Інформатизація освіти

Ілля Теплицький,
доцент Криворізького державного педагогічного університету, кандидат педагогічних наук,
Сергій Семеріков,
доцент Криворізького державного педагогічного університету, кандидат педагогічних наук

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХІВ ТІЛ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ

Розум людини заслужено викликає наше захоплення, та непогано було б постояти деякий час у благоговінні й перед природою, яка повністю беззаперечно підкорюється такому витонченому і такому простому закону — закону тяжіння.
РІЧАРД ФЕЙНМАН

Ознайомлення учнів з технологією комп'ютерного моделювання під час вивчення фізики є актуальним завданням шкільної і вищої педагогічної освіти [4; 6; 8; 9].

Матеріал, що пропонується, із дослідження рухів тіл під дією сили всесвітнього тяжіння містить ряд порівняно самостійних фрагментів, а саме:

1) рух штучного супутника навколо планети або планети навколо Сонця;

2) рух тіл у системах типу «подвійна зірка»;

3) експериментальна перевірка законів руху планет (законів Кеплера);

4) узагальнення закону всесвітнього тяжіння на випадок довільного показника степеня k для відстані r між тілами:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^k}; \qquad (1)$$

5) моделювання абсолютних і відносних рухів планет Сонячної системи (рухи планет у геліоцентричній та геоцентричній системах відліку).

Пропонуючи школярам подібні дослідження, нагадуємо, що в тих випадках, коли експериментування з реальними об'єктами виявляється принципово неможливим, експерименти проводять з математичними моделями цих об'єктів. Якщо в такій діяльності застосовують комп'ютер, то говорять про комп'ютерне моделювання.

Під час вивчення зазначених рухів чи не найбільший інтерес становить питання про вигляд їхніх траєкторій. Побудова таких траєкторій та їх дослідження і стануть основною метою кожного з перелічених фрагментів.

Середовищем для моделювання обираємо відомі учням з курсу інформатики *електронні таблиці*.

У пропонованому матеріалі йдеться про одне із найдалекосяжніших узагальнень, зроблених будь-коли людським розумом, а саме про закон всесвітнього тяжіння (1).

Якщо до цього додати, що всяке тіло під дією прикладеної до нього сили набуває в напрямі цієї сили приско-

© І. Теплицький, С. Семеріков, 2008

рення, величина якого пропорційна силі й обернено пропорційна масі тіла,

$$a = \frac{F}{m}, \qquad (2)$$

то, як зауважує Р. Фейнман, досвідченому математику цих відомостей цілком вистачить для виведення всіх подальших наслідків [10, 122]. Не претендуючи на таке високе звання, все ж наважимося на спробу отримати хоч і не всі, але досить важливі наслідки.

1. Рух штучного супутника планети

Припущення 1. Будемо вважати (і не без підстав) масу штучного супутника набагато меншою за масу планети: $m_{супут} << m_{пл}$. Це дасть змогу не розглядати рух планети.

Припущення 2. Будемо нехтувати опором середовища і впливом інших тіл Сонячної системи на дані два тіла. В такому разі на супутник діятиме єдина сила – сила всесвітнього тяжіння [2, *81*].

Враховуючи, що відстань між центрами планети й супутника значно перевищує розміри супутника, і розглядаючи планету як однорідну кулю, вважатимемо відповідно до [2, *80–81*], що забезпечено умови застосовності (1).

Рух супутника відбувається в площині, в якій лежать вектор швидкості $\boldsymbol{v}$ супутника і центр планети. У цій самій площині лежить і вектор $\boldsymbol{F}$ сили тяжіння. Опишемо такий рух у прямокутній системі координат з початком у центрі планети *(рис. 1)*.

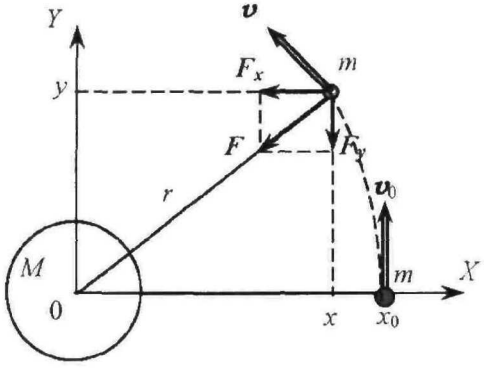


Рис. 1

Тут $\boldsymbol{F}_x$ і $\boldsymbol{F}_y$ – складові вектора сили тяжіння $\boldsymbol{F}$; M, m – маси центрального тіла (планети) і супутника; $\boldsymbol{v}$ – вектор орбітальної швидкості супутника.

Положення супутника визначається двома координатами x, y; при цьому знаки проекцій F_x і F_y протилежні знакам координат.

З подібності трикутників маємо:

$$\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}, \qquad \frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r},$$ що разом з (1)

дає: $F_x = -\dfrac{GMmx}{r^3}$; $F_x = -\dfrac{GMmy}{r^3}$.

Для визначення проекцій прискорення скористаємось (2):

$$a_x = -\frac{GMx}{r^3}; \quad a_y = -\frac{GMy}{r^3}. \qquad (3)$$

Відстань r між тілами визначатимемо за теоремою Піфагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (4)$$

Нехай початковий момент «спостереження» відповідає перетину орбіти супутника з віссю абсцис, як це показано на *рис. 1*.

Система рівнянь (3), (4) *є математичною моделлю руху штучного супутника навколо планети.*

Задача. *Штучний супутник Землі рухається на висоті h = 300 км. Дослідити форми можливих орбіт супутника залежно від початкових умов.*

Відстань між Землею і супутником $r = R_3 + h = 0{,}3\cdot10^7$ м + $6{,}4\cdot10^7$ м = $= 6{,}7\cdot10^7$ м.

Учням відомо [2, *81*], що тіло стане супутником планети, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості $v_{1к}$:

$$v_y(0) = v_{1к} = \sqrt{GM/r}. \qquad (5)$$

Обговорення алгоритму. Обчислювальний експеримент

1. Відповідно до [2; *57–58, 91–97*] обчислювати координати x, y точок орбіти будемо за схемою *прискорення → швидкість → координата.*

2. Для зберігання початкових значень $v_x(0)$, $v_y(0)$, $x(0)$ та $y(0)$ виділимо окремі комірки; $v_y(0)$ обчислюватиметься автоматично за формулою (5).

3. Будемо фіксувати значення кінематичних характеристик руху через інтервали часу Δt = 1 хв = 60 с, а час моделювання оберемо рівним ~100 хв.

Фрагмент відповідної таблиці подано на *рис. 2.* На цьому ж рисунку показано колову траєкторію супутника – графік залежності $y = y(x)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a_x	a_y	v_x	v_y	x	y	*Дано*	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	7714	6,70E+06	0,00E+00	G =	6,672E-11
3	-8,86	-0,61	-266	7714	6,68E+06	4,63E+05	Δt =	60
4	-8,80	-1,22	-798	7677	6,64E+06	9,24E+05	M =	5,976E+24
5	-8,69	-1,83	-1326	7604	6,56E+06	1,38E+06	r =	6,700E+06
6	-8,54	-2,42	-1847	7494	6,45E+06	1,83E+06		
7	-8,36	-3,01	-2360	7349	6,30E+06	2,27E+06	$v_x(0)$ =	0
8	-8,13	-3,58	-2861	7168	6,13E+06	2,70E+06	$v_y(0)$ =	7,71E+03
9	-7,86	-4,13	-3349	6954	5,93E+06	3,12E+06	$x(0)$ =	6,700E+06
10	-7,56	-4,66	-3821	6706	5,70E+06	3,52E+06	$y(0)$ =	0
...	...	...	...	...	...	...		

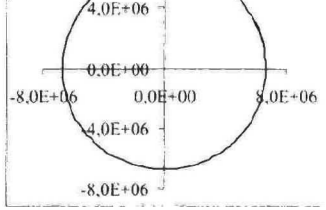


Рис. 2

Ключові комірки цієї таблиці мають такий уміст:

Комірка	Формули / числа	Примітки
H7	=0	
H8	=(H2*H4/H6)^0,5	
H9	=H6	
H10	=0	
A2	=-$H$2*$H$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в A3 і A4
B2	=-$H$2*$H$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в B3 і B4
C2	=$H$7	
D2	=$H$8	
E2	=$H$9	
F2	=$H$10	
C3	=C2+A2*$H$3*0,5	
D3	=D2+B2*$H$3*0,5	
E3	=E2+C3*$H$3	копіювати в E4
F3	=F2+D3*$H$3	копіювати в F4
C4	=C3+A3*$H$3	
D4	=D3+B3*$H$3	

Порядок роботи:

а) заповнити комірки H2–H6, далі – решту ключових комірок;

б) усі формули 4-го рядка (від A4 до F4) копіювати в наступні 100 рядків;

в) за даними стовпців E та F побудувати траєкторію – графік $y = y(x)$.

1. Оскільки значенням початкової швидкості $v_y(0)$ є перша космічна, то траєкторією виявляється коло.

2. Якщо в момент виходу на орбіту швидкість супутника $v_y(0)$ задовольнятиме нерівності $v_{1к} < v_y(0) < \sqrt{2}\, v_{1к}$, то, як відомо з курсу фізики, він рухатиметься еліптичною орбітою. Тут $v_{1к} = v_{11к}$ – друга космічна швидкість.

Відповідно в обчислювальному експерименті збільшимо попереднє значення $v_y(0)$ в 1,2 раза. Для цього відредагуємо формулу, введену раніше в комірку H8. А саме: = (H2*H4/H6)^0,5*1,2. Результат показано на *рис. 3.*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a_x	a_y	v_x	v_y	x	y	*Дано*	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	9260	6,70E+06	0,00E+00	G =	6,672E-11
3	-8,83	-0,73	-266	9260	6,68E+06	5,56E+05	Δt =	60
4	-8,69	-1,45	-796	9216	6,64E+06	1,11E+06	M =	5,976E+24
5	-8,45	-2,13	-1318	9129	6,56E+06	1,66E+06	r =	6,700E+06
6	-8,13	-2,77	-1825	9001	6,45E+06	2,20E+06		
7	-7,75	-3,35	-2313	8835	6,31E+06	2,73E+06	$v_x(0)$ =	0
8	-7,31	-3,86	-2778	8634	6,14E+06	3,24E+06	$v_y(0)$ =	9,26E+03
9	-6,82	-4,30	-3216	8402	5,95E+06	3,75E+06	$x(0)$ =	6,700E+06
10	-6,31	-4,67	-3626	8144	5,73E+06	4,24E+06	$y(0)$ =	0
...	...	...	...	...	...	...		

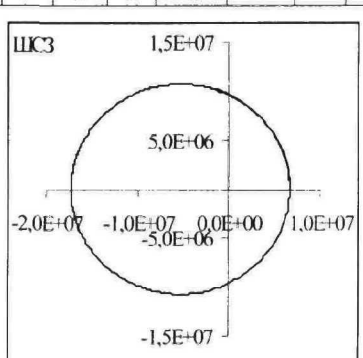


Рис. 3

1. Надаючи, нарешті, початковій швидкості значення $v_y(0) = \sqrt{2}\, v_{1к}$, тобто вводячи до H8 нового множника =(H2*H4/H6)^0,5*2^0,5, одержуємо

параболічну траєкторію *(рис. 4)*:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a_x	a_y	v_x	v_y	x	y	Дано	ШСЗ
2	-8.88	0.00	0	10910	6.70E+06	0.00E+00	G=	6,672E-11
3	-8.80	-0.86	-266	10910	6.68E+06	6.55E+05	t=	60
4	-8.55	-1.68	-794	10858	6.64E+06	1.31E+06	M=	5,976E+24
5	-8.16	-2.43	-1307	10757	6.56E+06	1.95E+06	m=	1,000E+03
6	-7.66	-3.07	-1797	10611	6.45E+06	2.59E+06	r=	6,700E+06
7	-7.08	-3.60	-2257	10427	6.31E+06	3.21E+06	$v_x(0)$=	0
8	-6.45	-4.01	-2682	10211	6.15E+06	3.83E+06	$v_y(0)$=	1,08E+04
9	-5.80	-4.30	-3068	9970	5.97E+06	4.42E+06	$x(0)$=	6.700E+06
10	-5.16	-4.48	-3417	9712	5.76E+06	5.01E+06	$y(0)$=	0
...								

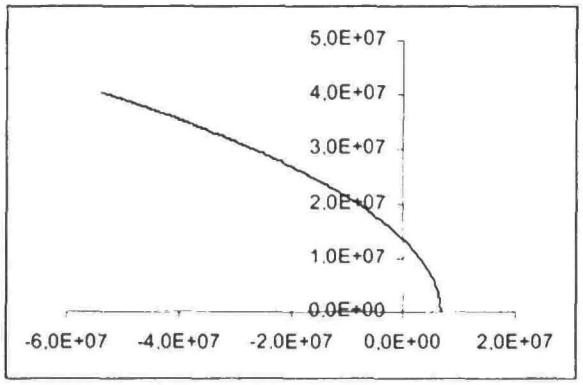


Рис. 4

Завдання 1. За якої умови траєкторія супутника стає гіперболічною? Перевірте відповідь на моделі.

Завдання 2. Закон тяжіння не відрізняє штучний супутник від природного. Оскільки Земля, як і інші планети, є природним супутником Сонця, змоделюйте рух Землі навколо Сонця, змінивши в побудованій моделі потрібним чином вміст відповідних комірок стовпця H.

Усі розглянуті моделі можна об'єднати в одну групу за спільною ознакою $m_{супутн} << M_{планети}$. Усвідомлення цього факту є логічною передумовою переходу до наступного етапу роботи.

2. Рух природного супутника планети і компонентів системи «подвійна зірка»

Природні супутники планет мають маси, якими не завжди можна нехтувати в порівнянні з масами самих планет, а отже не можна нехтувати рухом жодного з тіл. Поняття «центральне тіло» і «тіло-супутник» за цих умов втрачають свій початковий зміст. Моделювання руху компонентів таких систем є більш складною задачею, розв'язання якої потребує переходу до системи відліку, пов'язаної зі спільним центром мас. Багато плідних ідей стосовно розв'язування подібних задач можна знайти в [11; *20, 137–140*].

Знов почнемо аналіз із найпростішого випадку.

Припущення 3. Нехай тіла масами m_1 і m_2 рухаються по *колових* орбітах з радіусами r_1 і r_2 і відстань R між ними під час руху не змінюється *(рис. 5)*.

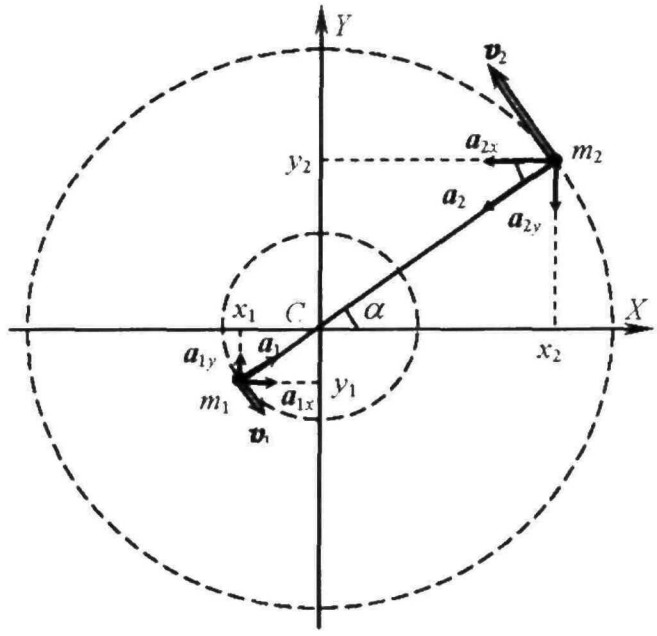


Рис. 4

1. Обидва тіла (m_1 і m_2) обертаються навколо нерухомої точки C – їхнього спільного центра мас. При цьому вони весь час знаходяться на одній прямій, що сполучає тіла і проходить через точку C. Ця точка ділить відстань R між тілами на відрізки r_1 і r_2 у відношенні $r_1/r_2=m_2/m_1$, звідки:

$$r_1 = \frac{R}{1+m_1/m_2}; \quad r_2 = \frac{R}{1+m_2/m_1}.$$

Переходячи до проекцій, маємо для моменту часу $t = 0$:

$$x_1(0) = -\frac{R}{1+m_1/m_2}; \quad x_2(0) = \frac{R}{1+m_2/m_1}, \quad (6)$$

де x_1, x_2 – координати тіл у системі відліку, пов'язаній із центром мас.

2. Певних уточнень потребують також вирази для прискорень. Сила тяжіння надає прискорень обом тілам:

$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1a_1 = m_2a_2$, звідки

$$a_1 = \frac{Gm_2}{R^2}; \quad a_2 = \frac{Gm_1}{R^2}.$$

Для моменту часу $t = 0$ одержуємо:

$$a_{1x}(0) = \frac{Gm_2x_1(0)}{R^3}; \; a_{1y}(0) = \frac{Gm_2y_1(0)}{R^3}.$$

$$a_{2x}(0) = -\frac{Gm_2x_2(0)}{R^3}; a_{2y}(0) = -\frac{Gm_1y_2(0)}{R^3}.$$

$a_{2x}(0) = -Gm_1x_2(0)/R^3$; $a_{2y}(0) = -Gm_1y_2(0)/R^3$.

У загальному випадку (для будь-якого моменту часу) з урахуванням можливості зміни відстані між тілами (наприклад, при русі тіл по еліптичних траєкторіях) останні вирази набувають вигляду:

$$a_{1x} = \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{2x} = -\frac{Gm_1(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{1y} = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{2y} = -\frac{Gm_1(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3},$$

де (x_1, y_1), (x_2, y_2) – відповідно координати першого й другого тіл, а $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – відстань між ними у довільний момент часу t.

У задачі про штучний супутник ми вже бачили, що вигляд траєкторій руху тіл визначається початковими умовами, і зокрема, початковими швидкостями $v_{1y}(0)$ і $v_{2y}(0)$. Оскільки розглядається рух тіл по колових орбітах, то

$$v_{2y}(0) = \sqrt{\frac{Gm_1}{R}}. \qquad (7)$$

Якою ж має бути $v_{1y}(0)$? Перебуваючи весь час на одній прямій, обидва тіла мають однакові періоди обертання $T_1 = T_2$. Але $T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}$ і $T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2}$, звідки

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}$, що в проекціях на вісь Y дає

$\frac{v_{1y}(0)}{v_{2y}(0)} = \frac{x_1(0)}{x_2(0)}$. Звідси маємо:

$$v_{1y}(0) = v_{2y}(0)\frac{x_1(0)}{x_2(0)}. \qquad (8)$$

Вирази для $x_2(0)$, $x_1(0)$, $v_{2y}(0)$ і $v_{1y}(0)$ у вигляді табличних формул згідно з (6), (7), (8) будуть внесені у відповідні комірки таблиці (під умовою) і обчислюватимуться автоматично.

Обговорення алгоритму

Оскільки розглядається рух *двох* тіл, то природно виникає потреба у збільшенні вдвічі кількості змінних (а отже, й стовпців таблиці):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	a_1	a_2	a_{1x}	a_{1y}	v_1	v_2	v_{1x}	v_{1y}	x	y	x_1	y_1	*Дано*	Значення
...		...		...		...		...		...			...	...

Крім того, потребує збільшення й кількість рядків (250–300), тому що помітно зростає період обертання компонентів системи, а просте збільшення інтервалу Dt при попередніх 100 рядках таблиці вже не забезпечує необхідної точності обчислень.

Вміст ключових комірок нової таблиці:

Комірки	Формули / числа	Коментарі
N7	0	
N8	=N10*N11/N13	
N9	0	
N10	=(N2*N4*N13)^0,5/N6	
N11	=-N6/(1+N4/N5)	
N12	0	
N13	=N6/(1+N5/N4)	
N14	0	
A2	=$N$2*$N$5*(K2-I2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	Копіювати в A3, A4
B2	=$N$2*$N$5*(L2-J2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	Копіювати в B3, B4
C2	=$N$2*$N$4*(I2-K2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	Копіювати в C3, C4
D2	=$N$2*$N$4*(J2-L2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	Копіювати в D3, D4
E2	=$N$7	
F2	=$N$8	

G2	=$N$9	
H2	=$N$10	
I2	=$N$11	
J2	=$N$12	
K2	=$N$13	
L2	=$N$14	
E3	=E2+A2*$N$3*0,5	
F3	=F2+B2*$N$3*0,5	
G3	=G2+C2*$N$3*0,5	
H3	=H2+D2*$N$3*0,5	
I3	=I2+E3*$N$3	Копіювати в I4
J3	=J2+F3*$N$3	Копіювати в J4
K3	=K2+G3*$N$3	Копіювати в K4
L3	=L2+H3*$N$3	Копіювати в L4
E4	=E3+A3*$N$3	
F4	=F3+B3*$N$3	
G4	=G3+C3*$N$3	
H4	=H3+D3*$N$3	

Порядок роботи:

а) заповнити комірки N2–N6 відповідно до даних задачі

G = N2;
Dt = N3;
m_1 = N4;
m_2 = N5;
R = N6;

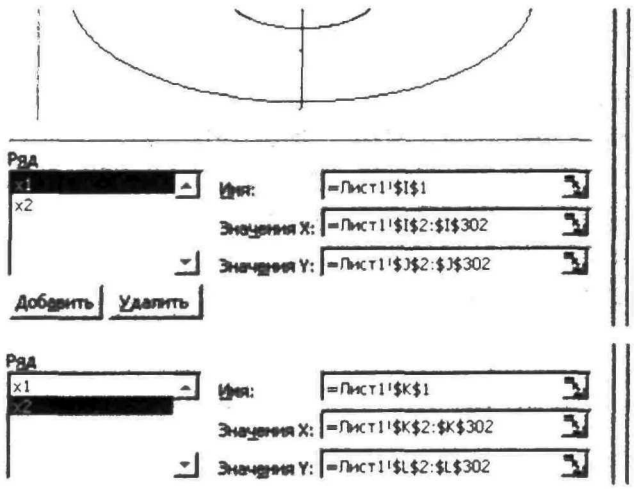
б) заповнити ключові комірки за наведеною вище таблицею;

в) усі формули 4-го рядка копіювати у наступні до останнього включно;

г) побудувати графіки за даними стовпців I, J, K, L.

Увага! Виконання цього пункту виявиться успішним, якщо правильно відкоригувати рядки даних. У всіх попередніх графічних побудовах нам доводилося мати справу з випадками, коли були потрібні один або декілька графіків залежності від одного й того самого аргументу (найчастіше таким аргументом виявлявся час t). Зараз виникла потреба в побудові іншого характеру: згідно з п. 5 на одній координатній площині потрібні два графіки залежностей $y_1 = y_1(x_1)$ та $y_2 = y_2(x_2)$, тобто залежностей від різних аргументів. *Якщо на початку побудови виділити* чотири стовпці I (x_1), J (y_1), K (x_2), L (y_2), то програма *Майстер діаграм* за замовчанням сприйме як аргумент стовпець I – перший з виділених стовпців, і побудує три графіки для функцій одного аргументу x_1, а саме: $y_1 = y_1(x_1)$, $y_2 = y_2(x_1)$, $y_3 = y_3(x_1)$. Це зовсім не те, що нам потрібно, і саме з цієї причини виникає необхідність в редагуванні рядків даних.

Подальша робота передбачає таке: поставити покажчик миші в *Область діаграми*, там вивести контекстне меню (права кнопка миші), в якому обрати *Исходные данные*, там відкрити вкладку *Ряд*, а далі керуватись фрагментами вікна *Исходные данные*, зображеними нижче.



Обчислювальний експеримент

Задача 1. Відомо, що маса Місяця (m_2) у 81 раз менша за масу Землі (m_1). Прийнявши відстань R між центрами цих тіл рівною 380 тис. км ($3{,}8\cdot10^8$ м), змоделювати рух Місяця й Землі.

1. Уведемо ці дані до комірок таблиці: N3 = 8,64E+04 (1 доба в секундах); N4 = $5{,}98\cdot10^{24}$; N5 = $5{,}98\cdot10^{24}/81$; N6 = 3,8E+08.

2. Побудуємо графіки $y_1 = y_1(x_1)$ і $y_2 = y_2(x_2)$ – траєкторії руху *(рис. 6)*.

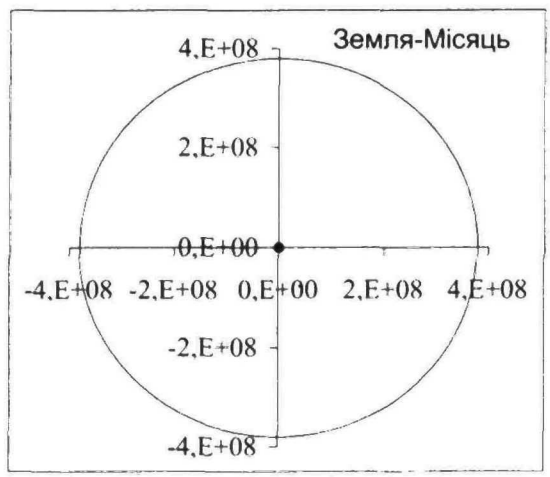


Рис. 6

Маленьке коло в центрі *рис. 6* – це орбіта Землі. Її центр знаходиться трохи лівіше від точки перетину осей – центра мас системи.

Завдання 3. Переконайтесь, що ця модель містить у собі попередню (про рух штучного супутника), якщо перейти до попередніх умов.

Завдання 4. Самостійно розв'яжіть задачу.

Задача 2. Якби на місці Місяця була планета з масою втричі меншою за масу Землі, то який вигляд мали б орбіти цих тіл?

Після коригування даних у відповідних комірках таблиці отримуємо результат *(рис. 7)*.

При побудові цього рисунка в електронній таблиці доцільно час моделювання обмежити так, щоб тіла не виконали й одного повного оберту.

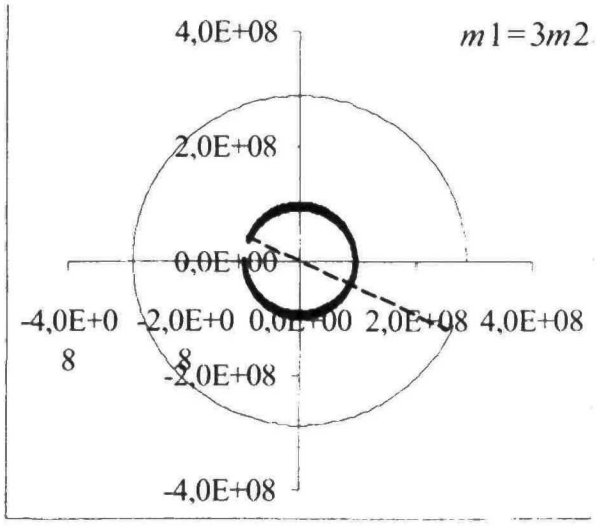


Рис. 7

Довжина штрихового відрізку прямої, що сполучає точки траєкторій у останній момент руху, дорівнює сталій відстані R між тілами, як про це йшлося вище. Крім того, стають зрозумілими напрями руху кожного з тіл.

Отже, ми безпосередньо підійшли до моделювання руху компонентів у системах, що називаються фізично подвійними зірками. Вони складаються з двох зірок, об'єднаних силами тяжіння. Зірки обертаються по еліптичних орбітах навколо спільного центра мас.

Виявляється, остання модель передбачає такі об'єкти. Тут ми вважаємо корисним перехід від одиниць СІ до інших, які вживаються в зоряній астрономії: одиницею маси є маса Сонця ($1\ M_C = 1{,}99\cdot10^{30}$ кг), одиницею довжини є парсек (1 пк $= 3{,}08\cdot10^{14}$ м), одиницею часу є 1 земний рік ($3{,}15\cdot10^{7}$ с). Згаданий перехід фактично стосується числового значення розмірного коефіцієнта G у законі всесвітнього тяжіння.

Пропонуємо учням пригадати, у який спосіб виконують подібні операції. В разі утруднення надаємо допомогу:

$$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2} =$$

$$= 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{\left(\frac{1}{3{,}08\cdot10^{14}}\right)^3 \text{пк}^3}{\left(\frac{1}{1{,}99\cdot10^{30}}\right)\text{M}_\text{t}\cdot\left(\frac{1}{3{,}15\cdot10^{7}}\right)^2 \text{рік}^2}.$$

Остаточно маємо $G = 67{,}6\ \frac{\text{пк}^3}{\text{M}_\text{C}\cdot\text{рік}^2}$.

Така вправа, на наш погляд, є корисною для учнів, оскільки розкриває зміст часто вживаної фрази: «Числове значення цього коефіцієнта залежить від вибору системи одиниць вимірювання величин».

Після виконання наведених перетворень пропонуємо розв'язати задачу:

Задача 3. Змоделювати орбіти компонентів системи подвійної зірки за умови, що до її складу входять зірки з масами $m_1 = 3\ M_C$ та $m_2 = 1\ M_C$, розташовані на відстані $R = 0{,}5$ пк.

Пропонуючи учням виконати моделювання у новій системі одиниць, уточнюємо разом з ними новий уміст комірок N2–N6:

у N2: = 67,6; у N3: = $4{,}5\cdot10^{-4}$;

у N4: = 3; у N5:= 1; у N6: = 0,5.

За умови, що $v_{2y}(0)$ – вміст комірки N10 – дорівнює числовому значенню швидкості, яка забезпечує колову орбіту, матимемо вже знайомий результат з коловими орбітами *(рис. 8)*, а у разі її збільшення в 1,25 рази з одночасним збільшенням Dt (комірка N3) до $2\cdot10^{-3}$ орбіти перетворюються на еліптичні *(рис. 9)*.

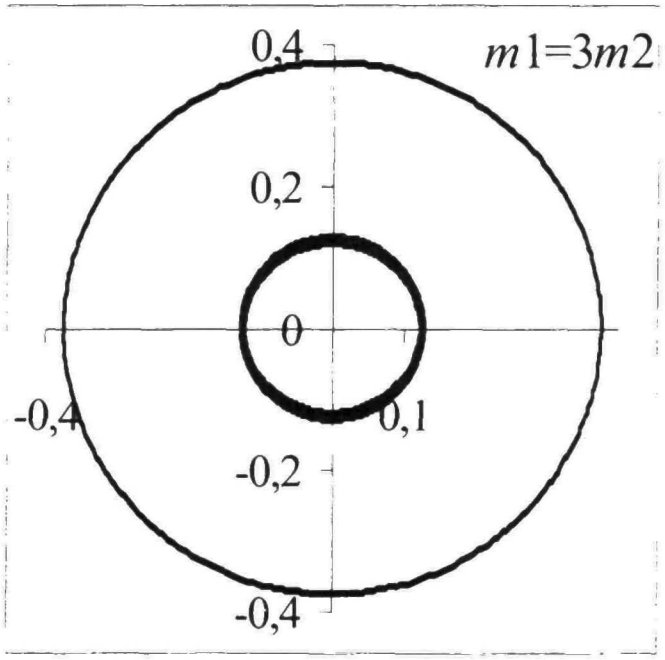


Рис. 8

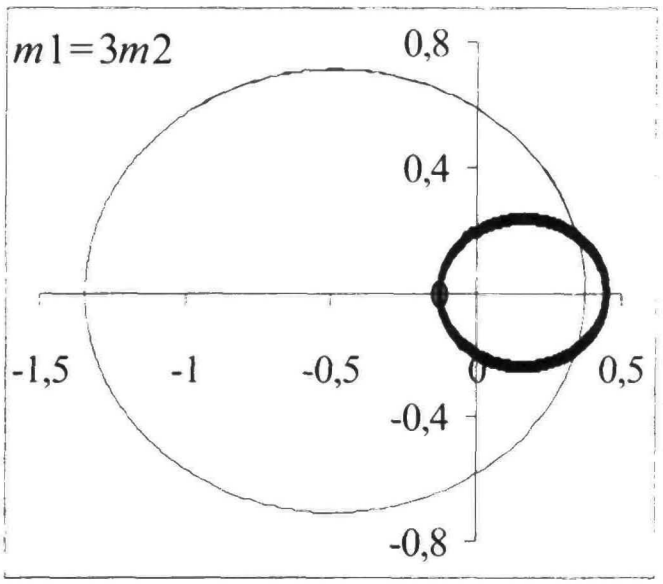


Рис. 9

Зауваження. Моделювання кількох обертів системи подвійної зірки за допомогою 300-рядкової таблиці є недоцільним, оскільки похибка обчислень у цьому разі призводить до хибних висновків про поведінку системи. Для одержання достатньої точності обчислень треба було б збільшити кількість рядків мінімум на порядок з відповідним зменшенням проміжку Δt. У [9] показано, що в цьому разі розумним є перехід від електронних таблиць до іншого середовища моделювання.

З підручників фізики школярам відомо, що у межах Сонячної системи закон всесвітнього тяжіння і решта законів Ньютона є абсолютно правильними. Адже саме на основі цих законів свого часу були відкрити дві до того невідомі планети Нептун і Плутон. У наш час ці закони кладуть в основу розрахунків траєкторій космічних апаратів, і вони підтверджуються усім досвідом практичної космонавтики. Принагідно зазначимо, що польоти американських космічних апаратів до Місяця з наступним поверненням на Землю здійснювалися за найекономнішою схемою, що її в 1927 р. обгрунтував і розрахував невизнаний за радянських часів талановитий український вчений Ю. Кондратюк. Відповідну траєкторію американські дослідники називають «траєкторією Кондратюка».

Чи можна стверджувати, що на міжзоряних відстанях, значно більших за розміри Сонячної системи, ці закони також справджуються? Позитивну відповідь астрономи знаходять, спостерігаючи системи подвійних зірок. На *рис. 10* наведено фотографію, отриману в результаті ретельних спостережень протягом 42 років за відносними по-

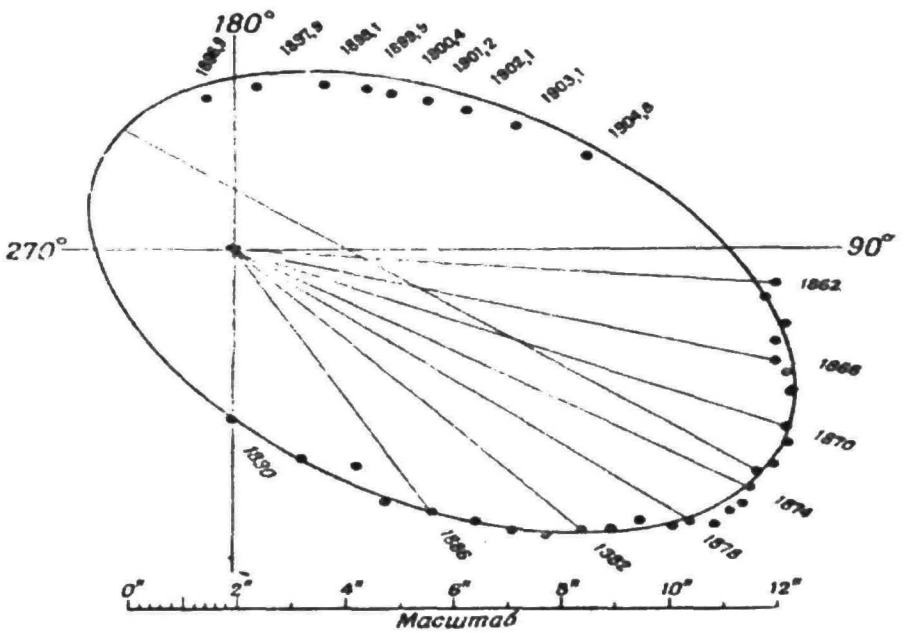


Рис. 10

зиціями компонентів подвійної зірки Сиріус.

Як кажуть, коментарі зайві. Не дуже важко зрозуміти, що подібну картину руху можна одержати, якщо в таблиці, яка відповідає *рис. 9*, реалізувати умову $m_2 << m_1$ і узгодити масштаби на координатних осях. Дуже бажано, щоб учні виконали таку вправу.

У сучасній астрофізиці закон тяжіння відіграє важливу роль при описі процесів, що відбуваються на різних стадіях еволюції зірок.

3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння

Як відомо, закон всесвітнього тяжіння був відкритий Ньютоном значно пізніше від законів Кеплера і виявився їх теоретичним узагальненням. Якщо закони Кеплера сформульовані тільки для планет і передбачають лише еліптичні орбіти, то закон всесвітнього тяжіння описує гравітаційні взаємодії будь-яких тіл, орбіти яких за певних умов можуть бути не лише еліпсами, а й параболами або гіперболами. Саме тому при перевірці законів Кеплера маємо право розглядати рух штучного супутника, а не планети. Суть нашого підходу полягає у такому: якщо стверджується, що траєкторією руху є одна з кривих другого порядку, то всі її точки мають задовольняти *означенню* даної кривої. На наш погляд, це надійний спосіб відрізнити еліпс від овалу чи параболу від гіперболи.

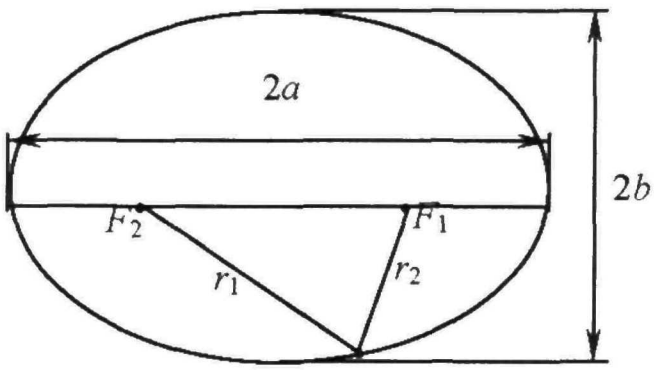
Перший закон Кеплера: *Планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.*

Означення. *Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою.*

На *рис. 11* показані: F_1, F_2 – фокуси еліпса; $2a$ – велика вісь; $2b$ – мала вісь.

Коло є окремим випадком еліпса за умови, що його фокуси збігаються.

Повернемось до таблиці, що відображає рух штучного супутника Землі, і до *рис. 3*. На основі закону тяжіння ми розрахували координати точок орбіти,



$r_1 + r_2 = 2a$

Рис. 11

що відповідають послідовним однаковим проміжкам часу Δt, і за цими координатами побудували саму орбіту. Той факт, що орбіта є еліпсом, учні зазвичай сприймають на віру. Проте застосування комп'ютера дає змогу організувати дослідження, спрямоване на з'ясування форми траєкторії.

Якщо траєкторія справді є еліпсом, а центральне тіло знаходиться у фокусі F_1, то для всіх точок такої траєкторії повинна виконуватись рівність

$r_1 + r_2 = 2a = const.$

Цей факт і підлягатиме перевірці в обчислювальному експерименті.

Порядок роботи:

а) допишемо до умови (у стовпці G та H) значення параметрів x_{max}, x_{min}, a та x-координат фокусів $x_{(F1)}$ та $x_{(F2)}$ поки що гіпотетичного еліпса;

б) добавимо до таблиці три нові стовпці I, J, K, у яких будемо розміщувати результати розрахунків значень змінних r_1, r_2 та $r_1 + r_2$. Довжини відрізків r_1 та r_2 обчислюємо за координатами їхніх початків та кінців.

Уміст комірок таблиці має бути таким:

Комірка	Формули / числа
H10	=МАКС(E2:E250)
H11	=МИН(E2:E250)
H12	=0,5*ABS(H10-H11)
H13	0,00
H14	=H11+H10
I3	=((E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000
J3	=(($H$14-E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000
K3	=I3+J3

в) формули комірок I3, J3 та K3 копіюємо до самого низу таблиці (кожну у своєму стовпці), так що фактично перевіряються всі точки, за якими була побудована траєкторія.

На *рис. 12* наведено результати дослідження.

	E	F	G	H	I	J	K
1	x	y	Дано	ШСЗ	Перший закон Кеплера		
2	6.70E+06	0.00E+00	G=	6,672E-11	t	r_1	r_1+r_2
3	6.68E+06	5.55E+05	t=	60	6.70	17.27	23,97
4	6.64E+06	1.11E+06	M=	5,976E+24	6.71	17.26	23,97
5	6.56E+06	1.66E+06	r=	6,700E+06	6.73	17.24	23,97
6	6.45E+06	2.20E+06	$v_x(0)$=	0	6.76	17.20	23,97
7	6.31E+06	2.73E+06	$v_y(0)$=	9,26E+03	6.81	17.15	23,97
8	6.14E+06	3.24E+06	x(0)=	6,700E+06	6.87	17.09	23,97
9	5.95E+06	3.75E+06	y(0)=	0	6.95	17.02	23,97
10	5.73E+06	4.24E+06	$x_{ц}$=	6,70E+06	7.03	16.94	23,97
11	5.49E+06	4.71E+06	$x_{ц}$=	-1,73E+07	7.13	16.84	23,97
12	5.23E+06	5.16E+06	a=	1,20E+07	7.23	16.73	23,97
13	4.95E+06	5.60E+06	$x_{ц}$=	0,00	7.35	16.62	23,97
14	4.65E+06	6.01E+06	$x_{ц}$=	-1,06E+07	7.47	16.49	23,97
...							

Рис. 12

Отже, під час руху тіла під дією сили тяжіння траєкторія, якщо вона замкнута (фінітна), виявляється еліпсом, в одному з фокусів якого знаходиться центральне тіло.

Другий закон Кеплера: *Напрямлений відрізок, що сполучає Сонце й планету (радіус-вектор планети) за однакові проміжки часу описує (замітає) рівні площі (рис. 13).*

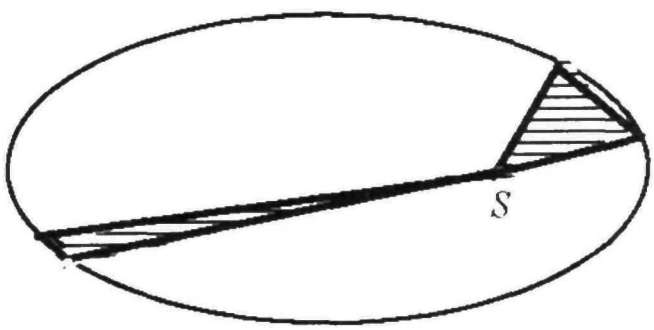


Рис. 13

Експериментальна перевірка другого закону Кеплера є не менш корисною, ніж попередня.

На *рис. 14* показано два радіуси-вектори r_i і r_{i+1}, що відповідають початку і

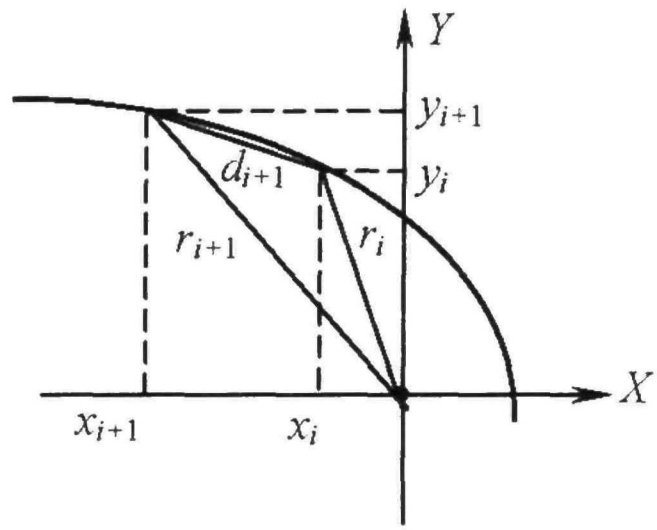


Рис. 14

кінцю i-го проміжку часу Δt. Дугу, що стягує їхні кінці, з достатнім наближенням можна замінити хордою d_{i+1}. Шукану площу знайдемо за формулою Герона.

Порядок роботи:

а) добавимо до таблиці п'ять нових стовпців L, M, N, O, P. У них заноситимуться результати обчислення сторін трикутника, півпериметра та площі;

б) довжини всіх відрізків, як і раніше, обчислюємо за координатами їхніх початків та кінців.

Уміст комірок таблиці має бути таким:

Комірка	Формули / числа
L3	=((E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000
M3	=((E3)^2+(F3)^2)^0,5/1000000
N3	=((E3-E2)^2+(F3-F2)^2)^0,5/1000000
O3	=0,5*(L3+M3+N3)
P3	=(O3*(O3-L3)*(O3-M3)*(O3-N3))^0,5

На *рис. 15* подано відповідний фрагмент доповненої таблиці.

Отже, дослідна перевірка другого закону Кеплера підтверджує його справедливість.

Перевірити третій закон Кеплера можна, маючи дві таблиці, побудовані для двох пар тіл, або одержати його як *теоретичний* наслідок закону всесвітнього тяжіння (найпростіше – у припущенні колових орбіт):

$$T = 2\pi R/v; \quad v = \sqrt{GM_C/R} \quad \Rightarrow$$

$$T^2 = 4\pi^2 R^3/GM_C \quad \Rightarrow \quad T_1^2/T_2^2 = R_1^3/R_2^3.$$

		L	M	N	O	P
1	...	***Другий закон Кеплера***				
2	...	r_i	r_{i+1}	l_{i+1}	p_i	S_i
3	...	6,70	6,71	0,56	6,98	**1,86**
4	...	6,71	6,73	0,55	7,00	**1,86**
5	...	6,73	6,76	0,55	7,02	**1,86**
6	...	6,76	6,81	0,55	7,06	**1,86**
7	...	6,81	6,87	0,55	7,12	**1,86**
...	...	...	...	...	...	...

Рис. 15

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кабардин О. Ф.* и др. Факультативный курс физики, 8 кл.: Пособие для учащихся. — М.: Просвещение, 1973. — 206 с.

2. *Коршак Є. В., Ляшенко О. І., Савченко В. Ф.* Фізика, 9 кл.: Підруч. для серед. шк. — Київ—Ірпінь: Перун, 2002. — 232 с.

3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. — В 10-ти т.: Т. 1. Механика. — 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1988. — 216 с.

4. *Лінник О. П., Моісеєнко Н. В., Євтєєв В. М., Теплицький І. О., Семеріков С. О.* Об'єктно-орієнтоване моделювання у підготовці майбутніх учителів фізики // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного університету: Серія педагогічна. Випуск 12: Проблеми дидактики фізики та шкільного підручника фізики в світлі сучасної освітньої парадигми. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ, 2006. — С. 127–130.

5. *Румянцев А. Ю., Серветник Т. А.* Астрономия: Учебно-методическое пособие для преподавателей астрономии, студентов педагогических вузов и учителей средних учебных заведений / Под ред. А.В. Усовой. — Магнитогорск: МаГУ, 2003. — 309 с.

6. *Соловйов В. М., Семеріков С. О., Теплицький І. О.* Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2000. — № 2. — С. 28–32.

7. *Струве О., Линдс Б., Пилланс Э.* Элементарная астрономия. — М.: Наука, 1964. — 468 с.

8. *Теплицький І. О.* Елементи комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. — Кривий Ріг: КДПУ, 2005. — 208 с.

9. *Теплицький І. О., Семеріков С. О.* Комп'ютерне моделювання механічних рухів у середовищі електронних таблиць // Фізика та астрономія в школі. — 2002. — № 5. — С. 40–46.

10. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 267 с.

11. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. — М.: Мир, 1969. — 624 с.