория / Р. Беккер. – Л. : ОНТИ, 1936. – 416 с.
3. Левич В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В. Г. Левич. – Т. 1. – М. : Наука, 1969. – 912 с.

Для поглибленого вивчення теми

1. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации : [Современный анализ проблемы] / А. А. Логунов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
2. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л. И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 437 с.
3. Пинский А.А. Релятивистские идеи в преподавании физики : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Аркадий Аронович Пинский ; НИИ содержания и методов обучения АПН СССР. – М., 1974. – 349 с.
4. Пинский А.А. Задачи по физике. [Учебное пособие] / А.А. Пинский. – М. : Наука, 1978. – 288 с. : ил.
5. Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности. – М. : Атомиздат, 1973. – 332 с.
6. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. 4. – М. : Наука, 1967. – 600 с.

Розділ 3. Релятивістська динаміка

Мета вивчення розділу: обґрунтування 4-вимірного рівняння руху точкової маси, обґрунтування релятивістського рівняння руху точкової маси й ознайомлення з його особливостями; обґрунтування та пояснення закону збереження 4-вимірного вектора енергії-імпульсу, виразу кінетичної енергії, повної енергії частинки; аналіз висновків, що постають із цих законів; засвоєння методу аналізу процесів розпаду, взаємодії та перетворення частинок, підґрунтям якого є закон збереження енергії-імпульсу.

Ключові слова: принцип відносності, принцип відповідності, сила Мінковського, 4-вимірний вектор енергії-імпульсу, релятивістське рівняння руху, закон збереження енергії-імпульсу, залежність маси від швидкості, уявні та від'ємні маси, тахіони, анігіляція частинок, зв'язок енергії та маси.

Теоретична частина

3.1. Чотиривимірні тензори та коваріантна форма запису фізичних законів. Чотиривимірне рівняння руху точкової маси, чотиривимірна сила Мінковського

Згідно з принципом відносності основні закони фізики повинні мати коваріантну форму. Це означає, що математична форма законів фізики при переході від однієї системи відліку до іншої не повинна змінюватись при перетвореннях Лорентца.

Здавалося б, що різноманітність фізичних законів та велика кількість фізичних величин, за допомогою яких формулюються ці закони, виключають існування загального підходу в поданні релятивістськи-коваріантних формулювань основних законів.

Однак виявляється, що найбільш загальним методом запису рівнянь в коваріантній формі є метод Мінковського. Тобто, основні рівняння фізики повинні бути записані в 4-вимірній формі. Ліва і права частини певного рівняння повинні бути або скалярами або 4-вимірними векторами, або ж і зліва і справа повинен бути 4-вимірний тензор довільного, але однакового, рангу.

Запис рівнянь у такій формі робить коваріантність їх майже очевидною, оскільки тоді ліва і права частина рівнянь будуть перетворюватися по одному і тому ж закону при переході від СВ K' до СВ K .

Згадаємо, що тензор нульового рангу – це скалярна величина, тензор першого рангу – тривимірний вектор (у тривимірному просторі), або чотиривимірний вектор у просторі-часі Мінковського

Іншими словами: згідно з принципом відносності основні закони фізики повинні бути записані в тензорній формі.

Перший закон Ньютона – закон інерції є коваріантним відносно перетворень Лорентца. Дійсно, якщо в деякій СВ частинка рухається без прискорення, то і в інших СВ вона буде рухатися рівномірно і прямолінійно.

Інертні властивості частинки як в класичній так і в релятивістській динаміці характеризуються інваріантною масою спокою m_0 .

Другий закон Ньютона в класичній формі:

$$m_0 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (3.1)$$

коваріантний відносно перетворень Галілея (див. Розділ 1), але не коваріантний відносно перетворень Лорентца.

Рівняння (3.1) необхідно записати таким чином, щоб воно було коваріантним відносно ПЛ, тобто рівняння руху точкової маси в 4-вимірній формі повинно мати вигляд:

$$m_0 \cdot \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i, \quad (3.2)$$

де u_i - 4-вимірний швидкість, \mathfrak{F}_i - 4-вимірний сила, що називається силою Мінковського; а індекс i пробігає значення 1, 2, 3, 4; $d\tau$ - нескінченно малий інтервал власного часу.

Означення цієї сили Мінковського і вигляд рівняння повинні бути такими, щоб мав місце принцип відповідності, а саме при $\beta \ll 1$ (при класичних швидкостях) 4 – вимірне рівняння руху повинно переходити в другий закон Ньютона (3.1). Більш проста фізична теорія є наслідком більш загальної теорії. Так, класична механіка випливає із релятивістської механіки при $\beta \ll 1$. Аналогічно, класична механіка випливає із квантової механіки, як окремий випадок, коли у відповідних рівняннях квантової механіки можна знехтувати величиною постійної Планка \hbar ($\hbar \rightarrow 0$).

Щоб порівняти рівняння (3.2) з рівнянням (3.1) запишемо чотири компоненти цього рівняння (3.2) через величини, що вимірюються в СВ K :

$$\begin{aligned} m_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \mathfrak{F}_1 \sqrt{1-\beta^2}, \\ m_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \mathfrak{F}_2 \sqrt{1-\beta^2}, \\ m_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \mathfrak{F}_3 \sqrt{1-\beta^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$m_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \mathfrak{S}_4 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Якщо визначити просторові компоненти сили Мінковського $\mathfrak{S}_{1,2,3}$ так, щоб вони були зв'язані з компонентами звичайної 3-вимірної сили $F_{x,y,z}$ співвідношеннями:

$$F_{x,y,z} = \mathfrak{S}_{1,2,3} \cdot \sqrt{1-\beta^2}, \quad (3.4)$$

то три перші рівняння системи (3.3) набувають вигляду:

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \vec{F}. \quad (3.5)$$

Тобто, спираючись на принцип відповідності, перші три рівняння (3.3) можна перетворити в так зване тривимірне релятивістське рівняння руху (3.5), де \vec{F} - звичайна тривимірна сила, компоненти якої F_x , F_y , F_z зв'язні з першими трьома компонентами 4-вимірної сили співвідношенням (3.4).

3.2. Формули перетворення компонентів тривимірної сили. Зв'язок енергії та маси

Таким чином, щоб визначити формули, згідно з якими перетворюються компоненти звичайної (інколи кажуть – ньютонівської сили) сили, F_x , F_y , F_z , треба використати формули перетворення компонентів 4 – вимірної сили і врахувати зв'язок між звичайною силою та першими трьома компонентами сили Мінковського (3.4).

Скориставшись формулами перетворення компонентів 4-векторів (2.32) знаходимо, що компоненти сили при переході від СВ K' до СВ K перетворюються згідно з формулами:

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{v}')}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad F_y = \frac{F'_y \sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad F_z = \frac{F'_z \sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad \vec{F} \vec{v} = \frac{(\vec{F}' \cdot \vec{v}') + VF'_x}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}. \quad (3.6)$$

Для того, щоб знайти фізичний зміст четвертого компонента сили Мінковського, 4-вимірне рівняння руху (3.2) домножимо на u_i і просумуємо від одиниці до чотирьох:

$$\sum u_i \frac{du_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^4 \mathfrak{S}_i u_i = 0,$$

де u_i -4-вимірна швидкість.

Оскільки квадрат «довжини» 4-вимірної швидкості є інваріантним (тобто, $\sum_{i=1}^4 u_i = -c^2$), то ліва частина дорівнює нулю, тому і права частина дорівнює нулю. Тому маємо:

$$\frac{v_x F_x}{1-\beta^2} + \frac{v_y F_y}{1-\beta^2} + \frac{v_z F_z}{1-\beta^2} + \frac{\mathfrak{S}_4 ic}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0. \quad (3.7)$$

Із формули (3.7) отримуємо вираз для четвертого компонента сили Мінковського:

$$\mathfrak{S}_4 = -\frac{(\vec{F}\vec{v})}{ic(1-\beta^2)}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{i}{c} \frac{(\vec{F}\vec{v})}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.8)$$

Розглянемо тепер більш детально четверте рівняння 4-вимірного рівняння руху (3.2):

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \mathfrak{S}_4 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{i}{c} (\vec{F}\vec{v}),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = (\vec{F}\vec{v}) \quad (3.9)$$

Права частина (3.9), $(\vec{F}\vec{v})$, це потужність – робота, яка виконується силою \vec{F} в одиницю часу.

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії, робота будь-якої сили йде на збільшення кінетичної енергії $\frac{d}{dt} T$. Тобто, (3.9) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{dT}{dt}. \quad (3.9a)$$

Проінтегруємо рівняння (3.9a) і одержимо:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + const. \quad (3.10)$$

Константа інтегрування знаходиться, якщо використаємо принцип відповідності. А саме, при $\beta \ll 1$ вираз для кінетичної енергії визначається класичною формулою (в даному випадку принцип відповідності можна розуміти і як граничні умови – при $v \rightarrow 0$, $T \approx 0$):

$$\frac{m_0 v^2}{2} = T.$$

Розкладемо співмножник $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ в степеневий ряд по малому параметру β^2 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \quad (3.11)$$

Обмежимося в (3.11) першими двома доданками і після підстановки в (3.10) знаходимо значення константи інтегрування:

$$\text{const} = -m_0 c^2.$$

І тому, релятивістський, точний вираз для кінетичної енергії тіла, що має масу спокою m_0 та швидкість υ , такий:

$$T = m_0 c^2 \cdot (\gamma - 1), \quad (3.12)$$

де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Повна енергія тіла в релятивістській фізиці дорівнює сумі кінетичної енергії і енергії спокою $E_0 = m_0 c^2$:

$$E = m_0 c^2 + T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) визначає зв'язок між енергією та масою тіла.

Таким чином, ґрунтуючись на принципі відносності та 4-вимірного формалізму, ми одержали релятивістське рівняння руху (3.5), зв'язок між енергією тіла, його масою спокою та швидкістю його (3.13), визначили точний вираз для кінетичної енергії (3.12) та формули перетворення компонентів звичайної сили (3.6).

Вираз для кінетичної енергії (3.12) та повної енергії (3.13) можна обґрунтувати і іншим, можливо більш простим чи дохідливим шляхом. При цьому вихідним положенням є теорема про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \vec{\upsilon}.$$

Підставимо рівняння руху (3.14) та (3.16) в попередній вираз, і після перетворень одержимо:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Після інтегрування і використання початкових умов ($T = 0$ при $\upsilon = 0$) одержуємо:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2.$$

3.3. Тривимірне релятивістське рівняння руху та його особливості. Приклади. Релятивістська маса.

Релятивістське 3-вимірне рівняння руху (3.5) можна записати у вигляді:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (3.14)$$

де \vec{p} , згідно з означенням є релятивістський імпульс:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.15)$$

Але формула (3.14) тільки зовнішньо нагадує класичний другий закон Ньютона (3.1). По змісту другий закон Ньютона в релятивістській формі (рівняння руху (3.5), (3.14)) суттєво відрізняється від (3.1). **Одна з особливостей (3.5) полягає в тому, що вектор сили, взагалі кажучи, не співпадає з вектором прискорення.**

Дійсно, розпишемо більш детально релятивістське рівняння руху (3.5):

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = m_0 \left[\frac{\dot{\vec{v}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\vec{v} \frac{v \cdot \dot{v}}{c^2}}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (3.16)$$

оскільки $\left[(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \right]' = (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{2}{c^2} v \cdot \dot{v} \right)$.

Якщо (3.16) подати у вигляді $\vec{F} = A \cdot \dot{\vec{v}} + D \cdot \vec{v}$, то очевидно, що перший доданок (3.16) пропорційний вектору прискорення $\dot{\vec{v}}$, а другий – вектору швидкості \vec{v} .

Тобто, в загальному випадку напрям сили, яка діє на частинку, не співпадає ні з напрямом прискорення, ні з напрямом швидкості частинки.

Це перша і основна особливість релятивістського рівняння руху.

І тільки в двох випадках, із безлічі інших, сила співпадає за напрямом з прискоренням. А саме:

а) коли сила перпендикулярна існуючій швидкості частинки $\vec{F} \perp \vec{v}$ (при цьому сила не виконує роботу), тоді $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = 0$ і рівняння руху (3.16) набуває вигляду:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \dot{\vec{v}}. \quad (3.17)$$

Наприклад, така ситуація реалізується, коли заряджена частинка в магнітному полі рухається по колу (діє тільки сила Лорентца), або коли супутник рухається по коловій орбіті навколо Землі. Очевидно, що швидкість залишеться постійною за величиною, тому похідна від швидкості дорівнює нулю.

б) коли сила за напрямом співпадає з напрямом швидкості ($\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}$ або $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{v}$). У цьому випадку для спрощення другого доданку (3.16) скористаємося співвідношенням $v \cdot \dot{v} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$. В результаті отримуємо:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \dot{\vec{v}} \quad (3.17a)$$

Розглянемо конкретний приклад.

Приклад 3.1. Нехай на частинку з масою спокою m_0 діє постійна сила \vec{F} . В початковий момент часу частинка знаходилася в спокої. Знайти закон руху частинки.

Розв'язання. Для цього, як відомо, слід розв'язати релятивістське рівняння руху:

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

В нашому випадку напрямок сили весь час буде співпадати з напрямком швидкості. Тому попереднє рівняння можна записати в скалярній формі, і після інтегрування одержуємо:

$$\frac{F}{m_0} t = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} + C. \quad (3.18)$$

Постійну інтегрування знаходимо із початкових умов:

$$t = 0, v = 0, \Rightarrow C = 0.$$

Знайдемо із формули (3.18) швидкість частинки в залежності від часу:

$$v(t) = \frac{\frac{F}{m_0} t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c} \right)^2}}. \quad (3.19)$$

Проаналізуємо розв'язок (3.19)

Якщо $t \ll \frac{m_0 c}{F}$, тоді $v(t) = \frac{F}{m_0} t = a_{кл} \cdot t$. Тобто, закон руху на малих

проміжках часу на початку руху, $t \ll \frac{m_0 c}{F}$, співпадає з законом руху класичної механіки (принцип відповідності).

Для подальшого аналізу розв'язку (3.19) при $t \gg \frac{m_0 c}{F}$ подамо його в такому вигляді:

$$v^2 = \frac{\left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2 c^2}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} = \frac{c^2}{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}.$$

Тоді очевидно, що при $t \gg \frac{m_0 c}{F}$ для швидкості руху частинки маємо:

$$v^2 \approx c^2 \left(1 - \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2\right) \rightarrow c^2.$$

Тобто, яка не була б велика сила F , що діє на масу m_0 , швидкість частинки ніколи не досягне значення швидкості світла. Швидкість частинки асимптотично наближається до c , див. Мал. 3.1.

Для нашого випадку релятивістський множник $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{Ft}{m_0 c}$,

тому повна енергія частинки дорівнює:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = Ftc = Fx,$$

де x - віддаль, яку пройшла частинка за час t .

А релятивістський імпульс можна виразити такою формулою:

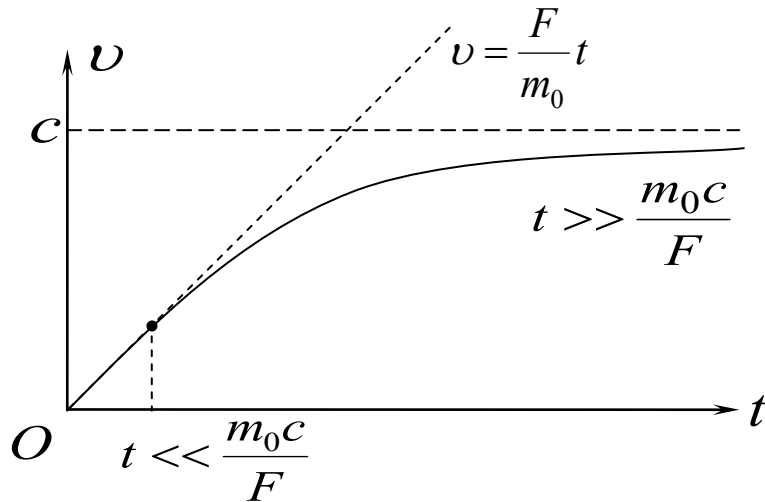
$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = Ft \cdot \frac{v}{c}$$

Графік закону руху (3.19) зображено на мал. 3.1.

Віддаль, яку пройшла частинка за час t дорівнює:

$$x = \int v \cdot dt = \frac{c^2}{a} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right\}.$$

Неважно впевнитися, що при $t \ll \frac{m_0 c}{F}$ (необхідно скористатися розкладанням в ряд $(1 \pm x)^{1/2} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \dots$) віддаль визначається класичною формулою $x = \frac{at^2}{2}$.



Мал. 3.1. Залежність швидкості руху частинки від часу при дії постійної сили

Але особливу увагу слід приділити питанню про так звану «залежність маси від швидкості». В деяких посібниках коефіцієнт $m_{\text{рел}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ називають «залежність маси від швидкості» $m(v)$.

Спокуса ввести поняття «залежність маси від швидкості» виникає при аналізі виразу для повної енергії частинки $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, що рухається з швидкістю v , та при порівнянні класичного $\vec{F} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$ і релятивістського

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \text{ рівнянь руху.}$$

А) Якщо розуміти під $m(v)$ коефіцієнт, що стоїть перед прискоренням в релятивістському рівнянні руху, то в загальному випадку одержується тензор мас, і таким чином не існує однозначної «залежності маси від швидкості» $m(v)$ [75, с. 340].

Дійсно, запишемо релятивістське рівняння руху в такому вигляді:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{E\vec{v}}{c^2}\right) = \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{dE}{dt} + \frac{E}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F}\vec{v}) + m_0\gamma \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Звідси одержуємо:

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F}\vec{v}) \right].$$

Як бачимо цей коефіцієнт (що стоїть перед прискоренням $\frac{d\vec{v}}{dt}$) тільки в двох випадках із безлічі можливих набуває простого вигляду: $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

коли $\vec{F} \perp \vec{v}$; і $m(v) = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}$ при умові $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}$.

Так що ж тоді вважати за залежність маси від швидкості?!

Б) Необхідно згодитися з тим, що це поняття, «залежність маси від швидкості», внутрішньо суперечливе і навіть, якщо розуміти його буквально, невірне [75, с. 338]. Дійсно, виходить, що рух СВ призводить до зміни властивостей частинки, так начебто змінюється структура її, причому так, що маса зростає згідно залежності $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

По суті, «релятивістська маса» $m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ в експериментах ніколи не визначається і не спостерігається. Для ототожнення частинок треба знати їх масу спокою m_0 , а вона знаходиться із закону збереження енергії-імпульсу $m_0^2 \cdot c^2 = E^2/c^2 - p^2$ (див. нижче).

В) Твердження, що енергія частинки $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \cdot m_0 c^2$, в СВ відносно якої вона рухається з швидкістю v , зростає внаслідок «залежності маси від швидкості» $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ являється не коректним, оскільки всі види енергії (якщо у власній СВ імпульс тіла або фізичної системи дорівнює нулю) перетворюються таким чином при переході від однієї СВ до іншої. Зростання енергії із збільшенням швидкості – це наслідок особливих властивостей 4 – вимірного простору-часу: релятивістський множник $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ має

відношення до властивостей простору-часу, а не до внутрішньої будови частинок [75].

Інколи говорять, що формула $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ знайшла підтвердження в

роботі прискорювачів елементарних частинок. При цьому мають на увазі роботу циклічних прискорювачів елементарних частинок. Тому давайте проаналізуємо принцип роботи таких циклічних прискорювачів. Зміна релятивістського імпульсу зарядженої частинки, що рухається в циклічному прискорювачі, зумовлена дією сили Лорентца:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{v} \cdot \vec{B}],$$

або в скалярній формі (див. (3.16) та наслідок а)):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = qvB$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dv}{dt} = qBv.$$

Оскільки прискорення $\frac{dv}{dt} = a = \omega^2 \cdot r$, а швидкість $v = \omega \cdot r$, то

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} r \omega^2 = qB \omega \cdot r.$$

Тобто, частота обертання ЗЧ дорівнює:

$$\omega = \frac{qB}{m_0} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Радіус орбіти ЗЧ в магнітному полі, $r = \frac{v}{\omega} = \frac{p}{qB}$, являється мірою

релятивістського імпульсу, а зменшення частоти з ростом швидкості начебто зумовлене зростанням маси частинки.

Але простіше і точніше говорити, що в усіх дослідах з релятивістськими частинками підтверджується релятивістське рівняння руху.

Г) При прямолінійному русі частинки з швидкістю \vec{v} енергія її в будь-який момент часу визначається

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

а рівняння руху в цьому випадку, згідно формули (3.17а):

$$\vec{F} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt},$$

а не $\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \dot{\vec{v}}$.

Тобто, коефіцієнт, що стоїть перед прискоренням $\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}$ не дорівнює «релятивістській масі» $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Коли ж частинка рухається по колу, наприклад в однорідному магнітному полі, то рівняння руху має вигляд $\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{v}}{dt}$, але енергія ЗЧ залишається незмінною.

Тому при вивченні релятивістської динаміки та закону взаємозв'язку маси і енергії не має потреби зосереджувати увагу на понятті «залежності маси від швидкості».

3.4. Чотиривимірний вектор енергії-імпульсу. Формули перетворення його компонентів. Закон збереження чотиривимірного імпульсу. Приклади

Компоненти 4-вектора енергії-імпульсу визначаються так:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p_2 &= \gamma \cdot m_0 \cdot v_y, \\ p_3 &= \gamma \cdot m_0 \cdot v_z, \\ p_4 &= \frac{i}{c} E. \end{aligned}$$

Перші три компоненти утворюють 3-вимірний релятивістський імпульс:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.24a)$$

Четвертий, часовий компонент пов'язаний з енергією. Тоді знаючи компоненти 4-вимірного імпульсу, можемо знайти квадрат його «довжини»:

$$\sum_i p_i^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (3.24)$$

Це співвідношення називають законом збереження енергії – імпульсу.

Виразимо релятивістський імпульс частинки через кінетичну енергію. Із системи алгебраїчних рівнянь

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \quad E = m_0 c^2 + T$$

знаходимо:

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}.$$

При $T \ll m_0 c^2$ останнє співвідношення переходить в класичну формулу $p = \sqrt{2m_0 T}$, а при $T \gg m_0 c^2$ релятивістський імпульс дорівнює $p = \frac{T}{c}$.

Ми бачимо, що квадрат «довжини» 4-імпульсу в СВ K дорівнює константі. Незавжди впевнитися, що і в будь-якій іншій СВ квадрат 4-імпульсу є інваріант. Тобто, компоненти 3 - вимірного релятивістського імпульсу при переході від СВ K до СВ K' змінюються; величина енергії також буде інша, але квадрат «довжини» 4-вимірного імпульсу залишиться незмінним.

Розглянемо приклад:

Приклад 3.2. Нехай в системі K' компоненти 4-імпульсу дорівнюють:

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0, \quad p'_4 = \frac{i}{c} E'.$$

Знайти 4- імпульс частинки в СВ K .

Розв'язання. Тобто, в СВ K' тіло знаходиться в спокої. З точки зору СВ K , відносно якої тіло рухається з швидкістю \vec{V} , компоненти 4-імпульсу за формулами перетворення (2.9) дорівнюють:

$$p_1 = -iB\Gamma p'_4 = \Gamma \frac{V}{c^2} E', \quad p_2 = p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{iE}{c} = \Gamma \frac{iE'}{c}.$$

Або в 3-вимірному формулюванні:

$$\vec{p} = \frac{\vec{V} \cdot \frac{E'}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad (3.25)$$

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad (3.26)$$

де E' – енергія фізичної системи, яка нерухома відносно системи K' . Порівнюючи (3.25) з виразом для релятивістського імпульсу (3.24а) ми приходимо до висновку: **будь-якій замкненій системі, що характеризується енергією спокою E' , слід приписати і інертну масу (масу спокою) $m_0 = \frac{E'}{c^2}$.**

Тобто, $E_0 = m_0 c^2$. Нагадаємо, що під енергією спокою розуміють повну енергію в тій СВ, в якій результуючий імпульс дорівнює нулеві. По-

друге, будь-який вид енергії спокою (теплова, ядерна, електромагнітна, механічна) при переході від СВ K' до СВ K збільшується в Γ раз: $E = \frac{E'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, див. (3.26).

Наведемо основні формули релятивістської динаміки:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{V} c^2}{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot c^2} = \frac{E \cdot \vec{V}}{c^2},$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{при умові, що у власній системі}$$

відліку імпульс дорівнює нулю),

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2,$$

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}. \quad (3.27)$$

Якщо з рухом фізичної системи не зв'язувати СВ K' , то швидкість її в СВ K будемо позначати \vec{v} . Взагалі кажучи, СТВ не заперечує існування фізичних об'єктів, що можуть рухатися з швидкістю світла.

Дійсно, якщо припустити, що швидкість деякого об'єкту $v = c$, тоді із формули $p = \frac{E \cdot v}{c^2}$ випливає, що імпульс таких об'єктів (частинок) дорівнює:

$$p = \frac{E}{c}.$$

Але, з огляду на формулу $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, це можливо тільки для тих об'єктів, маса спокою яких дорівнює нулю. Бо, якщо $m_0 \neq 0$, то при $\beta \rightarrow 1$ $E \rightarrow \infty$, що фізично не має змісту: щоб частинку розігнати до швидкості світла необхідна нескінчена кількість енергії.

Формулу $p = \frac{E}{c}$ можна отримати також і із закону збереження енергії-імпульсу (3.24), якщо $m_0 = 0$:

$$\frac{E}{c} = \pm \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3.28)$$

Частинки, для яких $m_0 = 0$, та $p = \frac{E}{c}$ називаються

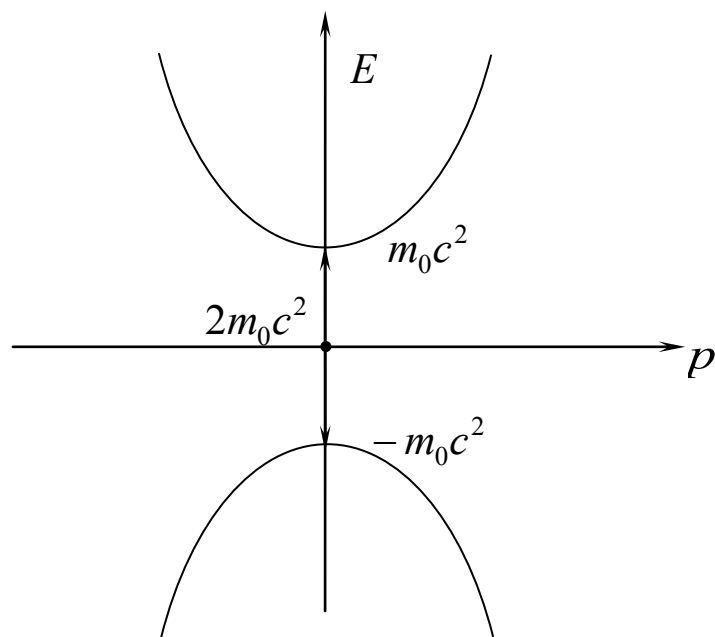
ультрарелятивістськими.

Зв'язок імпульсу і енергії при будь-яких швидкостях визначається рівністю (3.28). Таким чином, повна енергія тіла визначається двома доданками: імпульсом та масою спокою. Тому можна сказати, що імпульс являється більш важливою фізичною величиною, ніж швидкість. Імпульс більш повно характеризує систему тіл, ніж швидкість.

Позитивні, від'ємні і уявні маси. Оскільки власна маса m_0 згідно означення дорівнює «довжині» 4-імпульсу $m_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p^2}$, то ця формула не заперечує існування позитивних, негативних (від'ємних), та уявних мас.

Дійсно, розв'язок (3.28) можна подати у вигляді графіка, який зображений на мал. 3.2.

Тобто, для інтерпретації розв'язку рівняння (3.28) необхідно припустити існування від'ємних мас.



Мал. 3.2. Інтерпретація розв'язку (3.28) П. Діраком

Сукупність частинок з від'ємними масами і сукупність частинок з додатними масами відокремлені одні від одних забороненою зоною (при $p = 0$) шириною $2m_0c^2$. $E(p = 0) = \pm m_0c^2$.

Згідно з інтерпретацією П.Дірака [22], відсутність від'ємної маси буде проявлятися як наявність такої самої за величиною позитивної маси. Якщо мова йде про заряджені частинки (ЗЧ), то відсутність, наприклад електрона, буде проявлятися як присутність ЗЧ з позитивним зарядом величиною $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл і тоді $2m_0c^2 = 1,024 \text{ MeV}$.

Таким чином, теорія відносності не заперечує існування частинок з від'ємними масами.

Характерними ознаками таких гіпотетичних частинок є наступне:

1. Із збільшенням імпульсу частинки, зменшується енергія.
2. Оскільки $\vec{p} = -m_0\vec{v}$, то швидкість таких частинок направлена протилежно вектору імпульсу.

Існує й інша інтерпретація сутті від'ємних мас, яку запропоновано Зісманом Г.А. [22].

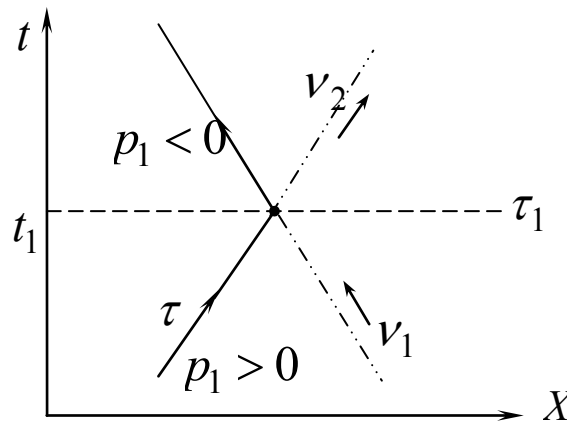
Згідно з означенням компонент 4-імпульсу маємо:

$$p_1 = m_0 \frac{dx_1}{d\tau} \quad (3.29)$$

$$p_t = p_4 = \frac{E}{c} = m_0c \frac{dt}{d\tau} \quad (3.30)$$

$$E = m_0c^2 \frac{dt}{d\tau}$$

Тому вектор імпульсу p_1 може змінювати знак тільки за рахунок зміни знаку $\frac{dx_1}{d\tau}$, оскільки m_0 інваріант.



Мал. 3.3а. Світова лінія електрону. В момент $t = t_1$ (момент власного часу τ_1) імпульс $p_1 = p_x$ змінює знак

Це означає, що з ростом власного часу $d\tau$ елементарне переміщення dx зменшується. Напрямок власного часу електрона τ на мал. 3.3а. показано на його світовій лінії стрілкою.

Тоді, до моменту часу $\tau = \tau_1$ електрон рухається вздовж вісі OX , так що при $\tau < \tau_1$ $p_1 = p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau} > 0$, тобто $\frac{dx}{d\tau} > 0$, а після цього моменту часу електрон починає рухатися в зворотньому напрямку, так що з ростом власного часу τ координата зменшується:

$$\text{при } \tau > \tau_1 \quad p_1 = p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau} < 0, \text{ тобто } \frac{dx}{d\tau} < 0.$$

Формально зміна знаку $p_1 = p_x$ може бути зумовлена як зміною знаку маси частинки, так і $\frac{dx}{d\tau}$. Така зміна стану електрону може відбутися, наприклад, внаслідок зіткнення з фотоном. Падаючий (частота ν_1) та розсіяний фотон на мал. 3.3а. показані пунктирними лініями.

Аналогічно, від'ємне значення енергії можна пояснити не тільки існуванням від'ємних мас, але й тим, що $\frac{dt}{d\tau} < 0$.

$\frac{dt}{d\tau} < 0$ означає, що з збільшенням власного часу $d\tau$, лабораторний час частинки $dt < 0$ зменшується. Тобто, це слід розуміти так, що частинка в лабораторній системі відліку рухається в зворотньому напрямку (обернено в часі). При такій трактовці зміна знаку і p_1 і p_4 пояснюється однаково [22, С. 464-469].

На діаграмі Мінковського – Дірака це пояснюється так.

Напрямок зростання власного часу τ рухомих частинок на малюнках 3.3. – 3.7. показано на їх світових траєкторіях стрілками.

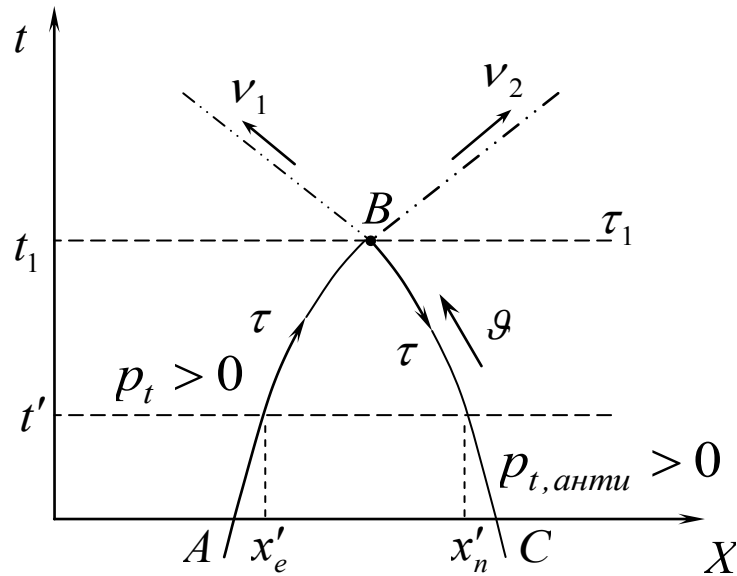
На відрізку $A \rightarrow B$, тобто при $\tau < \tau_1$, енергія частинки, а значить, і $p_4 \equiv p_t$, додатні:

$$p_4 = \frac{E}{c} = m_0 c \frac{dt}{d\tau} > 0, \text{ тобто } \frac{dt}{d\tau} > 0.$$

Це означає, що з ростом власного часу τ лабораторний час t також зростає і при $\tau = \tau_1$ досягає значення $t = t_1$.

В точці B величини p_t , а значить, $\frac{dt}{d\tau}$, змінюють знак і стають від'ємними:

при $\tau > \tau_1$ $p_4 = \frac{E}{c} = m_0 c \frac{dt}{d\tau} < 0$, тобто $\frac{dt}{d\tau} < 0$.



Мал. 3.3. В момент власного часу τ_1 складова 4-імпульсу $p_4 \equiv p_t$ змінює знак

Це означає, що рух частинки (електрону) відбувається так, що з ростом власного часу електрону τ лабораторний час t зменшується. На мал. 3.3.

$\frac{dt}{d\tau} < 0$ відповідає ділянці графіку $B \rightarrow C$.

У випадку коли змінюється знак $p_1 = m_0 \frac{dx_1}{d\tau}$ (Мал. 3.3а), електрон до моменту часу $\tau = \tau_1$ рухався вздовж осі OX , а потім в протилежному напрямку. У випадку, коли змінюється знак енергії, тобто p_t , електрон рухається так, що до моменту часу $\tau = \tau_1$ час CB K, t , зростає з ростом власного часу τ . Починаючи з $\tau = \tau_1$ росту τ відповідає зменшення t , тобто, електрон починає начебто рухатися в зворотньому напрямку в часі. Рухається в часі, не в майбутнє, але в минуле.

Для електрону послідовність станів $A \rightarrow B \rightarrow C$. На першій ділянці графіку (світової лінії електрону) $A \rightarrow B$ ми можемо вивчати події в житті частинки в тій же послідовності. На другій ділянці ми змушені вивчати події в житті частинки в часі тільки з ростом нашого, лабораторного часу, t . Тобто, в послідовності $C \rightarrow B$. Але для самої частинки така послідовність подій – перевернута (зворотня): росту τ відповідає послідовність $B \rightarrow C$.

Картина, яку ми щойно описали, аналогічна результату, який одержується при перегляді фільму в зворотньому напрямку. Приклад, що ілюструє цю ідею: рух електрону між обкладинками зарядженого конденсатора. Перегляд в зворотньому напрямку зафіксованого на відеокамері руху електрону засвідчить,

що частинка (електрон) рухається до негативно зарядженої пластини конденсатора. Але це відповідає руху позитивно зарядженої частинки.

Таким чином, ми можемо ділянку світової траєкторії $A \rightarrow B$ інтерпретувати як рух електрону, а ділянку $C \rightarrow B$ - як рух позитрону.

В будь-який момент часу $t < t_1$ в СВ K спостерігаються дві частинки. Так, в момент часу $t = t'$ електрон знаходиться в точці x'_e , а позитрон в точці x'_n .

Що ж ми бачимо в лабораторній СВ? З ростом часу t електрон і позитрон наближаються один до одного, зіткнення їх відбувається в момент часу $t = t_1$. Але при $t > t_1$ електрон і позитрон вже не спостерігаються: відбулася анігіляція пари електрон-позитрон. Згідно з законами збереження імпульсу та енергії такий процес супроводжується випромінюванням двох γ - квантів, світові лінії яких показані на мал. 3.3. пунктирними лініями.

Позитрон на ділянці $C \rightarrow B$ має позитивну енергію. Дійсно, якщо ввести власний час позитрону \mathcal{G} , який тече, змінюється, в напрямку протилежному

власному часу електрону, то $d\mathcal{G} = -d\tau$. Тоді, оскільки $E = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} < 0$, то

$$E = m_0 c^2 \frac{dt}{d\mathcal{G}} > 0.$$

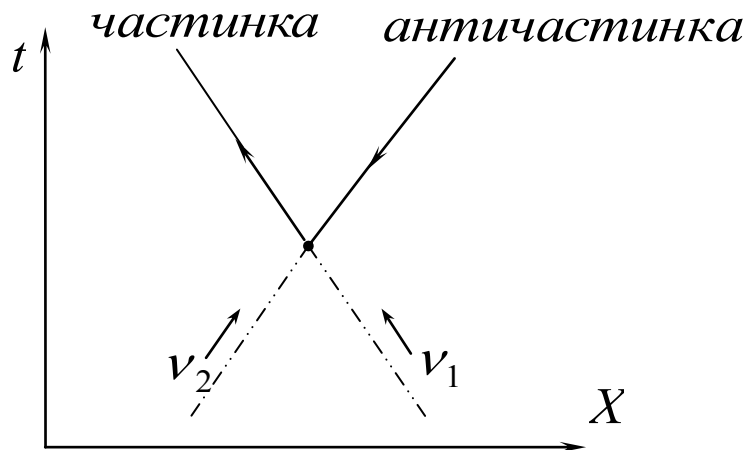
Перша частина кривої ABC , (AB) , - це світова лінія руху електрону, друга частина кривої, (BC) , - світова траєкторія позитрону (античастинки). Але, оскільки, в лабораторній системі відліку послідовність подій така, що $t_1 > t'$, то обернений в часі рух частинки, це не що інше, як рух античастинки в звичайній послідовності: від минулого до майбутнього. В напрямку $B \rightarrow C$ в лабораторній СВ ми не можемо вивчати фізичні події. Внаслідок властивостей часу ми змушені вивчати події в житті частинки в напрямку $C \rightarrow B$, тобто у відповідності з напрямком ходу нашого часу, але тоді ми спостерігаємо рух античастинки.

Протилежне явище - утворення пари при зіткненні двох фотонів - показане на мал. 3.4.

На відміну від діраківської інтерпретації від'ємних мас, інтерпретація в посібнику Зісмана Г.А. більш послідовна і в ній відсутні частинки, що не спостерігаються. В цій картині, яку пояснюють рисунки 3.3, 3.4, 3.5, вакуум є вакуум. А античастинка є звичайною частинкою з від'ємною власною енергією.

Від'ємна власна енергія античастинки зумовлена тим, що частинка рухається в часі в зворотному напрямку.

Ми спостерігаємо її відповідно до властивостей нашого часу, трактуючи її як античастинку з позитивною енергією і зарядами (електричним і іншими) з протилежними знаками порівняно з знаками зарядів частинки.



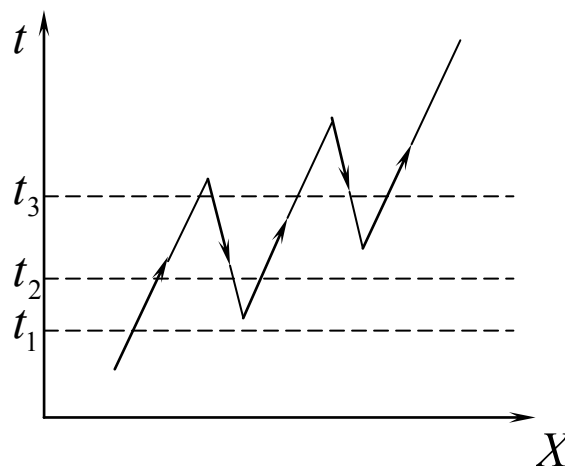
Мал. 3.4. Утворення пари частинка-античастинка при зіткненні двох фотонів

В такій інтерпретації частинки абсолютно рівноправні: електрон є антипозитрон. І нарешті, таке трактування ніяк не пов'язане з принципом Паулі і може бути застосоване до всіх мікрочастинок.

Число частинок в системі може змінюватися, але заряд системи зберігається.

На мал. 3.5. зображена світова лінія електрично зарядженої частинки. В момент t_1 маємо одну частинку, в момент t_2 - дві частинки і одну античастинку, при $t = t_3$ - три частинки і дві античастинки. Але в будь-який момент часу сумарний заряд залишається незмінним.

Античастинка (вона характеризується від'ємною енергією)-це звичайна частинка, але яка рухається в часі в зворотному напрямі.



Мал. 3.5. Число частинок в системі може змінюватися, але заряд системи зберігається

А ми спостерігаємо її у відповідності до плину нашого часу, пояснюючи (інтерпретуючи) її як античастинку з позитивною енергією.

$2m_0c^2 = 1,024\text{MeV}$ це мінімальна енергія, яка виділяється при зіткненні двох частинок: електрона і позитрона. Ця енергія виділяється у вигляді випромінювання двох γ – квантів.

Уявні маси. Перепишемо закон збереження енергії-імпульсу в такому вигляді:

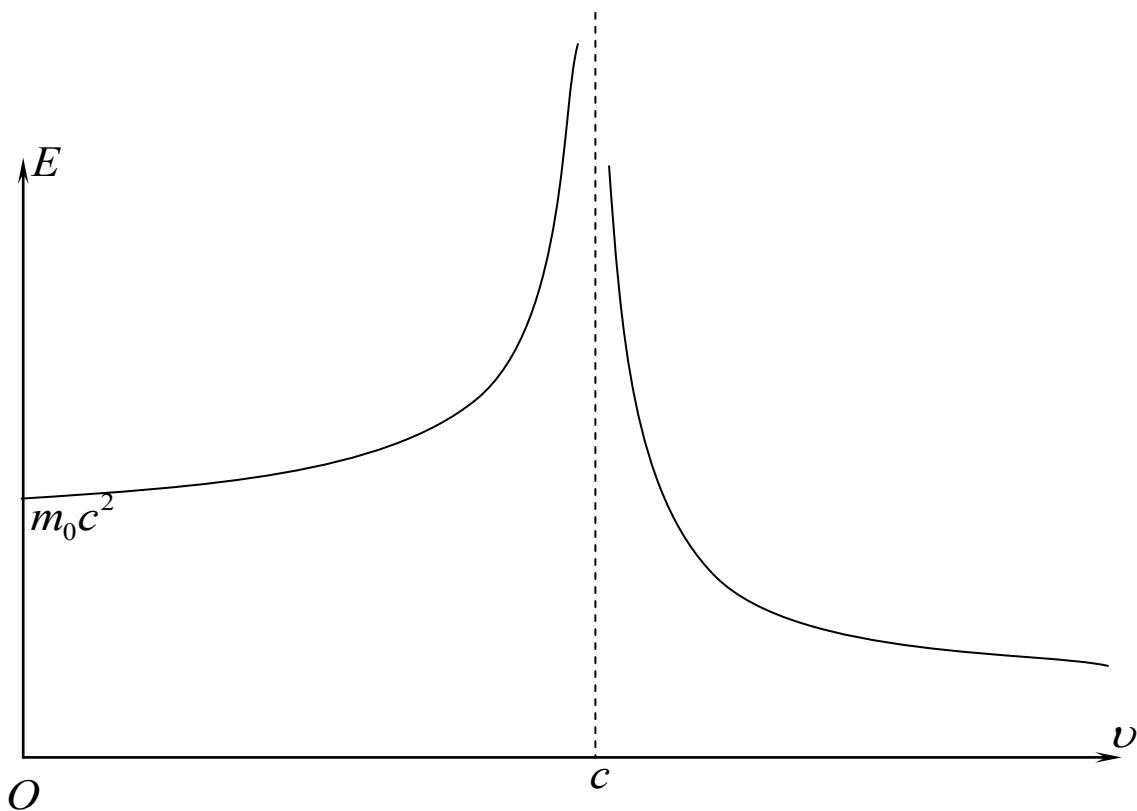
$$m_0^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \frac{E^2v^2}{c^4}. \quad (3.31)$$

Припустимо, що швидкість деякої частинки більша за швидкість світла в вакуумі, $v > c$. Тоді із (3.31) випливає, що $m_0^2 < 0$. І енергія таких гіпотетичних частинок (коли $v \gg c$) дорівнює:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0c^2}{i\frac{v}{c}} = \frac{m_0c^3}{v \cdot i} \ll E_0. \quad (3.32)$$

Тобто для тахіонів енергія при $v \gg c$ набагато менша енергії спокою.

Для звичайних частинок характерно зростання енергії з ростом швидкості, а для тахіонів, навпаки.



Мал. 3.6. Тахіони і досвітлові частинки являють собою принципово різні типи частинок. Якщо тахіони існують в природі, то вони появляються відразу з $v > c$

Заборона (неможливість) руху тіл з $v > c$, згідно СТВ, по суті означає, що частинки, які рухаються з $v < c$ не можуть шляхом неперервного збільшення швидкості перетворитися в тахіон. (Барашенков В.С. Тахионы. Чатицы, движущиеся со скоростями больше скорости света // УФН. – 1974. – Т. 114. – вып. 1. – С. 133-149).

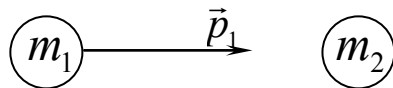
А тахіони, якщо вони існують в реальності не можуть шляхом поступового зменшення швидкості перейти в звичайні «досвітлові» частинки. Тобто, тахіони і досвітлові частинки являють собою принципово різні типи частинок. Якщо тільки вони є, то появляються відразу з $v > c$. Ці висновки ілюструються на мал. 3.6.

Парадоксальність властивостей гіпотетичних тахіонів не може слугувати (розглядатися) як підстава для висновку про неможливість існування таких частинок.

Закон збереження енергії-імпульсу накладає суттєві обмеження на можливі ядерні реакції, енергії осколків, що виникають при розпадах та на акти взаємодій частинок.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 3.3. На нерухому частинку маса якої m_2 налітає частинка, імпульс і маса якої p_1 та m_1 . Обидві частинки при взаємодії злипаються і рухаються як одне ціле. Треба знайти швидкість руху частинки, що утворилася та масу спокою її.



Мал. 3.7 На частинку m_2 налітає частинка m_1 , імпульс якої p_1

Розв'язання: Відповіді на питання задачі можна одержати двома шляхами:

а) використати закон збереження енергії – імпульсу;

б) використати формули перетворення компонент 4 – вимірного імпульсу.

Оберемо другий шлях:

Таким чином, дано: m_2, m_1, p_1 ,

$$E_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4}.$$

Тоді, повна енергія системи частинок до взаємодії в СВ K дорівнює:

$$E = E_1 + m_2 c^2.$$

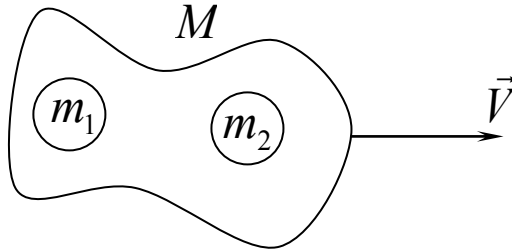
Зв'яжемо СВ K' з утвореною складною частинкою. Згідно формул перетворення компонент 4-імпульсу маємо:

$$p'_1 = \frac{p_1 + iBp_4}{\sqrt{1-B^2}} = \left(p_1 + iB \frac{i}{c} (E_1 + m_2 c^2) \right) \Gamma = 0$$

$$\frac{i}{c} E' = \Gamma (p_4 - iBp_1)$$
(3.33)

Із першого рівняння (3.33) знаходимо швидкість руху частинки:

$$V = \frac{p_1 c^2}{E_1 + m_2 c^2}.$$



Мал. 3.8. Маса та швидкість руху складеної частинки

Якщо цей процес розглядати в рамках класичної механіки, то швидкість частинки, яка утворилася після злипання, знаходиться із закону збереження класичного імпульсу:

$$(m_1 + m_2) \cdot V = p_1,$$

$$V = \frac{p_1}{m_1 + m_2}.$$

Не важко впевнитися, що в цій задачі принцип відповідності має місце.

Як знайти масу цієї частинки? Для цього скористаємося (3.33):

$$M = \frac{E'}{c^2} = \frac{\Gamma}{c^2} (E - Vp_1) = \frac{\sqrt{p_1^2 \cdot c^2 + m_1^2 \cdot c^4 + m_2^2 c^2 - Vp_1}}{c^2 \sqrt{1-B^2}},$$

де E' – енергія всієї системи в супутній системі відліку.

$$M = \frac{E'}{c^2} \approx m_1 + m_2 \text{ при } (V \ll c).$$

Приклад 3.4. На нерухому частинку m_2 налітає частинка m_1 , кінетична енергія якої T_1 . Обидві частинки при взаємодії злипаються і рухаються як одне ціле. Треба знайти швидкість руху такої системи частинок та масу спокою її.

Розв'язання: Із формул перетворення компонентів 4-імпульсу одержуємо:

$$V = \frac{p_1 c^2}{E},$$

E - енергія системи частинок в СВ K , $E = T_1 + (m_1 + m_2)c^2$. Тобто, для швидкості руху складеної частинки маємо:

$$V = \frac{p_1 c^2}{E} = \frac{c^2 p_1}{T_1 + (m_1 + m_2) \cdot c^2} = \frac{c^2 \cdot \sqrt{T_1(T_1 + 2m_1 c^2)}}{T_1 + (m_1 + m_2) \cdot c^2}.$$

Підтверджується принцип відповідності:

$$(m_1 + m_2) \cdot V = p_1 = \sqrt{2m_1 T_1},$$

і тоді

$$V = \frac{\sqrt{2m_1 T_1}}{m_1 + m_2}.$$

А енергія спокою частинки в СВ K' :

$$E' = \Gamma(E - Vp_1) = \Gamma(T_1 + (m_1 + m_2)c^2 - Vp_1) = \sqrt{2T_1 m_2 c^2 + c^4(m_1 + m_2)}.$$

Але той же результат можна одержати використовуючи закон (3.24).

Дійсно, до взаємодії квадрат «довжини» 4- імпульсу нашої системи частинок дорівнює:

$$p_1^2 - (T_1 + (m_1 + m_2)c^2) \cdot c^{-2}.$$

А після взаємодії в СВ K (в системі центру інерції $p' = 0$) квадрат

«довжини» 4-імпульсу дорівнює $\frac{E'^2}{c^2}$. Тоді (3.24) дає:

$$E'^2 = (T_1 + (m_1 + m_2)c^2)^2 - c^2 p_1^2,$$

що співпадає з попереднім результатом.

Приклад 3.5. Частинка маси M розпадається спонтанно на дві частинки з масами m_1 та m_2 . Треба знайти енергію цих частинок.

Розв'язання: Використаємо закон збереження енергії-імпульсу:

$$p^2 c^2 - E^2 = -M^2 c^4.$$

До розпаду частинка маси M була в стані спокою, тому $p = 0$, і попередня рівність набуває вигляду:

$$M^2 c^4 = E^2.$$

Після взаємодії згідно з законом збереження енергії-імпульсу ми будемо мати:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 - (E_1 + E_2)^2 = -M^2 c^4.$$

Розглянемо цей процес в системі відліку, в якій сумарний імпульс після розпаду частинок дорівнює нулю. Тобто, аналіз проводимо в СЦІ:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$$

$$E_1 + E_2 = M \cdot c^2$$

Таким чином, з останнього випливає важливий наслідок. Оскільки енергії частинок дорівнюють:

$$E_1 = m_1 c^2 + T_1, \quad E_2 = m_2 c^2 + T_2,$$

а сумарна маса частинок після розпаду в СЦІ дорівнює:

$$M = (m_1 + m_2) + \frac{T_1 + T_2}{c^2},$$

то спонтанний розпад можливий лише при умові:

$$M > m_1 + m_2.$$

Тобто маса материнської частинки повинна бути більшою суми мас дочірніх частинок.

А тепер знайдемо енергії частинок після розпаду. Оскільки

$$E_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4},$$

$$p_1 = p_2$$

то для енергії другої частинки можна записати:

$$E_2^2 = p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4 = p_1^2 c^2 + m_2^2 c^4 + m_1^2 c^4 - m_1^2 c^4 = E_1^2 + m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4.$$

І враховуючи, що $E_1 = M c^2 - E_2$ ми одержимо:

$$E_2 = \frac{(M^2 - m_2^2 + m_1^2)}{2M},$$

$$E_1 = \frac{(M^2 - m_1^2 + m_2^2)}{2M}.$$

3.5. Система невзаємодіючих частинок. Інваріантна маса системи невзаємодіючих частинок. Маса та енергія зв'язку системи взаємодіючих частинок

Розглянемо систему невзаємодіючих частинок. Тоді повна енергія та імпульс системи таких частинок, відповідно, дорівнюють:

$$E = \sum_i E_i, \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i.$$

Оскільки рівняння $M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2$ визначає масу спокою системи частинок, то для нашої системи ми можемо записати:

$$M^2 c^2 = \frac{(\sum E_i)^2}{c^2} - (\sum \vec{p}_i)^2.$$

Щоб знайти зв'язок між масою всієї системи і масами частинок, які входять до складу системи перейдемо в СЦІ ($\vec{P} = 0$). Тоді маємо:

$$M = \frac{\sum E_i}{c^2},$$

але $E_i = m_i c^2 + T_i$, тому

$$M = \sum m_i + \frac{\sum T_i}{c^2}.$$

Тобто, маса спокою системи невзаємодіючих частинок більша ніж сума мас спокою всіх частинок. Маса системи частинок не являється адитивною величиною.

Але можна подати масу спокою системи як суму релятивістських мас. Дійсно, рівняння:

$$M = \frac{\sum E_i}{c^2}$$

можна подати в такому вигляді:

$$M c^2 = \sum_i E_i = \sum_i m_i c^2 \cdot \gamma_i,$$

$$\text{де } \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}.$$

Таким чином, маса спокою системи невзаємодіючих частинок дорівнює сумі релятивістських мас окремих частинок:

$$M = \sum_i m_i \cdot \gamma_i = \sum_i m_i^{rel}. \quad (3.34)$$

Система взаємодіючих частинок. Очевидно, що сумарна енергія системи взаємодіючих частинок може бути подана так:

$$E = \sum_i E_i + U,$$

де U - енергія взаємодії частинок, що визначається як величина, яка дорівнює чисельно роботі необхідної для того, щоб розділити систему на окремі частинки.

$$M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2.$$

В СЦІ $\vec{P} = 0$, тому

$$M = \frac{\sum E_i + U}{c^2} = \sum_i m_i + \frac{\sum T_i}{c^2} + \frac{U}{c^2}.$$

Якщо сумарна кінетична енергія частинок невелика ($\sum T_i \ll U$), то

$$M = \sum_i m_i + \frac{U}{c^2}. \quad (3.35)$$

Тобто, в системі взаємодіючих частинок завжди різниця $\sum_i m_i - M$ не дорівнює нулеві:

$$\sum_i m_i - M = \Delta M = -\frac{U}{c^2} \neq 0. \quad (3.36)$$

Величина $\sum_i m_i - M = \Delta M$ називається дефектом мас.

Очевидно, що коли система взаємодіючих частинок знаходиться в обмеженій частині простору, то енергія взаємодії завжди від'ємна, $U < 0$. І тоді дефект мас $\Delta M > 0$

$$U = \Delta M \cdot c^2.$$

Атомні ядра надзвичайно стійкі утворення – це говорить про велику енергію зв'язку.

Приклад 3.6. Знайти масу спокою системи частинок, кожна з яких має нульову масу спокою.

Розв'язання. Припустимо, що дана система складається із фотонів.

Для одного фотона $E = cp$ і $m_0 = 0$, але для двох і більше фотонів, очевидно, можна записати:

$$E = \sum_i E_i = c \sum_i p_i,$$

тому закон збереження енергії-імпульсу має вигляд:

$$M^2 c^2 = \frac{c^2 \cdot (\sum p_i)^2}{c^2} - (\sum \vec{p}_i)^2.$$

І, оскільки, $(\sum \vec{p}_i)^2 \neq (\sum p_i)^2$, то і

$$M^2 c^2 = \frac{c^2 \cdot (\sum p_i)^2}{c^2} - (\sum \vec{p}_i)^2 \neq 0.$$

Тобто, маса спокою системи, яка складається із частинок з нульовою масою спокою не дорівнює нулю:

$$M^2 c^2 \neq 0.$$

В релятивістській фізиці не існує (не можливо ввести) поняття потенціальної енергії взаємодії частинок. Це зумовлено тими обставинами, що саме поняття потенціальної енергії тісно зв'язане з уявленнями про далнодію.

Потенціальна енергія являється функцією конфігурації системи і в кожний момент часу визначається відносними положеннями частинок системи взятими в цей же момент часу. Вважається, що взаємодія розповсюджується з нескінченно великою швидкістю.

Всі фізичні явища, як і існування живих істот, протікають в просторі-часу теорії відносності. Абсолютні простір і час класичної механіки не являються фізичною реальністю, а просторово-часові відношення теорії відносності є фізичною реальністю. Складається парадоксальна гносеологічна і дидактична ситуація: так багато часу витрачається на вивчення класичної механіки, на засвоєння понять, законів і правил, які адекватно не відображають реальність, а потім стільки ж часу необхідно для того, щоб впевнитися в тому, що те, що вивчалось раніше не зовсім (а інколи і зовсім) не відповідає реальності. І в той же час на вивчення теорії відносності в СНЗ відводиться мізерна частка навчального часу. Не можливо раціонально пояснити таку ситуацію тільки тим, що суб'єкт пізнання (*Homo sapiens*) являється макроскопічним класичним об'єктом.

Аналіз творчої спадщини творця теорії відносності підтверджує та ілюструє фундаментальне положення, яке полягає в тому, що методологічні орієнтири, науково-методологічні засади творчості та результати наукових праць А. Ейнштейна співзвучні ідеям реформування вищої та середньої шкіл в Україні. А це значить, зокрема, що використання ідей СТВ і вивчення їх не просто бажанні, а необхідні для того, щоб досягти мети, покликаної реорганізацією та реформуванням змісту фізичної освіти. А що ж ми бачимо насправді?! Та жалюгідна частка часу, що підводиться на вивчення СТВ в школі та в ВНЗ, згідно діючих програм, визиває подив та збентеження перед нинішнім та майбутнім. І в той же час «Розбудова системи освіти, її докорінне реформування, - наголошується в національній програмі «Освіта» (Україна XXI століття),— мають стати основою відтворення інтелектуального, духовного потенціалу народу, виходу вітчизняної науки, техніки і культури на світовий рівень, національне відродження, становлення державності та демократизації суспільства в Україні».

Практична частина **Зразки розв'язування задач**

Задача 3.1. Релятивістський протон з імпульсом якого \vec{p}_0 влетів у початковий момент часу ($t = 0$) в область поперечного однорідного електричного поля з напруженістю \vec{E} , причому $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$. Знайти залежність від часу кута ϑ , на який протон буде відхилитися від початкового напрямку руху.

Розв'язання: Виберемо вісі координат (X - вздовж вектора \vec{p}_0 , Y - вздовж вектора \vec{E}), і запишемо рівняння $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ в проекціях на ці вісі:

$$dp_x/dt = 0, \quad dp_y/dt = qE,$$

де q - заряд протона. З рівнянь випливає, що $p_x = p_0$, $p_y = eEt$, або

$$\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = p_0, \quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = qEt. \quad (3.37)$$

Візьмемо відношення останніх двох виразів та знайдемо $\text{tg } \mathcal{G}$

$$\text{tg } \mathcal{G} = v_y / v_x = qEt / p_0.$$

Відповідь: Величина тангенса кута відхилення прямо пропорційна часу - $\text{tg } \mathcal{G} = v_y / v_x = eEt / p_0$

Задача 3.2. В польоті π^0 - мезон розпався на два γ - кванти з енергіями E_1 і E_2 (в СВ K). Знайти кут розлітання θ цих γ - квантів.

Розв'язання: Згідно з законом збереження 4-імпульсу $\sum_i p_i^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$, або $p^2 c^2 - E^2 = -m_0^2 c^4$. В СЦІ π^0 - мезона інваріант «довжини» 4-імпульсу дорівнює $m_0^2 c^4$, тому і після розпаду в СВ K маємо

$$m_0^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - c^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2,$$

де E_1 , E_2 - енергії гама-квантів, p_1 , p_2 - імпульси гама-квантів.

Оскільки для фотонів $E_1 = cp_1$, $E_2 = cp_2$, то із попереднього рівняння одержуємо:

$$m_0^2 c^4 = c^2 (p_1 + p_2)^2 - c^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = 2p_1 p_2 c^2 (1 - \cos \theta) = 4p_1 p_2 c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Таким чином,

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m_0^2 c^4}{4p_1 p_2 c^2}.$$

Відповідь: Кут розлітання фотонів знаходиться із виразу $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m_0^2 c^4}{4p_1 p_2 c^2}$

Задача 3.3. Нерухомий π - мезон розпадається на мюон μ та нейтрино ν . Обчислити кінетичну енергію мюона.

Розв'язання: В СЦІ після розпаду мезону $\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = 0$. Тому закон збереження 4-імпульсу в СЦІ набуває вигляду:

$$m_\pi^2 c^4 = (E_\mu + E_\nu)^2,$$

$$m_\pi c^2 = (E_\mu + E_\nu).$$

Враховуючи, що $E_\mu = T_\mu + m_\mu c^2$ та $p_\nu = p_\mu$ для виразу повної енергії нейтрино можна записати:

$$E_\nu = \sqrt{p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4} = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4}.$$

І тоді закон збереження переписеться так:

$$m_\pi c^2 = T_\mu + m_\mu c^2 + \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4}.$$

А тепер скористаємося формулою:

$$T + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4},$$

з якої знайдемо добуток $p^2 c^2$:

$$p^2 c^2 = T^2 + 2mc^2 T,$$

і тоді попередня формула буде:

$$m_\pi c^2 = T_\mu + m_\mu c^2 + \sqrt{2m_\mu T_\mu c^2 + T_\mu^2 + m_\nu^2 c^4}.$$

Звідки, нарешті, знаходимо:

$$T_\mu = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2 - m_\nu^2 c^4}{2m_\pi c^2}.$$

Відповідь: Кінетична енергія мюона дорівнює

$$T_\mu = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2 - m_\nu^2 c^4}{2m_\pi c^2}.$$

Задача 3.4. Знайти порогове значення енергії γ -кванта при утворенні електронно-позитронної пари.

Розв'язання: γ -квант завжди у всіх СВ має певне значення імпульсу, тому утворити електронно-позитронну пару без зовнішнього поля (без третього тіла) він не зможе, оскільки це суперечить закону збереження імпульсу. Дійсно, якщо навіть імпульс пари в СВ K і не дорівнює нулю, можна завжди перейти в СЦІ де $(\vec{p}_- + \vec{p}_+) = 0$. Таким чином, для «народження» пари необхідна присутність третього тіла, яке зможе прийняти на себе надлишок імпульсу.

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_{\text{ядр}} = \vec{p}'_{\text{ядр}} + \vec{p}_- + \vec{p}_+$$

Оскільки при цьому тіло (ядро) одержує частину енергії, то енергетична межа реакції утворення пари електрон-позитрон повинна бути більша ніж $2mc^2$. Порогова енергія гамма-кванта визначається із вимоги, що всі частинки: електрон, позитрон та ядро в СЦІ повинні мати сумарний імпульс, який дорівнює нулю.

До реакції система складається з фотона з імпульсом $p_\gamma = \frac{E_{nop}}{c}$ та ядра маси M . А інваріант квадрату 4-імпульсу в нашому випадку дорівнює:

$$\left(E_{nop} + Mc^2\right)^2 - c^2\left(\frac{E_{nop}}{c}\right)^2$$

Після реакції квадрат 4-імпульсу можна взяти в будь-якій СВ, але зручно взяти в СЦІ, оскільки в ній сумарний імпульс $\vec{p} = 0$, а значення інваріанта дорівнює $\left(Mc^2 + 2mc^2\right)^2$.

Тому закон збереження енергії-імпульсу має вигляд:

$$\left(Mc^2 + 2mc^2\right)^2 = \left(E_{nop} + Mc^2\right)^2 - E_{nop}^2$$

Остаточно одержуємо:

$$E_{nop} = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad (3.38)$$

Відповідь: Значення порогової енергії γ -кванта при утворенні електронно-позитронної пари повинно бути $E_{nop} = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{M}\right)$.

Число квантів при анігіляції електронно-позитронної пари визначається законами збереження енергії, імпульсу, електричного заряду, лептонного заряду.

Так, однофотона анігіляція електронно-позитронної пари, $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$, не можлива. Дійсно, можна знайти СВ, в якій сумарний імпульс електронно-позитронної пари дорівнює нулю. Але імпульс одного фотону в будь-якій СВ не дорівнює нулю. Тому однофотона анігіляція можлива лише поблизу будь-якої третьої частинки, яка може прийняти на себе частину імпульсу фотону. А от анігіляція з появою двох γ -квантів не заперечується законом збереження імпульсу.

Але ж, нагадаємо ще раз, що в полі ядра можлива однофотона анігіляція. І по цій же причині, навпаки, один фотон не в змозі «родити» електронно-позитронну пару, оскільки неможливо знайти СВ, в якій імпульс фотона був би рівний нулю.

Задача 3.5. Нейтрон з кінетичною енергією $T = 2mc^2$ налітає на інший нерухомий нейтрон. Визначити:

А) Швидкість центру інерції цієї системи частинок;

Б) Сумарну кінетичну енергію обох нейтронів в СЦІ та імпульс кожного нейтрона в цій системі.

Розв'язання: СВ K' зв'яжемо з СЦІ. Тоді, згідно формул перетворення компонент 4-імпульсу:

$$p'_1 = \Gamma \left(p_1 - \frac{V}{c^2} E \right) = 0.$$

Звідси швидкість руху СЦІ дорівнює:

$$V = \frac{c^2 p_1}{E},$$

де $p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}$ - імпульс системи тіл в лабораторній СВ,

$E = mc^2 + (T + mc^2)$ - енергія системи частинок і СВ K .

Підставляємо, і одержуємо для швидкості СЦІ:

$$V = \frac{c^2 p_1}{E} = \frac{\sqrt{2}}{2} c.$$

Кінетичну енергію в СВ K' знайдемо, якщо буде відома повна енергія E' в СЦІ: $T' = E' - 2mc^2$. Із формул перетворення знаходимо:

$$E' = \frac{E - Vp_1}{\sqrt{1 - B^2}} = (mc^2 + (T + mc^2) - \frac{\sqrt{2}}{2} c \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}) \cdot \Gamma = 2\sqrt{2}mc^2$$

$$T' = E' - 2mc^2 = 2mc^2(\sqrt{2} - 1).$$

Оскільки, відома сумарна кінетична енергія двох нейтронів, то кінетична енергія одного дорівнює $T'_1 = T'_2 = \frac{T'}{2} = mc^2(\sqrt{2} - 1)$. Тому

$$p'_1 = p'_2 = \frac{1}{c} \sqrt{T'_1(T'_1 + 2mc^2)} = mc.$$

Відповідь: $V = \frac{c^2 p_1}{E}$; $T' = 2mc^2(\sqrt{2} - 1)$;

$$p'_1 = p'_2 = \frac{1}{c} \sqrt{T'_1(T'_1 + 2mc^2)} = mc.$$

Задача 3.6. В лабораторній СВ частинка має швидкість u і прискорення w . Знайти прискорення цієї частинки в СВ K' , яка рухається зі швидкістю V вздовж осі OX у двох випадках:

А) в СВ K частинка переміщується вздовж осі OX ;

Б) в СВ K частинка переміщується тільки вздовж осі OY .

Розв'язання: А) Згідно з РФДШ швидкість частинки у СВ K' дорівнює

$$u' = \frac{u - V}{1 - \frac{uV}{c^2}}.$$

Тоді $du' = \frac{du}{1 - \frac{uV}{c^2}} + \frac{(u - V) \frac{V}{c^2} du}{\left(1 - \frac{uV}{c^2}\right)^2}$, але згідно з перетвореннями Лорентца

$$dt' = dt \frac{\left(1 - \frac{uV}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

Тому маємо:

$$w' = \frac{du'}{dt'} = \frac{w(1 - B^2)^{3/2}}{\left(1 - \frac{uV}{c^2}\right)^3}. \quad (3.39)$$

При $u = V$ із (3.39) (в дану мить частинка у СВ K рухається зі швидкістю переміщенні СВ K' , а з точки зору СВ K' частинка нерухома) одержуємо:

$$w' = w(1 - B^2)^{-3/2}.$$

$$\text{Або } w = w'(1 - B^2)^{3/2} = w'(1 - \beta^2)^{3/2}.$$

Б) Оскільки в СВ K частинка переміщується тільки вздовж осі OY , то згідно з РФДШ $u'_y = u_y \sqrt{1 - B^2}$, оскільки $u_x = 0$.

Тому для поперечної складової прискорення маємо:

$$w'_y = \frac{du_y}{dt} (1 - B^2) = w_y (1 - B^2).$$

$$\text{Відповідь: А) } w = w'(1 - B^2)^{3/2} = w'(1 - \beta^2)^{3/2},$$

$$\text{Б) } w'_y = \frac{du_y}{dt} (1 - B^2) = w_y (1 - B^2).$$

Аналогічні результати можна отримати також із формул (2.50).
Порівняйте також із розв'язаннями *Задачі 1.11.* та *Задачі 1.13.*

Задача 3.7. Частинка рухається вздовж осі OX з прискоренням w' однаковим у кожній інерціальній СВ, миттєво супутній частинці. Знайти залежність швидкості частинки у СВ K від часу. У початковий момент часу $u(t=0)=0$

Розв'язання: У попередній задачі ми знайшли, що $w = w'(1 - \beta^2)^{3/2}$, тому розділяючи змінні одержуємо:

$$\frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{w' \cdot dt}{c},$$

де $\beta = \frac{u}{c}$.

Після інтегрування маємо:

$$\frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{w' \cdot t}{c}, \quad u = \frac{w' t}{\sqrt{1 + \left(\frac{w' t}{c}\right)^2}}.$$

Відповідь: $u = \frac{w' t}{\sqrt{1 + \left(\frac{w' t}{c}\right)^2}}.$

Задача 3.8. Обґрунтувати формулу Ціолковського у випадку релятивістських швидкостей руху [57, с. 216].

Розв'язання: Введемо позначення:

\vec{v} - швидкість ракети відносно деякої інерціальної СВ; \vec{u} - швидкість викидання продуктів згорання ракети відносно тієї ж інерціальної СВ; \vec{u}' - швидкість викиненої маси відносно ракети; M' - зміна маса спокою ракети (маса ракети у власній СВ).

Тоді у відсутності зовнішніх сил рівняння руху ракети у релятивістському випадку має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M' \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right) = \vec{u} \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right). \quad (3.40)$$

Після диференціювання за часом лівої частини одержуємо

$$\frac{M'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right), \quad (3.41)$$

що нагадує класичне відповідне рівняння.

Однак, в останньому рівнянні $(\vec{u} - \vec{v})$ не є швидкість витікання газів відносно ракети, оскільки для знаходження швидкості \vec{u}' необхідно використовувати РФДШ (див. Розділ 1)

Застосуємо (3.41) для знаходження формули Ціолковського у випадку релятивістських швидкостей, при чому виберемо вісь OX в напрямку руху ракети.

$$\frac{M'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} = (u_x - v) \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (3.42)$$

Урахуємо, що:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dM'}{dt} + \frac{M'}{c^2} \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}.$$

Тоді (3.42) набуває вигляду:

$$\frac{M'}{1-v^2/c^2} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} = (u_x - v) \frac{dM'}{dt}.$$

А якщо врахувати формулу додавання швидкостей за Ейнштейном

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2},$$

то одержуємо:

$$M' \frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) u'_x \frac{dM'}{dt}. \quad (3.43)$$

Візьмемо до уваги, що для прискорення ракети швидкість витікання газів повинна бути спрямована проти швидкості руху ракети, т. е. $u'_x = -u'$, де u' - модуль цієї швидкості. Тепер можна переписати (3.43) у вигляді (аналогічному рівнянню нерелятивістської механіки):

$$\frac{dM'}{M'} = - \frac{dv}{u' \cdot (1 - v^2/c^2)}. \quad (3.44)$$

Нехай у початковий момент маса ракети була M'_0 , а швидкість - v_0 . Як і у випадку класичної механіки, проінтегруємо ліву й праву частини цієї рівності у відповідних межах. Інтеграл у правій частині по v з урахуванням того, що

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-v/c)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+v/c)},$$

є елементарним.

У результаті інтегрування одержуємо:

$$\begin{aligned} \ln M' - \ln M'_0 &= -\frac{c}{2u'} \left\{ \ln \left(1 + \frac{v}{c} \right) - \ln \left(1 - \frac{v}{c} \right) \right\}_{v_0}^v = \\ &= -\frac{c}{2u'} \left\{ \ln \frac{1+v/c}{1-v/c} - \ln \frac{1+v_0/c}{1-v_0/c} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\ln \frac{M}{M'} = -\frac{c}{2u'} \ln \frac{(1+v/c)(1+v_0/c)}{(1-v/c)(1-v_0/c)}, \quad (3.45)$$

Ця формула для релятивістського випадку заміняє класичну формулу Цюлковського для нерелятивістських ракет [53, с. 213]:

$$v - v_0 = u' \ln \frac{M_0}{M}, \quad M = M_0 e^{-\frac{(v-v_0)}{u'}}.$$

Особливо простого вигляду, придатного для аналізу, формула (3.45) набуває при $v_0 = 0$, тобто коли розгін ракети починається зі стану спокою:

$$M' = M'_0 \left(\frac{1-v/c}{1+v/c} \right)^{c/(2u')} \quad (3.46)$$

У випадку малих кінцевих швидкостей ($v \ll c$) ця формула переходить в $M = M_0 e^{-\frac{(v-v_0)}{u'}}$ для нерелятивістського випадку (при $v_0 = 0$).

Справді, перепишемо праву частину (3.46) при $\frac{v}{c} \ll 1$ і $\frac{u'}{c} \ll 1$ у вигляді:

$$\left(\frac{c+v}{c-v} \right)^{-c/(2u')} \approx \left[\left(1 + 2\frac{v}{c} \right)^{c/(2v)} \right]^{-v/u'} = e^{-v/u'}, \quad (3.47)$$

де враховано, що

$$\frac{c+v}{c-v} = \frac{1+v/c}{1-v/c} \approx \left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx 1 + 2\frac{v}{c},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Припустимо, що ракету треба прискорити до швидкості $\frac{c}{2}$ за допомогою хімічного палива, коли $u' = 4 \text{ км/с}$.

Яка частка первісної маси буде прискорена при цьому? З огляду на те, що $c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$, із формули (3.46) отримаємо:

$$M' = M'_0 \left(\frac{1/2}{3/2} \right)^{3 \cdot 10^5 / (2 \cdot 4)} \approx \frac{M'_0}{\left(\frac{3}{8} \right)^{10^5}} \approx \frac{M'_0}{10^{2 \cdot 10^4}} \quad (3.48)$$

Уявити собі число 10^{20000} неможливо.

Тому про прискорення ракет до релятивістських швидкостей на хімічному паливі не може бути й мови. Однак і з іншими видами палива справа виглядає ненабагато краще. Для ядерних ракет, що використовують енергію ділення, $u' \approx 10^4 \text{ км/с}$, У цьому випадку замість (3.48) знаходимо:

$$M' = M'_0 / 3^{3 \cdot 10^5 / (2 \cdot 10^4)} \approx M'_0 / 3^{15} \approx M'_0 / 10^6, \quad (3.49)$$

тобто, остаточної швидкості $\frac{c}{2}$ досягне лише приблизно 10^{-6} стартової маси ракети.

Тому більш-менш обнадійливих результатів у досягненні релятивістських швидкостей можна чекати тільки в тому випадку, якщо швидкість u' наближається до швидкості світла. Це приводить до ідеї створення реактивної тяги шляхом випромінюванням фотонів. Такі, лише теоретично мислимі в наш час, ракети називаються фотонними.

Фотонні ракети. Для фотонних ракет $u' = c$ і, отже, рівняння (3.46) приймає вигляд:

$$M' = M'_0 \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

Як видно із цієї формули, до швидкості $u' = c$ було б можливо прискорити масу $M' = M'_0 / \sqrt{3}$, тобто більше, ніж половину стартової маси. Таким чином, ці ракети були б досить ефективними. Нехай v відрізняється від швидкості світла на дуже маленьку величину, наприклад на 10^{-4} , тобто, $\frac{v}{c} \approx 1 - 10^{-4}$ Тоді з (3.50) одержуємо

$$M' \approx M'_0 \frac{10^{-2}}{\sqrt{2}} \quad (3.51)$$

тобто цілком прийнятний результат. Однак фотонні ракети в наш час із технічної точки зору є лише фантазією. Втім, це не означає, що сама по собі «реактивна сила випромінювання» не має значення. Навпаки, вона грає дуже велику роль у природі, наприклад у ряді астрофізичних явищ.

Завдання для самоконтролю

Завдання 1. Навести приклади, що ілюструють принцип відповідності та пояснити їх.

Завдання 2. Показати, що закон руху релятивістської частинки при дії на неї постійної сили $x = \int v \cdot dt = \frac{c^2}{a} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{at}{c} \right)^2} - 1 \right\}$, де $a = \frac{F}{m_0}$, при $t \ll \frac{m_0 c}{F}$ переходить в класичний $x = \frac{at^2}{2}$.

Завдання 3. Гіпотетична ракета рухається з прискоренням $w' = g$ однаковим у кожній інерціальній СВ, миттєво супутній ракеті. За Земним годинником ракета прискорювалася протягом 1 року. Знайти кінцеву швидкість ракети. Визначити власний час руху ракети. Яку віддаль подолає ракета за цей час?

$$\text{Відповідь: } u = 2,21 \cdot 10^8 \frac{M}{c},$$

$$\Delta\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 3 \cdot 10^7 \cdot 0,875 = 2,625 \cdot 10^7 \text{ c} \approx 10 \text{ місяців},$$

$$x = \int u(t) \cdot dt = \frac{c^2}{w'} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{w't}{c} \right)^2} - 1 \right\} = 3,6 \cdot 10^{15} \text{ м} \approx 0,38 \text{ св.роки};$$

необхідно використати розв'язання *Задачі 1.8*, *Задачі 1.12* та *Прикладу 3.1*.

Завдання 4. Релятивістська ракета викидає струмінь газу з постійною відносно ракети, нерелятивістською швидкістю u . Знайти залежність швидкості v ракети від її маси. В початковий момент часу маса ракети була m_0 .

Відповідь:
$$\frac{v}{c} = \frac{\left(1 - \frac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}{\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)^{2u/c}};$$
 для розв'язання задачі необхідно

використати формулу (3.46), обґрунтувати та пояснити її.

Завдання 5. Одержати формули перетворення компонентів 3-сили при переході від однієї СВ до іншої.

Відповідь: див. формули (3.6).

Завдання 6. Знайти закон руху зарядженої частинки (ЗЧ) в однорідному постійному:

А) електричному полі;

Б) магнітному полі.

Відповідь: А) При умові: $t=0, v=0, x=0$ закон руху в однорідному постійному електричному полі має вигляд
$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{qEt}\right)^2}},$$
 або

$$x(t) = \int v \cdot dt = \frac{c^2 m_0}{qE} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{cm_0}\right)^2} - 1 \right\}.$$

Б) При умові: $t=0, v=const$ закон руху в однорідному постійному магнітному полі має вигляд:
$$v = \frac{qBr\sqrt{1-\beta^2}}{m_0}.$$
 Радіус орбіти ЗЧ в магнітному

полі, $r = \frac{v}{\omega} = \frac{p}{qB}$, являється мірою релятивістського імпульсу. При цьому

частота обертання ЗЧ дорівнює:
$$\omega = \frac{qB}{m_0} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Завдання 7. Ядро ${}^8_4\text{Be}$, яке має масу спокою 8,00785 а.о.м. розпадається на дві α – частинки з масами спокою по 4,0039 а.о.м., що розлітаються в протилежні сторони. Визначити відносну швидкість частинок.

$$\text{Відповідь: } v_{\text{відн}} = \frac{2\sqrt{\frac{2T}{m}}}{\left(1 + \frac{2T}{mc^2}\right)} \approx 2\sqrt{\frac{2T}{m}} = 2\sqrt{\left(\frac{m_{Be}}{m_\alpha} - 2\right)} \cdot c^2 \approx 2,12 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

де m_{Be} - маса ядра Берилія, m_α - маса α - частинки.

Завдання 8. Впевнитися, що, на відміну від нерелятивістського випадку, іксковий компонент швидкості протона в **Задачі 1**, v_x , зменшується з часом.

$$\text{Відповідь: } v_x = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_0c / p_0)^2 + (qEt / p_0)^2}}.$$

Тобто, v_x зменшується зі збільшенням t .

Контрольні запитання та завдання

1. Обґрунтувати 4-вимірне рівняння руху $m_0 \cdot \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i$ частинки, маса спокою якої m_0 .

2. Виходячи із 4-вимірного рівняння руху $m_0 \cdot \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i$ частинки та використовуючи принцип відповідності одержати 3-вимірне рівняння руху частинки.

3. Одержати формули перетворення декартових проекцій сили виходячи із означення 4-сили Мінковського.

4. Обґрунтувати теорему про зміну кінетичної енергії частинки:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{dT}{dt}.$$

5. Обґрунтувати вираз для кінетичної енергії частинки $T = m_0 c^2 \cdot (\gamma - 1)$,

$$\text{де } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

6. Виходячи із теореми про зміну кінетичної енергії $\frac{dT}{dt} = \vec{F}\vec{v}$ та

релятивістського рівняння руху $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, де $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, одержати

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2.$$

7. Показати, що тільки в двох випадках, із безлічі інших, сила співпадає по напрямку з прискоренням.

8. Впевнитися, що вираз $E^2 - p^2c^2$ є інваріантом.

9. Пояснити недоцільність введення поняття «залежність маси від швидкості».

10. Вивести і сформулювати закон збереження енергії-імпульсу.

11. Знайти зв'язок між імпульсом та кінетичною енергією частинки ($pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$).

12. Показати, що формула $p = \sqrt{2m_0T}$, яка зв'язує класичні імпульс та кінетичну енергію, при $T \ll m_0c^2$ являється наслідком більш загальної формули $pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$.

13. Показати, що із закону збереження енергії-імпульсу випливають висновки про можливе існування частинок з від'ємними масами, уявними масами (тахіонів).

14. Дати діраківську інтерпретацію існуванню від'ємних мас та інтерпретацію Зісмана Г.А.

15. Показати, що маса спокою системи не взаємодіючих частинок більша ніж сума мас спокою всіх частинок системи.

16. Показати, що маса спокою системи не взаємодіючих частинок являється адитивною величиною «релятивістських мас».

17. Впевнитися, що маса спокою системи, яка складається із частинок кожна з яких характеризується нульовою масою спокою, не дорівнює нулю.

18. Навести приклади, що ілюструють принцип відповідності.

19. Обґрунтувати зв'язок між масою та енергією.

20. Пояснити неможливість однофотонної анігіляції електронно-позитронної пари.

Рекомендована література до розділу 3

Основна

1. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності : Навчальний посіб. для студ. вищих навч. закл. / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми : «МакДен», 2011. – 335 с.
2. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с
3. Иродов И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – [6-е изд.]. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 312 с.
4. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
5. Левич В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В. Г. Левич. – Т. 1. – М. : Наука, 1969. – 912 с.

Для поглибленого вивчення теми

1. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации : [Современный анализ проблемы] / А. А. Логунов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
2. Малинин А. Н. Теория относительности в задачах и упражнениях / А. Н. Малинин. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.
3. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособ. для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.

«...то це означає, що ми намагаємося знайти систему ідей, яка дозволила б нам по можливості просто пов'язати воєдино факти, що спостерігалися. Але така простота зовсім не означає, що засвоєння саме цієї системи надасть студентові менше всього клопоту. Ми маємо на увазі лише те, що система містить найменше можливе число незалежних постулатів або аксіом».

А. Ейнштейн.

Розділ 4. Спеціальна теорія відносності та електродинамічні явища

Мета вивчення розділу полягає в засвоєнні основних теоретичних положень методики навчання електродинаміки у вищих педагогічних начальних закладах з викомалтанням методів спеціальної теорії відносності та поглибленні розуміння фундаментальних законів фізики.

Зокрема, на основі фундаментального принципу відносності (ПВ) та закону Кулона запропоновано нові теоретичні та методичні підходи щодо обґрунтування: закону Біо-Савара в релятивістській формі, виразу для магнітного поля зарядженої частинки, яка рухається рівномірно і прямолінійно, формули Лорентца, формули Ампера, закону електромагнітної індукції та рівнянь Максвелла.

Ключові слова: принцип відносності, закон Кулона, закон Біо-Савара, закон електромагнітної індукції, рівняння Максвелла.

Теоретична частина

4.1. Електричне поле рівномірно рухомої зарядженої частинки та його властивості

Виявляється, що виникнення магнітної взаємодії між рухомими зарядженими частинками (ЗЧ) зумовлено релятивістськими ефектами. Іншими словами, властивості магнітного поля (МП) постійних струмів, закони Ампера та Біо-Савара, вирази для сили Лорентца, сили Ампера слід розглядати як наслідок СТВ та закону Кулона [35].

Пояснення релятивістської природи магнітного поля та механізму породження МП постійними струмами варто розпочати з аналізу властивостей електричного поля рухомої зарядженої частинки.

Взаємодія заряджених частинок, які рухаються відносно лабораторної СВ, відрізняється від взаємодії нерухомих. Цей висновок випливає із аналізу експериментального факту щодо взаємодії двох паралельних струмів.

Але очевидно, що результуюча взаємодія провідників зі струмами зумовлена додатковою (магнітною, не електричною) взаємодією між сукупностями рухомих заряджених частинок (двома процесіями ЗЧ).

Слід звернути увагу й на той факт, що на засадах ньютонівської механіки неможливо пояснити походження магнітних сил. У ньютонівській механіці сила є функцією відстані між взаємодіючими тілами та їхніми відносними швидкостями. Але відстані між електронами провідності в двох паралельних лінійних провідниках з однаковими струмами не змінюються. Швидкість електронів провідності відносно один одного залишається рівною нулю.

Здавалося б, що й ніякі допоміжні сили виникати не повинні. Тобто, згідно з основними положеннями класичної механіки сили взаємодії між ЗЧ, що рухаються рівномірно, не повинні були б відрізнятися від сил взаємодії між нерухомими ЗЧ. Але такий висновок суперечить реальності.

Дійсно, досвід свідчить про те, що при русі електронів у паралельних лінійних провідниках між ними виникають сили, яких не було при відсутності струму. Тим самим показана обмеженість ньютонівської механіки й непридатність її уявлень для трактування магнітної взаємодії [17, с. 103; 61].

Отже, на основі уявлень класичної фізики ми не в змозі пояснити експериментальні прояви магнітної взаємодії.

Таким чином, щоб описати й зрозуміти взаємодію між рухомими зарядженими частинками (а фактично взаємодію між елементами струмів та провідниками зі струмами) необхідно описати на засадах теорії відносності взаємодію двох рухомих заряджених частинок.

Для цього необхідно мати характеристики та знати властивості електричного поля (ЕП) окремої точкової зарядженої частинки, яка рухається з постійною швидкістю.

Використовуючи закон Кулона та положення спеціальної теорії відносності, можна знайти вираз для напруженості електричного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки (РЗЧ) [35; 38; 39; 75]:

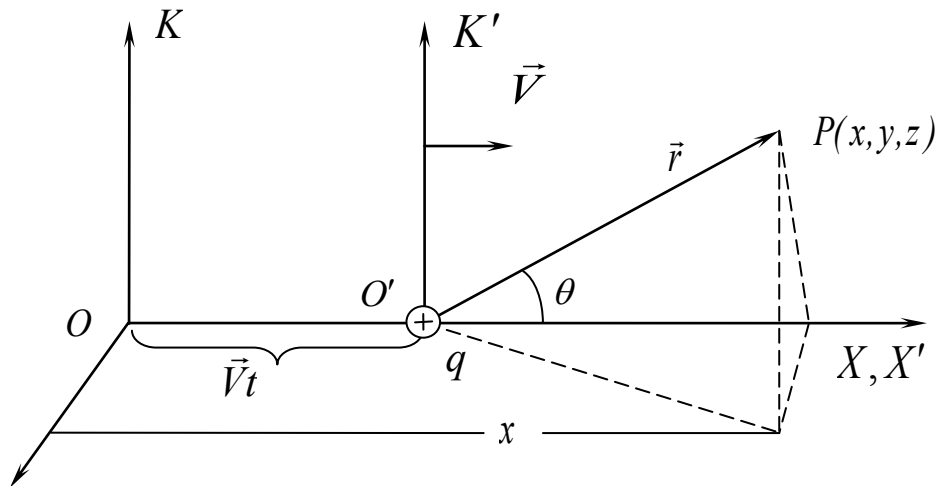
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{r}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{3/2}} = f(\beta, \theta) \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (4.1)$$

де $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення ЗЧ до точки поля, $\beta = \frac{V}{c}$, r – це віддаль точки поля від миттєвого

положення ЗЧ, а θ – кут між напрямком руху ЗЧ (вектором швидкості \vec{V} ЗЧ)

та радіус-вектором проведеним із миттєвого положення ЗЧ в дану точку

$$f(\beta, \theta) = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{3/2}}.$$



Мал. 4.1. До ілюстрації формули напруженості електричного поля РЗЧ

Опишемо властивості електричного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки.

1. Напруженість електричного поля рухомої ЗЧ залежить від напрямку знаходження точки поля (кута θ) та від швидкості руху ЗЧ.

Величина напруженості електричного поля ЗЧ, що рухається з довільною за величиною швидкістю \vec{V} зменшується в напрям руху й збільшується в площині, перпендикулярній до швидкості руху ЗЧ \vec{V} .

При релятивістських швидкостях напруженість поля рухомого заряду на заданій відстані від нього мала за лінією руху ЗЧ та велика в перпендикулярному напрямі, тобто поле начебто сконцентровується поблизу площини, проведеної через миттєве положення ЗЧ перпендикулярно його швидкості. У зв'язку з цим говорять, що електричне поле рухомої ЗЧ «сплющується» в напрямі руху.

2. Електричне поле РЗЧ не є сферично-симетричним, хоча і характеризується значними симетріями. Зокрема, поле вектора \vec{E} дзеркально симетричне відносно будь-якої площини, що проходить через вісь OX при умові, що ЗЧ в дану мить проходить через початок координат СВ (див. результати моделювання електричного та електромагнітного поля РЗЧ).

3. Електричне поле рухомої ЗЧ є, взагалі кажучи, непотенціальним полем [35]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0. \quad (4.2)$$

У зв'язку з цим виникає питання, як може бути потенціальним електричне поле, яке утворене суперпозицією електричних полів сукупності рухомих ЗЧ (наприклад, електричне поле провідника з постійним струмом)?! Розв'язанню цього протиріччя присвячений розділ 5 в монографії [32].

У той же час, можна вказати на безліч контурів у цьому полі, циркуляція вектора \vec{E} вздовж яких дорівнює нулю.

Так, наприклад, $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$:

а) вздовж будь-якого контуру, що лежить у площині YOZ і яка проходить через миттєве положення ЗЧ;

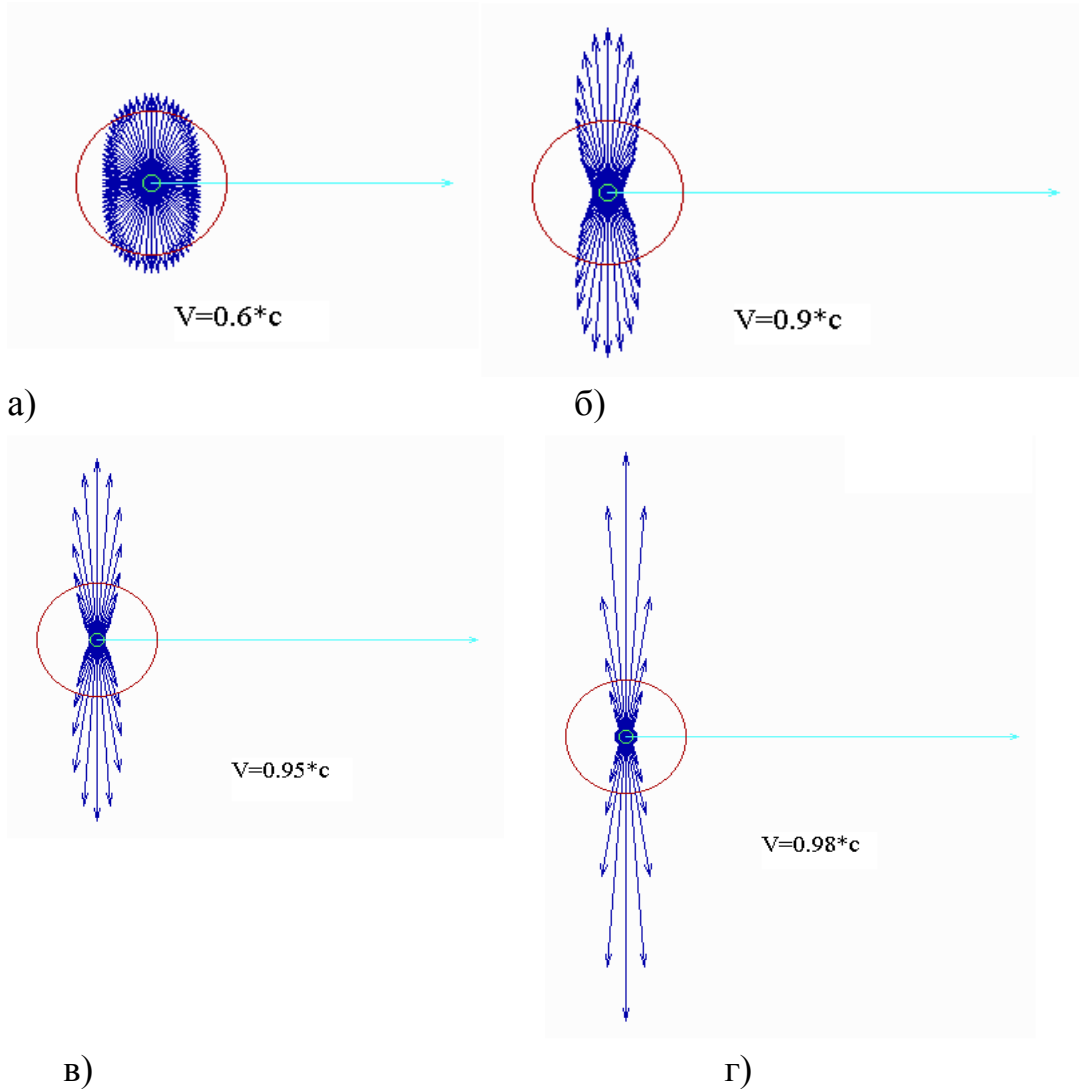
б) вздовж симетричного контуру, який, в свою чергу, симетрично розташований відносно площини YOZ , яка проходить через миттєве положення ЗЧ;

в) вздовж симетричного контуру, який симетрично й перпендикулярно розташований відносно будь-якої площини, що проходить через вісь OX (наприклад, вздовж симетричного контуру, що симетрично розташований відносно площини YOX). Тобто, з одного боку, в будь-якій точці поля поза межами ЗЧ електричне поле є вихровим полем $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$, з іншого – є потенціальним (якщо за критерій потенціальності поля брати $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ та за умови $x = Vt$). При цьому ($x - Vt = 0$, площина YOZ проходить через миттєве положення ЗЧ). Завдяки певній симетрії ЕП РЗЧ (мал. 4.2) можна знайти форми замкнутих контурів, циркуляція $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ вздовж яких дорівнює нулю.

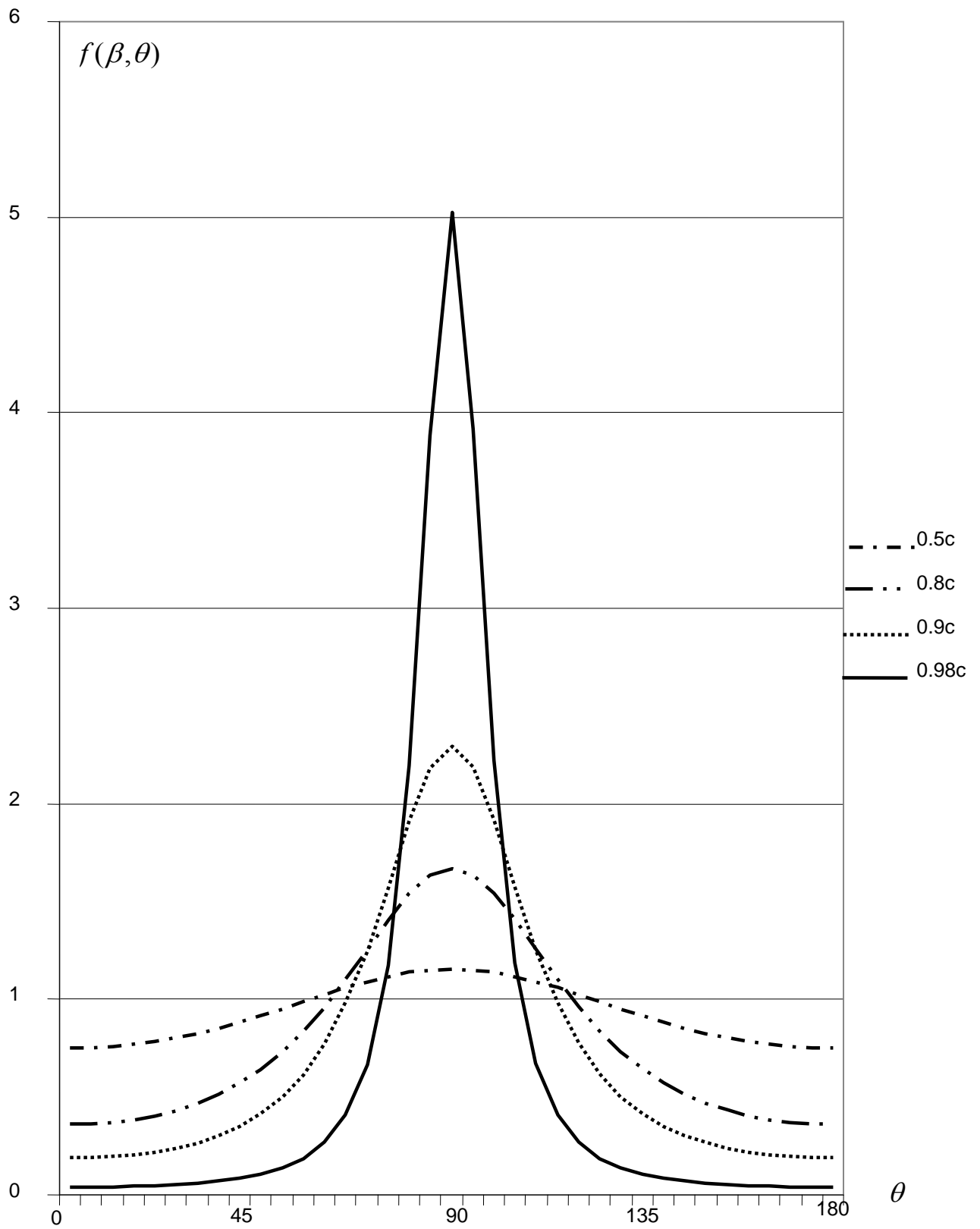
Але по своїй суті поле вектора \vec{E} рухомої ЗЧ є вихровим, оскільки, як буде показано в пункті 4.3, $-\operatorname{rot} \vec{E}$ в довільній точці ЕМ поля РЗЧ повністю визначається швидкістю зміни за часом вектора індукції магнітного поля РЗЧ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в цій же точці простору.

4. Дещо несподіваними виявилися результати комп'ютерного моделювання ЕП рухомої ЗЧ [35]. Картина ЕП, яку отримано (див. мал. 4.2), не описана в існуючих посібниках з електродинаміки. З тексту вказаних посібників випливає, що нібито електричне поле РЗЧ сплющується в напрямку руху таким же чином, як і еквіпотенціальні поверхні Хевісайда (див. наприклад, [45, с. 125; 65, с. 184]).

При $V \rightarrow c$ в області значення кутів $\theta \approx 0$ спостерігається ніби «перетяжка» (див. Мал. 4.2). На полярній діаграмі напруженості електричного поля і в площині XOY полярна діаграма має вигляд «вісімки» (мал. 4.2б, в, г).



Мал. 4.2. Полярні діаграми напруженості електричного поля РЗЧ в площині XOY при різних значеннях швидкості руху ЗЧ



Мал. 4.3. Залежність функції $f(\beta, \theta)$ від кута θ при різних значеннях швидкості руху ЗЧ

Комп'ютерне моделювання ЕП РЗЧ та дослідження функції:

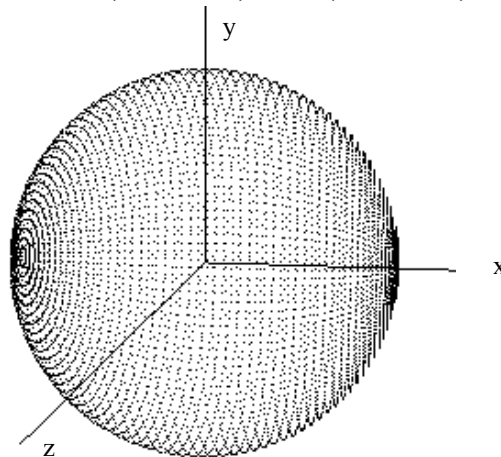
$$f(\beta, \theta) = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3)$$

показало, що полярна діаграма напруженості ЕП РЗЧ при великих швидкостях руху частинки не має вигляду сплющеного еліпсоїда (мал. 4.3).

Таким чином, аналіз формули (4.1) та комп'ютерне моделювання ЕП РЗЧ показало, що «сплющування» електричного і магнітного полів у напрямі руху суттєво залежить від кута θ . А саме, при $\theta = 0$ та $V > 0,95c$ $E_{\parallel} \rightarrow 0$.

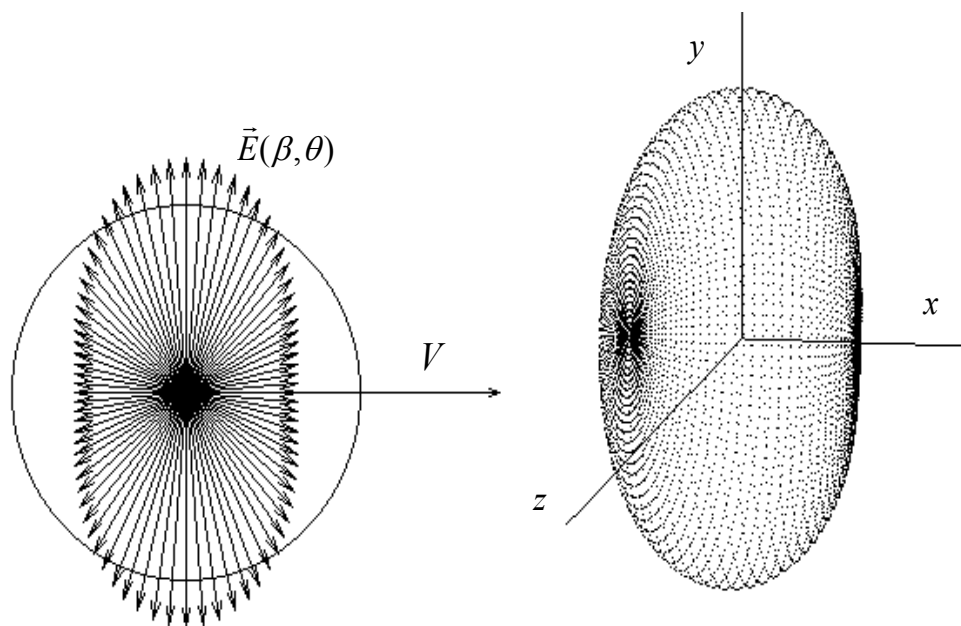
Іншими словами, в будь-якій площині, в якій знаходиться вісь OX величина вектора \vec{E} на полярній діаграмі утворює картину електричного поля, що нагадує «вісімку». Окрім того, в посібнику [60, с. 163–164] та деяких методичних статтях, (більш детально див. [32]), картина поля, яка подана з допомогою силових ліній не тільки невдало ілюструє властивості електричного поля та сплющення його в напрямі руху ЗЧ, а й є помилковою.

Картина електричного поля (4.1) в тривимірній моделі має вигляд, зображений на мал. 4.4, 4.5, 4.6. В центрі знаходиться заряджена частинка, а віддаль від центру до точок на моделі дорівнює, в певному масштабі, величині напруженості ЕП в точках простору, рівновіддалених від миттєвого положення ЗЧ. Так, при $V = 0$ ми одержуємо модель, що відображає електричне поле нерухомої або повільно рухомої ($V \ll c$), ЗЧ (мал. 4.4).



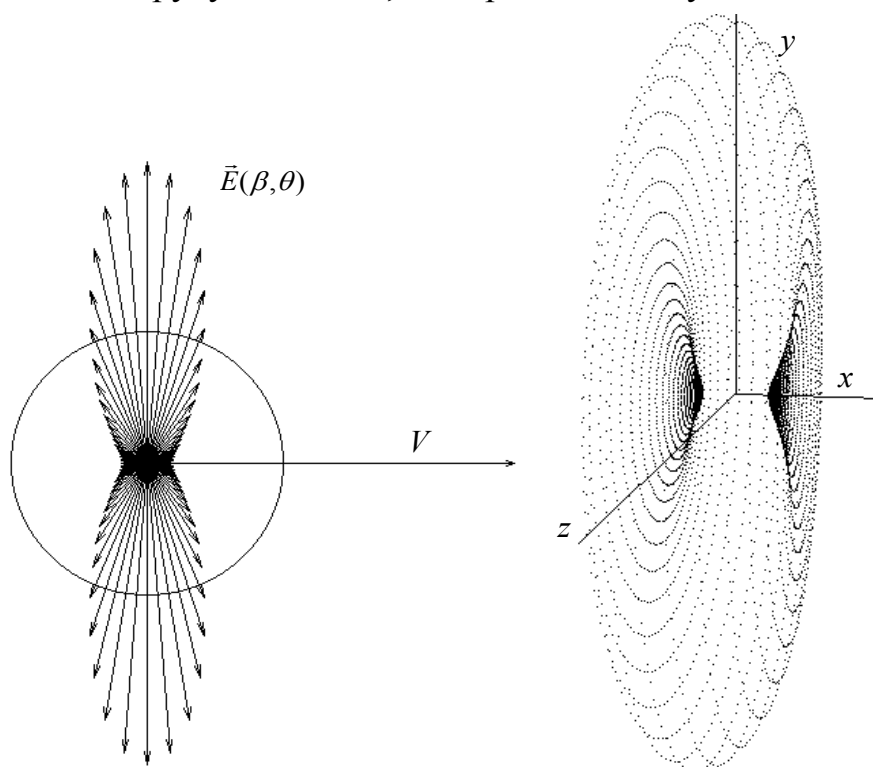
Мал. 4.4

З малюнка 4.4 видно, що вектори напруженості електричного поля на однаковій відстані від заряду однакові за величиною. Але цей висновок справедливий тільки при малих швидкостях руху ЗЧ, або коли ЗЧ нерухома. При збільшенні швидкості поле зарядженої частинки начебто сплющується в напрямі її руху. Так, наприклад, $V = 0,6c$ зліва на мал. 4.5 зображена картина ЕП в площині XOY , справа – просторова картина.



Мал. 4.5

При швидкості руху ЗЧ $V = 0,9c$ картина поля суттєво змінюється, мал. 4.6.



Мал. 4.6. Картина електричного поля РЗЧ при швидкості руху $V=0.9c$

Згідно з (4.7), $\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, E]$, вектори напруженості електричного та індукції магнітного полів взаємно перпендикулярні. Видно, що лінії \vec{B} утворюють концентричні кола з центром на вісі OX , вздовж якої рухається заряджена частинка q .

Конфігурація електромагнітного поля заряду, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат K , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом із ЗЧ. Але якщо зафіксувати довільну точку простору, то в ній і напруженість електричного \vec{E} й індукція магнітного полів \vec{B} є функцією часу.

Слід зауважити, що, як буде видно із подальшого аналізу, навіть незначна відмінність електричного поля РЗЧ (при $v \ll c$) від електричного поля нерухомої ЗЧ носить принциповий характер.

У більшості навчально-методичних видань принципова відмінність між електричним полем рухомої ЗЧ і електричним полем нерухомої ЗЧ, не аналізується, більш того на неї не звертається увага. Такий підхід може призводити, принаймні, до помилок в розрахунках і некоректних висновків.

4.2. Магнітна взаємодія й СТВ. Закон Біо-Савара в релятивістській формі

Оскільки електричний струм в провідниках – це напрямлений рух електронів провідності, тому із спостережень за взаємодією паралельних провідників зі струмами, як було відмічено, впливає очевидний висновок: між двома процесіями рухомих електронів виникає додаткова сила, якої не було між нерухомими електронами.

Отже, природу цієї сили ми можемо з'ясувати, спираючись на принцип суперпозиції й аналізуючи взаємодію двох заряджених частинок, які рухаються паралельно одна одній з однаковими або різними за величиною швидкостями.

Тому в основу вивчення і розуміння магнітної взаємодії повинен бути покладений аналіз взаємодії двох ЗЧ, що рухаються. Для простоти та ясності аналізу розглянемо взаємодію двох ЗЧ, які рухаються паралельно одна одній з постійними швидкостями.

Зазначимо, що при коректному розгляді будь-якого явища з точки зору систем відліку, які знаходяться у відносному русі, слід спиратися на принцип відносності. Тобто в процесі встановлення співвідношення між довільною фізичною величиною, виміряною в різних системах відліку, слід викомалтовувати тільки методи спеціальної теорії відносності. Адже, як наголошував А. Ейнштейн, тільки теорія може сказати, що ж вимірюється в експерименті.

Таким чином, аналіз взаємодії двох рухомих ЗЧ будемо проводити з урахуванням точних співвідношень між фізичними величинами, що

характеризують рух та взаємодію ЗЧ (див. Додаток Д).

Здійснений у Додатку Д аналіз взаємодії двох рухомих заряджених частинок дозволяє дійти наступних висновків.

1. Необхідність введення поняття «магнітне поле» зумовлена вимогами теорії відносності, а саме: щоб рівняння руху матеріальної точки мали однаковий вигляд в СВ K і в СВ K' , сили при переході від однієї СВ до іншої повинні перетворюватися за певними формулами, а із врахуванням виразу для напруженості електричного поля рухомої ЗЧ (4.1) додаткова сила, що забезпечує виконання цих вимог визначається:

$$\vec{F}_L = q_2 \left[\vec{V}, \left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right] = q_2 [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.4)$$

Тобто, магнітне поле з індукцією $\vec{B} = \left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E} \right]$ необхідно ввести для того, щоб забезпечити або пояснити виконання принципу відносності в електродинаміці.

Але при цьому нічого не можна сказати про механізм виникнення, створення чи породження цього магнітного поля.

Із вимог СТВ випливає тільки необхідність існування такого, пов'язаного з рухомою ЗЧ, поля, яке характеризується властивостями (Д.8), (Д.9).

2. Магнітна взаємодія – суто релятивістський ефект, який виникає при будь-якій швидкості руху заряджених частинок, навіть при $v \ll c$. Але при цьому аналіз слід проводити у відповідності з точними релятивістськими співвідношеннями, бо якщо не враховувати точні релятивістські формули (десь знехтувати швидкістю руху ЗЧ v порівняно з швидкістю світла у вакуумі c) теоретично магнітної взаємодії ми не отримаємо.

3. Такий підхід дає можливість відразу отримати вираз для сили Лорентца, (формули (Д.8) і (Д.10)), що діє на заряд q_2 з боку МП, породженого рухом першої ЗЧ (величина заряду q_1).

І, як бачимо, сила Лорентца виникає не при «русі відносно магнітного поля», а при русі зарядженої частинки в магнітному полі, бо з точки зору СВ K заряди q_1 і q_2 нерухомі один відносно одного.

Обґрунтування виразу (4.4) для сили Лорентца в загальному випадку ми матимемо тоді, коли одна із ЗЧ рухається в магнітному полі, яке створюється не рухом іншої ЗЧ, а довільними зовнішніми джерелами МП (наприклад, лінійною процесією інших ЗЧ).

4. Визначення виразу для сили Ампера можна отримати на основі розгляду лінійної процесії ЗЧ (наприклад, провідник зі струмом I) в

магнітному полі \vec{B} , створеному рухом інших ЗЧ.

Оскільки на кожний з електронів провідності, які реалізують елемент струму, діє сила Лорентца, то для сили Ампера, що діє на елемент струму $I \cdot d\vec{l}$ в МП з індукцією \vec{B} знаходимо:

$$d\vec{F} = -q[\vec{v}, \vec{B}]N = I \cdot [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (4.5)$$

бо $I \cdot d\vec{l} = -N \cdot q \cdot \vec{v}$, де N – число електронів, що реалізують елемент струму $I \cdot d\vec{l}$; \vec{v} – дрейфова швидкість руху електронів провідності.

5. Доходимо висновку, що в одній і тій самій просторово-часовій точці напруженість електричного та індукція магнітного поля ЕМП, яке зв'язане з рухом ЗЧ, взаємозумовлені та пов'язані співвідношенням:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, E_1] = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{V}, \vec{E}_1]. \quad (4.6)$$

Узагальнюючи останній вираз можна стверджувати, що будь-яке електричне поле, яке «переміщується» зі швидкістю \vec{V} , породжує в тій самій просторово-часовій точці магнітне поле, величина і напрям якого визначаються формулою:

$$\vec{B} = \left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E} \right]. \quad (4.7)$$

Аналізуючи більш детально цю модель, можна обґрунтувати і формули перетворення компонентів електромагнітного поля при переході від однієї СВ до іншої (див. *Задачу 4.3*).

6. Одержуємо закон Біо-Савара в релятивістській формі, використовуючи вираз (4.11) та принцип суперпозиції для магнітних полів, що породжуються окремими електронами, і які входять до елемента струму $I \cdot d\vec{l}$:

$$d\vec{B} = N \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}] (1 - \beta^2)}{r^3 \cdot (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}] (1 - \beta^2)}{[(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2)]^{3/2}}, \quad (4.8)$$

де I – сила струму, \vec{r} – радіус-вектор, проведений від елемента струму $I d\vec{l}$ в дану точку поля, $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\sin^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2}$, $\rho^2 = y^2 + z^2$, $\beta = \frac{v}{c}$, v – дрейфова швидкість руху електронів провідності в провіднику зі струмом I ; c – швидкість світла в вакуумі, θ – кут між \vec{r} та елементом струму $I d\vec{l}$.

Очевидно, що при $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ закон (4.8) переходить в звичайний закон

Біо-Савара

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.9)$$

Таким чином, можна стверджувати, що закон (4.8) – закон Біо-Савара у релятивістській формі, є більш загальним і точним. У всякому разі для рівномірного і прямолінійного руху заряджених частинок тільки він надає адекватний і коректний опис магнітної взаємодії (див. нижче та Додаток Е).

7. Вектор магнітної індукції, перпендикулярний напруженості електричного поля та швидкості руху ЗЧ, тому силові лінії вектора магнітної індукції утворюють сукупність концентричних кіл, що лежать в площині перпендикулярній \vec{V} , а центри яких знаходяться на лінії руху ЗЧ.

До речі, цей висновок, що випливає й із виразів для \vec{E} та \vec{B} РЗЧ призводить до формулювання «правила свердлика» для визначення в курсі фізики середньої школи напрямку силових ліній магнітного поля струмів.

8. Таким чином, закон Біо-Савара в релятивістській формі (4.8) впливає як наслідок закону Кулона та принципу відносності.

Іншими словами, вираз для індукції МП, яке створюється елементом струму при довільній величині швидкості руху носіїв заряду визначається законом (4.8).

9. Наскільки точно закон (4.8) відповідає реальності? Експериментально перевірити (4.8) дуже непросто, тим більше що і класичний закон Біо-Савара (4.9) вряд чи можна перевірити безпосередньо шляхом прямого експерименту.

У більшості навчально-методичних джерел вважається, що непрямим підтвердженням класичного закону Біо-Савара (4.9) є несуперечність результатів розрахунків магнітного поля на його основі і відповідних дослідних фактів.

Проте аналіз ЕМП (яке створюється рівномірно рухомими зарядженими частинками) з викомалтанням класичного закону Біо-Савара приводить до хибних висновків (див. **Задачу 4.1**). Ці висновки суперечать як фундаментальному принципу відносності так і експериментальним спостереженням [35; 36, с. 22-25].

В той же час, ці хибні висновки та суперечності, які виникають при сумісному застосуванні класичного закону Біо-Савара та виразу для напруженості електричного поля (див. мал. 4.15. - 4.18 **Задачі 4.1**), як виявляється, природно спростовуються шляхом використання виведеного вище закону Біо-Савара в релятивістській формі (4.8) та виразу для напруженості електричного поля рівномірно рухомої ЗЧ (4.1).

4.3. Принцип відносності і явище електромагнітної індукції

У результаті обговорення у навчальній та методичній літературі [25; 28; 37; 70] фізичних причин виникнення ЕРС індукції прийнята точка зору про подвійну природу ЕРС індукції. Якщо в лабораторній системі відліку K існує постійне, але неоднорідне магнітне поле, то ЕРС індукції, що виникає в контурі, який рухається в цьому полі, зумовлена силою Лорентца, що діє на вільні електрони провідності в цьому металевому контурі. А у власній СВ контура (СВ K') ЕРС зумовлена виникненням електричного поля, яке породжується рухом відносно K' магнітного поля СВ K . Спостерігач СВ K' може також інтерпретувати «свою» ЕРС як наслідок зміни магнітної індукції з часом.

Власне, у першій роботі А. Ейнштейна зі спеціальної теорії відносності «До електродинаміки рухомих тіл» [89] й наголошується на цьому: «Відомо, що електродинаміка Максвелла в сучасному її вигляді у застосуванні до рухомих тіл приводить до асиметрії, яка невласлива, мабуть, самим явищам. Пригадаємо, наприклад, електродинамічну взаємодію між магнітом і провідником зі струмом. Спостережуване явище залежить тут тільки від відносного руху провідника і магніту, тоді як, згідно зі звичайними уявленнями, два випадки, в яких рухається або одне, або інше з цих тіл, повинні бути строго розмежовані» [89, с. 7].

Як показує аналіз ([30; 35; 38]), в більшості випадків ЕРС визначається швидкістю зміни магнітного потоку через контур і не залежить від того, в який спосіб реалізується зміна магнітного потоку Φ («правило потоку»):

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.10)$$

«Ми не знаємо у фізиці жодного іншого такого прикладу, коли б простий і точний загальний закон вимагав для свого справжнього розуміння аналізу в термінах двох різних явищ. Зазвичай таке красиве узагальнення виявляється впливаючим з єдиного глибокого основоположного принципу. Але в цьому випадку якого-небудь особливо глибокого принципу не видно. Ми повинні сприймати «правило» як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ» (Р. Фейнман [76, с. 53]).

Але при аналізі конкретних фізичних ситуацій, в яких спостерігається явище електромагнітної індукції, завжди слід звертати увагу на фізичну причину виникнення ЕРС.

У посібнику І.Є. Іродова повторюються слова Р. Фейнмана щодо відсутності єдиного принципу, який лежить в основі закону електромагнітної індукції: «Зважаючи на те що ніякого єдиного глибокого принципу, об'єднуючого обидва явища, не видно, ми повинні сприймати закон

електромагнітної індукції як сумісний ефект двох абсолютно різних явищ. Обидва ці явища, взагалі кажучи, незалежні один від одного, і проте – що дивно – ЕРС індукції в контурі завжди дорівнює зміні магнітного потоку крізь контур» [30, с. 230].

В курсах загальної фізики при вивченні явища електромагнітної індукції теж, як правило, акцентується увага на двох фізичних причинах виникнення індукованої ЕРС в замкнутому контурі або в окремих його частинах: дія сили Лорентца на вільні електрони провідника, який рухається в магнітному полі, та виникнення вихрового електричного поля у нестационарному МП.

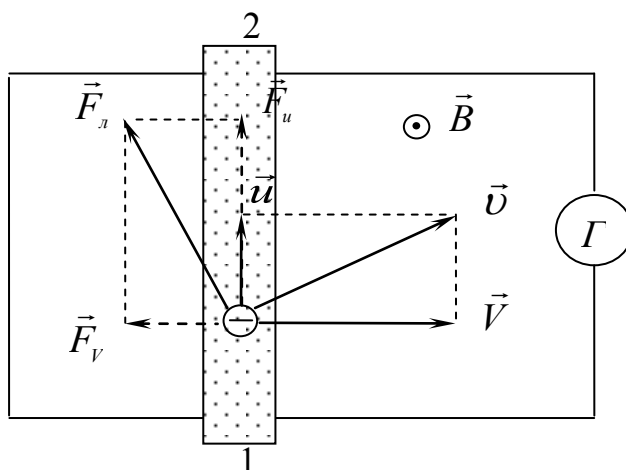
У традиційних методиках вивчення фізики у СНЗ пропонується вивчати закономірності цього явища теж у два етапи [3; 11; 14; 32]. Спочатку аналізується явище ЕМІ в рухомих провідниках з викомалтанням традиційної моделі (мал. 4.7), а потім, спираючись на відомі досліди, що ілюструють це явище, в учнів і студентів формуються уявлення про вихрове електричне поле [3; 32].

Аналіз науково-методичних публікацій з питань інтерпретації явища електромагнітної індукції та методик його вивчення показує цілу низку проблем методичного характеру [14; 38] (див. також п. 3.1 монографії [35]).

Дійсно, при обґрунтуванні локальної форми закону ЕМІ в ряді посібників з електродинаміки (див., наприклад, [65, с. 233]) залишається незрозумілим і *необґрунтованим* перехід від повної похідної до частинної, і навпаки.

Некоректним і непослідовним виявляється виведення

рівняння $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ із «правила потоку» (4.10).



Мал. 4.7. Традиційна модель, яка викомалтовується для обґрунтування «правила потоку» (4.10)

Висновок у фізичній енциклопедії [78] відносно того, що співвідношення

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{ або } \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}d\vec{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

універсально застосовні [78, с. 537] і до довільних *рухомих* середовищ і систем, суперечить відповідним положенням посібника Д. В. Сивухіна [69, с. 271–272] і суті цих рівнянь Максвелла.

Тобто, такий висновок є помилковим, оскільки дані рівняння Максвелла описують явище ЕМІ в нерухомих середовищах та контурах.

У той час як електростатичній теоремі Гаусса, теоремі про циркуляцію вектора \vec{B} , і іншим рівнянням Максвелла в інтегральній формі відповідають рівняння Максвелла в диференційній формі, для «правила потоку» (4.16), як видно із аналізу науково-методичної літератури [35], не сформульовано відповідного локального закону.

Один із аспектів сучасної фізичної парадигми припускає, що інтегральний закон є наслідком локального закону. Тобто, виходячи із суті електродинаміки як локальної і польової теорії, інтегральна форма закону ЕМІ повинна бути наслідком локальної форми цього закону. Вихідним законом слід вважати визначення $\operatorname{rot}\vec{E}$ в довільно рухомій точці простору, а не тільки в нерухомій ($\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$). Але стосовно рівняння Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ в навчально-методичній літературі прийнятий зовсім інший підхід [35].

Далі, усталене твердження, що закон ЕМІ в інтегральній формі («правило потоку») (4.10) є експериментальним законом, ми вважаємо помилковим.

Дійсно, (4.10) не може бути експериментальним законом, оскільки не існують прилади (принцип роботи яких не оснований на (4.10)), які могли б вимірювати магнітний потік Φ , або зміну магнітного потоку $d\Phi$.

Розуміння, що закон (4.10) не є експериментальним законом постає надзвичайно важливим як у науковому, так і методичному значенні. Цей висновок важливий для усвідомлення співвідношення теоретичного та емпіричного в процесі пізнання фізичних явищ та формулювання законів і принципів, які описують ці явища.

У навчально-методичній літературі «правило потоку» (4.10) виводиться, із аналізу мал. 4.7 та виходячи із виразу для сили Лорентца як сторонньої сили. Саме через математичну простоту та прозорість цей спосіб обґрунтування (4.10) є найбільш поширеним в науково-методичній літературі.

У той же час, незважаючи на те, що електродинаміка по суті своїй належить до релятивістської фізики, аналіз значної частини навчальних моделей електродинаміки проводиться в рамках класичної механіки.

Так, при розгляді традиційної моделі (див. мал. 4.7) [3, с. 24; 14, с. 12] формули додавання швидкостей, а також формули перетворення компонентів електромагнітного поля беруться тільки в нерелятивістському наближенні [3; 11; 14; 27, с. 261; 65]. Останнє не сприяє глибокому розумінню суті явища та принципу відносності, а інколи приводить і до фактичних помилок.

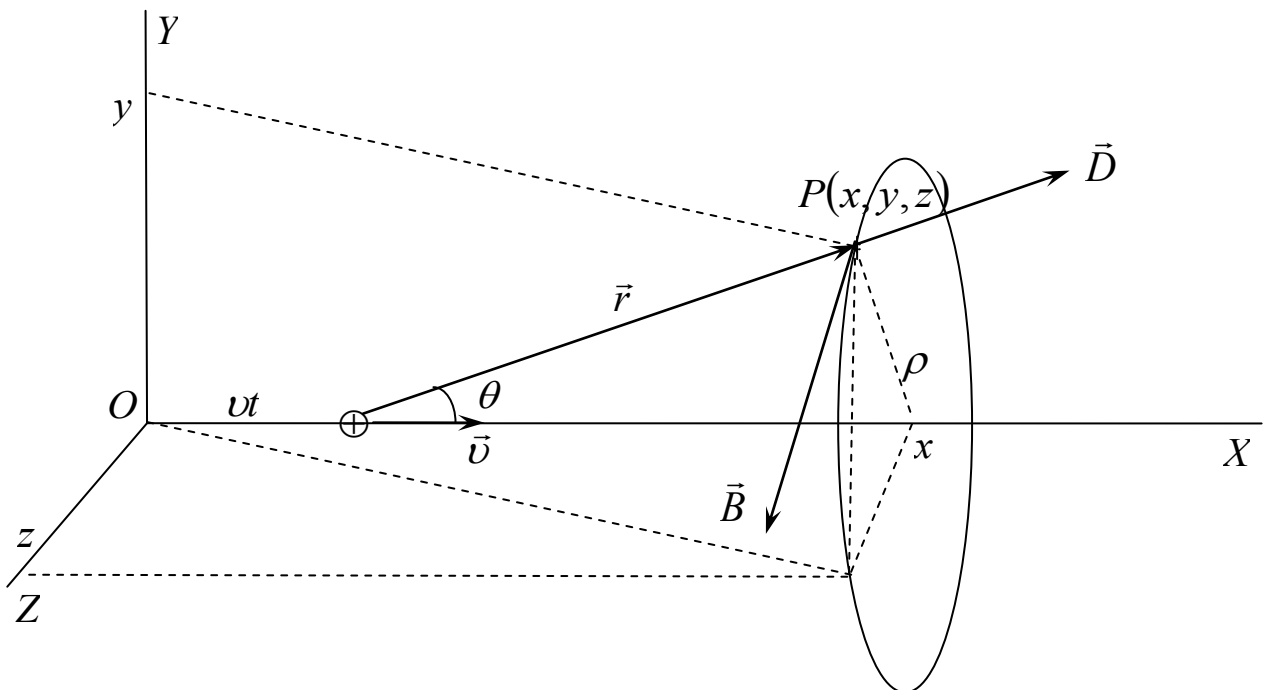
Таким чином, можна сказати, що при описі явища ЕМІ ряд положень (як фізичних так і методичних) є не достатньо чітко сформульованими, і не є послідовними. Все це вимагає більш уважного і глибокого аналізу явища ЕМІ та методики його вивчення.

Покажемо, що явище ЕМІ та закон електромагнітної індукції є наслідком принципу відносності та закону Кулона.

Для вектора $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ електричного поля рівномірно рухомої зарядженої частинки [35] маємо:

$$\vec{D} = \frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi r^3(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{4\pi \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.11)$$

У СВ K , що пов'язана з контуром, ЗЧ рухається з деякою швидкістю. Але електричне поле рухомої ЗЧ є *непотенціальним*, і це має принципове значення (див. нижче).



Мал. 4.8. Електромагнітне поле ЗЧ, що рухається рівномірно і прямолінійно

Дійсно, використовуючи (4.11), для ротора вектора \vec{D} знаходимо:

$$\text{rot} \vec{D} = \left(\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

$$= \frac{3q(1-\beta^2)(x-ut) \cdot z \cdot \beta^2}{4\pi \left\{ (x-ut)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{j} - \frac{3q(1-\beta^2)y(x-ut) \cdot \beta^2}{4\pi \left\{ (x-ut)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}. \quad (4.12)$$

З метою спрощення виразів та для більшої прозорості розрахунків і висновків, ЕМП будемо розглядати в площині XOY (Мал. 4.9). Тоді

$$\text{rot}_z \vec{D} = - \frac{3q(1-\beta^2)y(x-ut) \cdot \beta^2}{4\pi \left\{ (x-ut)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}. \quad (4.13)$$

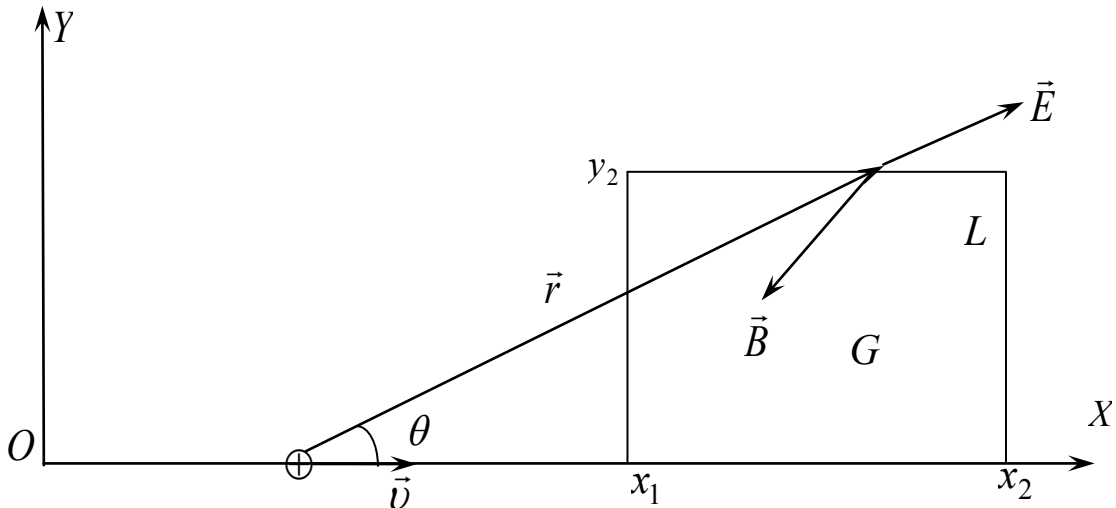
А для циркуляції вектора \vec{D} вздовж контура L (мал. 4.9) одержуємо:

$$\oint \vec{D} d\vec{l} = \frac{q\beta^2}{4\pi} \left(\frac{1}{x_2-ut} - \frac{1}{x_1-ut} \right) + \frac{q\beta^2}{4\pi} \left(\frac{1}{(x-ut)^2 + y_2^2(1-\beta^2)} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2}. \quad (4.14)$$

Тобто $\oint \vec{D} d\vec{l} \neq 0$ – поле вектора \vec{D} є непотенціальним. Отже прямокутний провідний контур знаходиться в непотенціальному електричному полі.

Тому циркуляція цього непотенціального поля вздовж нерухомого в СВ K контура L не дорівнює нулю: $\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ (див. вираз (4.14)).

Тобто, в будь-якому контурі, відносно якого рухаються ЗЧ (навіть з швидкостями $v \ll c$) повинна виникати ЕРС, що чисельно дорівнює циркуляції вектора \vec{E} непотенціального електричного поля РЗЧ.



Мал. 4.9. Провідний прямокутний контур L знаходиться в площині XOY

Але цей висновок суперечить принципу відносності, а принцип відносності – один із фундаментальних принципів не тільки фізики, а й усього сучасного світогляду та методології наукового пізнання.

Дійсно, у власній системі відліку зарядженої частинки, (СВ K'), контур L рухається в кулонівському потенціальному (консервативному) полі нерухомої ЗЧ. В цьому випадку ЕРС в контурі $\mathcal{E}' = \oint \vec{E}' d\vec{l} = 0$. Згідно з принципом відносності ЕРС у цьому контурі повинна бути рівною нулю і в будь-якій іншій системі відліку.

Тому для виконання принципу відносності слід припустити існування в СВ K додаткової ЕРС, яка компенсує в будь-який момент часу циркуляцію непотенціального поля $\oint \vec{E} d\vec{l}$ в контурі L .

Приклад 4.1. Заряджена частинка рухається у вакуумі зі швидкістю \vec{v} у СВ K . Показати, що непотенціальне електричне поле РЗЧ в кожній точці простору і в довільний момент часу в СВ K компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем цієї ж РЗЧ.

Розв'язання: Оскільки електромагнітне поле РЗЧ визначається формулами (4.1) та (Д.9), то вихор вектора напруженості електричного поля РЗЧ дорівнює

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = & \frac{3q\beta^2(1-\beta^2)(x-vt)z}{4\pi\epsilon_0 \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{j} - \\ & - \frac{3q\beta^2(1-\beta^2)(x-vt)y}{4\pi\epsilon_0 \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}, \end{aligned}$$

а частинна похідна вектора \vec{B} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = & - \frac{3q\beta^2(1-\beta^2)(x-vt)z}{4\pi\epsilon_0 \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{j} + \\ & + \frac{3q\beta^2(1-\beta^2)(x-vt)y}{4\pi\epsilon_0 \left\{ (x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2) \right\}^{5/2}} \vec{k}. \end{aligned}$$

Порівнюючи ці два останніх вирази, одержуємо фундаментальне рівняння закону електромагнітної індукції

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Таким чином, аналіз властивостей електромагнітного поля РЗЧ призводить до однозначної відповіді: непотенціальне вихрове електричне поле РЗЧ в кожній точці простору, в кожний момент часу компенсується вихровим електричним полем, яке породжується змінним магнітним полем, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Ще раз підкреслимо, що для виконання ПВ необхідно вимагати, щоб в системі відліку, яка зв'язана з контуром L (мал. 4.8, мал. 4.9), циркуляція вектора \vec{E} по цьому контуру повністю компенсувалася ЕРС зумовленою зміною магнітного потоку через поверхню, що обмежена контуром L . Тобто, щоб і з точки зору СВ K і з точки зору СВ K' в контурі L не виникало ЕРС.

Власне ця вимога ПВ та непотенціальність електричного поля РЗЧ з однозначністю призводять до рівняння (4.15). Це і дає можливість зробити висновок, *що закон електромагнітної індукції (4.15) є наслідком ПВ та закону Кулона.*

Іншими словами, явище електромагнітної індукції «з'являється» для того, щоб компенсувати появу в лабораторній системі відліку циркуляцію вектора E по довільному замкненому контурі непотенціального електричного поля рухомої зарядженої частинки. Виникнення ЕРС індукції згідно з (4.15) необхідне для виконання принципу відносності.

Покажемо, що ЕРС в контурі, зображеному на мал. 4.9, який знаходиться в ЕМП РЗЧ, визначається формулою $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

Приклад 4.2. Показати, що при русі зарядженої частинки зміна в часі магнітного потоку через нерухомий контур L (мал. 4.9) дорівнює зі знаком мінус циркуляції вектора напруженості \vec{E} електричного поля РЗЧ по контуру L .

Розв'язання: Знайдемо потік $\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ через поверхню обмежену прямокутним контуром L (Мал. 4.10):

$$\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} d\vec{S},$$

де $\vec{B}(\vec{r}, t)$ – індукція магнітного поля РЗЧ в точках цієї поверхні.

$$\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 q [\vec{v} \cdot \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$B_z = \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2) v \cdot r \sin \theta}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2) \right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 q \cdot (1 - \beta^2) \cdot v \cdot \sqrt{y^2}}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + (y^2)(1 - \beta^2) \right\}^{\frac{3}{2}}},$$

де $\sin^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2}$, див. Мал. 4.9.

Оскільки рівняння поверхні S , яка обмежена контуром L має вигляд $z = f(x, y) = 0$, то величина магнітного потоку через цю поверхню в довільний момент часу дорівнює:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_z dS = \int_G B_z \cdot dx dy = \\ &= \frac{\mu_0 q (1 - \beta^2) v}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_2} \frac{y dy}{\left\{ (x - vt)^2 + y^2 (1 - \beta^2) \right\}^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi} \left(\ln \frac{x_2 - vt}{x_1 - vt} - \ln \frac{x_2 - vt + \sqrt{(x_2 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}}{x_1 - vt + \sqrt{(x_1 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} \right).\end{aligned}$$

Таким чином, для величини $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ одержуємо:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 q v^2}{4\pi} \left(\frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - vt)^2 + y_2^2 (1 - \beta^2)}} \right), \text{що}$$

збігається з виразом (4.14) для вакууму.

Важливо наголосити, що при використанні нерелятивістських виразів для векторів поля \vec{E} та \vec{B} ЕМП РЗЧ:

$$\vec{E}_{np} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \vec{B}_{np} = \frac{\mu_0 [\vec{v}, \vec{r}] q \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{[\vec{v}, \vec{r}] \epsilon_0 \mu_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}_{np}],$$

одержуємо результат, що суперечить ПВ:

$$\text{rot} \vec{E}_{np} = 0, \text{ але } \frac{\partial \vec{B}_{np}}{\partial t} \neq 0,$$

де $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор проведений із миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля.

Дійсно, для ситуації, зображеної на мал. 4.9 маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}_{np}}{\partial t} &= \frac{\partial B_{np}^x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial B_{np}^y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial B_{np}^z}{\partial t} \vec{k}; \\ \frac{\partial B_{np}^z}{\partial t} &= \frac{3\mu_0 q v^2 y (x - vt)}{4\pi \left\{ (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}$$

А тому

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 q v^2 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_2 - vt} - \frac{1}{x_1 - vt} - \frac{1}{\sqrt{(x_2 - vt)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_1 - vt)^2 + y^2}} \right).$$

В той же час циркуляція вектора \vec{E}_{nr} по контуру L дорівнює нулеві (оскільки $rot \vec{E}_{nr} = 0$).

Тобто, з точки зору СВ, яка зв'язана із ЗЧ, ЕРС в контурі дорівнює нулю, а з точки зору СВ, яка зв'язана із контуром ЕРС дорівнює $-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. Має місце явне порушення принципу відносності.

Таким чином, при аналізі будь-яких електромагнітних явищ для одержання коректних несуперечливих результатів, слід користуватися формулами та методами теорії відносності.

Фундаментальне рівняння $rot \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ми обґрунтували в результаті аналізу окремої локальної електродинамічної задачі. Узагальнюючи (4.15) на випадок змінного магнітного поля, створеного довільними його джерелами, можна стверджувати:

Локальна форма закону ЕМІ впливає як наслідок закону Кулона та ПВ.

Рівняння $rot \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ обґрунтовано нами для довільної точки простору, в якому існує змінне магнітне поле, **але для точки нерухомої в даній системі відліку.**

Якщо трохи ускладнити задачу і розглянути рух «точки спостереження» в довільному МП $\vec{B}(\vec{r}, t)$ зі швидкістю \vec{V} , то знайдемо, що [32]:

$$rot \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (4.16)$$

де $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{B}$ – це зміна в часі вектора \vec{B} з точки зору СВ K в тілі (середовищі), яке рухається зі швидкістю \vec{V} відносно СВ K .

При русі «точки спостереження» в полі $\vec{B}(\vec{r}, t)$ субстанціональна, або повна похідна $\frac{d\vec{B}}{dt}$ описує зміну в часі поля \vec{B} не тільки тому, що це поле нестационарне, а і тому, що точка рухається через неоднорідне поле.

Тобто, ми можемо узагальнити закон (4.16) на довільні магнітні поля $\vec{B}(\vec{r}, t)$, створені іншими джерелами, а не тільки РЗЧ.

При узагальненні цього результату на змінні тільки в часі магнітні поля довільної природи та використовуючи теорему Стокса й принцип суперпозиції, ми одержуємо вираз для ЕРС індукції в нерухомому контурі, рівняння (4.10).

Тобто, якщо в неоднорідному та нестационарному полі $\vec{B}(\vec{r}, t)$ із швидкістю \vec{V} рухається «точка спостереження», то для повної похідної вектора індукції магнітного поля ми повинні, згідно з (4.16), записати:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div}\vec{V}.$$

В цих задачах $\text{div}\vec{B} = 0$ завжди, а при русі тіла як цілого $\text{div}\vec{V} = 0$ (при $\vec{V} = \text{const}$). Іншими словами, $\text{div}\vec{V} = 0$ означає «нестисливість» тіла.

Тому попередня формула спрощується

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] + (\vec{B}\nabla)\vec{V}. \quad (4.17)$$

Доданок $(\vec{B}\nabla)\vec{V}$ враховує зміну орієнтації вектора \vec{B} по відношенню до тіла. Цей доданок дорівнює нулю при поступальному русі з $\vec{V} = \text{const}$ і дорівнює $[\vec{\omega}, \vec{B}]$ при обертанні тіла ($\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, де $\vec{\omega}$ – кутова швидкість).

Тобто, при русі зі швидкістю \vec{V} «точки спостереження» в МП з індукцією \vec{B} рівняння (4.17) набуває вигляду:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4.18)$$

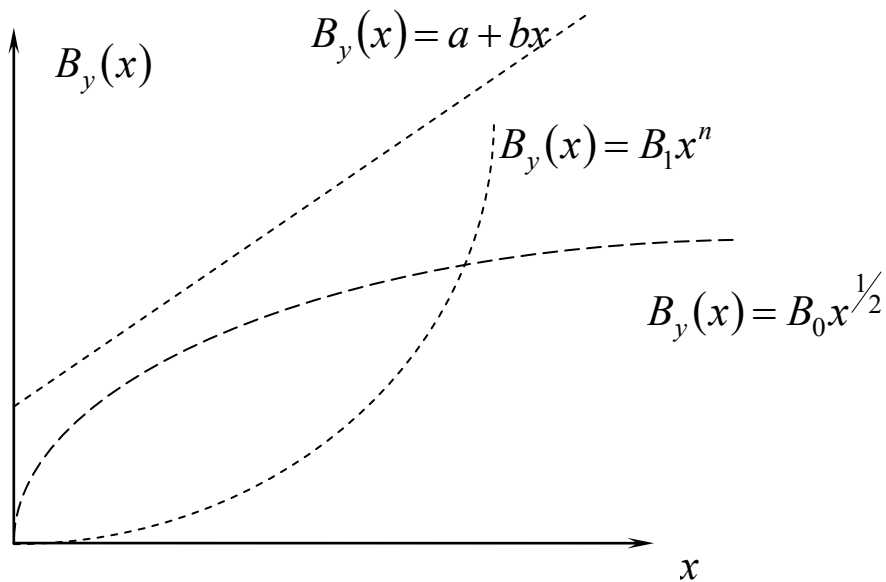
Якщо поле стаціонарне, то $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ і тоді напруженість індукційного електричного поля в провіднику, відповідно до (4.18), дорівнює:

$$\vec{E} = [\vec{V}, \vec{B}],$$

що й інтерпретується як напруженість сили Лорентца в традиційних методиках вивчення закону ЕМІ.

У випадку простого розподілу поля в просторі зміст доданку $(\vec{V}\nabla)\vec{B}$ можна пояснити за допомогою мал. 4.10, де зображені стаціонарні, неоднорідні поля $B_y(x) = a + bx$, $B_y(x) = B_0 x^{1/2}$ та $B_y(x) = B_1 x^n$, де a , b , B_0 , B_1 – деякі постійні величини.

Рухомий чи нерухомий контур – відносні твердження, а характеристика будь-якого векторного поля як постійного чи змінного носить, взагалі кажучи, відносний характер.



Мал. 4.10. Ілюстрація зміни магнітного поля в часі при русі «точки спостереження», в стаціонарних, неоднорідних полях $B_y(x)$

Наприклад, з точки зору СВ K поле B_y постійне, але неоднорідне, а з точки зору СВ K' , яка рухається з швидкістю $\vec{V} = const$ вздовж осі OX поле $B'_y(t')$ є функцією часу (Мал. 4.10). У таких полях МП спостерігається як змінне поле: $\frac{\partial B_y}{\partial t} = V \frac{\partial B_y}{\partial x}$.

В існуючих методиках вивчення і пояснення явища ЕМІ якраз і акцентують увагу на виникненні ЕРС в нерухомому і в рухомому контурі в довільному магнітному полі. А потім дивуються, що для пояснення цього явища доводиться використовувати різні фізичні причини, незважаючи на те, що практично у всіх випадках має місце «правило потоку».

Ці фізичні причини об'єднуються в одну, якщо закон ЕМІ записати у формі $rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$, яка випливає із принципу відносності та закону Кулона.

І тоді, ця дивина – ЕРС індукції в контурі, яка завжди дорівнює зміні магнітного потоку крізь контур, взагалі зникає, якщо уважніше подивитися на закон ЕМІ (4.16) або (4.18).

Дійсно, уявимо контур будь-якої форми, який рухається в довільному магнітному полі $\vec{B}(\vec{r}, t)$ зі швидкістю \vec{V} .

Тоді, оскільки ЕРС дорівнює циркуляції вектора \vec{E} , то, згідно з теоремою Стокса, ця циркуляція повинна дорівнювати потоку ротора вектора \vec{E} . А тому із врахуванням закону (4.16), (4.18) маємо:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [\vec{V}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}. \quad (4.19)$$

Таким чином, на основі узагальненого закону ЕМІ (4.16) ми одержали закон (4.19), який об'єднує в собі дві фізичні причини виникнення ЕРС індукції.

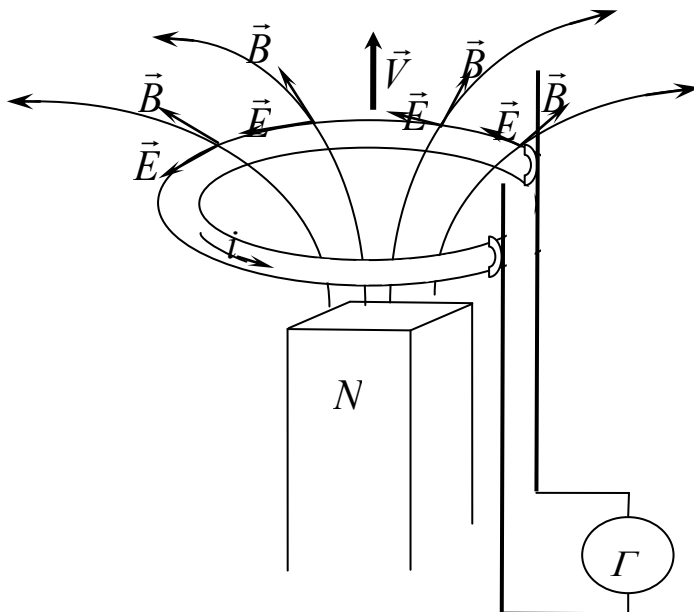
Вихрове електричне поле повністю визначається повною похідною за часом від індукції магнітного поля.

Тобто принцип відносності лежить в основі об'єднання «двох причин виникнення ЕРС індукції». На феноменологічному, явищному, рівні ці дві причини зумовлені самим процесом пізнання. Вихрове електричне поле породжується тільки фізичною величиною, що дорівнює повній похідній за часом індукції МП, $\frac{d\vec{B}}{dt}$.

Індукційне електричне поле в будь-якому випадку непотенціальне в цілому, а лінії вектора напруженості індукційного електричного поля завжди замкнені.

Аналізуючи модель, в якій відрізок провідника рухається в магнітному полі зі швидкістю $\vec{V} = \text{const}$ мимовільно формується уявлення про однорідність індукційного електричного поля в цій моделі. Зумовлене це уявлення тим, що в цьому випадку аналіз проводиться локально, без урахування картини електромагнітного поля в цілому.

Індукційний струм, що виникає в контурі при русі його в неоднорідному, стаціонарному магнітному полі, зумовлений вихровим електричним полем, яке породжується в кожній точці контура (локально) полем сили Лорентца. А більш точно задача описується рівнянням (4.16) з урахуванням (4.17) (див. Мал. 4.11).



Мал. 4.11. Вихрове електричне поле, яке породжується в кожній точці контуру (локально) полем сили Лорентца

Покажемо, що локальна форма узагальненого закону ЕМІ (4.16) описує всі ті явища, які в традиційній методиці вивчення інтерпретуються на основі уявлень про подвійну природу ЕРС індукції.

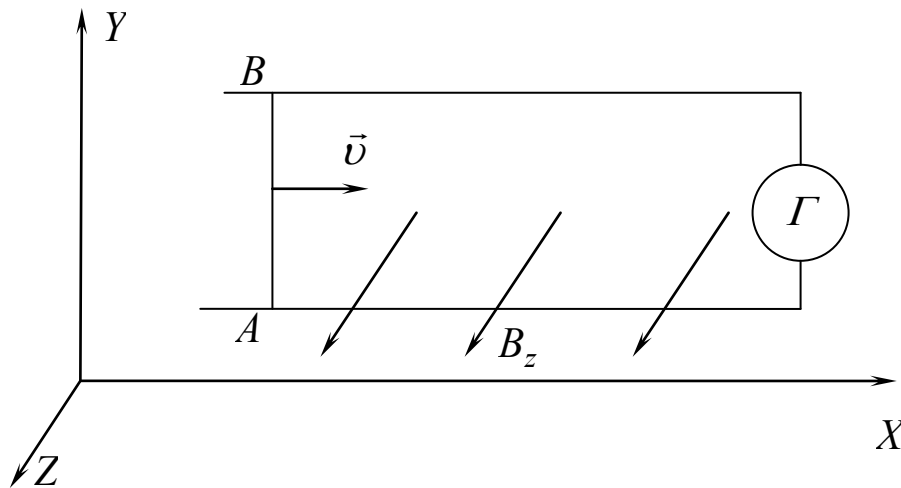
Приклад 4.3. Нехай в площині XOY СВ K в однорідному магнітному полі $\vec{B} = \vec{k}B_z$ знаходиться контур (мал. 4.12). Перемичка AB рухається зі швидкістю $\vec{v} = \vec{i}v$. Знайти напруженість індукційного електричного поля, яке виникає в кожній точці перемички.

Розв'язання: Оскільки МП стаціонарне, то закон ЕМІ (4.16) для цього випадку має вигляд:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Тобто в кожній точці перемички AB маємо індукційне електричне поле напруженістю

$$\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}], \quad E_i = -vB_z \vec{j}.$$



Мал. 4.12. В однорідному МП $\vec{k}B_z$ рухається перемичка AB

У цій задачі, згідно з умовою, у кожній точці перемички електричне поле не вихрове ($\text{rot}\vec{E} = 0$). В цьому можна впевнитися безпосереднім обчисленням величин $\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}]$ або $-(\vec{v}\nabla)\vec{B}$.

Приклад 4.4. Геометрія задачі така ж, як і в **Прикладі 4.3**, але МП неоднорідне, $\vec{B} = \vec{k}B_z(x) = \vec{k}B_1x^2$, де B_1 – деяка стала. Знайти напруженість індукційного електричного поля, яке виникає в кожній точці перемички.

Розв'язання: Використаємо закон ЕМІ (4.16)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Перш за все впевнимся безпосереднім обчисленням, що

$$-(\vec{v}\nabla)\vec{B} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}].$$

Дійсно, в цьому прикладі:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{B} = v_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = v \vec{k} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \vec{k} 2x v B_1;$$

$$[\vec{v}, \vec{B}] = -\vec{j} v B_z = -\vec{j} v B_1 x^2,$$

$$\text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] = -\left[\left(-\vec{i} \frac{\partial}{\partial z} v B_z \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x} v B_z \right] = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial x} v B_z = -\vec{k} 2x v B_1.$$

Таким чином,

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{v}\nabla)\vec{B} = -(\vec{v}\nabla)\vec{B} = -2\vec{k}x v B_1.$$

Внаслідок геометрії задачі останнє диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\text{rot}_z \vec{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -2\vec{k}x v B_1;$$

$$dE_y = -2\vec{k}x v B_1 \cdot dx; E_y = -v B_1 x^2 + C = -v B_1 x^2.$$

Одержуємо добре відомий зі шкільного та загального курсу фізики результат: напруженість стороннього електричного поля визначається силою Лорентца і дорівнює

$$\vec{E} = [\vec{v}, \vec{B}(x)] = -\vec{j} v B_1 x^2.$$

Отже, аналіз вивчення явища електромагнітної індукції та наявного стану його тлумачення виявив неоднозначність та нечіткість у багатьох підходів щодо його формулювання. Такий стан є наслідком усталеного (консервативного) у науково-методичній літературі підходу до аналізу значної частини навчальних моделей електродинаміки в межах класичної механіки, незважаючи на те, що електродинаміка по суті своїй належить до релятивістської фізики. З іншого боку, у параграфі показано, на якій підставі не слід відносити власне закон електромагнітної індукції до експериментальних.

Виходячи зі здійсненого аналізу, нами реалізований підхід, який дає можливість отримати закон електромагнітної індукції як наслідок принципу відносності та закону Кулона. Запропоновані задачі, ілюстративні малюнки й спосіб обґрунтування закону ЕМІ мають слугувати основою інноваційної методики навчання електродинаміки у педагогічному університеті.

4.4. Система рівнянь Максвелла у вакуумі як наслідок закону Кулона та принципу відносності

У запропонованому в попередніх пунктах цього розділу методичному підході щодо вивчення електродинаміки з використанням методів СТВ нами обґрунтовано низку основних законів та співвідношень класичної електродинаміки.

Так, із аналізу взаємодії двох рухомих ЗЧ одержані:

1. Вираз для індукції МП рівномірно рухомої ЗЧ (Д.9).
2. Закон Біо-Савара в релятивістській формі (4.8).
3. Вираз для сили Лорентца (4.4) і (Д.10).
4. Формула Ампера (4.5).

Застосування закону Біо-Савара в релятивістській формі дає можливість знайти:

- Індукцію МП нескінченно довгого прямолінійного провідника з постійним струмом.
- Індукцію МП відрізка прямолінійного провідника з постійним струмом (4.33).

Причому аналіз формул (4.33) як і закону Біо-Савара в релятивістській формі (4.8) при швидкостях руху заряджених частинок $v \ll c$ можна розглядати в якості ілюстрації принципу відповідності.

- В рамках запропонованого методичного підходу порівняно просто обґрунтовується система рівнянь Максвелла у вакуумі.

Дійсно, першу пару рівнянь Максвелла одержуємо із аналізу властивостей ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ (як основного модельного об'єкту в запропонованій методичній системі навчання електродинаміки на засадах СТВ).

Локальна форма закону ЕМІ впливає як наслідок закону Кулона та ПВ:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (4.16)$$

Рівняння $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ підтверджується при знаходженні дивергенції вектора індукції магнітного поля \vec{B} , створеного (породженого) будь-яким розподілом струмів, або рухомих ЗЧ (наприклад, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, де \vec{B} визначається (Д.10)).

Перше рівняння Максвелла другої пари РМ обґрунтовується на основі таких міркувань. Оскільки як для нерухомої так і для рівномірно рухомої зарядженої частинки, величина заряду якої q , потік вектора \vec{E} через довільну

замкнену поверхню визначається теоремою Гаусса $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ [39, с. 41–42], то

звідси одержуємо перше РМ в локальній формі:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Що стосується другого рівняння другої пари РМ, то, як відзначалося, аналіз властивостей ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ дає можливість відразу записати:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.20)$$

де (4.20) має місце для будь-якої нерухомої точки простору («точки спостереження») поза межами розмірів рухомої зарядженої частинки.

А тепер знайдемо вихор вектора індукції магнітного поля \vec{B} РЗЧ в тому випадку, коли ЗЧ перетинає поверхню, яка спирається на вибраний контур.

Перш за все зауважимо, що згідно з (4.7) маємо:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot}(\epsilon_0 \mu_0 [\vec{V}, \vec{E}]) = \epsilon_0 \mu_0 \operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{E}].$$

Вихор вектора $[\vec{V}, \vec{E}]$ визначається із наступної формули векторного аналізу:

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \cdot \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{E}] + (\vec{E} \nabla) \vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{V}.$$

Але оскільки для будь-якої точки простору нерухомої відносно СВ K' (тобто точки простору, нерухомої відносно ЗЧ) «точка спостереження»

рухається зі швидкістю \vec{V} відносно лабораторної СВ K повна похідна $\frac{d\vec{E}}{dt} = 0$,

тому для ротора вектора $[\vec{V}, \vec{E}]$ одержуємо:

$$\operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{E}] = (\vec{E} \nabla) \vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{V} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

До речі згідно з

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \cdot \vec{E} = 0,$$

для частинної похідної $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ одержуємо (див. також [39, с. 82–83]):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{V} \nabla) \cdot \vec{E}.$$

Отже, для довільної точки простору, яка нерухома в СВ K , зміна за

часом вектора \vec{E} буде зумовлена «переносом» електричного поля ЗЧ (4.1), що і використовується доволі часто в електродинамічних розрахунках [39, с. 193].

Тепер обґрунтуємо рівняння Максвелла для вихору вектора індукції МП викомалтовуючи властивості ЕМП РЗЧ:

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}\varepsilon_0\mu_0[\vec{V}, \vec{E}] = \varepsilon_0\mu_0 \left\{ (\vec{E}\nabla)\vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div}\vec{E} - \vec{E} \cdot \text{div}\vec{V} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right\}.$$

Оскільки $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, а $(\vec{E}\nabla)\vec{V} - \vec{E} \cdot \text{div}\vec{V} = 0$, то

$$\text{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \left\{ \vec{V} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right\} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

де $\vec{j} = \vec{V}\rho$ – густина струму, зумовленого рухом зі швидкістю \vec{V} заряду, розподіл якого в просторі визначається густиною заряду $\rho(\vec{r})$.

Таким чином, аналізуючи властивості ЕМП РЗЧ, ми одержали рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Отже, із конкретної задачі – аналізу взаємодії двох рухомих ЗЧ та аналізу властивостей ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ – одержана повна система законів і формул класичної електродинаміки.

Правомірність розповсюдження одержаних таким способом (для одного окремого випадку) законів на довільні електродинамічні системи ґрунтується на:

А) використанні принципу суперпозиції. Тобто, вважаємо при цьому, що електричне і магнітне поле струмів, як і взагалі електромагнітна взаємодія струмів є сумарним (інтегральним) проявом взаємодії рухомих заряджених частинок;

Б) експериментальному підтвердженні результатів розрахунків за допомогою одержаних таким чином формул і законів.

Наш підхід знаходиться в руслі загальноприйнятих науково-методичних шляхів обґрунтування загальних законів із результату одержаного при аналізі окремого випадку.

Незважаючи на те, що Р.Фейнман досить скептично ставився до ідеї, згідно з якою «весь електромагнетизм можна вивести із закону Кулона та перетворень Лорентца» [76, с. 261] ми вважаємо, що оскільки аналіз окремого електродинамічного прикладу на послідовних релятивістських засадах привів до основних законів електродинаміки, то і для довільної електродинамічної

ситуації одержані результати мають силу.

Всі ці строго доведені для окремої електродинамічної ситуації закони і співвідношення можна використовувати в загальному випадку, спираючись як на практичне підтвердження, так і на теорему про єдинність розв'язання [74, с. 435–436].

Запропоновані нами способи обґрунтування основних положень електродинаміки та рівнянь Максвелла слід розглядати не як абсолютно точне доведення їх, а як певний науково-методичний шлях, методичний прийом (спосіб) одержання РМ та інших основних співвідношень електродинаміки.

Тим більше, що, на наш погляд, у принципі неможливо абсолютно точно, в найзагальнішому вигляді, довести (вивести) наприклад, рівняння Максвелла. Існують, як уже наголошувалося, декілька більш-менш загальних способів обґрунтування рівнянь Максвелла. Кожен із них має свої переваги перед іншими та свої недоліки.

Отримані нами рівняння Максвелла як наслідок принципу відносності та закону Кулона можуть слугувати серйозною підставою для побудови методики навчання електродинаміки на більш стрункій, менш обтяженій емпіричними фактами й необґрунтованими положеннями, теорії.

Тому, на основі результатів викладених в цьому розділі, можна запропонувати наступні варіанти структури змістового компонента методики навчання електродинаміки на засадах спеціальної теорії відносності (Схема 1, Схема 2).

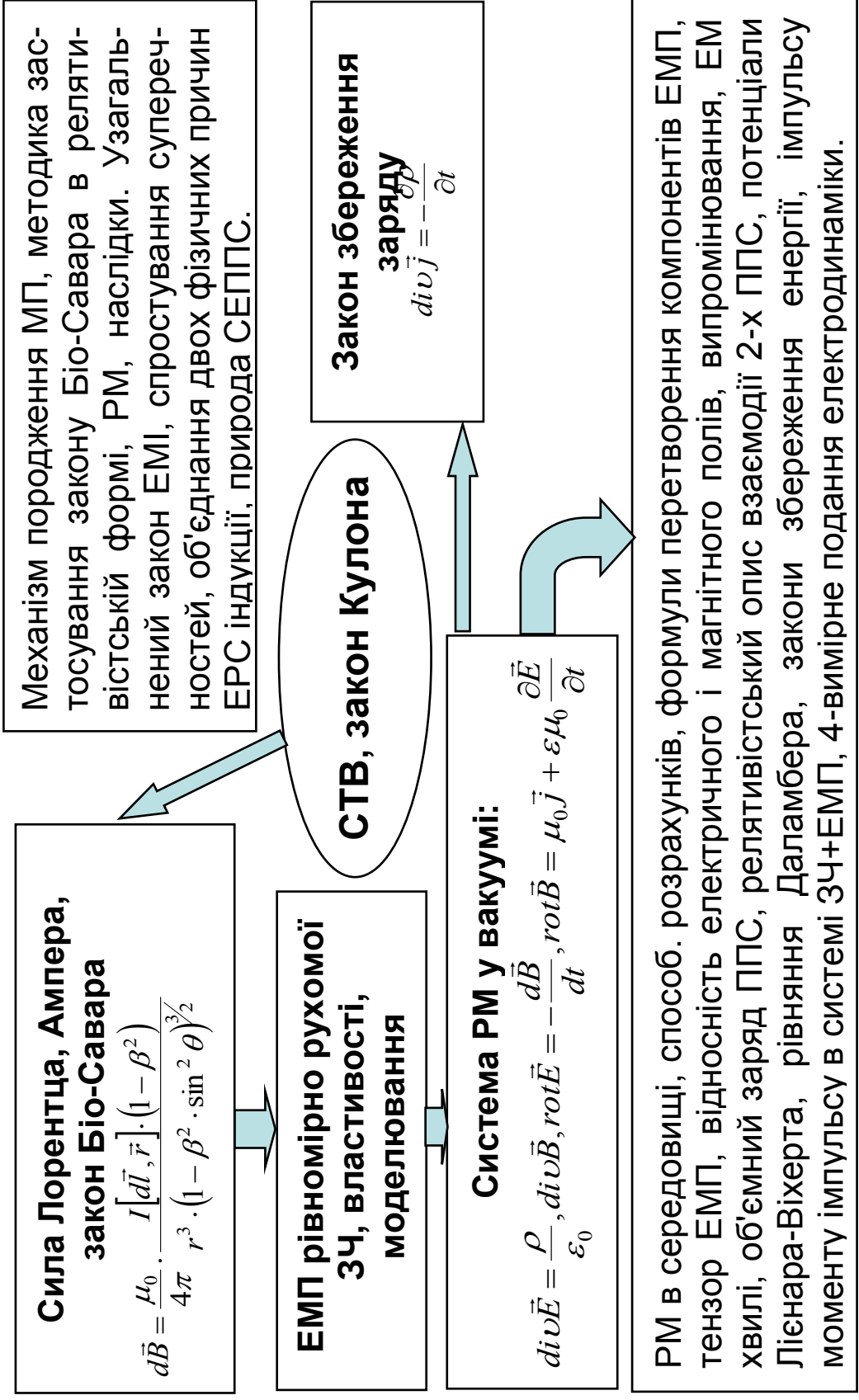


Схема 1. Структура змістового компоненту методики навчання електродинаміки на засадах спеціальної теорії відносності

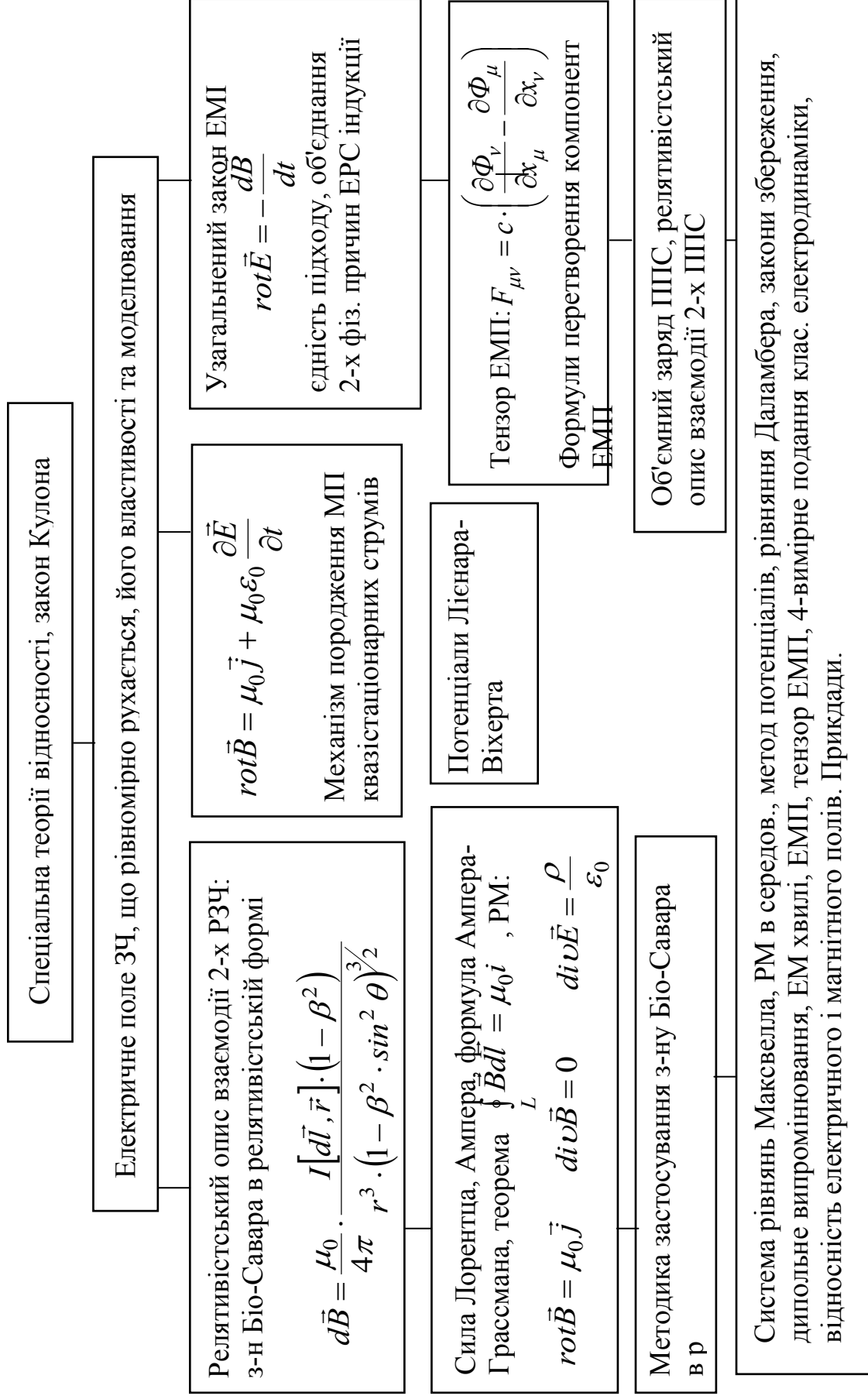
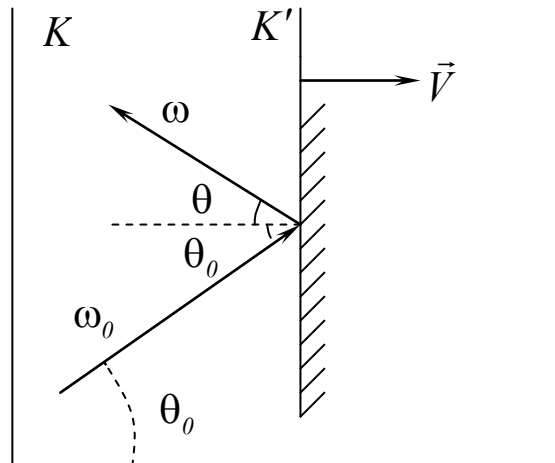


Схема 2. Структура змістового компоненту навчання електродинаміки як релятивістської теорії

4.5. Зміна частоти світла при його віддзеркаленні від рухомої поверхні

Приклад 4.6. Знайти зміну частоти світла при його віддзеркаленні від рухомої поверхні [75].

Розв'язання. Нехай в СВ K світло розповсюджується в площині XOY під кутом θ_0 до осі OX . А дзеркало, площина якого паралельна осі OY , рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж осі OX СВ K (див. Мал. 4.13).



Мал. 4.13. Віддзеркалення світла від рухомого дзеркала

Нам необхідно знайти частоту віддзеркаленого світла та його напрям після відбиття в СВ K . Зв'яжемо СВ K' з дзеркалом. Тоді з використанням формул перетворення компонентів 4-хвильового вектора знайдемо і частоту і напрям поширення світла в СВ K' . Дійсно, в СВ K маємо:

$$k_1^0 = k^0 \cos \theta_0 = \frac{\omega_0 \cos \theta_0}{c}, \quad k_2^0 = k^0 \sin \theta_0 = \frac{\omega_0 \sin \theta_0}{c}, \quad k_3^0 = 0$$

$$k_4^0 = i \frac{\omega_0}{c} = ik_0, \quad (4.22)$$

де ω_0 - частота падаючого світла.

В СВ K' компоненти 4-хвильового вектору, згідно обернених до (2.32) перетворень, дорівнюють:

$$k_1' = \Gamma(k_1^0 + iBk_4^0), \quad k_2' = k_2^0, \quad k_3' = k_3^0 = 0, \quad k_4' = \Gamma(k_4^0 - iBk_1^0). \quad (4.23)$$

Але в СВ K' , в якій дзеркало нерухоме, має місце звичайний закон відбивання світла: кут падіння дорівнює куту відбивання. Це означає, що 4-хвильовий вектор віддзеркаленого світла відрізняється від 4-хвильового вектора падаючого світла лише знаком першого компонента 4-вектора. Тобто, при

відбиванні компонент k'_1 змінює знак на протилежний. Таким чином, в СВ K' 4-вектор віддзеркаленого світла, k'' , має вигляд:

$$k''_1 = -\Gamma(k_1^0 + iBk_4^0), \quad k''_2 = k_2^0, \quad k''_3 = k_3^0 = 0, \quad k''_4 = \Gamma(k_4^0 - iBk_1^0). \quad (4.24)$$

З точки зору СВ K відбитий промінь світла характеризується 4-вектором k , компоненти якого знаходимо за допомогою перетворень (2.32):

$$k_1 = \frac{k''_1 - i \cdot B \cdot k''_4}{\sqrt{1 - B^2}} = -\Gamma^2 \frac{\omega_0}{c} \{(1 + B^2) \cos \theta_0 - 2B\}, \quad (4.25)$$

$$k_2 = k''_2 = k_2^0 = \frac{\omega_0 \sin \theta_0}{c},$$

$$k_3 = k''_3 = k_3^0 = 0,$$

$$k_4 = \Gamma \cdot (k''_4 + i \cdot B \cdot k''_1) = i\Gamma^2 \frac{\omega_0}{c} \{(1 + B^2) - 2B \cos \theta_0\}, \quad (4.26)$$

де $k_1 = k \cos \theta = \frac{\omega \cos \theta}{c}$, $k_2 = k \sin \theta = \frac{\omega \sin \theta}{c}$, $k_4 = i \frac{\omega}{c} = ik$, ω - частота світла в СВ K .

Із (4.26) одержуємо:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{(1 + B^2) - 2B \cos \theta_0}{1 - B^2}. \quad (4.27)$$

Тобто, частота відбитого світла ω , не дорівнює частоті падаючого світла ω_0 .

А для тангенса кута відбивання світла в СВ K одержуємо:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2}{k_1} = -\frac{\sin \theta_0 (1 - B^2)}{(1 + B^2) \cos \theta_0 - 2B}. \quad (4.28)$$

Із (4.28) видно, що $\theta_0 \neq \theta$: кут падіння не дорівнює куту відбивання.

Формули (4.27) та (4.28) у випадку нормального падіння світла $\theta_0 = 0$, приймають вигляд:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - B}{1 + B}, \quad \cos \theta = -1, \quad \sin \theta = 0.$$

Тобто, і після відбивання світла від рухомого вздовж осі OX дзеркала, світло розповсюджується по нормалі до нього, але в протилежному напрямку. Частота віддзеркаленого світла зменшується.

Якщо дзеркало рухається назустріч променю світла, то величина B змінює знак і тоді одержуємо:

$$\omega = \omega_0 \frac{1+B}{1-B}, \quad \cos \theta = -1, \quad \sin \theta = 0.$$

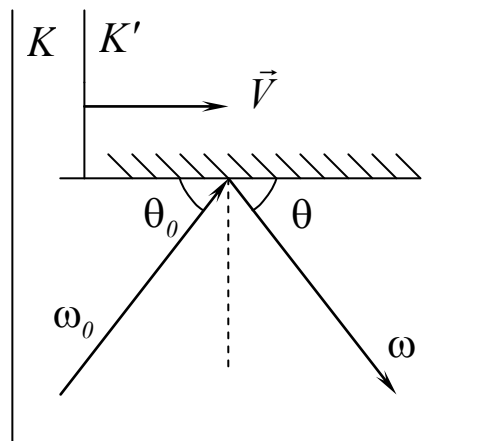
Частота відбитого світла при цьому зростає. Відносна зміна частоти світла, яке віддзеркалюється від тіла, що, наприклад, рухається назустріч спостерігачу, дорівнює:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2B}{1-B}.$$

Навіть при швидкості тіла $V = 72 \frac{\text{км}}{\text{сек}} = 20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, відносна зміна частоти

світла $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 10^{-7}$, яке без проблем реєструється радіотехнічними приладами.

Розглянемо тепер випадок, коли дзеркало рухається паралельно своїй поверхні, мал. 4.14.



Мал. 4.14. Відбивання світла від дзеркала, яке рухається паралельно своїй поверхні

При цьому формули (4.22) та (4.23) залишаються без змін, а формула (4.24) набуває вигляду:

$$k_1'' = \Gamma(k_1^0 + iBk_4^0), \quad k_2'' = -k_2^0, \quad k_3'' = k_3^0 = 0, \quad k_4'' = \Gamma(k_4^0 - iBk_1^0), \quad (4.29)$$

оскільки при відбиванні світла змінює знак друга компонента 4-хвильового вектора.

А в лабораторній системі відліку, СВ K , 4-вектор визначається:

$$k_1 = \frac{k_1'' - i \cdot B \cdot k_4''}{\sqrt{1-B^2}} = k_1^0,$$

$$k_2 = k_2'' = -k_2^0 = -\frac{\omega_0 \sin \theta_0}{c}. \quad (4.30)$$

$$k_3 = k_3'' = k_3^0 = 0$$

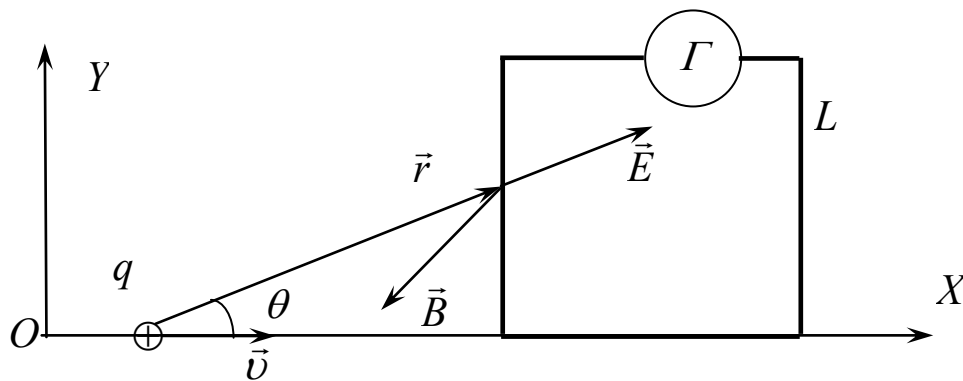
$$k_4 = \Gamma \cdot (k_4'' + i \cdot B \cdot k_1'') = k_4^0. \quad (4.31)$$

Аналізуючи ці останні формули доходимо до висновку, що $\omega = \omega_0$, $\theta = -\theta_0$. Тобто, частота світла не змінюється при відбиванні, а кут падіння дорівнює куту відбивання.

Практична частина

Зразки розв'язування задач

Задача 4.1. Показати суперечності, що виникають при сумісному використанні класичних закону Біо-Савара та закону Кулона в процесі аналізу електродинамічних задач.

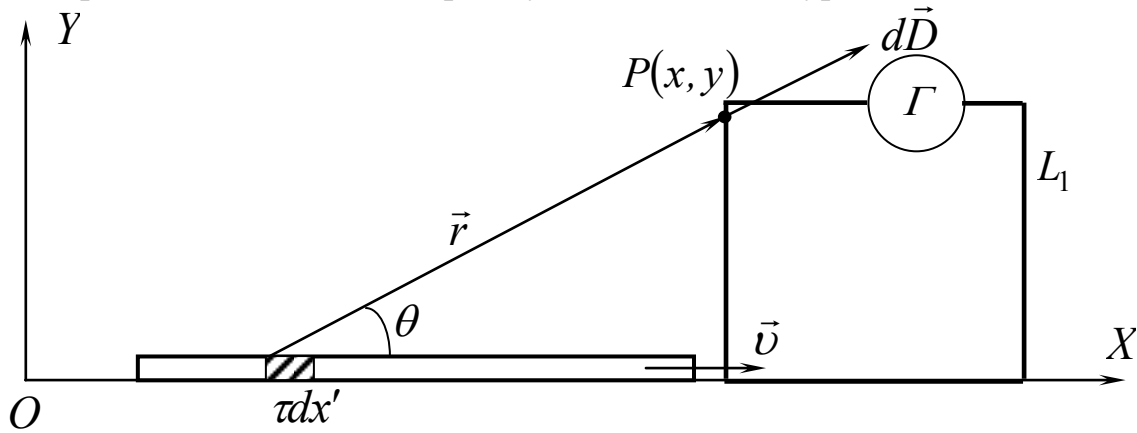


Мал. 4.15. Схема уявного експерименту по визначенню ЕРС індукції в контурі L . ЗЧ рухається з постійною швидкістю \vec{v} в площині контуру L

Розв'язання: Застосування виразу для індукції магнітного поля рухомої зарядженої частинки, $\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}]$ (який може розглядатися як наслідок закону (4.15), де $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$) та $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ для аналізу однієї і тієї ж електродинамічної задачі приводить до висновків, що суперечать принципу відносності.

Дійсно, розглянемо уявний експеримент, схема якого зображена на мал. 4.15. Згідно з традиційною інтерпретацією явища ЕМІ, в контурі, внаслідок зміни за часом індукції магнітного поля, в кожній точці плоскої поверхні, обмеженої контуром L (а, отже, і зміни магнітного потоку в часі), виникне ЕРС індукції.

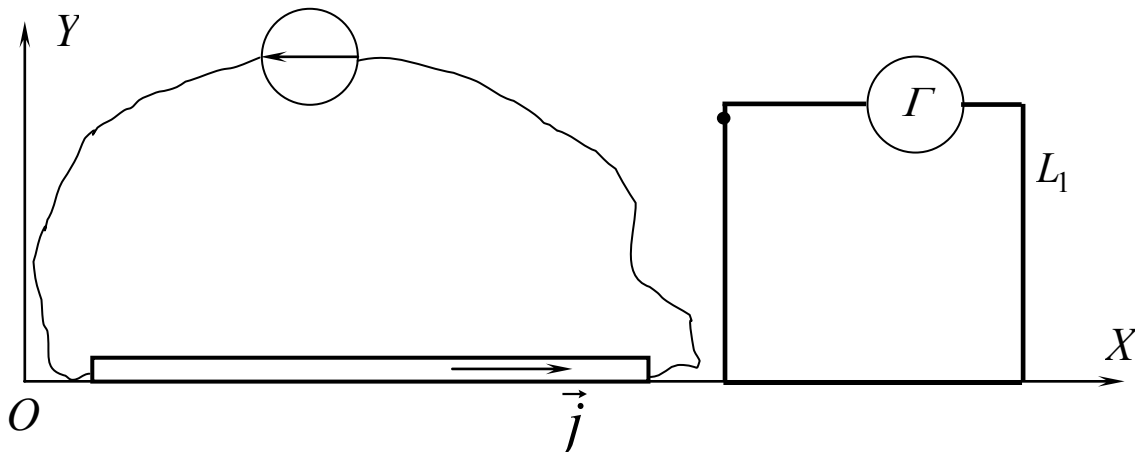
Але такий висновок суперечить принципу відносності: при переході в систему відліку, яка зв'язана з ЗЧ, контур буде рухатися в центрально-симетричному кулонівському полі. Таке поле потенціальне, тому відсутні фізичні причини, які могли б породжувати ЕРС в контурі L .



Мал. 4.16. При русі зарядженої нитки зі швидкістю \vec{v} в контурі L_1 ЕРС відсутня

Аналогічно, в задачі, яка зображена на мал. 4.17 викомалтання класичного закону Біо-Савара (4.9) приводить до результату, що суперечить принципу відносності.

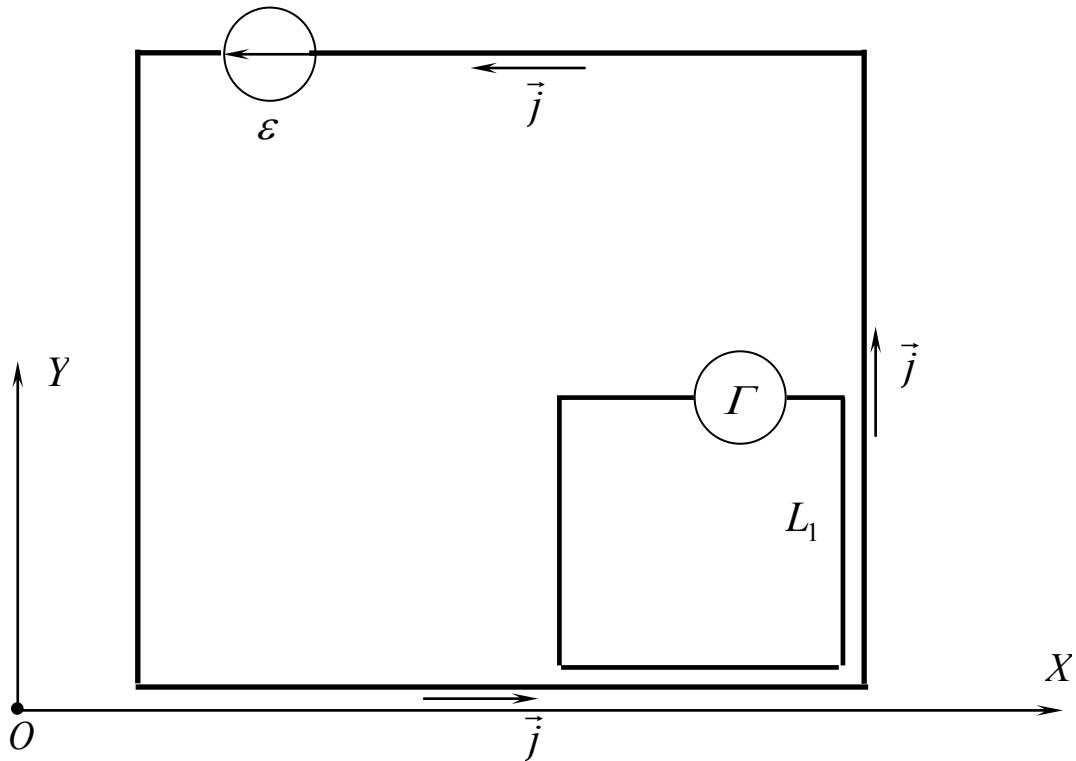
Згідно з законом Біо-Савара (4.9) та традиційною інтерпретацією явища електромагнітної індукції (ЕМІ), в контурі L_1 (див. задачі, які показані на мал. 4.17 та мал. 4.18) слід чекати появу певної ЕРС індукції. Такий висновок впливає із наступних міркувань.



Мал. 4.17. В дротяному в контурі L_1 , який знаходиться в околі нескінченно довгого провідника з постійним струмом, ЕРС відсутня

Кожний із електронів провідності, який рухається з дрейфовою швидкістю в провідниках електричного кола створює в кожній точці плоскої поверхні, обмеженої контуром L_1 , змінне магнітне поле.

Це змінне магнітне поле в свою чергу в кожній точці поверхні породжує вихрове електричне поле ($\text{rot}\vec{E} \neq 0$). Інтегральний ефект повинен проявитися у виникненні індукційного струму в контурі L_1 . Але досліди показують, що ЕРС в контурі L_1 не виникає.



Мал. 4.18. В дотязному в контурі L_1 , який знаходиться поряд з колом постійного струму, ЕРС відсутня

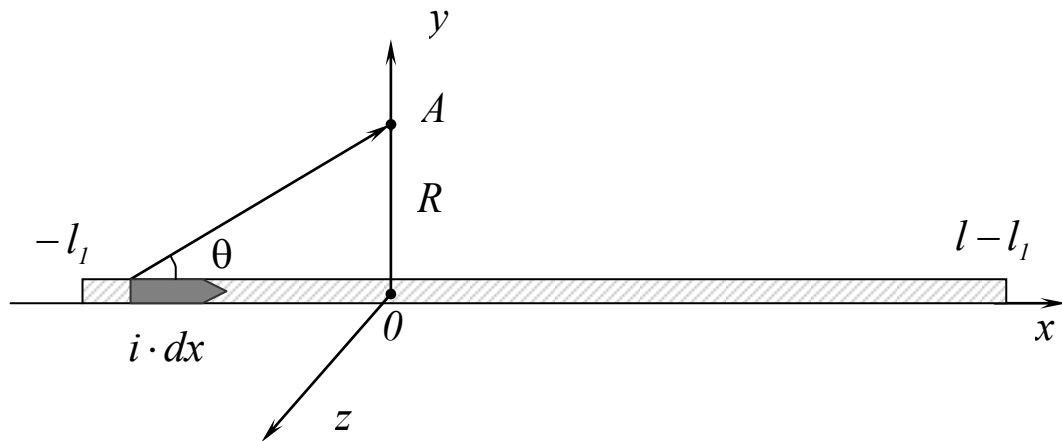
Таким чином, застосування закону (4.9) й його еквіваленту – виразу для індукції МП, яке породжується окремою рухомою ЗЧ - $\vec{B}_1 = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v}, \vec{E}] = \frac{\mu_0 q \cdot [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$ в подібних задачах дає результат, що суперечить фізичній реальності.

Отже, будь-яке сумісне використання названих формул (або сумісне застосування класичного закону Біо-Савара $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$ і виразу для напруженості електричного поля $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$) приводить до принципових помилок.

Бачимо, що традиційна методика вивчення електродинаміки, яка основана, зокрема і, на класичному законі Біо-Савара, неспроможна пояснити відсутність ЕРС в контурах на малюнках 4.15, 4.16, 4.17, 4.18.

Задача 4.2. Використовуючи закон Біо-Савара в релятивістській формі, знайти індукцію магнітного поля (МП) відрізка лінійного провідника з постійним струмом.

Розв'язання : Вираз для магнітної індукції прямолінійного відрізка струму в будь-якій точці простору знайдемо, користуючись (4.8) у такому поданні (мал. 4.19):



Мал. 4.19 Знаходження індукції магнітного поля прямолінійного відрізка зі струмом

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot (1 - \beta^2) \cdot R \cdot dx}{[x^2 + R^2 \cdot (1 - \beta^2)]^{3/2}}, \quad (4.32)$$

тому

$$B_z = \int_{-l_1}^{l-l_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot (1 - \beta^2) \cdot R \cdot dx}{[x^2 + R^2 \cdot (1 - \beta^2)]^{3/2}} =$$

$$= \frac{i \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot \left\{ \frac{l-l_1}{\sqrt{(l-l_1)^2 + R^2 \cdot (1 - \beta^2)}} + \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + R^2 \cdot (1 - \beta^2)}} \right\} \quad (4.33)$$

- результат, що відрізняється, взагалі кажучи, від добре відомого, але при $\beta \ll 1$ дорівнює йому.

Якщо в останній формулі $l-l_1 \gg R$, $l_1 \gg R$ то $B_z = \frac{2\mu_0 \cdot i}{4\pi \cdot R}$ - звичайний вираз для магнітного поля нескінченно довгого прямолінійного провідника з силою струму i .

Задача 4.3. Обґрунтувати формули перетворення компонентів ЕМП, виходячи з аналізу ЕМП РЗЧ.

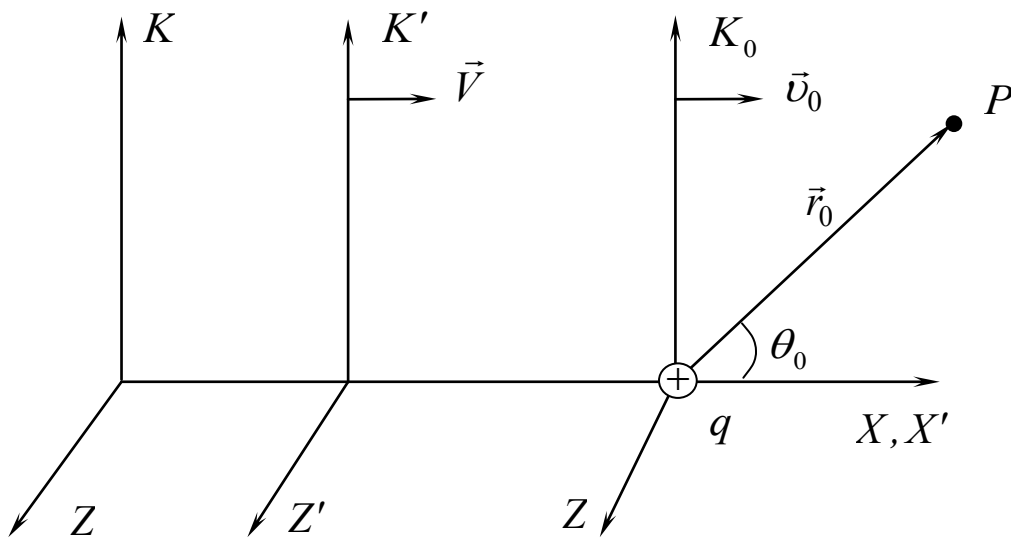
Розв'язання : Нижче ми пропонуємо спосіб одержання формул перетворення компонентів електричного та магнітного полів (ФПКЕМП), що ґрунтується на детальному аналізі властивостей ЕМП рівномірно та прямолінійно рухомої ($v < c$) зарядженої частинки (протона). Цей спосіб органічно впливає із інноваційної методичної концепції вивчення електродинаміки на засадах СТВ [32].

Нехай у нас є три СВ: СВ K , СВ K' , СВ K_0 , (див. Мал. 4.20).

СВ K_0 є, як видно із мал. 4.20, власною СВ для зарядженої частинки P . СВ K_0 рухається відносно СВ K' з швидкістю $\vec{v}_0 = const$, а СВ K' в свою чергу рухається з швидкістю \vec{V} відносно лабораторної СВ K .

Тоді напруженості електричного й індукції магнітного полів, які виникають в СВ K_0 , СВ K' , СВ K , відповідно, дорівнюють [32; 36]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{q\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}, \\ \vec{E}' &= \frac{q\vec{r}'(1-\beta_0^2)}{4\pi\epsilon_0 r'^3(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$



Мал. 4.20. Рух протона відносно СВ K і СВ K'

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}(1-\beta^2)}{4\pi\epsilon_0 r^3(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$\vec{B}_0 = 0, \vec{B}' = \frac{[\vec{v}_0, \vec{E}']}{c^2}, \vec{B} = \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}, \quad (4.35)$$

де: $v = \frac{V + v_0}{1 + \frac{V \cdot v_0}{c^2}}$ - швидкість руху протона відносно лабораторної системи

відліку, $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$, $\beta = \frac{v}{c}$, θ_0 - кут між радіусом вектором \vec{r}'_0 і віссю OX СВ K_0 ; θ' - кут між радіусом-вектором \vec{r}' , який проведений із миттєвого положення заряду в системі K' в дану точку поля і вектором \vec{v}_0 ; θ - кут між напрямом руху протона (\vec{v}) і радіусом-вектором \vec{r} , який проведений з миттєвого положення протона в СВ K в дану точку поля P .

За допомогою перетворень Лорентца може бути показано, що:

$$r_0 = \gamma_0 [(x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2) \cdot (1 - \beta_0^2)]^{1/2}, \quad (4.36)$$

$$r_0 = \gamma [(x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2)]^{1/2}, \quad (4.37)$$

$$r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2} = [(x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2)]^{3/2}, \quad (4.38)$$

де $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

І тоді враховуючи (4.34) та (4.35), (4.36), (4.37) (4.38), одержуємо

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, \\ E_y &= \frac{qy \cdot (1 - \beta_0^2)}{4\pi\epsilon_0 [(x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2) (1 - \beta_0^2)]^{3/2}} \cdot \Gamma(1 + B\beta_0) = \\ &= E'_y \Gamma\left(1 + \frac{Vv_0}{c^2}\right) = \Gamma\left(E'_y + V \frac{v_0 E'_y}{c^2}\right) = \Gamma(E'_y + VB'_z) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Аналогічно можна одержати формулу перетворення для проекції E_z :

$$E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y). \quad (4.40)$$

Використовуючи (4.34) та (4.35), (4.36), (4.37) (4.38) для компонент вектора магнітної індукції в СВ K , одержуємо:

$$B_x = B'_x, B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{VE'_z}{c^2}\right), B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{VE'_y}{c^2}\right). \quad (4.41)$$

Таким чином, на основі запропонованого підходу, обговорюючи властивості електричного і магнітного полів рухомого протона, можна довести формули перетворення компонентів електромагнітного поля:

$$E_x = E'_x, \quad \Gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y), \quad (4.42)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{VE'_z}{c^2}\right), \quad B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{VE'_y}{c^2}\right). \quad (4.43)$$

Тобто, з самого початку вивчення теми «Магнітне поле», після формування поняття «магнітне поле» й розкриття релятивістської природи магнітного поля можна показати, що напруженість електричного та магнітного полів зв'язані ФПКЕМП (4.42), (4.43).

Задача 4.4. Проаналізувати умову нейтральності провідника з постійним струмом (ППС).

Розв'язання: Відомо, що металевий провідник (наприклад, мідний провідник) є нейтральним. Ця нейтральність зумовлена тим, що об'ємна густина заряду позитивних іонів ρ_+ та об'ємна густина заряду електронів провідності ρ_- рівні за величиною, але протилежні за знаком.

У більшості навчальних посібників з електромагнетизму [28; 52; 69; 71] стверджується, що і в нерухомому провіднику зі струмом об'ємна густина заряду дорівнює нулю. Дійсно, це впливає із закону збереження заряду для постійних струмів $div \vec{j} = 0$ та закону Кулона у формі $div \vec{D} = \rho$.

Із закону Кулона та закону збереження заряду одержуємо:

$$div \vec{j} = div(\lambda \cdot \vec{E}) = div\left(\frac{\lambda \cdot \vec{D}}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\right) = 0,$$

де \vec{j} – густина струму, \vec{E} – напруженість електричного поля всередині провідника з постійним струмом, λ – питома електропровідність матеріалу, з якого виготовлений провідник.

Отже, $div \vec{D} = 0$, а тому об'ємна густина заряду провідника з постійним струмом (ППС) дорівнює нулю:

$$\rho = 0.$$

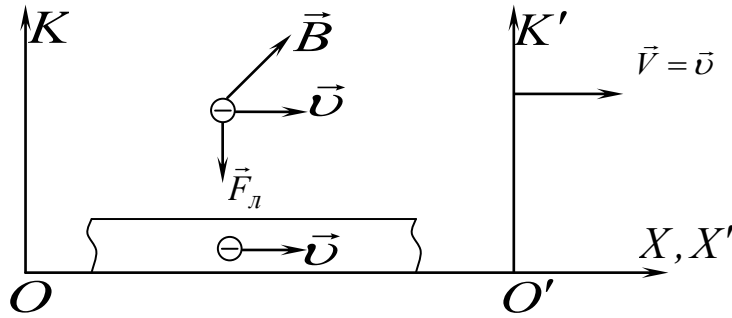
Ця умова нейтральності ППС справедлива при виконанні таких умов:

1. $\lambda = const$;
2. Якщо знехтувати дією власного магнітного поля ППС на електрони провідності (пінч-ефект);
3. Якщо знехтувати залежністю об'ємної густини заряду від швидкості

руху певного розподілу заряду [32].

Урахування такою залежністю об'ємної густини заряду від швидкості руху певного розподілу заряду приводить до наступних міркувань.

Нехай у системі відліку (СВ) K вздовж вісі OX знаходиться нерухомий циліндричний ППС (мал. 4.21), по якому протікає постійний струм густиною $\vec{j}_x = \rho_- \cdot \vec{v}$. Система відліку K' рухається зі швидкістю $\vec{V} = \vec{v}$ вздовж осі OX СВ K .



Мал. 4.21. Взаємодія електрона і ППС в СВ K і СВ K'

Традиційно, за Р. Фейнманом, умову нейтральності нерухомого ППС у СВ K [37; 71; 69] визначають так:

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\rho_-, \quad (4.44)$$

де $\rho = \frac{\rho^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – об'ємна густина заряду електронів провідності в системі відліку K , в якій провідник нерухомий, v – дрейфова швидкість електронів провідності, $\beta = \frac{v}{c}$, c – швидкість світла у вакуумі, ρ_-^0 , ρ_+^0 – густини зарядів електронів провідності і позитивних іонів у власних системах відліку відповідно.

Тобто з точки зору електронної теорії нейтральність нерухомого провідника зі струмом пояснюється тим, що об'ємна густина заряду позитивно заряджених іонів (які знаходяться у вузлах кваліфікованої ґратки) чисельно дорівнює об'ємній густині **рухомої** сукупності електронів провідності.

Тоді електричне поле у СВ K' буде створюватися некомпенсованими густинами зарядів іонів та електронів провідності. Оскільки електрони в СВ K' нерухомі, а іони рухаються зі швидкістю $\vec{V} = \vec{v} = \vec{v}$, то густина заряду їх відповідно дорівнює:

$$\rho'_- = \rho_-^0 = \rho_- \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \rho'_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

А тому об'ємна густина заряду ППС у СВ K' буде такою:

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \rho_- \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\rho_+^0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.45)$$

Аналіз науково-методичної літератури щодо сутності (4.44), та точок зору вчених-фізиків на суперечливість умови нейтральності (4.44) подано в [32]. У першу чергу слід зазначити, що, оскільки СВ K і СВ K' рівноправні, то при $\vec{V} = \vec{v}$ завдяки симетричним умовам, якими визначається рух електронів провідності й іонів відповідно у СВ K й у СВ K' , фізичні ситуації у цих СВ повинні бути однаковими.

Але за умови (4.44) маємо, що в СВ K ППС нейтральний, а в СВ K' характеризується густиною заряду $\frac{\rho_+^0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Тому очевидно є умова нейтральності провідника, що запропонована у [38, с.207, с. 222-226]:

$$\rho_+^0 = -\rho_-^0. \quad (4.46)$$

Тоді у СВ K нерухомий провідник зі струмом характеризується об'ємною густиною заряду:

$$\rho = \rho_+^0 - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\sqrt{1 - \beta^2} - 1 \right). \quad (4.47)$$

Що ж стосується електричного поля зумовленого виключно релятивістськими ефектами в зміні густин зарядів електронів провідності та зарядів іонів кристалічної ґратки ППС внаслідок руху їх з різними за величиною швидкостями, то прямих експериментальних підтверджень цього явища допоки немає. Але аналіз моделі ППС, яка широко викомалтовується в методиці навчання фізики, на основі послідовного і систематичного викомалтання методів СТВ неодмінно приводить до безсумнівного висновку, що у власній СВ постійний провідник зі струмом характеризується об'ємною густиною заряду (4.47).

Завдання для самоконтролю

Завдання 1. Виходячи із рівнянь Максвелла, одержати як наслідок наступні закони:

- А) Закон Кулона;
- Б) Закон Біо-Савара;
- В) Закон електромагнітної індукції;
- Г) Закон збереження електричного заряду.

Завдання 2. Впевнитися, що ігнорування релятивістських поправок в виразах для напруженості електричного \vec{E} та індукції магнітного \vec{B} поля рухомої зарядженої частинки (РЗЧ), приводить до протиріччя з принципом відносності. Тобто, в СВ K $rot\vec{E}_{кл} = 0$, а $\frac{\partial\vec{B}_{кл}}{\partial t} \neq 0$, і таким чином,

$$rot\vec{E}_{кл} \neq \frac{\partial\vec{B}_{кл}}{\partial t}.$$

Завдання 3. Одержати формули перетворення для векторів поля \vec{E} та \vec{B} при переході із однієї ІСВ в іншу, використовуючи:

- а) властивості ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ;
- б) властивості ЕМП рівномірно рухомої зарядженої нитки.

Завдання 4. Точкова заряджена частинка рухається в вакуумі рівномірно та прямолінійно вздовж вісі OX зі швидкістю $v < c$. Знайти магнітне поле в будь-якій точці простору, комалтуючись уявленням про струми зміщення, тобто, викомалтовуючи рівняння Максвелла $rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, де $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$,

Завдання 5. Обґрунтувати формули перетворення компонентів електромагнітного поля способом, який ґрунтується на використанні принципу відносності при аналізі основних експериментальних законах електродинаміки.

Завдання 6. Показати, що повздовжня складова сили взаємодії між рівномірно рухомими зарядженими частинками в лабораторній системі відліку не змінюється при переході від СВ K' до СВ K .

Завдання 7. Знайти $\oint_L \vec{E}d\vec{l}$ вздовж будь-якого контуру, що лежить в площині YOZ і яка проходить через миттєве положення рівномірно рухомої ЗЧ.

Завдання 8. Упевнитися в тому, що в довільній точці ЕМ поля РЗЧ $rot\vec{H}$ породжується $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, тобто $rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

Завдання 9. Показати, що зміна в часі магнітного потоку через нерухомий контур L (мал. 4.9) дорівнює зі знаком мінус циркуляції вектора \vec{E} РЗЧ по контуру L .

Завдання 10. Упевнитися, що циркуляції вектора \vec{D} вздовж контура L (мал. 4.19) визначається виразом (4.14).

Завдання 11. Вважаючи, що провідник з постійним струмом (ППС) нейтральний у власній системі відліку (ВСВ), знайти густину струму та заряду в довільній СВ, відносно якої ППС рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж своєї довжини.

Завдання 12. Вважаючи, що ППС «заряджений» у ВСВ, знайти густину струму та заряду в довільній СВ, відносно якої ППС рухається зі швидкістю \vec{V} .

Завдання 13. Використовуючи релятивістську форму закону Біо-Савара знайти індукцію магнітного поля, яке створюється довгим ППС в СВ K , відносно якої він рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж своєї довжини. У власній системі відліку струм зумовлений рухом електронів провідності з дрейфовою швидкістю \vec{v}' .

Завдання 14. Використовуючи релятивістську форму закону Біо-Савара, знайти індукцію магнітного поля, що створюється прямолінійним провідником з постійним струмом. Сила струму i , довжина провідника l .

Завдання 15. Рівномірно заряджена нитка рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж осі OX СВ K . Лінійна густина заряду на нитці у власній СВ K' дорівнює τ' , довжина l' . Використовуючи релятивістську форму закону Біо-Савара, знайти в СВ K в площині XOZ напруженість електричного та індукцію магнітного полів, які створюються рухомою ниткою.

Завдання 16. Знайти силу струму в прямолінійному провіднику з постійним струмом, який рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж осі OX СВ K , якщо у власній СВ струм зумовлений дрейфовим рухом електронів провідності ППС.

Завдання 17. Проаналізувати суперечності та протиріччя, які виникають при використанні умови нейтральності (4.44) та порівняти з (4.46).

Завдання 18. Проаналізувати умову нейтральності ППС, яку запропоновано в статті: Мартинсон М.Л. О плотности заряда внутри проводника с током / М. Л. Мартинсон, А. В. Недоспасов // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163. – № 1. – С. 91–92.

Завдання 19. Знайти об'ємну густину заряду ППС у СВ K та у СВ K' за умов нейтральності (4.44) й (4.46) та за умови $V \neq v$.

Завдання 20. Обґрунтувати співвідношення (4.36) та (4.37):

$$r_0 = \gamma_0 \left[(x' - v_0 t')^2 + (y'^2 + z'^2) \cdot (1 - \beta_0^2) \right]^{1/2},$$

$$r_0 = \gamma \left[(x - vt)^2 + (y^2 + z^2) \cdot (1 - \beta^2) \right]^{1/2}.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Релятивістські ефекти спостерігаються при будь-яких нескінченно малих швидкостях руху ЗЧ, тіл, систем відліку чи тільки при $v \approx c$?

2. Детально опишіть відомі Вам способи знаходження характеристик електромагнітного поля.

3. Обґрунтувати закон Біо-Савара в релятивістській формі.

4. Яке фізичне явище лежить в основі закону Біо-Савара?

5. У чому полягає релятивістська природа магнітного поля?

6. Обґрунтувати рівняння Максвелла для струмів зміщення та описати властивості струмів зміщення.

7. Упевнитися в тому, що магнітне поле рухомої зарядженої частинки зумовлене струмами зміщення.

8. Показати, що електричне поле рівномірно рухомої ЗЧ є непотенціальним.

9. Пояснити Ваше розуміння двох фізичних причин, які лежать в основі явища електромагнітної індукції.

10. Показати, що явище електромагнітної індукції (ЕМІ) та закон електромагнітної індукції є наслідком принципу відносності та закону Кулона.

11. Показати, що $I_1 = c^2 B^2 - E^2$ та $\vec{B} \cdot \vec{E} = I_2$ є інваріантами відносно перетворень Лорентца.

12. Показати, що повздовжня складова сили взаємодії між рівномірно рухомими зарядженими частинками в лабораторній системі відліку не змінюється при переході від СВ K' до СВ K .

13. Показати, що додаткова сила взаємодії між двома рухомими зарядженими частинками, існування якої вимагає принцип відносності, повинна бути подана у вигляді:

$$\vec{F}_L = q_2 \cdot \left[\vec{V}, \left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right].$$

14. Показати, що закон $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l}$ є наслідком узагальненого закону ЕМІ $rot \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$.

15. Показати необхідність обов'язкового врахування релятивістських ефектів, навіть якщо вони і нескінченно малі, для коректного опису електромагнітних явищ.

Рекомендована література до розділу 4

Основна

1. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

2. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 6 : Электродинамика. – М. : Мир, 1966. – 343 с.

3. Коновал О. А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності : [монографія] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с. : іл.

4. Коновал О.А. Електродинаміка і теорія відносності : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів / О.А. Коновал ; Криворізький державний педагогічний університет. - Кривий Ріг : КДПУ, 2011. - 133 с. : іл.

5. Коновал О. А. Основи електродинаміки : [навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл.] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл.

Для поглибленого вивчення теми

1. Эйнштейн А. О методе теоретической физики / Альберт Эйнштейн // Физика и реальность : сб. статей. – М. : Наука, 1965. – 359 с.

2. Пинский А.А. Релятивистские идеи в преподавании физики : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Аркадий Аронович Пинский ; НИИ содержания и методов обучения АПН СССР. – М., 1974. – 349 с.

3. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності : Навчальний посіб. для студ. вищих навч. закл. / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми : «МакДен», 2011. – 335 с.

Пинский А.А. Задачи по физике. [Учебное пособие] / А.А. Пинский. – М. : Наука, 1978. – 288 с. : ил.

Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности. – М. : Атомиздат, 1973. – 332 с.

Чудинов Э. М. Эйнштейн и операционализм Бриджмена / Э. М. Чудинов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 504–519

Коновал О.А. Науково-методичний аналіз методів обґрунтування

перетворень Лорентца : навчальний посібник для самостійної роботи студентів / О.А. Коновал. - Кривий Ріг : КП ДВНЗ «КНУ», 2014. – 137 с.

Коновал О. А. Відносність електричного і магнітного полів : монографічний навч. посіб. для студ. вищих навч. закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 248 с. : іл.

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ В ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Метою цього розділу посібника ми окреслили висвітлення методичних аспектів поглибленого вивчення СТВ, які стануть у нагоді вчителям фізики ЗНЗ у процесі організації самостійної роботи учнів, зацікавлених у поглибленому вивченні відповідного розділу фізики.

При вивченні учнями спеціальної теорії відносності, як правило, висвітлюються кінематичні наслідки СТВ. Тому для учнів, зацікавлених у поглибленому вивченні відповідного розділу фізики, та з метою надати вчителю фізики перспективи вибору оптимальних як способів обґрунтування перетворень Лорентца, так і методичних підходів загалом до навчання СТВ, пропонується спектр способів обґрунтування кінематичних наслідків СТВ. Окрім того аналізуються некоректні формулювання, непорозуміння, суперечності, що іноді мають місце в науково-методичній літературі, та надаються пропозиції щодо їх усунення.

Ключові слова: спеціальна теорія відносності, перетворення Лорентца, лорентцеве скорочення, сповільнення ходу рухомого годинника, принцип відносності, принцип науковості, принцип фундаменталізації, релятивістські формули додавання швидкостей.

Теоретична частина

У 2004 році вийшов новий Державний стандарт базової і повної середньої освіти [1], згідно з яким у старшій школі України запроваджують профільну диференціацію навчання. З 2010 року фізику почали вивчати за новими програмами. Діють три рівні програм [2] і підручників: рівень стандарту [42; 72], академічний рівень [7], профільний рівень [25; 26].

При цьому відповідний розділ «Релятивістська механіка» завершує частину фізики «Механіка» у 10 класі.

Аналіз навчальних програм з фізики для загальноосвітніх навчальних закладів (ЗНЗ) засвідчує, що на вивчення теми «Релятивістська механіка» відводиться:

- а) в класах, що вивчають фізику на рівні стандарту – 2 години;
- б) в класах, що вивчають фізику на академічному рівні – 5 год.;
- в) в класах, що вивчають фізику на профільному рівні – 7 год.

У межах цього навчального часу учні профільних класів (класів з поглибленим вивченням фізики) повинні засвоїти:

- Принцип відносності А. Ейнштейна. Основні положення спеціальної

теорії відносності (СТВ). Перетворення Лоренца. Швидкість світла у вакуумі. Відносність одночасності подій. Відносність довжини й часу. Просторово-часові властивості фізичного світу.

- Релятивістський закон додавання швидкостей. Взаємозв'язок маси та енергії.
- Основні наслідки СТВ та їх експериментальне підтвердження.

У процесі узагальнюючих занять «Сучасні уявлення про простір і час» в учнів повинні сформуватися адекватні реальності уявлення про простір і час, зв'язок класичної та релятивістської фізики. Вони також повинні усвідомити роль та значення фізичного знання, зокрема з релятивістської механіки, у суспільному розвитку, науково-технічному прогресі, знати про сучасні проблеми механіки, і, зокрема, спеціальної теорії відносності, поглибити свої знання про досягнення українських учених у розвитку фізичної науки й техніки.

У той же час цей матеріал має значний світоглядний потенціал і, як засвідчує наша практика, в класах, які вивчають фізику на рівні стандарту, академічному рівні та профільному рівнях є досить великий відсоток учнів, які проявляють підвищений інтерес до вивчення фізики, і, зокрема, до основ СТВ.

Саме тому в розділі 5 пропонуються матеріали, які будуть корисними вчителю фізики ЗНЗ:

- а) в організації роботи учнів при їх самостійному, більш глибокому вивченні основ СТВ;
- б) при проведенні факультативних занять з фізики (за рахунок варіативної частини навчального плану);
- в) при організації гурткових занять з фізики.

Зауважимо, що ця робота повинна ґрунтуватися на принципах фундаменталізації, наступності, відповідності та науковості.

Наразі в науково-методичній літературі існує розмаїття підходів до викладання спеціальної теорії відносності в середній та вищій школах (див. «Список використаних джерел»). Це обумовлено перш за все специфікою СТВ та парадоксальністю її наслідків, зокрема, кінематичних. Саме аналіз кінематичних наслідків СТВ, в основному, і пропонується в навчальній та науково-методичній літературі. По-друге, відносно складний математичний апарат, необхідний для усвідомлення сутності фізичних явищ і процесів, які описуються з позицій теорії відносності (зокрема, перетворення Лорентца), вимагає від суб'єктів навчальної діяльності високого рівня розвитку логічного і абстрактного мислення.

Ці обставини також зумовлюють широкий спектр методичних новацій в процесі вивчення СТВ в загальноосвітніх навчальних закладах (ЗНЗ) [7; 8; 14-18; 25-26; 33-35; 41; 42; 51-54; 61-63; 65; 66; 90-93].

На наше переконання, завдання, які стоїть перед вчителем при навчанні СТВ, наступні:

- сформуванню в суб'єктів навчальної діяльності адекватне розуміння фізичної реальності, яка виходить за межі їх повсякденного досвіду (і яка описується ньютонівською механікою);

- допомогти зрозуміти особливості законів релятивістської фізики (область великих енергій і швидкостей руху частинок);

- сформуванню основи наукового світогляду, урахувавши, що суттю СТВ як фізичної теорії, є вчення про властивості простору і часу;

- забезпечити реалізацію принципів фундаменталізації, наступності, відповідності та науковості при вивченні класичної й релятивістської механіки, зберігши при цьому їх логічну спадкоємність і взаємозв'язок. У відповідності з цими завданнями при викладанні спеціальної теорії відносності необхідно дотримуватись чіткого обґрунтування всіх формул, висновків і положень релятивістської фізики, що дозволить забезпечити цілісне сприйняття структури та змісту цієї фізичної теорії.

Однак аналіз сучасних підручників і методичної літератури засвідчує, що типовим є виклад релятивістської механіки у вигляді розрізнених фактів і понять, з фрагментарним висвітленням та з не завжди достатньою глибиною їх аналізу та пояснення. В деяких посібниках та підручниках для загальноосвітніх шкіл [25; 26; 41; 42] наявні фізичні помилки, неточності формулювань, некоректні трактування деяких положень СТВ. Розуміння цього факту надасть учителеві можливість уникнути цих негараздів у практиці викладання.

Варіанти вивчення кінематики СТВ визначаються різною послідовністю викладу способів обґрунтування кінематичних релятивістських ефектів. Звернемося наразі до безпосереднього висвітлення методичних особливостей вивчення релятивістських кінематичних ефектів СТВ.

Оскільки в підручниках фізики для ЗНЗ, як правило, обов'язково висвітлюються кінематичні наслідки СТВ, то вочевидь постає нагальна потреба обґрунтувати різними способами ці кінематичні наслідки, пояснити їх фізичну суть. На нашу думку, це надає вчителю перспективи вибору оптимальних як способів обґрунтування так і методичних підходів загалом до навчання СТВ.

Зокрема: у **п. 5.1** висвітлено методичні особливості вивчення явища сповільнення ходу рухомого годинника.

У **п. 5.2** подано 2 способи обґрунтування лорентцевого скорочення.

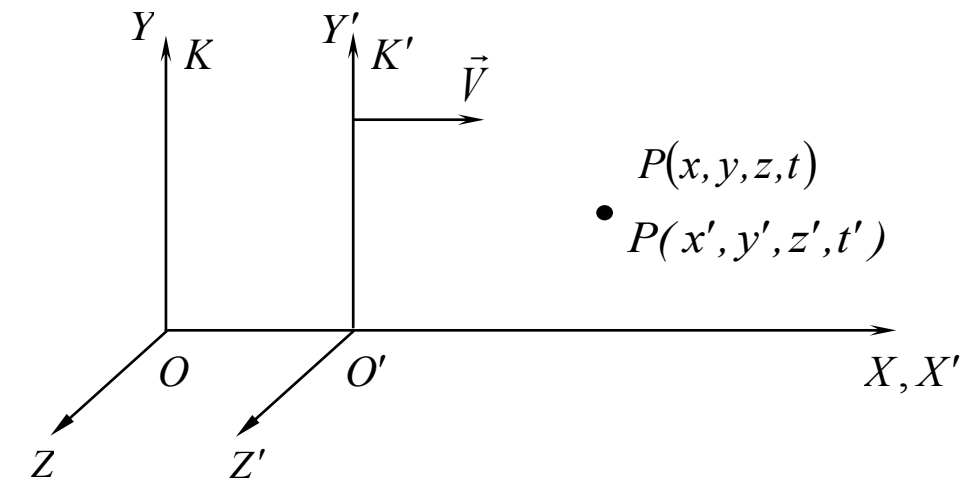
У п. 5.3 схарактеризовано деякі способи обґрунтування перетворень Лорентца.

У п. 5.4 подано 4 способи обґрунтування релятивістських формул додавання швидкостей.

У п. 5.5 здійснено критично-конструктивний аналіз особливостей висвітлення релятивістських кінематичних ефектів у підручниках для ЗНЗ.

Звертаємо увагу наших майбутніх читачів насамперед на той факт, що при вивченні СТВ розглядаються, як правило, дві системи відліку, K і K' . Система відліку (СВ) K вважається нерухомою, а СВ K' рухається відносно СВ K .

Загальноприйнятим вважається, що вісь OX СВ K , й вісь $O'X'$ СВ K' співпадають, а СВ K' рухається відносно СВ K із швидкістю \vec{V} вздовж вісі OX (Мал. 5.1).



Мал. 5.1 Рух СВ K' відносно «нерухомої» СВ K

Причому в початковий момент часу $t = t' = 0$ початки координат СВ K $x = y = z = 0$ й СВ K' $x' = y' = z' = 0$ співпадають.

5.1. Методичні особливості вивчення явища сповільнення ходу рухомого годинника

Можна запропонувати щонайменше 4 способи обґрунтування формули сповільнення ходу рухомого годинника $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}}$. Зупинимось на обґрунтуванні та фізичному змісті її.

5.1.1. «Сповільнення ходу» рухомого годинника як наслідок перетворень Лорентца (див. Розділ 1, с. 23-25).

5.1.2. Популярним, і таким, що відповідає більш високим науковим вимогам та є більш загальним, можна вважати спосіб, який ґрунтується на **інваріантності квадрату інтервалу між двома подіями** (див. [40, Додаток Ж]):

Квадрат інтервалу (квадрат «віддалі») між двома подіями, Δs^2 , дорівнює, згідно з означенням (див. Розділ 2):

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2, \quad (5.1)$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - просторові віддалі між двома подіями в СВ K , відповідно по осях OX, OY, OZ ; $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ - просторові віддалі між цими ж двома подіями в СВ K' , відповідно по осях $O'X', O'Y', O'Z'$; $\Delta t, \Delta t'$ - проміжки часу між цими двома подіями з точок зору СВ K та СВ K' відповідно; c - швидкість світла у вакуумі.

Якщо інтервал часоподібний, тобто $\Delta s^2 > 0$, то завжди можна знайти систему відліку, в якій дві довільні нескінченно близькі події відбуваються в одній просторовій точці ($\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$).

Тоді квадрат просторово-часового інтервалу зводиться до нескінченно малого проміжку часу в СВ K' :

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 &= c^2 \Delta t'^2, \\ c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 &= c^2 \Delta t'^2, \end{aligned}$$

де $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ - це квадрат віддалі між просторовими точками цих двох подій.

Отже, одержуємо:

$$c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{\Delta r^2}{c^2 \Delta t^2} \right) = c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

де $\frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} = v^2$ - квадрат швидкості руху частинки (або квадрат швидкості переміщення фізичного процесу відносно СВ K).

А зміна часу у лабораторній системі відліку Δt зв'язана зі зміною власного часу в системі відліку K' , в якій процес локалізований, $\Delta t'$ таким чином:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.2)$$

Нагадаємо, що власним часом називають час, який фіксується годинником, нерухомим відносно фізичного явища чи процесу.

Якщо умовно вважати, що з рухомим процесом (фізичним об'єктом, частинкою) зв'язаний годинник (якраз він показує власний час), то складається враження, що рухомий годинник з точки зору «нерухомого годинника» (спостерігача) «іде» повільніше, ніж нерухомий.

Співвідношення (5.2) слід розуміти так (див. Розділ 1 с. 23-25):

Тривалість фізичного процесу в системі відліку, де він нерухомий (проміжок власного часу), завжди менша, ніж тривалість його з точки зору будь-якої іншої інерціальної системи відліку.

Можна також говорити, що фізичний процес в СВ, відносно якої він переміщується, протікає повільніше, ніж з точки зору системи відліку, в якій він знаходиться в спокої.

Різним виявляється лише відлік проміжків часу.

Зв'язок проміжку часу між двома подіями, що відбулися в деякій СВ в одній і тій самій точці простору (а, отже, цей проміжок часу $\Delta t'$ фіксується одним годинником) з проміжком часу між тими самими подіями, але який вимірюється двома годинниками іншої СВ, відносно якої ці дві події відбуваються в двох різних точках простору, визначається формулою (5.2).

Насправді мова іде не про темп ходу часу у різних системах відліку, а про опис у різних системах відліку будь-якого фізичного процесу, що локалізований у системі відліку K' .

Як це видно із (5.2), тривалість процесу завжди найменша у тій системі відліку, де частинка (або процес) знаходиться в спокої (має місце просторова локалізація). У будь-якій іншій системі відліку народження і розпад нестабільної частинки, наприклад, (тривалість процесу) відбуватиметься в різних точках простору. А наявність просторової частини квадрату інтервалу

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (5.3)$$

приводить (оскільки він є інваріантним) до зростання часу життя частинки в будь-якій іншій СВ, порівняно із власною СВ, де частинка (процес) знаходиться в спокої.

5.1.3. Найбільш просте обґрунтування формули $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}}$ можливе

за допомогою «світлового годинника» (Розділ 1, с. 25-27, див. також [8; 14; 24; 26; 40, Додаток Ж; 54; 75])

5.1.4. Обґрунтування формули $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}}$ за допомогою методу k –

коефіцієнта (Розділ 1, п. 1.4, див. також [12; 75]).

5.2. Обґрунтування формули лорентцевого скорочення повздовжніх розмірів рухомих тіл

При вивченні СТВ учнями, що вивчають фізику на профільному рівні в ЗНЗ, скорочення повздовжніх розмірів рухомих тіл (лорентцеве скорочення) можна обґрунтувати наступними способами:

5.2.1. Обґрунтування формули лорентцевого скорочення з використанням властивості просторово-подібного інтервалу [41; 48, с. 43; 40, с. 113].

5.2.2. Скорочення повздовжніх розмірів рухомих тіл як наслідок перетворень Лорентца (див. Розділ 1, п. 1.3).

5.2.3. Спосіб, що ґрунтується на аналізі поширення променів в «світловому годиннику» (див. **Задачу 1.1.**)

5.2.4. Спосіб, що ґрунтується на відомій швидкості руху стрижня відносно СВ K (див. **Задачу 1.2.**).

5.2.5. Спосіб, з урахуванням одночасного в СВ K' спалаху лампочок на кінцях нерухомого в СВ K' стрижня (див. **Приклад 1.1.**).

5.2.6. Спосіб, що використовує метод k - коефіцієнта (див. Розділ 1, п. 1.4, а також [40, Додаток Е; 75]).

5.2.7. Спосіб Малініна О.М. ([54, с. 76-77], див. також [40], Додаток В).

5.2.1. Обґрунтування формули лорентцевого скорочення з використанням властивості просторово-подібного інтервалу [41; 48, с. 43; 40, с. 113].

Нехай стрижень нерухомий у СВ K й орієнтований вздовж осі OX .

Тоді квадрат інтервалу у СВ K дорівнює:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (5.4)$$

Оскільки, згідно з процедурою вимірювання довжини рухомого стрижня, у СВ K' ми повинні зафіксувати координати початку і кінця цього рухомого стрижня в один і той же момент часу за годинниками СВ K' , то у виразі для $\Delta s'^2$ слід взяти $\Delta t' = 0$.

Нехай дві події відбулися на осі $O'X'$ деякої системи відліку. У випадку просторово-подібного інтервалу завжди можна знайти СВ K' , у якій ці дві події відбулися одночасово - $\Delta t' = 0$. Стосовно нашої задачі це означає, що в СВ K' ми зафіксувати координати початку і кінця цього рухомого стрижня в один і той же момент часу за годинниками СВ K' ($\Delta t' = 0$).

Тоді квадрат інтервалу зводиться тільки до просторової віддалі між цими подіями (фіксацією координат початку і кінця цього рухомого стрижня в СВ K'):

$$\Delta s'^2 = -\Delta x'^2 < 0. \quad (5.5)$$

У будь-якій іншій системі відліку (наприклад, у СВ K) для Δs^2 маємо:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0.$$

Введемо позначення для довжин відрізків (стрижня), що з'єднують просторові точки, в яких відбулися ці дві події:

$$\Delta l_0^2 = \Delta x^2, \quad \Delta l'^2 = \Delta x'^2.$$

Тобто, ми вважаємо, що віддаль між точками у СВ K' - це так би мовити довжина відрізка (стрижня), який рухається відносно СВ K' . Бо згідно з умовою задачі та з означенням довжини рухомого відрізка (стрижня) кінці відрізка фіксуються одночасово у СВ K' , $\Delta t' = 0$.

Прирівнюючи (5.4) і (5.5), одержуємо:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = -\Delta x'^2, \quad (5.6)$$

або, враховуючи введені вище позначення, маємо:

$$c^2 \Delta t^2 + \Delta l'^2 = \Delta l_0^2. \quad (5.7)$$

Навіть із виразу (5.6) видно, що довжина відрізка dl' у СВ K' (який рухається відносно у СВ K') менша, ніж довжина цього ж відрізка, але нерухомого у СВ K .

У СВ K' ми одночасово ($\Delta t' = 0$) реєструємо координати кінців відрізка $\Delta l' = \Delta x'$. А проміжок часу між цими подіями з точки зору СВ K визначається формулою різночасовості (1.24) (див. також формули (1.54a) та (1.55) в *задачі 1.5*), або з опертям на перетворення Лорентца:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Gamma \left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x' \right) = \frac{\Gamma V}{c^2} \Delta x', \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \frac{V \cdot \Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{V \cdot \Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{V \cdot \Delta l'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

оскільки $\Delta t' = 0$.

Підставимо цей вираз для Δt у формулу (5.7) і одержуємо:

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{\frac{V \cdot \Delta l'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \Delta l'^2 &= \Delta l_0^2, \\ \Delta l'^2 \left(1 + \frac{B^2}{1 - B^2} \right) &= \Delta l_0^2. \end{aligned}$$

І нарешті:

$$\Delta l' = \Delta l_0 \sqrt{1 - B^2} . \quad (5.9)$$

Таким чином, лорентцеве скорочення є наслідком структури 4-вимірному простору-часу й процедури вимірювання рухомого відрізка.

5.3. Деякі способи обґрунтування перетворень Лорентца

Огляд науково-методичної літератури свідчить про використання різних, в залежності від рівня складності та узагальнення, способів обґрунтування ПЛ [40].

Використання на факультативних заняттях у навчальному процесі класів з поглибленим вивченням фізики ЗНЗ можемо рекомендувати наступні способи обґрунтування ПЛ.

5.3.1. Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стрижня.

Зв'язок між координатами x, y, z, t та x', y', z', t' однієї і тієї ж події визначається перетвореннями Лорентца. Обґрунтування ПЛ цим методом подано у Додатку Б.

5.3.2. Метод, що ґрунтується на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу з точки зору двох інерціальних систем відліку.

Розглянемо дещо інше обґрунтування перетворень Лорентца [40]. Це - спосіб, оснований на інваріантності квадрату світлоподібного інтервалу між двома подіями з точки зору двох інерціальних систем відліку.

Нехай x, y, z, t і x', y', z', t' - координати і час довільної події в інерціальних системах відліку K і K' , а \vec{V} - швидкість їх відносного руху.

Для встановлення аналітичного зв'язку між величинами (x, y, z, t) і (x', y', z', t') розглянемо розповсюдження сферичної електромагнітної хвилі в обох системах відліку. Виберемо за початок відліку часу $t = 0$ той момент, в який початок координат системи K' співпадає з початком координат системи K .

Нехай в момент $t = 0$ з початку координат почала поширюватися сферична електромагнітна хвиля. В системі K рівняння хвильової поверхні має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (5.10)$$

Оскільки, згідно з принципом відносності Ейнштейна, це рівняння хвильової поверхні і швидкість поширення електромагнітної хвилі повинні бути однаковими в усіх інерціальних системах відліку, то можна записати рівняння цієї сферичної електромагнітної хвилі в системі K' :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (5.11)$$

Формули перетворення координат і часу не повинні порушувати співвідношення (5.10) і (5.11), а також бути лінійними. Вимога лінійності пов'язана з однорідністю простору. Нагадаємо ще раз, що однорідність простору означає рівноправність усіх точок простору, тобто в просторі не існує будь-яких точок, відмінних за властивостями (детальніше див. [9; 21; 32]).

У зв'язку з тим, що рух системи K' відбувається тільки вздовж вісі OX , перетворення координат y та z повинно мати вигляд (див. Додаток А, або [8; 40; 57]):

$$y' = y; \quad z' = z. \quad (5.12)$$

Якщо в момент часу $t = 0$ початки систем координат K і K' співпадали, то координата площини $x' = 0$ в системі K записується у вигляді: $x = Vt$. Тому в загальному випадку (для довільної точки простору СВ K') можна записати (див. (1.9) та (1.10)):

$$x' = \alpha(V)(x - Vt), \quad (5.13)$$

де коефіцієнт $\alpha(V)$ залежить лише від швидкості відносного руху.

Представимо t' у вигляді лінійної однорідної функції x і t :

$$t' = \beta t + \gamma x. \quad (5.14)$$

Подання залежності часу t' у вигляді лінійної однорідної функції тільки змінних x і t можна розглядати як наслідок однорідності простору і часу, причому без лінійних доданків пропорційних y і z . Відсутність доданків пропорційних y і z у виразі (5.14) зумовлена тим, що при $x = 0$ і $t = 0$ ми мали би різні значення t' в різних точках площини $x' = 0$.

Для визначення коефіцієнтів α, β, γ необхідно підставити (5.13) і (5.14) в (5.11). Отримаємо:

$$\alpha^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 (\beta t + \gamma x)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

Ця рівність має місце при будь-яких значеннях координат x, y, z, t , що може бути лише за умови рівності коефіцієнтів при x^2, t^2 і xt . Тобто, маємо:

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 \gamma^2 &= 1, \\ a^2 V^2 - c^2 \beta^2 &= -c^2, \\ a^2 V + c^2 \beta \gamma &= 0. \end{aligned}$$

З цих трьох рівнянь знаходимо невідомі величини α, β, γ :

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ \gamma &= \frac{\alpha V}{c^2} = -\frac{V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Підставляючи значення α, β, γ в формули перетворення координат (5.13) і (5.14) та враховуючи (5.12), отримаємо перетворення Лорентца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (5.15)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (5.15) відносно x, y, z, t та отримаємо обернені ПЛ:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (5.16)$$

Можна запропонувати також метод обґрунтування ПЛ, який є *спрощеною модифікацією* цього методу, оскільки до уваги береться тільки один вимір.

Для цього розглянемо мал. 5.2. Вихідні умови для систем відліку такі ж, як і для мал. 5.1.

Точка $x' = 0$ в СВ K має координату $x = Vt$.

Тоді очевидно, що для довільної іншої точки СВ K' маємо:

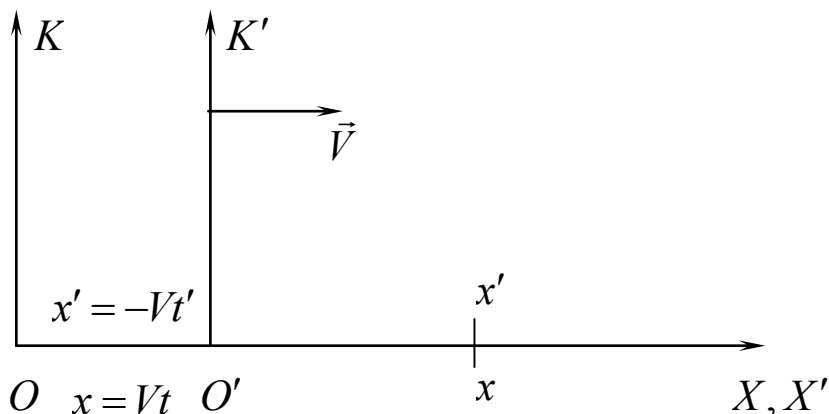
$$x' = \alpha'(x - Vt). \quad (5.17)$$

З іншого боку, точка $x = 0$ (точка O , початок координат СВ K) з позиції СВ K' має координату $x' = -Vt'$ (див. Мал. 5.2). Тому для будь-якої іншої точки СВ K можна записати:

$$x = \alpha(x' + Vt'). \quad (5.18)$$

Виходячи із принципу відносності, коефіцієнти α та α' повинні бути однакові (див. п. 1.2):

$$\alpha = \alpha'.$$



Мал. 5.2. Положення початку координат кожної із систем відліку відносно іншої

Із цих двох співвідношень, $x' = \alpha(x - Vt)$ та $x = \alpha(x' + Vt')$, можна одержати:

$$t' = \gamma \cdot t + \delta \cdot x, \quad (5.19)$$

де $\gamma = \alpha$, $\delta = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha V}$.

Тобто, виходячи із принципу відносності та другого постулату Ейнштейна, а також однорідності простору і часу ми дійшли висновку, що між t і t' повинна бути лінійна залежність.

Зокрема, якби вона була нелінійна, наприклад, $t' \sim t^2$, то довільний рівномірний рух в одній системі буде прискореним в іншій системі відліку. Такий висновок суперечить самому поняттю інерціальної системи відліку.

Розглянемо відправлення світлового сигналу із початку координат СВ K і СВ K' в ту мить, коли вони співпадають. Тоді, через відповідні проміжки часу, світловий сигнал досягне точок з координатами, відповідно, на осі OX та $O'X'$:

$$x' = ct' \quad x = ct.$$

Підставимо останні вирази в систему рівнянь:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha'(x - Vt) \\ x &= \alpha(x' + Vt') \end{aligned} \quad (5.20)$$

й отримуємо:

$$ct' = \alpha(ct - Vt) = \alpha t(c - V)$$
$$ct = \alpha(ct' + Vt') = \alpha t'(c + V)$$

З останньої системи рівнянь знаходимо:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}},$$

де $B = \frac{V}{c}$.

І нарешті, із (5.19) та (5.20) одержуємо перетворення Лорентца.

Очевидно, в основу цього методу обґрунтування ПЛ покладено інваріантність рівняння хвилевої поверхні сферичної електромагнітної хвилі в двох довільних системах відліку K і K' . З науково-методичної точки зору цей метод є найбільш простим та доступним у математичному відношенні, однак більш детального обґрунтування потребують формули (5.17), (5.18), (5.19).

5.4. Деякі методи обґрунтування релятивістських формул додавання швидкостей

У більшості підручників з фізики для ЗНЗ відсутнє будь-яке обґрунтування релятивістських формул додавання швидкостей (РФДШ). Подається без виводу лише одна формула для повздовжньої складової швидкості та деякі задачі на використання цієї формули [7; 42; 72; 25; 14; 61-63].

У навчально-методичній літературі запропоновано декілька методів обґрунтування РФДШ, причому, на наше переконання, деякі з них можна назвати екзотичними і в той же час не позбавленими певної креативності [14; 51-54]). Так, оригінальність способу доведення формул додавання швидкостей за Малініним О.М полягає в пропозиції обґрунтування не тільки повздовжніх компонентів швидкості, але й її поперечних складових.

Ми вважаємо, що в сучасній практиці навчання СТВ можна використовувати наступні методи обґрунтування РФДШ.

5.4.1. Спосіб, що ґрунтується на використанні перетворень Лорентца

Це найбільш простий і доступний для учнів ЗНЗ спосіб доведення РФДШ. Але попередньо необхідно або вивести ПЛ, або записати та пояснити їх зміст (див. п. 1.2).

5.4.2. Спосіб доведення релятивістських формул додавання швидкостей та перетворень Лорентца за Малініним О.М. (Додаток В)

Для учнів ЗНЗ пропонуємо спрощений варіант цього способу виведення РФДШ (див. Додаток В, або [52]) як для поперечних, так і для повздовжніх компонентів швидкості частинки та перетворень Лорентца. І саме в цьому ми вбачаємо більш узагальнений підхід до виведення РФДШ. А оригінальність цього способу визначається креативним використанням (5.21) для обґрунтування як РФДШ так і ПЛ.

Виходимо із відомої (або обґрунтованої певним способом) формули додавання для повздовжнього компонента швидкості. Зв'язок повздовжніх компонент швидкості v_x, v'_x описується формулою:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}. \quad (5.21)$$

Урахуємо очевидні означення: $v_x = \Delta x / \Delta t$, $v'_x = \Delta x' / \Delta t'$ й одержимо:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'}. \quad (5.22)$$

Звідси, взагалі кажучи, можна припустити, що:

$$\Delta x = \Gamma(\Delta x' + V \Delta t'), \quad (5.23)$$

$$\Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'\right), \quad (5.24)$$

де величина Γ не залежить від величин $\Delta x / \Delta t$, $\Delta x' / \Delta t'$, а залежить лише від відносної швидкості систем відліку K та K' , тобто $\Gamma = \Gamma(V)$.

Оскільки відносний рух СВ K' і СВ K має місце лише вздовж осей OX , $O'X'$, тоді отримуємо, що

$$\Delta y = \Delta y', \Delta z = \Delta z' \quad (5.25)$$

Тепер із співвідношень (5.24), (5.25) знаходимо (взявши осі OY , $O'Y'$):

$$v_y = \frac{v'_y}{\Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)}, \quad (5.26)$$

де $v_y \equiv \Delta y / \Delta t$, $v'_y = \Delta y' / \Delta t'$.

Для знаходження величини $\Gamma = \Gamma(V)$ слід використати постулат сталості швидкості світла (ПСШС), згідно з яким швидкість світла є інваріантною величиною. І тому застосуємо вирази (5.21) й (5.26) до інваріантної швидкості \vec{c} . Нехай її компоненти в СВ K' такі: $v'_x = 0$, $v'_y = c$.

Тоді згідно (5.21) й (5.26) в СВ K маємо такі компоненти швидкості світла: $v_x = V$, $v_y = c/\Gamma$.

Але згідно з ПСШС $v_x'^2 + v_y'^2 = v_x^2 + v_y^2 = c^2 = in v$, тому підставивши у цей вираз значення компонент швидкості світла у СВ K , $v_x = V$, $v_y = c/\Gamma$, знаходимо:

$$\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (5.27)$$

Тобто одержуємо релятивістську формулу додавання для поперечної компоненти швидкості:

$$v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2} v_x'} \quad (5.28)$$

Нам видається, що шлях визначення величини Γ , запропонований О.М. Малініним, не тільки методично оригінальний, але й довершений з естетичної та фізичної точок зору.

Тепер стосовно перетворень Лорентца.

Після знаходження величини Γ повністю визначаються перетворення Лорентца. Дійсно, якщо одна з подій є $O(0,0,0,0)$, та $O'(0,0,0,0)$, то $\Delta x = x$, $\Delta y = y$, $\Delta z = z$, $\Delta t = t$, і тоді з (5.23) та (5.24) впливають перетворення Лорентца (1.12).

5.4.3. Обґрунтування формули перетворення повздовжньої компоненти швидкості за О.М. Малініним

Можна припустити, що релятивістський закон додавання повздовжньої складової швидкості має вигляд [54]:

$$v_x = k(v_x' + V), \quad (5.29)$$

де v_x', v_x – швидкості частинок відповідно в СВ K' і СВ K , V – відносна швидкість обох СВ, k – невідомий множник, який слід визначити. Причому при визначенні цього коефіцієнту ми повинні спиратися на загальнофізичні фундаментальні принципи.

По-перше, зрозуміло, що коефіцієнт k не може бути просто числом, тому що тоді із (5.29) ні за яких умов не можна одержати класичну формулу додавання швидкостей $v_x = v_x' + V$, оскільки, згідно з принципом відповідності при $\lim_{c \rightarrow \infty} k = 1$, ми повинні отримати класичний закон додавання швидкостей.

По-друге, через те, що величина k не має розмірності, в неї повинні входити відношення швидкостей. Але яких? Якщо величини v'_x , V входять у шуканий закон (5.29) симетрично (рівноправно, як і в класичному законі) і при граничному переході порівнюються з фундаментальною швидкістю c , то в коефіцієнт k повинен мати доданки типу: $\frac{v'_x}{c}$, $\frac{V}{c}$, $\frac{v'_x \cdot V}{c^2}$.

Беручи до уваги умову $\lim_{c \rightarrow \infty} k = 1$, можна припустити, що коефіцієнт k повинен мати вигляд:

$$k = \left(1 + \frac{v'_x}{c} + \frac{V}{c} + \frac{v'_x \cdot V}{c^2} \right)^n, \quad (5.30)$$

де величина $n = \text{const} \neq 0$.

По-третє, будь-який закон перетворення швидкості повинен задовольняти очевидним вимогам:

а) $v_x = V$ при $v'_x = 0$;

б) $v_x = v'_x$ при $V = 0$.

Тоді з (5.30) випливає, що коефіцієнт k , відповідно, повинен мати значення:

а) $k = \left(1 + \frac{V}{c} \right)^n$; б) $k = \left(1 + \frac{v'_x}{c} \right)^n$.

Але в цьому випадку виникає протиріччя між (5.29) з такими коефіцієнтами k та принципом відповідності.

Це протиріччя спростовується, якщо в виразі (5.30) прибрати члени $\frac{v'_x}{c}$ та $\frac{V}{c}$. Тоді (5.30) набуває вигляду:

$$k = \left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2} \right)^n \quad (5.31)$$

Але згідно з другим постулатом СТВ: при $v'_x = c$ ми повинні із шуканого релятивістського закону додавання повздовжньої складової швидкості (5.29) отримати $v_x = c$.

Це приводить до того, що у виразі (5.29) коефіцієнт k необхідно взяти у вигляді $k = \left(1 + \frac{V}{c} \right)^{-1}$.

А із (5.31) при цьому одержуємо значення k вигляду $k = \left(1 + \frac{V}{c}\right)^n$.

Отже, при $n = -1$ коефіцієнту k необхідно надати виразу:

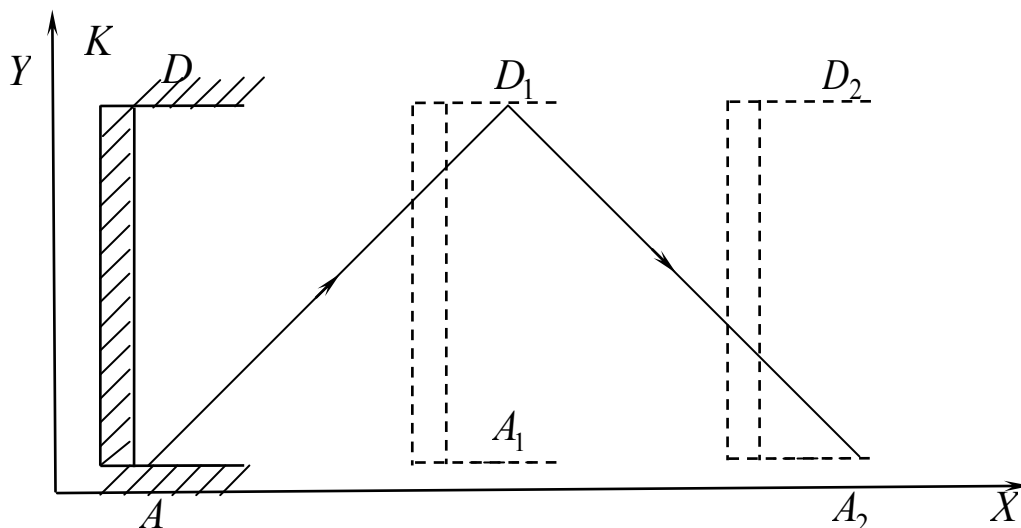
$$k = \left(1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}\right)^{-1}. \quad (5.32)$$

Підставимо (5.32) в (5.29) і отримуємо остаточну релятивістську формулу додавання (за Малініним О.М. – формулу перетворення швидкості) для повздовжнього компоненту швидкості:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5.33)$$

5.4.4. Спосіб обґрунтування релятивістських формул додавання швидкостей на основі аналізу поширення світлового променя у «світловому годиннику»

Шляхом узагальнення процесу поширення світла у «світловому годиннику» обґрунтуємо релятивістські формули додавання швидкостей для поперечних складових швидкості. Нехай «світловий годинник» AD рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж осі OX СВ K , мал. 5.3. Тобто СВ K' є власною системою відліку для «світлового годинника».



Мал. 5.3. Світловий промінь у «світловому годиннику» в СВ K розповсюджується вздовж ломаної лінії AD_1A_2

З точки зору СВ K швидкість світла вздовж променю AD_1 (яка дорівнює c) є геометричною сумою швидкостей світла вздовж осі OX та поперечної складової швидкості світла вздовж осі OY ($c_x = V$):

$$c^2 = V^2 + c_y^2.$$

Тому ця поперечна складова швидкості світла дорівнює:

$$c_y = \sqrt{c^2 - V^2} = c\sqrt{1 - B^2}, \quad (5.34)$$

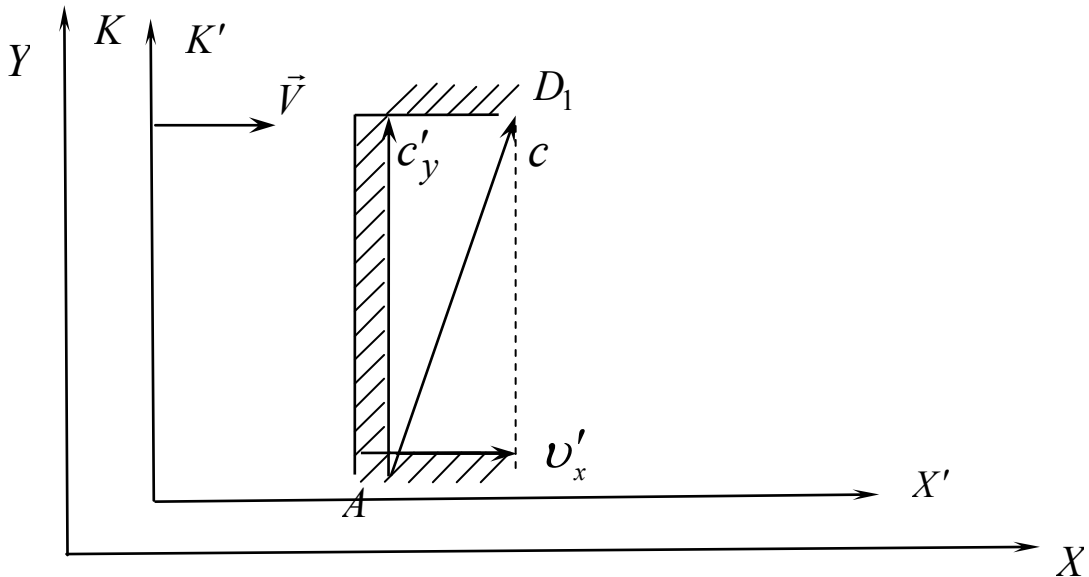
де $B = \frac{V}{c}$.

Формулу (5.33) ми можемо отримали за умови, коли у СВ K' «світловий годинник» не рухається вздовж осі $O'X'$. Тобто СВ K' є власною системою відліку для нього.

Пропустимо тепер, що відносно СВ K' «світловий годинник» переміщується вздовж осі $O'X'$ зі швидкістю v'_x (див. Мал. 5.4).

Тоді у СВ K' для поперечної складової швидкості світла маємо співвідношення аналогічне (5.34):

$$c'_y = c\sqrt{1 - \left(\frac{v'_x}{c}\right)^2}. \quad (5.35)$$



Мал. 5.4. «Світловий годинник» рухається відносно СВ K' вздовж осі $O'X'$ зі швидкістю v'_x

Але також і з точки зору СВ K , згідно з ПСШС, швидкість світла дорівнює c .

Оскільки складова швидкості світла вздовж осі OX СВ K дорівнює, згідно з, наприклад, (5.33):

$$c_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad (5.36)$$

то поперечна складова швидкості світла вздовж осі OY СВ K , очевидно, повинна визначатися із рівняння:

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2. \quad (5.37)$$

Враховуючи (5.36) для c_y одержуємо:

$$c_y^2 = c^2 - \left(\frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \right)^2 = \frac{(c'_y)^2 (1 - B^2)}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)^2}. \quad (5.38)$$

$$c_y = \frac{c'_y \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5.39)$$

Аналогічно для проекції швидкості світла на вісь OZ маємо:

$$c_z = \frac{c'_z \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5.40)$$

Для поперечних складових швидкості тіла (і, взагалі кажучи, будь-якого об'єкта) маємо формули подібні до (5.39) та (5.40):

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5.41)$$

Таким чином, узагальнюючи, скажемо, що релятивістські формули додавання швидкостей мають вигляд:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5.42)$$

Оскільки модель «світлового годинника» використовується в підручниках з фізики для ЗНЗ, то наведений вище спосіб обґрунтування релятивістських формул додавання поперечних складових швидкості тіла можна рекомендувати учням для самостійного опрацювання з метою поглиблення їх знань з основ СТВ. Ця рекомендація обумовлена ще й тим, що в цьому способі обґрунтування використовуються безпосередньо обидва постулати (принципи) спеціальної теорії відносності.

5.5. Критично–конструктивний аналіз особливостей висвітлення релятивістських кінематичних ефектів у підручниках для ЗНЗ

У цьому пункті проаналізуємо деякі некоректні формулювання, що іноді мають місце в підручниках з фізики..

Вчителеві фізики слід ураховувати, що вивчення спеціальної теорії відносності в курсі середньої школи викликає чимало труднощів в багатьох учнів, тому що розкриття фізичних основ цієї теорії вимагає використання складного математичного та понятійного апарату, розвинутого абстрактно-логічного мислення, сформованості умінь встановлювати змістовно-логічні зв'язки між окремими складовими теорії, здатності формулювати кінематичні наслідки із фундаментальних теоретичних положень.

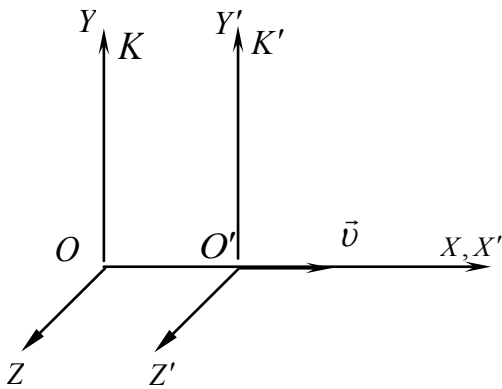
Важливим для вчителя при навчанні спеціальної теорії відносності є чітке дотримання принципу науковості, системності та наступності при формуванні наукових понять, при формулюванні висновків і наслідків релятивістської теорії задля забезпечення цілісної, логічно-структурованої фізичної теорії. Тому недопустимими є фізичні неточності, некоректні формулювання та трактування деяких питань теорії відносності, що мають місце в деяких шкільних підручниках та навчально-методичних матеріалах.

На наш погляд, усунення цих неточностей унеможливило порушення принципу науковості при викладанні СТВ.

Перш за все зауважимо, що в багатьох підручниках з фізики для загальноосвітніх навчальних закладів [7; 16; 33; 63] взагалі не згадуються перетворення Лорентца, їх місце та значення в релятивістській фізиці. Такий підхід до викладання спеціальної теорії відносності, на нашу думку, не забезпечує системності, послідовності та логічності у викладі матеріалу. Розгляд основних положень СТВ без висвітлення перетворень Лорентца залишає нерозкритим питання переходу від класичної до релятивістської механіки, від перетворень Галілея до перетворень Лорентца. При цьому учням залишається незрозумілим звідки з'являється новий закон додавання швидкостей тощо. Такий підхід не дозволяє сформулювати системні знання, створює труднощі, що призводять до нерозуміння цієї фізичної теорії.

1. Так, в підручнику [25] подаються перетворення Лорентца, і підкреслюється, що вони є узагальненням перетворень Галілея, за умови відносності часу. Однак, форма подання перетворень Лоренца, є, на нашу думку, не зовсім методично вивіреною (а місцями і помилковою), а саме, має вигляд [25, с. 250]:

«Зв'язок між величинами, що характеризують подію в різних інерціальних системах відліку, називають перетвореннями Лоренца:



$$x' = \frac{x \pm vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \frac{t \pm \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Знак «+» у чисельнику застосовується при переході від системи K' до системи K , знак «-» застосовується при переході від системи K до системи K' . Це зумовлено тим, що система K' рухається відносно системи K зі швидкістю v , водночас можна вважати, що система K рухається відносно системи K' зі швидкістю $-v$.

Але тоді треба ще додатково пояснювати, що при застосуванні формули в такому вигляді при переході від системи K' до системи K , і навпаки, окрім знаків необхідно ще й змінювати відповідні змінні x' на x , а t' на t .

Такий об'єм додаткових пояснень здатен лише заплутати учнів, тому доцільно ПЛ подавати у запропонованому нами вигляді (див. (5.15) та (5.16)):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

при переході від системи K до системи K' .

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

при переході від системи K' до системи K .

Слід відзначити, що в підручнику [3, с. 128], також наводяться формули ПЛ, щоправда лише для переходу від системи K до системи K' .

Пропоновані нами способи обґрунтування ПЛ та пояснення їх сутності відповідають у більш повній мірі (на відміну від [25; 26],) принципам доступності та науковості.

Далі, при вивченні релятивістського закону додавання швидкостей в підручнику [25] читаємо: «Нехай тіло рухається відносно системи K' зі швидкістю \vec{u} . Сама система K' рухається відносно системи K , яка вважається нерухомою, з постійною швидкістю \vec{v} уздовж осі X . Позначимо швидкість цього самого тіла відносно нерухомої системи K літерою \vec{w} . Тоді релятивістський закон додавання швидкостей матиме вигляд:

$$\vec{w} = \frac{\vec{v} + \vec{u}}{1 + \frac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}}.$$

Якщо $u \ll c$ та $v \ll c$, маємо класичний закон додавання швидкостей $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ » [25, с. 253].

Як бачимо, отримується зручна форма подання релятивістського закону додавання швидкостей, яка дозволяє, ніби-то, за малих швидкостей перейти безпосередньо до класичного закону додавання швидкостей, до того ж записаному у векторній формі. Однак, постає питання чи відповідає дійсності така форма запису релятивістського закону додавання швидкостей?

Як показано (Розділ 1, **Задача 1.10**) [40, с. 87] векторна формула додавання швидкостей має вигляд:

$$\vec{v} = \frac{\vec{V} + \vec{v}'\sqrt{1-B^2} + \frac{1}{V^2}(\vec{V}\vec{v}') \cdot \vec{V}(1-\sqrt{1-B^2})}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}},$$

де \vec{v} – швидкість руху тіла відносно нерухомої системи відліку K , \vec{v}' – швидкість руху тіла відносно рухомої системи відліку K' , \vec{V} – швидкість рухомої системи відліку K' відносно нерухомої K .

Навіть якщо зробити певні спрощення і розглядати релятивістське додавання швидкостей за умови, що швидкість \vec{V} рухомої системи відліку K' відносно нерухомої K , значно менше швидкості світла у вакуумі, то в цьому випадку отримується вираз (див. [45, с. 27], або **Задачу 1.10**):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} - \vec{v}' \frac{(\vec{v}'\vec{V})}{c^2}.$$

Отже, навіть за такого спрощення, формула релятивістського додавання швидкостей суттєво відрізняється від тієї, що наводиться Засекіною Т.М.

З методичної точки зору, зважаючи на складність математичного запису, формулу релятивістського додавання швидкостей у векторній формі в шкільному курсі фізики недоцільно розглядати, навіть у фізико-математичних класах. Необхідно обмежуватись розглядом одновимірного релятивістського руху тіл, коли їх швидкості лежать на одній прямій.

Дійсно, нехай тіло рухається зі швидкістю \vec{v}' уздовж осі $O'X'$ системи відліку K' , яка у свою чергу рухається відносно системи відліку K зі швидкістю \vec{V} так, що під час руху координатні вісі OX і $O'X'$ напрямлені вздовж однієї прямої, а координатні вісі OY і $O'Y'$ та OZ і $O'Z'$ залишаються паралельними.

У цьому випадку релятивістський закон додавання швидкостей слід записувати у вигляді:

$$v_x = \frac{v'_x + V_x}{1 + \frac{v'_x \cdot V_x}{c^2}}$$

Слід зазначити, що в навчально-методичній та шкільній літературі немає загально прийнятих позначень швидкостей, що вносить певну плутанину.

Різnobій у позначеннях швидкостей тіла в рухомій та нерухомій системах відліку, їх відносної швидкості, який має місце як в підручниках так і в науково-методичній літературі не сприяє цілісному сприйняттю основ СТВ та розумінню фізичної суті релятивістських ефектів, складає дидактичні труднощі як у поясненні вчителем релятивістської кінематики, так і при самостійному опрацюванні учнями цього складного, але необхідного у формуванні адекватного сучасній науці світогляду суб'єктів навчальної діяльності.

Варіанти вивчення кінематики СТВ визначаються різною послідовністю викладу способів обґрунтування кінематичних релятивістських ефектів (сповільнення ходу рухомого годинника, лорентцеве скорочення, перетворень Лорентца, та релятивістських формул додавання швидкостей (РФДШ)).

Також акцентуємо увагу учителів фізики, що різні підходи та варіанти висвітлення основ СТВ повинні визначатися конкретною дидактичною ситуацією: рівнем підготовки суб'єктів навчальної діяльності, спрямованістю їх пізнавальних інтересів, креативністю вчителя.

Продовжуємо аналізувати опис кінематичних ефектів СТВ в наявних підручниках та науково-методичних статтях. Зокрема, при обґрунтуванні формули лорентцевого скорочення способом, поданим в п. 5.2.1, слід уникнути непорозумінь, які іноді мають місце в методичній літературі. Так, наприклад, у статті [41] мають місце деякі помилки. А саме, після співвідношення (5.6), поданого у вигляді

$$c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2} \right) = -(\Delta x')^2,$$

безпідставно і помилково говориться: «Ввівши очевидні позначення $l_0 = c\Delta t$, $l = |(\Delta x')^2|$, $v = \frac{|\Delta x|}{\Delta t}$, дістанемо: $l_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{\tilde{n}^2}\right) = l^2$, або $l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{\tilde{n}^2}} = l$ » [41, с. 29].

Перш за все із «очевидних позначень» перше $l_0 = c\Delta t$ та третє $v = \frac{|\Delta x|}{\Delta t}$ - довільні, необґрунтовані та не відповідають суті задачі. А в другому із пропонованих автором [41, с. 29] позначень присутня і просто несуттєва описка (повинно бути $l^2 = |(\Delta x')^2|$) і в той же суттєва помилка, бо припускається, що $l^2 = -(\Delta x')^2$.

Слід також сприймати критично наступну фразу автора статті [41, с. 29]:

«З постулату рівноцінності всіх інерціальних систем зрозуміло, що скорочення є ілюзією». З позиції принципу науковості порівняння явища лорентцевого скорочення з ілюзією є, принаймні, доволі проблематичним.

І далі, як можна зрозуміти твердження автора, що сповільнення часу, яке отримується в [41] теж із інваріантності квадрату інтервалу це реальний ефект, а лорентцеве скорочення – ілюзія?!

З побажанням учителям фізики удосконалити методику навчання СТВ пропонуємо проаналізувати деякі формулювання положень СТВ та наслідків їх, які викладені у підручниках відомих авторів [25; 42] й які стосуються сповільнення ходу рухомого годинника та лорентцевого скорочення.

Так, питання відносності одночасовості подій подається по різному в сучасних підручниках, з різним ступенем деталізації та інформативності.

На жаль, при висвітленні цього питання деякі автори припускаються фізичних неточностей.

У довіднику [43, с. 86] читаємо: «Время Δt_0 , отсчитанное по часам, движущимся вместе с данной системой отсчета, называется собственным временем. Собственное время одинаково во всех системах отсчета.

Движущиеся часы идут медленнее неподвижных: $\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}$ ».

Текстове пояснення вірне, а формула $\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}$, згідно з цими поясненнями, невірна.

У загалом гарному підручнику [25] розглядається наступний приклад – на підлозі вагона розташоване джерело світла, а на стелі дзеркало. Пропонується знайти інтервал часу, протягом якого світло досягне стелі та, відбившись від дзеркала, повернеться назад. Розглядаючи поширення світлового сигналу відносно спостерігача, що рухається разом із вагоном та відносно нерухомого

спостерігача, автори [25] на ілюстраціях неправильно вказують напрям поширення світлового променя [27, с. 249].

Дійсно, на малюнку 223, б ([25, с. 249]) автори показують, що відносно нерухомого спостерігача світловий промінь поширюватиметься в напрямі ломаної АВС. А насправді напрям поширення світлового сигналу – СВА (див. Мал. 5.5).

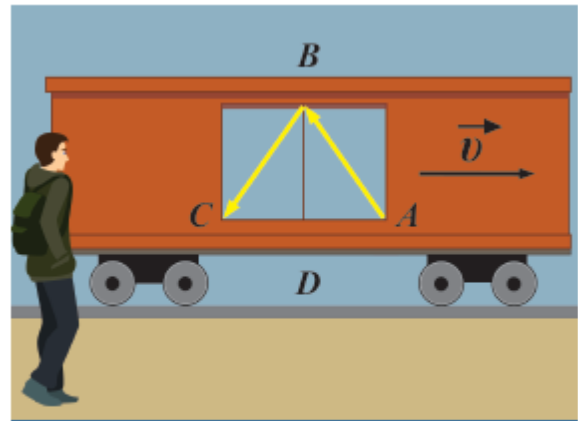
Тому розглянемо цей приклад більш детально.

Відносно системи K' , зв'язаної зі спостерігачем, що рухається разом із вагоном, подія А – увімкнення ліхтарика і подія С – фіксація світлового сигналу мають наступні просторові і часові координати:

подія А: $x'_A = 0$, $t'_A = 0$; подія С: $x'_C = 0$, $t'_C = \frac{2l}{c}$ (де l – висота стелі вагону).



Мал. 223, а. Поширення світлового сигналу відносно спостерігача, що рухається разом із вагоном



Мал. 223, б. Поширення світлового сигналу відносно нерухомого спостерігача

Мал. 5.5. Пояснення явища поширення світлового сигналу в «світловому годиннику» згідно з підручником [25]

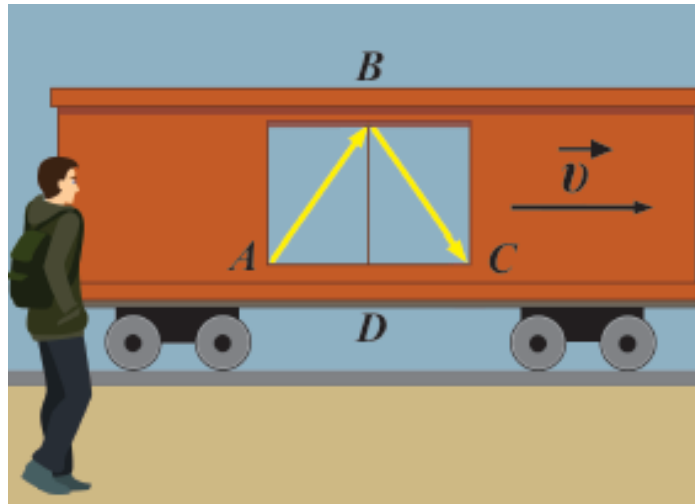
Таким чином, різниці координат і часу в системі K' , дорівнюють:

$\Delta x' = x'_C - x'_A = 0$ (зміщення променя світла відносно спостерігача у вагоні);

$\Delta t' = t'_C - t'_A = \frac{2l}{c}$ (інтервал часу, протягом якого світло досягне стелі та, відбившись від дзеркала, повернеться назад за годинником спостерігача у вагоні).

Час, виміряний годинником, який рухається разом з тілом у системі відліку K' , називають власним часом і позначають $\Delta t'$. Отже, власний час

дорівнює $\Delta t' = \frac{2l}{c}$.



Мал. 5.6. Поширення світлового сигналу в «світловому годиннику» з точки зору спостерігача на платформі (в системі K)

Розглянемо тепер просторові і часові координати подій A та C в системі K , зв'язаної з нерухомим спостерігачем, що стоїть на платформі, відносно якої вагон рухається зі швидкістю v .

Подія A : $x_A = 0$, $t_A = 0$.

З точки зору спостерігача на платформі (в системі K) за той час доки промінь світла дійде до дзеркала, вагон зрушить **вправо** на відстань AD . Відповідно на таку ж відстань зміститься і дзеркало на стелі вагону (див. Мал. 5.6).

Світловий промінь відіб'ється від дзеркала на стелі в точці B і згідно з законом відбивання під таким самим кутом почне свій рух в напрямі до підлоги вагону. Вагон за цей час зміститься на відстань DC (до того ж $DC=AD$) і відбудеться фіксація світлового сигналу на підлозі (подія C). За весь інтервал часу, протягом якого світло досягне стелі і, відбившись, повернеться назад вагон зміститься відносно спостерігача на платформі на відстань AC . А світловий промінь подолає відстань $AB+BC=2AB$ (оскільки $AB=BC$).

Таким чином, просторові і часові координати події C системі K , дорівнюють: подія C : $x_C = AC = AD + DC = 2AD$, $t_C = \frac{2AB}{c}$.

Таким чином, різниці координат і часу в системі K , дорівнюють:

$\Delta x = x_C - x_A = 2AD$ (зміщення променя світла відносно спостерігача на пероні);

$\Delta t = t_C - t_A = \frac{2AB}{c}$ (інтервал часу, протягом якого світло досягне стелі та,

відбившись від дзеркала, повернеться назад за годинником спостерігача на пероні).

Таким чином, дійсне поширення світлового сигналу у «світловому годиннику» з точки зору СВ K показано на мал. 5.6 (на відміну від мал. 5.5 (мал. 223, б))

Установимо тепер математичну залежність між Δt та $\Delta t'$. Для цього виразимо відповідні відстані: $BD = l = \frac{c\Delta t'}{2}$, $AB = \frac{c\Delta t}{2}$. Враховуючи, що вагон рухається з постійною швидкістю v , матимемо: $\Delta x = 2AD = v\Delta t$, звідси отримуємо $AD = \frac{v\Delta t}{2}$.

За теоремою Піфагора знаходимо: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, підставивши відповідні значення, отримуємо:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2.$$

Зробимо елементарні перетворення: $(c^2 - v^2)\Delta t^2 = c^2(\Delta t')^2$, звідси отримуємо (5.2):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Виходячи з цього, можна зробити висновок, що відносно нерухомого спостерігача (СВ K) подія, що відбувається в рухомій СВ K' , триває довше. Або, інакше кажучи, рухомий годинник йде повільніше ніж нерухомий. Підсумовуючи, можна підкреслити, що в релятивістській механіці, на відміну від класичної механіки, час не є абсолютним, він залежить від вибору системи відліку (більш детальний коментар див. Розділ 1, або п. 5.1).

У підручнику з фізики [42, с. 129] при розгляді цього питання автори припускаються грубої помилки, подаючи співвідношення для визначення тривалості фізичного процесу в різних системах відліку у вигляді:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так, згідно з [42, с. 128-129], маємо: «А. Ейнштейн установив, що при переході від однієї системи відліку до іншої перетворення координат збігаються з формулами перетворень Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & y' &= y, & z' &= z, & t' &= \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де x, y, z, t – координати і час в нерухомій системі відліку, а x', y', z', t' – відповідно у рухомій системі відліку.

Так само в СТВ встановлено, що *виміряна в різних інерціальних системах відліку тривалість подій буде неоднаковою*. Це зумовлено неодноразовістю подій, що відбуваються в різних системах відліку.

Нехай у нерухомій системі відліку певна подія триває протягом часу $\Delta t = t_2 - t_1$. Тоді в рухомій системі відліку її тривалість визначатиметься інтервалом часу $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. З формул перетворень Лоренца (1) після математичних спрощень маємо:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Це співвідношення вказує на те, що в різних інерціальних системах відліку виміряна *тривалість подій* буде різною: *у рухомій системі відліку подія триває довше, ніж у нерухомій* ($\Delta t' > \Delta t$). Тобто для одного й того самого спостерігача в різних системах відліку час плине неоднаково: спостерігач в нерухомій системі відліку помічатиме, що годинник сповільнює свій хід у системах відліку, що рухаються відносно нього».

Звертаючись до авторів цієї цитати, зазначимо, якщо, згідно з [42, с. 128], рухома система відліку – це СВ K' , то формула (3) ([42, с. 129]) просто невірна.

По-друге, підкреслимо, що автори не конкретизували, в якій СВ годинник нерухомий, іншими словами, не уточнили, який із годинників реєструє власний час.

Водночас виникає запитання: що таке «тривалість події»?

Можливо, при наборі формул колектив авторів припустився помилки, поставивши штрихи у виразах з точністю до навпаки?

Окрім того, у співвідношенні для релятивістського скорочення довжини вони припускаються тієї ж помилки, і доходять неправильного висновку щодо скорочення довжини в рухомій системі відліку [42, с. 128]:

$$\ll l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \text{ Це означає, що } l' < l, \text{ тобто довжина, виміряна в рухомій}$$

систмі відліку, менша за довжину в системі, відносно якої та рухається, адже

множник $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ завжди менший за 1». І далі, «Стержень завдовжки 1м у системі відліку, що рухається із швидкістю, близькою до швидкості світла у вакуумі, наприклад 0,9с, матиме довжину приблизно 87см».

Це неприпустимі неточності для підручника такого рівня, які суперечать принципу науковості. Доречно також зауважити, що «Здійснення принципу науковості навчання вимагає озброєння учнів методами наукового пізнання, а не лише повідомлення їм системи готових наукових істин» [20, с. 228].

Зважаючи на універсальність принципу науковості, вважаємо слушним рекомендувати авторам діючих та майбутніх підручників з фізики бути більш уважними при висвітленні фундаментальних положень сучасної фізики і, зокрема, СТВ.

Проведений критично-конструктивний аналіз навчальної та науково-методичної літератури, на нашу думку, допоможе вчителеві уникнути неточностей, хиб та некоректних формулювань основних положень та висновків СТВ, що має забезпечити реалізацію принципу науковості у процесі навчання.

Практична частина

Зразки розв'язування задач

Задача 5.1. Експериментально встановлено, що на верхніх шарах атмосфери внаслідок взаємодії космічного випромінювання з атомами газів, що утворюють земну атмосферу, народжуються мюони, маса яких в 207 разів більша за масу електрона. Рухаючись зі швидкістю $v = 0,995c$, вони встигають пролетіти до розпаду $S = 6,0\text{км}$. Визначити час життя мюона для спостерігача на Землі, власний час життя мюона, пройдений мюоном шлях у системі відліку пов'язаній із ним.

Розв'язання. У нерухомій системі відліку, зв'язаній із спостерігачем на поверхні Землі час життя мюона, очевидно, дорівнює $\Delta t = \frac{S}{v}$. Підставивши

числові дані, отримуємо
$$\Delta t = \frac{6 \cdot 10^3 \text{ м}}{0,995 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

Власний час $\Delta t'$ життя мюона можна знайти із співвідношення:

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,995c)^2}{c^2}} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

У системі відліку зв'язаній з мюоном, він за цей час долає шлях

$$S' = v \cdot \Delta t' = 0.995 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 597 \text{ м}.$$

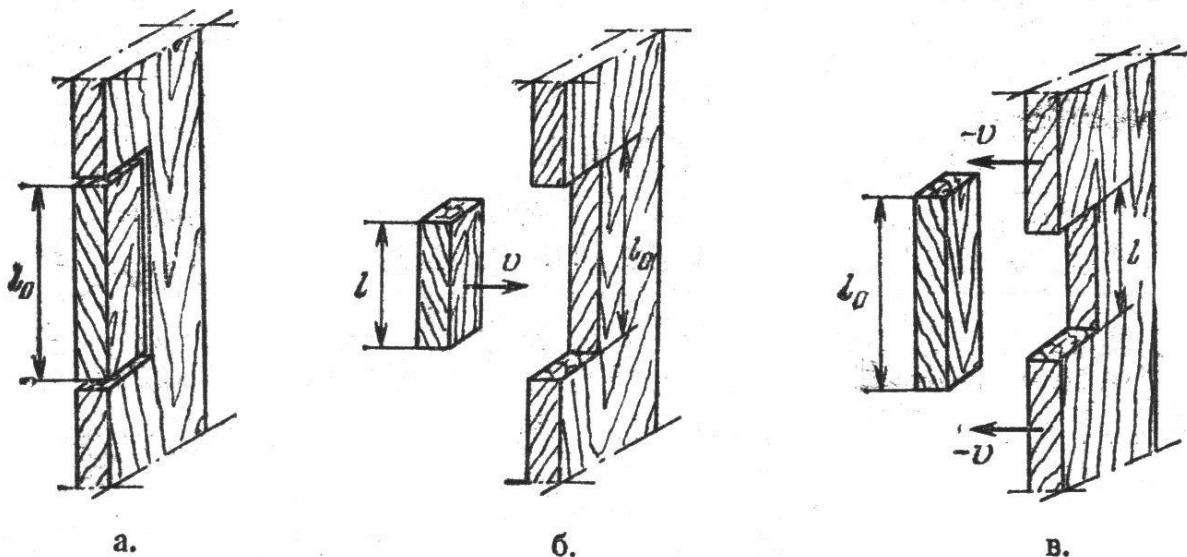
Отже, відносно нерухомого спостерігача мюон живе в 10 разів довше, ніж у власній системі відліку. Саме завдяки цьому релятивістському ефекту, сповільнення часу мюон проходить відтань 6,0 км.

Задача 5.2. На екрані осцилографа спостерігається світна точка в тому місці, куди падає пучок електронів. Пучок відхиляється змінним електричним (найчастіше) полем, внаслідок чого світна точка переміщується вздовж екрана з деякою швидкістю v . Чи може швидкість v перевищувати швидкість світла у вакуумі?

Розв'язання: Рух світної точки на екрані не є рухом матеріального об'єкта. Це рух спалахів на екрані від електронів, кожний з яких попадає на екран пізніше попереднього, тобто кожний наступний спалах не зв'язаний з попереднім причинним зв'язком. Швидкість v перміщення світної точки може перевищувати швидкість світла c і бути як завгодно великою, тому що кожний наступний спалах не зв'язаний з попереднім причинним зв'язком.

Задача 5.3. Користуючись принципом відносності, показати, що поперечні розміри тіла не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої.

Розв'язання: Припустимо, що при русі тіла відносно системи відліку його поперечні розміри змінюються, наприклад, скорочуються. Нехай стрижень і отвір у дошці точно збігаються в деякій системі відліку (мал. 5.7а).



Мал. 5.7. Відносний рух стрижня, власна довжина якого l_0 , і дошки в поперечному напрямі

У системі відліку, що зв'язана з дошкою, стрижень рухається зі швидкістю v (мал. 5.7б). Тоді, згідно з нашим припущенням про скорочення поперечних розмірів, стрижень з легкістю пройде крізь отвір. Якщо ж ми пов'яжемо систему відліку зі стрижнем, то згідно з нашим припущенням зменшуються розміри отвору (мал. 5.7в), і стрижень через нього не пройде. Отримане протиріччя доводить хибність припущення про скорочення поперечних розмірів. Цей же впливає з перетворень Лорентца.

Задача 5.4. У системі відліку K мюон, що рухається зі швидкістю $v = 0,990c$, пролетів від місця свого народження до точки розпаду відстань $l = 3,0\text{ км}$. Визначити:

- а) власний час життя цього мюона;
- б) відстань, яку пролетів мюон в системі відліку K з «його точки зору».

Розв'язання: Якщо τ_0 – це власний час життя мюона, то час життя його в системі відліку K дорівнює:

$$\frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а шлях, який він пролетів від місця свого народження до точки розпаду –

$$l = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отже, $\tau_0 = \frac{l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. А відстань, яку він пролетів з «його точки зору» у

системі відліку K визначається із співвідношення: $v\tau_0 = l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

$$\text{Відповідь: } \tau_0 = \frac{l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1,14\text{ мкс}, \quad v\tau_0 = l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 420\text{ м}.$$

Задача 5.5. З якою швидкістю рухався в системі відліку K годинник, якщо за час $t = 5,0\text{ с}$ (в системі відліку K) він відстав від годинника цієї системи на $\Delta t = 0,10\text{ с}$?

Розв'язання: Очевидно, що СВ K' слід пов'язати з рухомим годинником. Тоді проміжок часу за годинником, що рухається відносно СВ K , згідно з формулою (5.2), дорівнює:

$$t' = t \sqrt{1 - \beta^2},$$

де $t = 5,0c$ - проміжок часу в системі відліку K , $\beta = \frac{v}{c}$.

За умовою задачі маємо:

$$t - t\sqrt{1 - \beta^2} = \Delta t.$$

Отже, отримуємо $1 - \frac{2\Delta t}{t} + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 = 1 - \beta^2$, або $v = c\sqrt{\frac{\Delta t}{t}\left(2 - \frac{\Delta t}{t}\right)}$.

$$\text{Відповідь: } v = c\sqrt{\frac{\Delta t}{t}\left(2 - \frac{\Delta t}{t}\right)} = 0,2\tilde{n}\left(i/\tilde{n}\right).$$

Задача 5.6. Стрижень рухається в поздовжньому напрямі зі швидкістю V відносно інерціальної системи відліку K . При яких значеннях V довжина стрижня в цій системі відліку буде на $\eta=0,50\%$ менше своєї власної довжини?

Розв'язання: Згідно з умовою задачі різниця між власною довжиною стрижня та довжиною його при русі зі швидкістю V становить $\eta=0,50\%$ власної довжини:

$$\left(l_0 - l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = \eta l_0.$$

Із цього рівняння одержуємо:

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = (1 - \eta)^2,$$

$$\text{або } V = c\sqrt{\eta(2 - \eta)} = 0,1\tilde{n}\left(i/\tilde{n}\right).$$

$$\text{Відповідь: } V = c\sqrt{\eta(2 - \eta)} = 0,1\tilde{n}\left(i/\tilde{n}\right).$$

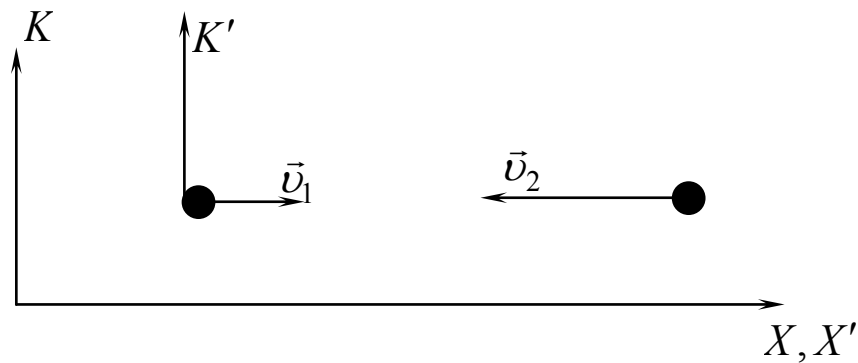
Задача 5.7. Два реактивні літаки йдуть на зустрічних курсах. Нехай їх швидкості відносно Землі дорівнюють відповідно $v_1 = 1500$ та $v_2 = 3000$ км/год. Якою буде швидкість другого літака, виміряна пасажиром першого літака?

Розв'язання: Для розв'язку цієї задачі необхідно коректно зв'язати системи відліку з літаками або літаком. Оскільки швидкості літаків дані, очевидно, відносно Землі, то раціонально СВ K зв'язати якраз із Землею.

Якщо зв'язати СВ K' (мал. 5.8) з першим літаком, то $V = v_1$.

Швидкість другого літака $-v_2$, це, очевидно, величина v_x в формулі (5.2)

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot v'_x}$$



Мал. 5.8. Два літаки рухаються назустріч один одному зі швидкостями v_1 та v_2

А знайти нам треба, згідно з умовою задачі, v'_x . v'_x - це якраз і є швидкість другого літака відносно першого.

Із попередньої формули знаходимо v'_x :

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

Використовуючи умову задачі, остання формула набуває вигляду:

$$v'_x = \frac{-v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1(-v_2)}{c^2}} = -\frac{(v_2 + v_1)}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}}$$

Тому для відносної швидкості другого літака одержуємо:

$$v'_x = \frac{-3000 - 1500}{1 - \frac{1500 \cdot (-3000)}{c^2}} = -\frac{4500}{1 + (1.5 \cdot 3) \cdot 10^6 / c^2} = -\frac{4500}{1 + 4,5 \cdot 10^{-12}} = -4499,999999986 \text{ км/год}$$

Відповідь: швидкість другого літака відносно першого дорівнює $v'_x = -4499,999999986 \text{ км/год}$.

Ми бачимо, що класична формула додавання швидкостей (у нашій задачі - $v = v_1 + v_2$) забезпечує досить точне наближення до реальності навіть у випадку швидкості руху надзвукових літаків.

Задача 5.8. У площинні XU системи відліку K рухається частинка, проекції швидкості якої рівні v_x та v_y . Знайти швидкість v' цієї частинки в системі K' , яка переміщується зі швидкістю V відносно системи K в додатному напрямку її осі OX .

Розв'язання: Skorистаємося релятивістськими формулами додавання швидкостей (5.42):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.$$

Але при переході від СВ K до СВ K' ці формули набувають вигляду (штриховані величини замінюються на нештриховані, і навпаки, а перед швидкістю V ставиться протилежний знак):

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - B^2}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}.$$

$$\text{Тоді, } v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = \frac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}.$$

Відповідь: швидкість v' частинки в системі K' дорівнює:

$$v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = \frac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}.$$

Задача 5.9. Деяка нестабільна частинка рухається зі швидкістю v' в системі відліку K' вздовж її осі $O'Y'$. Система K' в свою чергу переміщується відносно системи K зі швидкістю V в додатному напрямі осі OX . Вісі $O'X'$ та OX обох систем відліку співпадають, а вісі $O'Y'$ та OY паралельні одна одній. Найдти шлях, який частинка пролетить в системі K , якщо її власний час життя рівний Δt_0 .

Розв'язання: Щоб знайти шлях, який пройде частинка у СВ K необхідно знати час життя її у цій СВ та швидкість частинки у СВ K .

Оскільки компоненти швидкості цієї нестабільної частинки в системі відліку K дорівнюють:

$$v_x = V, \quad v_y = v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

то, швидкість частинки відносно СВ K є:

$$v^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 = V^2 + v'^2 - \frac{(Vv')^2}{c^2}.$$

Тому віддаль, яку частинка пролетить дорівнює:

$$l = \sqrt{V^2 + v'^2 - \frac{(Vv')^2}{c^2}} \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \Delta t_0 \sqrt{\frac{V^2 + v'^2 - \frac{(Vv')^2}{c^2}}{(1 - B^2) \cdot \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}.$$

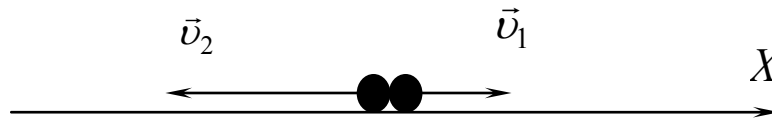
Відповідь: шлях, який частинка пролетить в СВ K дорівнює:

$$l = \Delta t_0 \sqrt{\frac{V^2 + v'^2 - \frac{(Vv')^2}{c^2}}{(1 - B^2) \cdot \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}.$$

Задача 5.10. Ось одне зі «спростувань» релятивістського закону додавання швидкостей. Нехай два тіла знаходяться в одній точці, а потім починають рухатися відносно Землі в протилежних напрямках (див. Мал. 5.9).

Сумарне переміщення тіл: $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 = v_1 \Delta t - (-v_2 \Delta t) = (v_1 + v_2) \Delta t$.

Тоді швидкість: $u = \frac{\Delta l}{\Delta t} = v_1 + v_2$ Ми отримали класичний закон додавання швидкостей, а не релятивістський. Де помилка в міркуваннях?



Мал. 5.9

Розв'язання: Проведене міркування не містить ніяких помилок, і для величини u отримано вірний результат. Однак це не спростовує релятивістської формули додавання швидкостей. Справа в тому, що говорячи про додавання швидкостей, ми розуміємо не додавання цих величин в даній системі відліку, а обчислення швидкості одного і того ж тіла в іншій системі відліку.

А саме, нас цікавить, з якою швидкістю, наприклад, віддаляється праве тіло від лівого в системі відліку, пов'язаної з лівим тілом. Для цього перейдемо до системи відліку, пов'язаної з лівим тілом [67].

Маємо: $u' = \frac{\Delta l'}{\Delta t'}$, оскільки в новій системі відліку змінюється відстань

між тілами і темп часу. З перетворень Лорентца випливає:

$$\Delta l' = -x'_2 + x'_1 = \frac{-x_2 - v_2 \Delta t + x_1 + v_2 \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{-x_2 + x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta l}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v_2 x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{v_2 x_1}{\Delta t c^2} \right) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \right)$$

Таким чином:

$$u' = \frac{\Delta l'}{\Delta t'} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \frac{1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{u}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Ми отримали, як і варто було очікувати, релятивістський закон додавання швидкостей.

$$\text{Відповідь: } u' = \frac{\Delta l'}{\Delta t'} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Задача 5.11. Швидкість світла в нерухомій речовині $u = \frac{c}{n}$, де c —

швидкість світла у вакуумі, n -показник заломлення речовини. Знайти швидкість світла в речовині, що рухається рівномірно відносно джерела світла.

Розв'язання: Нехай речовина наближається до джерела світла зі швидкістю V , тоді згідно з формулою додавання швидкостей отримаємо:

$$u' = \frac{u + V}{1 + \frac{uV}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}}$$

Якщо речовина віддаляється від джерела світла, то

$$u'' = \frac{\frac{c}{n} - V}{1 - \frac{V}{cn}}.$$

$$\text{Відповідь: } u' = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}}, \quad u'' = \frac{\frac{c}{n} - V}{1 - \frac{V}{cn}}.$$

Завдання для самоконтролю

Завдання 5.1. Яку відстань пролетить піон (π -мезон) до розпаду, якщо його швидкість $v = 0,99c$, а власний час життя $\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$? Яка була б довжина прольоту, якби не було релятивістського уповільнення часу? Відстань вимірюється в лабораторній системі відліку.

Відповідь:

$$l = vt = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0,99 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \cdot 2,6 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0,99^2}} = \frac{0,99 \cdot 3,0 \cdot 2,6}{0,1 \cdot 1,41} = 55 \text{ м};$$

$$l_0 = v\tau_0 = 0,99 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \cdot 2,6 \cdot 10^{-8} = 7,7 \text{ м}.$$

Завдання 5.2. В K - системі відліку знаходиться нерухомий стрижень, довжина якого $l = 10 \text{ м}$ і який орієнтований під кутом $\alpha = 60^\circ$ до осі OX . Знайти його довжину l' та відповідний кут α' в K' - системі, яка рухається відносно СВ K зі швидкістю $V = \frac{c}{2}$ вздовж осі OX .

$$\text{Відповідь: } l' = l\sqrt{1 - B^2 \cos^2 \alpha} = 0,968 \text{ м}, \quad \alpha' = 63^\circ 25'.$$

Завдання 5.3. Дві релятивістські частинки рухаються під прямим кутом одна до одної в лабораторній системі відліку, причому перша зі швидкістю v_1 , а друга зі швидкістю v_2 . Знайти їх відносну швидкість.

$$\text{Відповідь: } v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_2^2 v_1^2}{c^2}}.$$

Завдання 5.4. Два стрижня однакової власної довжини l_0 рухаються один одному назустріч в повздовжньому напрямку паралельно спільній горизонтальній вісі з однаковою швидкістю v відносно лабораторної системи відліку. Чому дорівнює довжина кожного стрижня в системі відліку, що зв'язана з іншим стрижнем?

Відповідь: $l = l_0 \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}$, де $\beta = \frac{v}{c}$.

Завдання 5.5. У двох точках, що лежать в деякій інерціальній системі відліку, відстань між якими вздовж осі абсцис $x_2 - x_1 = l$ одночасно відбулися дві події. Знайти проміжок часу між цими подіями в довільній інерціальній системі відліку.

Відповідь: $\tau = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 + \left(\frac{x_2 V}{c^2}\right) - t_1 - \left(\frac{x_1 V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l \cdot V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$,

де V – швидкість нової системи відліку, $t_2 - t_1 = 0$. Знак проміжку часу залежить від знаку швидкості V , тобто від напрямку руху системи відліку.

Завдання 5.6. Знайти власний час життя частинки, якщо її швидкість відрізняється від швидкості світла у вакуумі на 0,2%, а відстань, яку пролітає частинка до розпаду, приблизно дорівнює 300 км.

Відповідь:

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{l \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V} = \frac{3 \cdot 10^5 \sqrt{1 - 0,998^2}}{0,998 \cdot 3 \cdot 10^8} = \frac{10^{-3} \sqrt{0,002 \cdot 1,998}}{0,998} = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Завдання 5.7. В СВ K' частинка рухається зі швидкістю v' під кутом θ' до осі $O'X'$. Вивести формулу, що визначає зміну напрямку швидкості частинки при переході від СВ K' до СВ K .

Відповідь: $\text{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}$.

Завдання 5.8. Уведемо таке означення: довжина рухомого стрижня дорівнює добутку його швидкості V на проміжок часу між моментами, коли його початок і кінець проходять повз нерухомий годинник. Власна довжина визначається аналогічно за допомогою годинника, що рухається з такою ж швидкістю вздовж нерухомого стрижня. Знайти співвідношення між довжиною рухомого стрижня l і його власною довжиною l_0 .

$$\text{Відповідь: } \frac{l}{l_0} = \frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}; \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Завдання 5.9. Оцінити відносну похибку, що виникає при розрахунку, якщо замість релятивістського закону додавання швидкостей скористатися класичним.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon = \frac{u_{\text{кл}} - u_{\text{рел}}}{u_{\text{рел}}} = \frac{u_1 + u_2}{\frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 \cdot u_2}{c^2}}} - 1 = \frac{u_1 \cdot u_2}{c^2}.$$

Завдання 5.10. У прискорювачі на зустрічних пучках протони рухаються зі швидкістю $v = 0,99000c$ відносно установки. Чому дорівнює швидкість одного протона відносно іншого?

$$\text{Відповідь: } v = \frac{v + v}{1 + \frac{v \cdot v}{c^2}}. \text{ Підставляючи дані у формулу, отримуємо:}$$

$$v = 0,99995c.$$

Швидкість одного протона відносно іншого дорівнює $0,99995c$.

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте і поясніть постулати СТВ.
2. У чому відмінність принципу відносності Ейнштейна і принципу відносності Галілея-Ньютона?
3. Що означає термін «відносність одночасовості»?
4. Чи являється лорентцеве скорочення реальним ефектом?
5. Як Ви розумієте вислів «сповільнення ходу рухомого годинника»?
6. Які експериментальні факти підтверджують спеціальну теорію відносності та її наслідки?
7. Поясніть поширення променів світла у світловому годиннику.
8. Обґрунтуйте лорентцеве скорочення рухомого стрижня за допомогою світлового годинника.
9. Дайте означення власного часу та власної довжини.
10. Проаналізуйте наслідки релятивістських формул додавання швидкостей.
11. Поясніть спосіб одержання виразу (5.31) для коефіцієнту k .

12. Поясніть спосіб обґрунтування формули (5.39).

Рекомендована література до розділу 5

Основна

1. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Фізика та астрономія в школі. – 2004. – № 3. – С. 2–6.
2. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Фізика. Астрономія. 7–12 кл. – К. ; Ірпінь : Перун, 2010. – 80 с.
3. Коршак Є. В. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Є. В. Коршак, О. І. Ляшенко, В. Ф. Савченко. – К. : Генеза, 2010. – 191 с. : іл.
4. Сиротюк В. Д. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / В. Д. Сиротюк, В. І. Баштовий. – К. : Освіта, 2010. – 303 с. : іл.
5. Бар'яхтар В. Г. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академічний рівень / В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова. – Х. : Ранок, 2010. – 256 с. : іл.
6. Засекіна Т. М. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : профільн. рівень / Т. М. Засекіна, М. В. Головка. – К. : Педагогічна думка, 2010. – 304 ., іл., табл.
7. Засекіна Т.М. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл.рівень / Т.М. Засекіна, Д.О. Засекін – Харків : Сиція, 2012. – 352 с.
8. Бурак В.І. Методика вивчення спеціальної теорії відносності в середній школі в умовах профільної диференціації навчання : [навчальний посібник для самостійної роботи студентів] / В.І. Бурак, О.А. Коновал, Т.І. Туркот ; за ред. проф. О.А. Коновала. – Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2014. – 160 с.
9. Касьянов В.А. Физика. 10 кл. : Учебн. для общеобразоват. учеб. заведений / В.А. Касьянов. – М. : Дрофа, 2000. – 416 с. : ил.
10. Глазунов А. Т. Методика преподавания физики в средней школе : Электродинамика нестационарных явлений. Квантовая физика : [пособ. для учителя] / А. Т. Глазунов, И. И. Нурминский, А. А. Пинский. – М. : Просвещение, 1989. – 272 с.
11. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений : базовый и профильный уровни / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский ; под ред. В. И. Николаева, Н. А. Парфентьевой. – 17-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 2008. – 366 с. : ил.

12. Мякишев Г. Я. Физика. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, И. М. Чагурин – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2010.– 399 с.
13. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. средней школы / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев . – М. : Просвещение, 1977. – 319 с. : ил.
14. Гончаренко С. У. Фізика : підруч. для 11 кл. серед. загальноосв. шк. / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 2002. – 319 с. : іл.
15. Гончаренко С. У. Фізика, 11 кл. : проб. навч. посіб. для ліцеїв та класів природн.-наук. профілю / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 1995. – 430 с.
16. Малинин А. Н. Элементы теории относительности и её физических приложений : [учеб. пособ. для шк. и кл. с углубл. изуч. физики] / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во ЛГПИ, 1995. – 278 с.: ил.
17. Малинин А. Н. Методические вопросы теории относительности : [сб. статей] / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во ЛГПИ, 2000. – 267 с. : ил.
18. Физика. Учебник для 11 кл. с углубл. изучением физики. 8-е изд. / Под ред. А. А. Пинского, О. Ф. Кабардина.– М.: Просвещение, 2005.– 448 с.

Для поглибленого вивчення теми

1. Коновал О.А. Науково-методичний аналіз методів обґрунтування перетворень Лорентца : навчальний посібник для самостійної роботи студентів / О.А. Коновал. - Кривий Ріг : КП ДВНЗ «КНУ», 2014. – 137 с.
2. Воробьев И. И. Теория относительности в задачах / И. И. Воробьев. – М. : Наука, 1989. – 174 с.
3. Копчук В. Основы релятивізму в школі / В. Копчук // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – № 3. - С. 28-32
4. Малинин А. Н. Методические основы изучения теории относительности в курсах физики средних общеобразовательных учреждений и педвузов : автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения физике» / А. Н. Малинин ; Московский пед. ун-т. – М., 2000. – 65 с.
5. Малинин А. Н. Теория относительности в задачах и упражнениях / А. Н. Малинин. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.
6. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності : навчальний посіб. для студ. вищих навч. закл. / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми : «МакДен», 2011. – 335 с.
7. Угаров В.А. Специальная теория относительности / В.А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
8. Иродов И.Е. Механика. Основные законы / И.Е. Иродов. – [6-е изд.]. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 312 с.

9. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности : учеб. пособ. для физ. спец. вузов / А.Н. Матвеев. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.

10. Коновал О. А. До питання про зміст та методику вивчення теми «Елементи теорії відносності» / О. А. Коновал // Збірник наукових праць : [спец. випуск] / гол. ред. В. Г. Кузь. – К. : Наук. світ, 2003. – С. 236–242.

11. Konoval O.A. Analysis of the coverage of kinematic effect of the special theory of relativity in the textbooks for secondary educational establishments / O.A. Konoval, M.A. Slyusarenko // Scientific words Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University. Series pedagogical / [Editorial Board Members: P/S/ Atamanchuk (Chairman, Scientific Editor) and other]. - Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, 2013. – Issue 19: Innovative Technology Management Quality Training of Teachers Physical and Technological Profil. – P. 88-91.

12. Яворский Б. М. Основы физики : в 2 т. / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. Электродинамика. – 3 - е изд., перераб. – М. : Наука, 1981. – 480 с. (С. 374-380).

13. Яворский Б.М. Вопросы современной физики. Пособие для учителей / Б.М. Яворский, В.В. Стручков. – М. : Просвещение, 1973.– 496 с.

14. Яворский Б.М. Основные вопросы современного школьного курса физики. Пособие для учителей / Б.М. Яворский. – М. : Просвещение, 1980.– 318 с.

15. Яворский Б.М. Основы физики. Т. 1: Учебное пособие для средней школы / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М. : Наука, 2007.– 455 с.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Фізика та астрономія в школі. – 2004. – № 3. – С. 2–6.
2. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Фізика. Астрономія. 7–12 кл. – К. ; Ірпінь : Перун, 2010. – 80 с.
3. Акименко М. Методика вивчення явища електромагнітної індукції / М. Акименко, М. Дідович // Фізика та астрономія в школі. – 2001. – № 1. – С. 23–26; Дідович М. М. Формування поняття вихрового електричного поля / М. М. Дідович // Фізика та астрономія в школі. – 2005. – № 4. – С. 30–32.
4. Акоста В. Основы современной физики / В. Акоста, К. Кован, Б. Грэм; Пер. с англ.; под ред. А.Н. Матвеева. – М.: Просвещение, 1981.– 495 с.
5. Акчурин И. А. Эйнштейн и развитие понятия пространства / И. А. Акчурин, М. Д. Ахундов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 163–201.
6. Артеха С.Н. Критика основ теории относительности // С.Н. Артеха. – М. : ЛКИ, 2007. – 224 с.
7. Бар'яхтар В. Г. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академічний рівень / В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова. – Х. : Ранок, 2010. – 256 с. : іл.
8. Бурак В.І. Методика вивчення спеціальної теорії відносності в середній школі в умовах профільної диференціації навчання [навчальний посібник для самостійної роботи студентів] / В.І. Бурак, О.А. Коновал, Т.І. Туркот ; за ред. проф. О.А. Коновала. – Кривий Ріг : КПІ ДВНЗ «КНУ», 2014. – 160 с.
9. Беккер Р. Электронная теория / Р. Беккер. – Л. : ОНТИ, 1936. – 416 с.
10. Болотовский Б. М. О видимой форме движущегося тела / Б. М. Болотовский // Эйнштейновский сборник : [сб. статей]. – М. : Наука, 1986–1990. – С. 279–328.
11. Вознюк С. Ю. Формування поняття «електромагнітне поле» на основі фундаментальних фізичних понять / С. Ю. Вознюк, В. І. Кульчицький // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – № 4. – С. 43–47.
12. Воробьев И. И. Теория относительности в задачах / И. И. Воробьев. – М. : Наука, 1989. – 174 с.
13. Гаркуша І.П. Загальний курс фізики. Збірник задач / [І.П. Гаркуша, І.Т. Горбачук, В.П. Курінний та інш.] ; за ред. проф. І.П. Гаркуші - [2-е вид.]. – К. : Техніка, 2004. – 558 с.
14. Глазунов А. Т. Методика преподавания физики в средней школе : Электродинамика нестационарных явлений. Квантовая физика : [пособ. для

учителя] / А. Т. Глазунов, И. И. Нурминский, А. А. Пинский. – М. : Просвещение, 1989. – 272 с.

15. Голин Г. М. Вопросы методологии физики в курсе средней школы : кн. для учителя / Г. М. Голин. – М. : Просвещение, 1987. – 127 с.

16. Гончаренко С. У. Фізика : підруч. для 11 кл. серед. загальноосв. шк. / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 2002. – 319 с. : іл.

17. Гончаренко С. У. Формування наукового світогляду учнів під час вивчення фізики : посібн. для вчителя / С. У. Гончаренко. – К. : Рад. шк., 1990. – 208 с.

18. Гончаренко С. У. Фізика, 11 кл. : проб. навч. посіб. для ліцеїв та класів природн.-наук. профілю / С. У. Гончаренко. – К. : Освіта, 1995. – 430 с.

19. Гончаренко С. У. Принцип фундаменталізації освіти / С. У. Гончаренко // Наукові записки. Серія «Педагогічні науки». – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – Вип. 55. – С. 3–8.

20. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / С. У. Гончаренко. – К. : Либідь, 1997. – 376 с.

21. Грибанов Д. П. Философское мировоззрение Эйнштейна / Д. П. Грибанов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 7–45.

22. Грищук В. В. Врахування релятивістських ефектів при взаємодії між паралельними провідниками зі струмом / В. В. Грищук, М. Т. Мордовець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка. Серія «Педагогічні науки». – Чернігів : ЧДПУ, 2004. – Вип. 23. – С. 180–181.

23. Грищук В. В. Релятивістські ефекти при взаємодії електричних зарядів та струмів / В. В. Грищук, М. Т. Мордовець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка. Серія «Педагогічні науки». – Чернігів : ЧДПУ, 2002. – Вип. 13 : у 2 т. – Т. 2. – С. 180–181.

24. Дущенко В. П. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка / В. П. Дущенко, І. М. Кучерук – К. : Вища шк., 1987. – 431 с.

25. Засекіна Т. М. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : профільн. рівень / Т. М. Засекіна, М. В. Головка. – К. : Педагогічна думка, 2010. – 304 с., іл., табл.

26. Засекіна Т. М. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Т. М. Засекіна, Д. О. Засекін – Харків : Сіцця, 2012. – 352 с.

27. Зисман Г. А. Курс общей физики : в 3 т. / Г. А. Зисман, О. М. Годес. – Т. 2 : Электричество и магнетизм. – М. : Наука, 1972. – 368 с.

28. Зисман Г. А. Курс общей физики : в 3 т. / Г. А. Зисман, О. М. Годес. – Т. 3 : Оптика, физика атомов и молекул, физика атомного ядра и микрочастиц. – М. : Наука, 1972. – 496 с.
29. Иродов И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – [6-е изд.]. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 312 с.
30. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. – [4-е изд., испр.]. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 320 с.
31. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – [изд-е 4-е, исправл.]. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 432 с. : ил.
32. Каменецкий С. Е. Электродинамика в курсе физики средней школы : [пособ. для уч.] / С. Е. Каменецкий, И. Г. Пустыльник. – М. : Просвещение, 1978. – 127 с.
33. Касьянов В.А. Физика. 10 кл. : Учебн. для общеобразоват. учеб. заведений / В.А. Касьянов. – М. : Дрофа, 2000. – 416 с. : ил
34. Коновал О. А. До питання про зміст та методику вивчення теми «Елементи теорії відносності» / О. А. Коновал // Збірник наукових праць : [спец. випуск] / гол. ред. В. Г. Кузь. – К. : Наук. світ, 2003. – С. 236–242.
35. Коновал О. А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності : [монографія] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2009. – 346 с. : іл.
36. Коновал О.А. Електродинаміка і теорія відносності : навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів / О.А. Коновал ; Криворізький державний педагогічний університет. - Кривий Ріг : КДПУ, 2011. - 133 с. : іл.
37. Теорія і практика організації самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів : Монографія. Кол. авторів / ред. проф. О.А. Коновала. – Кривий Ріг : Книжкове видавництво Кирєєвського, 2012. – 380 с.
38. Коновал О. А. Відносність електричного і магнітного полів : монографічний навч. посіб. для студ. вищих навч. закладів / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 248 с. : іл.
39. Коновал О. А. Основи електродинаміки : [навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл.] / О. А. Коновал ; Міністерство освіти і науки України ; Криворізький державний педагогічний університет. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 347 с. : іл.
40. Коновал О.А. Науково-методичний аналіз методів обґрунтування перетворень Лорентца : навчальний посібник для самостійної роботи студентів / О.А. Коновал. - Кривий Ріг : КПП ДВНЗ «КНУ», 2014. – 137 с.

41. Копчук В. Основи релятивізму в школі / В. Копчук // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – № 3. – С. 28-32.
42. Коршак Є. В. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Є. В. Коршак, О. І. Ляшенко, В. Ф. Савченко. – К. : Генеза, 2010. – 191 с. : іл.
43. Кузмичев В. Е. Законы и формулы физики : справочник / В. Е. Кузмичев ; отв. ред. В. К. Тартаковский. – К. : Наук. думка, 1989. – 864 с.
44. Кунець Т.І. Новий методичний підхід до вивчення теми «Елементи теорії відносності» / Т.І. Кунець // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка. Серія : педагогічні науки : Збірник. У 2-х т. - Чернігів : ЧДПУ, 2002. – Вип.13. - Т.1. - С. 65-71.
45. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 504 с.
46. Левич В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В. Г. Левич. – Т. 1. – М. : Наука, 1969. – 912 с.
47. Левашев А. Е. Движение и двойственность в релятивистской электродинамике / А. Е. Левашев. – Минск : Изд-во БГУ им. Ленина, 1979. – 224 с.
48. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации : [Современный анализ проблемы] / А. А. Логунов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 272 с.
49. Ляшенко О. І. Взаємозв'язок теоретичного та емпіричного в навчанні фізики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня. д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (фізика)» / О. І. Ляшенко ; Ін-т педагогіки і психології професійної освіти АПН України. – К., 1996. – 50 с.
50. Ляшенко О. І. Формування фізичного знання в учнів середньої школи: логіко-дидактичні основи / О. І. Ляшенко. – К. : Генеза, 1996. – 128 с.
51. Малинин А. Н. Элементы теории относительности и её физических приложений : [учеб. пособ. для шк. и кл. с углубл. изуч. физики] / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во ЛГПИ, 1995. – 278 с.: ил.
52. Малинин А. Н. Методические вопросы теории относительности : [сб. статей] / А. Н. Малинин. – Липецк : Изд-во ЛГПИ, 2000. – 267 с. : ил.
53. Малинин А. Н. Методические основы изучения теории относительности в курсах физики средних общеобразовательных учреждений и педвузов : автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения физике» / А. Н. Малинин ; Московский пед. ун-т. – М., 2000. – 65 с.
54. Малинин А. Н. Теория относительности в задачах и упражнениях / А. Н. Малинин. – М. : Просвещение, 1983. – 176 с.

55. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л. И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 437 с.
56. Мартинсон М. Л. О плотности заряда внутри проводника с током / М. Л. Мартинсон, А. В. Недоспасов // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163. – № 1. – С. 91–92.
57. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособ. для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.
58. Меерович Э. А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике / Э. А. Меерович, Б. Э. Мейерович. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
59. Мороз І.О. Спеціальна теорія відносності : Навчальний посіб. для студ. вищих навч. закл. / І.О. Мороз, В.С. Іваній, Р.І. Холодов. – Суми : «МакДен», 2011. – 335 с.
60. Мощанский В. Н. Формирование мировоззрения учащихся при изучении физики / В. Н. Мощанский. – [3-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Просвещение, 1989. – 192 с.
61. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений : базовый и профильный уровни / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский ; под ред. В. И. Николаева, Н. А. Парфентьевой. – 17-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 2008. – 366 с. : ил.
62. Мякишев Г. Я. Физика. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, И. М. Чагурин – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 399 с.
63. Мякишев Г. Я. Физика : учеб. для 10 кл. средней школы / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев. – М. : Просвещение, 1977. – 319 с. : ил.
64. Оконь В. Основы проблемного обучения / В. Оконь – М. : Просвещение, 1968. – 208 с.
65. Парселл Э. Электричество и магнетизм : учебное руководство : пер. с англ. / Э. Парселл ; под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1983. – 416 с. – (Берклиевский курс физики).
66. Пинский А.А. Релятивистские идеи в преподавании физики : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Аркадий Аронович Пинский ; НИИ содержания и методов обучения АПН СССР. – М., 1974. – 349 с.
67. Пинский А.А. Задачи по физике. [Учебное пособие] / А.А. Пинский. – М. : Наука, 1978. – 288 с. : ил.
68. Принцип относительности : Сборник работ по специальной теории относительности. – М. : Атомиздат, 1973. – 332 с.
69. Сивухин Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – Т. 3 :

Электричество. – М. : Наука, 1977. – 688 с.

70. Смородинский Я. А. Границы квантовой электродинамики и точность мировых постоянных / Я. А. Смородинский // УФН. – 1968. – Т. 94. – Вып. 2. – С. 359–360.

71. Смородинский Я. А. Два парадокса специальной теории относительности / Я. А. Смородинский, В.А. Угаров // УФН. – 1972. – Т. 107. – Вып. 1. – С. 141–152.

72. Сиротюк В. Д. Фізика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / В. Д. Сиротюк, В. І. Баштовий. – К. : Освіта, 2010. – 303 с. : іл.

73. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М. : Наука, 1978. – 480 с..

74. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М. : Наука, 1966. – 624 с.

75. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

76. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 6 : Электродинамика. – М. : Мир, 1966. – 343 с.

77. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Т. 5 : Электричество и магнетизм. – М. : Мир, 1966. – 290 с.

78. Физическая энциклопедия : в 5 т. / под ред. А. М. Прохорова. – Т. 5. – М. : Советская энциклопедия, 1998. – 691 с.

79. Фок В. А. Теория Эйнштейна и физическая относительность / В. А. Фок. – М. : Знание, 1967.

80. Фок В. А. Физические принципы теории тяготения Эйнштейна / В. А. Фок // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 255–267.

81. Холтон Дж. Эйнштейн и «решающий» эксперимент / Дж. Холтон // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104. – Вып. 2. – С. 297–316.

82. Чудинов Э. М. Эйнштейн и Бриджмен / Э. М. Чудинов // Эйнштейновский сборник : [сб. статей]. – М. : Наука, 1974. – С. 335–350.

83. Чудинов Э. М. Эйнштейн и операционализм Бриджмена / Э. М. Чудинов // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. – М. : Наука, 1979. – С. 504–519.

84. Чудинов Э. М. Эквивалентные описания и проблема истины в физике / Э. М. Чудинов // Методологические проблемы физики : [сборник статей]. – М. : Знание, 1981. – С. 42–64. – (Новое в жизни, науке и технике. Серия «Физика». – № 1).

85. Штепа М. І. Теорія відносності : [навч. посібник] / М. І. Штепа. – К. : ІЗМН, 1996. – 84 с.
86. Эйнштейн А. О методе теоретической физики / Альберт Эйнштейн // Физика и реальность : сб. статей. – М. : Наука, 1965. – 359 с.
87. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. 2. – М. : Наука, 1966. – 723 с.
88. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. 4. – М. : Наука, 1967. – 600 с.
89. Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 4 т. / Альберт Эйнштейн. – Т. 1. – М. : Наука, 1965. – 700 с.
90. Яворский Б. М. Основы физики : в 2 т. / Б. М. Яворский, А. А. Пинский. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. Электродинамика. – 3 - е изд., перераб. – М. : Наука, 1981. – 480 с. (С. 374-380).
91. Яворский Б.М. Основы физики. Т. 1: Учебное пособие для средней школы / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М. : Наука, 2007.– 455 с.
92. Физика. Учебник для 11 кл. с углубл. изучением физики. 8-е изд. / Под ред. А. А. Пинского, О. Ф. Кабардина.– М.: Просвещение, 2005.– 448 с.
93. Konoval O.A. Analysis of the coverage of kinematic effect of the special theory of relativity in the textbooks for secondary educational establishments / O.A. Konoval, M.A. Slyusarenko // Scientific words Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University. Series pedagogical / [Editorial Board Members: P/S/ Atamanchuk (Chairman, Scientific Editor) and other]. - Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, 2013. – Issue 19: Innovative Technology Management Quality Training of Teachers Physical and Technological Profil. – P. 88-91.

Додаток А

Традиційний метод обґрунтування перетворень Лорентца

Традиційний метод ґрунтується на поєднанні властивостей однорідності простору і часу та постулатів Ейнштейна В основі цього методу обґрунтування ПЛ лежать 4 положення [9, с. 280; 57, с. 80; 63, с. 53]:

- а) однорідність простору і часу. Це означає, що вид перетворень не повинен залежати від вибору початку відліку просторових координат або часу;
- б) ізотропія простору, тобто рівноправність усіх напрямів в просторі;
- в) принцип відносності, тобто повна рівноправність усіх систем відліку;
- г) постулат сталості швидкості світла.

Оскільки координати події x, y, z, t та x', y', z', t' описують одну і ту ж подію, яка існує в реальності незалежно від наявності чи відсутності систем відліку K і K' , очевидно повинні бути наступні однозначні математичні залежності:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi_1(x, y, z, t), & y' &= \varphi_2(x, y, z, t), \\ z' &= \varphi_3(x, y, z, t), & t' &= \psi(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Дійсно, знайдемо нескінченно малу зміну dx' [53, с. 80]:

$$dx' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt. \quad (\text{A.2})$$

Але внаслідок однорідності простору і часу співвідношення (A.2) повинно бути однаковим для всіх подій. Тобто величини $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ не повинні залежати від просторових координат і часу, а отже ці величини є постійними.

Іншими словами, функція $x' = \varphi_1(x, y, z, t)$ має вигляд:

$$x' = \varphi_1(x, y, z, t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5.$$

Тобто, функція $x' = \varphi_1(x, y, z, t)$ є лінійною функцією своїх аргументів x, y, z, t .

Аналогічно можна впевнитися, що і інші шукані нами функції (функції перетворення просторових і часової координат довільної події при переході від СВ K' до СВ K) $y' = \varphi_2(x, y, z, t)$, $z' = \varphi_3(x, y, z, t)$, $t' = \psi(x, y, z, t)$ є лінійними функціями x, y, z, t .

Далі, оскільки в початковий момент часу ($t = t' = 0$) початки координат СВ K $x = y = z = 0$ й СВ K' $x' = y' = z' = 0$ співпадають, то перетворення (A.1) для y' і z' повинні мати вигляд:

$$\begin{aligned} y' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t \\ z' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Згідно зі стандартним розташуванням систем відліку K і K' (Мал.1), вісь Y' паралельна осі Y , вісь Z' паралельна осі Z .

І оскільки осі OX і $O'X'$ співпадають, то, із умови $y = 0$, одержуємо $y' = 0$, а із $z = 0$ - рівність $z' = 0$, і тоді із (A.3) маємо:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1x + a_3z + a_4t \\ 0 &= b_1x + b_2y + b_4t \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

при будь яких значеннях x, y, z, t .

Але останнє можливе тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_3 = a_4 = 0$
 $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

Більше того, враховуючи, що із-за рівноправності осей OZ та $O'Y'$ відносно напрямку руху СВ K' , коефіцієнти в перетвореннях (A.3) повинні бути однаковими: $a_2 = b_3 = a$.

Узагальнюючи попереднє можна сказати, що із однорідності простору і часу випливає, що шукані ПЛ для y' та z' повинні мати вигляд:

$$y' = ay, \quad z' = az. \quad (\text{A.5})$$

Коефіцієнти a в формулах (A.5) показують у скільки разів довжина деякого стержня (що орієнтований вздовж осі OY' або вісі OZ , відповідно) у СВ K' більше, ніж у СВ K .

Якщо ж (A.5) переписати у вигляді

$$y = \frac{1}{a} y', \quad z = \frac{1}{a} z', \quad (\text{A.6})$$

то величина $\frac{1}{a}$ показує у скільки разів довжина деякого стержня (що орієнтований вздовж осі $O'Y'$ або вісі $O'Z'$, відповідно) у СВ K більше, ніж у СВ K' .

Згідно ж із принципом відносності, наші системи відліку K і K' (Мал.1.4) абсолютно рівноправні, і тому при переході від однієї СВ до іншої довжина стержня, що розташований перпендикулярно напрямку відносного руху систем відліку, повинна змінюватися точно таким же чином (у таку ж кількість разів), як при зворотному переході.

Тому у формулах (A.5) та (A.6) ми повинні мати $\frac{1}{a} = a$.

Тобто $a = \pm 1$. І оскільки додатні напрями осей OY , $O'Y'$ та осей OZ , $O'Z'$ збігаються, то слід вибрати для коефіцієнта a значення $a = +1$.

Таким чином, для поперечних просторових координат довільної події маємо:

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (\text{A.7})$$

Оскільки координата y' та z' перетворюються окремо від x та t , то змінні x та t будуть зв'язані лінійними перетвореннями тільки самі з собою.

Тобто, $x' = f(x, t)$ і навпаки $x = f'(x', t')$. Знаходження явного виду функцій $f(x, t)$ та $f'(x', t')$ подано **п.1.2**.

Додаток Б

Обґрунтування перетворень Лорентца методом, що ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня

Розглянемо доведення перетворень Лорентца способом, який ґрунтується на застосуванні формули лорентцевого скорочення та дещо формального використання процедури вимірювання довжини рухомого стержня [29; 59].

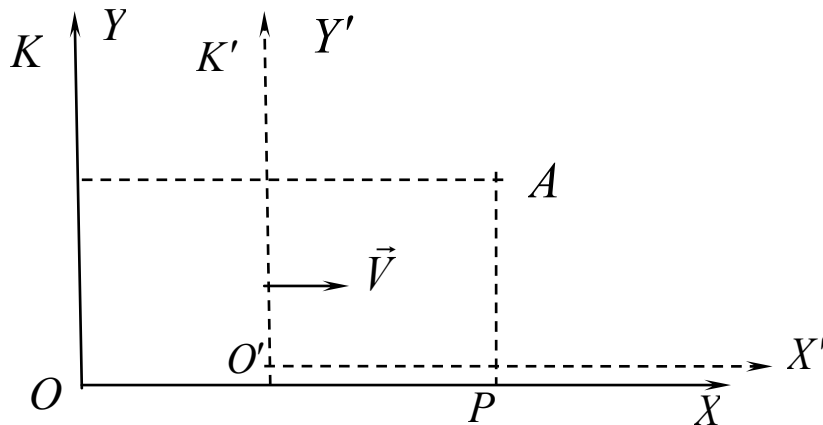
Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K' . Нехай система K' рухається відносно K зі швидкістю \vec{V} .

Нехай в момент часу t (в системі K) в точці з координатами x, y сталася подія A , наприклад, спалахнула лампочка. Треба визначити координати x' і y' і момент часу t' цієї події в системі відліку K' .

Відомо, що $y = y'$, (див. Додаток А).

Координата x' точки A характеризує власну довжину відрізка $O'P$, нерухомого в системі K' .

Довжина цього відрізка в системі відліку K (де відлік довжини цього відрізка відбувається в момент t) дорівнює $x - Vt$ (Мал. Б.1).



Мал. Б.1. Щодо обґрунтування перетворень Лорентца (згідно з [29])

Співвідношення між власною довжиною $O'P$, x' , та довжиною цього відрізка в системі відліку K , $x - Vt$, визначається виразом (скорочення Лорентца):

$$x - Vt = x' \sqrt{1 - B^2},$$

де $B = \frac{V}{c}$.

Звідси знайдемо x' , координату точки A . Вона дорівнює:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (\text{Б.1})$$

З іншої сторони, координата x характеризує власну довжину відрізка OP , нерухомого в системі K .

Згідно з означенням довжини рухомого стержня, довжина цього відрізка в СВ K' , де вимірювання проводиться в момент t' , рівна $x' + Vt'$. Тоді, згідно з формулою скорочення Лорентца, маємо наступне співвідношення між цими довжинами:

$$x' + Vt' = x\sqrt{1 - B^2}.$$

Звідси одержуємо значення координати x як функцію x' та t' :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (\text{Б.2})$$

Отримані формули (Б.1) і (Б.2) дозволяють встановити зв'язок між моментами часу настання t і t' події A в обох системах відліку.

Для цього слід розв'язати систему двох рівнянь відносно «невдомих» величин t і t' . У результаті отримаємо:

$$t'(x, t) = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad t(x', t') = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (\text{Б.3})$$

Тобто сукупність рівнянь (Б.1) (Б.2) (Б.3) разом з (А.7) визначають перетворення Лорентца.

Для чіткого усвідомлення та розуміння цього методу необхідно знати зміст явища лорентцевого скорочення. А саме, чому стержень (чи відрізок), який рухається вздовж своєї довжини, має довжину меншу власної довжини.

Низка методів за допомогою яких обґрунтовується лорентцеве скорочення **без використання ПЛ** подано у **Прикладі 1.1, Задачі 1.1 та Задачі 1.2.**

Додаток В

Метод доведення релятивістських формул додавання швидкостей та перетворень Лорентца за Малініним О.М.

Розглянемо ще один спосіб виведення РФДШ як для «поперечних», так і для поздовжніх компонентів швидкості частинки та перетворень Лорентца [52].

Нехай \vec{v}, \vec{v}' - швидкості частинки відповідно в СВ K та СВ K' , причому $\vec{v}, \vec{v}' \uparrow \uparrow \vec{V}$, де \vec{V} - відносна швидкість СВ K, K' . Тому $v_x \equiv v, v'_x \equiv v'$.

Введемо в СВ K й у СВ K' , величини u, u' згідно з означенням:

$$u = \frac{c^2}{v}, u' = \frac{c^2}{v'}, \quad (\text{В.1})$$

де $c^2 = in v$ - квадрат величини інваріантної швидкості c (вводимо згідно з другим постулатом СТВ).

З визначення (В.1) слідує:

а) величини u, u' мають розмірність швидкості,

б) вони входять у вираз (В.1) симетрично величинам v, v' :

$$uv = c^2, u'v' = c^2 \quad (\text{В.2})$$

в) якщо $v, v' < c$, то і $u, u' < c$.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти зв'язок величин v та v' , і u та u' при заданій величині відносної швидкості \vec{V} СВ K , та K' ($\vec{V} \parallel O_x, O'_x$). Шукані відношення мають задовольняти наступну умову:

$$uv = u'v' = c^2 \quad (\text{В.3})$$

Очевидно, що у зв'язку із рівноправним входженням величин u та v , і, відповідно u' і v' у співвідношення (В.3), закон зв'язку величин v та v' за формою повинен співпадати за законом зв'язку величин u та u' .

Припустимо, що шукані співвідношення мають такий вигляд:

$$v = k(v' + V), u = n(u' + V), \quad (\text{В.4})$$

де $k = k(V, v', c), n = n(V, u', c)$ - невідомі поки що функції, які повинні мати такий вигляд, щоб виконувалась умова (В.3).

Після підстановки виразів (В.4) в перше співвідношення (В.2) маємо:

$$kn(u'v' + Vu' + Vv' + V^2) = c \quad (\text{В.5})$$

Враховуючи друге із співвідношень (В.2) маємо:

$$kn = \frac{1}{1 + \frac{V}{c^2}(u' + v' + V)} \quad (\text{B.6})$$

Оскільки, згідно (B.2): $\frac{V^2}{c^2} = \frac{V^2}{c^4} u' v'$, то

$$1 + \frac{V}{c^2}(u' + v' + V) = \left(1 + \frac{Vv'}{c^2}\right) \left(1 + \frac{Vu'}{c^2}\right) \quad (\text{B.7})$$

Таким чином:

$$kn = 1 / \left(1 + \frac{Vv'}{c^2}\right) \left(1 + \frac{Vu'}{c^2}\right) \quad (\text{B.8})$$

Звідси випливає:

$$k = 1 / \left(1 + \frac{Vv'}{c^2}\right), \quad n = 1 / \left(1 + \frac{Vu'}{c^2}\right) \quad (\text{B.9})$$

Отже:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'} \quad (\text{B.10})$$

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{V}{c^2} u'} \quad (\text{B.11})$$

Співвідношення (B.10) якраз і є релятивістською формулою перетворення швидкості (у випадку, коли $\vec{v}, \vec{v}' \parallel \vec{V}$).

Переходимо до обґрунтування РФДШ для поперечних складових швидкості тіла.

Нехай вектори швидкості частинки \vec{v}, \vec{v}' напрямлені під відповідним кутом до вектора \vec{V} ($OX, O'X' \parallel \vec{V}$) відносної швидкості СВ K, K' .

Розкладемо їх по осях координат даних СВ : $\vec{v} \equiv \{v_x, v_y, v_z\}$, $\vec{v}' \equiv \{v'_x, v'_y, v'_z\}$, отже : $\vec{v}^2 \equiv \{v_x^2, v_y^2, v_z^2\}$, $\vec{v}'^2 \equiv \{v_x'^2, v_y'^2, v_z'^2\}$.

Зв'язок повздовжніх компонент швидкості v_x, v'_x описується формулою (B.10), тобто

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (\text{B.12})$$

Урахувавши очевидні означення, $v_x \equiv \Delta x / \Delta t$, $v'_x \equiv \Delta x' / \Delta t'$, із (B.12) одержимо:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + V \Delta t'}{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'} \quad (\text{B.13})$$

Звідси, взагалі кажучи, випливає:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Gamma(\Delta x' + V \Delta t') \\ \Delta t &= \Gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x'\right), \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

де величина Γ не залежить від величин $\Delta x / \Delta t$, $\Delta x' / \Delta t'$, а описується лише відношенням СВ K й СВ K' , тобто $\Gamma = \Gamma(V)$.

Оскільки відносний рух СВ K' і СВ K має місце лише вздовж осей OX , $O'X'$, тоді отримуємо, що

$$\Delta y = \Delta y', \Delta z = \Delta z' \quad (\text{B.15})$$

Тепер з співвідношень (B.14), (B.15) знаходимо (взявши осі OY , $O'Y'$):

$$v_y = \frac{v'_y}{\Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)}, \quad (\text{B.16})$$

де $v_y \equiv \Delta y / \Delta t$, $v'_y \equiv \Delta y' / \Delta t'$.

Для знаходження величини $\Gamma = \Gamma(V)$ використаємо вирази (B.12), (B.16) до інваріантної швидкості \vec{c} . Нехай її компоненти в СВ K' такі: $v'_x = 0$, $v'_y = c$. Тоді згідно (B.12) та (B.16) в СВ K : $v_x = V$, $v_y = c / \Gamma$. Після підстановки цих даних в рівність: $v_x'^2 + v_y'^2 = v_x^2 + v_y^2 = c^2$ знаходимо:

$$\Gamma = 1 / \sqrt{1 - V^2 / c^2} \quad (\text{B.17})$$

Тим самим визначено релятивістську формулу перетворення поперечного компоненту швидкості :

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2 / c^2}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (\text{B.18}).$$

Разом з тим після знаходження величини Γ повністю визначені перетворення Лорентца (B.14) та (B.15). Якщо одна з подій є $O(0,0,0,0)$, та $O'(0,0,0,0)$, то $\Delta x = x$, $\Delta y = y$, $\Delta z = z$, $\Delta t = t$, і з (B.14), (B.15) випливають перетворення Лорентца (1.12).

Додаток Г

Формули перетворення проекцій сили при переході від однієї СВ до іншої.

Виходячи із вимоги коваріантності рівняння руху при переході від СВ K' до СВ K знайдемо формули згідно яких перетворюються компоненти сили при такому переході.

Для цього, згідно з означенням, запишемо спочатку компоненти сил в СВ K та СВ K' :

$$\begin{aligned} dp_x/dt &= F_x, & dp_y/dt &= F_y, & dp_z/dt &= F_z \\ dp'_x/dt' &= F'_x, & dp'_y/dt' &= F'_y, & dp'_z/dt' &= F'_z \end{aligned}$$

Використовуючи далі перетворення Лорентца та формули перетворення компонентів імпульсу:

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2) \cdot V}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z$$

Знаходимо:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{p'_x + (E'/c^2)V}{\sqrt{1 - B^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = \\ &= F'_x + \frac{Vv'_y/c^2}{1 + Vv'_x/c^2} F'_y + \frac{Vv'_z/c^2}{1 + Vv'_x/c^2} F'_z = \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

$$= \frac{1}{1 + Vv'_x/c^2} \left\{ F'_x + \frac{V}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{v}') \right\}$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + Vv'_x/c^2} F'_y \quad (\text{Г.2})$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + Vv'_x/c^2} F'_z, \quad (\text{Г.3})$$

де E' - повна енергія тіла в СВ K' , $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$ - швидкість тіла в СВ K' , $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ - швидкість цього ж тіла в СВ K .

Враховано також, що $\frac{dE'}{dt'} = \frac{dT'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{v}'$.

В принципі формулами (Г.1), (Г.2) та (Г.3) питання вирішується.

Але інколи важливо мати перетворення будь-якого компоненту сили із СВ K' до СВ K , в якій компоненти сили в СВ K були б виражені через

швидкість v_x тіла, а не через швидкість цього тіла v'_x СВ K' , як це відображено в (Г.1), (Г.2) та (Г.3).

За допомогою релятивістських формул додавання швидкостей

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}, v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}.$$

формула (Г.1) набуває вигляду:

$$F_x = F'_x + \frac{Vv_y/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_y + \frac{Vv_z/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z. \quad (\text{Г.4})$$

Використовуючи прямі та обернені перетворення для ігрекової проекції швидкості

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-B^2}}{1+Vv'_x/c^2}, v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-B^2}}{1-Vv_x/c^2}.$$

перемножимо почлено ліві і праві частини цих рівностей і одержимо:

$$\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right) \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) = 1 - B^2.$$

Тоді з урахуванням останньої формули наші формули (Г.2) та (Г.3) набувають вигляду:

$$F_y = \frac{1-Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_y. \quad (\text{Г.5})$$

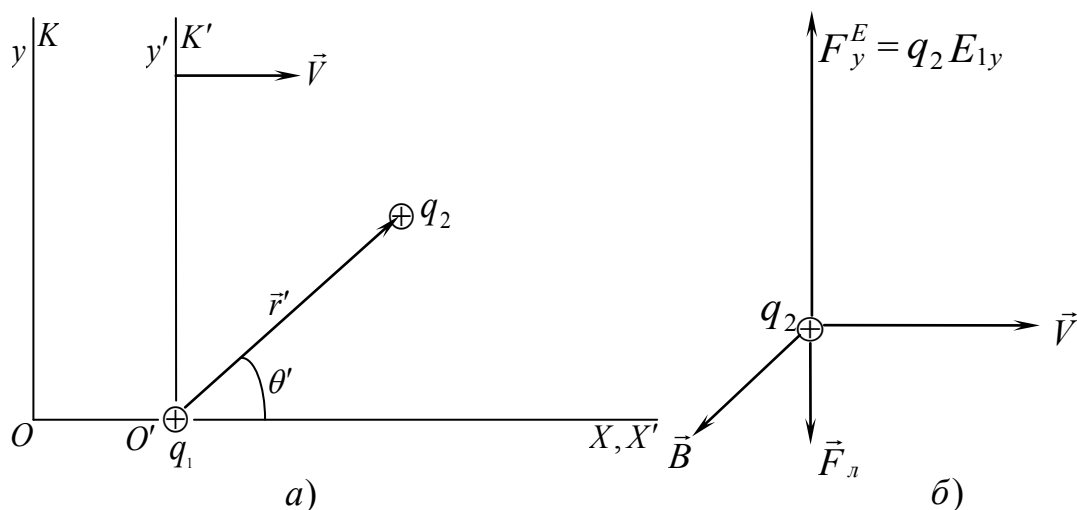
$$F_z = \frac{1-Vv_x/c^2}{\sqrt{1-B^2}} F'_z. \quad (\text{Г.6})$$

Додаток Д

Опис взаємодії між двома рухомими зарядженими частинками.

Уведення поняття магнітного поля

Задача: Нехай в системі відліку K' в площині $X'Y'$ знаходяться в спокої дві заряджені частинки (далі – протони), величина заряду яких q_1 і q_2 , а віддаль між ними r' (мал. Д.1). СВ K' рухається з швидкістю $\vec{V} = const$ відносно лабораторної СВ K уздовж вісі OX . Описати взаємодію між зарядженими частинками.



Мал. Д.1. Взаємодія двох заряджених частинок, які рухаються з постійною швидкістю \vec{V} відносно ЛСВ (а) і поперечна складова сили, що діє на другу ЗЧ (б)

Розв'язання: В СВ K' існує тільки електрична взаємодія між ЗЧ. Тобто на другу ЗЧ (величина заряду якої q_2) діє сила $\vec{F}'_2 = q_2 \vec{E}'_1$, де \vec{E}'_1 – напруженість електричного поля, що створюється першою ЗЧ в точці знаходження заряду q_2 :

$$\vec{E}'_1 = \frac{q_1 \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}. \quad (\text{Д.1})$$

Але у СВ K напруженість електричного поля визначається формулою (4.1).

Неважко впевнитися, використовуючи перетворення Лорентца, що повздовжня складова сили взаємодії між зарядами q_1 і q_2 не змінюється при переході від СВ K' до СВ K .

Тепер здійснимо аналіз поперечної складової взаємодії між цими ЗЧ. Як видно з виразу для напруженості електричного поля рухомої ЗЧ (4.1), поперечна складова сили електричної взаємодії між ЗЧ в СВ K зростає, тобто:

$$F_y^E = q_2 E_{1y} > q_2 E'_{1y}, \quad (\text{Д.2})$$

де E_{1y}, E'_{1y} – поперечні складові напруженості електричного поля, що створюється першою ЗЧ в точці знаходження другої ЗЧ в СВ K і СВ K' відповідно.

Як відомо, принцип відносності стверджує, що фізичні явища протікають однаково (при тотожних початкових умовах) у всіх інерціальних СВ. Іншими словами, математична форма основних законів фізики не повинна змінюватися при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої: рівняння фізики повинні бути лорентцковаріантними. При цьому просторові і часова координати (x, y, z, t) будь-якої події в СВ K і СВ K' пов'язані перетвореннями Лорентца.

Щоб основні рівняння фізики мали однакову математичну форму в СВ K і СВ K' , проекції сили (зокрема) на координатні осі повинні перетворюватися згідно з формулами (3.6).

Оскільки ЗЧ нерухомі в СВ K' , то $v'_x = 0$, в нашому випадку (Мал. Б.1) маємо для ігрекової компоненти сили взаємодії між рухомими ЗЧ в СВ K :

$$F_y = \frac{F'_y \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} = F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{Д.3})$$

Тоді $F_y < F'_y$, бо $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < 1$.

Тобто, незважаючи на те, що поперечна складова сили електричної взаємодії між ЗЧ в СВ K зростає, принцип відносності вимагає, щоб повна поперечна складова сили взаємодії між ЗЧ в нашій задачі була меншою, ніж поперечна складова сили взаємодії між ЗЧ в СВ K' , і дорівнювала:

$$F_y = F'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{Д.4})$$

Таким чином, маємо: електрична сила взаємодії в напрямку осі OY збільшується в СВ K , а принцип відносності вимагає, щоб сумарна сила взаємодії між рухомими ЗЧ зменшилася згідно з формулою (Д.4). Це означає лише одне – в СВ K з'явилася додаткова взаємодія між рухомими зарядженими частинками, якої не було в системі K' .

Іншими словами, ми повинні допустити виникнення такої поперечної сили взаємодії між рухомими ЗЧ в СВ K , існування якої необхідне для виконання принципу відносності. Коли ЗЧ нерухомі в СВ K' , між ними існує тільки електрична сила $\vec{F}'_2 = q_2 \cdot \vec{E}'_1$, коли ж вони рухаються зі швидкістю \vec{V} відносно СВ K , ми змушені припустити появу (очевидно, внаслідок руху ЗЧ) деякої додаткової поперечної сили, що діє на другу ЗЧ.

Позначимо цю, невідому, поки що, силу \vec{F}_L . Ця сила зменшує електричну складову сили, яка діє на другу ЗЧ, F_y^E , до значення $F_y = F_y' \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, яке визначається принципом відносності.

Таким чином, можемо записати:

$$q_2 E_{1Y} - F_L = F_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (Д.5)$$

Значення абсолютної величини сили знаходимо із (Д.5)

$$F_L = \frac{q_1 q_2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \sin \theta \cdot V^2}{4c^2 \pi \epsilon_0 r^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} = q_2 V \frac{V}{c^2} E_1 \sin \theta. \quad (Д.6)$$

Ця сила завжди перпендикулярна до швидкості руху ЗЧ q_2 (див. Мал. Б.1б) і паралельна осі OY , де б не знаходився заряд q_2 в площині XOY .

При цьому, поперечна складова сили, що діє на q_2 , нами повинна трактуватися як сила, що діє на другу рухому ЗЧ в деякому фізичному полі, існування та появу якого вимагає принцип відносності. Властивості та характеристики цього поля впливають із (Д.5) та (Д.6).

Ураховуючи просторове розташування сил та швидкості руху \vec{V} заряджених частинок, а також інваріантність повздовжнього компонента електричного поля (та інваріантність повздовжньої складової сили, яка діє на q_2), яке створюється зарядом q_1 , вираз у векторній формі цієї сили \vec{F}_L , існування якої вимагає СТВ, необхідно записати в такому вигляді (Мал. Д.1):

$$\vec{F}_L = q_2 \left[\vec{V}, \left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right]. \quad (Д.7)$$

Говорять, що \vec{F}_L – це сила, що діє на заряд q_2 , який рухається з швидкістю \vec{V} в деякому фізичному полі. Це поле характеризується величиною $\left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right]$, і яке створюється рухом першої ЗЧ, величина заряду якої q_1 .

Тобто (Д.7) подають у вигляді:

$$\vec{F}_L = q_2 \left[\vec{V}, \left[\frac{\vec{V}}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right] = q_2 [\vec{V}, \vec{B}_1]. \quad (\text{Д.8})$$

Це поле називають магнітним, а індукція магнітного поля \vec{B}_1 рухомої ЗЧ дорівнює:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} [\vec{V}, E_1] = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{V}, \vec{E}_1] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot [\vec{V}, \vec{r}]. \quad (\text{Д.9})$$

Якщо швидкість руху зарядів q_1 і q_2 різна (\vec{v}_1 та \vec{v}_2 відповідно), то узагальнюючи (Д.8), одержуємо силу, що діє на рухому електрично заряджену частинку q_2 в полі рухомого заряду q_1 :

$$\vec{F}_L = q_2 \left[\vec{v}_2, \left[\frac{\vec{v}_1}{c^2}, \vec{E}_1 \right] \right] = q_2 [\vec{v}_2, \vec{B}_1]. \quad (\text{Д.10})$$

Очевидно, що коли рухається електрон, то індукція його МП визначається формулою

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{r^3 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} [\vec{V}, \vec{r}]. \quad (\text{Д.11})$$

Додаток Е

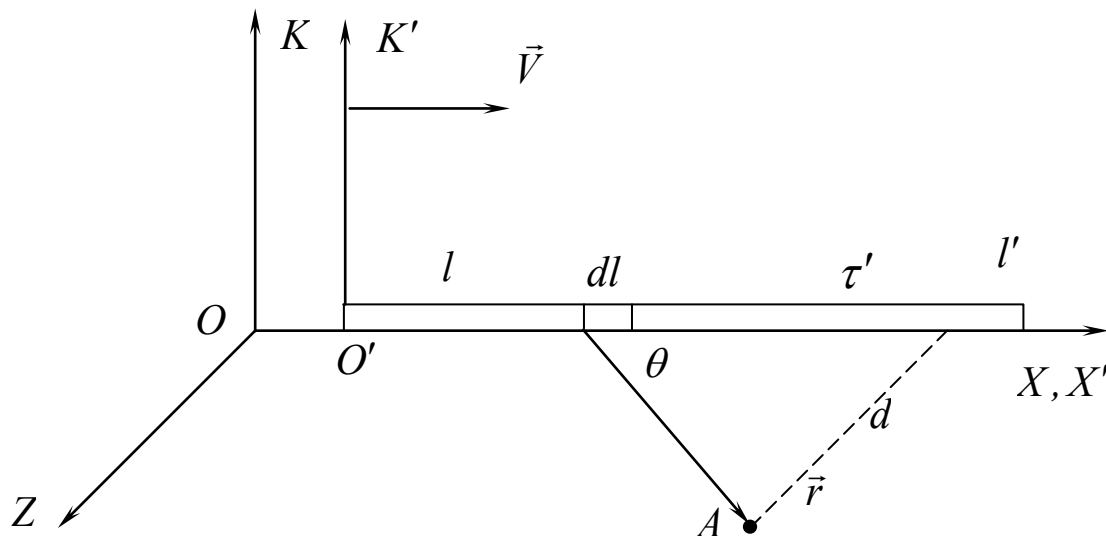
Дослідження електричного та магнітного полів, що породжуються рівномірно рухомою зарядженою ниткою

Розглянемо **Задачу**: Нехай рівномірно заряджена нитка рухається з швидкістю $\vec{V} = const$ уздовж осі OX системи відліку K . Лінійна густина заряду на нитці у власній СВ K' дорівнює τ' , довжина l' . Знайти електричне та магнітне поля в точці A СВ K , відносно якої K' – система рухається зі швидкістю \vec{V} (мал. Е.1).

Розв'язання: З одного боку ці поля можна знайти за допомогою формул перетворення компонентів ЕМП ([35; 38; 39]) при переході від СВ K' до СВ K

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \cdot (E'_z - VB'_y), \\ B_y &= \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \cdot \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right), \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

де E'_z, B'_y – відповідні складові електромагнітного поля у СВ K' .



Мал. Е.1. Обчислення напруженості електричного та індукції магнітного поля рівномірно зарядженої нитки, яка рухається з швидкістю $\vec{V} = const$

$$B'_y = 0, \quad E'_z = \frac{\tau'}{4\pi\epsilon_0 d} \cdot \left\{ \frac{l' - x'}{\sqrt{(x' - l')^2 + d^2}} + \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + d^2}} \right\}, \quad (E.1)$$

де x' – іксова координата точки поля в СВ K' , d – відстань точки поля A від нитки (див. [39, с. 43]).

З іншого боку ці величини можуть бути знайдені за допомогою принципу

суперпозиції та виразів для полів dE_z , dB_y , які створюються елементарним відрізком dl рухомої зарядженої нитки

$$dE_z = \frac{dq \cdot (1 - B^2) \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2 \cdot (1 - B^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq(1 - B^2) r \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \left\{ (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - B^2) \right\}^{\frac{3}{2}}},$$

де $dq = \tau dl$ – величина заряду на елементарному відрізку dl ;

$\vec{r} = (x - Vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор, проведений від миттєвого положення

заряду $dq = \tau dl$ в дану точку поля $A(x, y, z)$; $\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - B^2}}$; $B = \frac{V}{c}$, θ – кут

між вектором \vec{r} та напрямком руху нитки (Мал. Е.1).

Оскільки ми шукаємо напруженість електричного поля, яке створюється в дану мить всією рухомою зарядженою ниткою (а це значить, що в дану мить інтегрувати необхідно по довжині нитки в СВ K), то попередній вираз слід подати у формі

$$dE_z = \frac{\tau dl \cdot (1 - B^2) \cdot d}{4\pi\epsilon_0 \left\{ (x - l)^2 + d^2 (1 - B^2) \right\}^{3/2}}, \quad (\text{E.2})$$

де l – змінна координата елементарного відрізка dl .

Інтегрування будемо проводити для моменту часу, коли початки координат систем відліку K та K' збігаються. Якщо ввести нову змінну $x - l = u$, то одержуємо:

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}} dE_z = -\frac{\tau \cdot d \cdot (1 - B^2)}{4\pi\epsilon_0} \int_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}} \frac{du}{\left\{ u^2 + d^2 (1 - B^2) \right\}^{3/2}} = \\ &= -\frac{\tau \cdot d \cdot (1 - B^2)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{u}{d^2 (1 - B^2) \sqrt{u^2 + d^2 (1 - B^2)}} \right) \Bigg|_{x-0}^{x-l'\sqrt{1-B^2}}. \end{aligned}$$

Підстановка меж інтегрування дає величину напруженості шуканого електричного поля

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2 (1 - B^2)}} + \frac{l' \sqrt{1 - B^2} - x}{\sqrt{\left(x - l' \sqrt{1 - B^2} \right)^2 + d^2 (1 - B^2)}} \right). \quad (\text{E.3})$$

Знайдемо індукцію магнітного поля, яке породжується зарядженою ниткою, що рівномірно рухається, використовуючи релятивістську форму закону Біо-Савара (4.8)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1-B^2)}{r^3 \cdot (1-B^2 \cdot \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1-B^2)}{\left\{ (x-l)^2 + (y^2 + z^2)(1-B^2) \right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Ігрековий компонент індукції магнітного поля в довільній точці площини XOZ дорівнює

$$dB_y = - \frac{\mu_0 \cdot idl \cdot (1-B^2) \cdot z}{4\pi \left\{ (x-l)^2 + d^2(1-B^2) \right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 i \cdot du(1-B^2) \cdot z}{4\pi \left\{ u^2 + d^2(1-B^2) \right\}^{\frac{3}{2}}}, \quad (E.4)$$

де $(x-l) = u, du = -dl, i = \tau V = \frac{\tau'}{\sqrt{1-B^2}} V$.

Інтегруючи (E.4) за довжиною рухомої зарядженої нитки, одержуємо

$$\begin{aligned} B_y &= \int_{x=0}^{x=l'\sqrt{1-B^2}} dB_y = \frac{\mu_0 \tau' V \cdot d(1-B^2)}{4\pi \sqrt{1-B^2}} \int_{x=0}^{x=l'\sqrt{1-B^2}} \frac{du}{\left\{ u^2 + d^2(1-B^2) \right\}^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mu_0 \tau' V \cdot d(1-B^2)}{4\pi \sqrt{1-B^2}} \cdot \left(\frac{u}{d^2(1-B^2) \sqrt{u^2 + d^2(1-B^2)}} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=l'\sqrt{1-B^2}}. \end{aligned}$$

Таким чином, одержуємо величину індукції магнітного і напруженості електричного поля, яке створюється рухомою зарядженою ниткою в довільній точці площини XOZ :

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\mu_0 \tau' V}{4\pi \cdot d \sqrt{1-B^2}} \cdot \left(\frac{x - l'\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{\left(x - l'\sqrt{1-B^2} \right)^2 + d^2(1-B^2)}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} \right) = \\ &= - \frac{\mu_0 \tau' V}{4\pi \cdot d \sqrt{1-B^2}} \cdot \left(\frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{\left(x - l'\sqrt{1-B^2} \right)^2 + d^2(1-B^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} \right), \quad (E.5) \end{aligned}$$

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi \epsilon_0 d} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} + \frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{\left(x - l'\sqrt{1-B^2} \right)^2 + d^2(1-B^2)}} \right). \quad (E.6)$$

Якщо початок координат СВ K розташувати так, щоб вісь OZ проходила через точку поля A , тоді межі інтегрування будуть від $-x$ до $l'\sqrt{1-B^2} - x$ й інтегрування за довжиною рухомої нитки дає той же результат

$$E_z = \int_{-x}^{l'\sqrt{1-B^2}-x} dE_z = \frac{\tau'}{4\pi \epsilon_0 d \sqrt{1-B^2}} \cdot \left\{ \frac{l'\sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{\left(l'\sqrt{1-B^2} - x \right)^2 + d^2(1-B^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} \right\}.$$

$$B_y = -\frac{V \cdot \tau' \mu_0}{4\pi \cdot d \sqrt{1-B^2}} \cdot \left\{ \frac{l' \sqrt{1-B^2} - x}{\sqrt{(l' \sqrt{1-B^2} - x)^2 + d^2(1-B^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2(1-B^2)}} \right\}.$$

Значення напруженості електричного та індукції магнітного полів E' , B' , E , B у всіх формулах цієї задачі беруться для однієї і тієї ж просторово-часової точки. Якщо взяти момент часу, коли початки координат СВ K і СВ K' співпадають ($t = t' = 0$, тоді $x = x' \sqrt{1-\beta^2}$) і із останніх двох формул одержуємо

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{E'_z}{\sqrt{1-B^2}}; \\ B_y &= -\frac{VE'_z}{c^2 \sqrt{1-B^2}}. \end{aligned} \tag{E.7}$$

Але, як би ми при знаходженні B_y користувалися законом Біо-Савара в класичній формі то одержали б результат, що протирічить (*) і (E.7).

Це означає, що застосування класичного закону Біо-Савара (1.18) для знаходження ЕМП зарядженої нитки, що рухається рівномірно і поступально, дає результати, які суперечать вимогам релятивістської електродинаміки.

Натомість, при знаходженні сумарної сили взаємодії між двома зарядженими рухомими паралельними нитками (додаток А посібника [34]) в результаті використання формул (4.1) та (4.8) одержуємо результат, що не суперечить вимогам СТВ: $F_z = F_z^E - F_z^B = F'_z \cdot \sqrt{1-\beta^2}$.

Очевидно, що при знаходженні сили взаємодії між нитками на основі класичного закону Біо-Савара, ця вимога не була б виконана.

Таким чином, розглянуті приклади показують, що закон Біо-Савара в релятивістській формі дає коректний опис фізичних явищ, в той час як застосування класичного закону Біо-Савара (4.9) не дає релятивістськи інваріантного опису цих явищ.

Відтак, його застосування в процесі навчання класичної електродинаміки не дає можливість здійснити повний та вичерпаний аналіз явищ, що виникають при прямолінійному та рівномірному русі носіїв заряду.

Додаток Ж

Дослідження взаємодії двох паралельних провідників з постійними струмами (ППС) в традиційній моделі та в моделі, згідно з якою ППС у власній системі відліку характеризується об'ємною густиною заряду (4.47)

А. Дійсно, в традиційній моделі ППС вважається, як вже відмічалось, що у ВСВ провідник зі струмом нейтральний, «незаряджений», а умовою нейтральності є (4.44):

$$\rho_+^0 = -\frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_-.$$

Сила магнітної взаємодії у ВСВ між двома паралельними ППС, що приходиться на одиницю довжини одного із них в такій моделі визначається класичною формулою $F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot a}$.

Знайдемо силу взаємодії між ними в СВ K' .

У системі K' , щодо якої струми переміщуються уздовж своєї довжини зі швидкістю V , крім магнітної взаємодії струмів, буде мати місце й електрична взаємодія, тому що кожен провідник зі струмом у цій СВ характеризується об'ємною густиною заряду [39, с. 277]

$$\rho' = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{Vv \cdot \rho_-^0}{c^2 \sqrt{(1-B^2)(1-\beta'^2)}} = \frac{V \cdot j_x}{c^2 \sqrt{1-B^2}},$$

де $j_x = \frac{v \cdot \rho_-^0}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$ - густина струму в СВ K , щодо якої провідник зі струмом

нерухомий, v - швидкість дрейфу електронів провідності в цій же СВ; $\beta = \frac{v}{c}$,

$B = \frac{V}{c}$, $v' = \frac{V-v}{1-B\beta}$ - швидкість електронів провідності в СВ K' .

Умова нейтральності провідника зі струмом у ВСВ визначається співвідношенням (4.44). Тому результуюча сила, що діє на ділянку провідника довжиною $\Delta l \sqrt{1-B^2}$ одного зі струмів з боку іншого дорівнює

$$F' = \frac{\mu_0 I'}{2a\pi} \cdot I' \Delta l \sqrt{1-B^2} - \frac{\tau'}{2a\pi \cdot \epsilon_0} \tau' \Delta l \sqrt{1-B^2} =$$

$$= \frac{\Delta l \sqrt{1-B^2} \cdot \left(\mu_0 I'^2 - \frac{\tau'^2}{\epsilon_0} \right)}{2a\pi} = \frac{\mu_0 I^2 \Delta l \cdot \sqrt{1-B^2}}{2a\pi}, \quad (\text{Ж.1})$$

$$\text{де } I' = \left(\frac{\rho_+^0 \cdot V}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{\rho_-^0 \cdot v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right) S = \frac{S \cdot v \cdot \rho_-^0}{\sqrt{(1-B^2)(1-\beta^2)}} = \frac{I}{\sqrt{1-B^2}},$$

$$\tau' = \rho' S = \frac{V \cdot I}{c^2 \cdot \sqrt{1-B^2}}, \text{ відповідно, сила струму в провіднику та лінійна}$$

густина заряду на цьому провіднику у СВ K' .

Тобто ми одержали необхідне співвідношення між силами F' і F :

$$F' = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{Ж.2})$$

Таким чином, щоб одержати релятивістськи-інваріантний опис взаємодії струмів у рамках традиційного підходу необхідно мати наступний закон

перетворення струму: $I' = \frac{I}{\sqrt{1-B^2}}$, де I - величина струму в системі відліку

K . Останнє, як неважко бачити, забезпечується також і рівністю

$$|\rho_+^0| = |\rho_-^0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}|$$

незважаючи на те, що і густина заряду електронів провідності, і густина заряду позитивних іонів змінюються за однаковим законом при переході до системи

$$K' \quad \left(\rho_-^0 = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta'^2}} \quad \rho_+^0 = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1-B^2}} \right).$$

Відзначимо, що співвідношення $I' = \frac{I}{\sqrt{1-B^2}}$ одержуємо відразу з

формул перетворення компонентів 4-струму [39, с. 275] за умови $s_4 = 0$, або, як це продемонстровано вище, виходячи з означення сили струму.

Б. У зв'язку з реформуванням системи шкільної та вищої освіти переглядом змісту фізичної освіти, у зв'язку із зростаючою роллю фізичних моделей і модельного експерименту в процесі навчання фізиці, точне і послідовне розв'язання електродинамічних моделей, які традиційно використовуються в учбовій літературі, набуває важливого значення для дидактики фізики.

Відомо, що точні урахування релятивістських поправок, не дивлячись на їх незначну величину в реальних фізичних ситуаціях, в описі взаємодії рухомих заряджених частинок є, проте, принципово важливими і необхідними. Так з вимог спеціальної теорії відносності до правил перетворення компонентів сили при переході з однієї системи відліку в іншу (іншими словами з вимоги лоренц-коваріантності рівнянь руху) витікає необхідність введення поняття «Магнітне поле» [35] (див. також Додаток Д).

Урахування релятивістських поправок у виразі напруженості електричного та індукції магнітного полів рухомої ЗЧ спільно з принципами СТВ приводять до необхідності існування явища електромагнітної індукції [35] (див. також Розділ 4).

В учбовій і науково-методичній літературі [22; 23; 36; 65] для ілюстрації фундаментальної властивості електричного і магнітного поля - відносності електричного і магнітного полів популярним є такий приклад.

Магнітна взаємодія окремого рухомого заряду з іншими рухомими зарядами (з дротом, по якому протікає струм) представлена як чисто електрична взаємодія завдяки релятивістським змінам в електричних полях рухомих ЗЧ (див. [35; 38; 39; 65]).

Цей приклад ініціює спробу аналогічної інтерпретації взаємодії двох нескінченно довгих провідників із струмами [38; 36].

Тобто, вважаючи, що ППС у ВСВ характеризується об'ємною густиною заряду (4.47) знайдемо силу взаємодії таких двох паралельних ППС, ураховуючи як магнітну так електричну складову взаємодії, зумовлену релятивістським ефектом (4.47).

Але спочатку опишемо взаємодію між двома ППС, моделі яких неприродно ідеалізовані.

При цьому розглядається наступна модель провідників із струмами [65, с. 174; 73, с. 121-125]: у кожному провіднику є однакове число позитивних і негативних носіїв заряду, які рухаються з рівними швидкостями в протилежних напрямках, мал. Ж.1. Щоб обчислити силу, що діє на одиницю довжини одного з таких провідників з боку іншого в лабораторній системі відліку (ЛСВ) K , необхідно обчислити силу, що діє на позитивні носії заряду у власній системі відліку і на негативні ЗЧ в своїй ВСВ. Потім значення цих сил перерахувати, згідно формул перетворення компонентів сил (3.6) (див. також Додаток Г), до СВ K .

А потім покажемо, що для моделі провідника із струмом, яка в більшій мірі відповідає реальній ситуації, ніж та, що зображена на мал. Ж.1, вираз для сили взаємодії двох паралельних ППС відрізняється від загальноприйнятого, внаслідок того, що такі ППС характеризуються об'ємною густиною заряду релятивістського походження.

Але спочатку в **n.1** і **n.2** знайдемо силу взаємодії між струмами, моделі яких зображено на мал. Ж.1.

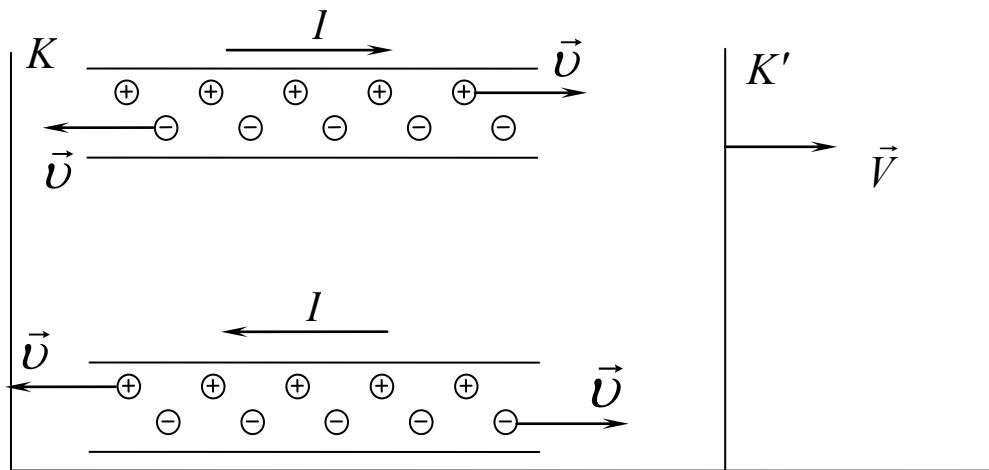
n.1. Хай швидкості зарядів в СВ K дорівнюють \vec{v} , лінійна щільність зарядів в ВСВ $|\tau_0^+| = |\tau_0^-| = \tau_0$. Ясно, що сили, що діють на позитивні і негативні носії заряду першого провідника в їх власних системах відліку, матимуть електричну природу. Електричне поле у ВСВ позитивних чи негативних носіїв заряду першого провідника обумовлене різною величиною лінійної щільності позитивного і негативного зарядів другого провідника.

Тоді на позитивні заряди 1-го провідника в їх ВСВ, які розташовані на тій же довжині, що і в СВ K ($\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \beta^2}$, де $\beta = \frac{v}{c}$) діє сила з боку електричного поля 2-го провідника, рівна

$$F'_+ = \tau_0 \cdot \Delta l' \cdot E_2 = \tau_0 \cdot \Delta l' \cdot \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a}, \quad (\text{Ж.3})$$

де $\tau_2 = \tau_2^+ - \tau_2^- = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (\beta_2^+)^2}} - \tau_0 = \frac{2\tau_0\beta^2}{(1 - \beta^2)}$ - результуюча лінійна густина

заряду 2-го ППС з точки зору СВ, пов'язаною з позитивними носіями заряду 1-го ППС; $\beta_2^+ = \frac{v_2^+}{c} = \frac{1}{c} \left(\frac{v + v}{1 + \beta^2} \right)$; a - відстань між струмами.



Мал. Ж.1. Моделі двох ППС, в яких позитивні іони і електрони мають однакові за величиною, але протилежно направлені швидкості

Оскільки ми в кінці кінців цікавимося силою, що приходить на довжину Δl в СВ K , то остаточно маємо, враховуючи вираз для величини τ_2 , та $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \beta^2}$:

$$F'_+ = \frac{\tau_0^2 \cdot \beta^2 \cdot \Delta l}{\pi \epsilon_0 \cdot a (1 - \beta^2)^{3/2}}. \quad (\text{Ж.4})$$

Така ж сама за величиною (із-за симетрії задачі) сила відштовхування F'_- діє і на негативні заряди 1-го провідника в їх ВСВ з боку електричного поля 2-го провідника.

Оскільки СВ, які зв'язані з носіями заряду 1-го провідника, мають швидкість ν відносно СВ K , то сила, що діє на відрізок Δl в СВ K буде рівна, згідно з формулами перетворення поперечних складових сили (3.6):

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - \beta^2} = (F'_+ + F'_-) \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \Delta l, \quad (\text{Ж.5})$$

де сила струму $I = \frac{2\tau_0\nu}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Таким чином, розглядаючи лише електричні сили, ми знайшли звичайний вираз для сили, що діє на довжину Δl одного з них з боку магнітного поля іншого ППС.

п.2. Цей же результат може бути отриманий шляхом знаходження сил, що діють на рухомі ланцюжки позитивних і негативних носіїв заряду 1-го провідника в магнітному полі створюваному 2-м струмом. Електричне поле другого ППС в СВ K відсутнє ($E_2 = 0$), завдяки рівним, але протилежно напрямленим, швидкостям негативних і позитивних носіїв заряду.

Індукція магнітного поля, що створюється другим струмом в СВ K дорівнює:

$$B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{B} | = \frac{\mu_0 \tau_0 \nu}{\pi \cdot a \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (\text{Ж.6})$$

де $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}] \cdot (1 - \beta^2)}{r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$ - закон Біо-савара в релятивістській формі (4.8); тут \vec{r} - радіус-вектор проведений із миттєвого положення елемента струму $\frac{\tau_0 dl}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ в дану точку поля; θ - кут між $\vec{\nu}$ і \vec{r} .

Тоді сила, що діє на відрізок довжини Δl першого провідника з боку магнітного поля другого провідника, рівна

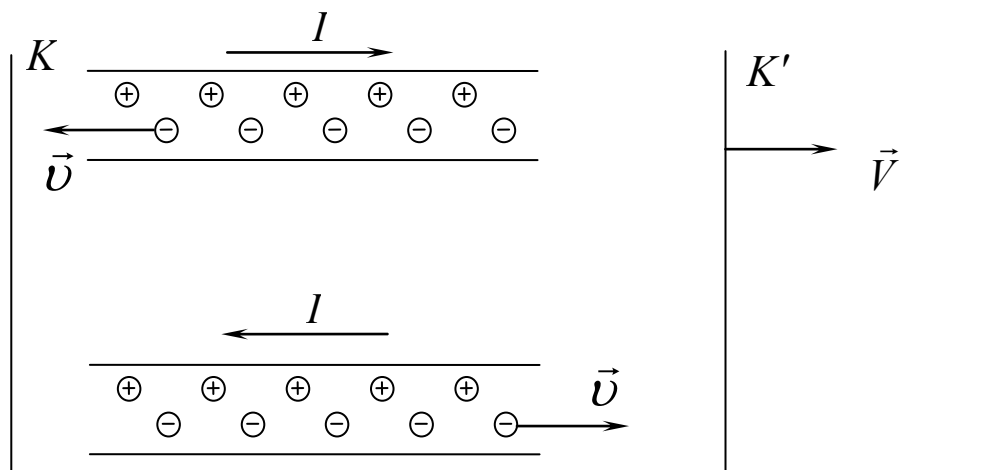
$$F_y = 2 \cdot \frac{\tau_0 \cdot \Delta l}{\sqrt{1 - \beta^2}} | [\vec{\nu}, \vec{B}_2] | = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \Delta l,$$

що, природно, співпадає з виразом (Ж.5).

Пункти *n.1* і *n.2* є хорошою ілюстрацією застосування принципів СТВ для розв'язання конкретних фізичних задач.

Ми також переконалися в необхідності враховувати релятивістські поправки і в законі Біо-савара, і в електричних полях рухомих носіїв заряду.

Проте, як наголошувалося на початку, більш адекватна реальності буде модель провідника зі струмом, зображена на мал. Ж.2. Тут позитивні носії заряду нерухомі (що відповідає нерухомим іонам кристалічної решітки провідника), а рухаються тільки електрони провідності з дрейфовою швидкістю \vec{v} відносно ЛСВ K .



Мал. Ж.2. Традиційна модель взаємодіючих провідників із струмами. Вважається, що вони «заряджені» у ВСВ з об'ємною густиною заряду (4.47)

Припустимо, що провідник без струму нейтральний $|\tau_0^+| = |\tau_0^-| = \tau_0$; у нашій моделі це відповідає випадку, коли ланцюжок негативних носіїв заряду нерухомий щодо позитивного зарядженого ланцюжка іонів.

Знайдемо силу взаємодії двох ППС, моделі яких зображені на мал. Ж.2, трьома способами. Кожен із цих способів ілюструє різні прояви електромагнітної взаємодії, різні подання (описи) ЕМ взаємодії в конкретному прикладі. При цьому ілюструється принцип відносності Ейнштейна, методика його використання, показується інваріантність величини сили цієї взаємодії, підтверджується вірогідність одержаного результату та відмінність його від класичної формули.

Перший спосіб. Для знаходження сили взаємодії двох струмів, показаних на мал. Ж.2 реалізуємо програму *n. 1*. Перейдемо в систему відліку (СВ K') пов'язану з електронами провідності першого провідника. Тоді на нерухомі в цій СВ електрони діє сила з боку електричного поля, обумовленого неоднаковим лорентцевим скороченням ланцюжків електронів і іонів другого провідника (це буде сила відштовхування)

$$F'_{-e} = E_2 \cdot \tau_0 \Delta l' = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \tau_0 \Delta l' = \frac{\tau_0^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot \sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \Delta l', \quad (\text{Ж.7})$$

де $\tau_2 = \tau_2^- - \tau_2^+ = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(\beta_2^-)^2}} - \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)} - \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ - результуюча

лінійна густина заряду другого провідника у ВСВ електронів провідності першого провідника; $\beta_2^- = \frac{v_-}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2v}{1+\beta^2}$.

А на нерухомі іони першого провідника в СВ K діятиме сила притягання, рівна

$$F_{+e} = \tau_0 \Delta l \cdot E_- = \tau_0 \Delta l \frac{\tau_0}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \quad (\text{Ж.8})$$

F'_{-e} - сила, яка діє на **нерухомі** в СВ K' електрони першого ППС. При перерахуванні її значення до СВ K , як поперечної до швидкості руху, та враховуючи, що $\Delta l' = \frac{\Delta l}{\sqrt{1-\beta^2}}$ одержуємо

$$F_{-e} = F'_{-e} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau_0^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot \sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \frac{\Delta l}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Отже, для сумарної сили відштовхування між двома провідниками, яка приходить на довжину Δl одного з них в СВ K , маємо

$$F_y = F_{-e} \sqrt{1-\beta^2} - F_{+e} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \Delta l \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}, \quad (\text{Ж.9})$$

де сила струму тепер дорівнює $I = \frac{\tau_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Результат (Ж.9) може бути отриманий і за допомогою способу, описаного в [35, с. 300].

Другий спосіб. Насправді, на розподіл електронів першого провідника діють наступні сили з боку електронного і іонного розподілів другого провідника: електрична $F_{-2,-1}^e$ і магнітна сили $F_{-2,-1}^m$ з боку ланцюжка електронів та електрична сила з боку нерухомого ланцюжка іонів $F_{+2,-1}^e$.

На нерухомі іони першого провідника діють сили $F_{-2,+1}^e$ і $F_{+2,+1}^e$ відповідно в електричних полях, що створюються рухомими електронами і нерухомими іонами другого провідника.

Тому результуюча сила взаємодії, що приходить на одиницю довжини одного з них, рівна

$$\begin{aligned}
 F_y = F_{-2,-1}^m + F_{-2,-1}^e - F_{+2,-1}^e - F_{-2,+1}^e + F_{+2,+1}^e &= \frac{\mu_0 \tau_0 \nu}{2\pi a \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\tau_0 \nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
 + \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a} \cdot \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \tau_0 +, & \quad (\text{Ж.10}) \\
 + \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a} \tau_0 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

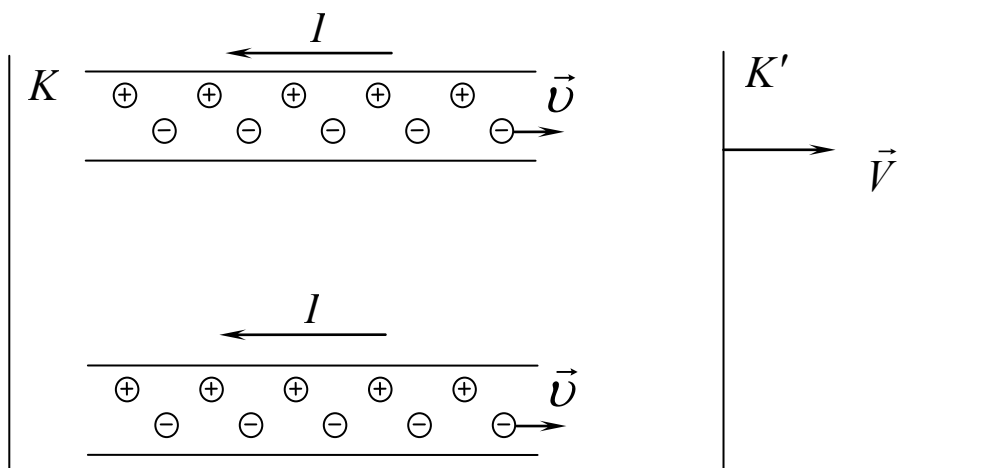
що співпадає з (Ж.9).

Третій спосіб. Ще простіший спосіб знаходження сили взаємодії між «зарядженими» провідниками зі струмами полягає в обчисленні магнітної та електричної складових цієї взаємодії.

Дійсно

$$\begin{aligned}
 F^m = I \cdot \Delta l \cdot B_2 &= \frac{\tau_0 \nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \Delta l \cdot \frac{\mu_0 \tau_0 \nu}{2\pi a \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0^2 \beta^2}{(1-\beta^2) 2\pi \epsilon_0 a}, \\
 F^e &= \frac{\tau_0}{2\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \tau_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot \Delta l, \\
 F_y = F^m + F^e &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot \left\{ \frac{2}{\beta^2} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Якщо ми розглянемо взаємодію провідників зі струмами в рамках прийнятої моделі для однаково направлених струмів, мал. Ж.3, то фігурні



Мал. Ж.3. До опису взаємодія двох ППС в моделі, в якій вони «заряджені» у ВСВ (однаково направлені струми) [35]

дужки у виразах (Ж.9) або (Ж.10) для сили взаємодії виявляються дорівнюють [35]:

$$2\left(1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2}-1}{\beta^2}\right).$$

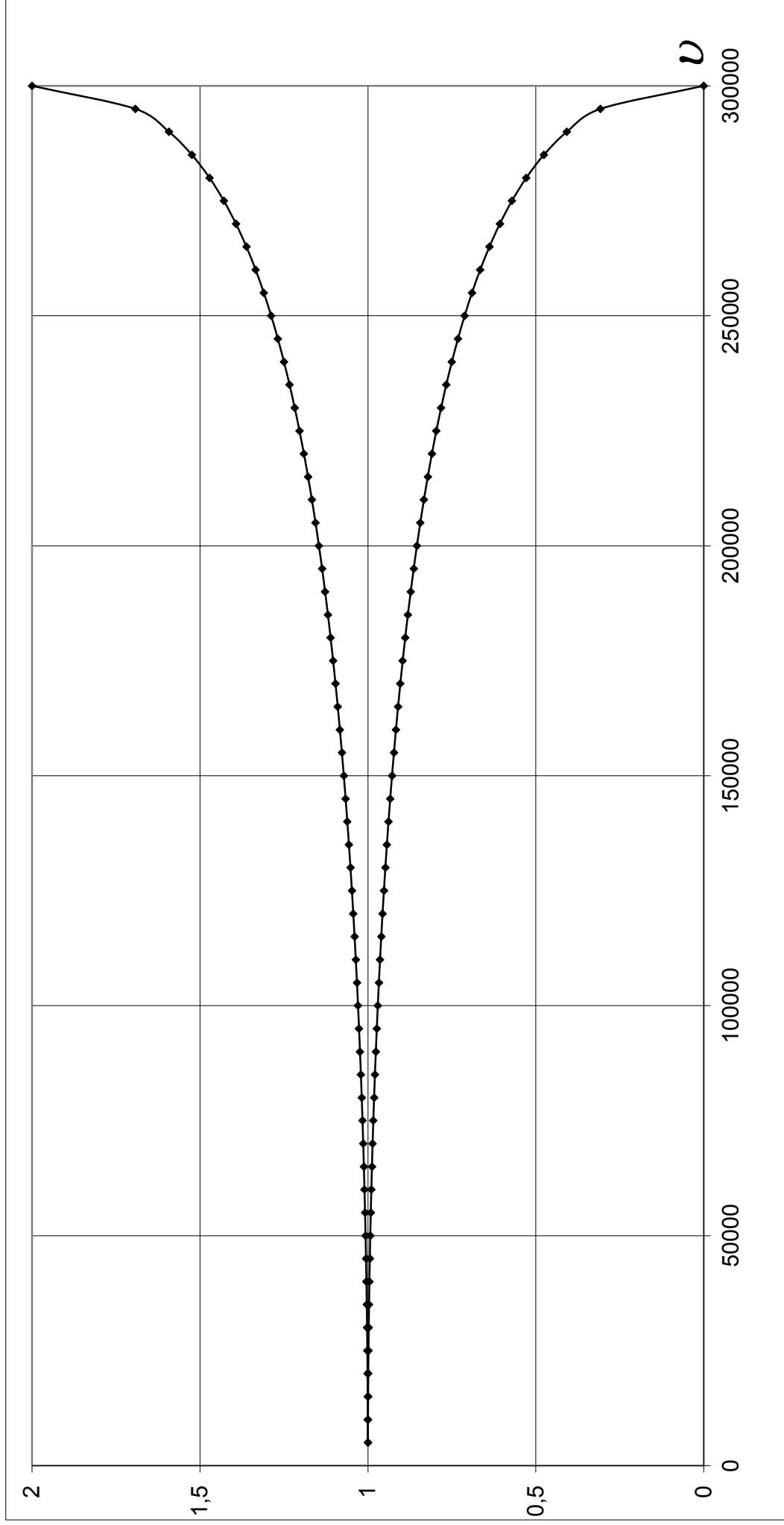
Тобто сила взаємодії паралельних ППС з однаково направленими струмами дорівнює

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \cdot 2\left(1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2}-1}{\beta^2}\right) \quad (\text{Ж.11})$$

Обговорення та більш детальний аналіз формул (Ж.9) та (Ж.11) подано у монографії [35].

Зауважимо лише, що для значень поправочних коефіцієнтів $\left\{\frac{2}{\beta^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\}$ та $\left\{2\left(1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2}-1}{\beta^2}\right)\right\}$ у формулах (Ж.9) та (Ж.11) для антипаралельних і паралельних струмів, відповідно, при $\beta \ll 1$ (що в практичній електротехніці завідомо має місце), розкладаючи в ряд $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$ з великою точністю, одержуємо 1.

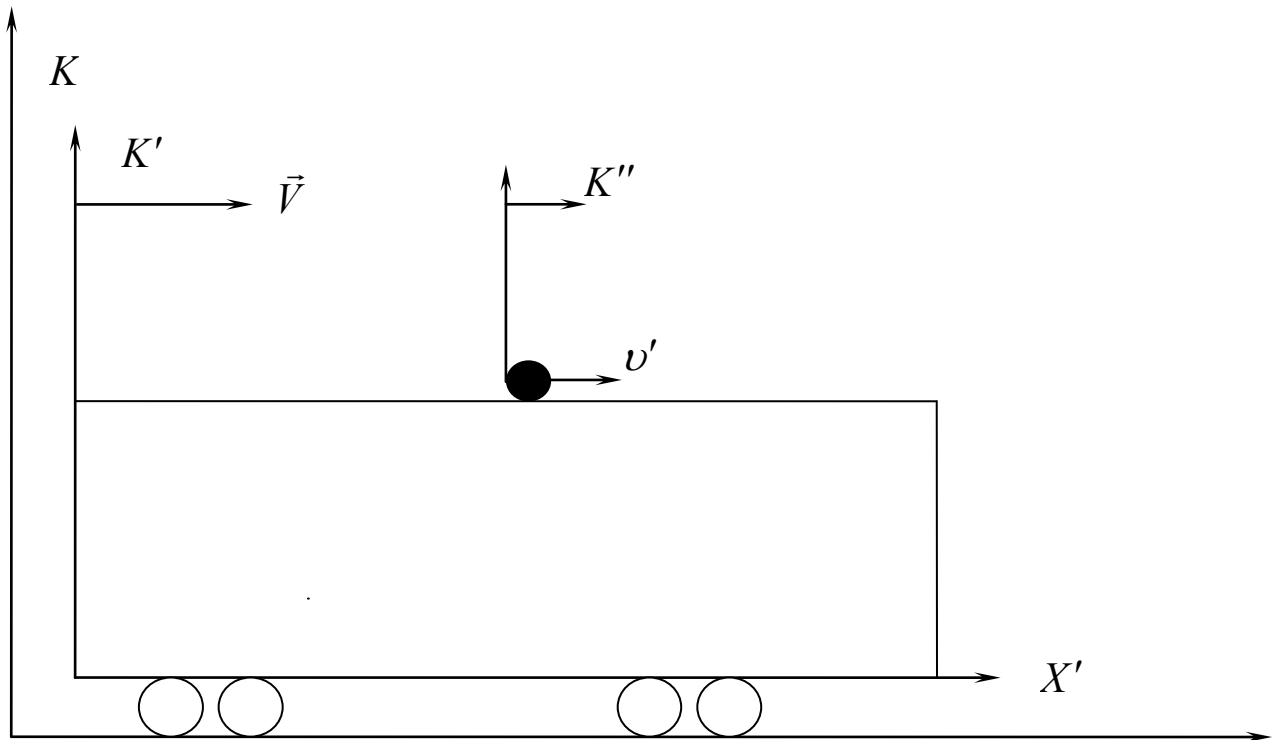
Графіки залежності релятивістських множників $\left\{\frac{2}{\beta^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\}$ та $2\left(1 + \frac{\sqrt{1-\beta^2}-1}{\beta^2}\right)$ від швидкості дрейфу електронів провідності в ППС наведено на мал. Ж.4.



Мал. Ж.4. Графіки функцій $f_{\uparrow\downarrow}(\nu) = \left\{ \frac{2}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \right\}$ (верхня крива), $f_{\uparrow\uparrow}(\nu) = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\beta^2} \right)$ (нижня крива)

Додаток И
Обґрунтування релятивістської формули додавання повздовжньої
складової швидкості за допомогою методу k - коефіцієнта

Припустимо, що деяка частинка рухається вздовж осі $O'X'$ системи відліку K' . СВ K' , як загалом прийнято, рухається рівномірно і прямолінійно вздовж осі OX СВ K , див. Мал. И.1.



Мал. И.1. Частинка має швидкість v' відносно СВ K' . Чому дорівнює її швидкість відносно лабораторної СВ K , якщо K' рухається зі швидкістю \vec{V} вздовж осі OX

Пов'яжемо систему відліку K'' з нашою частинкою, і будемо вважати, що в початку координат кожної із цих трьох систем відліку знаходяться спостерігачі, відповідно, A, A_1, A_2 . Тоді світлові лінії їх будуть зображені на мал. И.2.

OK - Світлова лінія спостерігача A ;

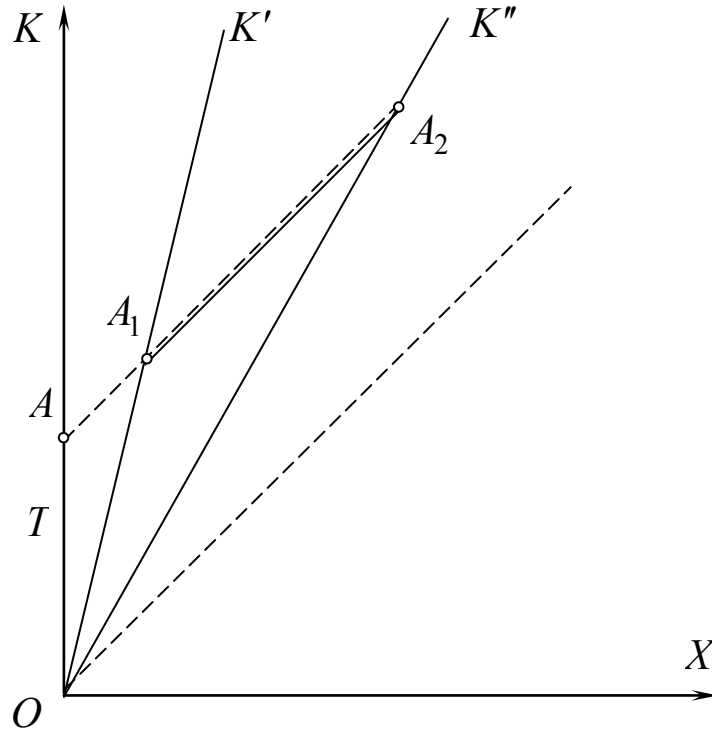
OK' - Світлова лінія A_1 ;

OK'' - Світлова лінія A_2 .

В початковий момент часу, зазвичай, початки координат всіх трьох СВ K та СВ K' та K'' співпадають, і в цей момент часу посилається перший імпульс як до СВ K' так і до СВ K'' . Другий імпульс (і наступні імпульси теж) посилається в момент $t = T$.

Спостерігач A_1 буде приймати два послідовні імпульси через проміжки часу k_1T по своєму годиннику.

В ту мить, коли до A_1 приходить сигнал від A , спостерігач A_1 посилає його далі до A_2 .



Мал. И.2. До обґрунтування формули (5.33) методом k - коефіцієнта та за допомогою діаграми Мінковського

Згідно означення, (іншими словами, згідно методу k - коефіцієнту, див. Розділ 1, п. 1.4) спостерігач A_2 буде приймати послідовність імпульсів від A через проміжки часу k_2T по годиннику СВ K'' .

Але можна вважати, що цей другий (і наступні) сигнал A_2 приймає так начебто вони були послані A_1 (тобто, як тільки до A_1 приходить світловий імпульс від A він, A_1 , відразу миттєво переправляє його до A_2) через проміжки k_1T . Тоді, очевидно, що A_2 буде приймати їх, згідно з означенням, через проміжки $k_{12} \cdot k_1T$ по годиннику СВ K'' , де k_{12} - k - коефіцієнт для спостерігачів A_1 і A_2 . На мал. И.2 лінія AA_1A_2 - світова лінія світлового сигналу від A через A_1 до A_2 .

Таким чином, маємо

$$k_2T = k_{12} \cdot k_1T .$$

Тобто, якщо ми знаємо k - коефіцієнти для двох пар систем відліку, в які входить одна спільна для них система, то можна знайти k - коефіцієнти для двох інших систем відліку, які залишилися.

Це, власне, і видно із мал. И.2. Дійсно, $OA = T$, $OA_1 = k_1 T$, $OA_2 = k_2 T$. Але з іншого боку очевидно, що $OA_2 = k_{12} \cdot OA_1 = k_{12} \cdot k_1 T$.

k - коефіцієнти для будь-якої пари систем відліку визначаються згідно з (1.32):

$$k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

де β дорівнює відношенню відносної швидкості систем відліку до швидкості світла в вакуумі.

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}.$$

Таким чином, якщо ми цікавимося швидкістю частинки відносно СВ K , то

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} = \frac{k_1^2 \cdot k_{12}^2 - 1}{k_1^2 \cdot k_{12}^2 + 1}.$$

Але, згідно з означенням:

$$k_1 = \sqrt{\frac{1 + B}{1 - B}}, \quad k_{12} = \sqrt{\frac{1 + \beta'}{1 - \beta'}},$$

тому одержуємо кінцевий результат:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} = \frac{k_1^2 \cdot k_{12}^2 - 1}{k_1^2 \cdot k_{12}^2 + 1} = \frac{\left(\frac{1 + B}{1 - B}\right) \cdot \left(\frac{1 + \beta'}{1 - \beta'}\right) - 1}{\left(\frac{1 + B}{1 - B}\right) \cdot \left(\frac{1 + \beta'}{1 - \beta'}\right) + 1} = \frac{B + \beta'}{1 + B\beta'}.$$

Отже РФДШ для повздовжньої складової швидкості має вигляд:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

Додаток К
Найважливіші фізичні константи

<i>Величина</i>	<i>Позначення і числове значення</i>
Гравітаційна стала	$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \frac{Нм^2}{кг^2}$
Прискорення вільного падіння (нормальне)	$g_n = 9.80665 \frac{м}{с^2}$
Нормальний атмосферний тиск	$p_0 = 101325 Па$
Стала Авогадро	$N_a = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов	$V = 22.41383 \cdot 10^{-3} \frac{м^3}{\text{моль}}$
Універсальна газова стала	$R = 8.31441 \frac{Дж}{\text{моль} \cdot К}$
Стала Лошмідта	$n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} м^{-3}$
Стала Больцмана	$k = 1.38662 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м} = 1,25663706144 \cdot 10^{-6} \frac{Гн}{м}$
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 0,885418782 \cdot 10^{-11} \frac{Ф}{м}, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}$
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 0,9110953410 \cdot 10^{-27} з = 5,4858026 \cdot 10^4 \text{ а.о.м} \\ 0,511 \text{ MeV} \end{cases}$
Маса протона	$m_p = 1.6726485 \cdot 10^{-27} кг = 1,007276470 \text{ а.о.м}$
Маса нейтрона	$m_n = 1.6749543 \cdot 10^{-27} кг = 1,008665012 \text{ а.о.м}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} кг$ (відповідає енергії $\cdot 931,3 \text{ MeV}$)
Елементарний заряд	$e = \begin{cases} 1,6021892 \cdot 10^{-19} Кл \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ} \end{cases}$

Відношення заряду електрона до його маси	$\frac{e}{m_e} = 1.7588047 \cdot 10^{11} \frac{Кл}{кг}$
Стала Фарадея	$F = 9.648456 \cdot 10^4 \frac{Кл}{моль}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с$
Стала Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 К^4}$
Стала Віна	$b = 0,00289782 м \cdot К$
Стала Ридберга	$R_\infty = 10973731,77 м^{-1}$
Борівський радіус	$a_0 = 0,52917706 \cdot 10^{-10} м$

Деякі позасистемні одиниці

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см.}$$

$$1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж} = 4,1868 \cdot 10^7 \text{ ерг} (1 \text{ Дж} = 0,2388 \text{ кал}).$$

$$1 \text{ мм.рт.ст.} = 133,3 \text{ Па} = 1333 \text{ дин} / \text{см}^2.$$

$$1 \text{ рік} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с.}$$

$$1 \text{ св.рік} = 9,5 \cdot 10^{17} \text{ см.}$$

$$1 \text{ eV} = \begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \\ 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \end{cases}.$$

$$1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931,5 \text{ MeV} \end{cases}$$

Навчальне видання

КОНОВАЛ Олександр Андрійович

Основи спеціальної теорії відносності

Навчально-методичний посібник
для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів

Формат 60×84/16. Ум. др. арк. 15,87. Обл.-вид. арк. 14,33. Тираж 100 пр.

Видавець Р. А. Козлов
вул. Рокоссовського, 5/3, м. Кривий Ріг, 50027
(0564) 92-20-77

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4514 від 01.04.2013 р.

Друкарня С. Г. Щербенка
вул. Рокоссовського, 5/3, м. Кривий Ріг, 50027
097-192-20-77

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4561 від 13.06.2013 р.