МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_________ В.В. Корольський
(підпис)
«___» ____________ 2018 р.

Реєстраційний №__________
«___» ____________ 2018р.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-13
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 середня освіта (математика)
Бесхлібної Олександри Сергіївни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Черних Лариса Олександрівна

Оцінка:
Національна шкала ___________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК __________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК __________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2018

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ……..6

1.1. Особливості вивчення нерівностей та їх систем в контексті компетентнісно-орієнтованого підходу 6

1.2. Складові алгебраїчної культури учнів... 12

1.3. Логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності».................................. 17

Висновки до розділу 1 26

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ……………………………………………………27

2.1. Методика формування умінь і навичок розв'язування раціональних нерівностей та їх систем 27

2.1.1. Числові та лінійні нерівності 29

2.1.2. Квадратичні нерівності.. 39

2.1.3.Теоретико-множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем.. 46

2.1.4. Методичні особливості розв'язування систем нерівностей 49

2.2. Формування алгоритмічних умінь і навичок при розв'язуванні нерівностей методом інтервалів 61

2.3. Методика формування умінь і навичок розв'язування ірраціональних та трансцендентних нерівностей та їх систем 71

2.4. Застосування програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем…………………………………………………………………… 78

Висновки до розділу 2 89

ВИСНОВКИ 90

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 92

ДОДАТКИ…………………………………………………………….....99

Додаток А 99

Додаток Б 104

Додаток В 109

Додаток Г 113

Додаток Д 115

Додаток Є... 118

ВСТУП

Актуальність дослідження. Змістова лінія «Нерівності» займає досить велику частину курсу алгебри та має важливе практичне значення. Багатство змісту лінії, способів та прийомів розв'язання нерівностей відкриває широкі можливості для її застосування не лише при вивченні ряду інших тем шкільного курсу алгебри, а й різних розділів математики. За допомогою нерівностей та їх систем розв'язуються також важливі прикладні задачі.

Вивчення нерівностей та їх систем в ШКМ відбувається поступово і пов'язане з такими видами діяльності:

- розв'язування нерівностей;
- розв'язування систем нерівностей;
- доведення нерівностей.

Аналіз навчальної, науково-методичної літератури показує, що велика увага приділяється першому і другому напряму. Тому ми обрали *тему нашого дослідження* – «Методика вивчення нерівностей та їх систем в курсі математики середньої школи».

Проаналізувавши літературу, присвячену методиці вивчення теми «Нерівності» в основній школі, ми побачили, що на сьогоднішній день є ціла низка досліджень, що розкривають різні її аспекти. Зокрема, в дослідженні К.І. Нешкова сформульовано принципи відбору змісту навчального матеріалу з теми та виділено необхідний його обсяг. При цьому велику роль автор відводить тренувальним вправам [41]. Питання взаємозв'язку між понятттями «нерівність», «рівняння» і «функція» широко висвітлено у дослідженнях М.В. Паюл, І.М. Степури [42, 61]. Дослідження М.П. Комова, Г.Н. Солтан присвячені доведенню і розв'язуванню нерівностей [27, 60]. Велику увагу приділено внутрішньопредметним зв'язкам при вивченні нерівностей та їх систем в курсі математики середньої школи у дослідженнях Є.Ф. Недошивкіна [40]. Прикладні аспекти вивчення нерівностей та їх систем в середній школі висвітлено у роботах Н.Б. Мельникової, Д.Д. Рибдалової [34, 54].

Отже, можемо стверджувати, що окремим питанням методики навчання нерівностей та їх систем в ШКМ присвячено чимало досліджень. Проте, незважаючи на значний позитивний досвід у розробці методик вивчення теми «Нерівності», як показує практика, учні середньої школи не в повній мірі володіють основними знаннями та уміннями розв'язування нерівностей та їх системи. Тому перед вчителем стоїть завдання – формувати в учнів вміння розв'язувати нерівності кожного виду та їх системи.

Мета дослідження: розробити методику формування в учнів умінь і навичок розв'язувати нерівності та їх системи на основі компетентнісно-орієнтованого підходу.

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри у середній школі.

Предмет дослідження: методичні особливості формування в учнів умінь розв'язувати нерівності та їх системи.

Відповідно до мети дослідження сформулюємо наступні **завдання:**

1) Провести аналіз психолого-педагогічної, навчальної і методичної літератури з метою порівняння різних методичних прийомів вивчення теми.
2) Провести логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри та алгебри і початків аналізу з теми «Нерівності».
3) Дослідити теоретико-множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем.
4) Розробити методику формування умінь і навичок розв'язування раціональних, ірраціональних і трансцендентних нерівностей та їх систем в умовах компетентнісного підходу.
5) Описати можливості використання програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем.

Методи дослідження, застосовані для реалізації поставлених завдань:

- *теоретичні*: вивчення і аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з теми, узагальнення;

- *емпіричні:* вивчення педагогічного досвіду, спостереження, порівняння.

Практичне значення магістерської роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами – практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

Апробації дослідження. За темою дослідження виконані такі публікації: стаття на тему «Теоретико-множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем» та тези «Методичні особливості складання систем раціональних нерівностей» у збірник матеріалів Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» [6, С. 304–307; 7, С. 99–103].

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел, що містить 70 найменувань та 6 додатків. У вступі підкреслена актуальність дослідження. Перший розділ присвячений розгляду особливостей вивчення алгебри в контексті компетентнісно-орієнтованого підходу, ролі змістової лінії «Нерівності» в шкільному курсі математики, складовим алгебраїчної культури учнів в даній темі. У другому розділі описана методика формування умінь і навичок розв'язування нерівностей та їх систем, розглянуті можливості застосування програмних засобів при вивченні теми.

РОЗДІЛ 1.
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

1.1. Особливості вивчення нерівностей та їх систем в контексті компетентнісно-орієнтованого підходу

У зв’язку з реалізацією оновленого змісту освіти важливим показником якості математичної освіти, підготовки молоді стає математична компетентність.

Розглядаючи сутність поняття «математична компетентність», ми вважаємо, що доречно буде ознайомитися спочатку з поняттями «компетенція», «компетентність». Аналіз психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури показує всю складність та неоднозначність трактування цих понять.

Оскільки поняття «компетенція» є багатозначним і донині відсутнє єдине його трактування, то існує декілька підходів до його визначення.

Найчастіше поняття компетенції використовується для позначення:

- освітнього результату, який виражається в реальному володінні методами, засобами діяльності, у здатності розв’язувати поставлені завдання [11, с. 210];
- такої форми сполучення знань, умінь і навичок, що дають змогу ставити і досягати мету щодо перетворення навколишнього середовища [46, с. 66].

За визначенням І. Зимової, компетенція – сукупність взаємопов’язаних якостей особистості (знань, умінь, навичок, способів діяльності), що є заданими до відповідного кола предметів і процесів та необхідними для якісної продуктивної дії стосовно них [19, с. 125].

Отже, під компетенцією в науковій літературі розуміють наперед задану соціальну вимогу (норму) до освітньої підготовки учня, необхідної для його якісної продуктивної діяльності в певній сфері.

З’ясуємо, що включає в себе поняття «компетентність».

Дослідивши наукову літературу, ми вияснили, що найбільшого поширення у вітчизняній науковій літературі набуло визначення компетентності як «сукупності знань і вмінь, необхідних для ефективної професійної діяльності: вміння аналізувати, передбачати наслідки діяльності, використовувати інформацію» [9, с. 67].

С. Шишов та І. Агапов визначають компетентність як «загальну здатність і готовність особистості до діяльності, які засновані на знаннях і досвіді та придбані завдяки навчанню, орієнтовані на самостійну участь особистості у навчально-пізнавальному процесі, а також спрямовані на її успішне включення в трудову діяльність» [69, с. 20].

Інший підхід до трактування даного поняття демонструє В. Береза. Під компетентністю вона розуміє «оволодіння знаннями та вміннями, що дозволяють висловлювати грамотні судження, оцінки, думки» [4, с.59].

Отже, як ми побачили, компетентність – це володіння учнем відповідною компетенцією, що містить його особистісне ставлення до предмета діяльності. Таким чином, компетентність – це не тільки знання, окремі вміння і навички; вона належить до галузі складних умінь, охоплює та розвиває основні групи особистісних якостей особистості.

Перейдемо тепер до теоретичного обґрунтування поняття «математична компетентність».

Як зазначає В. Глущенко, математична компетентність – це уміння працювати з числовою інформацією [15, с. 56]. С. Раков під математичною компетентністю розуміє спроможність учня бачити та застосувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати та оцінювати отримані результати [50, с. 124].

Математична компетентність утворює систему її *складових* (рис.1.1):

- процедурна компетентність – уміння розв’язувати типові математичні задачі;

- логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень;
- технологічна компетентність – володіння сучасними математичними пакетами;
- дослідницька компетентність – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами;
- методологічна компетентність – уміння оцінювати використання математичних методів для розв’язування індивідуально й суспільно значущих задач [51, с. 189].

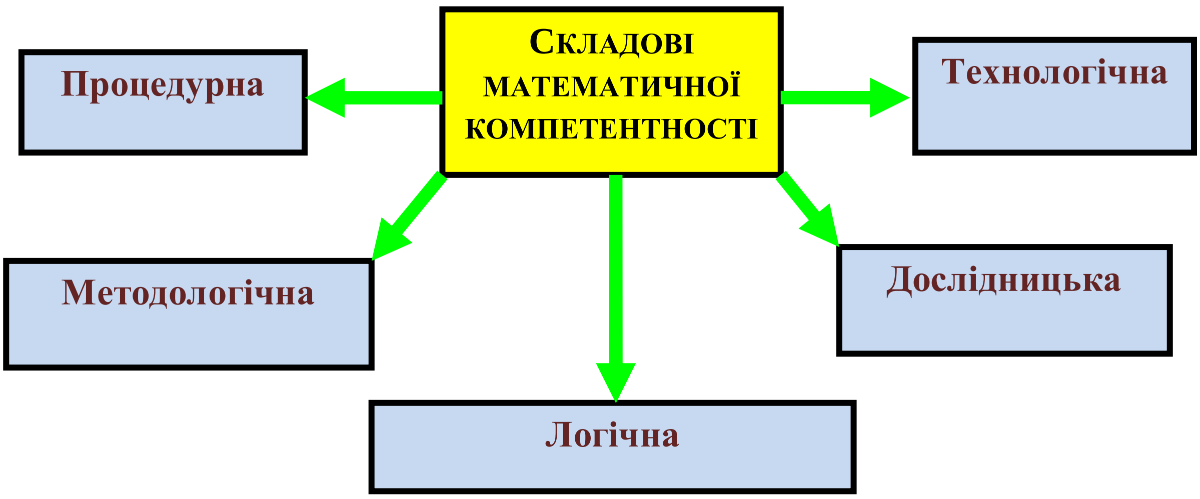


Рис. 1.1. Складові математичної компетентності (за визначенням С.А. Ракова)

В науковій літературі виокремлюються також *рівні математичної компетентності*. Розглянемо їх.

Перший рівень (рівень відтворення) – це пряме застосування в знайомій ситуації відомих фактів, стандартних прийомів, розпізнавання математичних об'єктів і властивостей, застосування відомих алгоритмів і технічних навичок, безпосереднє виконання обчислень.

Другий рівень (рівень встановлення зв’язків) будується на репродуктивній діяльності розв’язування завдань, які, близькі до типових.

Зміст завдання підказує, матеріал якого розділу математики треба використовувати і які відомі методи застосувати.

Третій рівень (рівень міркувань) трактується як розвиток попереднього рівня. Для розв'язування завдань цього рівня потрібні певна інтуїція, роздуми і творчість у виборі математичного інструментарію, інтегрування знань з різних розділів курсу математики, самостійна розробка алгоритму дій [67, с. 21].

О. Ісаєва зазначає, що вчитель повинен: створити умови для розвитку та самореалізації учнів; задовольняти запити та потреби школярів; домогтися засвоєння учнями продуктивних знань, умінь; розвивати потребу у поповненні знань; виховувати учнів для життя в цивілізованому громадянському суспільстві [21, с. 6].

Основним завданням сучасного педагога є навчально-виховна діяльність, спрямована на те, щоб не тільки дати учням певну кількість знань, умінь, навичок, але й сформувати їх математичну компетентність. Підґрунтям до формування математичної компетентності є оволодіння математичним методом пізнання дійсності. Тому розвиток математичної компетентності учня при вивченні алгебри має бути системним і включати різні аспекти навчально-виховного процесу: урок, як основну форму навчальної діяльності, факультативи, самоосвіту, позакласну роботу з алгебри (додаток Д) [56, с. 26].

Тому ми вважаємо, доречно розглянути *шляхи формування математичної компетентності учнів при вивченні нерівностей.*

Велику роль у формуванні математичної компетентності при вивченні даної теми відіграє застосування міжпредметних зв'язків та використання елементів технологій проблемного навчання. На будь-якому етапі уроку вчитель може створити проблемну ситуацію за допомогою історичних екскурсів, життєвих фактів, цікавих задач, в математичному змісті яких міститься суперечність наукових фактів з уявленнями учнів, що викликає в них здивування чи нерозуміння, і викликає бажання отримати нові знання.

Для набуття учнями логічної та процедурної компетентності доцільно формувати в учнів вміння обґрунтовувати правильність виконання рівносильних перетворень при розв'язуванні нерівностей, доцільність вибору певного методу розв'язування [31, с. 98]. Використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема системи динамічної математики GeoGebra, при розв'язуванні евристичних та дослідницьких задач з теми сприятиме розвитку дослідницької і технологічної компетентності учнів.

Ще одним ефективним засобом формування математичних компетентностей учнів є використання прикладних задач та методу проектів, які сприяють підвищенню зацікавленості учнів, розвитку логічного мислення та дослідницьких вмінь школярів. Зокрема, метод проектів дозволяє перевірити та закріпити теоретичні знання, сприяє набуттю учнями цінного досвіду, необхідного для розвитку та функціонування відповідної компетентності. Також важливо намагатися створювати мотивацію для пошуку математичних знань, що спонукає до самоосвіти і формує математично компетентного учня [30, с. 43].

Вдосконалення існуючої методики навчання алгебри в основній школі має здійснюватися з урахуванням таких психолого-педагогічних та методичних вимог:

1) врахування вікових та індивідуальних особливостей учня;
2) виділення в явному вигляді загальних орієнтирів діяльності щодо розв'язування алгебраїчних задач та доведення тверджень;
3) пропонування моделі розумової діяльності учнів із пошуку планів розв'язування завдань та засвоєння способів їх розв'язування з урахуванням конкретних умов класу;
4) використання методів навчання, пов'язаних з етапами формування прийомів навчальної діяльності;
5) застосовування засобів наочності та прикладних задач [1, с. 283].

Формування математичної компетентності учнів можна реалізувати, створивши особистісно-розвивальну модель навчального процесу, яка повинна відповідати певним принципам (додаток Е).

Отже, ми з'ясували, що здійснювати компетентнісно-орієнтоване навчання в темі «Нерівності» можна багатьма методами, прийомами. Зокрема – добір системи вправ з теми, технологія мультимедійного навчання. А використовуючи ППЗ GRAN1, ЕНМК «Алгебра» та систему динамічної математики GeoGebra, учні залучаються до самостійної творчої діяльності. Досліджуючи, вони проходять усі етапи творчого пошуку, аналізують і порівнюють, доводять і спростовують, узагальнюють та оцінюють.

Відповідно до цього можемо визначити особливості організації навчальної діяльності учнів з теми з метою формування математичної компетентності:

- відмова від репродуктивного повторення алгебраїчних фактів;
- пріоритет навчальних завдань, які активізують розумову діяльність школярів (практичних робіт, задач практичного змісту);
- активне використання прийомів порівняння, класифікації, перетворення, конструювання;
- встановлення зв'язків між алгебраїчними поняттями на основі власного досвіду учнів;
- використання ІКТ.

1.2. Складові алгебраїчної культури учнів

Вивчення теми «Нерівності» надає великі можливості для формування і розвитку алгебраїчної культури учнів.

Як зазначає М.В. Третяк, математична культура – це складна система, яку утворюють такі її складові: математична грамотність (термінологічна грамотність, математичне мовлення, обчислювальна культура, графічна культура) та навички математичного моделювання [63, с. 46].

С. Березін під *математичною грамотністю* розуміє уміння правильно застосовувати математичні терміни, наявність необхідних знань і відомостей для виконання роботи (вирішення проблеми) в конкретній області, правильної математичної мови (усної та письмової), обчислювальної та графічної культури [5, с. 103].

Формування математичної грамотності учнів можна здійснювати протягом усього періоду вивчення теми. Цей процес є багатогранним, він полягає у поетапній реалізації під час освітнього процесу багатьох стратегічних навчальних дій. Мета вчителів:

- вибудувати у дітей загальний математичний стиль мислення,
- формувати логіку індуктивно-дедуктивних міркувань учнів;
- привчати учнів оперувати математичними поняттями та використовувати їх властивості у практичній діяльності;
- привчати учнів до розуміння математичної мови;
- навчити користуватися математичною термінологією та буквеною символікою;
- постійно збагачувати математичний словник учнів, їх усне та письмове математичне мовлення.

Ці дії уможливлюють досягнення позитивних результатів для формування алгебраїчної культури учнів.

Формування *термінологічної грамотності* неможливе без знання учнями специфічної наукової термінології [47, с. 99]. Ознайомлення учнів із математичною термінологією теми відбувається поступово відповідно до навчальної програми, починаючи з 9-го класу, але спирається на попередні знання учнів. Так, наприклад, на початку вивчення лінійних нерівностей з однією змінною учні проводять паралелі між змістом понять «розв'язок нерівності» і «розв'язок рівняння», «рівносильні нерівності» та «рівносильні рівняння». Використання опорних понять забезпечує доступність нових знань і готовність учнів до їх сприймання.

Засвоєння учнями математичної термінології відбувається шляхом наслідування мови вчителя та в процесі виконання конкретних вправ. Тож сучасному вчителю необхідно добирати різні форми організації навчально-пізнавальної діяльності учнів відповідно до їх індивідуальних і вікових особливостей та використовувати багатий арсенал дидактичного матеріалу для організації таких видів діяльності [64, с. 103]:

- виконання системи вправ з термінологічним спрямуванням;
- виконання вправ на читання та запис математичних виразів, нерівностей та інших математичних записів;
- виконання завдань з переходу від однієї математичної моделі до іншої;
- робота над словником математичних термінів;
- робота над розумінням і застосуванням математичних термінів;
- організація учнівських усних чи письмових повідомлень з історії виникнення та розвитку математичних понять, термінів, символів.

Особливе місце серед цих видів діяльності займають вправи з термінологічним спрямуванням. Виконання таких вправ з опорою на записи виучуваних термінів на дошці чи окремих аркушах значно підсилює їх ефективність [48, с. 38]. Такі вправи передбачають свідоме виконання завдання і оперування відповідними математичними термінами.

При розв'язуванні вправ з термінологічним спрямуванням учень має міркувати, спираючись на розуміння математичної мови, математичних термінів та символів. Важливим вмінням учня є вміння цілісно сприймати зміст завдання, а вже потім розв'язувати його, відтворючи попередньо засвоєні дії, висловлювати або записувати остаточну відповідь [8, с. 13].

У зв'язку з оновленням цілей навчання математики все більше уваги приділяється розвитку компетенцій учнів, пов'язаних з розумінням та застосуванням іншомовних математичних термінів. Наприклад, в підручнику з алгебри для 10-го класу (авт. Г.П. Бевз, Н.Г. Владімірова) 2018 року на профільному рівні усі необхідні для вивчення поняття теми представлені англійською мовою, зокрема: ірраціональна нерівність – irrational inequalities, найпростіші тригонометричні нерівності – the simplest trigonometric inequalities.

Оскільки джерелом знань та зразком правильного слововикористання математичних термінів є підручник, то завдання вчителя – навчити учня уважно працювати з підручником.

Формування термінологічної грамотності тісно пов'язане з *розвитком математичного мовлення учня*. Тож на уроці вчителю потрібно слідкувати не лише за правильністю розв'язування задач, а й за правильною вимовою слів, грамотністю написання, правильним стилем при побудові речень. Оскільки учні не завжди усвідомлюють відповідність запису його словесному вираженню, то для виправлення та запобігання мовних помилок в учнів при вивченні нерівностей корисно запропонувати їм завдання такого типу.

1. Записати під диктовку певний математичний термін і поставити наголос.
2. Переформулювати (усно чи письмово) деяку теорему.
3. Сформулювати твердження, обернене до даного.
4. Заперечити дане твердження [18, с. 91].

Здійснювати розвиток математичного мовлення учнів можна за допомогою таких форм роботи, як взаємоперевірка самостійних робіт навчаючого характеру, контроль знань учнів за схемою «запитання –

відповідь», робота класу, що супроводжується коментуванням одного з учнів, математичний диктант тощо [10, с. 212].

Головним завданням математичної освіти є навчання учнів інтерпретувати (перекладати) будь-яку ситуацію на мову символів та розв'язувати її математичними засобами, тому сприятливі умови для розвитку алгебраїчної культури учнів створюються під час розв'язування задач методом математичного моделювання. Для перекладу умови задачі, записаної формалізованою мовою, учень повинен знати символи та вміти їх читати. Оскільки залежно від змісту математичного речення одні й ті самі символи можуть мати різну інтерпретацію, то щоб виконати переклад, учень повинен знати ці варіанти та володіти спеціальними мовними конструкціями. Тому корисним є здійснення переходів від зображення до образу, від словесного опису до символу і, навпаки, від символу до поняття (терміну).

Оволодіння учнем математичною мовою можливе лише за умови цілеспрямованого керівництва з боку вчителя процесом розвитку усної та письмової математичної мови на уроці, що сприяє свідомому розумінню учнем суті та змісту понять, походження нових термінів, знаків [53, с. 109].

Розвиток обчислювальної культури учнів. При вивченні нерівностей та їх систем обчислення відіграють надзвичайно велику роль. Ефективність формування обчислювальних умінь і навичок залежить не тільки від індивідуальних особливостей дитини, рівня її підготовки, а й від правильно організованої вчителем обчислювальної діяльності на уроці.

Про рівень обчислювальної культури можна судити по вмінню учня робити усні та письмові обчислення, раціонально організувати хід обчислень, переконуватися в правильності отриманих результатів. Разом з тим, учень при виконанні обчислень повинен усвідомлювати правильність та доцільність кожної виконаної дії, постійно контролювати себе, співвідносячи виконувані операції із зразком – системою операцій [33, с. 100].

Вчитель має підібрати завдання на розвиток обчислювальної культури учнів таким чином, щоб вони були різноманітні (варіативні) за формулюванням, неоднозначні у розв’язках, виявляли різноманітні закономірності і залежності.

Одним із засобів, що сприяють кращому засвоєнню математики, є усні вправи, тому вчитель може організувати проведення математичного диктанту або інших видів самостійної роботи, при яких учень, виконавши обчислення в умі, записує тільки остаточну відповідь.

Уміння, не роблячи громіздких обчислень, оцінювати результат обчислень, є одним з головних критеріїв математичної культури учня, так як грунтується не тільки на знанні конкретного теоретичного матеріалу, а в першу чергу і на вмінні застосовувати теоретичний матеріал в найрізноманітніших, нестандартних ситуаціях [44, с. 211].

Упродовж вивчення курсу алгебри в учнів формуються необхідні математичні знання, уміння та навички, базові та спеціальні предметні компетенції. Завдання вчителя – не лише сформувати в учнів ті чи інші математичні поняття, постійно сприймати нову інформацію (символічну, графічну, схематичну, словесну тощо), осмислювати її, порівнювати з раніше сформованими уявленнями, поняттями, розрізняти істотні й неістотні ознаки, виділяти головне, зіставляти відоме й невідоме, узагальнювати, класифікувати та зводити в систему здобуті знання, використовувати їх у різних ситуаціях, але й навчити їх вільно відтворювати здобуті знання усно й письмово, за допомогою буквеної символіки та термінів тощо [14, с. 39].

Таким чином, наявність в учнів культури алгебраїчних обчислень характеризується наступними ознаками:

- міцне і усвідомлене знання законів арифметичних дій;
- впевнене володіння алгоритмами основних операцій над раціональними числами;
- уміння ефективно поєднувати усні, письмові та інструментальні обчислення;
- застосування раціональних прийомів обчислень;
- вироблення потреби і умінь здійснювати самоконтроль.

1.3. Логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності»

Сучасний шкільний курс математики групується навколо десяти змістових ліній, однією з яких є лінія рівнянь і нерівностей.

Вже починаючи з 5 класу, учні мають справу з числовими нерівностями під час порівняння дробів (звичайних і десяткових), використовують знаки $>$, $<$, порівнюючи раціональні числа у 6 класі, значення виразів у 7 класі. Відомі числові множини розширюються при введенні у 8 класі поняття ірраціонального числа і множини дійсних чисел. В курсі алгебри основної школи учні удосконалюють обчислювальні навички під час розв'язування нерівностей, обчислення значень виразів [42, с. 87].

У 9 класі елементарні відомості про нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей. Розглядається розв’язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною.

Лінія рівнянь і нерівностей розвивається під час вивчення у 10 класі ірраціональних та тригонометричних, а в 11 класі – показникових і логарифмічних нерівностей та їх систем.

Розглянемо, як пропонується вивчення нерівностей у різних підручниках алгебри, рекомендованих Міністерством освіти України. За основу візьмемо підручники: «Алгебра» для 9-го класу (авт. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір) 2017р., «Алгебра і початки аналізу», 10 клас, профільний рівень, «Алгебра» для 11 класу, академічний і профільний рівень (авт. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір) 2011р. [36, 37, 38]; «Алгебра», 9 клас, «Алгебра і початки аналізу» для 10-го класу, профільний рівень (авт. Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова) 2017р. [2, 3]; «Алгебра», 9 клас (авт. О.С. Істер) 2017р., «Алгебра і початки аналізу» для 10-го класу, профільний рівень (авт. О.С. Істер, О.В. Єргіна) 2018р [22, 23].

Результати аналізу діючих підручників з теми «Нерівності» занесені в таблицю (додаток А).

На нашу думку, більш широко і доступно викладена тема «Нерівності» у підручниках «Алгебра», 9 клас та «Алгебра і початки аналізу» для 10-го класу, профільний рівень (авт. О.С. Істер, О.В. Єргіна), оскільки вони найбільш наочні для учнів. Весь теоретичний матеріал підкріплений конкретними прикладами. Задачний матеріал розрахований на кожного учня: є завдання легкого рівня, середнього і підвищеної складності.

Зокрема даний підручник вирізняється серед інших наступним:

- диференціація навчального матеріалу (обов'язковий для вивчення і контролю, обов'язковий для ознайомлення і додатковий);
- диференціація дидактичних завдань за рівнями складності;
- цікавий підбір історичних відомостей;
- велика кількість практичних завдань;
- наявність опорних фактів, що розміщені на полях.

Отже, підручники відповідають програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. Вони можуть бути використані у класах з різною математичною підготовкою учнів, що дозволяє учителю реалізувати диференційований підхід до навчання кожного учня класу. Застосування знань в практичній діяльності здійснюється завдяки розміщеним в кінці кожного параграфа набору прикладних задач під рубрикою «Проявіть компетентність». А велика кількість практичних завдань у підручниках сприяє практичному усвідомленню навчального матеріалу, формуванню в учнів чітких уявлень про нерівності, їх види та способи розв'язування.

Важливе місце в математиці займає тема «Квадратні нерівності». Вона пов'язана з іншими змістовими лініями: нерівності, квадратична функція, графік функції, розв'язування нерівностей. Тема вивчається у 9 класі: дається означення квадратних нерівностей, різні способи їх розв'язування [57, с.69].

Квадратні нерівності самі по собі представляють інтерес для вивчення, так як саме з їх допомогою на символьній мові записуються важливі завдання пізнання реальної дійсності. З квадратними нерівностями доводиться стикатися не менш часто, ніж з рівняннями. Наприклад, квадратні нерівності використовуються при вивченні властивостей функції (знаходження проміжків знакосталості функції, визначення монотонності та ін).

Логіко-математичний аналіз теми
«Квадратні нерівності»

На вивчення теми в 9 класі за підручником О.С. Істера, О.В. Єргіної «Алгебра» 9 клас, 2017р. відводиться 5 годин.

Очікувані результати вивчення теми – учні повинні знати означення квадратної нерівності, алгоритми розв'язування квадратної нерівності за допомогою графіка квадратичної функції і методу інтервалів, вміти застосовувати дані алгоритми до розв'язування завдань.

Таблиця 1.1.

Вимоги до знань, навичок, умінь учнів за програмою 9 класу
(за Державним стандартом 2017 року)

К-сть годин	Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
20	**Тема 2. Квадратична функція**	
	Учень/учениця: розв'язує квадратні нерівності	Квадратна нерівність

Таблиця 1.2.

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Квадратна нерівність	–	Визначення проміжків для змінної x, що відповідають знаку нерівності
Базові	Квадратична функція, нерівність	Властивості числових	Побудова графіка квадратичної

	з однією змінною, числові проміжки, переріз і об'єднання числових проміжків	нерівностей, теореми про рівносильність нерівностей	функції, визначення напряму віток параболи за знаком першого коефіцієнта, знаходження області визначення та області значень функції, відшукання коренів відповідного квадратного рівняння, застосування методу інтервалів

Таблиця 1.3

Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять

Поняття	**Формулювання означення**	**Вид означення. Характеристичні властивості.**
Квадратна нерівність	Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними нерівностями (або нерівностями другого степеня з однією змінною).	Словесне означення, рід і видова відмінність.

Таблиця 1.4

Орієнтовна будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	**Номери з підручника**
1. Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	567, 568, 567, 568, 582, 583, 596, 599, 613

2. Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	570, 571, 593
3. Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об’єктів, які мають ці властивості	567, 568, 567, 568, 575, 576, 573, 560, 562, 633, 636, 650, 643, 744
4. Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	571, 573, 574, 574, 577, 634, 636
5. Вправи для забезпечення розпізнавання об’єктів, що входять до обсягу нового поняття	577, 578, 562, 633
6. Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	567, 568, 567, 568, 572, 575, 576, 598, 602, 568, 656, 667, 650, 651, 644

Таблиця 1. 5

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника, призначених для формування способу діяльності

Основні способи діяльності	**Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності**	**Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності**	**Застосування способу діяльності**
Визначення проміжків для змінної x, що відповідають знаку нерівності	524, 560, 634	526, 527, 562, 635	528, 561-567, 636, 642
Визначення напряму віток параболи за знаком першого коефіцієнта	530-543	–	597, 603

Знаходження області визначення та області значень функції	568, 569	577, 562-574, 633	576-588, 598, 602
Відшукання коренів відповідного квадратного рівняння	636, 650-678, 643	596, 599	644, 650, 651
Застосування методу інтервалів	571, 573	574, 577	634, 636

Логіко-математичний аналіз теми «Ірраціональні нерівності»

На вивчення теми в 10 класі за підручником О.С. Істера, О.В. Єргіної «Алгебра і початки аналізу» 10 клас, профільний рівень, 2018р. відводиться 7 годин [32].

Таблиця 1.6.

Вимоги до знань, навичок, умінь учнів за програмою 10 класу (за Державним стандартом 2018 року)

К-сть годин	Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
30	**Тема 2. Степенева функція**	
	Учень/учениця: **розв'язує:** ірраціональні нерівності, зокрема з параметрами **застосовує:** властивості функцій до розв'язування ірраціональних нерівностей	Ірраціональні нерівності Ірраціональні нерівності з параметрами

Таблиця 1.7.

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	**Факти**	**Способи діяльності**
Нові	Ірраціональна нерівність	–	Піднесення обох частин нерівності до степеня n
Базові	Степенева функція, арифметичний корінь, нерівність з однією змінною, рівносильні нерівності, числові проміжки, переріз і об'єднання числових проміжків	Властивості по членного множення і ділення нерівностей, в-сті числових нерівностей, в-сті арифметичного кореня, теореми про рівносильність нерівностей	Знаходження області допустимих значень нерівності, застосування методу інтервалів, розв'язування систем і сукупностей нерівностей

Таблиця 1.8

Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять

Поняття	**Формулювання означення**	**Вид означення. Характеристичні властивості.**
Ірраціональна нерівність	Нерівність називається ірраціональною, якщо вона містить змінну під знаком кореня.	Словесне означення, через найближчий рід та істотні властивості.

Таблиця 1.9

Орієнтовна будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	**Номери з підручника**
1. Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	24.1, 24.2, 24.3, 24.4, 24.5, 25.1, 25.2

2. Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	26.19, 26.20, 26.27, 26.28, 26.29, 2630
3. Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об’єктів, які мають ці властивості	24.6, 24.7, 24.8, 24.9, 24.10, 24.11, 24.12, 24.13, 24.14, 24.15, 24.16, 25.3- 25.11
4. Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	25.11, 25.12, 25.13, 25.14
5. Вправи для забезпечення розпізнавання об’єктів, що входять до обсягу нового поняття	25.7-25.11, 25.17- 25.21
6. Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	26.3, 26.4, 26.21, 26.22, 26.23-26.26

Таблиця 1. 10

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника, призначених для формування способу діяльності

Основні способи діяльності	**Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності**	**Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності**	**Застосування способу діяльності**
Піднесення обох частин нерівності до степеня n	24.1, 24.2, 24.3, 24.4, 24.5, 25.1, 25.2	24.6, 24.7, 24.8, 24.9, 24.10, 24.11, 24.12, 24.13, 24.14, 24.15, 24.16, 25.3-25.11	25.7-25.11, 25.17-25.21
Знаходження області допустимих значень нерівності	–	25.11, 25.12, 25.13, 25.14	26.19, 26.20, 26.27, 26.28, 26.29, 26.30

Застосування методу інтервалів	26.3, 26.4	577, 562-574, 633	576-588, 598, 602
Розв’язування систем і сукупностей нерівностей	26.1, 26.2, 26.5, 26.6	26.10, 26.11, 26.13-26.16	26.21, 26.22, 26.23-26.26

Висновки до розділу 1

Проаналізувавши зміст і сутність понять «компетенція», «компетентність», «математична компетентність», ми з’ясували, що під *компетенцією* в науковій літературі розуміють сукупність знань, умінь, навичок та якостей учня, необхідних для виконання поставлених у процесі навчальної діяльності завдань. В свою чергу *компетентність* є результатом набуття компетенцій в певній галузі. Таким чином, компетенція є кількісною характеристикою рівня підготовки учня до виконання якої-небудь діяльності, а компетентність – якісною характеристикою.

Математична компетентність належить до предметно-галузевих компетентностей і являє собою (за визначенням С.А. Ракова) спроможність учня розпізнавати й застосовувати математику у реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати.

Ми з’ясували, що здійснювати компетентнісно-орієнтоване навчання в темі «Нерівності» можна багатьма методами, прийомами. Зокрема, велику роль у формуванні різних складових математичної компетентності при вивченні даної теми відіграє застосування міжпредметних зв’язків, використання елементів технологій проблемного навчання, використання ІКТ, прикладних задач та методу проектів.

Вивчення теми «Нерівності» надає також великі можливості для формування і розвитку алгебраїчної культури учнів, до складу якої входять: термінологічна грамотність, математичне мовлення, графічна культура, обчислювальна культура та навички математичного моделювання.

Ефективним засобом формування термінологічної грамотності є виконання вправ за термінологічним спрямуванням. Формуванню математичного мовлення сприяють вправи на формулювання, заперечення або переформулювання обернених математичних тверджень. Математичні диктанти та усні задачі – ефективний засіб розвитку обчилювальної культури учнів.

РОЗДІЛ 2.
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

2.1. Методика формування умінь і навичок розв'язування раціональних нерівностей та їх систем

Як вже зазначалося в першому розділі, вивчення нерівностей організовано в змістово-методичну лінію рівнянь і нерівностей, яка тісно пов'язана з числовою, функціональною та іншими лініями шкільного курсу математики. Опанування матеріалу з теми передбачає формування поняття нерівності, вивчення основних класів нерівностей та їх систем та загальних методів їх розв'язування.

В процесі поступового вивчення різних видів нерівностей встановлюються різноманітні зв'язки між ними, виділяються більш загальні класи, закріплюються узагальнені типи перетворень, спрощується опис та обґрунтування розв'язання. Основні класи нерівностей та їх систем вивчаються незалежно один від одного і внаслідок поступового розширення кількості вивчених класів нерівностей та їх систем формуються загальні, універсальні прийоми їх розв'язування (логічні, обчислювальні та наочно-графічні прийоми). В результаті такого вивчення матеріал представляється учням у порівняно компактному вигляді, тому не ускладнює, а, навпаки, полегшує засвоєння нового [55, с. 123].

Відзначимо ряд особливостей у вивченні раціональних нерівностей:

1) Як правило, навички розв'язування нерівностей, за виключенням квадратних, формуються на менш високому рівні, ніж рівнянь відповідних класів.

2) Більшість прийомів розв'язування нерівностей полягає в переході від даної нерівності $a>b$ до рівняння $a = b$ і наступний перехід від знайдених коренів рівняння до множини розв'язків вихідної нерівності. Такий перехід не виконується лише при розгляді лінійних нерівностей, оскільки в цьому немає необхідності через простоту процесу розв'язування таких нерівностей.

3) У вивченні нерівностей велику роль відіграють наочно-графічні засоби [68, с. 49]. Тож успішність вивчення раціональних нерівностей залежить від якості вивчення функціональної лінії шкільного курсу (побудови графіків і графічного дослідження функцій).

Перераховані особливості показують, що вивчення попереднього матеріалу сильно впливає на вивчення раціональних нерівностей. Тому роль етапу синтезу у вивченні нерівностей особливо зростає.

Практика показує, що з розв'язуванням нерівностей пов'язана більша частина помилок учнів на ЗНО. У переважній більшості випадків розв'язування нерівностей, що пропонуються на екзаменах державної підсумкової атестації та ЗНО, не потребує якої-небудь винахідливості, штучних прийомів, і тому учні, як правило, одразу бачать, які методи використовувати для розв'язування. Проте багато з них, виконуючи перетворення, роблять грубі помилки, пов'язані з незнанням основних теоретичних положень.

Розв'язування нерівності не потребує практично нічого, крім вміння учня звести його до розв'язування найпростіших нерівностей, не допустивши при цьому ні втрати розв'язків, ні придбання зайвих розв'язків. Для цього потрібно знати властивості функцій, що вивчаються у школі, і володіти основними поняттями, пов'язаними з рівносильністю нерівностей.

Основні поняття, необхідні для розв'язування нерівностей (невідоме, рівносильність, логічне слідування та ін.), нагадують відповідні означення для рівнянь. Відмітимо лише дві відмінності в термінології: термін «корінь» для нерівностей не застосовується – завжди говорять «розв'язок»; крім того, іноді говорять, що розв'язком є деяка множина значень x (наприклад, інтервал $a<x<b$) – при цьому мається на увазі, що розв'язком є кожне значення x з цієї множини.

До окремих класів нерівностей та їх систем застосовуються ті ж прийоми і методи, що і для розв'язування рівнянь. Проте учні повинні пам'ятати, що розв'язування нерівностей порівняно з розв'язуванням рівнянь, має свої особливості: одні і ті ж перетворення, що застосовуються для рівнянь і нерівностей, призводять до різних результатів. Наприклад, при множенні обох частин рівняння на деякий відмінний від нуля множник, що входить в ОДЗ, рівняння заміниться рівносильним йому, а для нерівностей вказаних обмежень на множник недостатньо – потрібно, щоб він був додатнім в ОДЗ. Точно так само піднесення обох частин рівняння до квадрату не призводить до втрати коренів, у той час як таке ж перетворення нерівності може призвести як до втрати, так і до придбання зайвих розв’язків. На жаль, при розв’язуванні нерівностей учні забувають про ці особливості. Практика показує, що найбільша кількість помилок допускається учнями при розв’язуванні найпростіших нерівностей. Це відбувається, напевне, саме через формальне розуміння аналогії між рівняннями та нерівностями.

Особливість вивчення числових, лінійних нерівностей з однією змінною, квадратних нерівностей полягає в тому, що порівняно з іншими класами нерівностей, вони вивчаються з великою ретельністю, для них також вказується і доводиться до автоматизму виконання алгоритмів розв’язування, вказується форма, в якій повинна бути записана відповідь.

2.1.1. Числові і лінійні нерівності

Числові та лінійні нерівності входять до складу теми «Нерівності» курсу алгебри 9-го класу, на вивчення якої відведено 16 годин. Ця тема має велике значення у курсі алгебри, так як дає базові знання, що необхідні при подальшому вивченні алгебри у старших класах. Разом з тим, тема тісно пов’язана з уже пройденим матеріалом, що дає можливість учням легко оволодіти нею.

Вивчення даної теми спрямоване на набуття нових умінь та навичок учнів. Вони повинні навчитись почленно додавати і множити нерівності, застосовувати властивості числових нерівностей для оцінювання значення виразу; розв’язувати лінійні нерівності з однією змінною, виконувати рівносильні перетворення; формулювати теореми та властивості: властивість транзитивності числових нерівностей, теорему про додавання одного й того самого числа до обох частин числової нерівності, теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме додатне число, теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме від’ємне число, теорему про додавання числових нерівностей, теорему про множення числових нерівностей [65, с.210].

Вивчення матеріалу починається з формулювання загального означення понять «більше», «менше» або «дорівнює», яке є узагальненням правил порівняння дійсних чисел, які було вивчено протягом попередніх років навчання. При вивченні цього питання слід наголосити на тому, що сформульоване означення є універсальним, тобто може бути використане не тільки для порівняння будь-якого виду чисел, але й для порівняння виразів. Оскільки дана тема є новою для учнів, то доцільно використати абстрактно-дедуктивний метод введення понять, оскільки цей спосіб потребує менше часу для пояснення і залишає більше часу для розгляду прикладів, хоча і потребує від учнів певного рівня математичної підготовки.

Після формулювання означення вчитель має провести роботу зі систематизації знань учнів про види нерівностей: вони поділяються за знаком (рис.2.1) та за змістом (рис.2.2). При цьому можна провести паралелі з видами числових рівностей (такі паралелі бажано проводити і під час вивчення властивостей числових нерівностей), тобто учні мають усвідомити, що нерівності, так само, як і рівності, – це записи певного виду, але за змістом вони поділяються на правильні та неправильні.

З розгляду видів нерівностей цілком логічно випливає питання про доведення того факту, що дана нерівність є правильною (або визначення правильності чи неправильності даної нерівності).

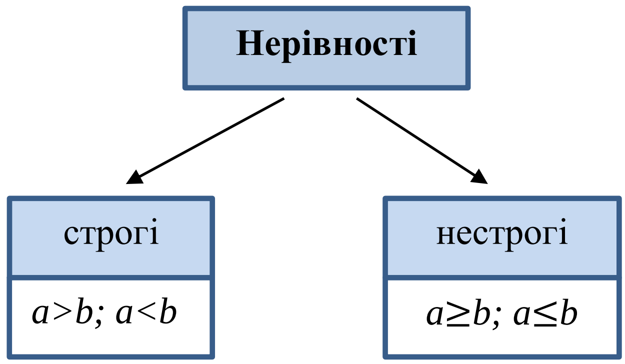


Рис.2.1. Види нерівностей за знаком

Таким чином формується уявлення учнів про зміст поняття «довести нерівність», а також про послідовність дій при доведенні нерівностей (алгоритм доведення нерівності), яка далі ілюструється відповідним прикладом на доведення числової нерівності.

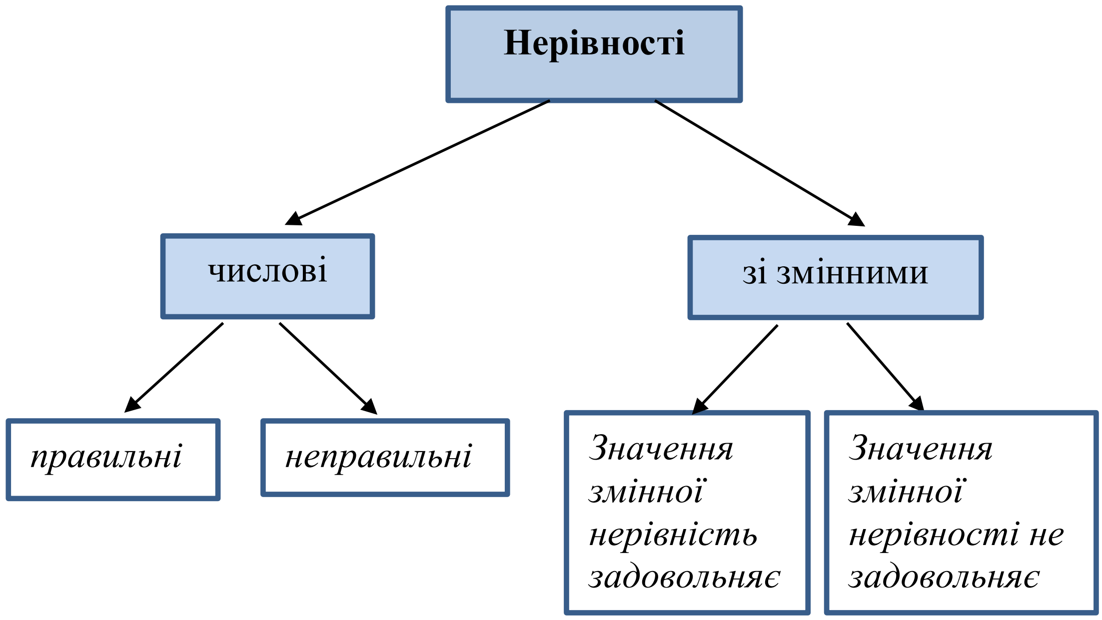


Рис.2.2. Види нерівностей за змістом

Для свідомого сприйняття учнями логіки навчального процесу вчитель може провести бесіду (або організувати відповідним чином самостійну роботу учнів з порівняння), у ході якої проводитимуться паралелі між поняттями «рівності» та «нерівності», а звідси цілком логічним буде перехід до понять «рівняння» та «нерівності». Таким чином учні усвідомлюють, що так само, як і у випадку з рівностями (які бувають числовими та рівностями з невідомими – рівняннями), нерівності умовно поділяють на числові й такі, що містять невідомі числа, замінені буквами, значення яких треба знайти.

Вчитель також має домогтися розуміння учнями таких тверджень: запис $x \geq y$ означає, що або $x > y$, або $x = y$; замість двох нерівностей $x < a$, $a < y$ можна записати подвійну нерівність $x < a < y$.

Важливим етапом є вивчення основних властивостей числових нерівностей та розв'язування вправ на їх застосування.

На етапі формування первинних умінь і навичок учнів вчитель може запропонувати такі вправи:

1. Серед наведених нерівностей вкажіть правильні:

1) $0 \geq 2$; 2) $3 \geq 3$; 3) $25 \geq 20$; 4) $7 \geq 8$.

2.Знайдіть найменше і найбільше ціле число, що задовольняє нерівність:

1) $x \geq -4$; 2) $x \geq 3{,}5$; 3) $x > 5$;

4) $x \leq 3$; 5) $\frac{x}{3} \leq -2$; 6) $\frac{2}{3} \geq \frac{x}{15}$.

3. Додайте нерівності:

1) $2 < 5$ і $-7 < -3$;

2) $-2 > -4$ і $3 > -2$;

3) $3a^2 < x + 1$ і $2a - a^2 < x^2 - 1$.

4. Виконайте множення нерівностей $(a, x, y > 0)$:

1) $2 < x$ і $3 < y$;

2) $a + 1 > a$ і $a > 5$;

3) $2 < 3^2$ і $3^2 \cdot 2^2 < 5$.

5. Нехай $a < b$. Порівняйте числа:

1) $a + x$ і $b + x$; 2) $a - 5$ і $b - 5$;

3) $a - a^2$ і $b - b^2$; 4) $a + x^2$ і $b + x^2$.

Також вчитель може запропонувати вправу на порівняння чисел в Інтернет-сервісі мультимедійних дидактичних вправ LearningApps (рис.2.3).

Завдання 1.1. В пусте поле вставте потрібну цифру, щоб утворилась правильна нерівність.

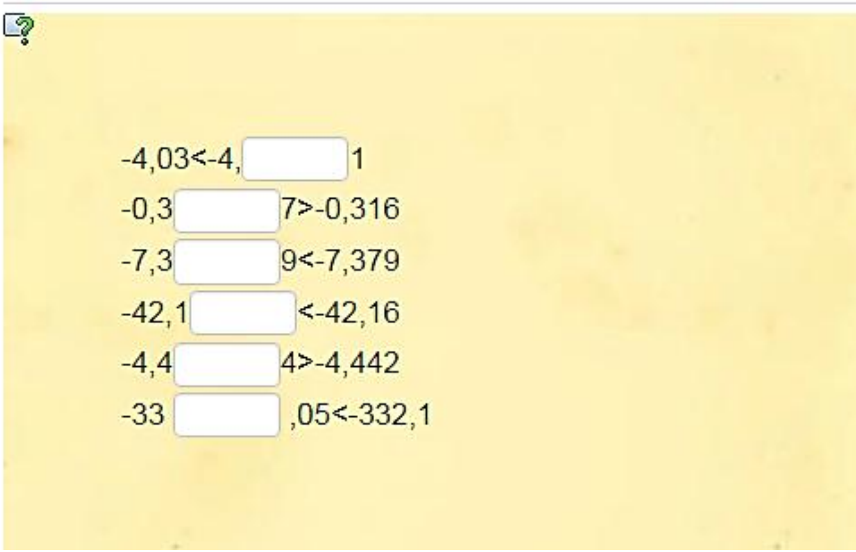


Рис. 2.3. Вікно виконання вправи в LearningApps

Відповідь вводиться учнем у відповідне поле. По завершенні виконання завдання можна переглянути правильність відповідей: зеленим контуром позначено правильний вибір, червоним – неправильний.

Для закріплення теоретичного матеріалу з теми «Числові нерівності» вчитель може запропонувати учням тест на вибір правильної відповіді (рис. 2.4).

Завдання 1.2. Виберіть з чотирьох запропонованих відповідей одну, на ваш погляд, правильну.

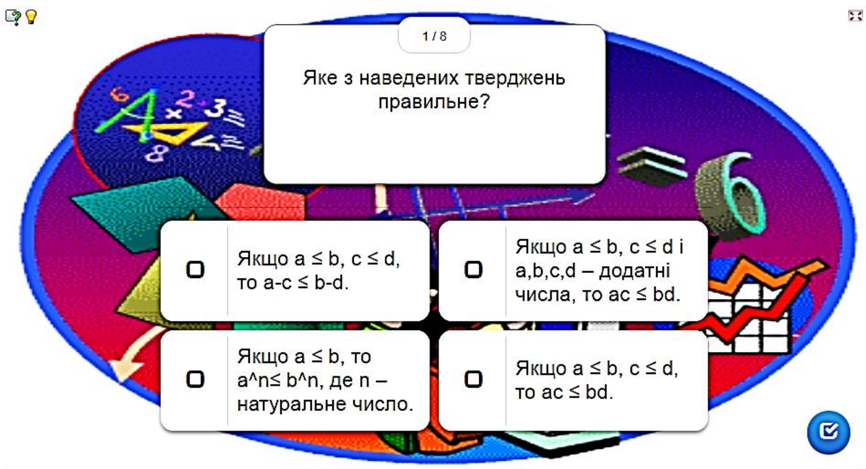


Рис. 2.4. Тест на вибір правильної відповіді в LearningApps

За допомогою таких інтерактивних завдань учні можуть перевірити і закріпити свої знання з теми в ігровій формі, що сприяє формуванню їх пізнавального інтересу.

Після досить докладного вивчення означення, властивостей числових нерівностей учні переходять до вивчення нового виду нерівностей в темі «Лінійні нерівності з однією змінною. Системи нерівностей з однією змінною».

В процесі вивчення лінійних нерівностей учні мають навчитись наводити приклади виразів нерівності. Також важливою навичкою є вміння розв’язувати вправи, що передбачають: почленне додавання і множення нерівностей; розв’язування нерівності зі змінною; рівносильні перетворення; об’єднання числових проміжків; розв’язування лінійних нерівностей; розв’язування систем двох нерівностей з однією змінною.

Вивчення теми починається з формування поняття лінійної нерівності з однією змінною та загальної схеми її розв’язування (рис. 2.5).

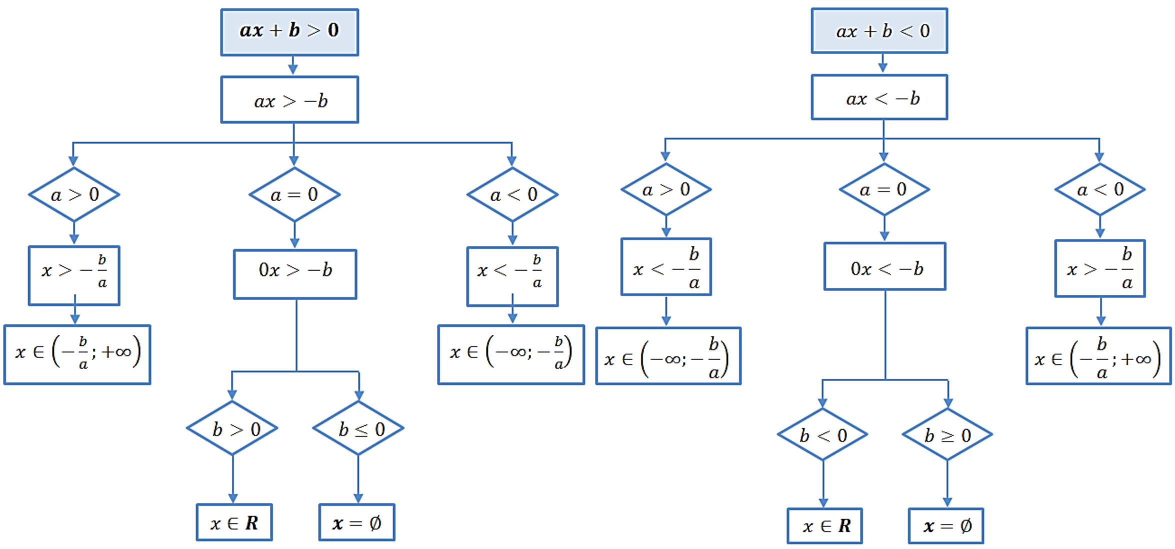


Рис. 2.5. Схеми розв’язування лінійних нерівностей $ax+b>0$ і $ax+b<0$

Розвиток дослідницької і логічної компетентності учнів вчитель може здійснювати вже на етапі застосування знань і формування умінь шляхом створення проблемної ситуації. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 1.1. Розв’язати нерівність $5x + 7 > 3(2x - 5) - x$.

Розв'язання

Розкриємо дужки в правій частині нерівності: $5x + 7 > 6x - 15 - x$.

Перенесемо невідомі доданки в одну сторону з протилежним знаком, а числа – в іншу: $5x - 6x + x > -7 - 15$.

Зведемо подібні доданки: $0x > -22$.

Отримали нерівність, рівносильну початковій. Багато хто з учнів одразу записують у відповідь, що нерівність не має розв'язків, оскільки плутають з розв'язанням лінійного рівняння $0x = -22$, де розв'язком справді є порожня множина. Проте ланцюг міркувань при розв'язуванні нерівностей дещо відрізняється. Тому вчитель має пояснити учням, що розв'язком нерівності буде будь-яке число, оскільки нуль завжди більше від'ємного числа (в лівій частині при множенні на нуль незалежно від значення x завжди буде нуль).

Отже, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $\mathbb{R}$.

Приклад 1.2. Розв'язати нерівність $6x + (x - 4)(x + 4) \geq (x + 3)^2$.

Розв'язання

Уважно подивившись на нерівність, учні помічають, що в ній присутні формули скороченого множення: в лівій частині – різниця квадратів, а в правій – квадрат суми:

$$6x + x^2 - 16 \geq x^2 + 6x + 9.$$

Перенесемо невідомі доданки в одну частину, а відомі – в іншу з протилежним знаком:

$$6x + x^2 - x^2 - 6x \geq 16 + 9.$$

Тепер нерівність можна спростити зведенням подібних доданків:

$$0x \geq 25.$$

На відміну від попереднього прикладу, ця нерівність не має розв'язків, оскільки нерівність не виконується при жодному значенні x, нерівність $0 \geq 25$ є неправильною.

Отже, нерівність не має розв'язків.

Відповідь: $\emptyset$.

Після розгляду цих прикладів учні приходять до висновку, що нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язку, або їх розв'язком є будь-яке число.

Під час розв'язування лінійних нерівностей вчитель слідкує за тим, щоб учні розуміли залежність між знаком нерівності та виглядом точки на координатній прямій і дужок в записі інтервалу для відповіді (табл. 2.1).

Табл.2.1

Види позначень в залежності від знака нерівності

Знак нерівності	**Вигляд точки на координатній прямій**	**Вигляд дужки в записі інтервалу**
$>$ $<$	Виколота точка ○	(,)
$\geq$ $\leq$	Зафарбована точка ●	[,]

Доречно запропонувати учням вправу на знаходження відповідності в Інтернет-сервісі мультимедійних дидактичних вправ LearningApps (рис. 2.6).

Завдання 1.3. Кожній нерівності поставте у відповідність її розвязок.

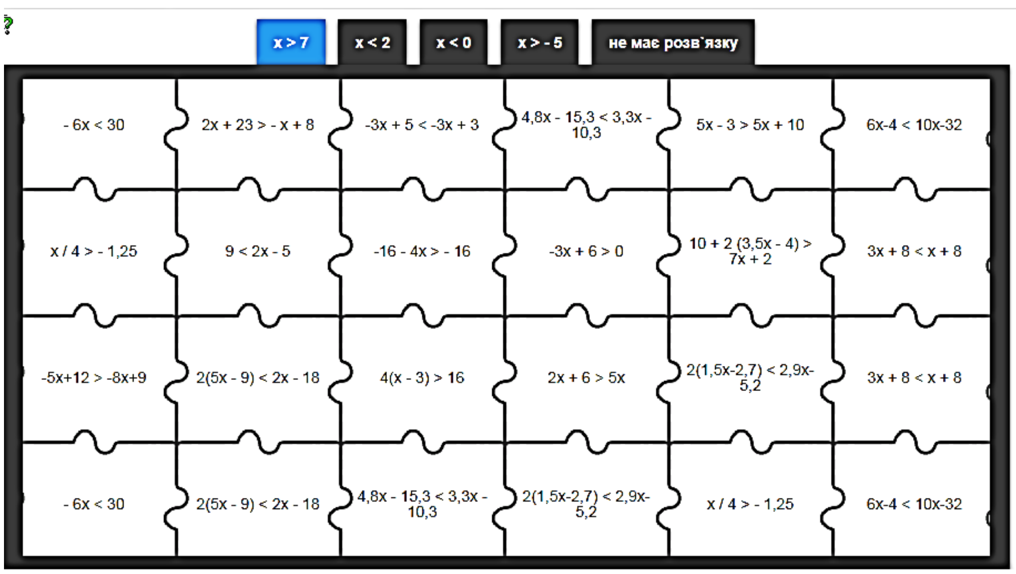


Рис. 2.6. Вікно виконання вправи в LearningApps

Після вибору учнем на вкладці потрібної категорії пазли, що їй відповідають, розкриваються (зникають). Тому учень повинен бути уважним і зібраним, оскільки від якості виконання цієї вправи залежить його оцінка.

Перевага цієї вправи полягає у тому, що чіткість та однозначність умов завдання забезпечує рівність у сприйнятті їх змісту, а також є можливість одночасної перевірки знань усіх учнів класу, оскільки нерівності вже виведені на екран і вчитель може організувати роботу таким чином, щоб учні по черзі виходили до дошки для розв'язання нерівності та обрання відповідної відповіді в сервісі LearningApps.

Вчитель має показати, як при розв'язуванні нерівності виконання тотожних перетворень може призвести до втрати розв'язків, проводячи паралель з розв'язуванням рівнянь. Зокрема, звільнення від знаменника не призводить до втрати коренів у рівнянні, а зайві корені можуть з'явитися лише за рахунок розширення ОДЗ, тобто при внесенні в ОДЗ тих значень невідомого, які перетворюють знаменник в нуль.

Багато з учнів вважають, що така ситуація застосовна і до нерівностей. Тому, наприклад, нерівність $\frac{1}{x} \leq 1$ вони розв'язують, переходячи після звільнення від знаменника до нерівності $1 < x$. Після цього вони стверджують, що всі значення x і будуть розв'язками вихідної нерівності, так як при жодному з них знаменник вихідної нерівності не перетворюється в нуль.

Однак легко бачити, що вихідна нерівність справедлива і при усіх від'ємних x. Але всі ці розв'язки втрачаються через те, що звільнення від знаменника в нерівності відбувається зовсім не так, як у рівняннях. Для нерівностей характерна така властивість: при множенні обох частин нерівності на один і той самий додатній вираз знак нерівності не міняється, а при множенні на від'ємний змінюється на протилежний.

Приклад 1.3. Розв'язати нерівність $\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\right) > 3x + 3\frac{1}{3}$.

Розв'язання

Розкриємо дужки в лівій частині нерівності та перетворимо дріб в правій частині нерівності на неправильний: $\frac{5}{18}x - \frac{1}{6} > 3x + \frac{10}{3}$.

Позбудемось знаменників у дробах, для цього помножимо ліву і праву частину нерівності на найменший спільний знаменник цих дробів (на 18):

$$5x - 3 > 54x + 60.$$

Перенесемо тепер невідомі доданки в одну частину, а відомі – в іншу з протилежним знаком і зведемо подібні доданки:

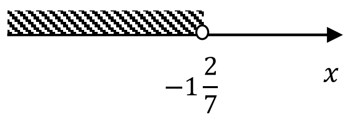
$$5x - 54x > 3 + 60 \quad \Rightarrow$$

$$-49x > 63$$

Поділимо отриману нерівність на коефіцієнт біля x. Оскільки це число від'ємне, то учні мають згадати, що при діленні нерівності на від'ємне число знак нерівності міняється на протилежний, тому: $x < -\frac{63}{49}$.

Виділимо цілу частину і скоротимо дріб: $x < -1\frac{14}{49} \quad \Rightarrow \; x < -1\frac{2}{7}$.

Відмітимо на координатній прямій цей розв'язок:



Отже, $x \in (-\infty; -1\frac{2}{7})$.

Відповідь: $(-\infty; -1\frac{2}{7})$.

Таким чином, основна діяльність, пов'язана з розв'язуванням лінійних нерівностей спрямована на відпрацювання таких кроків:

1) звільнення від дробів (якщо вони присутні в нерівності) шляхом множення на найменший спільний знаменник;
2) розкриття дужок (якщо вони є) та перенесення з протилежним знаком невідомих в одну сторону, а відомих – в іншу;
3) зведення подібних доданків і ділення обох частин нерівності на відмінний від нуля коефіцієнт біля x.

2.1.2. Квадратні нерівності

Вивчення даної теми починається з формування знань учнів про зміст поняття «квадратна нерівність» та формування первинних умінь вирізняти квадратні нерівності серед інших нерівностей з однією змінною, тому почати слід з означення та прикладів (табл.2.2).

Табл.2.2

Опорний конспект з теми «Квадратні нерівності»

Квадратні нерівності
Квадратними нерівностями називаються нерівності вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$, де $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Приклад. $3x^2 - 2x - 1 > 0$, $x^2 - 9 \geq 0$, $x^2 - 2x < 0$, $-x^2 > 0$ – квадратні нерівності (з різними значеннями коефіцієнтів квадратного тричлена в лівій частині).

Вивчення квадратних нерівностей слідує за вивченням квадратного рівняння, тож учні вже вміють будувати графіки квадратичної функції та на них відмічати нулі функції, якщо вони існують. Тому перехід до розгляду квадратних нерівностей можна здійснити, перейшовши до побудови та вивчення графіка функції $y = \boldsymbol{ax^2} + bx + c$. Оскільки можливі різні випадки розташування графіка відносно осі абсцис, краще почати з розгляду конкретного прикладу, у якому цей квадратний тричлен має різні корені.

Приклад 1.4. Розв’язатати нерівність $\boldsymbol{x^2 + 7x - 8 < 0}$.

Розв’язання

Розглянемо функцію лівої частини нерівності (квадратного тричлена). Графіком даної функції є парабола. Згідно зі знаком нерівності постає питання, де ця парабола знаходиться нижче нуля або нижче осі абсцис. Щоб відповісти на це питання, треба вияснити де вона перетинає вісь Оx. Учні згадують, що це можна зробити, прирівнявши функцію до нуля і розв’язавши отримане рівняння. Отже, щоб розв’язати задану нерівність, треба прирівняти її ліву частину до нуля і розв’язати рівняння: $\boldsymbol{x^2 + 7x - 8 = 0}$.

Учні помічають, що це звичайне квадратне рівняння і розв'язати його можна за теоремою Вієта або за допомогою дискримінанта. Отже, корені даного рівняння: $x_1 = -8$, $x_2 = 1$. Далі, виконуючи ескіз параболи, учні з'ясовують, що вітки параболи направлені вгору і парабола перетинає вісь *Ox* в точках $x_1 = -8$ і $x_2 = 1$ (рис. 2.7).

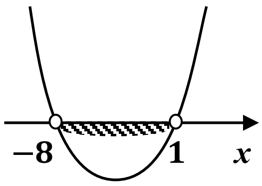


Рис. 2.7.

Далі повертаємось до заданої нерівності. Знак нерівності свідчить про те, що необхідно з'ясувати на якому з трьох утворених проміжків на координатній прямій парабола знаходиться нижче вісі *Ox* (< 0). З рисунка очевидно, що це проміжок (–8; 1).

Відповідь: (–8; 1).

Доречно запропонувати учням розв'язати декілька квадратних нерівностей, щоб побачити різницю в розв'язках в залежності від знака квадратної нерівності. У процесі подальшого вивчення встановлюється також, що немає потреби в точно накресленому графіку квадратного тричлена, досить намітити тільки положення коренів, якщо вони є, і врахувати на ескізі потрібні особливості графіка (напрям віток параболи).

Приклад 1.5. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

Розв'язання

Аналогічно до попереднього прикладу розв'яжемо за допомою теореми Вієта відповідне квадратне рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$. Коренями рівняння будуть $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Далі потрібно зобразити схематично параболу (вітки направлені вгору), яка перетинає вісь абсцис у даних точках (рис. 2.8):

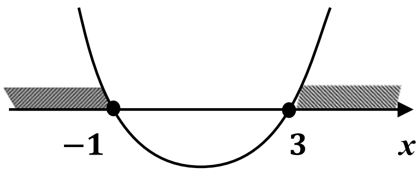


Рис. 2.8.

Як видно з рисунку, є два проміжки, на яких відповідна квадратична функція набуває додатних значень ($\geq \mathbf{0}$). Тому розв'язком заданої нерівності буде об'єднання цих проміжків: $\boldsymbol{x} \in (-\infty;\ -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{3};\ +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;\ -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{3};\ +\infty)$.

Для розвитку процедурної компетентності учнів доцільно розглянути з ними якомога більше прикладів, що показують різні випадки розташування параболи щодо осі *Ox*.

Приклад 1.6. Розв'язати нерівність $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2} \geq \mathbf{0}$.

Розв'язання

Розв'яжемо відповідне квадратне рівняння $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$ за допомогою дискримінанта: D=$(-\mathbf{3})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{9} - \mathbf{16} < \mathbf{0}$. На цьому етапі багато хто з учнів записали б у відповідь, що нерівність коренів не має. Але слід наголосити учням, що ставилось завдання розв'язати нерівність, а не рівняння і якщо відповідне квадратне рівняння не має коренів, це не означає, що параболи не існує – вона не перетинає вісь абсцис. Тому схематично це виглядає так (рис. 2.9):

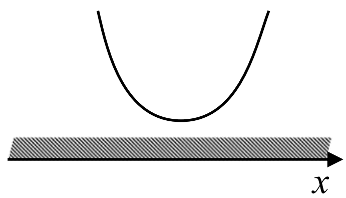


Рис. 2.9.

Далі, згідно з умовою задачі, треба визначити, на якому проміжку парабола знаходиться вище осі абсцис. Учень має побачити, що це проміжок $(-\infty; +\infty)$, тобто вся множина дісних чисел $\mathbb{R}$.

Відповідь: $\mathbb{R}$.

Також обов'язково треба розглянути з учнями випадок, коли парабола перетинається з віссю абсцис лише в одній точці.

Приклад 1.7. Розв'язати нерівність $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1} \leq \mathbf{0}$.

Розв'язання

Розв'язавши квадратне рівняння $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, учень приходить до висновку, що дискримінант D= $\mathbf{2}^{\mathbf{2}} - \mathbf{4} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Отже, розв'язком рівняння буде точка $x = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-1}$ і саме в цій точці парабола перетнеться з віссю (рис. 2.10):

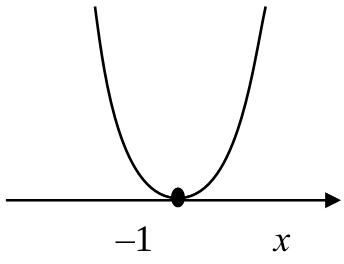


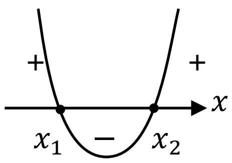
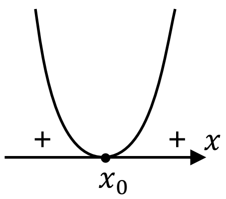
Рис. 2.10.

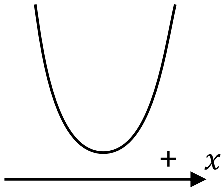
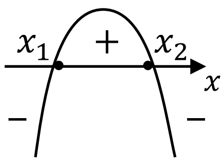
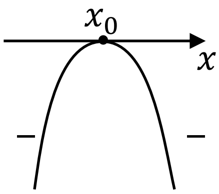
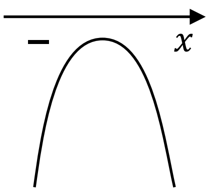
Відповідь: –1.

Після розгляду конкретних прикладів вчитель може запропонувати учням схему, в якій наведені різні випадки розташування графіка квадратичної функції *y* = $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ відносно осі *Ox* залежно від знака старшого коефіцієнта та знака дискримінанта квадратного тричлена $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ (табл.2.3). У результаті певного тренування учні звикають користуватися такою схемою, а потім її образом.

Табл.2.3

Випадки розташування графіка квадратичної функції відносно осі *Ox* та розв’язки відповідних квадратних нерівностей

Схема	**Квадратна нерівність**			
	$\boldsymbol{f(x) > 0}$	$\boldsymbol{f(x) < 0}$	$\boldsymbol{f(x) \geq 0}$	$\boldsymbol{f(x) \leq 0}$
$\boldsymbol{a > 0, D > 0}$ 	$(-\infty; x_1)$ $\cup\ (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1]$ $\cup\ [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
$\boldsymbol{a > 0, D = 0}$ 	$(-\infty; x_0)$ $\cup\ (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0

$\boldsymbol{a > 0, D < 0}$ 	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$\boldsymbol{a < 0, D > 0}$ 	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1)$ $\cup\ (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1]$ $\cup\ [x_2; +\infty)$
$\boldsymbol{a < 0, D = 0}$ 	$\emptyset$	$(-\infty; x_0)$ $\cup\ (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
$\boldsymbol{a < 0, D < 0}$ 	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

Отже, варіантів розташування параболи багато, але слід наголосити учням на тому, що в подальшому на практиці не обов’язково пам’ятати усі ці варіанти. Треба лише зрозуміти, що саме вимагається, коли ставиться завдання розв’язати нерівність: зясувати, на яких проміжках парабола знаходиться над чи під віссю *Ox*.

Перевірити розуміння учнями залежності розташування графіка квадратичної функції відносно осі *Ox* від знаків старшого коефіцієнта та дискримінанта відповідного квадратного тричлена вчитель може за допомогою вправи на знаходження пари у LearningApps (рис. 2.11). Завдання передбачає з’єднання відповідних зображень та їх описів перетягуванням за допомогою лівої кнопки миші. При потребі учень може роз’єднати вибрані фрагменти, клацнувши мишою на межі з’днання.

Завдання 1.4. Встановіть залежність розташування графіка функції $ax^2 + bx + c$ від коефіцієнтів a, c і дискримінанта D і з’єднайте зображення параболи з відповідним описом.

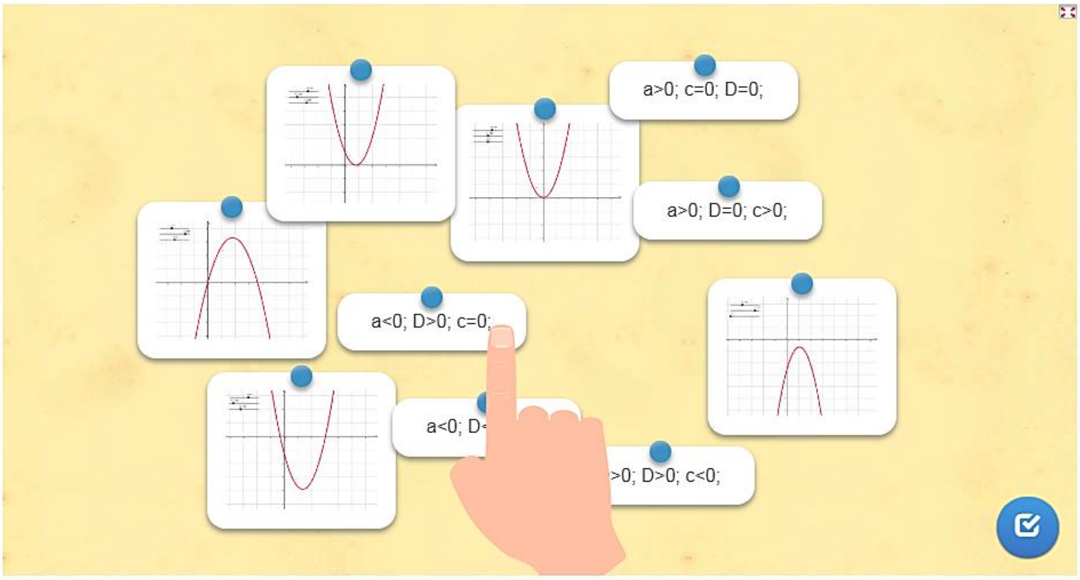


Рис. 2.11. Вправа на знаходження пари в LearningApps

На етапі формування вмінь розв’язувати квадратні нерівності за вивченою схемою слід вимагати від учнів чіткого виконання наступних дій: зведення нерівності до виду квадратної; відшукання дійсних коренів квадратного тричлена (якщо вони існують) та побудува ескізу графіка квадратичної функції; запис проміжку, на якому функція набуває знака, що відповідає даній квадратичній нерівності (з урахуванням строгості знака нерівності).

Зміст вправ, запропонованих до розв’язування на уроці, може бути таким:

1) знайти розв’язки квадратної нерівності за готовим графіком відповідної квадратичної функції;

2) розв’язати за вивченою схемою квадратні нерівності;

3) розв’язати нерівності другого степеня, що зводяться до квадратних рівносильними перетвореннями;

4) на повторення: дослідити властивості функції за даним графіком.

Для перевірки рівня засвоєння учнями алгоритму розв'язання квадратних нерівностей вчитель може запропонувати виконати вправу на визначення порядку виконання дій в LearningApps. Учню пропонується розташувати в певному порядку запропоновані елементи (рис. 2.12).

Завдання 1.5. Розставте послідовно всі етапи розв'язання квадратної нерівності, вибираючи серед запропованих ті, які на вашу думку вірні.

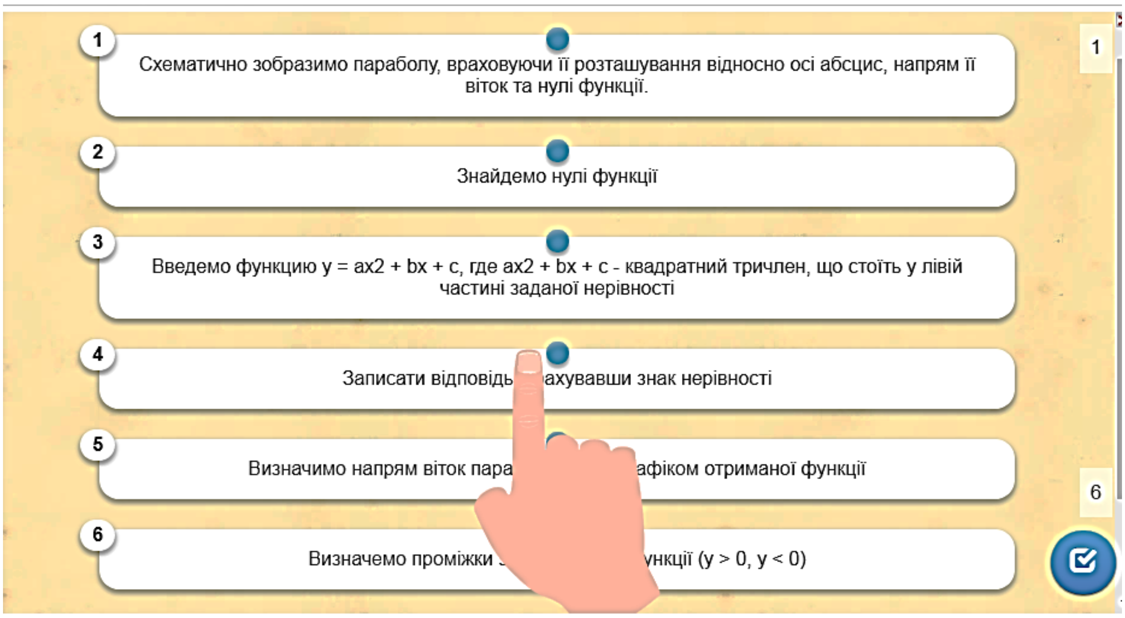


Рис. 2.12.Вправа на визначення порядку виконання дій при розв'язуванні квадратної нерівності в LearningApps

При переміщенні нумерація у верхньому лівому куті автоматично змінюється. Після перевірки можна виконати корекцію відповіді.

По закінченню вивчення квадратних нерівностей учні мають: формулювати означення квадратної нерівності; знати, що означає розв'язати нерівність та що є розв'язком квадратної нерівності; розуміти скільки розв'язків може мати квадратна нерівність; наводити приклади квадратних нерівностей, які: не мають жодного розв'язку; мають тільки один розв'язок; задовольняють усі дійсні числа; знати різні способи розв'язування квадратних нерівностей.

Тож нами були розроблені самостійна робота (додаток Б) і контрольна робота (додаток В), що передбачають перевірку зазначених знань та вироблених умінь учнів з теми «Квадратні нерівності».

2.1.3. Теоретико-множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем

Розв'язування системи (сукупності) нерівностей передбачає володіння учнем вмінням зображати числові множини, що є розв'язками окремих нерівностей, знаходити їх перерізи та об'єднання і формулювати відповідь у вигляді числових проміжків.

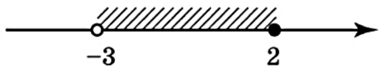
Зупинимось детальніше на останньому етапі розв'язування систем раціональних нерівностей. Цей етап часто викликає в учнів певні ускладнення, пов'язані з використанням теорії множин, оскільки символіка теорії множин використовується для запису розв'язків нерівностей. Тому, перш ніж вчити учнів зображати і формулювати розв'язки систем нерівностей, доцільно розглянути підготовчі завдання.

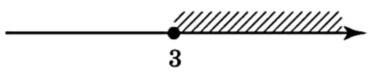
Задача 1.1. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

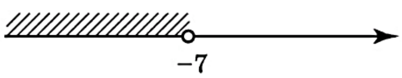
1) $(-2; 1)$; 2) $(-4; 2]$; 3) $[1;\ 5)$; 4) $[-3;\ 7]$;

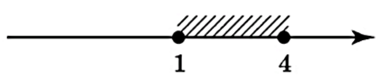
5) $(-\infty; -3)$; 6) $[4; +\infty)$; 7) $(-\infty; 0]$; 8) $(5;\ +\infty)$.

Задача 1.2. Запишіть проміжки, які зображені на рисунках:

1)


2)


3)


4)


Задача 1.3. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

1) $x \geq 5$; 2) $x < 4{,}5$; 3) $x \leq -1{,}5$;

4) $3{,}9 < x < 4$; 5) $2{,}5 \leq x \leq 3\frac{1}{8}$; 6) $7 < x \leq 13{,}01$.

Задача 1.4. (усно) Прочитайте вголос та з'ясуйте, істинні чи хибні такі твердження:

1) $-1{,}009 \in [-1{,}01; 1{,}02]$;

2) $-\frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$;

3) $0 \in (-\infty;0)$;

4) $73 \notin \mathbb{Q}$;

5) $5\frac{1}{9} \in \mathbb{Z}$;

6) $-9 \in \mathbb{N}$?

Також можна запропонувати учням виконати вправу на знаходження пари в Інтернет-сервісі мультимедійних дидактичних вправ LearningApps (рис. 2.13).

Завдання 1.6. З’єднайте проміжки з відповідними зображенннями на координатній прямій.

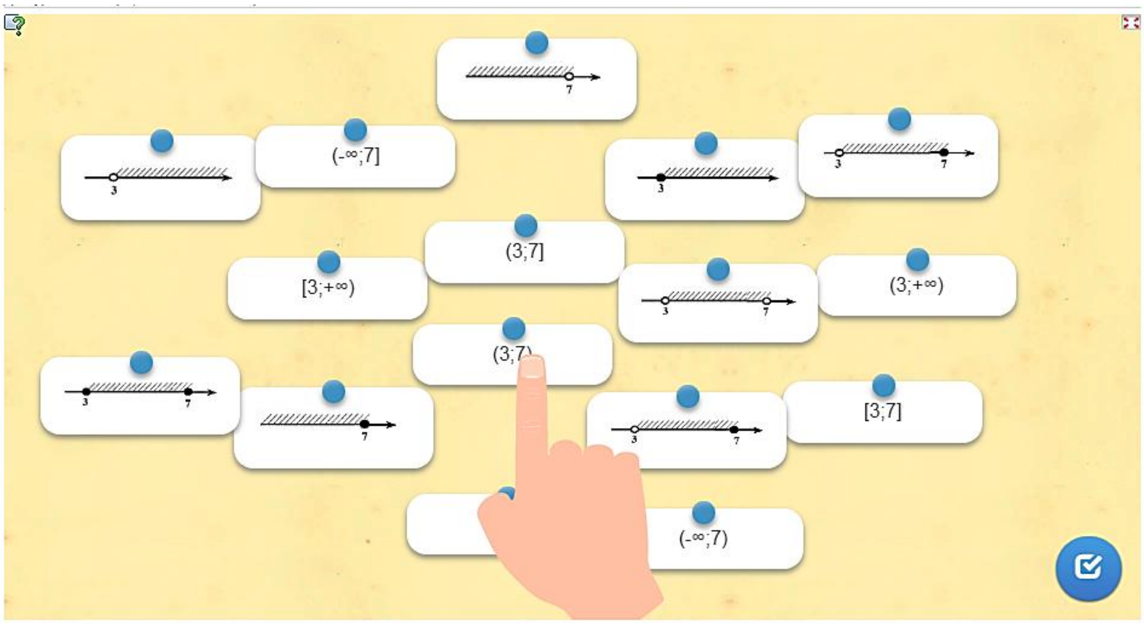


Рис. 2.13. Вікно виконання вправи на знаходження пари в LearningApps

Можна задавати режими виконання завдання: або при правильній відповіді пари отримують зелене обрамлення і залишаються на екрані, або зникають. Неправильні варіанти обрамляються червоним кольором.

Задача 1.5. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку. Які натуральні числа належать проміжку? Яке найбільше і найменше ціле число належить проміжку?

1) $(-0{,}1;\ 4{,}9]$; 2) $[1;\sqrt{5})$;

3) $\left(-3; 2\frac{1}{4}\right]$; 4) $[2; 3{,}99)$.

Задача 1.6. Зобразіть проміжки (числові множини) на координатній прямій та запишіть їх об’єднання і переріз:

1) $[8; 15]$ і $(9; 20]$; 2) $[-2{,}7; 0)$ і $[0;+\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$ і $\emptyset$;

4) $[0; 1)$ і $[-2; 1]$; 5) $(0; 2)$ і $[0; 2]$; 6) $\{4\}$ і $(-\infty; 4)$;

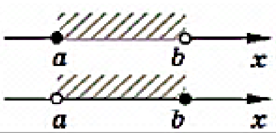
7) $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$; 8) $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$; 9) $(-1; 0]$ і $[-\infty; +\infty)$.

Важливо систематизувати знання і уміння учнів, пов’язані з умінням зображати у вигляді числових проміжків розв’язки нерівностей. Результати такої систематизації можна представити в таблиці (табл.2.4).

Систематизовані таким чином знання і уміння є важливими складовими діяльності учнів, пов’язаної з останнім етапом розв’язування систем раціональних нерівностей [59, с. 211].

Табл.2.4

Систематизація знань і умінь учнів зображати у вигляді числових проміжків розв’язки нерівностей

Нерівність	Зображення	Позначення	Словесне формулювання
$x < a$		$(-\infty; a)$	Нескінченний проміжок (промінь)
$x \le a$		$(-\infty; a]$	
$x > a$		$(a; +\infty)$	
$x \ge a$		$[a; +\infty)$	
$-\infty < x < \infty$		$(-\infty; +\infty)$ або R	Множина всіх дійсних чисел, числова пряма
$a \le x \le b$		$[a; b]$	Закритий проміжок (відрізок) із кінцями a і b
$a < x < b$		$(a; b)$	Відкритий проміжок (інтервал) із кінцями a і b
$a \le x < b$ $a < x \le b$		$[a; b)$ $(a; b]$	Напіввідкритий проміжок (півінтервал) із кінцями a і b

2.1.4. Методичні особливості розв'язування систем нерівностей

На практиці часто постає питання про відшукання всіх спільних розв'язків нерівностей з однією зміною (розв'язування системи нерівностей) або про відшукання всіх значень змінних, при яких хоча б одна з нерівностей перетворювалася на правильну (розв'язування сукупності нерівностей).

Вміння розв'язувати як раціональні нерівності, так і їх системи та сукупності – важлива складова алгебраїчної культури учнів. Розв'язування систем та сукупностей раціональних нерівностей заслуговує особливої уваги, оскільки це комплексна навчально-математична діяльність, яка передбачає володіння учнем такими знаннями та уміннями:

а) розуміння сутності понять «система нерівностей», «сукупність нерівностей»;

б) володіння різними методами та прийомами розв'язування окремих видів нерівностей;

в) вміння планувати та реалізовувати сплановану діяльність, пов'язану з розв'язуванням систем та сукупностей нерівностей;

г) вміння зображати числові множини, що є розв'язками окремих нерівностей, знаходити їх перерізи та об'єднання і формулювати відповідь.

Вперше учні знайомляться з системами та сукупностями раціональних нерівностей в 9 класі, коли вивчають тему «Системи лінійних нерівностей з однією змінною». В подальшому учні стикаються з завданнями на розв'язування систем квадратних нерівностей.

Для усвідомлення учнями необхідності у вивченні способів розв'язування систем та сукупностей нерівностей з однією змінною вчитель може запропонувати на етапі мотивації навчальної діяльності розв'язати конкретний приклад. Якщо на попередніх уроках вчителю вдалося сформувати в учня чітке уявлення про зміст понять: переріз та об'єднання числових проміжків, лінійна нерівність, квадратна нерівність, розв'язок нерівності з однією змінною, а також сталі навички розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною і квадратних нерівностей та рівносильних перетворень нерівностей, то при розв'язуванні систем та сукупностей цих нерівностей в учнів не повинно виникати труднощів.

Перед вивченням нового матеріалу доречно актуалізувати основні необхідні знання та вміння, набуті учнями протягом попередніх уроків, запропонувавши їм вправи:

1. Розв'яжіть нерівність:

   1) $2x > 4$; 4) $x^2 - 5x \le 0$;

   2) $-x \ge 3$; 5) $\frac{x}{5} < -2$;

   3) $x^2 - 4 > 0$; 6) $(x+1)(x-4) > 10$.

2. Знайдіть переріз та об'єднання проміжків, що відповідають парі нерівностей:

   1) $x \ge 3$ і $x \ge 5$; 2) $x^2 - 5x \ge 6$ і $x + 2 \le 5$; 3) $\frac{x}{5} \ge 4$ і $-2 < x \le 3$.

Після актуалізації опорних знань та пояснення нового матеріалу доцільно запропонувати учням записати в зошити опорний конспект з теорії (табл.2.5), та самостійно скласти аналогічний конспект для сукупностей лінійних нерівностей з однією змінною.

Табл.2.5

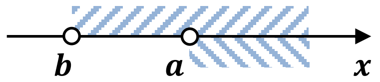
Опорний конспект з теми «Системи лінійних нерівностей»

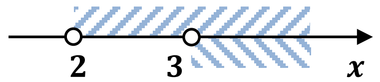
Системи лінійних нерівностей з однією змінною
Системи вигляду: $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases}$ називаються ***системами двох лінійних нерівностей з однією змінною.*** (Замість знаків >, < можуть бути знаки $\ge, \le$.) Щоб розв'язати систему нерівностей, треба кожну нерівність системи розв'язати окремо, а потім знайти розв'язок системи як перетин множин розв'язків нерівностей.

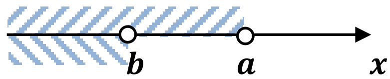
Після цього за допомогою конкретних прикладів вчитель має показати усі можливі розв’язки систем лінійних нерівностей (табл.2.6).

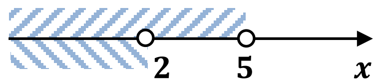
Табл.2.6

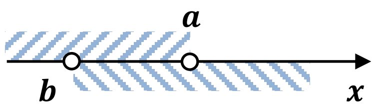
Можливі випадки розв’язків систем лінійних нерівностей

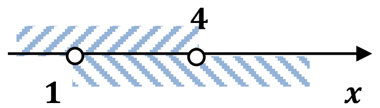
<table>
<tr><th>Системи лінійних нерівностей $(a > b)$</th><th>Розв’язок та його геометрична ілюстрація</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$</td><td>

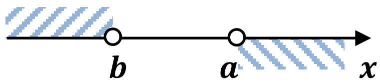
$x \in (a; +\infty)$</td><td>$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$


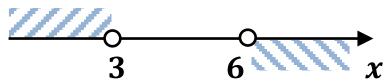
$x \in (3; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$</td><td>

$x \in (-\infty;\ b)$</td><td>$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$


$x \in (-\infty;\ 2)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$</td><td>

$x \in (b;\ a)$</td><td>$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$


$x \in (1;\ 4)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$</td><td>

Розв’язків немає</td><td>$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$


Розв’язків немає</td></tr>
</table>

Після виконання певної кількості прикладів учні засвоюють алгоритм розв’язання систем і сукупностей нерівностей з однією змінною, тому вчитель має проконтролювати, щоб учні записали послідовність кроків розв'язування систем і сукупностей нерівностей в зошити та відобразили в опорному конспекті конкретні приклади (табл.2.7).

Табл.2.7

Основні кроки розв'язування систем та сукупностей нерівностей

Основні кроки розв'язування системи нерівностей з однією змінною

1. Розв'язати кожну нерівність системи.

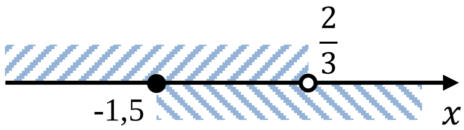
2. Зобразити множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.

3. Знайти переріз числових проміжків, записати відповідь.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 3x+4<6, \\ 2x+7\geq 4. \end{cases}$

Розв'язання

$\begin{cases} 3x+4<6, \\ 2x+7\geq 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<6-4, \\ 2x\geq 4-7; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<2, \\ 2x\geq -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<\frac{2}{3}, \\ x\geq -1{,}5 \end{cases}$ (див. рисунок)



Відповідь: $x\in\left[-1{,}5;\frac{2}{3}\right)$.

Основні кроки розв'язування сукупності нерівностей з однією змінною

1. Розв'язати кожну нерівність сукупності.

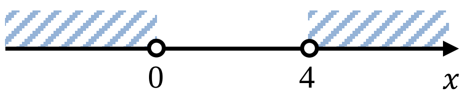
2. Зобразитит множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.

3. Знайти об'єднання числових проміжків, записати відповідь.

Приклад. Знайти розв'язок сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} 3x-5>7, \\ 2x+3<3. \end{array}\right.$

Розв'язання

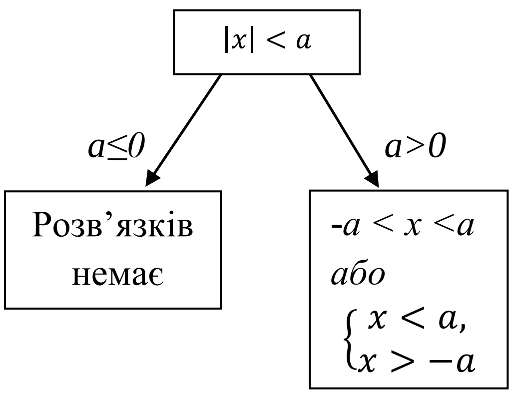
$\left[\begin{array}{l} 3x-5>7, \\ 2x+3<3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x>7+5, \\ 2x<3-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x>12, \\ 2x<0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<0. \end{array}\right.$ (див. рисунок)



Відповідь: $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

На етапі формування умінь учнів розв'язувати системи та сукупності нерівностей завдання слід підбирати таким чином, щоб показати учням якомога більше різних випадків їх розв'язків (наприклад, коли одна з нерівностей взагалі не має розв'язків або її розв'язком є вся числова пряма і т.д.). Доречно також обговорити з учнями питання про використання систем нерівностей з однією змінною для розв'язування подвійних нерівностей.

Відмінності у розв'язанні систем і сукупностей нерівностей можна показати, дослідивши розв'язки найпростіших нерівностей з модулем.

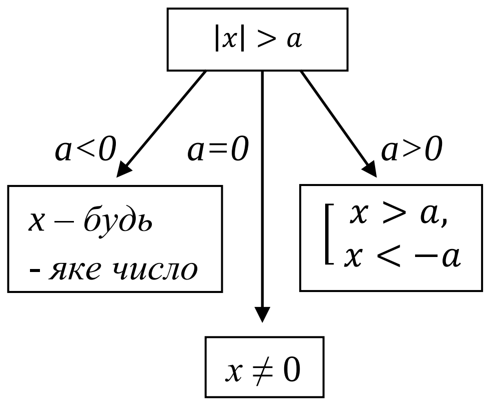


Наприклад:

$|x-1| < 3;$

$\begin{cases} x-1 < 3, \\ x-1 > -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ x > -2. \end{cases}$

$x \in (-2; 4).$



Наприклад:

$|x-1| > 3$

$\left[\begin{array}{l} x-1 > 3, \\ x-1 < -3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < -2. \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty).$

Приклад 1.8. Визначити, при яких значеннях змінної має зміст вираз $\sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$.

Розв'язання

Вираз $\sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$ має зміст, коли підкореневі вирази невід'ємні і знаменник не дорівнює 0, тобто виконується система:

$\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ 9-2x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \geq -3, \\ -2x > -9; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1{,}5, \\ x < 4{,}5; \end{cases}$ $x \in [-1{,}5; 4{,}5).$

Відповідь: $[-1{,}5; 4{,}5)$.

Приклад 1.9. Розв'язати нерівність $|7x+8| \leq 2$.

Розв'язання

Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 7x+8\le 2, \\ 7x+8\ge -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x\le 6, \\ 7x\ge -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le \frac{6}{7}, \\ x\ge -1\frac{3}{7}; \end{cases} \quad x\in\left[-1\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right].$$

Відповідь: $\left[-1\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right]$.

Вправи, запропоновані до розв'язання, мають бути спрямовані на вироблення навичок виконання таких дій:

а) розв'язування кожної нерівності системи (сукупності);

б) знаходження перерізу (об'єднання) знайдених проміжків.

Велика кількість вправ різного рівня складності сприятиме виробленню навичок безпомилкового виконання цих дій. При цьому доречно нагадати учням, що координатна пряма використовується для зручності, оскільки рисунок відіграє допоміжну роль; а отже, від учня вимагається правильно зображати послідовність розташування чисел на координатній прямій. В подальшому, після набуття певного досвіду, учні мають усвідомити, що досить часто розв'язок системи або сукупності нерівностей можна знаходити і без рисунка, тому виконання рисунків не обов'язкове [25, с. 121].

Підібравши відповідні за змістом тренувальні вправи, вчитель закріплює всі контрольні моменти, відтворені у прикладах.

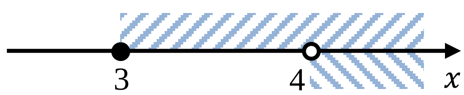
1. Чи є числа: – 4; 0; 5 розв'язками:

   1) системи $\begin{cases} 3x\le 0, \\ x+7>0; \end{cases}$ 2) сукупності $\left[\begin{array}{l} 3x\ge 0, \\ x+7<0. \end{array}\right.$

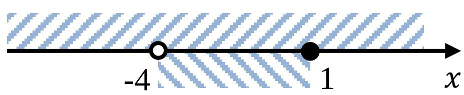
2. На рисунках позначено множини розв'язків систем нерівностей. Чи є правильним запис множин розв'язків систем?

   1) $(4;+\infty)$

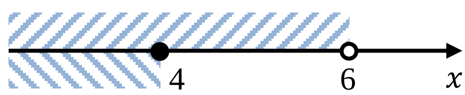
   2) Розв'язків немає



   3) (–4; 1]



   4) $(-\infty;6]$



На завершальному етапі вивчення даної теми для перевірки учнями власного рівня засвоєння навчального матеріалу доречно запропонувати їм такі вправи:

1. Що означає «розв’язати систему (сукупність) нерівностей»? Опишіть дії, які треба виконати, щоб отримати розв’язок системи (сукупності) нерівностей.
2. Розв’яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 0x < 15, \\ x > 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0x > -13, \\ x < 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0x > 15, \\ x > 6 \end{cases}$

3. Кожну з нерівностей замініть рівносильною системою або сукупністю нерівностей:

1) $|x| > 3$; 2) $|x| < 3$; 3) $|x - 2| \geq 2$; 4) $|x - 3| \leq 1$.

3. Дано систему $\begin{cases} x > a, \\ x > 3. \end{cases}$

При яких a розв’язком системи є проміжок:

1) $(3;+\infty)$; 2) $(4;+\infty)$; 3) $(3;4)$?

Для узагальнення і систематизації знань з теми доцільно організувати самостійну роботу учнів (додаток Б), а на уроці перевірки і корекції знань, умінь і навичок провести контрольну роботу (додаток В).

Складаючи систему доцільних задач з даної теми, вчителю слід охопити різноманітні випадки співвідношення розв’язків окремих нерівностей, що складають систему. Більшість шкільних підручників і збірників задач з алгебри містять цікаві набори систем та сукупностей раціональних нерівностей, але інколи ці набори задач не охоплюють всіх можливих варіантів співвідношень між розв’язками окремих нерівностей.

Опишемо методичний прийом, яким може скористатись вчитель, добираючи повноцінну систему задач. Спочатку вчителю слід розглянути можливі випадки співвідношень між числовими проміжками, що зображатимуть розв’язки окремих нерівностей. На основі запропонованих рисунків вчитель складає відповідну систему двох елементарних нерівностей (табл.2.8).

Табл.2.8

Системи елементарних нерівностей, складені на основі рисунків

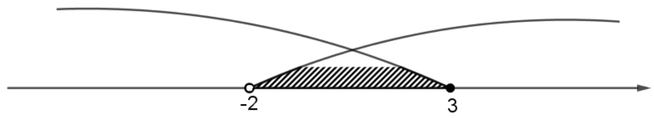
<table>
<tr><th>Випадки співвідношень між числовими проміжками</th><th>Відповідні системи елементарних нерівностей</th></tr>
<tr><td>

Рис.1</td><td>$\begin{cases} x > -2, \\ x \leq 3 \end{cases}$ (1)</td></tr>
<tr><td>

Рис.2</td><td>$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 5 \end{cases}$ (2)</td></tr>
<tr><td>

Рис.3</td><td>$\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1 \end{cases}$ (3)</td></tr>
<tr><td>

Рис.4</td><td>$\begin{cases} (x+3)(x-5) < 0, \\ (x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$ (4)</td></tr>
<tr><td>

Рис.5</td><td>$\begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0, \\ (x+2)(x-4) \leq 0 \end{cases}$ (5)</td></tr>
</table>

Ці системи вчитель може «ускладнити», використовуючи властивості числових нерівностей.

Приклад 1.10. Складання системи нерівностей на основі рис.1 (табл.2.8).

«Ускладнити» систему елементарних нерівностей, що відповідає рис.1, можна, помноживши першу нерівність на 3, а другу – на (–2):

$$\begin{cases} 3x > -6, \\ -2x \geq -6 \end{cases}$$

В кожній нерівності перенесемо (–6) у ліву частину і одержимо:

$$\begin{cases} 3x + 6 > 0, \\ 6 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

В першій нерівності винесемо 3 за дужки, а в другій (–2). Одержимо систему у вигляді:

$$\begin{cases} 3(x + 2) > 0, \\ -2(x - 3) \geq 0 \end{cases}$$

В результаті розв'язування учні одержують рисунок, аналогічний рис.1, знаходять спільну частину проміжків $(-2;\ +\infty)$ і $(-\infty;\ 3]$, тобто їх переріз. Таким чином розв'язком заданої системи нерівностей буде проміжок $(-2; 3]$.

Приклад 1.11. Складання системи нерівностей на основі рис.2 (табл.2.8).

«Ускладнимо» систему, що відповідає рис.2, таким чином: помножимо першу нерівність на 6, а до другої нерівності додамо вираз $x^2 - 9$ і зведемо подібні доданки у правій частині нерівності:

$$\begin{cases} 6x \geq 0, \\ x + x^2 - 9 > x^2 - 4 \end{cases}$$

До першої нерівності додамо вираз $x^2 + 9$ і переставимо доданки в зручному порядку; в другій нерівності скористаємось формулою скороченого множення «різниця квадратів»:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 \geq x^2 + 9, \\ (x - 3)(x + 3) + x > (x - 2)(x + 2) \end{cases}$$

Представимо ліву частину першої нерівності у вигляді квадрата різниці і перенесемо всі доданки першої і другої нерівності у ліву частину:

$$\begin{cases} (x + 3)^2 - x^2 - 9 \leq 0, \\ (x - 3)(x + 3) + x - (x - 2)(x + 2)\ > 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему нерівностей, учень відмічає на координатній прямій проміжки, задані елементарними нерівностями із системи (2) і знаходить їх переріз: $[0;+\infty) \cap (5;+\infty) = (5;\ +\infty]$. Отже, $x \in (5;\ +\infty]$.

Приклад 1.12. Складання системи нерівностей на основі рис.3 (табл.2.8).

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.3, має вигляд:

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Помножимо першу нерівність на 6, а другу – на 7:

$$\begin{cases} 6x \leq -6, \\ 7x \geq 7 \end{cases}$$

У лівій частині першої нерівності $6x$ представимо у вигляді суми $4x + 2x$, а в правій розпишемо (–6) як (–1–5). В другій нерівності до обох частин нерівності додамо $(x + 4)$:

$$\begin{cases} 4x + 2x \leq -1 - 5, \\ 7x + x + 4 \geq 7 + x + 4 \end{cases}$$

Перенесемо в першій нерівності з правої частини в ліву (–1), розпишемо (–5) як (–1–4) та додамо до обох частин нерівності $4x^2$. У другій нерівності зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 + 2x \leq 4x^2 - 1 - 4, \\ 8x + 4 \geq x + 11 \end{cases}$$

Помітимо, що в першій нерівності присутні формули скороченого множення, тому використаємо їх для «ускладнення» нерівності. В другій нерівності $x + 11$ представимо у вигляді $2x + 12 - x - 1$ та поділимо обидві частини нерівності на 8:

$$\begin{cases} (2x + 1)^2 + 2x \leq (2x - 1)(2x + 1) - 4, \\ \dfrac{8x + 4}{8} \geq \dfrac{2x + 12 - x - 1}{8} \end{cases}$$

Першу нерівність залишаємо без змін, а в другій в правій частині нерівності можемо виконати почленне ділення і скоротити отримані дроби:

$$\begin{cases}(2x+1)^2+2x\le(2x-1)(2x+1)-4,\\ \dfrac{2x+1}{2}\ge\dfrac{x+6}{4}-\dfrac{x+1}{8}\end{cases}$$

В результаті розв'язання учень отримує проміжки $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$, зображені на рисунку 3. Перерізом даних числових проміжків буде порожня множина $\emptyset$, а це означає, що система розв'язків не має.

Приклад 1.13. Складання системи нерівностей на основі рис.4 (табл.2.8).

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.4:

$$\begin{cases}(x+3)(x-5)<0,\\ (x+1)(x-2)\ge 0\end{cases} \qquad (4)$$

Додамо до першої нерівності 3, а від другої віднімемо 4:

$$\begin{cases}(x+3)(x-5)+3<3,\\ (x+1)(x-2)-4\ge -4\end{cases}$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases}x^2-2x-12<3,\\ x^2-x-6\ge -4\end{cases}$$

Винесемо в першій нерівності за дужки x, а в другій перенесемо усі доданки в ліву частину і зведемо подібні:

$$\begin{cases}x(x-2)-12<3,\\ x^2-x-2\ge 0\end{cases}$$

Першу нерівність поділимо на (–3), а в другій використаємо формулу скороченого множення різниці квадратів. Остаточна система нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases}-\dfrac{x(x-2)}{3}+5>0,\\ (x-1)(x+1)-x-1\ge 0\end{cases}$$

Прийшовши в результаті розв'язування до системи (4), учень відмічає на координатній прямій розв'язки першої нерівності $(-3;5)$ та розв'язки другої нерівності $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. Розв'язком цієї системи є переріз цих множин: $(-3;-1]\cup[2;5)$.

Приклад 1.14. Складання системи нерівностей на основі рис.5 (табл.2.8).

Відповідна рисунку 5 система елементарних нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases}(x+2)(x-1) \geq 0,\\ (x+2)(x-4) \leq 0\end{cases} \qquad (5)$$

В першій і другій нерівності розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases}x^2+x-2 \geq 0,\\ x^2-2x-8 \leq 0\end{cases}$$

Помножимо першу нерівність на (–4), а другу на (–1):

$$\begin{cases}-4x^2-4x+8 \leq 0,\\ -x^2+2x+8 \geq 0\end{cases}$$

В лівій частині першої нерівності винесемо за дужки ($-4x$), а в другій нерівності виконаємо перестановку доданків:

$$\begin{cases}-4x(x+1)+8 \leq 0,\\ 8+2x-x^2 \geq 0\end{cases}$$

Першу нерівність помножимо на 2, а другу поділимо на 2 і знову виконаємо перестановку доданків:

$$\begin{cases}-8x(x+1)+16 \leq 0,\\ -\dfrac{x^2}{2}+x+4 \geq 0\end{cases}$$

На останньому етапі розв'язування системи нерівностей учень зображає на координатній прямій проміжки, що є розв'язками першої нерівності $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$ та другої нерівності $[-2;4]$. Розв'язком цієї системи є переріз цих проміжків: $[1;4] \cup \{-2\}$.

Отже, $x \in [1;4] \cup \{-2\}$.

Описаний методичний прийом може бути використаний вчителем при складанні доцільної системи задач з теми, а сконструйовані таким чином системи раціональних нерівностей сприяють глибокому та свідомому засвоєнню учнями елементів теорії множин та направлені на формування умінь, пов'язаних з розв'язанням систем раціональних нерівностей [6, с. 307].

2.2. Формування алгоритмічних умінь і навичок при розв'язуванні нерівностей методом інтервалів

Одним з важливих методів розв'язування нерівностей є метод інтервалів. Це не універсальний метод, але він дуже зручний при розв'язуванні раціональних і дробово-раціональних нерівностей. Покажемо в чому полягає перевага методу інтервалів перед іншими методами розв'язування раціональних нерівностей на конкретному прикладі.

Приклад 2.1. Розв'язати нерівність: $(x-5)(x+3)>0$.

Багато учнів зводять цю нерівність до сукупності двох систем (множники обидва більше нуля або обидва менші за нуль):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-5)>0\\(x+3)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}(x-5)<0\\(x+3)<0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5\\x>-3,\end{cases}\\ \begin{cases}x<5\\x<-3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>5,\\x<-3\end{array}\right. \Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(5;\ +\infty).$$

Або ж учні розкривають дужки у нерівності $(x-5)(x+3)>0$, отримуючи квадратну нерівність:

$$x^2-2x-15>0$$

Далі вони бачать, що в лівій частині нерівності квадратична функція, графіком якої є парабола, яка перетинає вісь *Ox* в точках x =5 і $x=-3$ (рис.2.14). Вітки параболи направлені вгору, оскільки старший коефіцієнт дорівнює $1(>0)$.

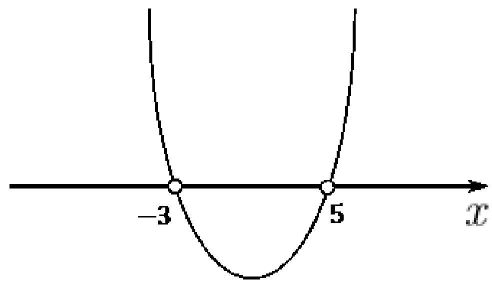


Рис.2.14.

Функція більше нуля там, де її графік проходить вище осі *Ox*. Отже, це інтервали $(-\infty;-3)$ і $(5;\ +\infty)$. Їх об'єднання і буде розв'язком нерівності.

Ми розглянули два шляхи розв'язування однієї і тієї ж нерівності. Обидва вони досить громіздкі, оскільки в першому випадку виникає сукупність систем нерівностей, а для розв'язування нерівності другим шляхом учню треба пам'ятати графік квадратичної функції, залежність його розташування від старшого коефіцієнта і дискримінанта квадратного тричлена і т.д.

Ця нерівність проста, в її лівій частині присутні всього 2 множника. Складності починають виникати, коли множників значно більше, наприклад:

$$(x-7)(x-1)(x+4)(x+9) < 0.$$

В першому випадку зведення нерівності до сукупності систем призведе до довгого і громіздкого розв'язання. Розкриття дужок – теж нераціональний шлях розв'язування. Тому саме в таких випадках застосовується метод інтервалів.

Метод інтервалів ґрунтується на понятті неперервності функції.

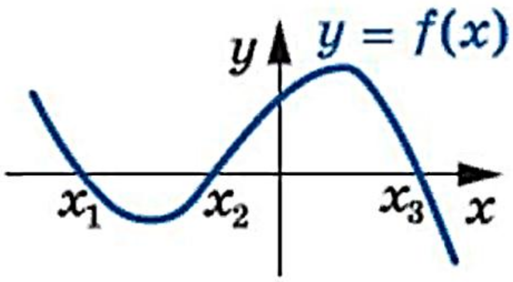


Рис.2.15.

На рис.2.15 зображено графік деякої неперервної функції f, у якої *D(f)*= ℝ і нулями є числа x_1, x_2, x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), (x_2; x_3), (x_3; +\infty)$.

Теорема. Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f, розв'язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Наприклад, поглянемо на графік функції $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$.

Основна думка полягає в тому, що раціональна функція може змінювати знак лише у точках, в яких вона рівна нулеві.

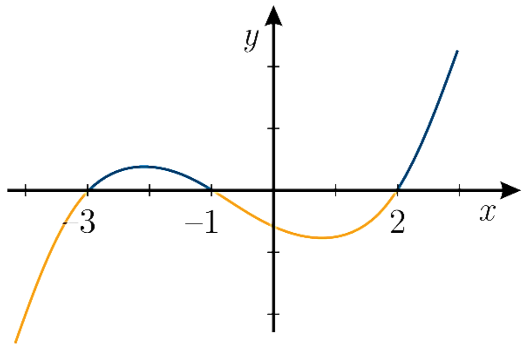


Рис.2.16.

Наприклад, точки $-3; -1; 2$ з рис. 2.16 – це граничні точки, між якими графік знаходиться або вище осі *Ox* (зображено синім), або нижче від осі *Ox* (зображено жовтим). Таким чином, знаходження нулів функції, що стоїть в лівій частині нерівності, – це дуже важливий крок при розв'язанні раціональних нерівностей. Ці точки можна знайти, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.

Отже, на основі вищерозглянутих теоретичних положень можна сформулювати такий *алгоритм розв'язання раціональної нерівності методом інтервалів:*

1. Перетворити нерівність, звівши її до такого вигляду:

$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) < 0 \; [\, > 0, \leq 0, \geq 0],$

тобто щоб виконувалося таке:

а) права чатина нерівності дорівнює нулю;

б) ліва частина нерівності представляє собою добуток лінійних множників виду $ax + b,$ де $a > 0$.

2. Визначити нулі функції, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$.

3. Знайдені нулі функції відмітити на координатній прямій, враховуючи строгість знака нерівності. Розбити координатну пряму (область визначення) на інтервали.

4. В правому крайньому інтервалі поставити знак «+», після чого чередувати знаки в наступних інтервалах, рухаючись справа наліво.

5. Об'єднати проміжки, на яких функція *f(x)* задовольняє нерівності, у множину розв'язків.

Перевага методу інтервалів полягає в тому, що на останньому інтервалі завжди буде знак «+», а в усіх інших інтервалах знаки будуть чередуватися, а отже, учню вже не потрібно визначати знаки на кожному з утворених проміжків. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 2.2. Розв'язати нерівність: $(2-x)(x-7) < 0$.

Розв'язання

Крок 1. Як бачимо, друга дужка відповідає стандартному вигляду, до якого можна застосувати метод інтервалів. Перетворимо першу дужку до стандартного для застосування методу інтервалів вигляду. Помножимо обидві частини нерівності на (–1), при цьому змінивши знак нерівності:

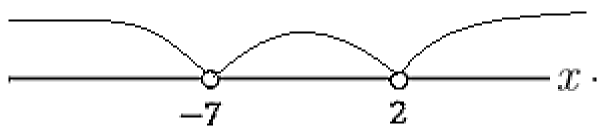
$$(x-2)(x+7) > 0.$$

Крок 2. Знайдемо граничні точки, розв'язавши рівняння $(x-2)(x+7) = 0$. Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з множників дорівнює нулю:

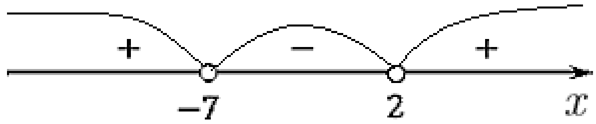
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2;$$

$$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Крок 3. Відмітимо на координатній прямій отримані корені, що є граничними точками для проміжків.



Крок 4. В правому крайньому інтервалі ставимо знак «+», в наступних інтервалах чередуємо знаки. Маємо:



Крок 5. Нас цікавлять ті проміжки, на яких ця функція від’ємна.

Це проміжок $(-7; 2)$. Отже, розв’язком нерівності буде $x \in (-7; 2)$.

Відповідь: $(-7; 2)$.

Під час розв’язування нерівностей за допомогою чіткого алгоритму вчитель має пояснити учням, що виконати наступний крок можна лише виконавши попередній. Також він має слідкувати за тим, щоб пояснення учнів при записі розв’язання були короткими і логічними. Це сприяє розвитку раціональності мислення і лаконічності мовлення. Розв’язання нерівності за чітким алгоритмом повинне завершуватися одержанням кінцевих результатів та підведенням підсумків.

Засвоєння на інтуїтивно-практичному рівні понятійного апарату та відповідних способів поетапної діяльності сприяє формуванню алгоритмічної культури учнів [62, с. 47].

При розв’язуванні нерівностей методом інтервалів створюються сприятливі умови для формування алгоритмічних умінь учнів, адже цей метод заснований на чіткому виконанні кроків алгоритму, вимагає від учня певної самостійності і здатності до самоконтролю.

Учень повинен вміти виконувати кожен крок, розуміти кожну з команд, що входять до алгоритму. Крім того, неприпустимі такі ситуації, коли після виконання чергового кроку учню не зрозуміло, що потрібно робити наступним кроком. Тому на перших етапах засвоєння алгоритму вчитель має контролювати роботу учня біля дошки, стежити за послідовністю та правильністю виконання кроків алгоритму. В процесі виконання певної кількості вправ учні поступово починають формувати навички покрокового виконання алгоритму та структурування власної діяльності.

Приклад 2.3. Розв’язати нерівність: $x(2x+8)(x-3) > 0$.

Розв’язання

Крок 1. Перетворюємо нерівність до стандартного для застосування методу інтервалів вигляду:

$$(x-0)(2x+8)(x-3) > 0.$$

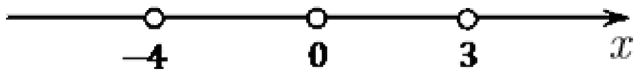
Крок 2. Замінюємо нерівність рівнянням $(x-0)(2x+8)(x-3)=0$ і розв'язуємо його:

$$x=0;$$

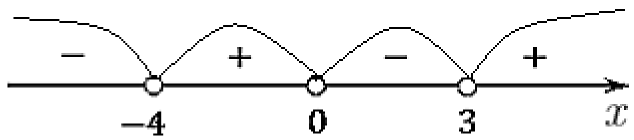
$$2x+8=0 \Rightarrow x=-4;$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3.$$

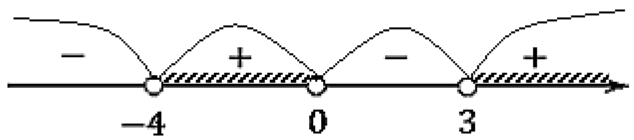
Крок 3. Відмічаємо ці три корені на координатній прямій, враховуючи строгість знаку нерівності.



Крок 4. Проставляємо знаки, чередуючи, рухаючись справа наліво:



Крок 5. Функція задовольняє знаку нерівності на проміжках $(-4;0)$ і $(3;+\infty)$.



Отже, $x \in (-4;0) \cup (3;+\infty)$.

Відповідь: $(-4;0) \cup (3;+\infty)$.

Приклад 2.4. Розв'язати нерівність: $x^3-8x-16<4(3x-x^2)$.

Розв'язання

Крок 1. Перетворимо нерівність таким чином, аби праворуч залишився нуль, а зліва – добуток лінійних множників. Розкриємо дужки в правій частині вихідної нерівності:

$$x^3-8x-16<12x-4x^2.$$

Перенесемо невідомі доданки в ліву частині і зведемо подібні доданки:

$$x^3+4x^2-4x-16>0.$$

Винесемо за дужки x^2 і –4:

$$x^2(x+4)-4(x+4)>0.$$

Винесемо за дужки $(x+4)$:

$$(x+4)(x^2-4)>0.$$

За формулою різниці квадратів розкладемо x^2-4:

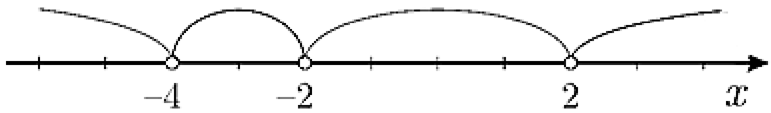
$$(x+4)(x+2)(x-2)>0.$$

Тепер нерівність записана у стандартному для застосування методу інтервалів вигляді. Можемо перейти до наступного кроку.

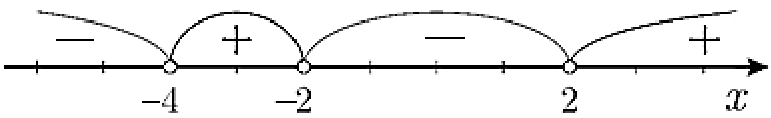
Крок 2. Визначимо граничні точки, розв'язавши рівняння $(x+4)(x+$ $+2)(x-2)=0$.

Отже, граничні точки: −4; −2; 2 .

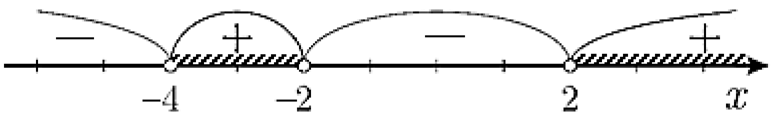
Крок 3. Зобразимо ці точки на числовій прямій, враховуючи строгість знака нерівності. В результаті утворилося чотири інтервали.



Крок 4. Проставимо, чередуючи, знаки (в крайньому правому проміжку – знак «+»).



Крок 5. Інтервали, в яких функція набуває додатних значень: $(-4;-2)$ та $(2;+\infty)$.

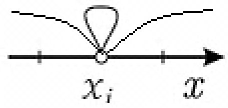


Таким чином $x\in(-4;-2)\cup(2;+\infty)$.

Відповідь: $(-4;-2)\cup(2;+\infty)$.

Отже, при переході через граничні точки (нулі функції) знаки інтервалів змінюються на протилежні. Розглянемо випадок, коли гранична точка є кратним коренем, тобто в розкладі на множники двочлен з таким коренем стоїть у степені, більшому за одиницю, тобто $(x-x_i)^k$.

Нехай, наприклад, корінь x_i має кратність 2, тоді можна вважати, що це два окремих корені, між якими є «інтервал», що злився в одну точку на числовій осі, тобто початок і кінець інтервалу збігаються. Практично це виглядає так:



Приклад 2.5. Розв'язати нерівність: $(x-1)(x-2)^2(x+3)^3 \geq 0$.

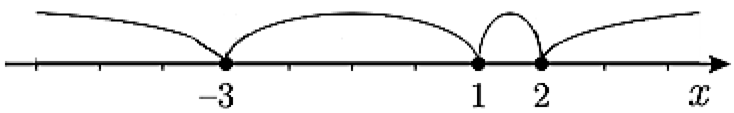
Розв'язання

Крок 1. Перетворимо ліву частину нерівності до стандартного вигляду, розклавши на множники:

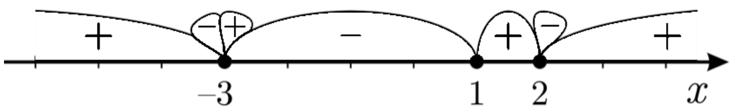
$$(x-1)(x-2)(x-2)(x+3)(x+3)(x+3) \geq 0.$$

Крок 2. Граничні точки многочлена: −3; −3; −3; 1; 2; 2.

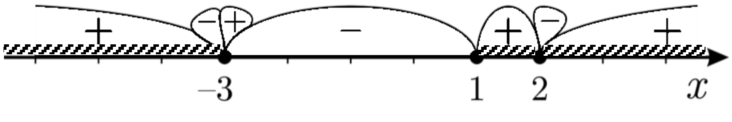
Крок 3. Зобразимо граничні точки на числовій прямій. Нерівність є нестрогою, інтервали включають кінцеві точки, тому їх зображуємо зафарбованими.



Крок 4. Враховуючи, що точка $x = 2$ має кратність «2», а точка $x = -3$ – кратність «3», проставляємо знаки таким чином:



Крок 5. Функція невід'ємна на інтервалах $(-\infty; -3]$, $[1; 2]$ та $[2; +\infty)$. Об'єднавши два останні інтервали, отримаємо: $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.



Відповідь: $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

При розстановці знаків зручно користуватись наступним правилом:

- якщо лінійний множник $x - x_0$ стоїть в непарному степені, то при переході через точку x_0 знак міняється на протилежний; якщо лінійний множник $x - x_0$ стоїть у парному степені, то при переході через точку x_0 знак не змінюється;
- якщо точка x_0 не належить інтервалу, але відповідає знаку нерівності, вона утворює ізольовану точку – розв'язок.

Дуже важливо в подальшому навчити учнів самостійно будувати алгоритми або виділяти загальний орієнтир та застосовувати їх при розв'язанні нерівностей, тримаючи в голові алгоритм як загальний план.

Розглянемо, як застосовується метод інтервалів до розв'язування дробово-раціональних нерівностей $\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0.$

Такі нерівності можна розв'язувати, звівши їх до сукупності двох систем нерівностей. Доцільно продемонструвати учням, що застосування методу інтервалу дає більш раціональне розв'язання.

Теорема. Функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$і $g(x)$ – многочлени, неперервна на *D(y)*.

Ця теорема дозволяє для нерівностей виду $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, застосовувати метод інтервалів.

При цьому нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ рівносильна нерівності $f(x)g(x) < 0$, а нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ рівносильна системі:

$$\begin{cases} f(x)g(x) \leq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Приклад 2.6. Розв'язати нерівність $\frac{(x-6)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} \geq 0.$

Розв'язання

Дана нерівність рівносильна системі:

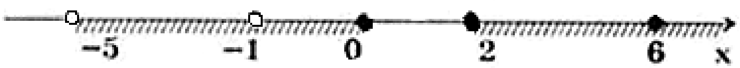
$$\begin{cases}(x-6)^2(x-2)x(x+1)^4(x+5) \ \geq 0, \\ (x+1)^4(x+5) \neq 0.\end{cases}$$

Крок 1. Розглянемо першу нерівність системи та зведемо її до рівносильної їй таким чином, щоб до неї можна було б застосувати метод інтервалів:

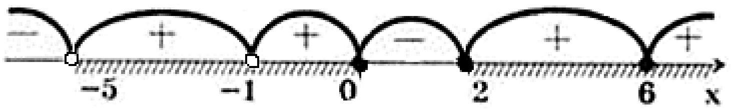
$$(x-6)^2(x-2)(x-0)(x+1)^4(x+5) \geq 0.$$

Крок 2. Розв'язавши рівняння $(x-6)^2(x-2)(x-0)(x+1)^4(x+5) = 0$, визначаємо граничні точки: $x=6$, $x=-1$, $x=2$, $x=0$, $x=-5$.

Крок 3. Наносимо граничні точки на координатну пряму, враховуючи строгість знаку нерівності та другу нерівність системи.



Крок 4. З урахуванням того, що в околі точок $x=-1$ і $x=6$ ліва частина нерівності зберігає знак (тому що у виразах $(x-6)^2$та $(x+$ $+1)^4$ показники степенів є парними числами), проставляємо знаки:



Крок 5. Об'єднаємо множини розв'язків: $x \in (-5;-1) \cup (-1;0] \cup [2;6] \cup [6;+\infty) = (-5;0] \cup (2;\ +\infty)$.

Відповідь: $(-5;0] \cup (2;\ +\infty)$.

Алгоритмічний підхід допомагає систематизувати роботу над розв'язанням задач і довести навички їх розв'язування до автоматизму.

Важливо пам'ятати про те, щоб надмірна алгоритмізація діяльності на основі готових вказівок не стала гальмом для розвитку творчих якостей, пов'язаних із пошуком скорочених, раціональних шляхів розв'язування задачі.

2.3. Методика формування умінь і навичок розв'язування ірраціональних та трансцендентних нерівностей та їх систем

Вивченню ірраціональних і трансцендентних нерівностей (до їх складу входять показникові, логарифмічні і тригонометричні нерівності) передує вивчення раціональних нерівностей та їх систем.

На відміну від вивчення теми «Раціональні нерівності», яка отримує достатнє розгортання, аж до формування міцних навичок розв'язування, ірраціональні і трансцендентні нерівності тільки починають вивчатися, причому розглядаються далеко не всі класи, а остаточне вивчення відбувається в курсі алгебри і початків аналізу. При їх вивченні доводиться спиратися на загальні поняття і методи, пов'язані з лінією нерівностей. Зазначена відмінність, однак, не є єдиною, яка протиставляє ці дві групи. Більш суттєвим є врахування особливостей, пов'язаних з розгортанням матеріалу з кожної з цих груп. У порівнянні з першою групою нерівності, що входять до складу другої, в процесі їх вивчення виявляють значно складніші зв'язки з іншими лініями курсу математики – числовою, функціональною, лінією тотожних перетворень та ін.

Послідовність вивчення різних класів нерівностей і систем різна в різних підручниках. Однак кількість можливих варіантів для послідовності їх введення не занадто велика – класи знаходяться в певній логічній залежності один від одного, яка визначає порядок їх появи в курсі [58, с. 71].

Розв'язування ірраціональних нерівностей полягає в перетворенні їх до раціональних нерівностей (систем) шляхом піднесення обох частин нерівності до степеня.

Щоб уникнути помилок при розв'язуванні ірраціональних нерівностей, слід розглядати тільки ті значення змінної, при яких всі функції нерівності визначені, тобто знайти ОДЗ цієї нерівності, а потім здійснювати рівносильний перехід на всій ОДЗ або її частинах.

Вивчення теми починається з розгляду означення та схем розв’язання ірраціональних нерівностей (рис. 2.17).

Основним методом розв’язання ірраціональних нерівностей є зведення вихідної нерівності до рівносильної системи або сукупності систем раціональних нерівностей [49, с. 294].

Найбільш прості ірраціональні нерівності мають вигляд: $\sqrt[2n]{x} < a$ (або $\sqrt[2n]{x} \le a$) та $\sqrt[2n]{x} > a$ (або $\sqrt[2n]{x} \ge a$).

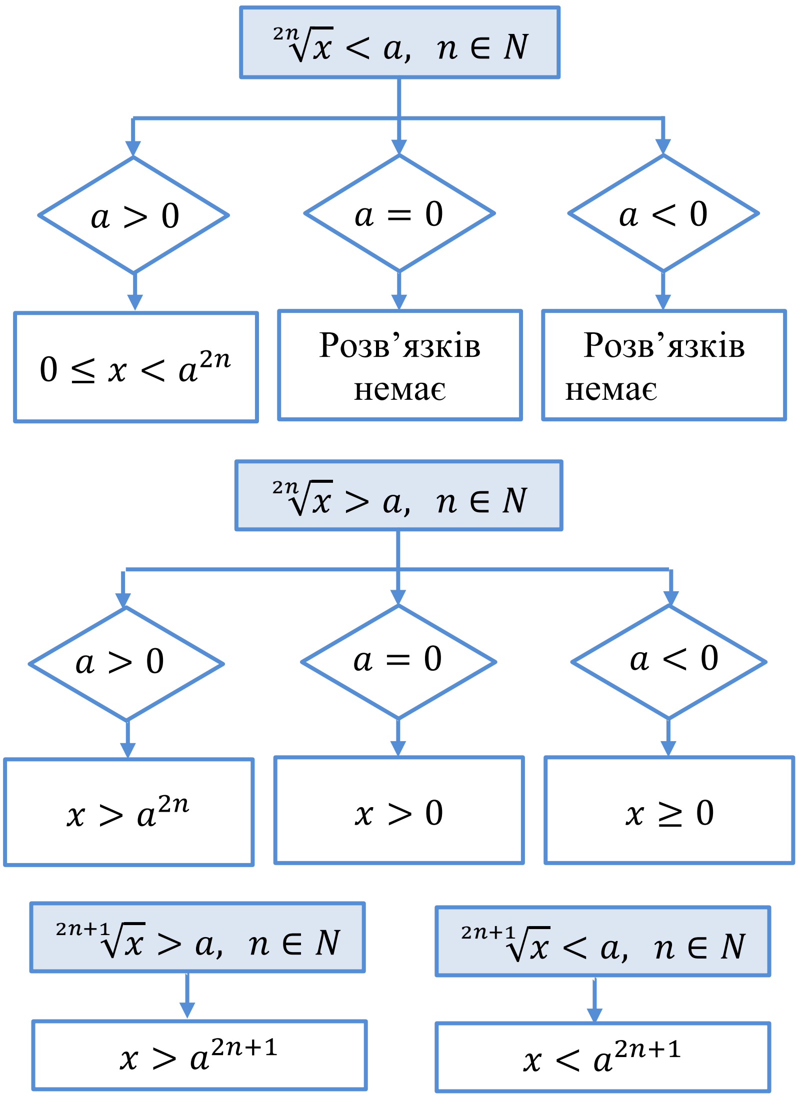


Рис. 2.17. Схеми розв’язування ірраціональних нерівностей

Нерівності $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$ та $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$ рівносильні нерівностям $f(x) > g^{2n+1}(x)$ та $f(x) < g^{2n+1}(x)$.

Нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$ рівносильна системі

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$ рівносильна системі

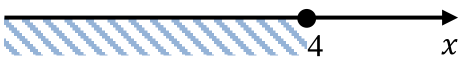
$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 3.1. Розв’язати нерівність $\sqrt{4x - x^2} < 4 - x$.

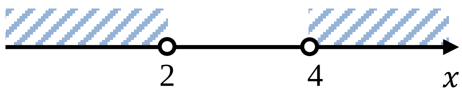
$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 4x - x^2 < (4 - x)^2, \\ 4x - x^2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ 4x - x^2 < 16 - 8x + x^2, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ 2x^2 - 12x + 16 > 0, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4, \\ x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ (x - 2)(x - 4) > 0, \\ x(4 - x) \geq 0; \end{cases}$$

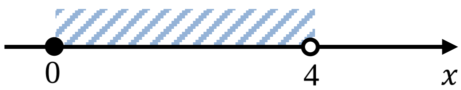
Позначимо на координатній прямій отримані проміжки:



$x \in (-\infty;\ 4)$



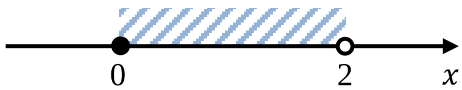
$x \in (-\infty; 2) \cup (4;\ +\infty)$



$x \in [0;\ 4)$

Знайдемо переріз цих проміжків:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ 4), \\ x \in (-\infty; 2) \cup (4;\ +\infty). \\ x \in [0;\ 4). \end{cases}$$



Тоді $x \in [0; 2)$.

Відповідь. $[0;\ 2)$.

Нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$ рівносильна об’єднанню систем:

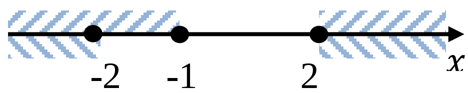
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases} \text{та} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 3.2. Розв’язати нерівність $\sqrt{2x^2 - x - 6} \geq \sqrt{x^2 - 4}$.

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 6 \geq x^2 - 4, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0, \\ (x-2)(x+2) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty). \end{cases}$$



Тоді $x \in (-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$.

У процесі розв’язування *показникових і логарифмічних нерівностей та їх систем* корисно систематизувати знання учнів про рівносильність нерівностей і систем, виділити операції, які можуть порушувати рівносильність. Слід звернути увагу на причини виникнення сторонніх коренів при розв’язуванні нерівностей і в зв’язку з цим на необхідність перевірки знайдених розв’язків, а також на причини втрати коренів [43, с. 8].

Приклад 3.3. Розв’язати нерівність $-1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$.

Розв’язати дану подвійну нерівність – означає знайти усі значення x, що задовольняють одночасно двом нерівностям: $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -1$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$.

Перша з цих нерівностей виконується при будь якому *x*, оскільки показникова функція завжди додатня.

Другу нерівність перепишемо у вигляді $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$. Користуючись властивістю показникової функції (за основою, яка менша одиниці, більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу та навпаки, меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції), приходимо до висновку, що ця нерівність рівносильна

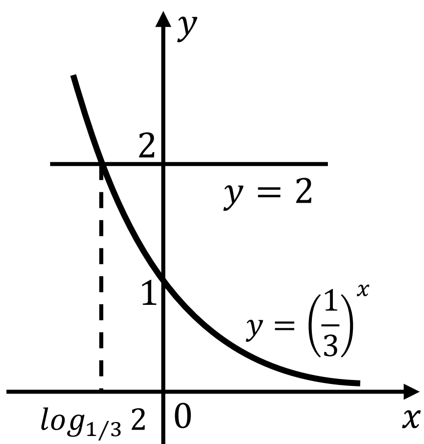


Рис. 2.18

нерівності $x > \log_{\frac{1}{3}} 2$.

Розв’язок цієї нерівності добре ілюструється за допомогою графіка (рис. 2.18). Розв’язками є ті значення *x,* при яких графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ лежить нижче горизонтальної прямої $y = 2$, тобто усі x правіше абсциси точки перетину побудованих графіків (ця абсциса є розв’язком рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$). Таким чином, розв’язок нашої нерівності – інтервал $x > \log_{\frac{1}{3}} 2$.

При розв’язуванні найпростіших *логарифмічних* нерівностей також треба пам’ятати про те, що властивості логарифмічної функції відрізняються в залежності від основи, меншої або більшої за одиницю. Проте для розв’язування цих нерівностей істотно ще й те, що логарифмічна функція визначена не для усіх x.

Забуваючи про це, багато учнів розв’язують нерівність $\log_2 x < 1$ так: «Перепишемо нашу нерівність у вигляді $\log_2 x < \log_2 2$. При основі, більшій за 1, більше число має більший логарифм; тому нерівність буде виконуватись для $x < 2$». Ніби то в цьому міркуванні усе вірно – але все ж учень дав невірну відповідь. Дійсно, будь-яке від’ємне число менше за 2, проте при від’ємних x початкова нерівність не має сенсу (так як не існує логарифма від’ємного числа). Чому ж з’явився зайвий розв’язок? Справа в тому, що остання нерівність має сенс для усіх x, а початкова нерівність – лише для тих x, для яких має сенс $\log_2 x$, тобто для $x > 0$. А ця обставина при розв’язуванні врахована не була. Таким чином, правильною відповіддю є інтервал $0 < x < 2$ [20, с. 17].

На цьому простому прикладі можна показати учням, що при такому способі розв’язування логарифмічних нерівностей треба завжди пам’ятати про області визначення логарифмічних функцій. Проте простіше безпосередньо користуватись властивостями логарифмів.

Так, застосування властивостей одразу дозволяє замінити нерівність $\log_2 x < \log_2 2$ на рівносильну їй нерівність $0 < x < 2$, яка і є розв’язком.

Приклад 3.4. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$.

Переходячи у правій частині до логарифму за основою $\frac{1}{2}$отримуємо рівносильну нерівність

$$\log_{\frac{1}{2}} x \left(1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Оскільки $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, то $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, тобто $1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$.

Враховуючи, що $0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$, отримуємо нерівність $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 1$, рівносильну початковій. Застосовуючи властивість логарифмів, знаходимо розв'язок початкової нерівності $0 < x < 1$.

Учні часто допускають прикрі помилки при розв'язуванні найпростіших *тригонометричних нерівностей.* Покажемо найбільш типові з цих помилок.

а) Знаючи, що розв'язок рівняння $\sin x = a \; (|a| \leq 1)$ записується формулою $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, більшість учнів пишуть: «розв'язком нерівності $\sin x < a$ є $x < (-1)^k \arcsin a + k\pi, k = 0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$». Дуже часто переконати учня в абсурдності такої відповіді буває важко.

б) Символи $\arcsin a$, $\arccos a$ та інші часто використовуються без необхідного попереднього дослідження.

Так, розв'язок нерівності $\sin x \leq \log_4 5$ багато учнів записують за допомогою символу $\arcsin(\log_4 5)$, який позбавлений сенсу, бо $\log_4 5 > 1$. Разом з цим ця нерівність справедлива при будь-яких x – саме тому, що $\log_4 5 > 1$.

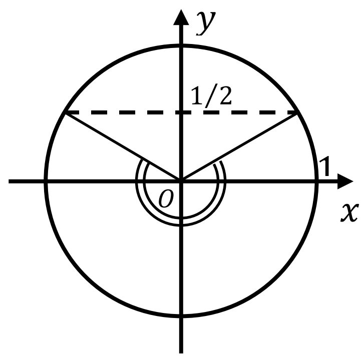


Рис. 2.19

в) Часто, розв'язуючи, наприклад нерівність $\sin x \leq \frac{1}{2}$, учні правильно відмічають на тригонометричному колі ті кути, які дають розв'язок цієї нерівності (рис. 2.19), але помиляються, даючи їх аналітичний запис у вигляді

$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – адже при будь-якому k ліва частина нерівності більше правої.

Для розвитку логічної компетентності учнів корисно пропонувати їм для усного розв'язування завдання такого типу.

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-2} + 5^{x^2-2} \leq -1$.

Розв'язання

Дана нерівність не має розв'язків, оскільки функція $y = \sqrt{x-2} + 5^{x^2-2}$ невід'ємна як сума двох невід'ємних функцій.

2. Розв'язати нерівність $\sqrt{sin\, x + 2ctgx} < -1$.

Розв'язання

Ліва частина нерівності невід'ємна при при будь-якому x, а з цього слідує, що нерівність не винується при жодному значенні x. Отже, нерівність розв'язків не має.

При розв'язуванні найпростіших тригонометричних нерівностей краще користуватися графіками. Цей шлях практично гарантує уникнення помилок, дозволяючи наочно представити області, в яких нерівність виконується. Для аналітичного запису цих областей користуються наступним фактом: якщо $f(x)$ – періодична функція, то для розв'язку нерівності $f(x) > a$ достатньо знайти її розв'язок на будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду функції $f(x)$, і тоді розв'язком нерівності будуть усі знайдені x, а також усі x, відмінні від знайдених на будь-яке ціле число періодів.

Отже, у процесі вивчення розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені, корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової і логарифмічної функції, їх властивості та графіки, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової і логарифмічної функції, розв'язувати показникові і логарифмічні нерівності та їх системи, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами і степенями.

2.4. Застосування програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програми як GRAN1, ЕНМК «Алгебра» та ін. Використання таких програм забезпечує активну дослідницьку діяльність, в процесі якої формується дослідницька компетентність. Уроки, проведені з використанням програмних засобів, сприяють набуттю учнями технологічної компетентності, дозволяють ефективніше застосовувати вивчені ними методи розв'язування нерівностей та їх систем, перевіряти правильність побудованих графіків та отриманих розв'язків, розвивати логічне мислення та дослідницькі вміння.

Покажемо, як можна застосовувати дані ППЗ на уроці алгебри при вивченні нерівностей та їх систем.

Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас».

Наведемо *приклад доповнення бібліотеки алгебраїчних задач розв'язанням нерівності другого степеня* $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ [28, с. 161].

1) Відкриваємо програмний модуль розв'язування задачі (*Інструменти \Середовище розв'язання*), обираємо команду *Задача\Нова задача\ Нерівності \ Алгебраїчна нерівність*, записуємо у відведену комірку формулу $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

2) Підвівши вказівник мишки до знака нерівності, натискуємо праву клавішу мишки і таким чином відкриваємо *Довідник* для вибору першого кроку розв'язання. Для виділеної дії вибираємо в закладці *Нерівності* дію *Розв'язати відповідне квадратне рівняння*.

3) Виділяємо утворене рівняння (натискуємо на знак «=») і обираємо дію *Обчислити дискримінант рівняння*. У полі розв'язання з'являється вираз $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1$. Підвівши вказівник мишки до знака «мінус», виділяємо вираз $(-3)^2-4\cdot2\cdot1$ (підтвердженням виділення є змінення кольору виразу), натискуємо праву клавішу мишки і відкриваємо *Довідник* для вибору

кроку *Обране \ Заміна рівних*. Заносимо у відведену комірку значення дискримінанта *1*.

4) Вибираємо з довідника дію *Розв'язати квадратне рівняння,* попередньо виділивши рівняння та його дискримінант (рис. 2.20).

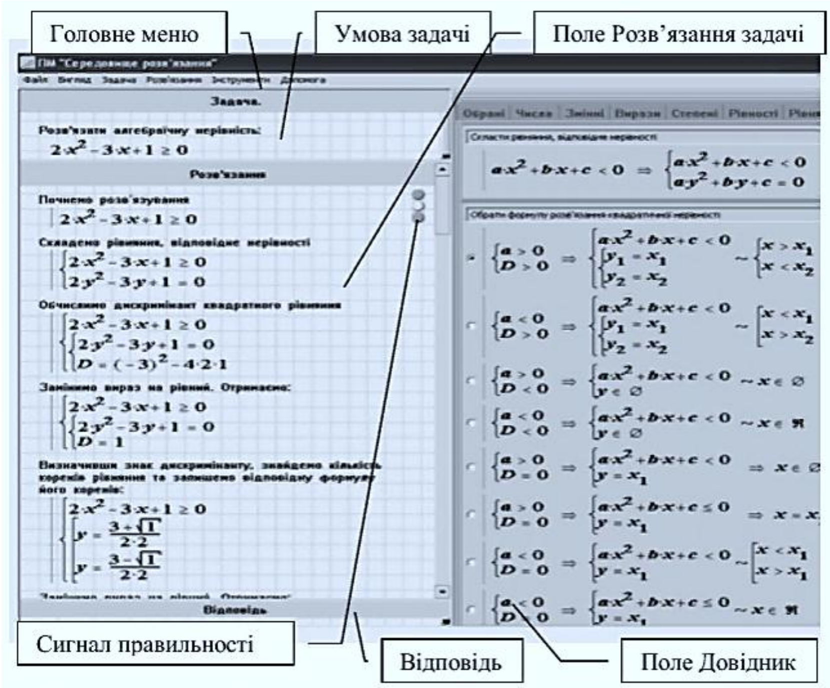


Рис. 2.20. Загальний вигляд вікна *Середовища розв'язання* для 9 класу

5) Спрощуємо вирази для коренів, виконавши дію *Заміна рівних*.

6) Записуємо розв'язки нерівності. Для цього виділяємо нерівність та знайдені розв'язки квадратного рівняння («{») і зазначаємо дію *Вибрати формулу розв'язання*.

7) Для кожної з утворених простих лінійних нерівностей записуємо розв'язання у вигляді інтервалу (дія *Розв'язати найпростішу лінійну нерівність*).

8) Записуємо розв'язок даної нерівності як об'єднання інтервалів (*Системи \ Об'єднання розв'язків*).

9) Записування відповіді і зберігання розв'язаної нерівності у темі бібліотеки «Нерівності».

Якщо включити дану нерівність в урок, то можна буде здійснювати покрокове відтворення її розв'язання.

На рис.2.21 представлено кроки обчислення дискримінанта відповідного квадратного рівняння.

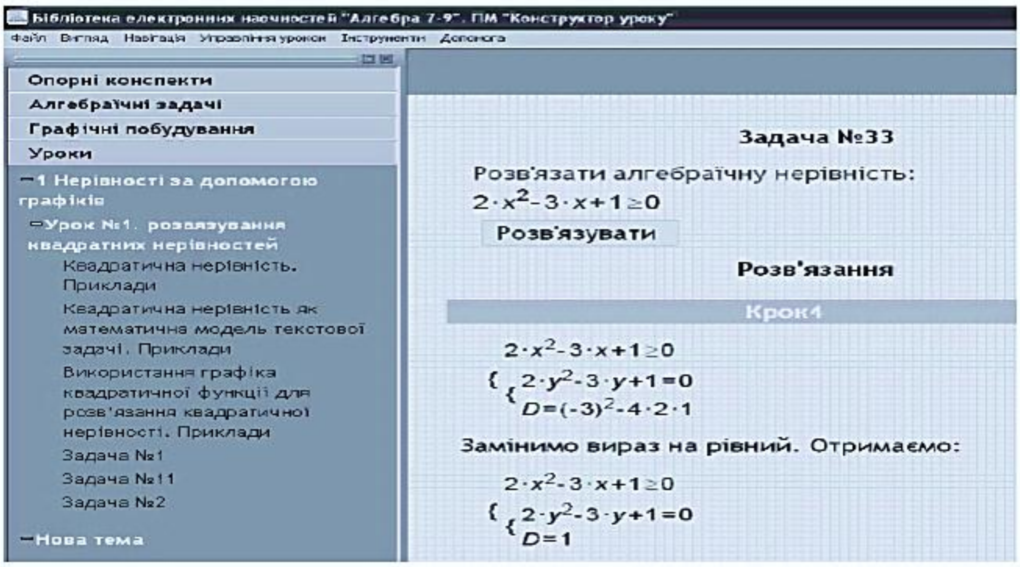


Рис. 2.21. Вікно перегляду розв’язування нерівності

Таким чином, процес розв’язування нерівності за допомогою ППЗ є послідовністю кроків, на кожному з яких користувач виконує деякі перетворення математичної моделі задачі. До найважливіших аспектів підтримки роботи учня можна віднести перевірку правильності ходу розв’язування нерівності, автоматизацію рутинних дій учня, пов'язаних з обчисленнями [30, с. 75]. У ході діяльності учитель може оперативно здійснювати перевірку правильності ходу розв’язування нерівності, автоматизоване тестування знань учнів. ПМК може використовуватися на уроці у процесі пояснення методів розв’язування нерівностей, для проведення самостійних і контрольних робіт.

Пошуково-дослідницька діяльність учнів у процесі розв’язування нерівностей з використанням GRAN1

Під пошуково-дослідницькою діяльністю учнів розуміють таку навчально-пізнавальну діяльність, яка спрямована на самостійне набуття нових математичних знань на основі аналізу наявних даних, висування гіпотез та їх обґрунтування. У ході дослідницької діяльності удосконалюються дослідницькі уміння учнів – вміння прогнозувати кінцевий результат роботи, знаходити певні закономірності, досліджувати їх на основі висунутих гіпотез, шукати шляхи їх обґрунтування, використовувати для дослідження ППЗ [35, с. 23]. Розглянемо приклади завдань, при виконанні яких зручно виконати дослідження за допомогою GRAN1.

Приклад 4.1. Розв'язати нерівність $\log_{|y|-x^2}(x^2+y^2) \geq \log_{|y|-x^2} 4$.

Розв'язання

Дана нерівність, що має змінну основу, рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} |y| - x^2 > 1, \\ x^2 + y^2 \geq 4, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 0 < |y| - x^2 < 1, \\ 0 < x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Для побудови за допомогою GRAN1 створюємо об'єкт неявного типу *0=G(x,y): 0=*log*(ABS (y)–x^2, (x^2+y^2)/4)* і використовуємо послугу *Операції \ Нерівність*. G(x,y)>0 (рис. 2.22).

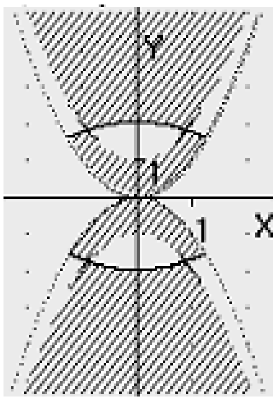


Рис. 2.22. Заштриховані розв'язки нерівності

Розглянемо, як можна застосувати ППЗ GRAN1 для *розв'язування логарифмічних нерівностей з однією змінною*. Щоб в ході евристичної бесіди з учнями складати алгоритми розв'язування найпростіших нерівностей $\log_a x \geq b$, $\log_a x \leq b$, $\log_a f(x) \leq \log_a f(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a f(x)$, доцільно спочатку проаналізувати з учнями властивості логарифмічної функції залежно від основи логарифма та використати послугу *Операції \ Нерівність*.

Приклад 4.2. Знайти, скільки цілих розв'язків має нерівність $\log_2(13 - x) \leq 2x + 11$.

Розв'язання

Дану нерівність традиційно розв'язують графічним способом. Будуємо графіки функцій $y = \log_2(13 - x)$ і $y = 2x + 11$ і записуємо у відповідь абсциси тих точок, для яких графік першої функції розташований нижче графіка другої (рис. 2.23). Оскільки мова йде лише про цілі розв'язки нерівності, то отримаємо, що x може набувати цілих значень від *–3* до *12* включно.

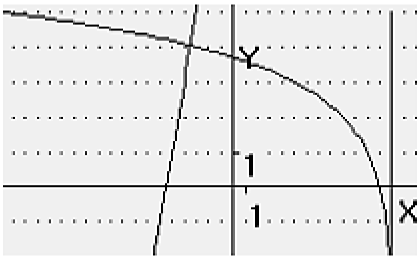


Рис. 2.23. Графіки заданих логарифмічних функцій

Крім побудов графіків, можна використати послугу *Операції \ Нерівність* для нерівності $\log_2(13 - x) - 2x \leq 11$. У вікні *Відповідь* отримаємо кінці відкритого інтервалу –3,48; 13; а на осі абсцис буде побудований контрастною лінією інтервал. У відповідь згідно з умовою подаємо цілі розв'язки з інтервалу.

Отже, використання даного ППЗ сприяє розвитку в учнів таких навичок мислительної діяльності, як аналіз, синтез, систематизація, узагальнення; удосконалює навички самоконтролю та активізує дію мотиваційних чинників у створенні позитивного ставлення до навчання; стимулює пошук нестандартних підходів до розв'язування задач, а тому сприяє розвитку особистості школяра.

Формування пізнавальних якостей учнів у навчанні розв'язуванню нерівностей з параметрами графічними прийомами

Для відшукання розв'язків нерівностей *f(x)≥0, f(x)>0, f(x)<0, f(x)≤0* спочатку будують графік рівняння *f(x)=0*. Для цього створюють об'єкти явного *y=f(x)* чи неявного виду задання *G(x,y)=0*, а потім використовують послугу *Розв'язати нерівність*.

Наприклад, щоб з’ясувати, скільки розв’язків отримаємо при розв’язуванні нерівності $x^4(4-a) > x^2(x^2-2a)+4a$ залежно від параметра a, створимо об’єкт *x^2*(4 – Y) – x^2*(x^2 – 2*Y) – 4*Y = 0.*

Заштриховане з використанням GRAN1 ГМТ (рис. 2.24), що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. Абсциси спільних точок дадуть розв’язки нерівності.

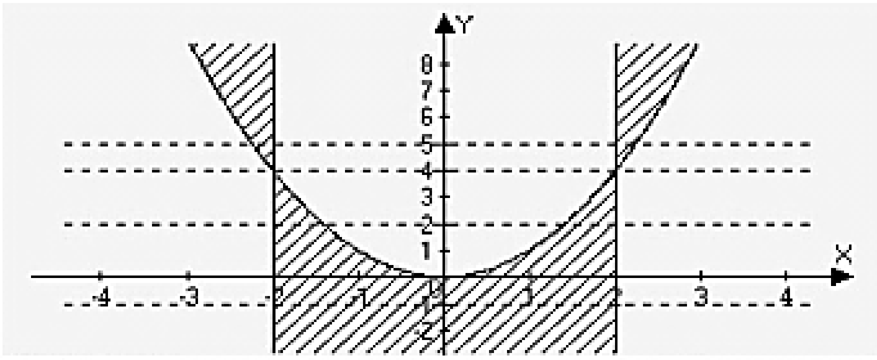


Рис. 2.24. ГМТ, що задовольняють нерівності. Координати *(x;a)*

Записуючи їх, враховуємо, що нерівність строга: якщо $a < 0$, то $x \in (-2; 2)$; якщо $0 \leq a \leq 4$, то $x \in \left(-2; -\sqrt{a}\right) \cup \left(\sqrt{a};\ 2\right)$; для *a=4* розв’язків немає; при $a > 4$ $x \in \left(-\sqrt{a}; -2\right) \cup \left(2; \sqrt{a}\right)$.

На основі графічного образу бажано запропонувати учням самостійно скласти нові задачі. Наприклад, дослідити, коли нерівність не має розв’язків; при яких значеннях параметра множині розв’язків належить відрізок [3;4]; коли отримаємо розв’язки, що містять не менше шести цілих чисел, три цілих числа та інші? [16, с. 233]. Вміння аналізувати графічні образи допоможе в подальшому швидше шукати ефективні методи розв’язування.

Приклад 4.3. Дослідити кількість розв’язків нерівності $a4^x - 4 \cdot 2^x + 3a + 1 \geq 0$ при різних параметрах a.

Розв’язання

Для дослідження створюють об’єкт типу *G(x,y)* за формулою *0 = y*4^x – 4*2^x + 3*y + 1* (параметр позначили через y) і використовують послугу *Розв’язати нерівність G(x,y)>0*. Побудову виконано в координатній площині *(x,a).* Заштриховане з використанням GRAN1 ГМТ, що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. При різних значеннях a прямі або не перетинають заштриховану область, або перетинають її вздовж відрізків. Абсциси спільних точок дадуть розв’язки нерівності (рис. 2.25).

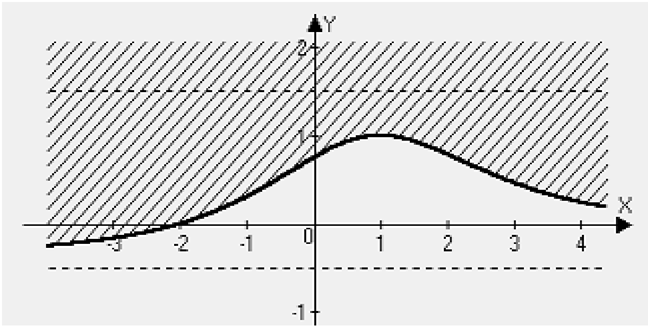


Рис. 2.25. ГМТ, побудоване в координатах *(x,a)*

Щоб розвивати гнучкість мислення школяра, корисно розв’язувати одну і ту ж задачу різними методами. Так, попередню нерівність заміною змінної $t = 2^x$ можна звести до квадратної нерівності $at^2 - 4t + 3a + 1 \geq 0$, де $t > 0$ і досліджувати квадратний тричлен $at^2 - 4t + 3a + 1$. Якщо застосовувати GRAN1, то необхідно створити об’єкт явного типу задання за формулою *y=P1*x^2-4*x+3*P1+1* і побудувати графік на координатній площині *(x,y).*

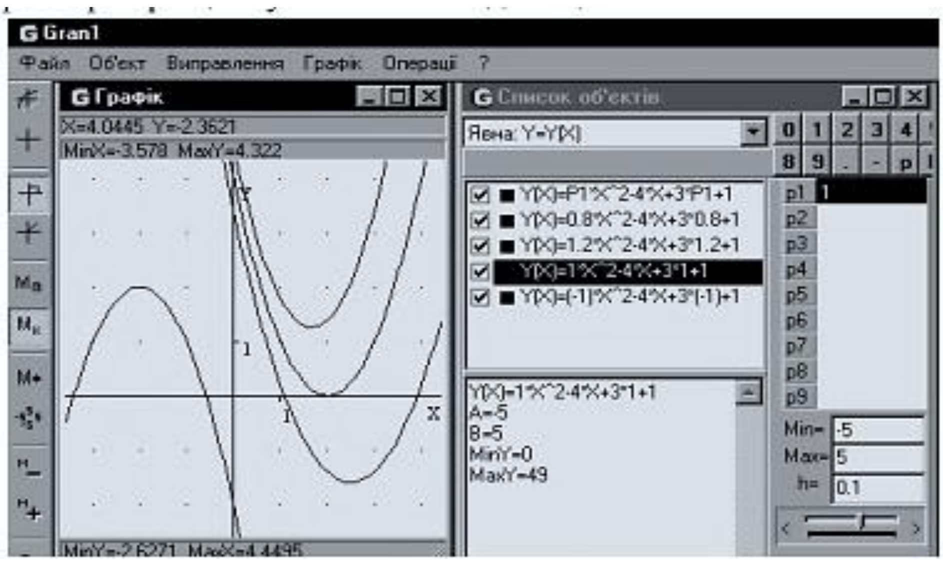


Рис. 2.26. Дослідження положення параболи залежно від параметра

Змінюємо значення параметра рухаючи бігунок, що розташований під списком об’єктів (функцій). У ході дослідження школярі зможуть зафіксувати чотири різних положення параболи, що є важливими для відшукання розв’язків (рис. 2.26).

Очевидно, що від’ємні a умову нерівності не задовольняють, бо в цьому разі над віссю абсцис може бути розташованою лише частина параболи. Тобто нерівність буде виконуватися не для всіх дійсних x. Для нульового значення параметра отримаємо лінійну нерівність, розв’язки якої утворюють підмножину множини додатних чисел. Для додатних a вітки параболи напрямлені вгору. Враховуючи знак нерівності «≥», умову задовольняють ті значення параметрів, коли парабола розташована над віссю абсцис чи дотикається до неї, тобто дискримінант $-3a^2 - a + 4$ відповідного квадратного рівняння недодатний, значення параметра при даному a не менші одиниці.

Розв’язування нерівностей з параметрами в системі динамічної математики GeoGebra

Важливим чинником розвитку дослідницьких умінь учнів є розв’язування *нерівностей та їх систем з параметрами*, яким нажаль не приділяється достатня увага у шкільній програмі. При цьому завдання, що містять параметри, широко представлені, як в ЗНО з математики, та і на вступних іспитах до ВУЗів. Тому завдання з параметрами можуть і повинні використовуватися при організації навчальних досліджень учнів [26, с. 11]. Розглянемо приклад формування дослідницької компетентності при розв’язуванні нерівностей з параметрами засобами GeoGebra.

Приклад 4.4. Розв’язати нерівність: $|x-1| \cdot \sqrt{x+a} > 0$;

Розв’язання

Введемо функцію $y = |x-1| \cdot \sqrt{x+a}$. $D(y)\colon\ x \geq -a$ (рис. 2.27).

Нулі функції: $x = 1,\ x = -a$.

Отже: якщо $a > -1$, то $x \in (-a; 1) \cup (1; +\infty)$,

якщо $a \leq -1$, то $x \in (-a; +\infty)$.

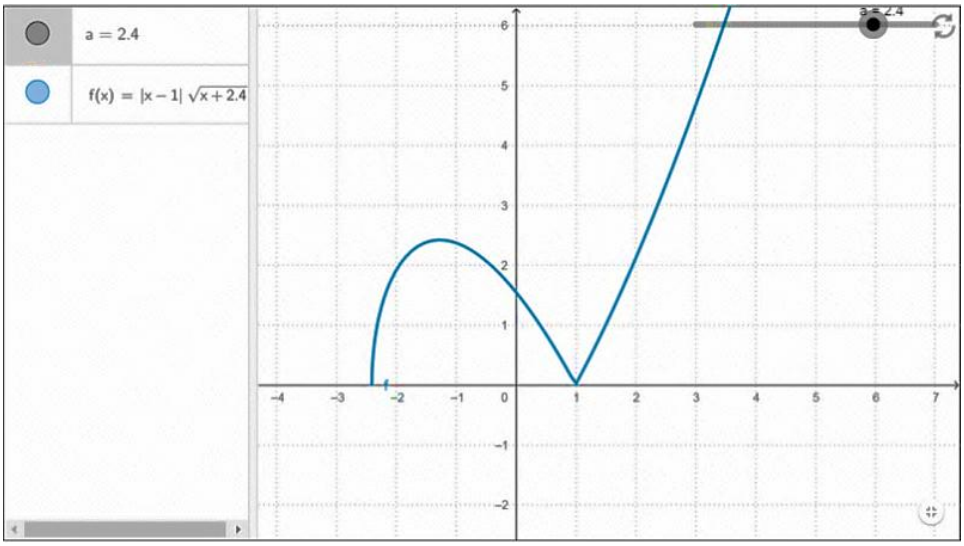


Рис. 2.27

Приклад 4.5. Розв'язати нерівність: $|x| \cdot (x - a) > 0$.

Розв'язання

Введемо функцію $y = |x| \cdot (x - a)$. $D(y)$: R, нулі $x = 0, x = a$ (рис. 2.28).

Отже: якщо $a < 0$, то $x \in (a; 0) \cup (0; \infty)$,

якщо $a \geq 0$, то $x \in (a; \infty)$.

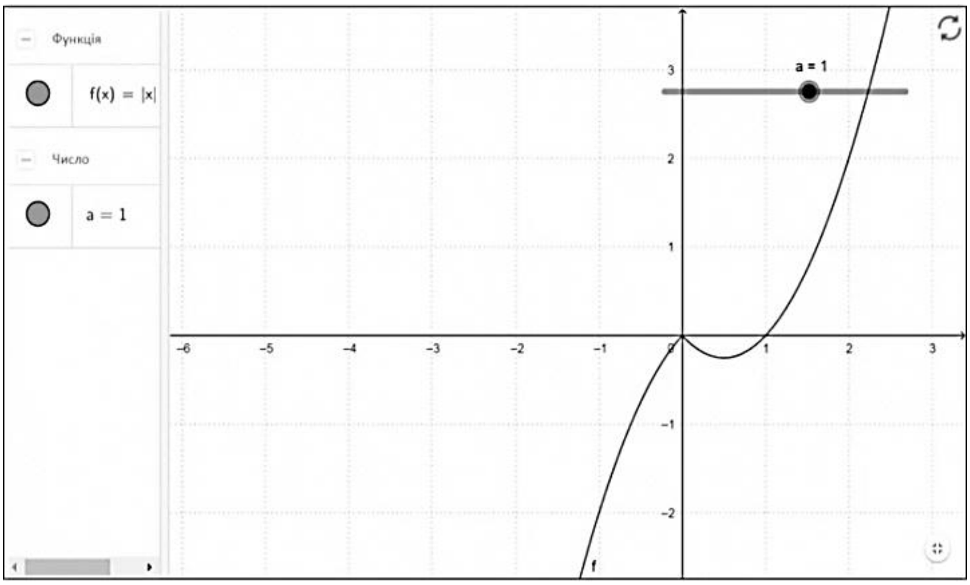


Рис. 2.28

Приклад 4.6. Розв'язати нерівність: $\frac{x}{\sqrt{|x|+a}} > a^2$

Розв'язання

Введемо функції y=$\frac{x}{\sqrt{|x|+a}}$ і y=a^2 (рис. 2.29). Оскільки права частина нерівності невід’ємна, то ясно, що $x > 0$. Тому дана нерівність рівносильна: $\frac{x}{\sqrt{x+a}} > a^2$. Маємо $\frac{x^2}{x+a} > a^4$, або $\frac{x^2-x^4(x+a)}{x+a} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-x^5-x^4a)}{x+a} > 0$.

$D(y)$: $x > -a > 0$, нулі:

$x_1 = \frac{a^4+a^2\sqrt{a^4+4a}}{2}$ та $x_2 = \frac{a^4-a^2\sqrt{a^4+4a}}{2}$.

Отже, якщо $a \in \left(-\sqrt[3]{4}; 0\right), D < 0 \Rightarrow x \in (-a; \infty)$;

якщо $a \in (-\infty; -\sqrt[3]{(4)}), D > 0,\ x_1 = \frac{a^4+a^2\sqrt{(a^4+4a)}}{2},\ x_2 = \frac{a^4-a^2\sqrt{a^4+4a}}{2}$

$\Rightarrow x \in (a; x_2) \cup (x_1; +\infty)$;

якщо $a \in [0, +\infty)$, тоді $x_2 < 0$ і $x \in (x_1; \infty)$.

якщо $a = -\sqrt[3]{4}$, то $x \in \left(a; -\sqrt[3]{4}\right) \cup \left(-\sqrt[3]{4}; \infty\right)$.

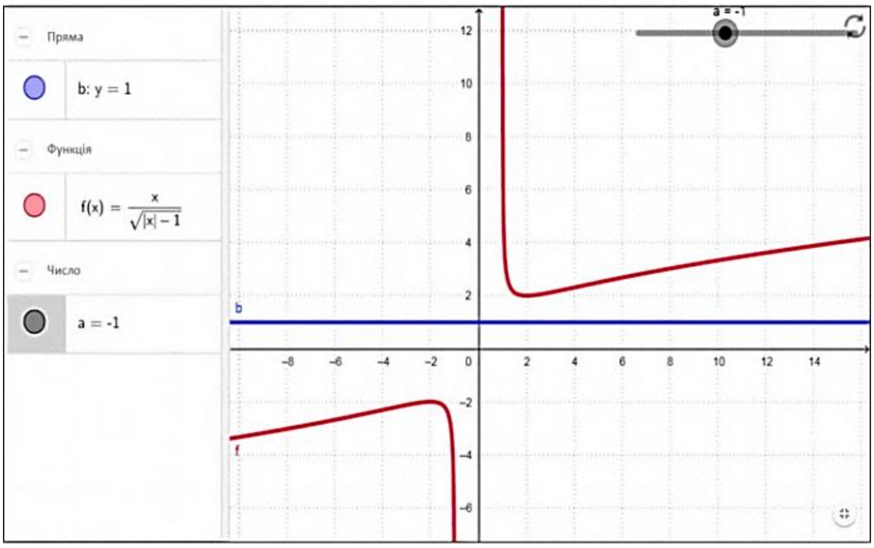


Рис. 2.29

Отже, застосування ППЗ в запропонованих вище дослідженнях забезпечує диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприяє розкриттю творчого потенціалу та пізнавальних здібностей кожного окремого учасника навчального процесу [45, с. 17].

- Аналізуючи графічні образи, школяр може встановити кількість розв’язків в нерівності з параметром, визначити контрольні значення параметрів, отримати дані для створення правил-орієнтирів.

- У ході графічних експериментів за допомогою ППЗ формуються різні прийоми мисленнєвої діяльності – аналіз, синтез, узагальнення та ін., удосконалюються навички самоконтролю, розвивається пізнавальна самостійність.
- Доцільно для розвитку мислення школяра розглядати паралельно графічні та аналітичні прийоми розв'язування однієї і тієї ж нерівності. Графічний метод унаочнює хід розв'язування і сприяє кращому засвоєнню матеріалу.
- Завершення аналізу побудованих графічних образів виведенням можливих наслідків (наприклад, скласти чим більше власних задач, дати на них відповідь) сприяє розвитку у школярів продуктивності.

Висновки до розділу 2

Проаналізувавши навчальну і методичну літературу, ми виділили низку особливостей у вивченні теми «Нерівності»:

- навички розв'язування нерівностей (за виключенням квадратних) формуються на менш високому рівні, ніж рівнянь відповідних класів;
- розв'язування більшості нерівностей відбувається шляхом переходу від нерівності до рівняння і навпаки;
- при вивченні нерівностей велика роль відводиться наочно-графічним засобам (відповідь часто знаходиться прямо з рисунку);
- розглядаються лише основні класи нерівностей.

Вивчення нерівностей відбувається у три етапи: від незалежного вивчення основних класів нерівностей та поступового розширення їх кількості до формування узагальнених прийомів розв'язування нерівностей.

Змістово-методична лінія рівнянь і нерівностей має тісні зв'язки з іншими лініями ШКМ, зокрема з числовою та функціональною. У вивченні нерівностей особливу роль відіграє логічне мислення, оскільки зміст кожної теми складається з ланцюжка понять, пов'язаних між собою логічними відношеннями. Тому одним з головних завдань вчителя є створення умов для формування логічної компетентності учнів.

Розглянувши за допомогою системи динамічної математики GeoGebra та ППЗ GRAN1 розв'язання нерівностей з параметрами, ми виявили, що вони є засобом формування технологічних, дослідницьких, методологічних компетентностей, а також сприяють розвитку графічної культури учнів.

На підставі вищесказаного ми розробили методику формування умінь і навичок розв'язування раціональних, ірраціональних і трансцендентних нерівностей та їх систем в умовах компетентнісного підходу.

ВИСНОВКИ

В результаті аналізу психолого-педагогічної, навчальної та науково-методичної літератури з теми дослідження ми систематизували теоретичні відомості, пов’язані з особливостями вивчення нерівностей та їх систем в контексті компетентнісно-орієнтованого підходу. Нами було проведено логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності» та логіко-математичний аналіз тем «Квадратні нерівності» та «Ірраціональні нерівності» з точки зору реалізації компетентнісного підходу. Виконано порівняння різних методичних прийомів вивчення теми, досліджено теоретико-множинні аспекти розв’язування нерівностей та їх систем. Також ми розглянули складові алгебраїчної культури учнів при вивченні нерівностей та підготували методичні рекомендації щодо вивчення теми на засадах компетентнісного підходу.

Дослідивши можливості використання програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем, ми вияснили, що застосування ППЗ забезпечує диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприяє розвитку пізнавальної активності та графічної культури учнів. Застосовувати елементи ІКТ можна на різних етапах заняття.

Формуванню обчислювальної і термінологічної культури при вивченні нерівностей та їх систем, згідно з розробленою нами особистісно-розвивальною моделлю навчального процесу, сприяють такі чинники:

- добір учителем завдань, які передбачають для учнів самостійний пошук розв’язку;
- надання учням можливості обрання варіанту завдання чи шляху розв’язання задач;
- використання самооцінки та взаємооцінки учнів.
- розв’язування задач різними способами та визначення раціонального шляху розв’язання.

Використання завдань для усного розв’язування з логічним навантаженням, використання прикладних задач на різних етапах уроку, організація навчальних досліджень (аналітичних та графічних) учнів під час вивчення нерівностей та їх систем з параметрами, системне використання ІКТ сприяє покращенню набуття учнями математичної компетентності.

У зв’язку з вищерозглянутими чинниками формування алгебраїчної культури та різних складових математичної компетентності моделювання навчальної діяльності при вивченні нерівностей має відбуватись шляхом:

1) створення проблемних ситуацій на уроках;

2) врахування психологічних особливості дітей;

3)проведення уроків у досить високому темпі, який допомагає мобілізувати увагу;

4) використання різних форм та видів діяльності на уроках;

5) застосування алгоритмічного підходу;

6)залучення учнів до роботи з довідниковою та додатковою літературою;

8) організації позакласної роботи.

Тому нами було розроблено самостійні та контрольні роботи, тести та інтерактивні вправи в LearningApps, орієнтовані на формування різних складових математичної компетентності учнів при вивченні теми «Нерівності». Також ми розробили спецкурс та підібрали систему прикладних задач з теми, спрямованих на підтримку навчання на засадах компетентнісного підходу.

Поставлена мета досягнута, завдання виконані повністю. Проведене дослідження не вичерпує всіх проблем удосконалення математичної підготовки учнів середньої школи, і дослідження, сфокусовані на удосконалення компетентнісно-орієнтованої методики навчання теми «Нерівності» є перспективними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бантова М.А. Методика викладання математики / М.А. Бантова, Т.В. Бельтюкова. – К.: Генеза, 2008. – 335 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.
3. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.
4. Береза В. Ключевые компетенции как компонент личностно ориентированной парадигмы образования / В. Береза // Народное образование. – 2003 – №2. – с. 58–64.
5. Березін С.О.. Деякі аспекти формування математичної грамотності учнів / С.О. Березін // Матеріали Всеук. наук.-метод. конф. «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики», 3–4 грудня 2009 р, м. Суми. – Суми: Вид-во СумДПУ імені АС. Макаренка. – 2009. – С. 103–105.
6. Бесхлібна О. С. Методичні особливості складання систем раціональних нерівностей / О.С. Бесхлібна, Л.О. Черних // Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: матер. міжнар. наук.-практ. конф., Вінницький державний університет імені М. Коцюбинського, 30 травня –1 червня. – Вінниця, 2006. – С. 304 – 307.
7. Бесхлібна О.С. Теоретико-множинні аспекти розв’язування нерівностей та їх систем / О.С. Бесхлібна, Л.О. Черних // Вісник міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: [за заг. ред. В.В. Корольського]. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП». – 2018. – Том 42. – С. 99–103.
8. Биджиев Д.У. Организационно-педагогические условия формирования математической культуры у студентов университета – будущих учителей: автореф. дис. канд. пед. наук / Д.У. Биджиев. – Владикавказ, 2005. – 22 с.

9. Бібік Н.М. Компетентнісна освіта – від теорії до практики / І.Г. Єрмаков, О.В. Овчарук. – К.: Плеяда, 2005. – 120 с.
10. Білюнас А.В. Апробація та експериментальна перевірка основних результатів дисертаційного дослідження проблеми формування математичної культури учнів старшої школи / А.В. Білюнас // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології: наук. журн.. – Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка. – 2014. – № 5 (39). – С. 208–215.
11. Богомолова В.Ф. Компетентнісно-орієнтований урок в умовах профільної школи / Валентина Федорівна Богомолова // Методичні студії: зб. наук.-метод. пр. – Донецьк, 2009. – Вип. 1. – С. 246–252.
12. Бухлова Н.В. Формування здатності особистості до самонавчання / Н.В. Бухлова // Педагогічна скарбниця. – 2002. – № 1. – С. 47– 49.
13. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов. – М.: Наука, 1988. – С. 52–53.
14. Воронина Л.В. Математическая культура / Л.В. Воронина, Л.В. Моисеева // Педагогическое образование в России. – 2012. – № 3. – С. 37–44.
15. Глущенко В.В. Компетентностный подход в проектировании инновационного развития образовательного учреждения / В.В. Глущенко. – М.: АРКТИ, 2009. – 136 с.
16. Горнштейн П.І. Задачі з параметрами / П.І. Горнштейн. – К.: РІА «Текст», 1992. – 290 с.
17. Жменька А.Б. Встретиться с математическим моделированием / А. Б. Жменька. – М.: Знание, 1991. – 160 с.
18. Захарова Т.Г. Формирование математической культуры в условиях профессиональной подготовки студентов вуза: автореф. дис. канд. пед. наук / Т.Г. Захарова. – Саратов, 2005. – 24 с.
19. Зимова І. В. Формування елементарної математичної компетентності / Л.І. Зайцева. – К.: МП «Око», 2005. – 215 с.

20. Іванко Т. І. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей / Т.І. Іванко // Математика в школах України. – 2007. – № 7. – С. 16–21.
21. Ісаєва О.В. Формування особистості та її життєвої та соціальної компетентності шляхом розвитку експериментальних умінь, дослідної проектної діяльності // Науково-методичний журнал «Хімія». – 2007. – №3. – С. 6–8.
22. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу, 9 клас / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Х.: Вид. група «Основа», 2018. – 298 с.
23. Істер О.С. Алгебра, 9 клас / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Х.: Вид. група «Основа», 2018. – 340 с.
24. Капіносов А. Алгебра: збірник задач і вправ для 9 класу / А. Капіносов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 222 с.
25. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики / А.М. Капіносов. – Х.: Вид. група «Основа», 2006. – 140 с.
26. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами / А.Ю. Карлащук. – К.: Вища школа, 2001. – 19 с.
27. Комов М.П. Неравенства / М.П. Комов. – М.: Наука, 1974. – 72 с.
28. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака] / Т.Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.
29. Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.- метод. посібник / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 126 с.
30. Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: метод проектів. Комп'ютерні технології. Розвивальне навчання / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Тріада», 2007. – 171 с.
31. Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Розвиток критичного мислення: Навч. – метод. посібник / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 125 с.

32. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
33. Мельников Ю.Б. Формирование математической культуры как средство повышения компетентности / Ю.Б. Мельников // Современное образование. – 2017. – № 1. – С. 99–111.
34. Мельникова Н.Б. Проблема прикладной ориентации курса алгебры средней школы: автореф. дис. канд. пед. наук / Н.Б. Мельникова. – Москва, 1980. – 20 с.
35. Мерзликін О.В. Формування дослідницьких компетентностей старшокласників з фізики засобами хмарних технологій / О.В. Мерзликін // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. – 2014. – Том XII. – Випуск 3 (34): спецвипуск «Методичний посібник у журналі». – 93 с.
36. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.
37. Мерзляк А.Г. Алгебра: академ. рівень, проф. рівень: підруч. для 11 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.
38. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.П. Полонський, М.С. Якір. – Х: Гімназія, 2017. – 272 с.
39. Мерзляк А.Г. Алгебраический тренажёр / А.Г. Мерзляк. – Харьков: Гимназия, 1998. – 404 с.
40. Недошивкин Е.Ф. Внутрипредметные связи при изучении уравнений и неравенств в курсе математики 4–8 классов: автореф. дис. канд. пед. наук / Е.Ф. Недошивкин. – Курск, 1989. – 169 с.
41. Нешков К.И. Неравенства в курсе математики средней школы: автореферат дис., канд. пед. наук / К.И. Нешков. – Москва, 1956. – 16 с.

42. Паюл М. В. Методика изучения уравнений и неравенств в 6-8 классах: дис. канд. пед. наук / М. В. Паюл. – Киев, 1985. – 198 с.
43. Повзло Н.М. Розв'язування логарифмічних нерівностей / Н.М. Повзло // Математика в школах України. – 2006. – № 11. – С. 7–17.
44. Подласый И.П. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: Теоретико экспериментальное исследование / И.П. Подласый. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.
45. Пометун О.І. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика / О.І. Пометун, Л.В. Пироженко. – К.: Вид-во А.С.К., 2002. – 113 с.
46. Пометун О.І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку сучасної освіти / О.І. Пометун // Рідна школа. – 2005. – № 1. – с. 65–69.
47. Прядко Н.О. Формування математичної грамотності учнів старшої школи / Н.О. Прядко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 98–100.
48. Путилова Е. В. Формирование математической культуры студентов педагогических вузов как общедидактическая задача: дисс. канд.пед.наук: 13.00.01 / Е.В. Путилова. – М.: РГБ, 2004. – 184 с.
49. Райхмист Р.Б. Задачи по математике для поступающих во ВТУЗы / Р.Б. Рейхмист. – М.: Высшая школа, 1994. – 454 с.
50. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / С.А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
51. Раков С.А. Формування математичних компетентностей вчителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій / С.А. Раков. – К.: Плеяда, 2005. – 227 с.
52. Родигіна І.Компетенція чи компетентність: що ми формуємо у школярів? / І. Родигіна // Початкове навчання. – 2007. –№9. – С. 54–57.
53. Розанова Н.Д. Культура математичного мовлення учнів / Н.Д. Розанова. – Львів: Світ, 2003. – 176 с.

54. Рыбдылова Д.Д. Задачи на составление уравнений и неравенств как средство развития математического мышления учащихся 7–8 классов: автореф. дис. канд. пед. наук / Д.Д. Рыбдалова. – Москва, 1998. – 137 с.
55. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
56. Сиротенко Г.О. Шляхи оновлення освіти: науково-методичний аспект / Г.О. Сиротенко. – Харків: Основа, 2003. – 57 с.
57. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: «Зодіак-ЕКО», 2000. – 182 с.
58. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри та початків аналізу / Л.О. Соколенко. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.
59. Соколенко Л.О. Теоретико-множинні аспекти шкільного курсу математики / Л.О. Соколенко // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2015), м. Черкаси, 4-5 червня. – Ч.: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – 2015. – С.211–212.
60. Солтан Г.Н. Методика обучения доказательству в курсе математики средней школы: автореф. дис. канд. пед. наук / Г.Н. Солтан. – Минск, 1983. – 165 с.
61. Степура И.М. Взаимная связь в процессе изучения понятий алгебраической функции, алгебраического уравнения и алгебраического неравенства действительного переменного: автореф. дис. канд. пед. наук / И. М. Степура. – Гродно, 1970. – 211 с.
62. Титаренко О.М. Алгоритмічна культура як складова математичної культури учня / О.М. Титаренко. – Х.: Торсінг Плюс, 2005. – 368 с.
63. Третяк М.В. До питання про математичну культуру / М.В. Третяк. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 352 с.

64. Худяков В. Н. Формирование математической культуры учащихся начального профильного образования: дис. д-ра пед. наук / В.Н. Худяков. – Магнитогорск, 2001. – 388 с.
65. Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів / О.Г. Ципкін. – К.: Вища школа, 1988. – 416 с.
66. Черкасов О. Ю. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену / О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. – М.: Айрис, 1997. – 204 с.
67. Чошанов В. Компетентность в современном обществе / В. Чошанов. – М.: Когито-центр, 2002. – 37с.
68. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства / А. Х. Шахмейстер. – М.: Издательство МЦНМО, 2008. – 264 с.
69. Шишов С. Поняття компетентності в контексті якості освіти / С. Шишов, І. Агапов // Дайджест педагогічних ідей і технологій. – 2002. – №3. – С. 20–21.
70. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу для 10-11 класу / М.І.Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубінчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 318 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Аналіз підручників з теми «Нерівності»

Підручник	«Алгебра», 9, 10, 11 клас, А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір	«Алгебра», 9, 10 клас, Г.П. Бевз, В.Г. Бевз	«Алгебра», 9, 10 клас, О.С. Істер
Загальне представлення теми			
Структурні особливості теми	*Матеріал в підручниках з даної теми:*		
	9 клас: §1.Нерівності 1.Числові нерівності 2.Основні в-сті числових нерівностей 3.Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значень виразу 4.Нерівності з однією змінною 5.Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки 6.Система лінійних нерівностей з однією змінною §2. Квадратична функція 12.Розв'язування квадратних нерівностей **10 клас:** §2. Степенева функція 15.Ірраціональні нерівності §4. Тригонометричні рівняння і нерівності 33.Тригонометричні нерівності **11 клас:**	**9 клас:** Розділ 1. Нерівності §1.Загальні відомості про нерівності §2.Властивості числових нерівностей §3.Подвійні нерівності §4.Розвязування нерівностей з однією змінною §5.Об'єднання і переріз мн-н. Числові проміжки. §6.Системи нерівностей з однією змінною §7.Доведення нерівностей Розділ 2. Квадратична функція §12.Квадратні нерівності **10 клас:** Розділ 2. Степенева функція §11. Ірраціональні нерівності Розділ 4. Тригонометричні рівняння і нерівності	**9 клас:** Р1.Нерівності §1.Числові нерівності §2.Основні в-сті числових нерівностей §3.Почленне додавання і множення нерівностей. §4.Нерівності зі змінннними §5. Числові проміжки. Переріз і об'єднання мн-н. §6. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності. §7.Системи лінійних нерівностей з однією змінною Р2. Квадратична функція §12. Квадратна нерівність **10 клас:** Р1. Функції, р-ння і нерівності §6.Нерівності Р2.Степенева ф-я

	§2. Показникова і логарифмічна функція 18.Показникові нерівності 22.Логарифмічні нерівності §5. Рівняння і нерівності 34.Основні методи розв'язування нерівностей	§25.Найпростіші тригонометричні нерівності	§14.Ірраціональні нерівності Р4.Тригонометричні р-ння і нерівності §31. Тригонометричні нерівності
	Представлення теоретичного матеріалу		
	9 клас: §1. Нерівності –означення більшого (меншого) числа; – в-сті числових нерівностей (теореми і наслідки); – теореми про почленне додавання і множення нерівностей; – означення розв'язку нерівності, рівносильних нерівностей; – означення розв'язку системи нерівностей з однією змінною. 12. Розв'язування квадратних нерівностей – означення квадратної нерівності. **10 клас:** 15. Ірраціональні нерівності – означення рівносильних нерівностей; –теореми про рівносильні нерівності. **11 клас:** 18.Показникові нерівності –теорема про показникові нерівності і наслідок з неї.	**9 клас:** Розділ 1. Нерівності –означення більшого (меншого) числа; –означення нерівності; –в-сті числових нерівностей (теореми); –теорема про подвійні нерівності; –в-сті подвійних нерівностей; –означення розв'язку нерівності з однією змінною; –в-сті нерівностей зі змінними; –означення лінійної нерівності; –означення перерізу і об'єднання двох множин, числових проміжків; –означення розв'язку системи нерівностей з однією змінною. **10 клас:** §11. Ірраціональні нерівності –теорема про рівносильні нерівності. §25.Найпростіші тригонометричні нерівності –означення	**9 клас:** Р1.Нерівності –в-сті числових нерівностей, наслідки з них; –в-сті почленного додавання і множення нерівностей; -означення розв'язку нерівності з однією змінною; –означення перерізу і об'єднання двох множин, числових проміжків ; –означення лінійної нерівності з однією змінною; –в-сті рівносильних нерівностей; –означення розв'язку системи нерівностей. §12. Квадратна нерівність –означення, алгоритм розв'язання квадратної нерівності. **10 клас:** §6.Нерівності –алгоритм застосування методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

	22.Логарифмічні нерівності –теорема про рівносильні логарифмічні нерівності і наслідок з неї. 34.Основні методи розв’язування нерівностей –схема розв’язування типових нерівностей.	тригонометричної нерівності.	§14.Ірраціональні нерівності –означення ірраціональної нерівності. §31. Тригонометричні нерівності –означення, алгоритм застосування методу інтервалів для розв’язування тригонометричних нерівностей.
	Кожен пункт містить теоретичний матеріал, приклади з докладним розв’язанням, які є опорою для введення теоретичного матеріалу, або зразками застосування теорії.	Кожен параграф містить теоретичний матеріал, який докладно пояснений на прикладах. Також є завдання для перевірки знань з теорії і завдання, призначені для усної роботи	Кожен параграф містить теоретичний матеріал, приклади з докладним розв’язанням, які є опорою для введення теоретичного матеріалу, або зразками застосування теорії.
	Представлення системи задач з теми		
	Задачі поділяються за рівнем складності: 1) початковий і середній, 2) достатній, 3) високий, 4) задачі для гуртків і факультативів; є задачі, які можна виконувати за допомогою комп’ютера; на початку кожного пункту є задачі на повторення; умови завдань представлені текстом.	Поділяються за рівнем складності: для усного розв’язування та рівнів А і Б; в кожному параграфі є «Відкрита задача»; в кінці кожного параграфа є завдання для повторення; умови завдань представлені текстом.	Поділяються на 5 блоків за рівнем складності: початковий, середній, достатній, високий рівні, вправи підвищеної складності; є обов’язкові завдання для класної і домашньої роботи, задачі на повторення; умови завдань представлені текстом.

	Інші структурні особливості теми		
	При викладі матеріалу використовуються різні значки «робочий словник», «згадайте», «зверніть увагу» і т. д.	Інших структурних особливостей немає.	При викладі матеріалу використовується різний колір і шрифт
Методичні особливості теми	**Характер викладу тем**		
	Спочатку вводиться теоретичний матеріал, який надалі пояснюється на прикладах. Отже, матеріал підручника викладений дедуктивним методом.	Теоретичний матеріал розглядається спочатку на конкретних прикладах, а потім робляться узагальнення. Отже, матеріал підручника викладений конкретним індуктивним методом.	Спочатку вводиться теоретичний матеріал, який надалі пояснюється на прикладах. Отже, матеріал підручника викладений дедуктивним методом.
	Виділення матеріалу для заучування		
	Основний матеріал, який необхідно знати виділений жирним шрифтом.	Матеріал, який необхідно знати виділений рожевим прямокутником зліва від тексту.	Основний матеріал, який необхідно знати виділено жирним шрифтом і фіолетовим прямокутником.
	Використання наочності		
	Наочність застосовується для представлення і пояснення деяких завдань і теоретичного матеріалу: малюнки, креслення.	Є малюнки і креслення для наочного уявлення теоретичного і задачного матеріалу.	Для представлення і пояснення деяких завдань застосовуються креслення, малюнки.
	Інші методичні особливості теми		

	Містяться позначення початку і закінчення розв'язування задачі, завдання «Перевір себе». Завдання виділені різним кольором (за рівнем складності). Є рубрика «Учимося робити нестандартні кроки».	Містяться позначення початку і закінчення розв'язування задачі, обґрунтування теорем. На початку параграфа «Використовуємо компетентності». В кінці кожного параграфа подано контрольні запитання, рубрика «Скарбничка досягнень».	У кінці кожного пункту містяться вправи для повторення та контрольні питання. Є рубрики «Життєва математика», «Цікаві задачі», «Проявіть компетентність».
Висновки			
	Підручники наочні, кольорові, чітко виділений основний матеріал. Виклад характеризується чіткістю, алгоритмічністю, виділяються основні етапи міркувань з фіксацією уваги читача на виділених етапах.	Підручники наочні, але не кольорові. Немає історичних відомостей. Мало малюнків і креслень.Тема представлена детально з розглядом великої кількості прикладів.	Підручники наочні, кольорові, чітко виділений основний матеріал. Досить багато малюнків і креслень.Тема представлена детально, міститься велика кількість завдань на різні рівні складності.

Додаток Б

Самостійні роботи з теми «Нерівності»

Самостійна робота №1

Тема 1. Числові нерівності

Варіант 1	Варіант 2
Середній рівень	
1) Порівняти числа: а) c і 5, якщо $c - 5 < 0$; б) x і 5, якщо $x - 7 > 0$. *2) Виконати почленне додавання нерівностей:* а) $2 > -1$ і $4 > 1$; б) $-3 < 0$ і $3 < 5$. *3) Виконати почленне множення нерівностей:* а) $a > 5$ і $c > 8$ $(a, c > 0)$; б) $1 < 2$ і $5 < 6$. *4) Оцінити значення виразу:* а) $c - 1$, якщо $2 < c < 3$; б) $c + 8$, якщо $2 < c < 4$. в) $-b$, якщо $-10 < b < -8$; г) $6x$, якщо $3 < x < 4$. д) $\frac{a}{b}$, якщо $16 \le a \le 18$ і $3 \le b \le 4$; є) $x - y$, якщо $3 < x < 5$ і $1 < y < 2$.	*1) Порівняти числа:* а) m і k, якщо $m - k \ge 0$; б) a і 8, якщо $a - 8 \le 0$. *2) Виконати почленне додавання нерівностей:* а) $a < c$ і $5 > 10$; б) $a < m$ і $-2 < 0$. *3) Виконати почленне множення нерівностей:* а) $4 < 5$ і $3 < 4$; б) $x > 20$ і $b > 10$ $(x, b > 0)$. *4) Оцінити значення виразу:* а) $a + 3$, якщо $3 < a < 4$; б) $m - 2$, якщо $0 < m < 2$. в) $5m$, якщо $2 < m < 3$; г) $-y$, якщо $-4 < y < -3$. д) $a - b$, якщо $2 \le a \le 3$ і $5 \le b \le 6$; є) $\frac{x}{y}$, якщо $10 < x < 16$ і $4 < y < 5$.
Достатній рівень	
5) Довести нерівність: а) $(a-1)(a-5) > a(a-6)$; б) $(a+10)(a+2) > a(a+12)$. *6) Оцінити значення виразу:* а) $\frac{3a}{b}$, якщо $0{,}5 < a < 0{,}6$ і $0{,}2 < b < 0{,}5$; б) $\frac{x}{4y}$, якщо $1{,}6 < x < 2$ і $0{,}1 < y < 0{,}2$. в) $\frac{x}{5} - 3y$, якщо $1{,}5 < x < 2{,}5$ і $-0{,}6 < y < -0{,}1$; *7) Довести:* а) Якщо $a < 5$ і $b > 2$, то $4a - 3b < 14$;	*5) Довести нерівність:* а) $(a+3)(a-3) > a^2 - 10$; б) $(3a-1)(3a+1) < 9a^2$. *6) Оцінити значення виразу:* а) $3y - 0{,}4$, якщо $0{,}8 < y < 0{,}9$. б) $\frac{a^2}{b+2}$, якщо $3 < a < 4$ і $0 < b < 1$; в) $\frac{a+4}{b^2}$, якщо $23 < a < 24$ і $2 < b < 3$. *7) Довести:* а) якщо $a < b$, то $a - b < b - a$;

б) якщо $a < b, b < c,$ то $a - c < c - a.$	б) якщо $a > 4$ і $b < 2,$ то $10a - 3b > 36.$
Високий рівень	
8) Оцінити значення виразу: а) $\lvert x - y \rvert,$ якщо $6 < x < 10$ і $7 < y < 12;$ б) $2a^2 + b^2 - ab,$ якщо $2 < a < 3$ і $4 < b < 5.$ в) $\frac{1}{5}a^2 - 3a + 1,$ якщо $5 < a < 10;$ г) $2\lvert a \rvert - \lvert b \rvert,$ якщо $-5 < a < -3$ і $-3 < b < 5.$ *9)* Оцінити площу ділянки квадратної форми з довжиною огорожі P м, якщо $44 \le P \le 48.$ 10) Довести, що коли до чисельника і знаменника правильного дробу додати одне й те ж натуральне число, то значення дробу збільшиться: $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n},$ де $0 < a < b$ і n − довільне натуральне число.	*8) Оцінити значення виразу:* а) $a^2 + 2b^2 - ab,$ якщо $1 < a < 2$ і $2 < b < 3;$ б) $\lvert x - y \rvert,$ якщо $2 < x < 5$ і $3 < y < 4.$ в) $\lvert a \rvert - 5\lvert b \rvert,$ якщо $-5 < a < 3$ і $-3 < b < -2;$ г) $0{,}1a^2 + 7a - 8,$ якщо $10 < a < 20.$ *9)* Оцінити площу квадрата у якого сума двох сторін дорівнює m дм, якщо $18 \le m \le 20.$ 10) Довести, що коли до чисельника і знаменника неправильного дробу додати одне й те ж натуральне число, то значення дробу не збільшиться: $\frac{a}{b} \ge \frac{a+n}{b+n},$ де $a \ge b \ge 0$ і n − довільне натуральне число.

Самостійна робота №2

Тема 2. Лінійні нерівності

Варіант 1	Варіант 2
Середній рівень	
1) Розв'язати нерівність і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій: а) $7x \ge -35;$ б) $-3x < 0.$	*1) Розв'язати нерівність і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій:* а) $-2x > 0;$ б) $6x \le 42.$
2) Розв'язати нерівність і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій: а) $2x - 16 \ge -26;$ б) $11x - 3 < 8.$	*2) Розв'язати нерівність і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій:* а) $4 - x \ge 3;$ б) $3x > x - 24.$
3) Розв'язати нерівність: а) $6(2x - 5) - 5x < 19;$	*3) Розв'язати нерівність:* а) $-5x - (4x - 3) < -15;$

б) $-3x-(13-5x)<3$; *4) Встановити, за яких значень аргументу х функція набуває додатних значень:* а) $y=-10x+1$; б) $y=-6x-5$. *5) Розв'язати нерівність:* а) $\frac{x}{6}+\frac{x}{5}\leq 11$; б) $\frac{x}{2}+\frac{x}{7}\geq 9$.	б) $7(x+3)-2x>41$. *4) Встановити, за яких значень аргументу х функція набуває від'ємних значень:* а) $y=9x-1$; б) $y=11x+2$. *5) Розв'язати нерівність:* а) $\frac{x}{4}-\frac{x}{9}\leq 5$; б) $\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\geq 8$.
Достатній рівень	
6) Розв'язати нерівність: а) $10(8-3x)-3(4-3x)\geq 4-11(x+4)$; б) $(3x-2)^2-9x^2<10x$. *7) Знайти найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності:* а) $\frac{5x-1}{3}>\frac{x+1}{2}$; б) $\frac{8x+1}{3}>\frac{5x-6}{4}$. *8) Довжина більшої сторони прямокутника дорівнює 14 см. Якою може бути довжина меншої сторони, щоб його периметр був більший від периметра квадрата зі стороною 10 см?* *9) Знайти область визначення функції:* а) $y=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}x-1}}{15}$; б) $y=\frac{\sqrt{82-9x}}{20}$.	*6) Розв'язати нерівність:* а) $(x+6)^2-x^2>8x$; б) $3(2x+1)-4(1-3x)\leq 16-5(6x-7)$. *7) Знайти найбільше ціле число, яке є розв'язком нерівності:* а) $\frac{x-9}{2}<\frac{2x+9}{7}$; б) $\frac{x+12}{5}>\frac{2x-7}{3}$. *8) Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 6 см. Якою може бути довжина іншої сторони прямокутника, щоб його периметр був менший від периметра квадрата зі стороною 7 см?* *9) Знайти область визначення функції:* а) $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{5-x}}$; б) $y=\frac{x+1}{\sqrt{7-3x}}$.
Високий рівень	
10) а) *Розв'язати нерівність:* $\frac{5x-1}{2}-\frac{7x-4}{3}\leq\frac{5-x}{4}$; б) *Знайти найменше ціле число a, при якому правильною є нерівність* $(a-1)^2-(1+a)(1-a)>$ $>2(1-a)^2$ *11) Встановити, при яких значеннях х*	*10)* а) *Розв'язати нерівність:* $\frac{7x+3}{5}-\frac{8x+1}{3}\geq\frac{11-x}{10}$; б) *Знайти найбільше ціле число m, при якому правильною є нерівність* $(m+3)^2-(2-m)(2+m)<$ $<2(m-3)^2$ *11) Встановити, при яких значеннях х*

виконується рівність : а) $\lvert 2-3x\rvert=2-3x$; б) $\lvert 0{,}7x+0{,}3\rvert=0{,}7x+0{,}3$. *12) Встановити, за яких значень параметра а рівняння має додатний корінь:* а) $5x-3=2x+3a$; б) $\frac{3x+1}{5}-\frac{2x-5}{3}=a$;	*виконується рівність :* а) $\lvert 7x-2\rvert=2-7x$; б) $\left\lvert\frac{x}{5}-4\right\rvert=4-\frac{x}{5}$. *12) Встановити, за яких значень параметра а рівняння має від'ємний корінь:* а) $\frac{2x+3}{5}-\frac{x-3}{2}=a$; б) $2x-5=3x+5a$.

Самостійна робота №3

Тема 3. Системи лінійних нерівностей

Варіант 1	Варіант 2
Середній рівень	
1) Розв'язати систему нерівностей: а) $\begin{cases}x\ge -4,\\ x\ge 5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\ge -1,\\ x>2.\end{cases}$ в) $\begin{cases}\frac{x}{3}<4,\\ 3x-2>10;\end{cases}$ г) $\begin{cases}4x\ge x+9,\\ -2x\ge -10.\end{cases}$ *2) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $2<x-5<4$; б) $2<x+7<5$. *3) Розв'язати систему нерівностей:* а) $\begin{cases}\frac{3-6x}{2}>6,\\ 5x+5<4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{3x+8}{4}<5,\\ 2-5x<2.\end{cases}$	*1) Розв'язати систему нерівностей:* а) $\begin{cases}x<6,\\ x<-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\le 2{,}5,\\ x\le -1{,}5.\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x>x-4,\\ -4x\le -4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{x}{5}>1,\\ 4x-3>5.\end{cases}$ *2) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $1<x+5<3$; б) $3<x-6<7$. *3) Розв'язати систему нерівностей:* а) $\begin{cases}\frac{x+3}{3}<2+x,\\ 5x-7<x+9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-2\ge x+1,\\ 2-x\le\frac{x-2}{2}.\end{cases}$
Достатній рівень	
4) Розв'язати систему нерівностей: а) $\begin{cases}x+1>3(2x-1)+19,\\ 3x-(x-4)<6+x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5(x-3)>3-4x,\\ \frac{4x-3}{9}>\frac{x+1}{2}.\end{cases}$ *5) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $0<\frac{x}{5}+2<1$; б) $1<\frac{x}{4}-2<3$. *6) Знайти допустимі значення*	*4) Розв'язати систему нерівностей:* а) $\begin{cases}3(x-5)>13-4x,\\ \frac{x+1}{7}>\frac{x-1}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}5(x-2)+2x>2+3x,\\ x-3(x-1)<-3+x.\end{cases}$ *5) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $2<-\frac{x}{7}-2<3$; б) $-3<-\frac{x}{6}+2<1$. *6) Знайти область визначення*

змінної у виразі: а)$\sqrt{7-x}+\sqrt{-9-3x}$; б) $\sqrt{x-24}+\sqrt{x+1}$. *7) Розв'язати нерівність за допомогою двох систем нерівностей:* а) $(9-2x)(x+5)\le 0$; б) $\frac{x+5}{x-2}>0$.	*функції :* а)$y=\sqrt{15-x}+\sqrt{12-2x}$; б) $y=\sqrt{x-20}-\sqrt{2x-30}$. *7) Розв'язати нерівність за допомогою двох систем нерівностей:* а) $\frac{x+7}{x+1}>0$; б) $(7-2x)(x+4)\ge 0$.
Високий рівень	
8) Знайти множину цілих розв'язків системи: а) $\begin{cases}\frac{x+2}{3}-\frac{2x-1}{2}>\frac{4-3x}{4},\\ \frac{3x-5}{5}<\frac{x-1}{3};\end{cases}$ б) $\begin{cases}-4x+3>4-3x,\\ \frac{x}{3}>-1,\\ 3x\le 0.\end{cases}$ *9) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $-8<7x-3(x+6)<2$; б) $2<\frac{9x-4}{5}-2x+1<3$. *10) Знайти область визначення функції :* $y=\sqrt{\frac{5}{3x+15}}+\sqrt{\frac{20-x}{4}}$. *11) Встановити допустимі значення змінної x для виразу:* $\sqrt{4x+3}+\sqrt{3x-1}+\sqrt{3-x}$. *12) Розв'язати систему нерівностей з параметрами a і b (a>b):* а) $\begin{cases}x<a,\\ x>b;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x<a+1,\\ x>a.\end{cases}$	*8) Знайти множину цілих розв'язків системи:* а) $\begin{cases}3x-4<x-3,\\ 5x\le 0,\\ \frac{x}{2}>-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{3x+5}{6}-\frac{2x+3}{3}<\frac{1-x}{4},\\ \frac{x-1}{2}>\frac{x+1}{10}.\end{cases}$ *9) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $-1<\frac{3x-1}{4}-x+3<1$; б) $-1<-11x+2(5x+3)<3$. *10) Знайти область визначення функції:* $y=\sqrt{\frac{17}{0{,}2x+1}}+\sqrt{\frac{6-0{,}2x}{17}}$. *11) Встановити допустимі значення змінної x для виразу:* $\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{4-x}$ *12) Розв'язати систему нерівностей з параметром a:* а) $\begin{cases}x>a+1,\\ x<a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x<a,\\ x<b.\end{cases}$

Додаток В

Контрольні роботи з теми «Нерівності»

Контрольна робота №1

Тема «Числові нерівності»

Варіант 1	Варіант 2
Середній рівень	
1) Записати нерівність, яка утвориться з даної нерівності, якщо з однієї частини в іншу перенести додаток, вказаний у дужках: а) $m+6<3\quad(6)$; б) $x-9\geq 5\quad(-9)$. *2) Записати нерівність, яка утвориться з даної нерівності, якщо обидві її частини помножити на число, записане у дужках:* $-y>8\quad(-1)$. *3) Оцінити значення виразу:* а) $m+n$, якщо $-5<m<-4$ і $-10<n<-9$; б) $xy-2$, якщо $4<x<5$ і $6<y<7$; в) x^2+4, якщо $3<x<4$. *5) Довести нерівності на основі означень числових нерівностей:* а) $2(a-1)<2a$; б) $5b>5(b-2)$.	*1) Записати нерівність, яка утвориться з даної нерівності, якщо з однієї частини в іншу перенести додаток, вказаний у дужках:* а) $11a<-4a-3\quad(-4a)$; б) $8a\geq -7a+6\quad(-7a)$. *2) Записати нерівність, яка утвориться з даної нерівності, якщо обидві її частини помножити на число, записане у дужках:* $-m\leq -4\quad(-1)$; *3) Оцінити значення виразу:* а) $x+y$, якщо $5<x<7$ і $-7<y<-4$. б) a^2+3, якщо $1<a<2$; в) $ac-3$, якщо $1<a<2$ і $5<c<6$. *5) Довести нерівності на основі означень числових нерівностей:* а) $m(m-4)\geq -4m$; б) $x(x-5)\geq -5x$.
Достатній рівень	
6) Оцінити значення виразу: а) $-0,4a^2$, якщо $1\leq a\leq 3$; б) $-0,6b^2$, якщо $2\leq b\leq 5$. *7) Оцінити значення виразу* $2\sqrt{11}-\sqrt{3}$, *якщо* $1,7<\sqrt{3}<1,8$; $3,3<\sqrt{11}<3,4$: *8) Маса п'яти мішків з цукром дорівнює* m *кг. Оцінити масу одного такого мішка, якщо* $245<m<255$. *9) Довести:* а) Якщо $0<a<b$ і $0<c<d$, то $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$;	*6) Оцінити значення виразу:* а) $-0,1a^2$, якщо $4<a<5$; б) $-0,3b^2$, якщо $2<b<3$. *7) Оцінити значення виразу* $\sqrt{11}-\sqrt{3}$, *якщо* $1,7<\sqrt{3}<1,8$; $3,3<\sqrt{11}<3,4$: *8) Периметр квадрата дорівнює* P *дм. Оцінити сторону квадрата, якщо* $16,4<P<16,8$. *9) Довести:* а) Якщо $a>16$ і $0<b<2$, то $\frac{5a}{b}>40$;

б) якщо $a > b$ і $c > d$, то $c - b > d - a$.	б) якщо $0 < a < 15$ і $b > 5$, то $0 < \frac{3a}{b} < 9$.
Високий рівень	
10) Довести: а) Якщо $a > c > 0$, то $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{c^2}$; *11) Довести нерівність:* а) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(x + y + z) - 12$; б) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, де $a > 0, b > 0$.	*10) Довести:* а) Якщо $a > b > 0$, то $\frac{1}{a^3} < \frac{1}{b^3}$; *11) Довести нерівність:* а) $x^3(x - y) > y^3(x - y)$, де $x > 0, y > 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 6(x + y + z) - 27$.

Контрольна робота №2

Тема «Квадратичні нерівності»

Варіант 1	Варіант 2
Середній рівень	
1) Розв'язати нерівність: $x^2 - 8x + 15 \geq 0$; *2) Розв'язати нерівність, використавши метод інтервалів:* а) $\frac{x-0,3}{x-4} < 0$; б) $\frac{x-1,2}{x-5} > 0$. *3) Розв'язати нерівність:* а) $4x^2 + 3x + 2 > 0$; б) $5x^2 - 4x + 1 > 0$. *4) Знайти область визначення функції:* а) $y = \sqrt{x^2 - 12x + 20}$; б) $y = \sqrt{x^2 + 8x + 12}$.	*1) Розв'язати нерівність:* $x^2 + 11x + 24 \geq 0$; *2) Розв'язати нерівність, використавши метод інтервалів:* а) $\frac{x-2}{x+0,2} < 0$; б) $\frac{x+5}{x-0,6} > 0$. *3) Розв'язати нерівність:* а) $3x^2 + 8x + 10 < 0$; б) $3x^2 - 10x + 10 < 0$. *4) Знайти область визначення функції:* а) $y = \sqrt{x^2 + 7x - 30}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$.
Достатній рівень	
5) Знайти усі цілі розв'язки нерівності: а) $3x^2 - 5x - 2 < 0$; б) $5x^2 - 9x - 2 < 0$. *6) Розв'язати нерівність:* а) $7x^2 + 5x < 1 - x$; б) $2x^2 - 9x > 6 + 2x$. *7) Довести, що нерівність є*	*5) Знайти усі цілі розв'язки нерівності:* а) $-3x^2 + 11x + 4 > 0$; б) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$. *6) Розв'язати нерівність:* а) $4x^2 - x < 2(4x - 1)$; б) $5x^2 + x > -2(5x + 1)$. *7) Довести, що нерівність є*

правильною при будь-якому значенні x: а) $x^2 + x + 1 < 4x^2 - 4x + 10$; б) $2x^2 + x - 3 < 3x^2 - 3x + 4$.	*правильною при будь-якому значенні x:* а) $-a^2 < 2 - a$; б) $-a^2 < 4 - 3a$.
Високий рівень	
8) Розв'язати нерівність: а) $(x + 5)(3 - x) >$ $> (2x + 1)(x + 15)$; б) $(x - 6)(2x + 6) <$ $< (x - 7)(x + 24)$. *9) Розв'язати нерівність методом інтервалів:* а) $(x - 1)(x^2 - 7x + 10) \geq 0$; б) $(x + 5)(x^2 + 11x + 24) \leq 0$; 10) *Розв'язати нерівність методом інтервалів:* а) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2{,}5x +$ $+1) \geq 0$; б) $\frac{4x^2+12x+10}{14+3x-2x^2} < 0$; 11) *Розв'язати нерівність:* а) $x + \frac{6}{x} < -5$; б) $x - \frac{12}{x} > 1$.	*8) Розв'язати нерівність:* а) $(7 - 2x)(7 + 2x) -$ $x(x + 2) > 49$; б) $(x - 1)(x + 1) -$ $(x - 2)(3x - 7) > 0$. *9) Розв'язати нерівність методом інтервалів:* а) $(4 - x)(x^2 - x - 30) \geq 0$; б) $(2{,}5 - x)(x^2 + x - 6) \leq 0$; 10) *Розв'язати нерівність методом інтервалів:* а) $\frac{9x^2+6x+2}{3+5x-2x^2} > 0$; б) $(x^2 + 12x + 40)\left(\frac{2}{3}x^2 - x +\right.$ $\left.+3\right) < 0$. 11) *Розв'язати нерівність:* а) $3x - \frac{5}{x} < 2$; б) $4x - \frac{3}{x} < 1$.

Контрольна робота №3

Тема «Лінійні нерівності та системи лінійних нерівностей»

Варіант 1	Варіант 2
Середній рівень	
1) Розв'язати нерівність і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій : а) $-9x \leq -2$; б) $\frac{1}{4}x < -2$. *2) Розв'язати систему нерівностей:* а) $\begin{cases} x - 8 < -1, \\ x - 3 > 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2 < 1, \\ x + 5 > 0. \end{cases}$ *3) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $-6 < -x < 1$;	*1) Розв'язати нерівність і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій :* а) $-11x > 3$; б) $\frac{x}{5} > -2$. *2) Розв'язати систему нерівностей:* а) $\begin{cases} -4x \leq 4, \\ x + 5 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x > 7, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$ *3) Розв'язати подвійну нерівність:* а) $-2 < -x < 3$;

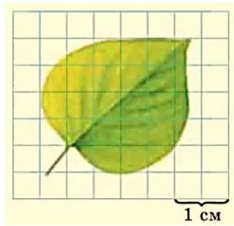
<table>
<tr><td>
б) $-2 < -\frac{x}{5} < 3$;
4) Розв'язати нерівність:
а) $\frac{17x-4}{5} \le 3x + 2$;
б) $\frac{5x-2}{4} \ge 3x - 1$.
</td><td>
б) $-3 < -\frac{x}{4} < 5$.
4) Розв'язати нерівність:
а) $2x + 3 > \frac{3x-1}{2}$;
б) $x - 2 \ge \frac{5x+6}{7}$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Достатній рівень</td></tr>
<tr><td>
5) Розв'язати нерівність:
а) $3x - (2x - 7) \le 3(1 + x)$;
б) $4(x - 1) - (9x - 5) \ge 3$.
6) Розв'язати нерівність:
а) $\frac{2x+1}{7} - x \le 3$;
б) $\frac{5x-8}{2} - 3x < 2$.
7) Знайти допустимі значення змінної у виразі:
а)$\sqrt{2 - x} + \frac{1}{\sqrt{3x+12}}$;
б) $\sqrt{24 - 3x} + \frac{x}{\sqrt{10x-20}}$.
8) Знайти область визначення функції:
а) $y = \frac{x}{\sqrt{4-x}} + \sqrt{4x - 8}$;
б) $y = \sqrt{-5 - x} + \frac{1}{\sqrt{-7x-14}}$.
</td><td>
5) Розв'язати нерівність:
а) $2(x - 1) > 5x - 4(2x + 1)$;
б) $7x - 2(3x - 1) <$
$5(x + 3) + 3$.
6) Розв'язати нерівність:
а) $\frac{4x-1}{3} - 4 \le x$;
б) $3 - 2x < \frac{1-3x}{5}$.
7) Знайти допустимі значення змінної у виразі:
а)$\sqrt{6 - 3x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$;
б) $\sqrt{x + 2} + \frac{5}{\sqrt{15-5x}}$.
8) Знайти область визначення функції:
а) $y = \frac{x}{\sqrt{3x+1}} + 5\sqrt{12 - 2x}$;
б) $y = \sqrt{3x + 6} + \frac{6}{\sqrt{5-x}}$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Високий рівень</td></tr>
<tr><td>
9) Розв'язати нерівність:
а) $3(5x + 1)(5x + 2) -$
$(15x - 4)(5x + 2) > 20$;
б) $(2x + 3)^2 - 4(x - 1) \cdot$
$(x + 1) > 49$.
10) Розв'язати систему нерівностей:
$\begin{cases} \frac{x-2}{2} + \frac{x+3}{4} > \frac{3x+10}{5}, \\ \frac{23-2x}{3} > x + 1; \end{cases}$
</td><td>
9) Розв'язати нерівність:
а) $3(x - 1)(1 - 4x) -$
$2(4 - 6x)(x + 3) < 4$;
б) $4x(x + 3) - (2x + 5) \cdot$
$(2x - 5) < 49$.
10) Розв'язати систему нерівностей:
$\begin{cases} \frac{2x+1}{3} - \frac{3x+2}{5} > \frac{5-x}{15}, \\ \frac{2x+1}{7} > \frac{x-1}{3}. \end{cases}$
</td></tr>
</table>

Додаток Г

Прикладні задачі з теми «Нерівності»

1. На малюнку зображено план квартири. Відомо, що вся квартира, а також вітальня, мають форму квадрата. Оцініть площу вітальні, спальні та всієї квартири, якщо 4,9 м $< x <$ 5,1 м, 2,9 м $< y <$ 3,1 м. Зробіть потрібні виміри та оцініть площу S і периметр P: а) кімнати, у якій проживаєте; б) вікна у цій кімнаті.

2. Запишіть у вигляді подвійної нерівності значення площі фігури, зображеної на малюнку. Складіть кілька задач, що ілюструють властивості числових нерівностей і стосуються життєдіяльності людини.



3. Як символ втрати частки ринку або інших фінансових та економічних проблем використовують кругові діаграми у вигляді зелених дерев з листям, що опадає. Складіть задачі за малюнками *а* і *б*.

а

б

4. Розгляньте наклейку на банці з томатним соусом. Спробуйте покращити подання числових характеристик на ній, використавши різні види нерівностей.

5. Довжина меншої сторони прямокутника дорівнює 12 см. Якою може бути довжина більшої сторони, щоб його периметр був менший від периметра квадрата зі стороною 15 см?

6. Маса п’яти мішків з цукром дорівнює m кг. Оцінити масу одного такого мішка, якщо $245<m<255$.

7. У змаганнях фігуристів кожен спортсмен повинен був виконати десять разів одну й ту ж фігуру. За правильне виконання фігури спортсмен отримував 5 балів, а за не правильне виконання фігури від результату віднімали по 2 бали. До наступного кола змагань входив той, хто набирав не менше ніж 29 балів. Яку найменшу кількість разів потрібно виконати правильно фігуру, щоб увійти до наступного кола?

8. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 8 см. Якою може бути довжина іншої сторони, щоб його периметр був більший від периметра квадрата зі стороною 10 см?

9. Оцінити площу ділянки квадратної форми з довжиною огорожі P м, якщо $44 \leq P \leq 48$.

10. З міста А до міста В, відстань між якими 180 км, виїхав автобус, який проїжджає за графіком усю відстань за 4 год. Через 0,5 год. услід за автобусом виїхав автомобіль. З якою швидкістю повинен рухатись автомобіль, щоб прибути раніше від автобуса у селище С, яке розміщене посередині між містами А та В?

11.У грі кожен учасник 12 разів виконав кидок м’яча у корзину. За кожний влучний кидок він одержував 5 балів, а за неточний кидок від результату віднімали по 2 бали. У наступний тур змагань виходив той, хто набирав не менше ніж 32 бали. Яку найменшу кількість точних кидків потрібно виконати, щоб продовжити змагання?

Додаток Д

Спецкурс з математики для 10 класу

Спецкурс з математики «Розв’язування нерівностей і систем нерівностей», призначений для вивчення в 10 класі загальноосвітньої школи. Передбачуваний обсяг навчального часу – 1 година на тиждень, 32 години на рік.

Мета курсу: на основі корекції базових математичних знань учнів за курс 8-10 класів удосконалювати математичну культуру, розвивати творчі здібності учнів, допомагають в опануванні математичними знаннями та вміннями для підготовки до ЗНО.

Вимоги до рівня підготовки учнів

В результаті вивчення даного курсу учні повинні вміти:

- ✓ проводити тотожні перетворення виразів;
- ✓ розв’язувати числові, лінійні, квадратні нерівності;
- ✓ розв’язувати системи нерівностей вивченими методами;
- ✓ розв’язувати нерівності, що містять знак модуля і нерівності вищих степенів.

Спецкурс дозволить учням усунути прогалини в знаннях і отримати додаткову підготовку, що сприяє успішній здачі ЗНО. Також він створює передумови для розвитку творчого потенціалу учнів.

Зміст курсу містить теоретичний матеріал, що входить в рамки шкільної програми, тренажери, самостійні роботи, тести з додаткової методичної літератури та інтернет сайтів. Роль математичної підготовки в загальній освіті і ставить наступні цілі навчання математики в школі:

- оволодіння конкретними математичними знаннями, необхідними для застосування в практичній діяльності;
- інтелектуальний розвиток учнів, формування якісного мислення;
- формування уявлень про методи математики.

Спецкурс допоможе підготуватися учням до підсумкової атестації, так як основною метою цього курсу є знайомство учнів із загальними методами і прийомами рішення нерівностей і систем нерівностей, розвиток математичних здібностей учнів.

Завданнями даного спецкурсу є:

- підвищення математичного і логічного мислення учнів;
- розвиток навичок практичної діяльності;
- підготовка учнів до здачі ЗНО з математики.

Робота спецкурсу будується на принципах:

- науковість;
- доступність;
- варіативність;
- самоконтроль.

Учні повинні вміти:

- ✓ раціонально вибирати метод розв'язування нерівностей і систем нерівностей;
- ✓ розв'язувати нерівності аналітичним методом;
- ✓ перевіряти розв'язання нерівностей і систем нерівностей.

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ

№ заняття	Тема заняття	К-сть годин
1-2	Числові нерівності. Властивості числових нерівностей.	2
3-4	Доведення нерівностей.	2
5-6	Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу.	2
7	Нерівності з однією змінною. Лінійні нерівності.	1
8-10	Розв'язування лінійних нерівностей з однієї змінною.	3

	Числові проміжки.	
11-12	Системи лінійних нерівностей з однією змінною.	2
13-15	Розв’язування систем лінійних нерівностей.	3
16-17	Подвійні нерівності. Розв’язування подвійних нерівностей.	2
18	Тестування з теми «Лінійні нерівності»	1
19	Квадратні нерівності.	1
20	Розв’язування квадратних нерівностей.	1
21-22	Раціональні нерівності. Розв’язування раціональних нерівностей.	2
23-24	Системи раціональних нерівностей. Розв’язування систем раціональних нерівностей.	2
24	Системи нелінійних нерівностей з однією змінною.	1
26	Розв’язування систем нелінійних нерівностей з однією змінною.	1
27	Тестування з теми «Нелінійні нерівності з однією змінною».	1
28-29	Нерівності, що містять знак модуля. Розв’язування нерівностей з модулем.	2
30	Нерівності вищих степенів.	1
31	Розв’язування нерівностей вищих степенів.	1
32	Тестування з теми «Нерівності, що містять знак модуля і нерівності вищих степенів».	1

Додаток Е

Особистісно-розвивальна модель навчального процесу, спрямована на формування математичних компетентностей в темі «Нерівності»

Формування математичної компетентності учнів можна реалізувати, створивши особистісно-розвивальну модель навчального процесу, яка повинна відповідати певним принципам (рис.).

Рис. Принципи особистісно-розвивальної моделі навчального процесу

Розглянемо, як впливають виокремлені принципи на формування математичної компетентності учнів при вивченні нерівностей.

Принцип активної самостійної діяльності. Починати вивчення теми «Нерівності» можна таким чином. На перших двох уроках викласти весь теоретичний матеріал (необхідні поняття разом з поясненнями та обґрунтуваннями), навести приклади, розглянути основні методи розв’язування нерівностей. Формою організації таких занять може бути уроклекція. Наступні декілька уроків слід приділити розв'язуванню задач різного рівня складності, тобто формуванню вмінь та навичок учнів. Слід звернути увагу учнів на завдання обов'язкового рівня, які необхідно виконувати всім та підвищеного, розв'язання яких дають можливість отримати вищі бали. Така організація діяльності передбачає самостійну роботу, при якій вчитель постійно виконує контролюючу функцію, допомагає та пояснює невстигаючим. Організовані таким чином уроки дають можливість реалізувати ще й диференційований підхід до вивчення алгебри.

Принцип урахування індивідуальних та вікових особливостей учнів. Знання навчальних можливостей кожного учня та динаміки їх зростання є необхідним фактором для створення умов розвивального навчання. Саме цим принципом слід керуватися, підбираючи завдання до уроку в даній темі. Так, учням з середніми можливостями треба дати виконати задачі, при розв'язанні яких застосовується мінімум знань, обов'язковий для оволодіння темою (наприклад, виконання за зразком, використання алгоритмів, правил-орієнтирів, тощо). Учням, можливості яких вищі, дати завдання підвищеного рівня складності, виконання яких вже потребує застосування набутих знань шляхом проведення логічних досліджень, обирати самостійно спосіб розв'язування, тобто ставиться пріоритет на розвиток математичних здібностей. Щоб не склалося враження обмеження слабкіших учнів, кожну із запропонованих задач треба проаналізувати всім класом, пояснити доцільність обраного методу розв'язання, після чого дати можливість кожному оформити розв'язок самостійно.

Принцип постійної уваги до розвитку різних компонентів математичних здібностей. Підбираючи тематику завдань, необхідно розглядати з учнями різні підходи до розв'язування однієї нерівності. Особливу увагу слід звернути на отриманий розв'язок, який не залежить від шляху його отримання. В такому випадку обов'язково наголосити на раціональному способі розв'язання (учні повинні вміти самостійно його вибрати із запропонованих або розглянутих).

Наприклад, розв'язуючи тригонометричну нерівність першим способом, можна довести міркування до кінця й отримати відповідь, а другим чи третім

– розглянути лише основні етапи розв'язання та запропонувати учням самостійно вдома перевірити співпадання отриманого розв'язку із знайденим в першому способі. Слід звернути увагу на те, що в деяких випадках множини розв'язків однієї й тієї ж нерівності можуть відрізнятися, враховуючи періодичність тригонометричної функції.

Принцип змагання. Велику роль у формуванні математичної компетентності відіграє урок або його частина, організований у формі змагання. До нього учнів мають спонукати такі запитання: «Хто швидше розв'яже нерівність?», «У кого нерівність розв'язана раціональним способом?» тощо. Зловживати такою формою не треба, оскільки може прослідковуватись такий недолік, як конкуренція однокласників один з одним, що тягтиме за собою порушення психологічного комфорту на уроці, чого допустити не можна ні в якому разі. Але інколи, щоб активізувати пізнавальну чи дослідницьку діяльність учнів, змагання буде не тільки доцільним, а й цікавим.

Принцип яскравості. Реалізацію цього принципу можна досягти шляхом використання різних форм організації навчання, яскравих, вражаючих засобів навчання, в тому числі й мультимедійну техніку. На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера нерівності та їх системи з однією чи двома змінними різних рівнів складності. Це такі програми як GRAN1, Advanced Grapher, TepM, ЕНМК «Алгебра» та ін. Переважна більшість дослідників вважають, що використання ІКТ у навчальному процесі сприяє підвищенню інтересу учнів до отримання знань; формуванню умінь і навичок різноманітної творчої діяльності.

Принцип повного навантаження. Він реалізовується, якщо для учнів буде достатньо високий рівень складності задач (підвищується пізнавальний інтерес та мотивація навчальної діяльності), швидкість обговорення розв'язання задач (концентрація уваги), диференційовані домашні завдання (розкриття та розвиток математичних здібностей). Ці фактори забезпечують повне навантаження учнів. Враховуючи профільність класу, для кожного учня (або групи учнів) буде власний рівень «повного навантаження».