С.О. СЕМЕРІКОВ, І.О. ТЕПЛИЦЬКИЙ
Криворізький державний педагогічний університет

ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕДЮВАННЯ У ШКОЛІ ТА ПЕДАГОГІЧНОМУ ВНЗ

Актуальною проблемою дидактики як загальноосвітньої, так і вищої школи був і залишається розвиток творчих здібностей молоді. Останнім часом у цьому аспекті великі надії покладаються на впровадження в процес навчання нових інформаційних технологій. Аналіз педагогічних програмних засобів із багатьох навчальних предметів показує, що більшість із них повністю або частково являють собою програмно реалізовані заміни реальних об'єктів, які дозволяють різнобічно відобразити найбільш суттєві властивості досліджуваних явищ, тобто є комп'ютерними моделями.

В Центрально-Міській гімназії м. Кривого Рогу протягом останніх десяти років з учнями 9–11 класів вивчається факультативний курс основ комп'ютерного моделювання [1]. Він передбачає ознайомлення школярів з основними принципами побудови й дослідження математичних моделей [2], навчання найбільш розповсюджених прийомів і методів такої роботи [3], формування культури ведення дослідницької діяльності засобами ЕОТ. Навчальний матеріал включає широкий спектр задач з ряду навчальних дисциплін.

У якості середовища для моделювання використовуються електронні таблиці (ЕТ), які дозволяють виводити на екран результати досліджень у вигляді таблиць і дають змогу швидко й легко одержувати графіки залежностей між характеристиками досліджуваного об'єкта (явища, процесу). Перехід до ЕТ, значно спрощуючи процедуру підготовки задачі до її розв'язування за допомогою комп'ютера, дозволяє з прийнятними витратами часу і мінімальними зусиллями провести необхідні підготовчі етапи через свідомість учнів. До того ж, за чинною програмою з інформатики ознайомлення з прийомами роботи в ЕТ значно випереджає у часі вивчення програмування, що дозволяє розпочати курс моделювання раніше за програмування і незалежно від нього [4]. Поданий нижче матеріал на прикладі розв'язування задачі математичної екології покликаний проілюструвати нашу методику.

Розглянута учнями раніше одновидова популяція є надзвичайно спрощеною та ідеалізованою екологічною системою. Насправді ж популяції у природі існують, а точніше, співіснують у вигляді співтовариств різних видів, які знаходяться у різноманітних стосунках. Тому цілком природним і логічним видається дослідження наступних за складністю моделей співіснування *двох* популяцій [5]. Зазначимо тут, що класифікація відповідних математичних моделей здійснюється згідно типу міжвидових стосунків: “хижак–жертва”, “паразит–хазяїн”, конкуренція за обмежені спільні ресурси існування тощо.

Нагадуємо учням, що математична екологія як наука почала формуватися у 20–30-х роках XX століття. Визначальною подією для подальшого її розвитку стала поява в 1931 р. книги відомого італійського математика, засновника сучасної математичної екології Віто Вольтерра “Математична теорія боротьби за існування”. В цій книзі вперше були систематично розглянуті математичні моделі, що описують відношення між *двома* біологічними видами. Один із розділів книги був присвячений аналізу взаємин між хижаками й жертвами. Ці драматичні відносини ми й покладемо в основу майбутньої роботи.

Метою дослідження поставимо питання про характер зміни чисельності представників кожного виду з плином часу.

Постановка задачі і побудова математичної моделі

Нехай у ставку разом із карасями (жертвами) співіснують щуки (хижаки).

<u>*Припущення* 1.</u> За умови, що хижаки і жертви ізольовані одні від одних, а зовнішні обмеження на ресурси середовища відсутні, динаміку кожної популяції для достатньо малих проміжків часу Δt можна описати законом Мальтуса:

$$\frac{\Delta N_{ж}}{\Delta t} = k_{ж} N_{ж}$$
$$\frac{\Delta N_{x}}{\Delta t} = -k_{x} N_{x}.$$

Знак “–” означає, що ізольовані від жертв (їжі) хижаки матимуть від’ємний приріст, тобто їхня чисельність із плином часу зменшуватиметься і вони вимиратимуть.

Але якщо хижаки й жертви опиняються поруч, зміни чисельності обох популяцій стають взаємозалежними. Для такої ситуації приймемо

<u>*Припущення* 2</u>. Швидкість приросту жертв буде залежати від розмірів популяції хижаків, причому вона буде зменшуватись із зростанням чисельності хижаків. Для швидкості приросту хижаків має справджуватись протилежне: швидкість приросту хижаків збільшуватиметься із зростанням чисельності жертв.

Оскільки хижак з’їдає жертву лише при зустрічі з нею, приймемо наступне

<u>*Припущення* 3.</u> Число зустрічей пропорційне кількостям як жертв $N_{ж}$, так і хижаків $N_{х}$, тобто добуткові $N_{ж}\cdot N_{х}$.

Для опису динаміки популяцій В. Вольтерра запропонував таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta N_{ж}}{\Delta t} = k_{рж} N_{ж} - k_{пж} N_{ж} N_{х} \\ \dfrac{\Delta N_{х}}{\Delta t} = -k_{сх} N_{х} + k_{рх} N_{ж} N_{х} \end{cases} \qquad (1)$$

Тут $N_{ж}$, $N_{х}$ – чисельності жертв і хижаків у деякий момент часу;

Коефіцієнтам моделі надамо такого змісту:

$k_{рж}$ – коефіцієнт розмноження жертв;

$k_{пж}$ – коефіцієнт поїдання жертв хижаками;

$k_{рх}$ – коефіцієнт розмноження хижаків;

$k_{сх}$ – коефіцієнт смертності хижаків.

Завдання. Поясніть, чому вирази, пропорційні добутку $N_{ж}\cdot N_{х}$, входять до рівнянь системи (1) з протилежними знаками?

Перепишемо наведену систему у формі скінчених різниць:

$$\begin{cases} \Delta N_{ж} = N_{ж}\left(k_{рж} - k_{пж} N_{х}\right)\Delta t \\ \Delta N_{х} = -N_{х}\left(k_{сх} - k_{рх} N_{ж}\right)\Delta t \end{cases} \qquad (1^*)$$

Система рівнянь (1) *або* (1*) *є математичною моделлю динаміки співіснування двох біологічних видів на основі відносин типу* "*хижак – жертва*". У математичній екології ця модель відома під назвою ***"модель Вольтерра – Лотки"***.

<u>*Припущення* 4.</u> Коефіцієнти моделі ($k_{рж}$, $k_{пж}$, $k_{рх}$, $k_{сх}$) не залежать від того, яку саме частину популяції ми бажаємо описати. Таку популяцію називають *просторово однорідною*.

Дійсно, у випадку неоднорідного розподілу хижаків і жертв може скластися ситуація, коли частина хижаків знаходяться дуже далеко від жертв ($k_{пж}$ малий), а решта – поблизу ($k_{пж}$ великий). В такому разі опис кожної популяції системою рівнянь (1) стає неможливим. Отже, будемо вважати, що *коефіцієнти моделі є сталими в просторі і не змінюються з плином часу*.

Модель Вольтерра–Лотки не має точних аналітичних розв'язків, тобто виразити $N_{х}(t)$ і $N_{ж}(t)$ через відомі елементарні функції неможливо. Тому єдине, що залишається в означеній ситуації – це скористатися чисельним розв'язуванням. Для нас цей факт є визначним: адже в попередніх задачах (моделях) аналітичні розв'язки існували, проте ми наполегливо й планомірно освоювали чисельний метод. Виявляється, що недарма.

То ж підготуємо таблицю за таким зразком:

	A	B	C	D	E	F	G
	t	$N_{ж}$	$N_{х}$	$\Delta N_{ж}$	$\Delta N_{х}$	*Дано:*	
						$k_{р\ ж} =$	
						$k_{р\ х} =$	
						$k_{п\ ж} =$	
						$k_{с\ х} =$	
						$N_{0\ ж} =$	
						$N_{0\ х} =$	
						$\Delta t =$	
	...	...	...	...	...		

Комірки другого рядка цієї таблиці (для моменту часу $t = 0$) матимуть такий уміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=$G$6
C2	=$G$7
D2	=B2*($G$2-$G$4*C2)*$G$8
E2	=-C2*($G$5-$G$3*B2)*$G$8

Заповнимо третій рядок, який далі скопіюємо у наступні $n - 2$ рядки, де $n = t_{моделювання} / \Delta t$:

комірки	формули
A3	=A2+$G$8

B3	=B2+D2
C3	=C2+E2
D3	=B3*($G$2-$G$4*C3)*$G$8
E3	=-C3*($G$5-$G$3*B3)*$G$8

Тепер можна розпочати

Обчислювальний експеримент

1. Уведемо такі вхідні дані: $k_{рж} = 5$; $k_{рх} = 0,001$; $k_{пж} = 0,002$; $k_{сх} = 10$; $N_{0\ ж} = 15000$; $N_{0\ х} = 2500$; $\Delta t = 0,01$. З метою отримати декілька періодів візьмемо кількість рядків $n = 402$.

Результати моделювання подані на рис. 3.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	$N_ж$	$N_х$	$\Delta N_ж$	$\Delta N_х$	***Дано:***	
2	0	15000	2500	0	125	$k_{р\ ж} =$	5
3	0,01	15000	2625	-38	131	$k_{р\ х} =$	0,001
4						$k_{п\ ж} =$	0,002
5						$k_{сх} =$	10
6						$N_{0\ ж} =$	15000
7						$N_{0\ х} =$	2500
8	0,06	14413	3526	-258	147	$\Delta t =$	0,01
9	0,07	14175	3472	-276	145		
10	0,08	13899	3617	-311	141		
11	0,09	13588	3758	-342	135		
...	...	...	...	...	...		

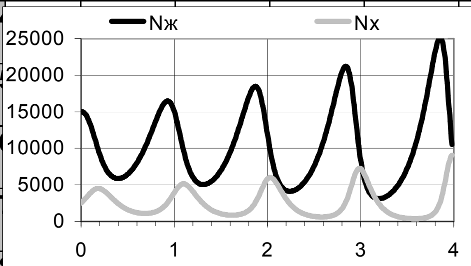


Рис. 3.1.

З таблиці й графіків на рис. 3.1. видно, що динаміка чисельностей хижаків і жертв являє собою коливальний процес із практично однаковими періодами (переконайтесь за таблицею) та зростаючими амплітудами.

Завдання.

- Поясніть, чим обумовлене зростання амплітуд.
- Як, на вашу думку, пояснити, чому фази цих коливань зсунуті?

4. Дослідимо вплив параметрів моделі на перебіг процесу. Загальноприйнятим тут є такий підхід: усі параметри моделі, крім одного, фіксуються, а незафіксованому параметру надають різних значень. Нехай для початку таким параметром буде $N_{0ж}$.

4.1. Зменшимо $N_{0ж}$, наприклад, від 15000 до 13000.

Чи змінився помітним чином період коливань?

4.2. Стосовно амплітуд коливань $N_х$ (кількості хижаків) і $N_ж$ (кількості жертв) зазначимо, що тепер вони стали меншими.

Для того, щоб мати можливість *проаналізувати* результати впливу $N_{0ж}$ на амплітуди цих коливань, будемо зменшувати $N_{0ж}$ із певним кроком, наприклад, 2000, тобто надаватимемо $N_{0ж}$ значень 15000, 13000, 11000, 9000, 7000, 5000. При цьому спостерігаємо, що амплітуди спочатку спадають (до 11000 та 9000 відповідно), а потім зростають. Одразу виникають принаймні два питання:

а) при якому значенні $N_{0ж}$ амплітуди коливань чисельності хижаків і жертв набувають мінімумів?

б) якими є ці мінімальні значення?

Узявши $N_{0ж} = 10000$, ми одразу одержуємо обидві відповіді і, крім того, принципово важливий результат: *модель Вольтерра – Лотки передбачає рівноважний стан*.

Тут слід відверто зізнатися, що нам просто пощастило. Якби значення параметра $N_{0ж}$, що відповідає рівноважному стану, знаходилось не в точці 10000, то пошуки його шляхом обчислювальних експериментів могли б виявитись досить тривалими.

Так само можна було б експериментувати з параметром $N_{0х}$.

Та виявляється, що в цьому немає ніякої необхідності. Нагадуємо учням, що з попередніх занять вони вже мають певний досвід аналітичного пошуку рівноважних станів. Пропонуємо ним скористатись. Оскільки рівноважному стану відповідає $\Delta N_ж = 0$ і $\Delta N_х = 0$, то з (1*) одразу видно, що нулю повинні дорівнювати вирази в дужках:

$$k_{рж} - k_{пж} N_х = 0 \text{ і } k_{сх} - k_{рх} N_ж = 0,$$

звідки для будь-якого, (в тому числі й початкового моменту t=0)

$$N_{0х} = \frac{k_{рж}}{k_{пж}} \quad \text{і} \quad N_{0ж} = \frac{k_{сх}}{k_{рх}}. \tag{2}$$

Залишається виконати перевірку:

$$N_{0\,х} = 5 / 0{,}002 = 2500, \quad N_{0\,ж} = 10 / 0{,}001 = 10000.$$

Виявляється, що рівноважні стани повністю визначаються значеннями коефіцієнтів моделі $k_{рж}$, $k_{пж}$, $k_{сх}$ і $k_{рх}$. Тепер слід було б сказати, що нам пощастило, причому вдвічі – перший раз при знаходженні $N_{0ж} = 10000$ і другий раз тим, що $N_{0х}$ було саме 2500, а не якимось іншим. Напевно, ви вже зрозуміли, що слово "пощастило" треба було б узяти в лапки, тому що значення всіх параметрів моделі були запропоновані авторами, і, як ви тепер здогадуєтесь, не випадково.

При одержанні розв'язку (2) передбачалося, що чисельності $N_х$ і $N_ж$ не змінюються з часом ($\Delta N_ж = 0$ і $\Delta N_х = 0$). Це один із багатьох розв'язків моделі – *стаціонарний*.

5. Залишився не з'ясованим той факт, що періоди коливань чисельності хижаків і жертв, по-перше, однакові між собою і, по-друге, ці періоди не залежать від тих значень, що їх набувають $N_х$ і $N_ж$ у ході своєї зміни.

Звернемо тут увагу на наступне. Модель Вольтерра – Лотки була нами взята в готовому вигляді і виявилася досить складною. Коли попередні моделі складали ми самі, то йшли від найпростіших версій до все більш ускладнених, а отже й більш узагальнених. Такий метод побудови міркувань (від часткового до загального) зветься *індуктивним*. Часто, однак, для аналізу складної залежності виявляється доцільним іти в протилежному напрямі – у бік спрощення моделі (системи рівнянь), тобто розглядати окремі спрощені випадки. Відповідний метод міркувань (від загального до конкретного) зветься *дедуктивним*. До речі, в нашій ситуації це чи не єдиний шлях щось зрозуміти, не вдаючись до чисельних методів.

5.1. То ж припустимо, що система "хижак – жертва" якимось чином (не має значення, яким саме) виявилась поблизу рівноваги. При цьому чисельності хижаків і жертв мало відрізняються від своїх стаціонарних значень:

$$N_х = k_{рж}/k_{пж} + n$$
$$N_ж = k_{сх}/k_{рх} + x,$$

де n та x малі у порівнянні з $N_х$ і $N_ж$. Якщо ці вирази підставити в (1) і знехтувати добутком nx внаслідок його малості у порівнянні з рештою членів, то одержуємо

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{k_{сх}}{k_{пж}} k_{рж} n\,; \\[2ex] \dfrac{\Delta n}{\Delta t} = -\dfrac{k_{пж}}{k_{сх}} k_{пж} x. \end{cases} \qquad \underline{\mathbf{????}}\ (3)$$

Уведемо нову змінну $\upsilon = \frac{k_{сх}}{k_{пж}} k_{рж} n$. Після відповідної заміни система (1) набуває такого спрощеного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon; \\ \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = -k_{сх} k_{пж} x. \end{cases} \tag{4}$$

5.2. Якби ми нічого не знали про модель Вольтерра–Лотки, і перед нами було б поставлене питання: "Що саме описує система рівнянь (4), де $k_{сх}$ і $k_{пж}$ – деякі постійні величини?", то рано чи пізно у цій системі ми б, напевно, впізнали рівняння, що описують рух вантажу на пружині за умови, що x – зміщення вантажу від положення рівноваги, υ – швидкість вантажу, а вираз $k_x \cdot k_{пж}$ дорівнює відношенню жорсткості пружини до маси вантажу, тобто ω^2 квадратові циклічної частоти. Звідси випливає, що система (4) має такий самий розв'язок, як і задача про коливання вантажу на пружині.

Збіг рівнянь, що описують коливання пружинного маятника і чисельність особин у системі "хижак – жертва" дозволяє стверджувати, що кількості хижаків і жертв повинні змінюватись за гармонічним законом із періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_{сх} k_{пж}}}. \tag{5}$$

Якщо далі пригадати, що коливання швидкості маятника випереджають коливання координати на чверть періоду (на π/2 рад), то слід зробити висновок, що коливання чисельності хижаків також мають випереджати коливання чисельності жертв на чверть періоду.

5.3. Таким чином, розв'язком системи рівнянь Вольтерра–Лотки є коливання чисельності хижаків і жертв, зсунуті одне відносно одного за фазою, їх період $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_{сх} \cdot k_{пж}}}$. Звісно, коли амплітуда цих коливань зростатиме, вони перестануть описуватись законом косинуса або синуса, тобто перестають бути гармонічними, що видно з графіків на рис. 3.1, проте період має залишатися незмінним.

Завдання.

- Поясніть, чому період коливань не залежить від $N_х$ і $N_ж$.

- Обчисліть період T згідно (5) і порівняйте одержане значення з тим, що дає таблиця на рис. 3.1 і де зображено не менше трьох періодів. За результатами порівняння зробіть висновки.

5.4. Завершимо експериментальне дослідження моделі Вольтерра–Лотки побудовою й аналізом графіків зміни чисельності обох популяцій у залежності від часу згідно спрощеної системи (4). Будемо мати на увазі, що система (1) автоматично переходить до спрощеного вигляду за умови, визначеної у п. 5.1, тобто коли початкові кількості особин кожного виду N_x і $N_{ж}$ значно менші від своїх стаціонарних значень (2500 і 10000 відповідно).

5.4.1. У зв'язку з цим візьмемо для них такі, наприклад, значення: $N_{0x} = 2520$ і $N_{0ж} = 10040$. Результат, поданий на рис. 3.2, виявляється надзвичайно невиразним (перевірте!).

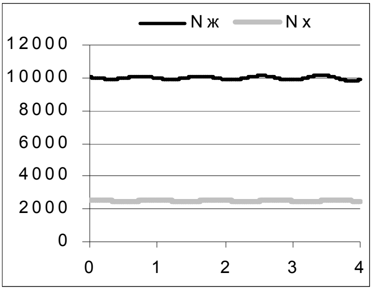
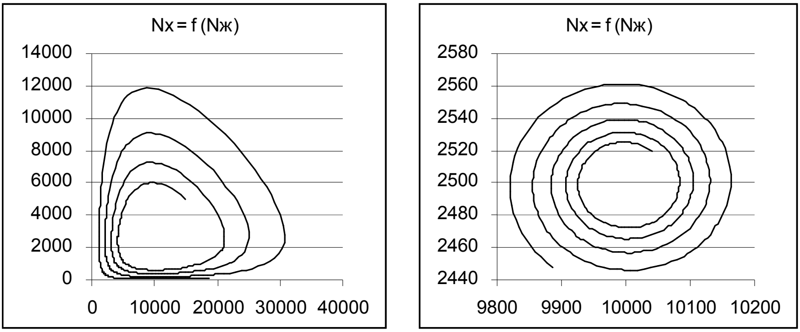


Рис. 3.2.

Причиною є те, що на одній і тій самій вісі ординат ми вирішили показати несумірні пари чисел 2500 і 20 та 10000 і 40.

5.4.2. У спрощеній системі (4) коливання набувають гармонічного характеру, але результат спроби безпосередньо побачити цей факт на графіку, виявився не дуже переконливим (рис. 3.2).

Щоб отримати більш переконливу інформацію про досліджуваний процес, зобразимо його на фазовій площині в координатах $N_{ж}$, N_x, що, як ми бачили, є аналогами зміщення x і швидкості його зміни υ, тобто виведемо на екран графіки залежності $N_x = f(N_{ж})$ – рис. 3.3.



а) $N_{0ж} = 15000$; $N_{0x} = 5000$ *б*) $N_{0ж} = 10040$; $N_{0x} = 2520$

Рис. 3.3.

З рис. 3.3 *а* видно наступне:

– процес дійсно є коливальним;
– амплітуда коливань постійно зростає;
– згущення траєкторії зображуючої точки біля координатних осей обумовлене тим, що величини $N_ж$ і N_x за своєю природою є додатними числами і не можуть набувати від'ємних значень, а тому “вимушені” групуватись у вузьких смугах біля осей.

У порівнянні з рис. 3.1 ніяких принципово нових відомостей тут немає, а от фазовий портрет процесу, поданий на рис. 3.3 *б*, повністю усуває недоліки рис. 3.2 *а*.

Завдання.

◦ Проаналізуйте рис. 3.3 *б*.

◦ За рис. 3.1 з'ясуйте, чи утворюють послідовності максимумів функцій $N_ж = N_ж(t)$ і $N_x = N_x(t)$ прогресії. Якщо так, то які саме: арифметичні чи геометричні?

6. І все ж погодьтесь, не дуже віриться, що система “хижак – жертва” є таким своєрідним генератором незатухаючих коливань!

Завдання.

◦ Висловіть свої міркування стосовно джерела енергії, за рахунок якої можуть здійснюватись такі коливання (до того ж із зростаючими амплітудами). Тут слід зробити деякі узагальнення.

◦ За яких умов, на вашу думку, може відбутись затухання цих коливань?

◦ Запропонуйте додаткові версії моделі, пов'язані з виловом жертв (карасів) та жертв і хижаків (карасів і щук) одночасно, розробіть план таких досліджень і реалізуйте його.

Висновки

1. Модель Вольтерра–Лотки передбачає процеси, що відбуваються лише в просторово однорідних системах і нічого не говорить про можливий розвиток подій у випадках просторових неоднорідностей. Тому вона хоч і дає до деякої міри адекватний розв'язок, але є досить грубою і дозволяє утворити лише "усереднене розуміння" того, як із плином часу змінюється кількість елементів системи.

2. У методі моделювання широко використовують два принципово різні підходи, що їх коротко можна визначити так:

1) математичне моделювання;

2) комп'ютерне *імітаційне* моделювання.

Прикладом першого з цих підходів є використання моделі Вольтерра–Лотки для вивчення взаємин між хижаками й жертвами.

При такому підході складається математична модель і виконується аналітичне або чисельне її розв'язування, яке часто супроводжується графічними побудовами. Тут комп'ютер використовується здебільшого як високоефективний обчислювальний засіб. Саме у такий спосіб ми здійснили описане вище дослідження.

Другий підхід – комп'ютерне імітаційне моделювання системи. Воно дозволяє одержати більш докладне уявлення про процеси з урахуванням просторових неоднорідностей, але потребує значно складніших алгоритмів і більших витрат комп'ютерного часу. Розв'язуючи подібні задачі, дослідники активно використовують якісний експрес-аналіз, моделюють систему у спеціалізованих сучасних середовищах на спеціалізованих комп'ютерах, розробляють "правила гри" і розмірковують над тим, які з цих "правил" найбільш повно відповідають реальній системі. У цих моделях дуже часто значенням характеристик процесу надають випадкових значень, і такі моделі прийнято називати імітаційними.

3. Виявляється, що з не меншим успіхом моделлю Вольтерра–Лотки можна скористатися і для з'ясування питань про кінетику (тобто розвиток процесу в часі) хімічних та ядерних реакцій. Тут частинки реагентів унаслідок дифузії рухаються, зустрічаючись одна з одною, вступають у реакції, в результаті яких вони "гинуть", продукуючи нові частинки і т. ін. Розмноженню риб відповідає, наприклад, ланцюгова ядерна реакція, їхній загибелі – поглинання частинок у реакторі. Для розв'язання таких задач зазвичай використовують рівняння, схожі на рівняння системи (1) і дістають попередні грубі й усереднені відомості про виучуваний процес. Схожі результати з'являються і при вивченні багатьох інших конкуруючих взає-

мообумовлених процесів.

Одним із суттєвих покажчиків (критеріїв) розвитку творчого мислення засобами комп'ютерного моделювання ми вважаємо здатність учнів після прочитання, наприклад, науково-популярного журналу 1) визначити ті статті, які б могли стати сюжетною основою для побудови та вивчення відповідної комп'ютерної моделі; 2) скласти орієнтовний план подальшої роботи; 3) обговорити окремі етапи цієї роботи з колегами (іншими учнями) та з фахівцями (вчителями-предметниками або при необхідності та при можливості – з науковцями); 4) періодично доповідати про хід власних досліджень та про виникаючі проблеми; 5) одержати запланований кінцевий результат; 6) здійснити спробу вийти за межі розв'язуваної задачі (сформулювати більш загальну задачу, розглянути деякі можливі й цікаві версії тощо).

Розмаїтість тематики учнівських досліджень доводить, що робота з моделями здатна реально впливати на змістову частину багатьох навчальних предметів і суттєво урізноманітнювати методи їх вивчення.

Список літератури

1. Теплицький І.О. Комп'ютерне моделювання в школі як засіб розвитку творчого мислення учнів // Рідна школа. – 2000. – №9. – С. 63–66.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 312 с.
3. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Физматлит, 1994. – 192 с.
4. Соловйов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї: – 2000. – №4.
5. Матюшкин-Герке А. Учебно-прикладные задачи в курсе информатики // Информатика и образование. – 1992. – № 3–6.