

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра фізики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри

_____ Коновал О. А.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Реєстраційний № _____

Протокол № _____

« _____ » _____ 2019 р.

« _____ » _____ 2019 р.

ОСОБЛИВОСТІ РУХУ МОТУЗОК І ЛАНЦЮГІВ У ГРАВІТАЦІЙНОМУ ПОЛІ
ЗЕМЛІ

Магістерська робота студентки
групи ФІ-м-14
Освітньо-кваліфікаційний рівень:
другий рівень вищої освіти
Спеціальності:
014. 08 Середня освіта (Фізика)
Додаткова спеціальність:
014. 09 Середня освіта (Інформатика)
Чеснокової Дарії Андріївни
Керівник: доктор технічних наук,
професор **Здешиц В. М.**

Оцінка:
Національна шкала _____
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Члени комісії _____
(підпис) (прізвище та ініціали)

(підпис) (прізвище та ініціали)

(підпис) (прізвище та ініціали)

(підпис) (прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

Чеснокова Д. А. Особливості руху мотузок і ланцюгів у гравітаційному полі Землі. – Кривий Ріг, 2019. 75 с.

З метою доведення нетривіальної тези, що падіння тіла з певної висоти не може обмежуватися розглядом лише задач стосовно матеріальної точки або руху тіла по певній замкненій траєкторії. Виявляється, що падіння прив'язаного тіла, а саме, тіл з розсередженою масою, є досить непростою задачею, але напрочуд необхідною не тільки з теоретичної точки зору, але і з практичного застосування, наприклад будівництво, промисловість ітд.

Формулювання проблеми. Дослідити рух тіл з розсередженою масою, сформулювати основні теоретичні засади, провести експерименти та довести необхідність долучення даної теми до курсу загальної фізики: класична механіка.

Матеріали і методи. Робота носить теоретичний та прикладний характер. В процесі дослідження було опрацьовано багато наукових джерел, які якимось чином освітлювали дану тему, проаналізовано закони класичної механіки та формули для опису падіння тіл. Поставлена проблема вирішувалася за допомогою розроблених дослідницьких установок, параметри процесів в яких були теоретично обґрунтовані.

Результати. Основним результатом роботи є отримання результатів, які свідчать про неточність вже відомих нам формул, щодо дослідження прискорення вільного падіння, розглянуто характер руху тіл з розсередженими масами, які наштовхують на необхідність переогляду даної теми. Показано, що кожний студент, та навіть учень, може провести подібні досліди самостійно, маючи лише смартфон з можливістю уповільненої зйомки, та базові знання щодо обробки результатів у відповідних програмах.

Висновки. Доведено, що теоретичні викладки при розгляді будь-якого фізичного явища можна зупинятися лише тоді, коли теоретично отримані залежності повністю узгоджуються з результатами експериментів.

Показані експериментальні установки, які дозволяють провести дослідження та отримати відповідні результати самостійно.

Ключові слова: прискорення вільного падіння, закони Ньютона.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ПАДІННЯ ЗВ’ЯЗАНИХ КУЛЬ У ПОВІТРІ.....	7
1.1. Фізичний аналіз законів падіння тіл у повітрі.....	7
1.2. Експериментальні дослідження падіння куль у повітрі.....	13
1.2.1. Реєстрація вільного падіння кульки	13
1.2.2. Дослідження впливу опору повітря на рух тіла.....	15
Висновки до розділу 1	23
РОЗДІЛ 2. МЕХАНІКА ЛАНЦЮГІВ	24
2.1. Енергетика «вільного падіння» прив’язаного тіла	25
2.2. Аналіз падіння складеного ланцюга із залученням законів Ньютона.....	28
2.3. Експериментальне визначення прискорення падіння тіл	38
Висновки до розділу 2	44
Розділ 3. Фонтани із бус	45
3.1. Сили інерції та фонтануючі ланцюги.....	45
3.2. Задачі про фонтануючі ланцюги	56
3.2.1. Фізика батога	59
3.2.2. Підвісні мости.....	63
3.3 Експериментальне дослідження явища «фонтануючого ланцюга»	67
Висновки до розділу 3	71
ВИСНОВКИ	72
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	73

ВСТУП

Є цілий ряд "простих" питань, які ставлять школярів та студентів в глухий кут. Здавалося б, очевидний факт: історія щодо експериментів Галілея на Пізанській вежі увійшла в науковий фольклор, про це написано в самих різних підручниках.

Через недосконалість вимірювального обладнання того часу вільне падіння тіл вивчати було майже неможливо. Зараз же кожен школяр може зняти відео падіння тіла в уповільненому темпі (режим *slow motion*) і експериментально визначити яке тіло впаде швидше. Чому ж на питання: яка із сполучених мотузкою кульок однакового діаметра впаде швидше - легка чи важка - більшість людей інтуїтивно відповість - важка! І, головне, будуть на перший погляд праві!

З іншого боку зв'язані мотузкою тіла є елементом будь-якого ланцюга, що складається з елементарних ланок, які при певних обставинах можна вважати матеріальними точками, що мають масу. Тому всякого роду троси, мотузки, дроти, павутинки, батоги можна віднести до класу ланцюгів - об'єктів з розосередженою масою.

При вивченні механіки в вступному курсі спираються, в основному, на кінематику і динаміку матеріальної точки. Протяжні тіла розглядаються в розділі "Статика" і при викладанні динаміки обертального руху твердого тіла. Виділяти клас завдань за участю ланцюгів, тобто об'єктів з розподіленими масами, не прийнято. Тому "прості" питання з провисання, обертанням, падінням ланцюгів ставлять студентів в глухий кут. Наприклад, важко отримати чітку відповідь на питання: яка з кульок, які перебувають у вакуумі на одній і тій же висоті впаде на підлогу швидше - важка вільна або легка, але прив'язана довгою мотузкою до перекладині?

Мета і завдання дослідження: виконати аналіз існуючих джерел, щодо падіння тіл різних мас; розробити функціональні схеми пристроїв, для проведення експериментів.

Об'єкт дослідження – об'єктом дослідження є вільне падіння тіл у полі тяжіння Землі.

Предмет дослідження: закони падіння прив'язаного тіла, закони Ньютона.

Методи дослідження. Робота носить теоретичний та прикладний характер. Методологічно робота базувалася на відомих законах механіки та збереження енергії, а її основні науково-практичні результати отримані з використанням відеореєстрації та цифрових технологій обробки результатів експериментів.

Наукова новизна отриманих результатів роботи полягає у тому, що не були проведені експерименти, які б змогли підтвердити або спростувати існуючі знання, щодо падіння тіл змінних мас.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів, висновків і рекомендацій забезпечуються відтворюваністю результатів роботи; погодженістю основних теоретичних положень і даних експериментальних досліджень; коректною обробкою результатів експериментальних досліджень.

Практичне значення отриманих результатів полягає в переосмисленні існуючих знань, щодо падіння тіл у полі тяжіння Землі, а саме експериментальне дослідження падіння тіл з розсередженою масою.

Особистий внесок автора роботи полягає в тому, що сформульовано задачу, визначено мета, спосіб її досягнення та отримані експериментальні дані, аналіз яких дозволив одержати нові знання щодо характеристики руху тіл з розсередженою масою.

Апробація роботи. Результати досліджень доповідалися й обговорювалися на кафедрі фізики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету, а також були використані для написання статті.

РОЗДІЛ 1. ПАДІННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ КУЛЬ У ПОВІТРІ

1.1. Фізичний аналіз законів падіння тіл у повітрі

Задаймося питанням: які закони виконуються при русі куль однакових розмірів, але з різними масами, у повітрі?

Нехай перша кулька має масу m_1 , а друга $m_2 > m_1$. З'єднані кулі нехай будуть нерозтяжною ниткою, масою якої можна знехтувати, і довжина якої значно перевищує діаметри кульок. Відпустимо кулі одночасно з одного і того ж рівня. Як відомо, на кулі буде діяти сила тяжіння і сила опору повітря F (рис. 1.1).

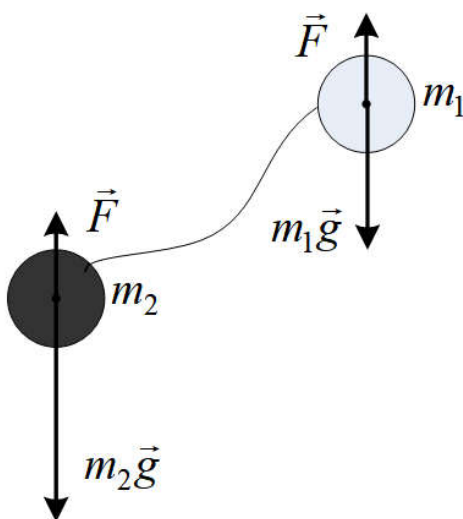


Рис. 1.1. Розрахункова схема

Застосуємо до кожної кульки другий закон Ньютона, записаний в проекції на вісь руху:

$$\begin{aligned} m_2 g - F &= m_2 a_2, \\ m_1 g - F &= m_1 a_1. \end{aligned}$$

Прискорення куль будуть

$$a_2 = g - \frac{F}{m_2},$$

$$a_1 = g - \frac{F}{m_1}.$$

Оскільки $m_2 > m_1$, то прискорення $a_2 > a_1$ і важка кулька буде обганяти легку кульку до тих пір, поки нитка, що пов'язує їх, не натягнеться. Таким чином, кульки далі падатимуть з однаковою швидкістю, причому важка кулька буде перебувати нижче.

Швидкість зв'язки з плином часу буде збільшуватися, а разом з нею і сила опору, яка, врешті-решт, врівноважить силу тяжіння. Прискорення стане рівним нулю. [2]

Доведемо це твердження. Для цього розглянемо задачу про падіння кульки в повітрі з малою, порівняно з радіусом Землі, висоти. Тоді діючу на тіло силу тяжіння \vec{P} і густину повітря ρ можна вважати величинами постійними. Вважаємо, що при падінні тіло рухається строго вертикально. Висота Пізанської вежі, як відомо, 56,7 метрів. Час вільного падіння тіла в вакуумі $t_{free} = 3,4$ с, а швидкість біля підніжжя вежі буде $v_{vak} \approx 33,35$ м/с.

Запишемо другий закон Ньютона для рухомої кульки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}, \quad (1.1)$$

де \vec{F} - сила опору повітря.

На початку руху (при малих швидкостях кульки)

$$F = 6\pi\nu\eta r,$$

де r - радіус кульки, ν - швидкість кульки, η - в'язкість повітря.

Лінійна залежність сили Стокса F від швидкості кульки спостерігається експериментально [17] до значень числа Рейнольдса

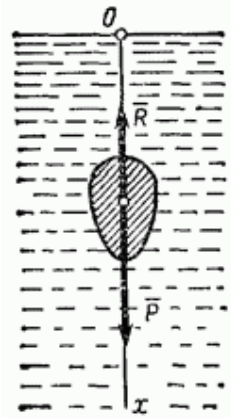
$$Re = \rho\nu d / \eta \approx 1,$$

тобто до швидкостей $\nu \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$ м/с при діаметрі кульки $d=10$ мм. Таким чином, ламінарний плин середовища зміниться на турбулентний протягом $t \sim 0,14$ мс, що значно менше $t_{free} = 3,4$ с. Сила будь-якого опору в

подальшому буде описуватися законом Ньютона для тіл, що рухаються у в'язкому середовищі:

$$F = c_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

де $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$ – густина повітря, c_x - коефіцієнт опору, який залежить від форми балісти і числа Рейнольдса (для кулі мінімальне значення $c_x = 0,25$), $S = \pi d^2 / 4$ - площа поперечного перерізу кулі.



Направивши координатну вісь Ox вертикально вниз (рис. 1.2), знайдемо, як буде змінюватися швидкість падіння в залежності від пройденого шляху x , вважаючи, що рух починається з точки O та $v_0 = 0$.

Згідно з другим законом Ньютона:

Рис. 1.2

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = \frac{P}{g} v_x \frac{dv_x}{dx} = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v_x^2. \quad (1.2)$$

Якщо ввести позначення $v_x = v$, $\frac{2mg}{c_x \rho S} = k^2$, то рівняння (1.2) набуде

вигляду:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right),$$

або після поділу змінних

$$-\frac{v dv}{k^2 - v^2} = -\frac{g}{k^2} dx.$$

Взявши від обох частин рівності інтеграл, отримаємо

$$\ln(k^2 - v^2) = -2 \frac{g}{k^2} x + C_1.$$

За початковими даними коли $x = 0$ швидкість $v = 0$, отже, $C_1 = \ln k^2$

Підставляючи це значення C_1 отримаємо

$$\ln\left(\frac{k^2 - v^2}{k^2}\right) = -2\frac{g}{k^2}x$$

або

$$\frac{k^2 - v^2}{k^2} = e^{-\frac{2g}{k^2}x}.$$

Звідси остаточно знаходимо

$$v = k\sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{k^2}x}}. \quad (1.3)$$

Ця формула виражає закон зміни швидкості падаючого в повітрі тіла в залежності від пройденого шляху.

Із зростанням x швидкість падіння зростає, прямує до постійної величини k , яка називається граничною швидкістю падіння:

$$v_{zp} = \sqrt{\frac{2mg}{c_x \rho S}}. \quad (1.4)$$

Отже, при $v_0 = 0$ падаюче в повітрі тіло не може отримати швидкості, більшої, ніж v_{zp} . Гранична швидкість падіння зростає зі збільшенням маси тіла і зі зменшенням величин c_x , ρ , S . Наприклад, для сталеві кульки діаметром 10 мм величина граничної швидкості $v_{zp} \approx 0,52$ м/с, тобто досягнути такої швидкості як у вакуумі $v_{вак} \approx 33,35$ м/с кулька не може.

Відшукаємо, як швидко швидкість падаючого тіла наближається до граничної. Для цього звернемося до рис. 1.3, на якому наведена залежність

величини $Y = \frac{v}{v_{zp}}$ від $X = \frac{g}{v_{zp}^2}x$:

$$Y = \sqrt{1 - e^{-X}}.$$

З графіка випливає, що при $X = 2$ досягається швидкість $v = 0,93v_{sp}$. Для кульки діаметром 10 мм $v_{sp} = 0,52\text{м/с}$ досягається вже через $x = \frac{2v_{sp}^2}{g} = 5,5\text{ см}$ після старту. Далі кулька буде рухатися без прискорення. Важливо, що граничні швидкості кульок залежать від маси, тому *більш важка кулька буде деякий час віддалятися від легкої кульки поки не натягнеться нитка, що пов'язує їх*. Тоді вихідні рівняння руху будуть виглядати так:

$$\begin{aligned} m_2 g - T - F &= 0, \\ m_1 g + T - F &= 0. \end{aligned}$$

Сила натягу нитки буде дорівнювати:

$$T = \frac{(m_2 - m_1)g}{2}.$$

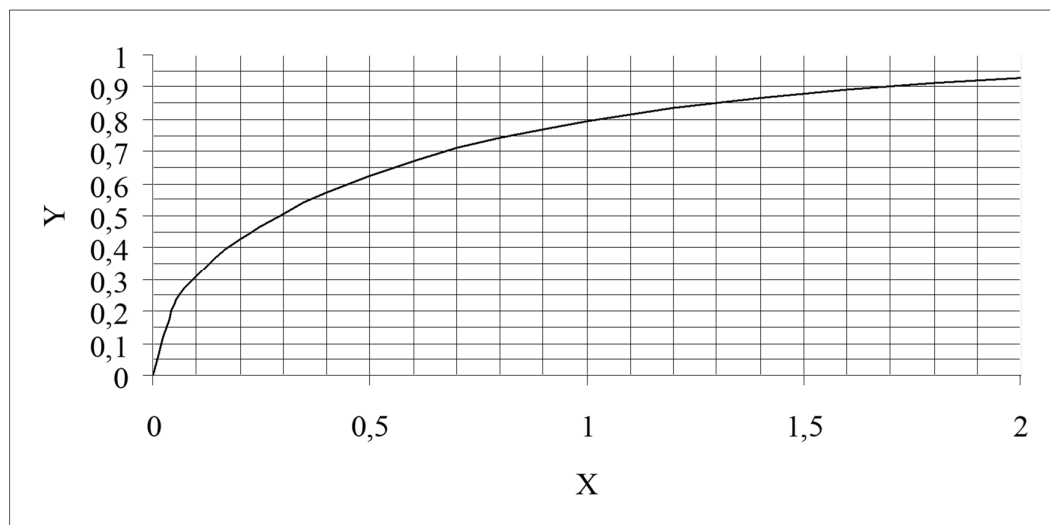


Рис. 1.3. Графік залежності $Y = \frac{v}{v_{sp}}$ від $X = \frac{g}{v_{sp}^2} x$

Отже, результатом розв'язання поставленої задачі є доведення того факту, що при однакових розмірах першою землі торкнеться більш важка кулька. А тому, ситуація (Галілей не правий!?) повинна застерегти будь-якого фізика від спокуси просто і елементарно пояснювати процес

падіння тіла без обґрунтування припущень і моделей, що лежать в основі його пояснення.

1.2. Експериментальні дослідження падіння куль у повітрі

1.2.1. Реєстрація вільного падіння кульки

Для калібровки реєстратора часу (смартфона) корисно на першому етапі зафілювати процес вільного падіння кульки. В режимі 960 кадрів/с запис триває 0,25 секунд. За цей час кулька пролітає шлях $h = \frac{gt^2}{2} = 30,6$ см. Тобто для постановки дослідів знадобиться приладдя: 30 см лінійка, кулька на нитці, запальничка. Вигляд дослідної установки наведено на рис. 1.4.

Результати дослідів відображено на графіку рис. 1.5, який побудований за допомогою Excel. [4] Висхідні дані залежності шляху падіння кульки від



часу отримані з покрокового спостереження уповільненого руху кульки на тлі лінійки на екрані комп'ютерного програвача. Апроксимація експериментальних точок трендовою лінією дозволяє підтвердити квадратичну залежність шляху від часу. Коефіцієнт при t^2 у рівнянні апроксимації є $g/2$. Тобто прискорення, з яким рухається сталеві кулька, дорівнює $9,81$ м/с², як і повинно бути при вільному падінні тіла. Величина достовірності апроксимації для сталеві кульки складає при цьому $R^2 = 0,9991$.

Отже, після калібровки – одержання номінальної величини прискорення вільного падіння – можна виконувати дослідження впливу опору повітря на рух тіла.

Рис. 1.4. Установка для дослідження вільного падіння кульки

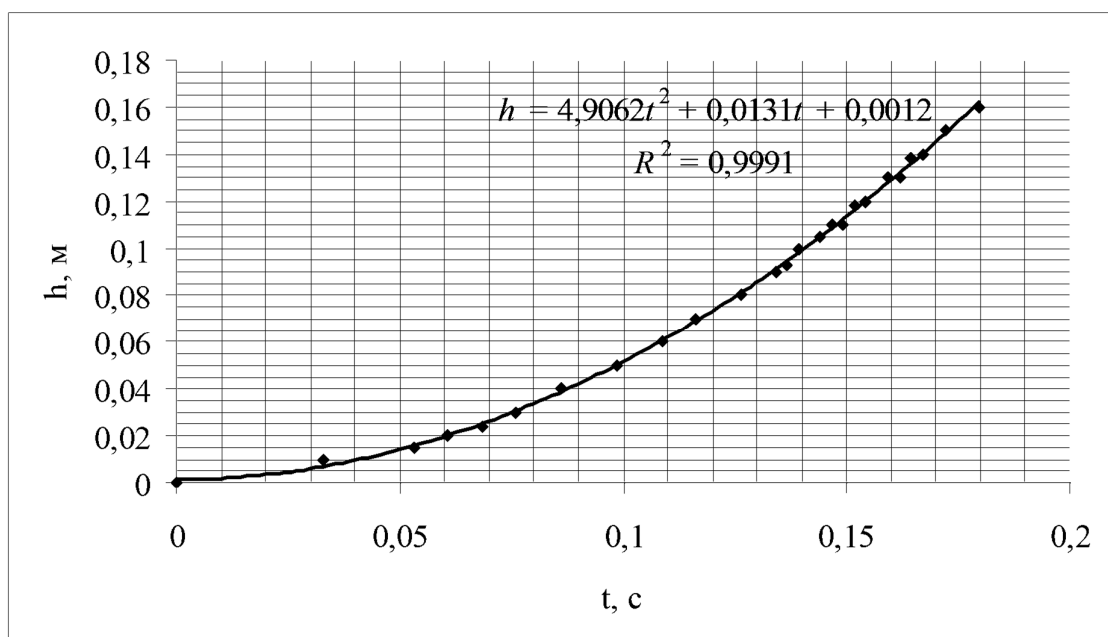


Рис. 1.5. Експериментальний графік залежності шляху падіння сталеві кульки масою 117 г діаметром 30 мм від часу

1.2.2. Дослідження впливу опору повітря на рух тіла

Для дослідження руху кульок в умовах опору повітря була виготовлена експериментальна установка, яка складалася зі стартових електромагнітів, встановлених на вершині вертикальної лінійки. Для дослідів використовувалися дві пари кульок. Кульки першої пари були виготовлені з пінопласту діаметром 8 см, вага однієї з кульок складала 11 г, а іншої – 56 г за рахунок того, що всередину був вставлений сталевий циліндр. Другу пару складали пластмасові кульки від пінг-понга діаметром 30 мм, які мали однакий об'єм, але різну масу: $m_1 = 35$ г, $m_2 = 6,5$ г. Одна з кульок була заповнена водою, а інша порожня. До кульок приклеювалися невеликі сталеві диски, завдяки яким кульки утримувались магнітами у верхньому стартовому положенні (рис. 1.6).

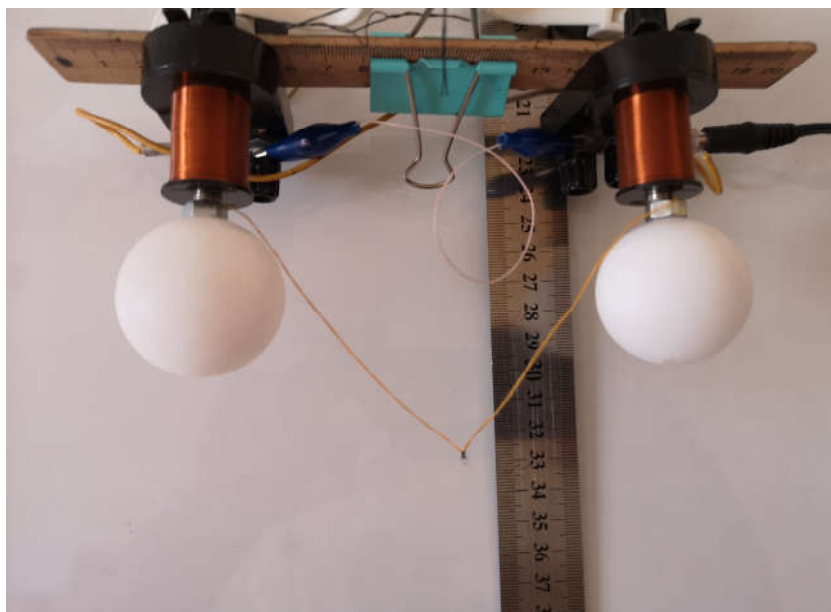


Рис. 1. 6. Стартова позиція кульок

Різниця в діаметрах кульок першої та другої пар дозволяла простежити залежність опору повітря від діаметра кульок. Реєстрація руху кульок велась

за допомогою смартфона Huawei 20 Pro у режимі slow motion (сповільнена зйомка з частотою 960 кадрів / с).

Як показав аналіз відеокадрів більш важка кулька відривається раніше легкої кульки (рис. 1.7).

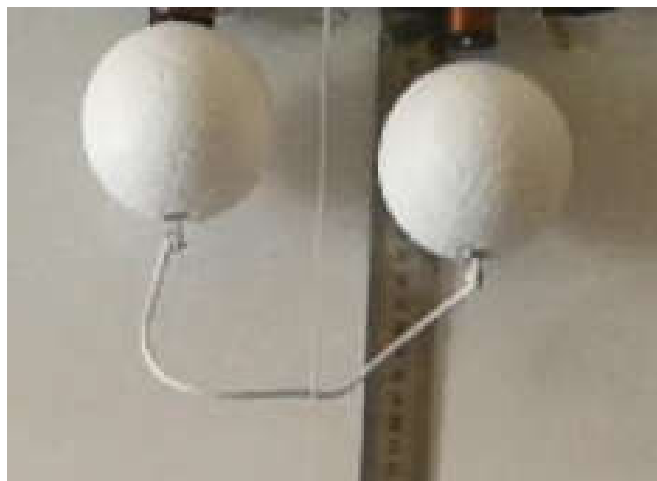


Рис. 1.7. Перші миті руху кульок після виключення струму в колі електромагнітів

Тому для здійснення одномоментного старту кульок була вибрана інша схема пуску (рис. 1. 8).

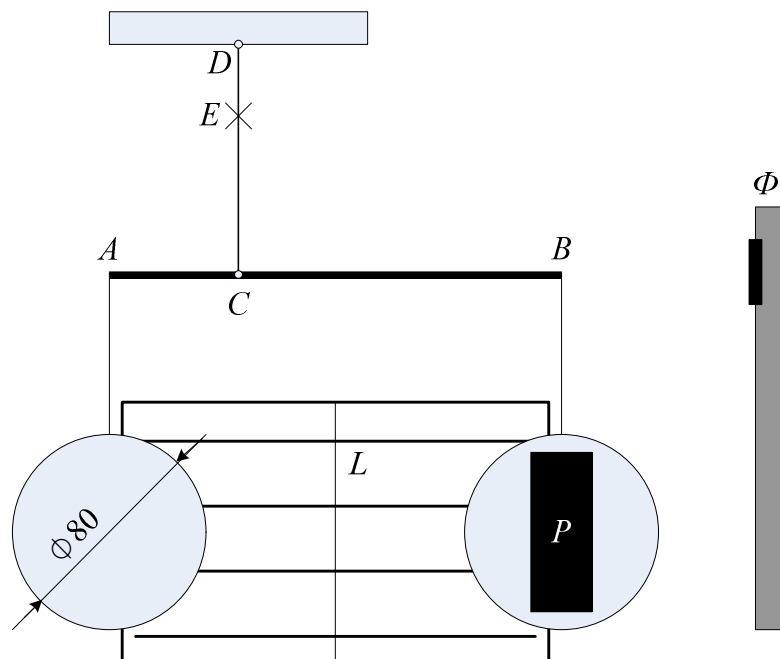


Рис. 1.8. Постановка дослідів: A, B – точки підвісу пінопластових куль, AB – тонка паличка, P – важок, C – центр мас, D – точка підвісу системи кульок, E – місто підпалювання нитки CD , L – лінійка, Φ – смартфон

Кульки чіплялися нитками до перекладки, а перекладка у свою чергу чіплялася у точці C , де знаходиться центр ваги, до нерухомої опори. Під час старту нитка CD перепалювалася вогником [5].

Для визначення величини впливу сили опору повітря на рух пінопластових кульок були використані кульки діаметром $\text{Ø}80$ мм (6 г), $\text{Ø}70$ мм (3 г), $\text{Ø}50$ мм (1 г). Типові результати дослідів наведено на рис. 1.9. Видно, що більш важка куля (співвідношення мас: $m_1 : m_2 : m_3 = 6 : 3 : 1$) переганяє на дистанції падіння 47 см більш легкі, хоча співвідношення сил повітряного опору залежить від площин перерізу кульок, які дорівнюють:

$$S_1 : S_2 : S_3 = 2,56 : 1,96 : 1.$$

Фото падіння однакових за розміром (діаметром $\text{Ø}80$ мм), але різних за масою ($m_1 : m_2 = 5,1 : 1$), пінопластових кульок наведено на рис. 1.10.

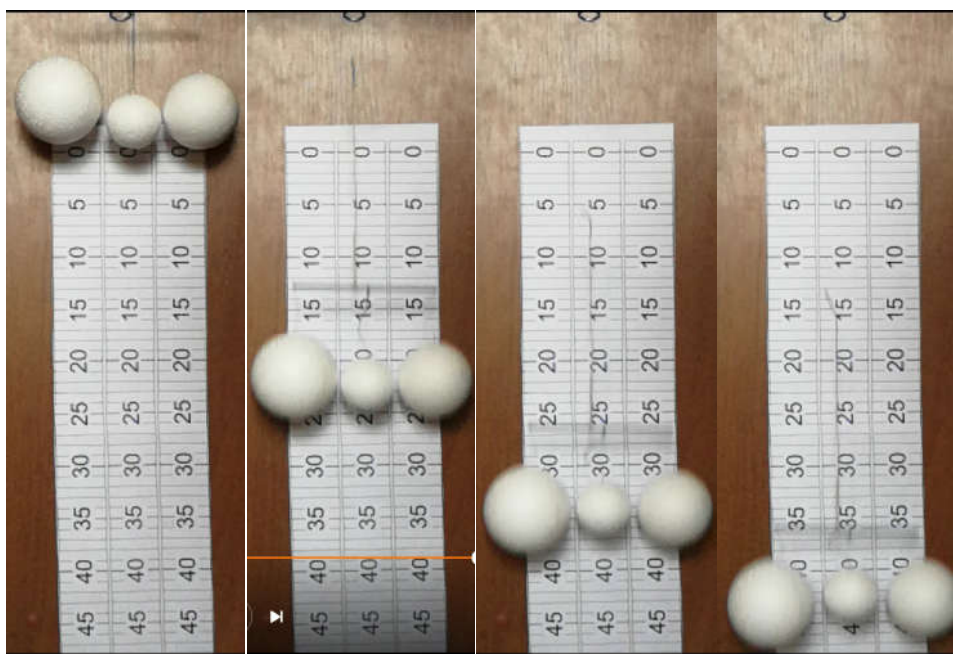


Рис. 1.9. Більш важка кулька (6 г, \varnothing 80 мм) переганяє більш легкі (3 г, \varnothing 70 мм) та (1 г, \varnothing 50 мм) на дистанції 47 см на 8 мм та 22 мм відповідно

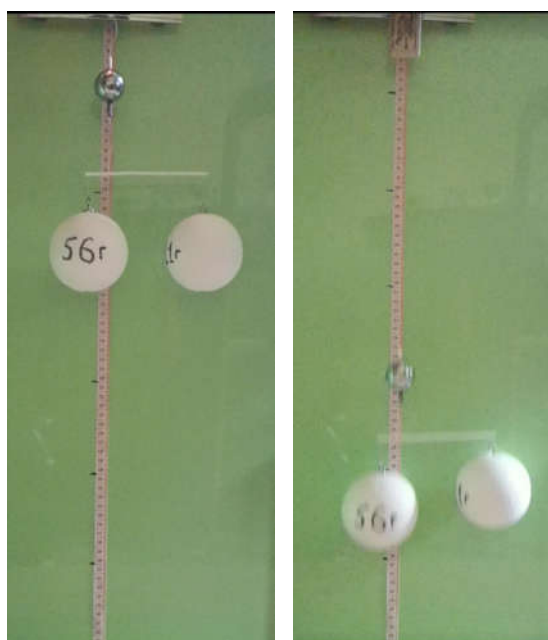


Рис. 1. 10. Фото відставання легкої кульки (11 г) від важкої (56 г)

Як видно, важка пінопластова кулька пролетіла шлях 30 см і випереджає легку кульку на дистанції 0,3 м на 2 см. За той же час сталева кулька пододала шлях 32 см. Графіки руху кульок наведено на рис. 1.11.

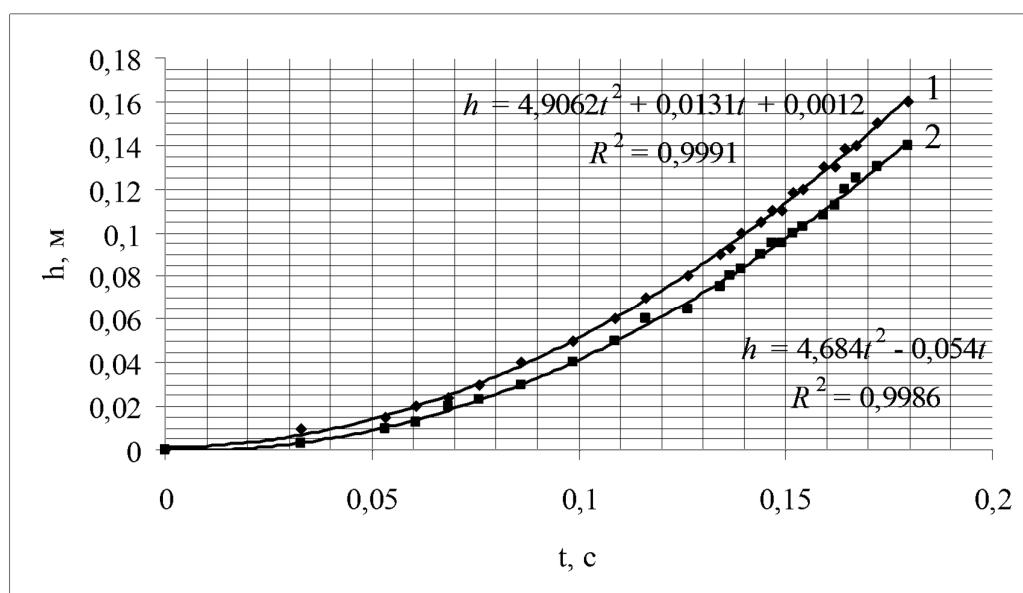


Рис. 1.11. Графіки руху сталевої (1) та пінопластової (2) кульок у повітрі

Для більш ретельного вивчення руху 11 г пінопластової кульки діаметром 8 см в повітрі і порівняння з майже вільним рухом важкої сталевої 117 г кульки діаметром 3 см був поставлений дослід, постановка якого наведена на рис. 1.12, а результати відображені на графіках рис. 1.13.

Зауважимо, що коефіцієнти при t^2 у рівняннях апроксимації є $g/2$. Тобто прискорення, з яким рухається сталева кулька, дорівнює $9,81 \text{ м/с}^2$, як и повинно бути при вільному падінні тіла, а прискорення, з яким рухається пінопластова кулька, дорівнює $9,36 \text{ м/с}^2$. Величина достовірності апроксимації для сталевої кульки складає $R^2 = 0,9991$, пінопластової кульки $R^2 = 0,9986$.

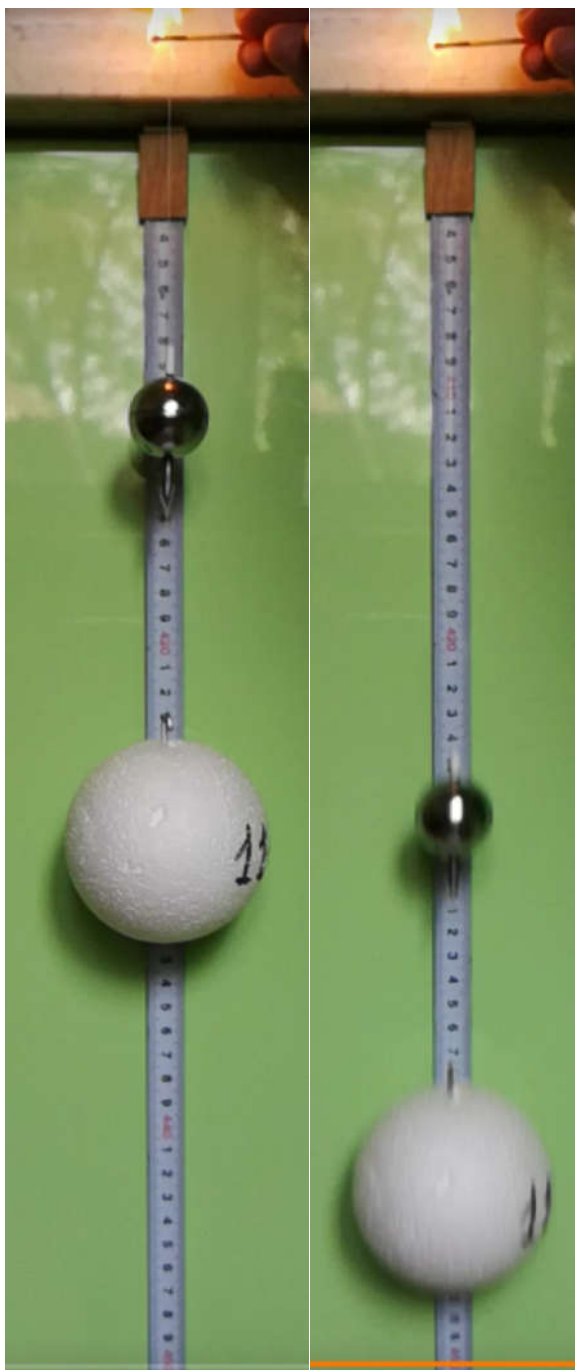


Рис. 1.12. Фото різних фаз падіння кульок: ліворуч - стартова позиція, праворуч - сталеву кулька пододала шлях 165 мм, пінопластова кулька (11 г) – 145 мм

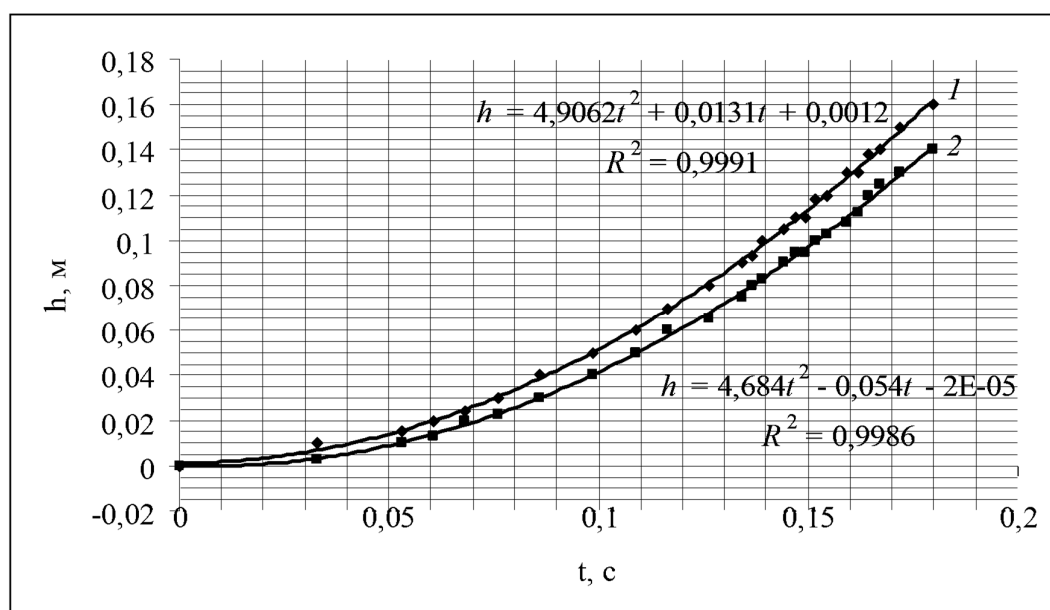


Рис. 1.13. Графіки руху сталевій (1) та пінопластовій (2) кульок у повітрі

Фото падіння однакових за розміром (діаметром $\varnothing 30$ мм), але різних за масою кульок від пінг-понгу ($m_1 : m_2 = 5,4 : 1$), наведені на рис. 1.14.

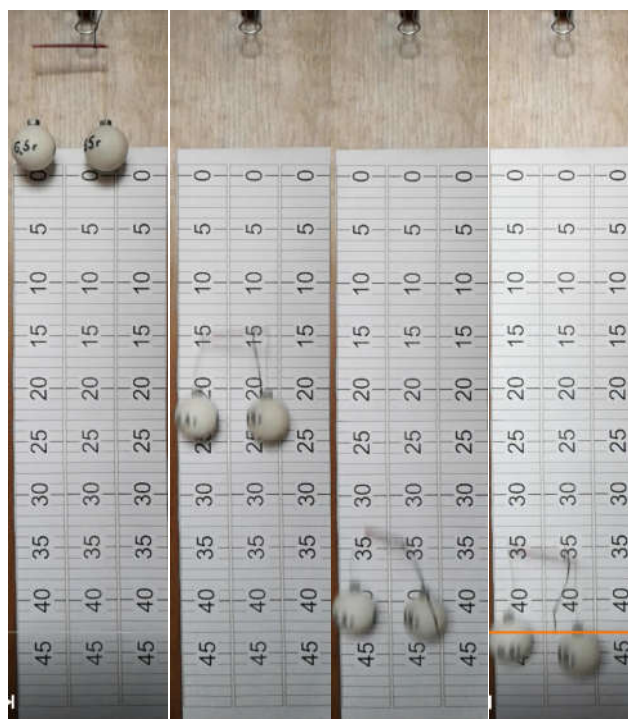


Рис. 1.14. Досліди з кульками від пінг-понгу

Як видно, більш важка кулька з водою (35 г) переганяє легку (6,5 г) на 1 см на дистанції падіння 47 см. Графіки падіння пінопластових кульок діаметром 70 мм масою 42 г і 2 г наведено на рис. 1.15. Ці досліди повністю підтверджують висновки теорії, яка представлена в розділі 1.1.

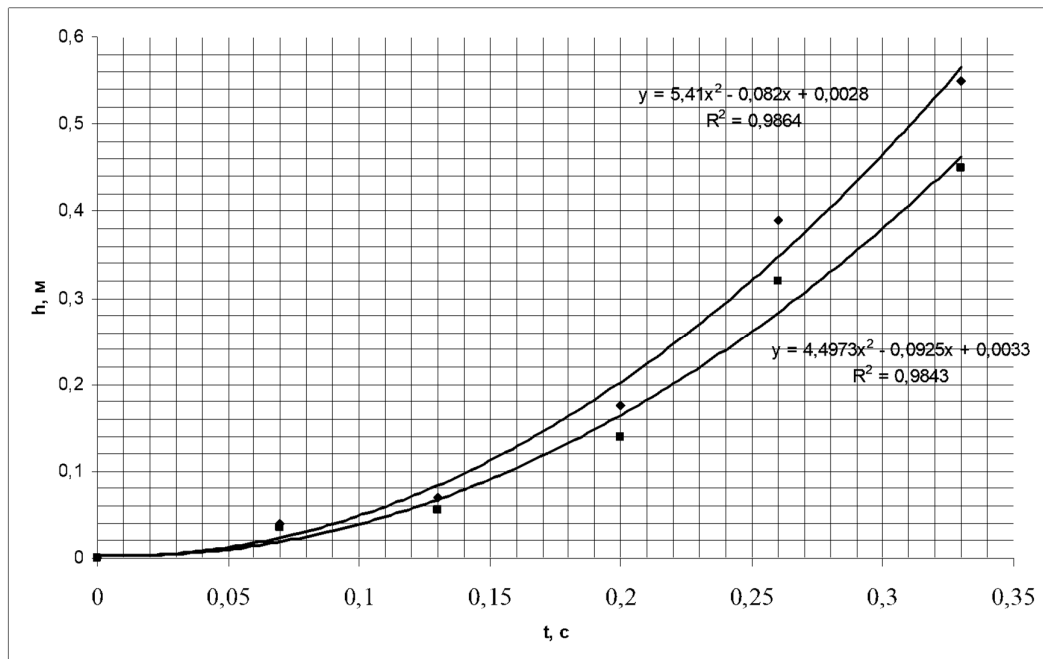


Рис. 1.15. Графіки падіння пінопластових кульок діаметром 70 мм масою 42 г і 2 г

Висновки до розділу 1

При реальних фізичних рухах тіл у газах або рідині тертя накладає величезний відбиток на характер руху. Кожен розуміє, що предмет, скинутий з великої висоти (наприклад, парашутист, який стрибнув з літака), зовсім не рухається рівноприскорено, так як у міру набору швидкості зростає сила опору середовища. Навіть цю, відносно нескладну задачу не можна розв'язати засобами «шкільної» фізики; таких завдань, які представляють практичний інтерес, дуже багато.

Тож, отримані результати, під час проведення експерименту, щодо падіння тіл різної маси, падіння прив'язаного та не прив'язаного тіла, дали змогу не тільки теоретично обґрунтувати закони руху тіла. Розроблені функціональні схеми демонструють характер руху тіл. Вперше експериментально доведено, що прискорення прив'язаної кульки більше прискорення вільного падіння. Достовірність отриманого результату забезпечується відтворюваністю даного явища, узгодженістю теорії і результатів експериментальних досліджень. Графіки (1.11) та (1.13) демонструють експериментальне підтвердження даних явищ.

Наукове значення отриманих результатів полягає в отриманні нового знання щодо законів вільного падіння тіл.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці новітньої установки для демонстрації кінематичних законів, а також оцінки величини відхилення від вертикалі при падінні балісти у повітрі.

РОЗДІЛ 2. МЕХАНІКА ЛАНЦЮГІВ

Отримаємо тепер відповідь на питання: з яким прискоренням падатиме вільний кінець ланцюжка, прив'язаного іншим кінцем до нерухомої перекладині. Перефразовуючи, задаймося питанням, яка з кульок, які перебувають у вакуумі на одній і тій же висоті впаде на підлогу швидше - вільна або прив'язана довгою мотузкою до перекладини, з якої вони стартували без початкової швидкості?

2.1. Енергетика «вільного падіння» прив'язаного тіла

Розгляд поставленого питання проводився багатьма дослідниками. Найбільш доступна інформація є, наприклад, в роботі [1].

Постановка задачі. Нехай кулька масою M утримується на рівні перекладини високо над поверхнею землі. До кульки прив'язаний канат масою m і довжиною l , другий кінець якого закріплений на перекладині. У початковий момент канат звішується з перекладини так, як це показано на рис. 2. 1.

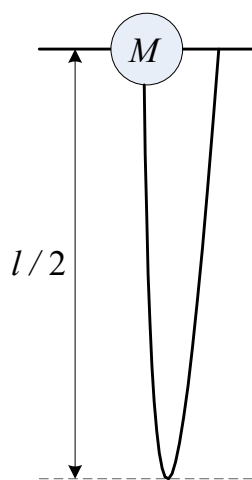


Рис. 2. 1

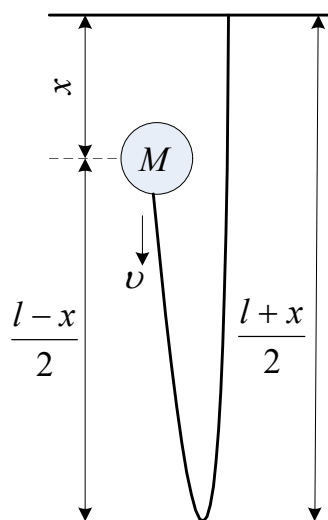


Рис. 2. 2

Потім його відпускають, і через деякий час воно виявляється на відстані x під поперечиною, як це зображено на рис. 2. 2. Знайдемо швидкість кульки в цей момент, виходячи з закону збереження механічної енергії. Опором повітря нехтуємо.[6]

До того, як тіло почало падати, механічна енергія системи «тіло-канат» щодо рівня перекладини дорівнювала потенціальної енергії каната.

$$E_n = -\frac{mgl}{4}. \quad (2.1)$$

У момент часу, що відповідає положенню тіла на рис. 2. 2, потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії тіла, яке опустилося

$$E_{n1} = -Mgx \quad (2.2)$$

потенціальної енергії лівій частині каната

$$E_{n2} = -\frac{mg(l-x)(l+3x)}{8l} \quad (2.3)$$

і потенціальної енергії правій частині каната

$$E_{n3} = -\frac{mg(l+x)^2}{8l}. \quad (2.4)$$

Кінетична енергія в цей момент часу складається з кінетичної енергії падаючого тіла

$$E_{к1} = \frac{Mv^2}{2} \quad (2.5)$$

і кінетичної енергії лівої частини каната (права частина нерухома!)

$$E_{к2} = \frac{m(l-x)v^2}{4l}. \quad (2.6)$$

У відповідності з законом збереження енергії, для квадрата швидкості падаючого тіла отримуємо

$$v^2 = \frac{2ml + 4Ml - mx}{ml + 2Ml - mx} gx = 2gx \left(1 + \frac{mx/2}{ml + 2Ml - mx} \right). \quad (2.7)$$

Якщо б тіло падало вільно, то квадрат його швидкості був би рівний $v_{free}^2 = 2gx$. Тоді з рівняння (2.7) випливає, що відношення

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{1 + \frac{mx/2}{ml + 2Ml - mx}} = \sqrt{1 + \frac{0,5x}{l - x + 2\frac{M}{m}l}}, \quad (2.8)$$

тобто швидкість падаючого тіла, прив'язаного до канату, завжди більше, ніж вільно падаючого, і ця різниця зростає зі збільшенням маси m каната.

Збільшення швидкості падіння прив'язаного тіла відбувається тому, що потенціальна енергія каната не повністю перетворюється в кінетичну енергію каната, оскільки довжина його правої (нерухомої) частини з часом

збільшується. Ця невитрачена частина потенціальної енергії каната і переходить у кінетичну енергію прив'язаного тіла. [8]

Коли $x = l$ отримуємо

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\frac{M}{m}}}. \quad (2.9)$$

При $m = 4M$ швидкість падіння прив'язаного тіла перевищить швидкість вільно падаючого тіла у $\sqrt{2}$ раз. Таким чином, тіло буде "швидше падати" з прив'язаним до нього канатом.

Якщо маса каната $m \ll M$, то впадуть два тіла одночасно.

При $m \gg M$ швидкість збільшується до нескінченності, чого фізично бути не повинно. Щоб виключити такий результат, необхідно включити в розрахунок перехід механічної енергії в тепло при миттєвій зупинці елементів каната (або ланцюжка), як при непружному ударі. Виникає питання, якими пружно-пластичними властивостями повинен володіти канат (ланцюжок), щоб результат $a > g$ залишався вірним? Межа міцності каната, насамперед, обмежує величину граничної швидкості.

Якщо маса кульки $M = 0$, то з рівняння (2.8)

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{1 + \frac{0,5x}{l-x}} = \sqrt{\frac{1-x/2l}{1-x/l}}, \quad (2.10)$$

тобто, коли $x = l$, розв'язку немає, виникає "ефект батога": кінчик ланцюга при обертанні досягає швидкості, при якій виникає ударна хвиля в повітрі.

2.2. Аналіз падіння складеного ланцюга із залученням законів Ньютона

Інший підхід до вирішення такого завдання запропонував Карл Манган [2], використовуючи класичні закони Ньютона.

Розглянемо ланцюжок довжиною L , який висить в U-подібній формі з кінцем, закріпленим в точці A на жорсткій опорі, і вільним кінцем E , відпущеним з тієї ж початкової висоти (прийнемо її $y = 0$), де знаходиться точка A . На рис. 2.3 ланцюжок відображений в позиції, коли кінець E впав на відстань y . Точка O є точкою звільнення кінця E . На рис. 2.3 наведено позитивний напрямок для зміщення y , швидкості v і прискорення a падаючої вниз частини ланцюга DE . Ділянка ланцюга AB знаходиться в спокої. Ділянка BD є півколом радіуса r (сильно збільшеним на малюнку для ясності) з найнижчою точкою C .

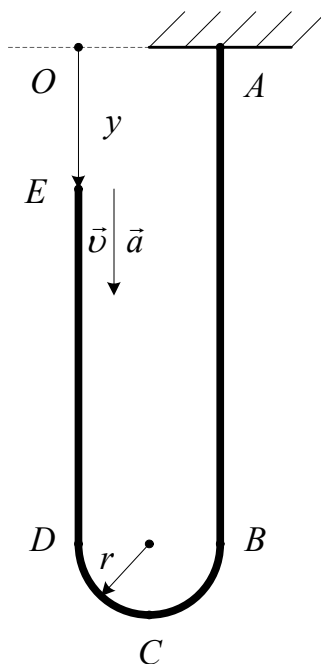


Рис. 2.3. Висячий ланцюг з закріпленим кінцем A і вільним кінцем E , який падає в лабораторній системі відліку.

Точки O і A вважаються досить близькими одна до одної, а ланцюг досить гнучкий, щоб радіус кривизни r в нижній точці C можна було вважати дуже незначним (в порівнянні з довжиною ланцюжка). Завдання полягає в тому, щоб порівняти швидкість падіння $v(y) = \frac{dy}{dt}$ вільного кінця E ланцюга зі швидкістю f_{free} вільного падіння матеріальної точки, що має масу, в кінці тій самій відстані y . Якщо $v(y) > v_{free}(y)$ для всіх $y > 0$, то при падінні на будь-яку довільну відстань Y (де $0 < Y < L$), кінець ланцюга E завжди буде випереджати одночасно випущену точкову масу, тому що час падіння t для точки E буде коротше t_{free} для точкової маси, тобто

$$t = \int_0^Y \frac{dy}{v(y)} < t_{free} = \int_0^Y \frac{dy}{v_{free}(y)}. \quad (2.11)$$

Завдання в такій постановці з'явилося ще в підручниках механіки [3], що датуються 1897 роком. Найперше обговорення його в педагогічному журналі знаходиться в листах до видавця [4] в 1951 році. Перший систематичний аналіз ефекту батога в падаючому ланцюгу був проведений на кілька років пізніше [5]. Але тільки публікація статті [3] по цій темі в 1989 році призвела до великої кількості наступних статей, які тривають до теперішнього часу.

Є два основні підходи до вирішення цього завдання, причому з обох сторін існує думка, що їх підхід, єдино правильний. Енергетичний підхід був розглянутий раніше в п. 1.1.

Ця ситуація повинна застерегти будь-якого викладача від спокуси просто і швидко пояснити фізику подібної системи своїм учням без обґрунтування припущень і моделей, що лежать в основі його пояснення [6].

В одному з підходів до вирішення завдання падіння ланцюжка лежить припущення, що ділянка DE на рис. 2.3 знаходиться у вільному падінні, так що $v(y) = v_{free}(y)$. Наприклад, це припущення теоретично обґрунтовується в публікації [7] про перерозподіл маси в системах зі змінною масою.

Наскільки складно вирішується це питання можна знайти в теоретичному аналізі проблеми [8]. Виявляється, що прийняття цього припущення про вільне падіння еквівалентно припущенню, що вся кінетична енергія поступального руху втрачається, оскільки кожна наступна ланка ланцюжка переміщається зі швидкістю v в точці D на рис. 2.3 з поворотом через точку C ланцюжка і зупиняється в точці B . Припускається, що велика частина кінетичної енергії, втрачається при повороті, розсіюється як теплова енергія, оскільки частини каната непружно тнуться при переході в точку B ланцюга, яка покоїться [9]. Ситуація не відрізняється від тої, яка відбувається внизу ланцюга, що падає в купу на столі. Фактично, кілька статей явно роблять таке порівняння між падінням складеного і розгорнутого ланцюга [10, 11]. Інша частина втрат кінетичної енергії окремих ланок перетворюється в спільні обертальні коливання і коливання ланцюга, що спостерігаються при відеоаналізі [12-14]. Незважаючи на правдоподібність цих уявлень про механічну дисипацію енергії і про вільне падіння ділянки кола DE , ретельне порівняння між моделюванням і експериментами показує, що більша частина кінетичної енергії падіння ланцюга не губиться, а «концентрується» на все більш і більш короткої падаючої секції, що призводить до $v(y) > v_{free}(y)$, і до другого підходу у вирішенні завдання. Фактично, в хорошому наближенні жодна механічна енергія системи не втрачена [3, 5], і, погоджуючись з авторами [12], [15], можна вважати, що збереження механічної енергії теоретично можна обґрунтувати. Інша система, яка забезпечує збереження механічної енергії – це банджі-джампери, [16,17], хоча це менш дивно, оскільки шнур можна змоделювати як пружину.

Розробці альтернативних методів аналізу динаміки падаючого ланцюга присвячена також робота [18], де отриманий елегантний розв'язок цієї задачі з використанням лагранжевого підходу, *але він є досить складним для вступного курсу.*

Щоб отримати розв'язок поставленого завдання на рівні доступному для введення в механіку при подальшому розгляді згідно [2] використовуємо

тільки закони Ньютона. Вважаємо, що відрізки AB і DE ланцюга на рис. 2.3, як на початку, так і в кінці процесу залишилися вертикальними. Для теоретичного нескінченно гнучкого ланцюга це буде справедливо тільки в тому випадку, якщо радіус кривизни r відрізка BD дорівнює нулю (т. е. якщо точки A і O на рис. 2.3 лежать одна на одній).

Для реального ланцюжка, що складається з непарної кількості ланок, відрізки AB і DE будуть вертикальними, якщо точки A і O будуть розділені на довжину рівно однієї ланки, як показано на рис. 11 в роботі [12]. Навпаки, для великих горизонтальних відстаней між точки A і O , відрізки AB і DE будуть спочатку мати приблизно таку форму ланцюжка, яка відображена в [19], а при подальшому руху ланцюга після відпускання кінця E - в роботах [13] та [14].

У той час як відрізок DE ланцюга падає з однією спільною спрямованою вертикально вниз швидкістю v (і відповідним спрямованим вниз прискоренням a), ланцюг між точками B і D не рухається в напрямку дотичній до миттєвої формі ланцюга на рис. 2.3.

Наприклад, точка C має вертикальну складову швидкості $v/2$, направлену вниз на додаток до її компоненту горизонтальної швидкості $v/2$, напрямленому праворуч. Ця ситуація аналогічна швидкостям точок на ободі шини, що котиться вниз без ковзання [20] уздовж лінії AB : точка B є нижньою частиною шини в стані спокою відносно траєкторії, точка D - верхня частина шини, що рухається вниз при швидкості v , а точка C - точка шини, що рухається вниз і праворуч, причому кожна компонента цих швидкостей дорівнює $v/2$.

Корисно проаналізувати рух ланцюга в системі, яка переміщається вниз зі швидкістю $v/2$, як на рис. 2.4 (Ця система координат прискорюється вертикально вниз як похідна за часом від швидкості).

Відрізок BD ланцюга обертається зі швидкістю $v/2$ навколо стаціонарного центру F по півколу радіуса r , як мотузка на ідеальному шківі [21]. Таким чином, його тангенціальне прискорення $a_t = a/2$ [21]. Маса цього напівкруглого відрізка дорівнює $m = \lambda\pi r$, де λ - лінійна густина маси ланцюга.

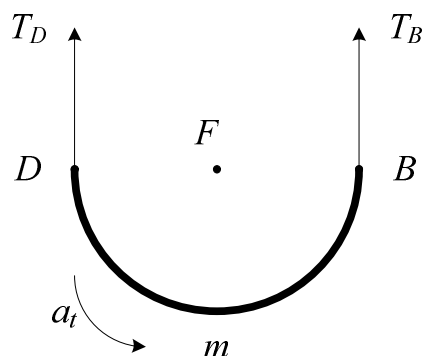


Рис. 2. 4. Сили (T_B і T_D) і прискорення (a_t), які мають тангенціальний компонент для секції BD ланцюга масою m . Тут відрізок робить напівкруглу петлю з центром в т. F

Позначимо величини вертикального натягу на кінцях B і D цього відрізка як T_B і T_D відповідно. Тоді тангенціальний компонент за другим законом Ньютона для відрізка BD ланцюжка [23] дорівнює:

$$T_B - T_D = ma_t = \lambda \pi r a / 2. \quad (2.12)$$

Це рівняння можна було б альтернативно вивести шляхом написання другого закону Ньютона в термінах обертового моменту, моменту інерції і кутового прискорення відрізка BD відносно точки F на рис. 2.4 У межі, коли ланцюжок робить поворот так, що $r \rightarrow 0$, з рівняння (2) випливає, що $T_B \approx T_D$. Приблизно таке ж зусилля (позначимо його величину T_{BD}) діє по всій ділянці BD ланцюга (точно так само, як і для мотузки, яка не ковзає по шківу, якщо тиск маси шківа і ділянки каната на шків дуже малий, і немає тертя на осі шківа). Хоча точка B нерухома, а точка D рухається вниз зі швидкістю v в лабораторній системі, зусилля, яке чиниться на точку B ланцюгом вище неї, дорівнює натягу, що чиниться на точку D при обертанні секції ланцюга нижче неї. Ця дія сили на ділянку D на рис. 2.3, більше сили тяжіння, яка зазвичай діє на ділянку ланцюга DE як на масу падаючої матеріальної точки, що призводить до того, що результуюча сила, яка діє на кінець ланцюга E перевищить силу тяжіння mg матеріальної точки.

Для знаходження кількісного виразу для швидкості вільного кінця E в лабораторній системі розглянемо напівкруглу ділянку ланцюга, як показано на рис. 2.5. Сили (T_{BD} і mg) і прискорення ($a/2$ і a_c) мають вертикальний компонент на відрізку ланцюга BD масою m в лабораторній системі відліку. Цей відрізок обертається навколо точки F зі швидкістю $v/2$. Він напівкруглий з радіусом r таким, що будь-яка точка на відрізку знаходиться під кутом до вертикалі, що змінюється від -90° до $+90^\circ$ (наприклад, сама нижня точка C знаходиться в кутовому положенні $\theta = 0$).

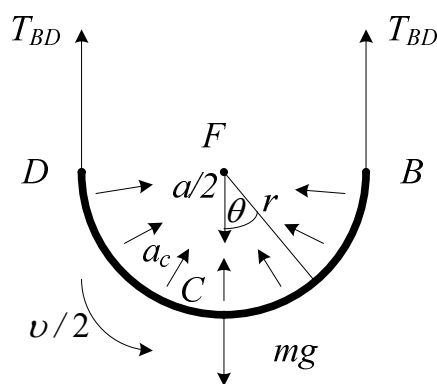


Рис. 2.5. Розрахункова схема

Крім натягу T_{BD} , що діє на кожен з кінців відрізка, діє також спрямована вниз сила гравітації:

$$mg = \lambda \pi r g.$$

Прискорення кожного нескінченно малого сегмента петлі є сумою трьох величин: тангенціального прискорення a_t (як показано на рис. 2.4), загального вертикального прискорення вниз $a/2$ падаючої петлі і доцентрового прискорення $a_c = (v/2)^2 / r$, коли сегмент обертається зі швидкістю $v/2$ навколо центральної точки F . Щоб знайти результуюче прискорення всієї секції BD , необхідно скласти до купи векторні прискорення кожного окремого сегменту, а потім помножити це результуюче прискорення на загальну масу $m = \lambda \pi r$ сегмента.

(У подальшому проінтегруємо добуток векторного прискорення на нескінченно малу масу кожного сегмента по всій секції.) Виходячи з симетрії середня вертикальна складова тангенціального прискорення дорівнює нулю, так само як і середній горизонтальний компонент центропрямуючого прискорення. Середня вертикальна складова доцентрового прискорення:

$$\bar{a}_c = \frac{\int_{-90^0}^{+90^0} a_c \cos \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta} = a_c \frac{2}{\pi}, \quad (2.13)$$

де θ - кут, відлічуваний в точці F від вертикального напрямку до будь-якого заданого нескінченно малого сегмента ланцюг, як наведено на рис. 2.5. З урахуванням всіх умов для вертикальних складових другий закон Ньютона для відрізка BD дає:

$$2T_{BD} - \lambda \pi r g = \lambda \pi r \left(\frac{v^2}{4r} \frac{2}{\pi} - \frac{a}{2} \right). \quad (2.14)$$

З урахуванням того, що $r \rightarrow 0$ отримаємо:

$$2T_{BD} = \lambda \frac{v^2}{2}; \quad v^2 = \frac{4T_{BD}}{\lambda}. \quad (2.15)$$

Ліве рівняння пророкує, що $T_{BD} = 0$, якщо $\lambda = 0$. Таким чином, в змаганні [24] між вільно падаючим ланцюжком і складеним ланцюжком, у якого один кінець прив'язаний, складений ланцюжок виграє тільки в тому випадку, якщо має масу [6]. Також $T_{BD} = 0$, якщо $v = 0$. Тобто, при вивільненні кінця E натяг в нижній ланці ланцюга дорівнює нулю, так само як при статичній підвісці ланцюга.

Тепер розглянемо відрізок DE ланцюга, як наведено на рис. 2.6.

Коли $r \rightarrow 0$, відрізок BD на рис. 4.3 має незначну довжину, довжина відрізка DE $(L - y) / 2$ зменшиться від $L / 2$ до 0 і ділянка AB , яка має довжину $(L + y) / 2$ збільшиться від $L / 2$ до L в той час коли y збільшиться від 0 до L . Сума довжин AB і DE завжди дорівнює L .

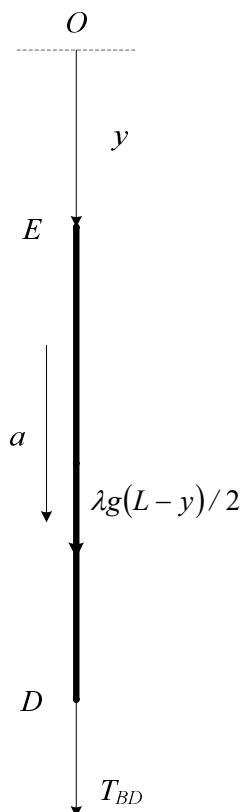


Рис. 2.6. Діаграма вільного відрізка DE ланцюга в лабораторній системі відліку

Другий закон Ньютона для нього буде мати вираз:

$$T_{BD} + \frac{\lambda g(L-y)}{2} = \frac{\lambda a(L-y)}{2} \quad (2.16)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно T_{BD} і замінюючи його в правій частині рівняння (2.15), отримуємо:

$$v^2 = 2(L-y)(a-g) \quad (2.17)$$

Відшукаємо прискорення, як

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = v \frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (2.18)$$

Тепер рівняння (2.17) можна представити так:

$$(L-y) \frac{dv^2}{dy} - v^2 = 2g(L-y),$$

$$\frac{d}{dy}[(L-y)v^2] = 2g(L-y), \quad (2.19),$$

яке може бути проінтегровано за y -ом як:

$$(L-y)v^2 = gy(2L-y),$$

$$v(y) = \sqrt{\frac{gy(2L-y)}{L-y}} = \sqrt{2gy} \cdot \sqrt{\frac{L-y/2}{L-y}} = v_{free} \sqrt{\frac{L-y/2}{L-y}}, \quad (2.20)$$

де $v_{free} = \sqrt{2gy}$ – швидкість вільно падаючої матеріальної точки.

Отже,

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{\frac{1-y/2L}{1-y/L}}. \quad (2.21)$$

що більше 1 для будь-якого y в діапазоні $0 < y < L$, як наведено на рис. 2.7.

Цей результат суперечить звичному досвіду з вільним падінням предметів і тому в це важко повірити багатьом людям, навіть досвідченим фізикам.

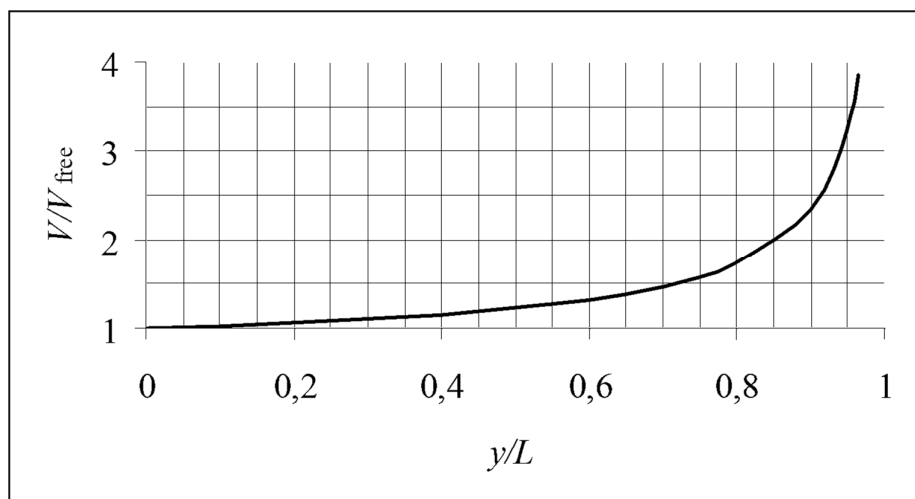


Рис. 2.7. Швидкість вільного кінця ланцюга відносно швидкості вільного падіння точкової маси в залежності від відношення відстані падіння y до довжини ланцюга L

Наприклад, швидкість вільного кінця ланцюга E повинна збільшитися у 2 рази в порівнянні зі швидкістю вільного падіння матеріальної точки коли $y = 0,85L$.

Швидкість v не може бути визначена, коли $y = L$, тобто коли остання ланка ланцюжка робить поворот навколо точки F , тобто, коли виникає «ефект батога». Аналогічно прискорення a , яке може бути визначено, якщо підставити рівняння (2. 20) в (2.17), розходиться, коли $y = L$. Ця невизначеність в v і a не виникає на практиці, тому що остання ланка на вільному кінці ланцюжка має кінцеву довжину і масу (а не таку, що неперервно зменшується до нуля), аналогічно «згону» на кінчику батога [26].

Рівняння (2.21) узгоджується з підходом, який розглядає закон збереження механічної енергії, в якому кінетична енергія, втрачена ланкою при переході від точки D до B на рис. 2.3, додається до кінетичної енергії відрізка DE ланцюга. Формула (2.21) ідентична формулі (2.10), отриманої на основі закону збереження енергії більш простим шляхом.

Оскільки ланка обертається в точці C , то вона відтягується назад по відрізку DE , тим самим уповільнює рух ланки вниз і, відповідно, уповільнює прискорення падаючої ділянки ланцюга. Цю нижню ланку можна уявити як маленький крючок для захвату, з'єднаного з ланкою DE дуже жорсткої еластичної конструкцією. Щоб повернути, ця ланка повинна розтягнутися, тим самим уповільнивши рух крюка. Коли крюк гальмується, він прикріплюється без дисипації до нерухомої точки B . Пружна потенціальна енергія в групі тепер тягне і прискорює іншу частку падаючого ланцюжка, надаючи йому додаткову кінетичну енергію. Відрізок BD ланцюга поводить себе так, наче він обертається навколо шківів (див. п. 3.1).

2. 3. Експериментальне визначення прискорення падіння тіл

З метою перевірки отриманих результатів $a > g$ (!) (нетривіальних для багатьох школярів та студентів) були проведені експерименти, постановка яких наведена на рис. 2. 8, а графіки руху на рис. 2. 9. Швидкісна відеозйомка кульок та ланцюгів при їх падінні велась за допомогою смартфона Huawei P 30 Pro.

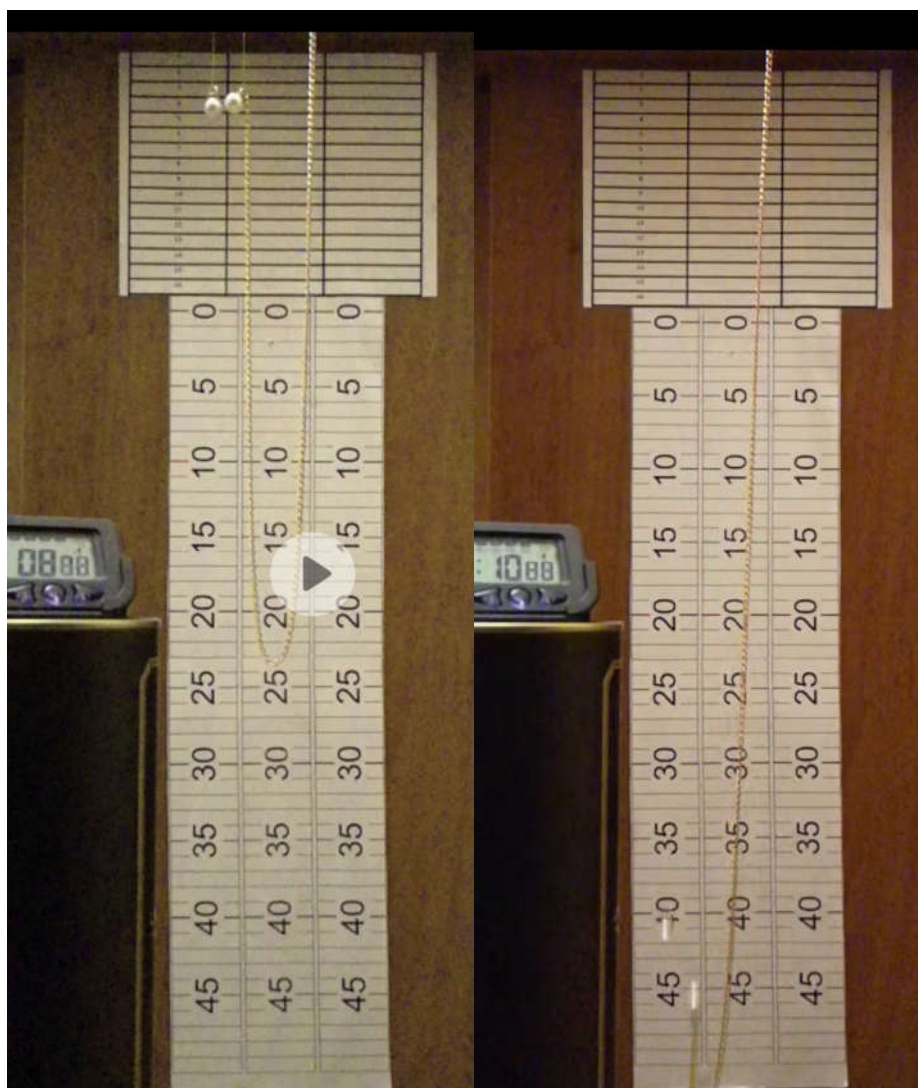


Рис. 2. 8. Фото падіння кульки (2 г) діаметром 12 мм та ланцюга довжиною 1 м з кулькою (7 г)

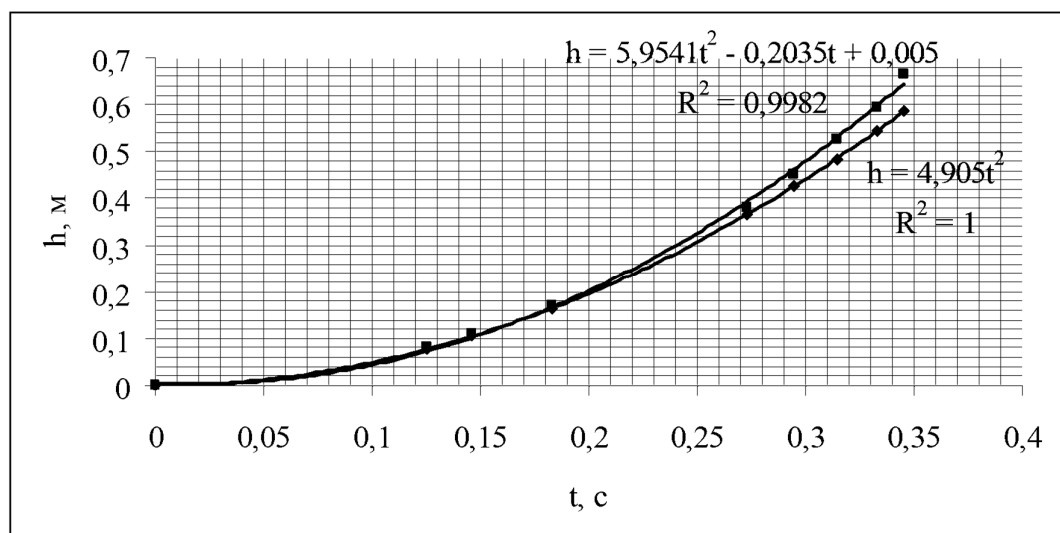


Рис. 2.9. Графіки руху кульки (2 г) діаметром 12 мм та ланцюга довжиною 1,05 м з кулькою (7 г) діаметром 12 мм (суцільна лінія)

Як видно з рис. 2.8 на дистанції 60 см вільно падаюча кулька відстає на 5 см від такої же кульки, прив'язаної до ланцюга, а з графіка на рис. 2.9 – прискорення кульки, прив'язаної до ланцюга, склала величину

$$a = 11,9 \text{ м/с}^2.$$

Аналогічний експеримент був проведений з 6 г металевою кулькою діаметром 11,5 мм та пластмасовою кулькою масою 2 г діаметром 6 мм, прив'язаної до ланцюга, довжина якого до перегину була 36 см. Загальна маса пластмасової кульки та прив'язаної частини ланцюга до перегину була майже 4 г (рис. 2.10).

Отже, сталева кулька мала в 1,5 разів більшу масу ніж пластмасова кулька з неспадаючою частиною ланцюга. Тим не менш, як видно з графіків руху кульок (рис. 2.11) на дистанції 60 см пластмасова кулька обігнала сталеву вільно падаючу кульку на 3 см, причому прискорення склала величину

$$a = 10,72 \text{ м/с}^2.$$

Це повністю підтверджує теоретичні висновки п. 2.1-2.2, а саме: прив'язана до ланцюга кулька падає з прискоренням, більшим, ніж прискорення вільного падіння.

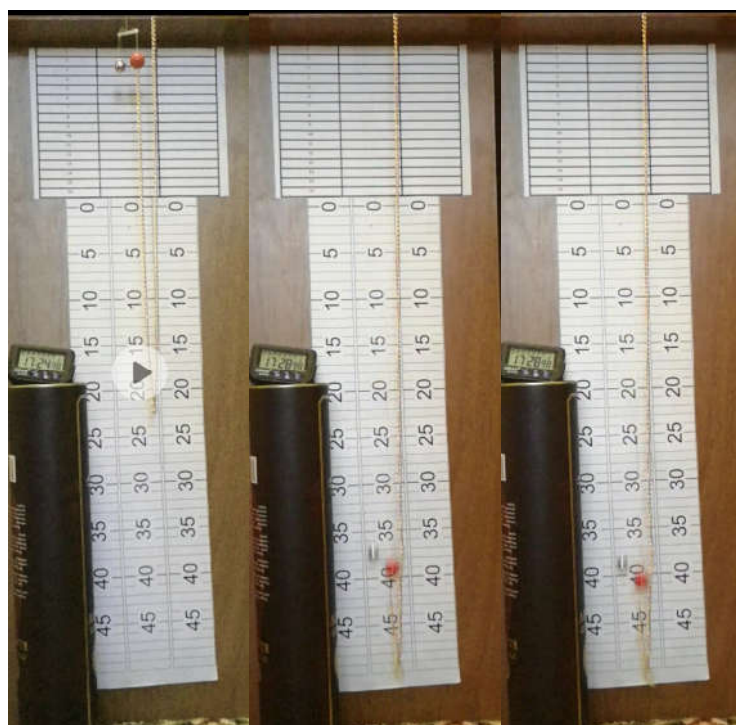


Рис. 2.10. Фото падіння сталевої кульки (6 г) діаметром 11,5 мм та пластмасової кульки масою 2 г діаметром 6 мм, прив'язаної до ланцюга, довжина якого до перегину була 36 см

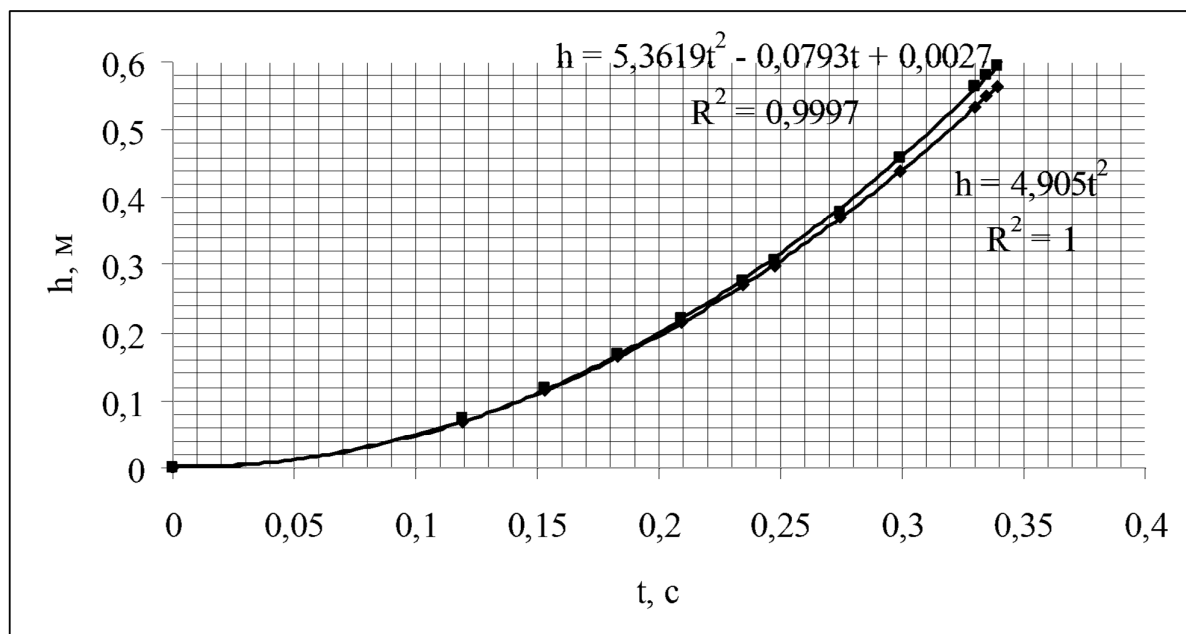


Рис. 2.11. Графіки руху сталевої кульки (6 г) діаметром 11,5 мм та пластмасової кульки масою 2 г діаметром 6 мм, прив'язаної до ланцюга, довжина якого до перегину була 36 см

Особливо яскрава демонстрація того, що вільний кінець прив'язаного ланцюга довжиною L перегонить не прив'язаний ланцюг довжиною $L/2$ наведена на рис. 2.12.

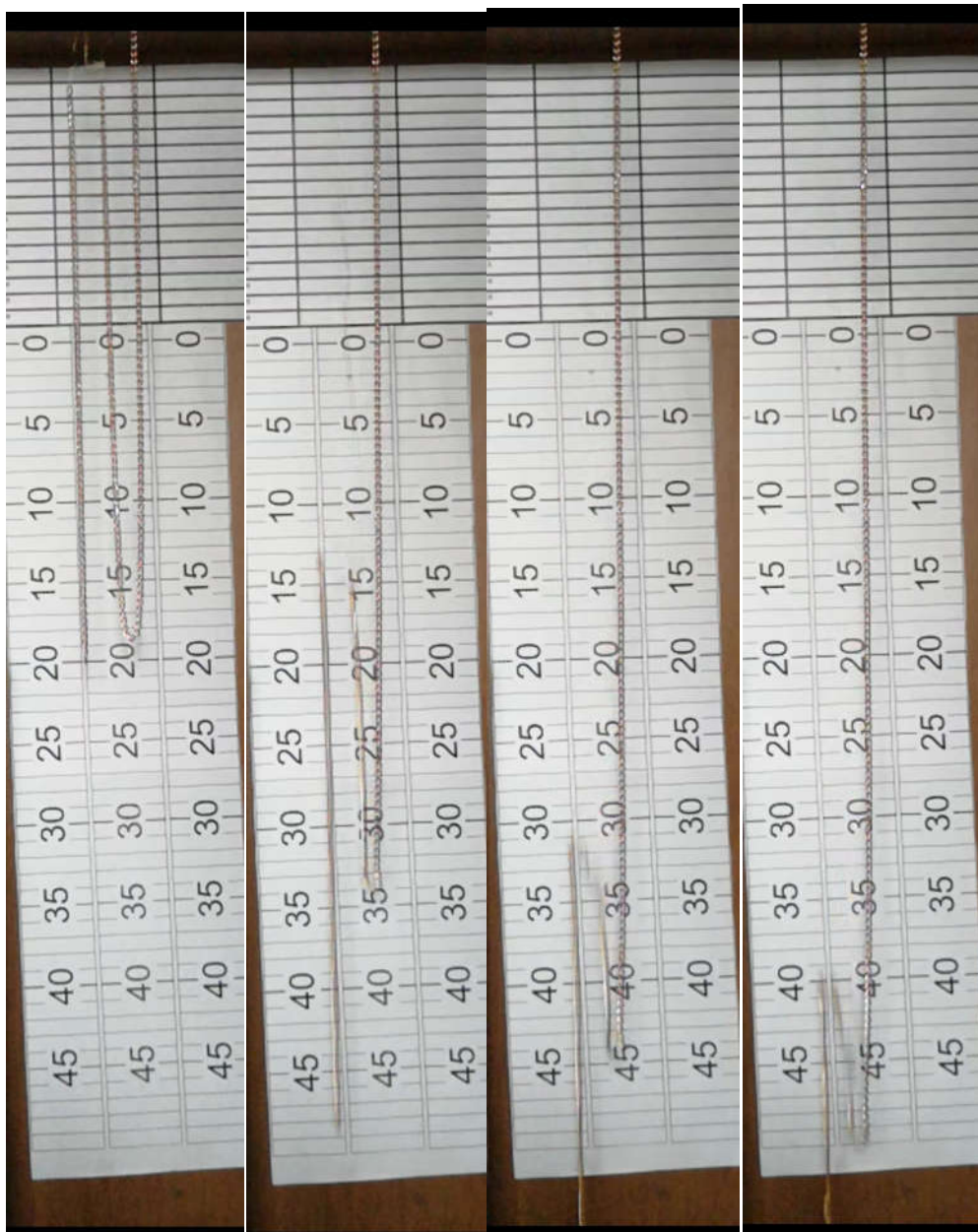


Рис. 2.12. Фази падіння вільного і прив'язаного ланцюжка

Коли верхній кінець вільного ланцюга пролетів шлях $h_1 = 38$ см, вільний кінець прив'язаного ланцюга був вже на відмітці $h_2 = 41$ см. Тобто відставання вільно падаючого ланцюга склало 3 см на дистанції 38 см. Прискорення

вільного кінця прив'язаного ланцюга $a = \frac{h_2}{h_1} g$. Тобто, експериментальне

значення $\frac{v}{v_{free}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{41\text{см}}{38\text{см}} = 1,08$, коли $\frac{y}{L} = \frac{41}{68} = 0,6$. Теоретичне значення,

отримане з рівняння (11), повинно бути $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор} = 1,32$, що не узгоджується

з підходом, описаним в роботі [2].

В наступному досліді порівнювався рух вільно падаючої сталеві кульки діаметром 12 мм і ланцюга довжиною $L = 65$ см. Результати обробки сповільненого відео з частотою 240 кадрів в секунду наведені в табл. 2.1

Таблиця 2.1

Результати досліджень із «золотим» ланцюгом

h_2 , см	0	25	37	56	61
h_1 , см	0	24	34	46	51
$\frac{v}{v_{free}} = \frac{h_2}{h_1}$	0	1,04	1,09	1,22	1,2
$\frac{y}{L}$	0	0,385	0,57	0,86	0,94
$\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор}$		1,146	1,29	2,02	2,97

Отже, експериментальні значення $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{експ}$ не узгоджується з

$\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор}$ отриманим з рівняння (11), наведеним в роботі [2].

Збільшимо довжину елементарної ланки ланцюжка. Результати експериментів наведено в табл. 2.2. Експериментальні значення $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{експ}$ і в цих експериментах не узгоджується з теоретичними. Пояснення цьому факту може лежати в площині впливу сил опору руху ланцюжку. Але проведені досліди порівняння руху сталеві кульки і відрізка ланцюжка у вільному падінні довели, що рухаються вони з однакової швидкістю. Тобто впливом опору повітря в даному випадки можна знехтувати і пояснення треба шукати в недоліках теоретичного опису процесу руху ланцюжка або вадам постановки експериментів.

Таблиця 2.2

Результати досліджень із «срібним» ланцюжком

h_2 , см	43	36	27
h_1 , см	38	32	24,5
$\frac{v}{v_{free}} = \frac{h_2}{h_1}$	1,131	1,125	1,1
$\frac{y}{L}$	0,614	0,514	0,386
$\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор}$	1,34	1,24	1,146

Висновки до розділу 2

Розглядаючи наступне питання: з яким прискоренням падатиме вільний кінець ланцюжка, прив'язаного іншим кінцем до нерухомої перекладини, варто було розглянути і питання, щодо того, а яка з кульок, які перебувають у вакуумі на одній і тій же висоті впаде на підлогу швидше - вільна або прив'язана довгою мотузкою до перекладини, з якої вони стартували без початкової швидкості?

Провівши низки експериментальних досліджень, щодо падіння тіл за різних умов, було встановлено дослідним шляхом, що заявлені теоретичні значення, щодо швидкості падіння прив'язаних тіл, або ланцюга, не збігаються із результатами, які були отримані експериментальним шляхом. Графік, який зображений на рис. 2.11, наочно підтверджує характер руху тіл з розсередженою масою.

РОЗДІЛ 3. ФОНТАНИ ІЗ БУС

3.1. Сили інерції та фонтануючі ланцюги

Багато напевно відчували неприємний момент, коли, наприклад, у велосипеда злітає досить натягнутий ланцюг або коли зривається знесилений ремінь шківа двигуна. Для пояснення цього одні кажуть, що на ланцюг (ремінь) діє відцентрова сила, інші - що ланцюг злітає за інерцією. І те й інше - вірно.

На лекціях часто показують ефектний дослід з обертається ланцюжком (рис.3.1).

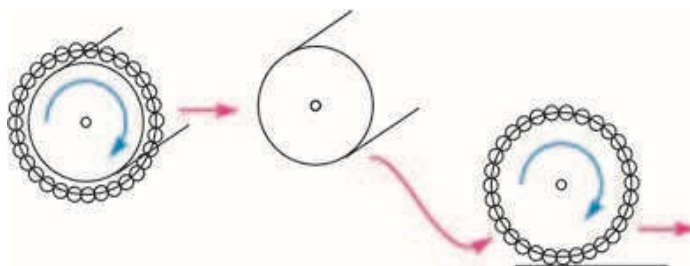


Рис. 3.1.

Ланцюжок з'єднується в кільце, насаджується на вал і розкручується. Після цього його обережно зіштовхують з вала, і ланцюжок несподівано жорстким колесом котиться по столу, падає на підлогу і продовжує котитися до тих пір, поки не вдаряється об стінку і не перетворюється в гору ланок!

Для опису прямолінійного руху з прискоренням можна використовувати кілька способів. Один з поширених пов'язаний із застосуванням класичних законів Ньютона. У ньому розглядаються відомі сили, кожна з яких має зрозумілу фізичну причину: сила тертя, сила пружності, сила гравітації і т.д. Цей же підхід може бути застосована і до прикладів з криволінійним рухом. Так, якщо матеріальна точка рухається з певною швидкістю по дузі кола радіусом R , то це означає, що діюча результуюча сила забезпечує їй нормальне (доцентрове) прискорення, рівне v^2 / R . У випадку з обертанням ланцюжка

або ласо це можуть бути сили натягу, що діють на виділений елемент маси з боку сусідніх елементів.

Опис рішення задачі буде виглядати так. Записуємо рівняння руху:

$$\frac{\Delta m v^2}{R} = F$$

Далі запис можна деталізувати, наприклад, за таким сценарієм:

$$\Delta m = \frac{M}{2\pi R} R \Delta \varphi, \quad F = 2T \sin \frac{\Delta \varphi}{2}.$$

Тут величини T , M , $\Delta \varphi$ означають, відповідно, силу натягу, масу обертового ланцюжка або ласо і кут, який стягує виділений елемент маси. Тепер за відомими даними можна знайти будь-яку з невідомих величин. Подібних завдань дуже багато і не будемо тут приводити відомі приклади.

Можна, однак, міркувати інакше. Кожен відчував на собі реальну силу, яка притискає тіло вбік на повороті в машини, що їде. Така ж сила діє і на елемент ланцюжка. Цю силу називають відцентровою силою інерції. За чисельним значенням вона в точності дорівнює $\frac{\Delta m v^2}{R}$, але спрямована в протилежний бік. Свою назву ця сила отримала за те, що тіло прагне «втекти» по дотичній від центру кола, рухаючись за інерцією. Сили інерції можна реально відчути, перебуваючи в неінерціальній системі координат. Ми не вилітаємо з машини тому, що відцентрова сила врівноважується силою реакції стінки дверцята або силою тертя об сидіння. Вода в річці відцентровою силою підмиває берег, який змусив воду викривити прямолінійний рух. Потім ця вода вдаряє в протилежний берег і підмиває вже його - так річки стають звивистими. У випадку з ланцюжком сила інерції при русі по даній окружності врівноважується силами натягу від сусідніх ланок. А якщо сили інерції перевершують натяг - ланцюжок порветься або на ласо з'явиться опукла ділянка, яка прагне збільшити розмір петлі. Іншими словами, елемент прагне піти на окружність більшого радіусу. Ковбой, відчуваючи натяг розкручуваного ласо, потроху випускає запас мотузки до необхідного діаметра петлі. Як бачите - все сходиться і в цьому випадку.

Зауважимо, що з урахуванням сил інерції можна записати і рівняння руху для неінерціальної системи координат. У наших прикладах це зробити зовсім просто.

Тепер спробуємо дати пояснення аварії з велосипедним ланцюгом. Тут можна використовувати і звичайні закони Ньютона. Однак для якісного аналізу зручніше скористатися уявленнями про силах інерції. Коли велосипед рухається дуже повільно, ланцюг захоплюється зубчастим колесом і зберігає ту форму, яка на рис. 3.2 відзначена штриховою лінією.

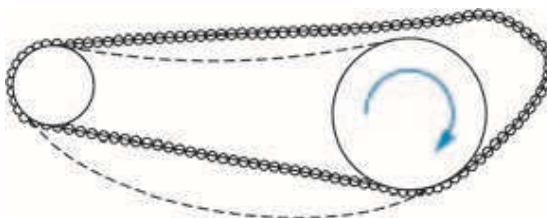


Рис. 3.2.

Як тільки ми починаємо прискорюватися, верхня частина ланцюжка прагне рухатися за інерцією і зривається з зубчатки вперед. Можна сказати, що на ці ланки ланцюжка діє сила інерції, спрямована вперед. Що ж змушує ланки ланцюжка змінити через деякий час напрямок швидкості свого руху? По-перше, це сила тяжіння, а по-друге, сили натягу з боку сусідніх ланок, спрямовані назад і вниз. Так само, як і в випадку з ласо, на даній ділянці велосипедної ланцюга теж виникає опуклий ділянку. Нарешті, ланки падають на зубчатку, і якщо площині руху ланцюжка і зубчатки трохи перекошені, то ланцюг злітає. Для усунення аварії, що сталася необхідно в міру натягнути ланцюг (переміщаючи заднє колесо) і вирівняти положення зубчаток.

Повний опис такого руху, в будь-якій системі уявлень, досить складно. В останньому прикладі воно складається з поступального руху кожної ланки убік і його криволінійного руху на низхідній ділянці траєкторії. Але оскільки ми всі вже зрозуміли на якісному рівні, то подробиці такого опису не настільки і цікаві. Проте, зустрічаються приклади на перший погляд несподівані, оскільки до основних механізмів додаються нові, помітити які виявляється часом нелегко. Для ілюстрації візьмемо такий приклад.

Задача про фонтануючий ланцюг

Кілька років тому в інтернеті (див., Наприклад, [youtube.com/watch?v=6ukMId5fIi0](https://www.youtube.com/watch?v=6ukMId5fIi0)) з'явилися демонстрації досвіду, в якому показується довга нитка бус, покладена в скляну посудину. Якщо висмикнути її вільний кінець, то намисто буде не просто вислизати і падати на підлогу, а вигнуте дугою. Намистини, як і вода у фонтані, як би вистрибують на помітну висоту над краєм склянки. Вчені Кембриджського університету (під керівництвом Джона Біггінса) якісно пояснили, чому так відбувається [10]. Читачі, які живуть в сільській місцевості, можуть пригадати, що схожа поведінка спостерігається при падінні довгої мотузки (до якої кріпиться відро) в глибокий колодязь. Подібним же чином поводить ся іноді якірний ланцюг катера. На Сибірському турнірі юних фізиків школярі з Новосибірського інтернату показали яскравий фонтан з довгою (альпіністською) мотузкою. Все побачене досить просто пояснити на якісному рівні. Ми ж спробуємо дати кількісні оцінки спостережуваного явища, провівши досліди і зробивши посильні (спрощені) обчислення.

Нам вдалося підібрати два відповідні ланцюжки пластикових бус діаметром 3 мм і 5 мм - для прикраси новорічних ялинок. Довжини ланцюжків були 8 м і 15 м. Висота падіння їх зі склянки становила 2 м, лінійна щільність обох ланцюжків була 5 г / м.

1) Спочатку ми провели досвід так, як він описаний в інтернеті. Фонтан намистин піднімається зі склянки не відразу - сила зростає у міру того, як наростає імпульс вже впала частини. У нас вийшли практично однакові фонтани для обох ланцюжків. Висота спостережуваного фонтану становила від 10 до 20 см. Це близько 10% від висоти, з якої падає ланцюжок. Повна довжина ланцюжка впливає лише на тривалість спостереження. У Кембриджському експерименті висота фонтану була близько 40 см. Істотно позначається на висоті фонтану то, що укладені в посудину елементи ланцюжка чіпляються один за одного і додатково гальмують зісковзуванням.

У нас якість зв'язок було неважливим, наміста кожен раз потрібно було акуратно укладати.

2) Потім ми видозмінили досвід. У новому варіанті наміста не вилітали зі склянки вгору, а зсковзували з майже плоскої тарілки (рис. 3.4.)

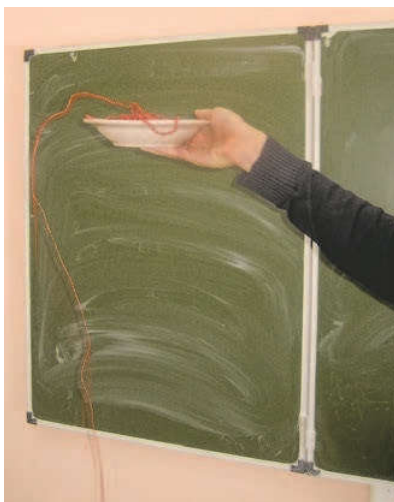


Рис. 3.3.

І все одно, через деякий час піднімався фонтан - вгору і трохи вбік. Значить, справа не в необхідності вертикальної складової початкової швидкості, а в різкій зміні напрямку швидкості точніше, зміни напрямку (перекидання) імпульсу, у виникненні нормальної складової прискорення, або в інший трактуванні - у виникненні відцентрової сили (подібно розглянутим прикладів).

Розвиток фонтану в горизонтальному напрямку пов'язано з прискореним поступальним рухом намістин убік - перш ніж падати, вони пролітають деяку відстань. Нехтування цією обставиною в шкільних завданнях про ковзання нитки (ланцюжки) з краю столу часто, і справедливо, піддається критиці. Щоб оцінити це відстань, ми наближено вирішили двовимірне рівняння криволінійного руху зі змінною масою - завдання, незвичайна для школярів. Зсув убік дорівнювала близько 15 см. Це добре збігається з експериментом, однак нічого істотного для розуміння суті явища такий результат не дає. Тому

тут ми і не будемо ускладнювати розрахунки, обмежившись описом руху тільки вгору.

3) Наступне ускладнення досвіду знадобилося для того, щоб відсікти спочатку виникли міркування про вплив зворотної хвилі при ударі об землю. Цей ефект безсумнівно має місце, але не в нашому випадку. Ми виконали відповідні оцінки і вимірювання пружності декількох ланцюжків і провели додатковий досвід. Він полягав у тому, що ланцюжки кидалися з великої висоти (до 5 м) на різні поверхні. Однак виявилось, що фонтан цілком може виникнути, перш ніж кінець ланцюжка вдариться об поверхню землі. Тут, при слабкому зв'язку між ланками, імпульс віддачі втрачається в непружному ударі між окремими кульками.

Модель і оцінка

Коли зісковзуючий ланцюжок вже розігнався, то швидкість його в даний момент з хорошою точністю можна прийняти рівною

$$v = \sqrt{2ax}$$

де x - висота падіння падаючої частини, a - прискорення падіння, яке відрізняється від прискорення вільного падіння g . Розрахунок цього прискорення a не настільки вже й складний.

Зісковзують ланцюжок представляє собою тіло зі змінною масою. Тому рівняння руху слід записати так:

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg.$$

Коли вирішуються завдання з постійною масою, її виносять за знак похідної та кажуть про масу, помноженої на прискорення. Ньютон же говорив про швидкість зміни імпульсу (кількості руху): «Зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі і відбувається по напрямку тієї прямої, по якій ця сила діє» mv . То отримаємо

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = mg,$$

або

$$ma = mg - \vartheta \frac{dm}{dt}$$

Вже видно, що прискорення ланцюжка вдається меншим, ніж прискорення вільного падіння точкового тіла тієї ж маси, продовжимо:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt}; dm = \frac{m}{x} dx; ma = m \left(g - \frac{\vartheta^2}{x} \right).$$

Залишилося застосувати відоме кінематичне співвідношення, що зв'язує швидкість і шлях, пройдений від початку падіння:

$$\vartheta^2 = 2ax$$

Тепер для прискорення падаючої ланцюжка отримуємо шукане значення:

$$a = \frac{g}{3}$$

Якщо ділянку повороту уявити частиною окружності то рівняння руху для елементарної маси Δm можна записати так:

$$\Delta m \frac{\vartheta^2}{R} = \Delta m g + \sum T$$

Будемо вважати, що верхня ділянка кривої представляє собою півколо радіусом R , тоді маса цієї ділянки дорівнює

$$\Delta m = \lambda \pi R$$

Сума сил натягу по обидва боки дуги приблизно рівна силі ваги рухомій частині ланцюжка плюс вага стінки «арки». Насправді на правій частині кривої спостерігається як падіння вниз, так і рух убік. Відмовившись від опису останнього, для найпростішої оцінки маємо

$$\lambda \pi R \frac{\vartheta^2}{R} = \lambda \pi R g + \lambda x g + 2 \lambda h g .$$

Звідси, прийнявши $R \approx h$ і враховуючи, що $\vartheta^2 = 2ax = \frac{2}{3}gx$ отримуємо

$$\frac{2}{3}\pi x = \pi h + x + 2h$$

або

$$\frac{h}{x} = \frac{2\pi - 3}{3(\pi + 2)} \approx 0,2 .$$

У представленому в інтернеті досвіді спостерігалось схоже співвідношення. У нас заважала шорсткість з'єднання намистин, і фонтан вийшов менше. Врахувавши сильні спрощення в розрахунку, можна лише стверджувати, що висота фонтану становить кілька відсотків від висоти падіння ланцюжка. Це і спостерігається в демонстрації. Точні цифри при оцінках не мають доказової сили.

Як бачимо, оцінка вийшла досить проста і швидка. В цьому і плюс методу фізичних оцінок. Вчені використовують його практично у всіх складних випадках, щоб не загрузнути в деталях.

Отже, явище фонтанування ланцюжка є природний процес, абсолютно аналогічний розглянутим вище процесам розкручування ласо або зіскакування розкрученого ремня. Його можна пояснити з двох ідентичних в своєму описі точок зору.

У неінерціальної системи, пов'язаної з частинками ланцюжка, це виникнення відцентрової підймальної сили, яка визначається швидкістю перекидання (зміни напрямку) імпульсу (тут на кут 90^0). З іншої точки зору, пов'язаної з спостерігачем і, відповідно, інерційною системою, це виникнення поперечного (доцентровий, нормального) прискорення при русі тіла по кривій під дією сил натягу, які долають інерцію розігнаних частинок ланцюжка за кінцевий час і для якого потрібна певна ділянка гальмування. Ця ділянка і спостерігається як фонтан.

Підкреслимо, що явище відхилення від заданої форми руху спостерігається при абсолютно довільних орієнтаціях руху ланцюжка, ласо або ремня в просторі. У нашому випадку ця форма задається силою тяжіння. В інших випадках вона нав'язується різними направляючими, силами натягу і силами реакцій.

Чому ж саме фонтанування ланцюжка привертає увагу спостерігача? Це пов'язано з тим, що спостерігач подумки порівнює політ ланцюжка з потоком окремих частинок, які підкидають з початковою швидкістю, або скидаються з

висоти в горизонтальному напрямку. У цих випадках спостерігається гладка параболічна траєкторія.

Однак як летять не пов'язані між собою частинки? Їх швидкості визначаються прискоренням, рівним g , але в кожній точці простору вони різні. Зокрема, в точках області повороту (перекидання імпульсу) швидкість найменша. В результаті в потоці окремих рухомих частинок практично не спостерігається ні сильного впливу відцентрової сили (в неінерціальної системи), ні значного впливу нормального прискорення (в системі спостерігача). Хоча щось подібне в нашому випадку все-таки можна спостерігати - наприклад, в питних фонтанчиках, де ще помітно вплив на зв'язок частинок в струмені сил поверхневого натягу води.

Інакше виглядає явище, коли всі елементи ланцюжка пов'язані між собою і в кожен момент мають однакову швидкість. Ця швидкість визначається прискоренням, рівним $a \neq g$, і задається спільною дією сил натягу і сили тяжіння. У кожен момент ця швидкість дорівнює швидкості головної частини падаючого ланцюжка. Її величина менше, ніж швидкість вільно падаючого тіла в цей момент. Але поперечне прискорення викликає відхилення руху частинок ланцюжка вбік від траєкторії падіння, так само, як автомобіль, що перевищив швидкість проходження по криволінійній ділянці шосе, викидається на узбіччя (тобто на траєкторію з більшим радіусом). У нашому випадку, за рахунок значної в цілому нормальної (центропрямуючої) сили, з ослабленою частини всього ланцюжка, при наявності вільно лежачого кінця, витягуються додаткові елементи. Відбувається подовження всього ланцюжка і формування фонтану.

Візуально відміна падіння ланцюжка від падіння потоку вільних частинок виглядає так, як ніби елементи ланцюжка затримуються у верхній точці, групуються, щоб накопичити необхідну для фонтану довжину, і потім продовжують падіння. В подальшому русі на низхідному ділянці падаючої ланцюжка різниця швидкості від швидкості вільного падіння практично не помічається спостерігачем.

У випадку з послабленим велосипедним ланцюгом виникнення угруповання прискорених ланок досягається за рахунок різниці в натязі у верхній і нижній частинах ланцюга. У прикладі з ласо петля - це не що інше, як той же фонтан, тільки формується в горизонтальній площині.

Залишилося обговорити деякі важливі деталі процесу. Наприклад, як починається фонтан і що відбувається на правій (на наших малюнках) стороні піднімального ланцюжка? На рис. 6 показано, як відбувається виникнення фонтану.

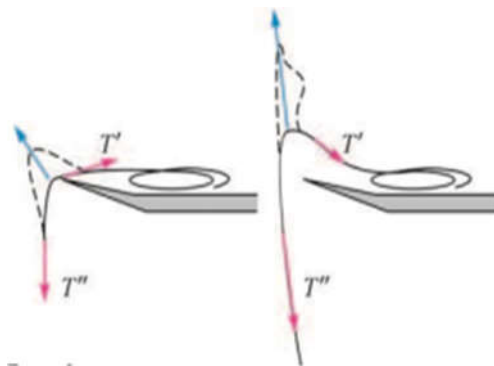


Рис. 3.4.

Спочатку, коли звисає мала частина ланцюжка, сила тяжіння лівого кінця порівнянна з силою натягу на правому, що лежить кінці (вектори T' і T'').

Результуюча сила спрямована в бік (право), а відповідна їй сила інерції (синій вектор) – в бік (вліво). Ланцюжок зривається з тарілки, і починається формування фонтану вгору і вліво. По мірі зісковзування лівий кінець ланцюжка стає важче, тепер сила інерції приймає майже вертикальний напрямок, і фонтан росте вгору. При цьому на обох сторонах піднімання ланцюжка починаються вільні коливання - це добре видно на дослідах. Звернемо увагу, що тут введення сили інерції (перехід в неінерціальну систему) трохи спрощує пояснення. Ось і все пояснення явища фонтанування. Істотним виявляється те, що в польоті нерозривний, але нестисливий і нерозтяжний ланцюжок додатково витягується, щоб «накопичити» надлишок довжини, за рахунок малої ваги витягає кінці

ланцюжка (праворуч). Звичайно, використовувана нами модель є досить спрощеною і має ряд недоліків. Так, поза обліком втрати енергії на роботу по вигинанню ланцюжка. Чи не врахована і сила опору повітря, яка повинна брати участь при розрахунку прискорення падіння ланцюжка. При розрахунках в результаті виявилася виключеною наздоганяюча маса ланцюжка в наших результатах, але вона все-таки десь повинна проявитися. Наприклад, занадто легкий ланцюжок (нитка) почне літати в повітрі і заплутається - як заплутується волосінь слабо кинутого спінінга.

3.2. Задачі про фонтануючі ланцюги

Задача про «сифонні-ланцюжки» (Квант Меледін)

Це завдання, в чомусь перегукується з завданням про батіг. Через цвях перекинули тонкий довгий ланцюжок з малими непружними ланками так, що частина ланцюжка лежить на краю столу висотою h , а частина - на підлозі (рис.3.5). З якою сталою швидкістю буде рухатися ланцюжок після того, як його відпустять?

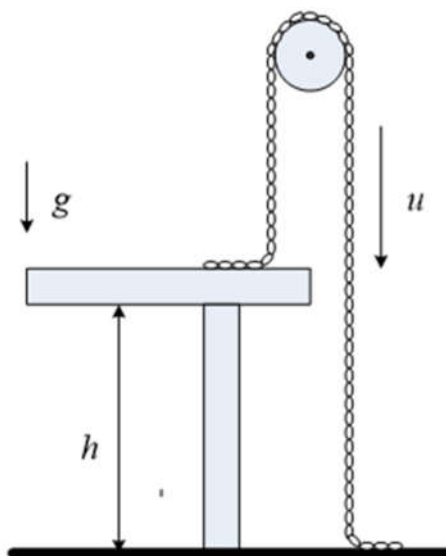


Рис. 3.5.

Введемо лінійну щільність ланцюжка $\rho = \frac{M}{L}$, де M - її маса, а L - довжина. Нехай встановилася швидкість u . Тоді за короткий час Δt в рух додається маса $\Delta m = \rho u \Delta t$, швидкість якої змінюється від 0 до u , а імпульс - від 0 до $\Delta p = \Delta m u = \rho u^2 \Delta t$. Цей імпульс повідомляє масі Δm силу тяжіння $\rho h g$, що діє на невірноважену частину ланцюжка. Виходячи з другого закону Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} u + m \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Так як розглядається рух зі сталою швидкістю, маємо

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} u = \frac{\rho u^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho u^2 = \rho g h.$$

Звідси отримаємо

$$u = \sqrt{gh}.$$

Зауважимо, що закон збереження енергії $\Delta mgh = \frac{\Delta mu^2}{2}$ дає неправильний результат, так як частина набутої при спуску енергії (рівно половина) втрачається при непружного ударі ланцюжка об підлогу.

Відзначимо також, що, якщо прибрати цвях, тобто розглядати задачу про ковзання ланцюжка з краю столу на підлогу, для знаходження сталої швидкості ні в рішенні, ні у відповіді нічого не зміниться.

Завдання про нитки в трубці (Квант Меледін)

Усередині U-подібної трубки масою M , що знаходиться на гладкому столі, рухається нерозтяжна нитка масою m (рис.3.6; вид зверху).

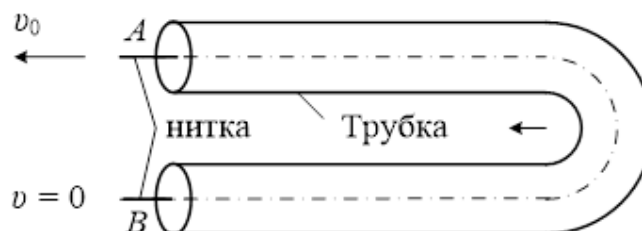


Рис. 3.6.

У початковий момент в кожному коліні трубки знаходилося по половині нитки, а сама трубка рухалася. При цьому швидкість кінця А нитки дорівнювала v_0 , а швидкість кінця В - нулю. З якою швидкістю буде рухатися трубка, коли нитка вилетить з неї? Рух трубки допускається тільки уздовж її прямолінійних ділянок, радіус трубки вважати дуже малим. Тертям знехтувати.

Так як нитка нерозтяжна, задане в початковий момент співвідношення швидкостей для кінців нитки можливо лише за умови, що швидкість u_0 трубки щодо столу в цей момент дорівнює $v_0/2$ і направлена в ту ж сторону, що і швидкість кінця нитки А.

Перейдемо в систему відліку, де початкова швидкість трубки дорівнює нулю. У цій системі половина нитки з кінцем А має швидкість $v_0/2$, імпульс $(m/2)(v_0/2)$ і кінетичну енергію $(m/2)(v_0/2)^2/2$. А половина нитки з кінцем В має швидкість $-v_0/2$, імпульс $-(m/2)(v_0/2)$ і кінетичну енергію $(m/2)(v_0/2)^2/2$.

Таким чином, спочатку в цій системі відліку повний імпульс нитки, а також імпульс і кінетична енергія трубки дорівнюють нулю. Енергія нитки при цьому дорівнює $mv_0^2/8$.

Нехай після вильоту нитки з трубки швидкість нитки дорівнює v , а швидкість трубки дорівнює u . Тоді закони збереження імпульсу і енергії можна записати в такий спосіб:

$$0 = Mu + mv, \quad \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Звідси

$$u = \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \frac{v_0}{2}.$$

Знак «мінус» обраний відповідно до закону збереження імпульсу, з якого випливає, що швидкості \vec{u} і \vec{v} спрямовані в протилежні сторони.

Повертаючись в систему відліку, пов'язану зі столом, знаходимо шукану швидкість трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = v_0 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \right).$$

3.2.1. Фізика батога

Дослідивши рух однорідних канатів (ланцюгів) не можна не розглянути фізику батога. Зазвичай батіг являє собою коротку палицю-кнучовище, до кінця якої прикріплений сплетений зі шкіри або джгута довгий (кілька метрів), міцний, із зменшуваним до вільного кінця, власне батіг (рис. 3.7).



Рис. 3.7. Батіг

Ударом батога він отримує швидкість, а потім різким рухом кнучовища викликають рух прикріпленою до нього частини батога в протилежну сторону. Через деякий час лунає сильне клацання (якщо батіг неміцний, то в цей момент частина його може відірватися). Виявляється, клацання виникає, коли величина швидкості у кінці батога переходить через значення швидкості звуку (як при переході звукового бар'єру надзвуковим літаком). Це виходить внаслідок того, що початкова кінетична енергія концентрується на рухомому, зменшеному відрізьку батога - кнучовище і решта батога, прикріплена до нього, при цьому нерухомі. Швидко зростає щільність кінетичної енергії, і, відповідно, наростає швидкість.

Розглянемо *задачу про батіг*. Нехай спочатку, рухаючи кнучовище зі швидкістю v_0 вліво, таку ж швидкість повідомляють всьому батога по всій довжині L , а потім, різко посунувши кнучовище вправо, утримують його

нерухомо, прикладаючи деяку силу. Тоді довжина l рухомої частини батога буде зменшуватися, а швидкість v - збільшуватися. При якому значенні l швидкість досягне величини швидкості звуку $v_{зв}$ (рис. 3.8)?



Рис. 3.8.

Спочатку для спрощення розглянемо однорідний батіг з масою M і довжиною L , тобто з лінійною щільністю $\rho = M / L$. Із закону збереження енергії маємо

$$\frac{\rho L v_0^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2},$$

або

$$v = v_0 \sqrt{\frac{L}{l}}. \quad (3.1)$$

(Між іншим, звідси видно, що при зменшенні l до нуля швидкість необмежено зростає.) Таким чином, отримуємо зв'язок

$$v = -\frac{dl}{dt} = v_0 \sqrt{\frac{L}{l}}.$$

Знак «мінус» обумовлений зменшенням довжини з плином часу. Запишемо зв'язок інакше:

$$l^{1/2} dl = -v_0 \sqrt{L} dt$$

і проінтегруємо ліву і праву частини по інтервалу часу t , за який довжина рухається частини батога змінюється від L до l :

$$\int_L^l l^{1/2} dl = \frac{l^{3/2}}{3/2} \Big|_L^l = \frac{2}{3} (l^{3/2} - L^{3/2}) = -v_0 \sqrt{L} t.$$

Звідси отримаємо

$$l = L \left(1 - \frac{3 \nu_0 t}{2 L} \right)^{2/3},$$

або, з урахуванням співвідношення (3.1):

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{3 \nu_0 t}{2 L} \right)^{-1/3}.$$

Формально при $t = \frac{2L}{3\nu_0}$ швидкість прямує до нескінченності, а довжина

l - до нуля. Однак це виходить при нескінченно тонкому однорідному батозі, що нереалістично.

Розглянемо тепер більш реальний варіант: батіг з лінійно зменшувемим, від кнутовища до кінця, радіусом кругового перетину (рис. 3.9).

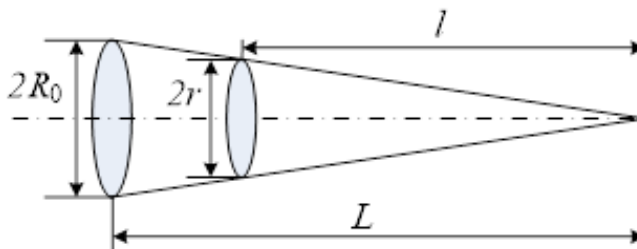


Рис. 3.9.

Із подібності трикутників на рис. 3.9 слідує $r = \frac{R_0 l}{L}$. Повторюючи попередню схему міркувань, запишемо закон збереження енергії:

$$\frac{m_0 \nu_0^2}{2} = \rho \frac{\pi R_0^2 L \nu_0^2}{3} = \rho \frac{\pi r r^2 l \nu^2}{3},$$

звідки, з урахуванням зв'язку $\frac{R_0}{r} = \frac{L}{l}$, отримуємо

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{L}{l} \right)^{3/2}.$$

тоді

$$l = L \left(1 - \frac{5 \nu_0 t}{2 L} \right)^{2/5}, \quad \nu = \frac{\nu_0}{\left(1 - \frac{5 \nu_0 t}{2 L} \right)^{3/5}}$$

Оцінимо, при якій довжині l швидкість ν досягає значення швидкості звуку $\nu_{зв} = 330$ м/с. Поклавши $L = 5$ м, $\nu_0 = 1$ м/с, отримаємо

$$l = \frac{L}{(\nu_{зв} / \nu_0)^{2.3}} \approx \frac{5}{330^{2/3}} = 0,1 \text{ м.}$$

Таким чином, при довжині близько 10 см від кінця батога можна почути клацання – перехід звукового бар'єру.

3.2.2. Підвісні мости

В даний час в світі широко використовуються висячі мости. Несуча конструкція висячого мосту являє собою гнучкий елемент, його називають кабелем або ланцюгом, закріплений на міцних опорах - пілонах. Проліт моста підвішений до ланцюга на вертикальних тросах. Оскільки маса прольоту набагато більше маси ланцюга, вертикальні троси розташовані близько один до одного (ланцюг можна вважати плавною кривою), а їх довжини підібрані так, що сили натягу всіх тросів однакові.

Знайдемо форму ланцюга, тобто рівняння ланцюга в системі координат, зображеної на рис. 3.10. [15]

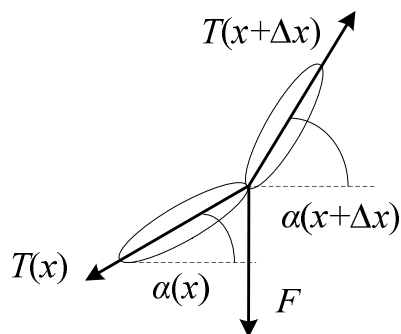


Рис. 3.10.

У 1634-1636 роках Галілео Галілей написав свою головну працю з механіки - «Бесіди і математичні докази двох нових наук». У цій праці він сформулював теорію рівноприскореного руху і заклав основи статички і опору матеріалів - науки, що займається вивченням деформацій тіл. Галілей пише в «Бесідах»: «віб'єм в стіну два цвяха на однаковій висоті над горизонтом і ... між одним і іншим цвяхом підвісимо тонкий ланцюжок ... Ланцюжок цей, звисаючи, розташується у вигляді параболи». В іншому місці цієї ж книги Галілей пише по-іншому: «... канат, натягнутий в більший чи меншій мірі, розташовується по лінії, дуже близька до параболи. Подібність настільки велика, що якщо ви накреслите на вертикальній площині параболічну лінію і

... підвісити ланцюжок, ... то ви побачите (скорочуючи або подовжуючи ланцюжок, залежно від потреби), що вона дуже близько підходить до параболи; при цьому збіг її з параболою спостерігається тим більше, чим менше кривизна параболи ». В одному з рукописів Галілея є креслення, на якому зображена підвішений в двох точках ланцюг і тут же нанесені точки, що лежать на параболі, що стикається з ланцюгом в нижній точці і має в ній ту ж кривизну. З креслення видно гарний збіг параболи з ланцюгом в нижній частині і помітна різниця цих ліній при видаленні від нижньої точки ланцюга. Так де ж правий, а де помилявся Галілей?

У 1691 році, коли вже був розроблений математичний аналіз, три видатних математика і фізика Г. Лейбніц, Х. Гюйгенс і Й. Бернуллі практично одночасно і незалежно один від одного вирішили задачу «про ланцюгову лінію» - знайшли рівняння однорідного ланцюга, підвішеного в двох точках, розташованих на однаковій висоті, і провисає завдяки силі тяжіння. Ця функція виявилася не параболою - вона називається «гіперболічний косинус». Ланцюгова лінія практично збігається з параболою поблизу свого мінімуму, але на великих відстанях від мінімуму вона помітно відрізняється від параболи.

А що якщо розглянути ланцюжок, який натягується силою, пропорційний не довжині кожної ланки ланцюга, а рівномірно розподіленим по горизонталі вертикальним навантаженням? З такою ситуацією ми стикаємося, наприклад, висячих мостах, коли основне навантаження на ланцюг дається силою тяжіння не ланцюга, а підвішеною до неї проїжджої частини моста.

Оцінимо, як розташовується в рівновазі ланцюг висячого моста. Розглянемо ділянку ланцюга між двома вертикальними тросами, розташованими через один. Оскільки за умовою маса ланцюга мала, а троси розташовані близько один до одного, ділянки ланцюга між найближчими вертикальними тросами можна вважати прямими. На ділянку діють дві сили натягу ланцюга (по краях) і сила з боку вертикального троса (в центрі). Умови

рівноваги цієї ділянки ланцюга в проєкціях на горизонтальну і вертикальну осі мають вигляд

$$\begin{aligned} T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) &= T(x) \cos \alpha(x), \\ T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) &= F + T(x) \sin \alpha(x). \end{aligned}$$

Тут $T(x)$ - сила натягу ланцюга як функція горизонтальної координати $\alpha(x)$ - кут нахилу ланцюга до горизонту як функція x , Δx - відстань між найближчими тросами, F - сила натягу вертикального троса (яка за умовою однакова для всіх тросів і може бути пов'язана з масою моста M і кількістю вертикальних тросів N : $F = Mg / N$).

Ділячи перше рівняння на Δx і враховуючи, що нам необхідно розглянути цей вираз при малій відстані між тросами (в межах при $\Delta x \rightarrow 0$), отримаємо (з використанням похідної)

$$\frac{T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) - T(x) \cos \alpha(x)}{\Delta x} = (T(x) \cos \alpha(x))' = 0.$$

Звідси находимо

$$T(x) \cos \alpha(x) = A,$$

де A - деяка постійна, що має сенс горизонтальної складової сили натягу ланцюга, яка дорівнює горизонтальній складовій сили, що діє з боку ланцюга на пілони. Аналогічні обчислення з другою умовою рівноваги дають

$$(T(x) \sin \alpha(x))' = f,$$

де $f = F / \Delta x$ - віддалене навантаження на одиницю довжини моста, і

$$T(x) \sin \alpha(x) = fx + B,$$

де B - деяка постійна. Підставляючи сюди знайдений вище вираз для отримаємо

$$A \operatorname{tg} \alpha(x) = fx + B.$$

Але тангенс кута нахилу ланцюга до осі x є похідна рівняння ланцюга по змінній x . Тому

$$Ay'(x) = fx + B,$$

де $y(x)$ - рівняння ланцюга. Постійну B знайти легко: оскільки при $x = 0$ (середина моста) ланцюг розташована горизонтально (координату $x = 0$ має нижня точка ланцюга), то $B = 0$. А так як похідна рівняння ланцюга залежить від x лінійно, то y залежить від x квадратично :

$$y(x) = \frac{f}{2A}x^2 + C,$$

де C - постійна.

Ця постійна також повинна бути обрана рівною нулю, оскільки при нашому виборі системи координат точці з координатою $x = 0$ відповідає $y = 0$. Таким чином, ланцюг являє собою параболу, рівняння якої таке:

$$y(x) = \frac{f}{2A}x^2.$$

Цей результат є наближенням: якщо маса ланцюга порівнянна з масою проїжджої частини, то ланцюг ближче до ланцюгової лінії, якщо ж маса ланцюга мала в порівнянні з масою проїжджої частини, то ланцюг ближче до параболи.

3.3 Експериментальне дослідження явища «фонтануючого ланцюга»

Постановка задачі

Частина ланцюга довжиною a лежить на гладкій горизонтальній поверхні, а інша частина довжиною b звисає донизу рис. 3. 11. Ланцюг зісковзує зі столу. Визначити, через який час після того, як весь ланцюг прийме вертикальне положення, вона впаде на підлогу. Висота столу – H (тертям об стіл знехтувати).

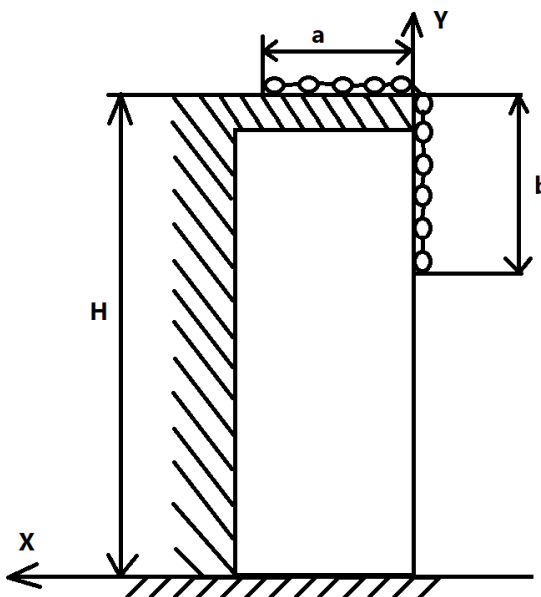


Рис. 3.11.

Виберемо систему координат, як показано на рис. 3.11. Координати центра тяжіння всього ланцюга в початковому стані:

$$x_{\text{ц}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m \frac{a}{a+b} \frac{a}{2} + \frac{mb}{a+b} \cdot 0}{\frac{ma}{a+b} + \frac{mb}{a+b}} = \frac{a^2}{2(a+b)};$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\frac{ma}{a+b} H + \frac{mb}{a+b} (H - \frac{b}{2})}{\frac{ma}{a+b} + \frac{mb}{a+b}} = H - \frac{b^2}{2(a+b)}.$$

Оскільки звисаюча частина b ланцюга подовжується, то ланцюг буде зісковзувати із столу під дією змінної сили, яка збільшується від $mgb/(a+b)$ до mg і прикладеної до центра тяжіння b (сила тяжіння частини a урівноважується реакцією опори). Завдяки дії цієї змінної сили ланцюг набуває змінне прискорення, яке зростає від $gb/(a+b)$ до g .

Ці труднощі можна обійти наступним чином. Початкова потенціальна енергія ланцюга

$$E_1 = mg \cdot y_{\text{ц}} = mg \left[H - \frac{b^2}{2(a+b)} \right].$$

Робота по переносу центра тяжіння ланцюга на вертикаль падіння (вісь Y) рівна нулю, так як ланцюг рухається тільки під дією сили тяжіння.

Потенціальна енергія ланцюга в момент початку вільного падіння

$$E_2 = mg \left(H - \frac{a+b}{2} \right).$$

Різниця $E_1 - E_2$ рівна кінетичній енергії ланцюга в момент вільного падіння

$$mg \left[H - \frac{b^2}{2(a+b)} \right] - mg \left(H - \frac{a+b}{2} \right) = \frac{m\vartheta^2}{2},$$

звідки

$$\vartheta = \sqrt{\frac{ag(a+2b)}{a+b}}.$$

Ланцюжок впаде на підлогу тоді, коли його остання ланка доторкнеться до підлоги. Таким чином, час, який нас цікавить, визначається із співвідношення

$$H = \vartheta t + \frac{gt^2}{2},$$

звідки

$$t = -\frac{\vartheta}{g} \pm \sqrt{\frac{\vartheta^2}{g^2} + \frac{2H}{g}},$$

Знак мінус перед коренем відкидається, так як $t > 0$.

Остаточно

$$t = -\sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{g(a+b)}} + \sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{g(a+b)} + \frac{2H}{g}}$$

Динаміка падіння ланцюга в гравітаційному полі є дуже цікавою проблемою, яку необхідно розглянути в проміжних курсах класичної механіки для навчання способом керування системами змінних мас. Серед різних можливих експериментальних конфігурацій ми зосереджуємося на наступному: ланцюг розташований на рухомій основі, який безпосередню приходить до руху, шляхом його відпускання. Установка виглядає наступним чином: поверхня, на яку закріплено рухомий шків, лінійка, для фіксування значення падіння ланцюгів, секундомір для знання показів часу, рис. 2.1.



Рис.3.1. Експериментальна установка, щодо дослідження падіння ланцюга з довільної висоти h

Після того, як наша установка була приведена до руху, ми можемо отримати експериментальні данні, щодо опису руху падіння ланцюга змінної маси.

Результати оформлені у вигляді графіка руху рис. 3.2.

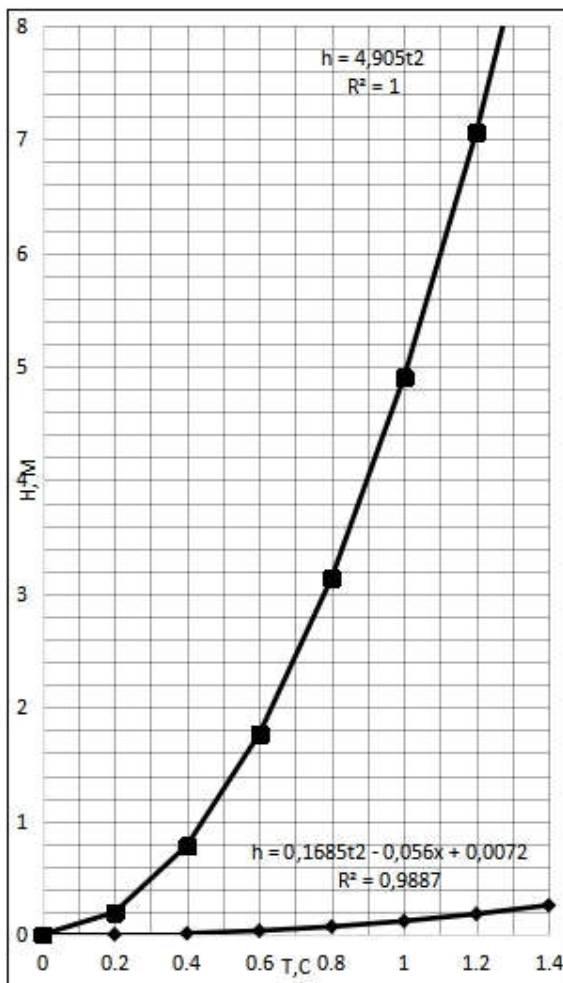


Рис.3.2.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У ході дослідження різних наукових джерел, було виявлено низку основних задач, щодо характеру руху різних тіл у полі тяжіння Землі. Відповідно до цього, було досліджено: фонтани із бус, падіння ланцюга із певної висоти, та його характеристика ітд.

ВИСНОВКИ

Під час проведення наукового дослідження, щодо динаміки мотузок і ланцюгів – систем із розсередженою масою, було проведено огляд багатьох наукових джерел.

Теоретично було обґрунтовано закони руху тіл у полі тяжіння Землі. Було досліджено прискорення вільного падіння тіл різної маси, падіння ланцюгів і характеристика руху інших систем із розсередженою масою. Експериментальним шляхом, було доведено, що прискорення вільного падіння прив'язаного тіла більше за вже відомий теоретичний результат. Створено функціональні установки для дослідження даної теми.

Практичне отримання результатів полягає не тільки в необхідності перегляду даної теми, а і показує необхідність в уведені даної теми до курсу загальної фізики, адже, на перший погляд, досить проста задача, може поставити в глухий кут навіть досвідченого вчителя/викладача.

Усі проведені дослідження є абсолютно доступними для демонстрації подібного явища падіння тіл, не тільки у ЗВО, а і можливо для школярів із поглибленим вивчення фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Богданов С. Как быстрее падать? Журнал “Квант”. 2012, №1, стр. 16, 23
2. C. Mungan, “Newtonian Analysis of a Folded Chain Drop,” *Physics Teacher*, 56, 295 (April 2018).
3. W. Tomaszewski, P. Pieranski, and J.-C. Géminard, “The motion of a freely falling chain tip,” *Am. J. Phys.* 74, 2006, P. 776–783.
4. S. T. Thornton and J. B. Marion, Student Solutions Manual for Thornton/ Marion’s Classical Dynamics of Particles and Systems, 5th ed. BrooksCole, Belmont, CA, 2004, 290 p.
5. J. S. Miller, “An extension of the falling chain problem,” and J. Satterly, “Falling chains,” letters to the editor, *Am. J. Phys.* 19, P.383–384 (Sept. 1951).
6. M. Schagerl, W. Steiner, and H. Troger, “On the paradox of the free folded chain,” *Acta Mech*, 1997, P. 155–168.
7. J.-C. Géminard and Loïc Vanel, “The motion of a freely falling chain tip: Force measurements,” *Am. J. Phys.* 76, 2008, P. 541–545.
8. C. W. Wong, S. Ho, and K. Yasui, “The falling chain of Hopkins, Tait, Steele and Cayley,” *Eur. J. Phys.* 28, 2007, P. 385–400.
9. Wong, C. W. and Yasui, K., Falling chains, *Am. J. Phys.* 74, 2006, P. 490-496.
10. Wong, C. W., Youn, S. H. and Yasui, K., The falling chain of Hopkins, Tait, Steele and Cayley, *Eur. J. Phys.* 28, 2007, P. 385-400.
11. Tiersten, M. S., Force, momentum change, and motion, *Am. J. Phys.* 37, 1969, P. 82-87.
12. A. Grewal, P. Johnson, and A. Ruina, “A chain that speeds up, rather than slows, due to collisions: How compression can cause tension,” *Am. J. Phys.* 79, 723–729 (July 2011) with a Supplemental Simulation on p. 981 of the Sept. 2011.

13. Siegel, S., more about variable mass systems, *Am. J. Phys.* 40, 1972, P. 183-185
14. Galkin, M. G., The dynamics of a falling chain: II, *Am. J. Phys.* 57, 1989, C. 157-159.
15. Prato, D. and Gleiser, R. J., Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table, *Am. J. Phys.* 50, 1982, P. 536-539.
16. Galkin, M. G. and March, R. H., The dynamics of a falling chain: I, *Am. J. Phys.* 57, 1989, P. 154-157
17. Седов Л. И. Механика сплошных сред. / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1983. – С. 150.
18. Tomaszewski, W., Pierański, P. and Geminard, J.-C., The motion of a freely falling chain tip, *Am. J. Phys.* 74, 2006, P. 776-783.
19. Kagan, D. and Kott, A., The greater-than-g acceleration of a bungee jumper, *Phys. Teacher* 34, 1996, P. 368-373.
20. When points A and O in Fig. 1 are far apart, sections AB and DE will initially be exact catenaries [as in F. Behroozi, “In praise of the catenary,” *Phys. Teach.* 56, 214–217 (April 2018)] only for a uniform string rather than for a chain having discrete links.
21. Heck, A., Uylings, P. and Kędzierska, E., Understanding the physics of bungee jumping, *Phys. Educ.* 45, 2010, P. 63-72.
22. Myrhvold, N. P. and Curie, P. J., Supersonic sauropods? Tail dynamics in the diplodocids, *Paleobiology* 23, 1997, P. 393-409.
23. Heywood, W. A., Hurwitz, H., Jr. and Ryan, D. Z., Whip effect in a falling chain, *Am. J. Phys.* 23, 1955, P. 279-280.
24. Hooft, G., Can there be physics without experiments? Challenges and pitfalls, *Int. J. Mod. Phys. A* 16, 2001, P. 2895-2908.
25. Eke, F. O. and Mao, T. C., On the dynamics of variable mass systems, *Int. J. Mech. Eng. Educ.* 30(2), 2002, P. 123-137
26. “Chain Drop Answer 2,” – Режим доступа до ресурсу: <https://www.youtube.com/watch?v=X-QFAB0gEtE>.

27. P. Krehl, S. Engemann, and D. Schwenkel, "The puzzle of whip cracking uncovered by a correlation of whip-tip kinematics with shock wave emission," *Shock Waves* **8**, 1–9 (Feb. 1998).
28. Седов Л. И. Механика сплошных сред. / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1983. – С. 150.
29. Старовойтов В. Н. О неединственности решения задачи о движении твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 34, Зап. научн. сем. ПОМИ, 306, ПОМИ, СПб. – 2003. – С. 199–209.
30. Трофимова Т.Н. Курс физики / Т. Н. Трофимов – М.: Высшая школа. – 1985. – С. 97.
31. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Наука, – 1990. – С. 120.